Apuntes de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Licenciatura en Matemáticas

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN [1]

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS

1. Potencial gravitacional de distribuciones de masas discretas y continuas (no imprescindible).
2. Teorema fundamental del Cálculo y teorema de derivación de una integral paramétrica.
3. Integral de superficie. Teorema de la divergencia (no imprescindible).

Estos conocimientos se pueden consultar, por ejemplo, en las referencias siguientes (es posible que el alumno pueda usar otras que ya conoce):

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1960.
2. M. Braun. Differential Equations and Their Applications. Springer-Verlag, New York, 1.983.
3. C.C. Lin y L.A. Segel. Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciencies. SIAM, Philadelphia, 1988.
4. I. Peral : Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales.
5. Addison-Wesley, Wilmington, 1995. http://mathworld.wolfram.com/

[1] A. Cañada, Febrero 2007, EDPMAT

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo básico de este capítulo es que el alumno conozca el origen de las EDP, tanto en su relación con otras disciplinas matemáticas como en el importante papel que juegan en las aplicaciones a diversas materias, como Física, Biología, Ingeniería, etc.
Comenzamos con problemas relacionados con el potencial gravitacional.
El potencial gravitacional $V(x)$ originado en el punto $x \in \mathbb{R}^3$ por una masa m localizada en un punto $\xi \in \mathbb{R}^3$ viene dado por

$$V(x) = -G \, \frac{m}{\|x - \xi\|}$$

donde G es la constante de gravitacional universal y $\| \cdot \|$ denota la norma euclídea.
La fuerza gravitacional $g(x)$ viene dada por $g(x) = -\nabla V(x)$, donde ∇V indica el gradiente de la función V. Como sabemos,

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_3} \right)$$

En este caso

$$g_i(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = -Gm \frac{x_i - \xi_i}{\|x - \xi\|^3}$$

Trivialmente se comprueba que el potencial es una función armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}$, esto es, que verifica la **ecuación de Laplace**

$$\Delta V(x) = 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\} \tag{1}$$

Aquí, ΔV es el laplaciano de la función V. Como sabemos

$$\Delta V(x) = \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_3^2}$$

La llamada ecuación de Laplace aparece en la obra de Laplace (1749-1827) titulada Mécanique Céleste en 1799, aunque era conocida con anterioridad.
El potencial gravitacional $V(x)$ debido a un número finito de masas $m_1, ..., m_k$ localizadas en los puntos $\xi_1, ...\xi_k$ de $\mathbb{R}^3$ se define de manera análoga como

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{\|x - \xi_i\|}$$

Trivialmente V es armónica en $R^3 \setminus \{\xi_1, ..., \xi_k\}$.
Lo anterior se refiere a distribuciones discretas y finitas de masas. Un salto cualitativo importante se da cuando se trata de definir el potencial gravitacional de una distribución continua de masa que se encuentra situada en el espacio euclídeo

tridimensional. Aquí la suma finita se transforma en una suma continua, dando lugar a una integral en el correspondiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Más concretamente si tenemos un cuerpo (subconjunto abierto y acotado) de $\mathbb{R}^3$ con una distribución de masa dada por la función de densidad $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, el potencial gravitacional se define como

$$V(x) = -G \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} \, d\xi \tag{2}$$

La integral anterior tiene un integrando con denominador cero si $x = \xi$. Así pues la existencia de $V(x)$ no es trivial si $x \in \overline{\Omega}$. Bajo condiciones muy amplias (ρ medible y acotada) se demostrará en el capítulo III que $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y que

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{G\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} \, d\xi$$

Sin embargo, se mencionarán también ejemplos en este capítulo que ponen de manifiesto que, aunque ρ sea continua, V no tiene que ser necesariamente de clase $C^2(\Omega)$. Trivialmente $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ y

$$\Delta V(x) = 0, \ \forall \ x \notin \overline{\Omega} \tag{3}$$

Demostraremos en el capítulo III que si $\rho \in C^1(\Omega)$ y además es acotada, entonces $V \in C^2(\Omega)$ y

$$\Delta V(x) = 4\pi G \rho(x), \ \forall \ x \in \Omega \tag{4}$$

Esta es la conocida **ecuación de Poisson**(1781-1840). Si esta ecuación se plantea en dimensión uno, es decir,

$$V''(x) = c\rho(x), \ c \in \mathbb{R},$$

el conjunto de las soluciones se obtiene de manera inmediata integrando dos veces. Como veremos en el capítulo II, la situación se complica significativamente para dimensiones mayores o iguales que 2.
Como curiosidad, puede demostrarse fácilmente que

$$\Delta_x \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} = 0, \ \forall x \neq \xi$$

con lo que, para obtener las derivadas de segundo orden de V en Ω, no puede intercambiarse la derivación con la integración en la fórmula (2). *Esto le suele llamar la atención a los alumnos. No porque crean que siempre se pueden intercambiar ambas operaciones (ya nos encargamos los matemáticos de ponerles suficientes ejemplos patológicos al respecto) sino porque este es un ejemplo muy natural surgido de la Física donde se pone de manifiesto que el rigor matemático es crucial si se quieren hacer las cosas bien.*

Las disquisiciones anteriores motivan el estudio de la existencia de soluciones radiales no triviales de la ecuación de Laplace $n-$ dimensional (1): soluciones de la forma $V(x) = v(\|x - \xi\|)$. En este caso se comprueba fácilmente que v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0 \tag{5}$$

donde $r = \|x - \xi\|$. Es fácil demostrar que una base de las soluciones de (5) está formada por las funciones $\{1, \ln r\}$ si $n = 2$ y $\{1, r^{2-n}\}$ si $n \geq 3$. Se llega así de manera natural al concepto de solución fundamental de la ecuación de Laplace (salvo constantes) en $\mathbb{R}^n$

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \ln \|x - \xi\|, \text{ si } n = 2, \\ \\ \frac{1}{2-n}\|x - \xi\|^{2-n}, \text{ si } n > 2. \end{cases} \tag{6}$$

Como su nombre indica, desempeñará un papel importante en el estudio de ecuaciones elípticas en el capítulo III.

Nos ocupamos a continuación de la **ecuación de la difusión**. La deduciremos para una situación en dinámica de poblaciones, comenzando con el caso unidimensional. Para ello, sea una población formada por una especie que se desplaza en el espacio euclídeo unidimensional. Representemos por $u(x,t)$ la densidad de población de la especie dada, en el punto de abscisa x y en el tiempo t. Supongamos que la población se mueve dentro de un intervalo, para x entre dos valores dados a y b. Teniendo en cuenta el concepto de integral definida, la población total en el tiempo t para x variando entre a y b, vendrá dada por una expresión (salvo constantes positivas) de la forma $\displaystyle\int_a^b u(x,t)\ dx$. Asumamos, además, que hay un desplazamiento de la población en la dirección positiva de la recta real (por $x = a$ entran individuos y por $x = b$ salen), y que este desplazamiento viene dado por una función $\phi(x,t)$, que representa el flujo de la población u.
La derivación de la llamada **ecuación de la difusión**, para el caso que nos ocupa (dinámica de poblaciones), se basa en la aplicación de dos tipos de leyes fundamentales:
- Una ley de conservación, aplicada al índice (o tasa) de crecimiento de la población.
- Una ley que relaciona el flujo de población desde las partes con más densidad de la misma a las de menos, con la tasa de variación de la citada población respecto de la variable espacial. Aquí usaremos la ley de A. Fick, fisiólogo, que puede considerarse como el fundador de la teoría clásica de la difusión, hace más de cien años.

La ley de conservación que puede aplicarse en este caso, es la siguiente: para cualquier intervalo $[a,b]$, el índice de crecimiento de la población respecto del tiempo t, vendrá dado por el flujo de población en la sección a menos el flujo de población en la sección b, o lo que es lo mismo, el flujo total de la población a través de la frontera del intervalo (a,b). Esto se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\ dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) \tag{7}$$

Si las funciones u y ϕ son suficientemente regulares (no debe preocuparnos este aspecto en la deducción de la ecuación) entonces:

$$a)\ \frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\ dx = \int_a^b u_t(x,t)\ dx$$

$$b)\ \phi(a,t) - \phi(b,t) = -\int_a^b \phi_x(x,t)\ dx$$

donde los subíndices indican las derivadas parciales respecto de la correspondiente variable.
En suma, tenemos que

$$\int_a^b \left[u_t(x,t) + \phi_x(x,t)\right]\ dx = 0$$

para cualquier intervalo $[a,b]$. Por tanto, se debe tener

$$u_t(x,t) + \phi_x(x,t) = 0, \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ t > 0 \tag{8}$$

Esto es una ley de conservación expresada por una ecuación en derivadas parciales de primer orden.
En la expresión anterior aparecen dos funciones, u y ϕ, y una sola ecuación. La experiencia sugiere que ambas deben estar relacionadas. En nuestro caso, si se observan empíricamente los movimientos de las poblaciones, generalmente sucede que los individuos se mueven desde las partes de densidad alta a las de densidad baja de una forma proporcional al gradiente de la población (respecto de la variable espacial), y con signo opuesto al de éste. En efecto, si $u_x(x_0,t_0) > 0$, esto significa que, fijado el tiempo t_0, la función u, como función de la variable x es creciente en un entorno del punto x_0. Por tanto, hay más densidad de población a la derecha de x_0 que a la izquierda y, lógicamente, el desplazamiento de los individuos se produce hacia la izquierda de x_0. Así podemos asumir que

$$\phi(x,t) = -Du_x(x,t) \tag{9}$$

que es la mencionada Ley de Fick (D es una constante positiva, llamada constante de difusión, que depende de la situación particular que estemos tratando).
Combinando (8) con (9) se obtiene

$$u_t(x,t) - Du_{xx}(x,t) = 0, \tag{10}$$

que es el modelo clásico para el estudio de una población cuando se admite difusión unidimensional. A esta ecuación se le llama habitualmente en Física **ecuación del calor**, puesto que modela muchos tipos de fenómenos relacionados con la distribución y evolución de la temperatura en los cuerpos, y en general fenómenos con difusión. Es además el representante típico de las ecuaciones de tipo parabólico.
En la deducción del modelo anterior no se ha tenido en cuenta la influencia que en la evolución de la población pueden tener otros parámetros, tales como el índice de natalidad o mortalidad de la especie, condiciones ambientales externas (por ejemplo condiciones climáticas, que influyan en el crecimiento de la población), etc. En general, esto se expresa por una función $f(x,t,u)$, de tal manera que una ecuación más general que (10) es

$$u_t(x,t) - Du_{xx}(x,t) = f(x,t,u) \tag{11}$$

que se conoce con el nombre de **ecuación del tipo reacción-difusión**, de gran importancia no sólo en Biología sino también en Física, Química y otras Ciencias.
Vamos a intentar ahora trasladar las ideas anteriores al caso n-dimensional. Esto no es tarea fácil, como sabemos muy bien aquellos que nos dedicamos a la enseñanza del análisis matemático. El análisis de funciones de varias variables reales difiere sensiblemente, tanto en las ideas, como en los resultados, del análisis de funciones de una variable real. Baste citar, por ejemplo, el concepto de derivabilidad de una función en un punto o los resultados relacionados con los teoremas integrales del análisis vectorial (Barrow, Green, Stokes, etc.).
En primer lugar, la función de densidad de la población es ahora una función de $n+1$ variables: n variables para el espacio y una para el tiempo. Así, en general tenemos $u(x,t)$ para dicha función de densidad, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$. Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$. En este caso, la ley de conservación (7) se expresa como

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)\ dx = -\int_{\partial\Omega} < \phi(s,t), n(s) > \ ds, \tag{12}$$

donde $\partial\Omega$ significa la frontera topológica de Ω, $\displaystyle\int_{\Omega} u(x,t)\ dx$ representa la integral múltiple correspondiente, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} < \phi(s,t), n(s) > \ ds$ es una integral de superficie, que expresa el flujo de población a través de la frontera de Ω y $n(s)$ es el vector normal exterior a la superficie (o hipersuperficie) $\partial\Omega$ en el punto s. En el caso unidimensional, la frontera topológica de $\Omega = (a,b)$ está formada por el conjunto $\{a,b\}$. En $s=a$ la normal exterior es el vector unidimensional -1 y en $s=b$, la normal exterior es el vector unidimensional 1.
Como anteriormente, la ecuación integral (12) puede escribirse, si las funciones que aparecen en ella son regulares, como una ecuación en derivadas parciales. Para ello, lo primero que debemos hacer es escribir la integral de superficie que aparece en la relación anterior, como una integral múltiple. Esto se puede hacer, cuando el

dominio Ω considerado es también bueno, usando el Teorema de la Divergencia, resultado fundamental del análisis vectorial, del cual se deduce la expresión

$$\int_{\partial\Omega} < \phi(s,t), n(s) > \ ds = \int_{\Omega} div_x \ \phi(x,t) \ dx$$

donde si el flujo $\phi(x,t) = (\phi_i(x,t)), 1 \leq i \leq n$, la divergencia de ϕ, respecto de la variable x, se define como

$$div_x \ \phi(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i(x,t)}{\partial x_i}$$

Aplicando este teorema y usando las mismas ideas que para el caso unidimensional, llegamos a la ecuación

$$u_t(x,t) + div_x \ \phi(x,t) = 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \ t > 0, \tag{13}$$

que es la versión general de (8).
Por último, la ley de Fick multidimensional, afirmaría ahora que el vector flujo $\phi(x,t)$ es directamente proporcional (en sentido negativo) al gradiente de la población respecto de la variable espacial; es decir,

$$\phi(x,t) = -D \ \nabla_x u(x,t),$$

donde $\nabla_x u(x,t)$, es el vector gradiente de u, respecto de la variable espacial x. Así obtendríamos

$$u_t(x,t) - D\Delta_x u(x,t) = 0, \tag{14}$$

donde Δ_x, el operador Laplaciano respecto de x, viene dado por

$$\Delta_x u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$$

A la ecuación anterior se le conoce con el nombre de **ecuación de la difusión o ecuación del calor** n-dimensional. Nuevamente, admitiendo otros factores de influencia de crecimiento en la población, como la tasa de natalidad, mortalidad, etc., obtendríamos la ecuación

$$u_t(x,t) - D\Delta_x u(x,t) = f(x,t,u) \tag{15}$$

Otro problema que está en el origen de las EDP, y que dió lugar al estudio de la llamada **ecuación de ondas**, es el problema de la cuerda vibrante. Puede describirse de la siguiente forma: supongamos que una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa y que sus extremos se fijan, por conveniencia, en los puntos $(0,0)$ *y* $(\pi,0)$ del eje de abscisas. Entonces se tira de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y se suelta. La cuestión es: ¿cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de ésta se hallan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular, en cualquier momento, al eje de abscisas, dicho movimiento vendrá dado por una función $u(x,t)$, donde $u(x,t)$ representará el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x ($0 \leq x \leq \pi$) y el tiempo t ($t \geq 0$). El problema que se plantea es obtener $u(x,t)$ a partir de $f(x)$.

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para el anterior problema fue Jean Le Rond d'Alembert. Bajo diversas hipótesis (referentes fundamentalmente a que las vibraciones sean pequeñas), D'Alembert demostró en 1747 (Hist. de l'Acad. de Berlin, 3, 1747, 214-219) que la función u debe satisfacer las condiciones:

$$\left.\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} & = & \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\[2ex] u(x,0) & = & f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\[2ex] \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} & = & 0, & 0 \leq x \leq \pi \\[2ex] u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \end{array}\right. \tag{16}$$

La primera condición en (16) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **ecuación de ondas.** La segunda relación representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la tercera significa que la velocidad inicial de la misma es cero (recordemos que primero se tira de la cuerda y a continuación se suelta). La última relación expresa el hecho de que, para cualquier tiempo, la cuerda se mantiene fija en sus extremos.

D'Alembert demostró también que la solución de (16) viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)] \tag{17}$$

donde $\tilde{f}$ es una extensión conveniente de la función f.

La fórmula (17) fue también demostrada por Euler (Mora Acta Erud., 1749, 512-527), quien difería fundamentalmente de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales f que podían tenerse en cuenta. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de función.
Otra manera de obtener la solución del problema (16) completamente distinta de la vista anteriormente fue propuesta por Daniel Bernouilli en 1753 (Hist. de l'Acad. de Berlin, 9, 1753, 147-172; 173-195). La idea clave es obtener la solución de (16)

como superposición de ondas más sencillas, concretamente aquellas que son de la forma

$$u_n(x,t) = sen(nx)\cos(nt), \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Para cada tiempo t fijo, la anterior función es un múltiplo de la función $sen(nx)$, que se anula exactamente en $n-1$ puntos del intervalo $(0,\pi)$. Así, si pudiésemos observar la vibración de la cuerda correspondiente a las ondas u_n, tendríamos $n-1$ puntos, llamados nodos, en los que la cuerda se mantendría constantemente fija en el eje de abscisas (como en los extremos del intervalo $[0,\pi]$). Entre dichos nodos, la cuerda oscilaría de acuerdo con (18).

D. Bernouilli afirmó que la solución de (16) se representa de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)\cos(nt), \tag{19}$$

donde los coeficientes a_n han de elegirse adecuadamente para que se satisfagan todas las relaciones de (16). Si la solución propuesta por Bernouilli es correcta, ello obligaría a que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$$

y por tanto a que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx), \ \forall \ x \in [0,\pi], \tag{20}$$

para una adecuada elección de los coeficientes a_n. Las ideas expuestas por Bernouilli en el trabajo mencionado, no tuvieron aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de D'Alembert y Euler quienes no admitían que cualquier función con una expresión analítica pudiera representarse en la forma (20) (D'Alembert) ni menos aún cualquier función (Euler). Representativo de esto que decimos puede ser el artículo de D'Alembert titulado "*Fondamental*" contenido en el volumen séptimo de la famosa "*Encyclopédie*".

Hubo que esperar 54 años hasta que las ideas de D. Bernouilli fueron tomadas en cuenta por Jean Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés. En 1807 envió un artículo a la Academia de Ciencias de París, que trataba sobre el tema de la propagación del calor. Más concretamente, Fourier consideró una varilla delgada de longitud dada, digamos π, cuyos extremos se mantienen a $0°$ centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura en la varilla viene dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante), ¿cuál será la temperatura de cualquier punto x de la varilla en el tiempo t ?

Suponiendo que la varilla satisface condiciones físicas apropiadas, demostró que si

$u(x,t)$ representa la temperatura en la sección x y en el tiempo t, entonces la función u debe satisfacer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\quad 0 \le x \le \pi. \end{aligned} \tag{21}$$

La primera condición en (21) es una Ecuación en Derivadas Parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **ecuación del calor**. La segunda significa que la temperatura, en los extremos de la varilla, se mantiene a 0° centígrados en cualquier tiempo, mientras que la última relación representa la distribución inicial de temperatura en la varilla considerada.

Partiendo de las ideas de Bernouilli, para la ecuación de ondas, Fourier buscó las soluciones más sencillas que puede presentar la ecuación del calor: aquellas que son de la forma $u(x,t) = X(x)P(t)$. Imponiendo la condición de que tales funciones satisfagan formalmente dicha ecuación, obtenemos, como en el caso de la ecuación de ondas, los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0,\ x \in (0,\pi), X(0) = X(\pi) = 0, \tag{22}$$

$$P'(t) + \mu P(t) = 0,\ 0 < t < T. \tag{23}$$

En la expresión anterior, μ hace el papel de parámetro real. Como antes, (22) tiene solución no trivial si y solamente si $\mu \in \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\mu = n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (22) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función $sen(nx)$. Análogamente, para $\mu = n^2$, el conjunto de soluciones de (23) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base la constituye la función $\exp(-n^2 t)$.
Así, disponemos de un procedimiento que nos permite calcular infinitas soluciones elementales de la ecuación del calor, a saber, las funciones de la forma $a_n v_n$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ y v_n se define como

$$v_n(x,t) = \exp(-n^2 t) sen(nx). \tag{24}$$

Es trivial que si la distribución inicial de temperatura f, es algún múltiplo de $sen(nx)$ (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (21) es un múltiplo adecuado de v_n. Ahora bien, f no es, en general de la forma justo mencionada, pero, y aquí demostró Fourier, como Bernouilli, una enorme intuición, ¿será posible obtener la solución u de (21), para cualquier f dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas v_n? Es decir, ¿será posible elegir adecuadamente los coeficientes a_n tal que la única solución de (21) sea de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t) sen(nx). \tag{25}$$

Fourier afirmó en su artículo que esto era así. Las ideas expuestas por Fourier en el libro citado plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes que han originado, a lo largo de casi dos siglos, gran cantidad de investigación y han sido muchas las partes de la Matemática que se han desarrollado a partir de ellas.

Antes de terminar el resumen de este capítulo, hemos de decir que los ejemplos detallados que hemos presentado con anterioridad, surgieron en los siglos XVIII y XIX. No obstante, siguen representando un papel fundamental en la teoría moderna de EDP y en torno a ellos, o a variaciones de ellos, existen numerosos interrogantes que se comentarán en el curso. La teoría moderna de EDP surgió a finales del siglo XIX y principios del XX con contribuciones importantes de Poincaré y Hilbert, alcanzando un grado notable de contenido con el desarrollo en la primera mitad del siglo XX del análisis funcional (lineal). Desde mediados de los años cincuenta del siglo pasado el uso de funciones generalizadas, distribuciones, espacios de Sobolev, etc. y de la teoría de espacios de Hilbert, ha permitido avances muy importantes. Por último, diremos que en la actualidad y debido a las aplicaciones, hay un interés especial por el estudio de EDP no lineales así como por el establecimiento de métodos numéricos de aproximación a las soluciones de las mismas. Esto es otro mundo, con contenidos más propios de programas de Doctorado.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A. Cañada, Series de Fourier y Aplicaciones. Ediciones Pirámide, Madrid, 2002.

2. M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times. Oxford University Press, New York, 1972. Traducción al castellano en Alianza Editorial, Madrid, 1992.

3. I. Peral, Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.

4. A.N.Tijonov y A.A. Samarsky, Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

Es muy recomendable que el alumno complete la información histórica que se proporciona en el capítulo con las referencias siguientes:

1. H. Brezis. Partial Differential Equations in the 20th Century. Advances in Mathematics, 135, 76-144, 1998. Notas históricas sobre las EDP del siglo XX. De nivel alto. No obstante viene muy bien para que el alumno comprenda el alcance de las EDP y su papel en la matemática actual.
2. A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Pirámide, Madrid, 2002. En la introducción de este libro se pueden consultar algunos hechos relevantes de los métodos de Fourier y su relación con las EDP.
3. M. Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press, New York, 1972. Traducido al castellano: Alianza Editorial, Madrid, 1992. Muy recomendable para la historia de las EDP en los siglos XVIII y XIX.
4. Para consultas históricas de cualquier tipo:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/index.html

EJERCICIOS

1. Considérese la ecuación de Laplace

$$\Delta u(x) = 0 \tag{26}$$

y sea $\xi \in \mathbb{R}^n$ dado. Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\})$ es solución de (26) de la forma $u(x) = v(\|x - \xi\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0, \ \forall\, r \in (0, +\infty). \tag{27}$$

Recíprocamente, si v verifica (27) entonces $u(x) = v(\|x - \xi\|)$ verifica (26) en $\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$. Encuéntrese el conjunto de todas las soluciones de (27).

2. (a) El potencial gravitacional $V(x)$ originado por un número finito de masas puntuales $m_1, ..., m_k$ localizadas en los puntos $\xi_1, ..., \xi_k$ de $\mathbb{R}^3$ se define como

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{\|x - \xi_i\|}$$

donde G es la constante de gravitación universal. Demuéstrese que V es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi_1, ..., \xi_k\}$.

(b) Demuéstrese que el resultado anterior no es cierto si $\mathbb{R}^3$ se sustituye por $\mathbb{R}^2$.En cambio, muéstrese que si $\xi_1, ..., \xi_k$ son puntos distintos de $\mathbb{R}^2$, la función

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} m_i \ln(\|x - \xi_i\|)$$

es armónica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\xi_1, ..., \xi_k\}$.

(c) Demuéstrese que el resultado del primer apartado es cierto para $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, si $\|x - \xi_i\|$ se sustituye por $\|x - \xi_i\|^{n-2}$

3. Demuéstrese que el volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$, v_n, viene dado por

$$v_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}, & \text{si} \quad n \ \text{ es par,} \\ \\ \dfrac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{1 \cdot 3 \cdot ...n}, & \text{si} \ \ n \text{ es impar} \end{cases}$$

Compruébese que $\lim_{n\to\infty} \ v_n = 0$.

4. Calcular el área de la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$ y el área de cualquier esfera de radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^n$.

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado y $x \in \Omega$. Estúdiese los valores de β para los que existe la integral

$$\int_\Omega \frac{1}{\|x - \xi\|^\beta} \ d\xi. \tag{28}$$

6. Sea $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, una función medible y acotada, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y acotado. Demuéstrese que el potencial gravitacional

$$V(x) = -G \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} \ d\xi \tag{29}$$

está bien definido para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$. Pruébese que $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ y que $\Delta V(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$.

7. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Estúdiese la dimensión del espacio vectorial formado por todas las soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega$. Pruébese un resultado análogo para la ecuación del calor y para la ecuación de ondas.

8. El núcleo (o solución fundamental) de la ecuación del calor se define como

$$K(x, \xi, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-(x-\xi)^2/4t}.$$

en dimensión uno y como

$$K(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{\ -\|x-\xi\|^2/4t},$$

para dimensión n arbitraria. Pruébese que el núcleo es solución de la ecuación del calor cuando $t > 0$, es decir que se verifica

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) K(x,\xi,t) = 0,\ \forall\ t > 0.$$

9. Considérese la ecuación de ondas unidimensional $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^2$. Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x + t,\ \mu = x - t$, la ecuación anterior se transforma en $u_{\xi\mu}(\xi,\mu) = 0,\ (\xi,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de la citada ecuación de ondas.

10. (**Examen del 25/06/05.**) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden

$$u_{xy}(x,y) + a\ u_x(x,y) + bu_y(x,y) + abu(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{30}$$

donde a y b son constantes reales y $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

   (a) Mediante el cambio de variable $u(x,y) = v(x,y)e^{-ay-bx}$, encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (30).

   (b) Demuéstrese que el conjunto de soluciones de (30) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

CAPÍTULO II[1]: PROBLEMAS DE TIPO MIXTO (métodos de Fourier)

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Integración de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
   a) Conjuntos medibles y funciones integrables.
   b) Teorema de la convergencia monótona.
   c) Teorema de la convergencia dominada.
   d) Funciones absolutamente continuas y fórmula de integración por partes.
2. Nociones básicas de espacios normados y espacios de Hilbert.
3. Convergencia uniforme de series de funciones.
4. Problemas de valores propios para e.d.o. lineales de segundo orden con coeficientes constantes.
5. Teorema de derivación de integrales paramétricas.

Se pueden consultar las referencias:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático, Barcelona, Reverté, 1960.
2. H. Brezis. Análisis Funcional. Madrid, Alianza Universidad, 1984.
3. E. A. Coddington y N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. Malabar, Robert E. Krieger Publishing Company, 1984.
4. K. R. Stromberg. An introduction to classical real analysis. Belmot, Wadsworth, 1981.
5. H. Weinberger. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Barcelona, Reverté, 1970.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo comienza repasando las principales propiedades de $L^2(a,b)$, el conjunto de funciones medibles $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de cuadrado integrable en el

[1] A. Cañada, Febrero 2007, EDPMAT

sentido de Lebesgue. Sabemos que dos funciones se consideran iguales si lo son casi por doquier en $[a,b]$ (c.p.d. en $[a,b]$). Usaremos la notación

$$L^2(a,b) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{medible},\ \int_a^b f^2(x)\ dx\ < +\infty\}$$

Además, si

$$f, g \in L^2(a,b),\ \ f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ c.p.d. en } [a,b].$$

$L^2(a,b)$ es un espacio vectorial real con la suma usual de funciones y el producto usual de un número real por una función. También, en $L^2(a,b)$ se puede definir el producto escalar

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\ dx,\ \forall f, g \in L^2(a,b)$$

Con este producto escalar, $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

El conjunto de funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}},\ p_n,\quad q_n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

donde

$$p_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \cos\left(n\pi \frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

$$q_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

es una base de $L^2(a,b)$ (Lebesgue, 1902). Esto significa que, para cualquier función $f \in L^2(a,b)$, se tiene

$$f = a_0 \frac{1}{\sqrt{b-a}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n p_n + b_n q_n) \tag{1}$$

donde

$$a_0 =< f, \frac{1}{\sqrt{b-a}} >,\ \ a_n =< f, p_n >,\ \ b_n =< f, q_n > \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

son los llamados coeficientes de Fourier de f respecto de la base anterior.
La convergencia de la serie (1), llamada serie de Fourier de f respecto de la base dada, se entiende con la norma usual de $L^2(a,b)$).
Se cumple además la igualdad de Parseval

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \; dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \; , \; \forall f \in L^2(a,b).$$

(En este punto, sería interesante que el alumno reflexionara seriamente sobre las similitudes y diferencias básicas entre el espacio de Hilbert separable de dimensión infinita $L^2(a,b)$ y el espacio de Hilbert $n-$ dimensional $\mathbb{R}^n$).

En particular, en el intervalo $[-\pi,\pi]$, se tiene que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n(\cdot)), \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ sen}(n(\cdot)), \; n \in \mathrm{N} \right\}$$

es una base de $L^2(-\pi,\pi)$.

Esto significa que

$$f = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n \cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n \text{ sen}(n(\cdot))) \; , \; \forall f \in L^2(-\pi,\pi)$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \; dx \; , \; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ sen}(nx) \; dx \; , \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insistimos en que la convergencia de la serie de Fourier de f, se entiende en $L^2(-\pi,\pi)$. De manera más precisa, si

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k \cos(kx) + \mathrm{B}_k \text{ sen}(kx)) \; , \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall x \in [-\pi,\pi],$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathrm{S}_n(x)|^2 \; dx = 0.$$

La igualdad de Parseval en $[-\pi,\pi]$ es

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \; dx = \pi \left(\frac{\mathrm{A}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2) \right), \; \forall f \in L^2(-\pi,\pi).$$

Debe observarse que los coeficientes de Fourier de una función f pueden definirse si $f \in L^1(-\pi,\pi)$, aunque en este caso no son necesariamente ciertos los resultados mencionados con anterioridad sobre convergencia, igualdad de Parseval, etc.

La convergencia en el espacio $L^2(a,b)$ no es muy satisfactoria desde el punto de vista de las aplicaciones *(¿podría el alumno dar una justificación de esta afirmación?)*. Es más interesante conocer en qué situaciones puede afirmarse que se tiene convergencia puntual de la serie de Fourier de una función dada a dicha función. Ahora bien, este es un tema peliagudo. De hecho, la convergencia puntual de Series de Fourier sigue siendo una cuestión que genera parte de la investigación que se realiza en la Matemática actual. Restringiéndonos al subconjunto C, de $L^2(-\pi,\pi)$, formado por las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$ y 2π -periódicas ($f(-\pi) = f(\pi)$), diremos que fué Du Bois-Reymond, en 1873, el primero que encontró una función $f \in C$ cuya serie de Fourier diverge en algún punto de $[-\pi,\pi]$. Posteriormente se dieron ejemplos más simples como el de Fejér, en 1911. En 1966, L. Carleson ("On the convergence and growth of partial sums of Fourier series", Acta Math. 116, 135-157, 1966) probó que si $f \in C$, entonces la serie de Fourier de f converge c.p.d. en $[-\pi,\pi]$ a f (este resultado es también cierto para funciones de $L^2(-\pi,\pi)$). El mismo año, Kahane y Katznelson probaron que si $\mathrm{E} \subset [-\pi,\pi]$ es un subconjunto de medida cero, entonces existe una función $f \in C$ tal que su serie de Fourier no converge en E. Desde luego, estos dos últimos resultados que hemos mencionado (que no son en absoluto triviales de probar y cuyo nivel rebasa el de este curso), dejan zanjada desde el punto de vista teórico la cuestión de la convergencia puntual de las Series de Fourier en el conjunto C.
Por otra parte, hay que ser muy cuidadosos si tratamos con funciones que no pertenezcan a $L^2(-\pi,\pi)$. En este caso, el comportamiento (referente a la convergencia puntual) que ofrecen las Series de Fourier es a veces "tremendamente patológico". Por ejemplo, en 1926, *Kolmogorov ("Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout". C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 183, 1327-1328 (1926))* dió un ejemplo de una función $f \in L^1(-\pi,\pi)$ y 2π-periódica tal que su serie de Fourier no converge en ningún punto.

A nivel de este curso, como criterio de convergencia puntual de las Series de Fourier, tendremos suficiente con el criterio de Dini:

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1(-\pi,\pi)$ y si $x \in \mathbb{R}$ es tal que la función $\tau \to \dfrac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau} \in L^1(-\delta,\delta)$ para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño, entonces $\mathrm{S}_n(x) \to f(x)$.

En particular, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, localmente integrable y $x \in \mathbb{R}$ es tal que la función f tiene derivadas laterales en x, entonces $\mathrm{S}_n(x) \to f(x)$.

Sobre la relación entre las series de Fourier de una función f y su derivada f', tenemos el resultado siguiente:
Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathrm{R}$ es absolutamente continua y 2π-periódica, entonces la serie de Fourier de f' es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\mathrm{B}_n \cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n \operatorname{sen}(n(\cdot)))$$

(la serie de Fourier de f' se obtiene derivando, término a término, la serie de Fourier de f).

Un hecho que llama la atención es que si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ y a es un punto dado de $[-\pi, \pi]$, entonces

$$\int_a^x f(t)\, dt = \frac{\mathrm{A}_0(x-a)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_n \int_a^x \cos(nt)\, dt + \mathrm{B}_n \int_a^x \operatorname{sen}(nt)\, dt \right)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$ (la integración término a término de la serie de Fourier de una función dada $f \in L^2(-\pi, \pi)$ converge uniformemente a la integral de f, sin necesidad de condiciones adicionales sobre f).

Una condición suficiente que permite garantizar que $\mathrm{S}_n(x) \to f(x)$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$ es:

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \text{ es absolutamente continua, } 2\pi\text{-periódica y } f' \in L^2(-\pi, \pi).$$

Un tema muy interesante es la relación existente entre la regularidad de la función f y la convergencia uniforme de $\mathrm{S}_n(x),\ \mathrm{S}'_n(x), \cdots$, a $f,\ f', \cdots$ respectivamente. Este hecho será de gran utilidad al aplicar la teoría de Series de Fourier al estudio de las Ecuaciones Clásicas de la Física Matemática. Concretamente se tiene el resultado siguiente:
Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k con $f^{k)}$ absolutamente continua y tal que $f^{k+1)} \in L^2(-\pi, \pi)$. Si además se cumple que

$$f^{i)}(-\pi+) = f^{i)}(\pi-),\ 0 \le i \le k,$$

entonces

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n(x)$$

(2) $$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}'_n(x)$$

$$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$

$$f^{k)}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}^{k)}_n(x)$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$, donde $\{\mathrm{S}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f.

En particular, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^{k+1} y 2π-periódica, se cumple (2).

Como veremos en el capítulo, cuando tratemos con problemas de tipo mixto para la ecuación del calor o la ecuación de ondas, es necesario manejar adecuadamente otras bases del espacio $L^2(a,b)$. Esto depende básicamente de las condiciones de contorno que estemos considerando. En este sentido, puede probarse que los conjuntos

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{sen}(n(\cdot))\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n(\cdot))\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

son bases de $L^2(0,\pi)$. Es muy conveniente familiarizarse con las correspondientes igualdades de Parseval y las condiciones suficientes que garantizan la convergencia uniforme de la serie de Fourier de f a f, para cada una de las bases citadas (véase la bibliografía recomendada).

El capítulo continua con la aplicación de estos conocimientos al estudio de dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación del calor. Más concretamente, dedicamos nuestra atención a los problemas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \le t \le T, \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi,
\end{aligned} \qquad (C1)$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\
\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < t \leq T, \\
u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \leq x \leq \pi.
\end{aligned} \tag{C2}$$

El interés por estos problemas proviene de la Física. En términos elementales, el problema (C1) modela la siguiente situación: tenemos una varilla delgada de longitud π, cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura está dada por la función $f(x)$, entonces la función $u(x,t)$ representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa x y en el tiempo t.
Por su parte, el problema (C2) modela una situación parecida, pero donde además de la superficie lateral, los extremos de la varilla también se mantienen aislados (en lugar de suponer que se encuentran a cero grados).

La ecuación en derivadas parciales que aparece en ambos problemas,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{C}$$

es una de las más importantes de la Física Matemática y se conoce con el nombre de **ecuación del calor**. Aparece con generalidad en fenómenos de difusión y es el ejemplo más elemental de ecuación parabólica.

La interpretación física de (C1) y (C2) sugiere que la solución de ambos problemas debe existir y ser única. Esto lo probamos con detalle en este capítulo. No obstante, también se puede intuir desde el principio alguna diferencia cualitativa importante en lo que se refiere al comportamiento asintótico (cuando el tiempo tiende a $+\infty$) de las soluciones de ambos problemas: mientras que para (C1) se tendrá $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$, para (C2) se cumple $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = b$, constante que, en general, no es cero. Esto tendremos oportunidad de visualizarlo en las correspondientes prácticas de ordenador con el programa Mathematica.

Entrando en detalle, si Ω es el conjunto

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T\}$$

una solución de (C1) es cualquier función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2_x(\Omega) \cap C^1_t(\Omega)$ y que satisface (C1) puntualmente. Usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor puede probarse que (C1) tiene, a lo sumo, una solución. Una versión de este principio para la ecuación del calor $n-$ dimensional es la siguiente:

Teorema 1.. *Sea ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $T > 0$. Notemos $\Gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega,\ 0 < t < T\}$. Entonces si $u \in C_x^2(\Gamma) \cap C_t^1(\Gamma) \cap C(\overline{\Gamma})$ verifica*

$$u_t - \Delta_x u \leq 0, \ \text{en } \Gamma, \tag{3}$$

se tiene que

$$\max_{\overline{\Gamma}} u = \max_{\partial_1 \Gamma} u, \tag{4}$$

donde $\partial_1 \Gamma$ es la denominada frontera parabólica de Γ que se define como

$$\partial_1(\Gamma) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \partial\omega,\ 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in \omega,\ t = 0\}.$$

La demostración consta de los pasos siguientes:

1. Primero se considera el caso en que se tiene una desigualdad estricta en (3) y el dominio es $\Gamma_\varepsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, 0 < t \leq T - \varepsilon\}$. Entonces, si $(x_0, t_0) \in \overline{\Gamma_\varepsilon}$ es tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Gamma_\varepsilon}} u$, un razonamiento elemental sobre el signo de la derivada primera de u en (x_0, t_0), respecto de t y de las derivadas segundas de u en (x_0, t_0), respecto de x_i dos veces, prueba que el punto (x_0, t_0) debe pertenecer a la frontera parabólica de Γ_ε.
2. Se hace tender ε a cero, por la derecha.
3. Para el caso en que en (3) se tiene una desigualdad no estricta, se considera la función auxiliar $v(x,t) = u(x,t) + kt$, con $k < 0$. Después se hace tender k a cero por la izquierda.

De manera análoga puede probarse un principio de mínimo. Para soluciones de la ecuación del calor tendremos un principio de máximo-mínimo.

Pasemos a continuación a comentar el tema de la existencia de soluciones de (C1). En una primera etapa, usaremos el método de separación de variables para encontrar soluciones de (C1) de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Así obtenemos el problema de valores propios

$$X''(x) - \mu X(x) = 0,\ x \in [0, \pi],\ X(0) = X(\pi) = 0, \tag{$PVP1$}$$

y la familia uniparamétrica de e.d.o.

$$T'(t) - \mu T(t) = 0,\ t \in (0, T].$$

Obviamente, los únicos valores interesantes del parámetro real μ son aquellos para los que (PVP1) tiene solución no trivial. Así, diremos que μ es valor propio de (PVP1) si (PVP1) admite alguna solución no trivial.

La manera de calcular los valores propios de los problemas anteriores es sencilla, puesto que las ecuaciones consideradas son lineales y tienen coeficientes constantes. Para ello, recordemos que, fijado μ, el conjunto de soluciones (reales) de la ecuación $X''(x) - \mu X(x) = 0,\ x \in [0,\pi]$, es un espacio vectorial real de dimensión dos. Además:
- Si $\mu = 0$, una base de tal espacio vectorial está constituida por las funciones $X^1(x) = 1,\ X^2(x) = x,\ \forall\ x \in [0,\pi]$.
- Si $\mu > 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = \exp(\sqrt{\mu}x),\ X^2(x) = \exp(-\sqrt{\mu}x),\ \forall\ x \in [0,\pi]$.
- Si $\mu < 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = cos(\sqrt{-\mu}x),\ X^2(x) = sen(\sqrt{-\mu}x),\ \forall\ x \in [0,\pi]$.

Cualquier solución de (PVP1) es de la forma $X(x) = c_1 X^1(x) + c_2 X^2(x),\ \forall\ x \in [0,\pi]$, donde c_1, c_2 son números reales cualesquiera. Imponiendo las condiciones de contorno llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:
- Si $\mu = 0$,

$$\begin{gathered} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2\pi = 0, \end{gathered}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto, $\mu = 0$, no es valor propio de (PVP1).
- Si $\mu > 0$,

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 \exp(\sqrt{\mu}\pi) + c_2 \exp(-\sqrt{\mu}\pi) = 0. \end{gathered}$$

El determinante de los coeficientes de este sistema es $\exp(-\sqrt{\mu}\pi) - \exp(\sqrt{\mu}\pi)$, que es distinto de cero. Por tanto la única solución del sistema es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Consecuentemente, no existe ningún valor propio positivo de (PVP1).
- Si $\mu < 0$,

$$\begin{gathered} c_1 = 0, \\ c_1 cos(\sqrt{-\mu}\pi) + c_2 sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0. \end{gathered}$$

Este sistema tiene solución no trivial si y solamente si $sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0$; o lo que es lo mismo, si y solamente si $\mu = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, es decir $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $X_n(x) = sen(nx),\ \forall\ x \in [0,\pi]$.

En resumen, el conjunto de valores propios de (PVP1) es el conjunto $\{-n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. Si $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base está formada por la función $X_n(x) = sen(nx),\ \forall\ x \in [0,\pi]$.

El método de separación de variables permite calcular la única solución de (C1) en casos sencillos que son aquellos en los que la función f de (C1) es de la forma $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i X_{n_i}(x)$, siendo $m \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_m$ números reales cualesquiera y $n_1, .., n_m$, números naturales distintos. En estos casos, la única solución de (C1) es la función

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathrm{sen}(n_i x) \exp(-n_i^2 t), \ \forall \ (x,t) \in \Omega.$$

En una segunda etapa, usando los casos previos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f, respecto de la base de $L^2(0,\pi)$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ \mathrm{sen}(n(\cdot)), \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

probamos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C1) que tiene el enunciado siguiente:
Si $f \in C[0,\pi]$ *es* C^1 *a trozos en* $[0,\pi]$ *y* $f(0) = f(\pi) = 0$, *entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:*

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{sen}(nx) \exp(-n^2 t), & \text{si} \ \ t > 0, \\ f(x), & \text{si} \ \ t = 0 \end{cases}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{sen}(nx) \ dx, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando a continuación una función de Green apropiada, se consigue un teorema más general:
Si $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ *es continua y satisface* $f(0) = f(\pi) = 0$, *entonces (C1) tiene una única solución dada por la fórmula anterior.*

A continuación mostramos algunas propiedades referentes al comportamiento cualitativo de la solución de (C1): dependencia continua respecto de la temperatura inicial f, regularidad C^∞ para cualquier tiempo positivo y el hecho de que, sea cual sea la temperatura inicial, la única solución de (C1) tiende a cero cuando el tiempo diverge a $+\infty$.

En lo que respecta al problema (C2), una solución es cualquier función $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ que satisface (C2) puntualmente. Respecto de la unicidad de soluciones, el principio del máximo-mínimo no parece ahora directamente aplicable, puesto que las condiciones de contorno, para $x = 0$ y $x = \pi$, son distintas de las consideradas en (C1). La idea básica para demostrar la unicidad de soluciones de (C2) es considerar una cierta integral de energía, definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \left[\int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x,s)}{\partial x}\right)^2\ dx\right]\ ds$$

Puede demostrarse que si u es cualquier solución de (C2), entonces $E(t)$ es constante. Como consecuencia se obtiene trivialmente que (C2) puede tener, a lo más, una solución.
En lo concerniente a la existencia de soluciones, nuevamente aplicando el método de separación de variables, encontramos la única solución de (C2) en casos sencillos, y usando éstos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f, respecto de la base de $L^2(0,\pi)$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

mostramos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C2):
Si $f \in C[0,\pi]$ es C^1 a trozos en $[0,\pi]$, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{b_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)\exp(-n^2 t), & \text{si } \ t > 0, \\ f(x), \ \text{si } \ t = 0 \end{cases}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\ dx,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Probamos, además, algunas propiedades sobre la dependencia continua de la única solución de (C2), respecto de la temperatura inicial f. Asimismo, se cumple en este caso la propiedad de regularidad C^∞ de las soluciones, para cualquier tiempo positivo. En cambio, el comportamiento asintótico de las mismas es ahora distinto del mostrado para el problema (C1). Para (C2) demostramos que, cuando el tiempo diverge a $+\infty$, las soluciones convergen a una constante, en general no nula. Esto se corresponde con el hecho de que, al estar en (C2) los extremos y la superficie lateral de la varilla aislada, entonces no puede entrar ni salir calor de la misma, con lo que éste no se pierde; lo que sí tiende es a difundirse el calor de manera homogénea por la varilla.

El capítulo sigue con el estudio de dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación de ondas (unidimensional)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

El primero de ellos responde a la formulación

$$\left.\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, & 0 \le x \le \pi, t > 0 \\[2ex] u(x,0) & = & f(x), & 0 \le x \le \pi \\[2ex] \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} & = & g(x), & 0 \le x \le \pi \\[2ex] u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, \ \ t \ge 0, & \end{array}\right. \qquad (O1)$$

y modela las vibraciones pequeñas de una cuerda flexible, con extremos fijos en los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$, cuando la posición inicial de la misma está dada por la función f y la velocidad inicial por g.
Si $\Omega = (0,\pi) \times (0,+\infty)$, una solución de (O1) es cualquier función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (O1) puntualmente.

Demostramos en primer lugar que (O1) puede tener, a lo sumo, una solución, usando para ello la función energía

$$I(t) = \int_0^\pi \left((u_x(x,t))^2 + (u_t(x,t))^2 \right) \, dx$$

A continuación, mediante la técnica de separación de variables probamos que si f y g son adecuadas, entonces (O1) tiene efectivamente una solución. El resultado, concretamente, es el siguiente:

Si f y g satisfacen las condiciones

$$f \in C^3[0,\pi], \ f(0) = f(\pi) = 0, \ f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0,$$
$$g \in C^2[0,\pi], \ g(0) = g(\pi) = 0,$$

entonces (O1) tiene una única solución u dada por la fórmula

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \ sen(nt)) \ \ sen(nx),$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx, \ B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi g(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx, \ \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Seguidamente, expresamos esta solución de una manera más conveniente, motivando el método de propagación de las ondas. Usando este hecho probamos a continuación que se pueden rebajar las condiciones de regularidad sobre f y g. Más concretamente, *si f y g satisfacen las condiciones*

$$f \in C^2[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0,\ f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0,$$
$$g \in C^1[0,\pi],\ g(0) = g(\pi) = 0,$$

mostramos que la única solución u de (O1) está dada por la fórmula (llamada fórmula de D'Alembert)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F_1(x+t) + F_1(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G_1(z)\ dz,$$

donde F_1 y G_1 son, respectivamente, las extensiones impares y $2\pi-$periódicas de f y g, a $\mathbb{R}$.

Después de interpretar de manera física la anterior expresión, dedicamos nuestra atención al estudio de algunas propiedades cualitativas de las soluciones de (O1), tales como el principio de invariabilidad de la energía, dependencia continua respecto de los datos iniciales, mantenimiento de la regularidad de las condiciones iniciales para tiempos positivos, etc.

Un objetivo básico del anterior estudio es poner de manifiesto las posibles similitudes y diferencias con la ecuación del calor, estudiada con anterioridad.

El otro problema que estudiamos responde a la formulación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, && t \ge 0,
\end{aligned} \qquad (O2)$$

que se corresponde con el caso en que los extremos de la cuerda están libres. Estudiamos la existencia (método de separación de variables) y unicidad (método de la energía) de las soluciones de (O2). Mencionamos también algunas diferencias cualitativas respecto de (O1), como, por ejemplo, el hecho de que las soluciones pueden dejar de ser acotadas.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente, donde se indica con una (b) si es básica y con una (c) si es complementaria:

1. (b) A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Madrid, Pirámide, 2002.
2. (c) E.A. González-Velasco. Fourier Analysis and Boundary Value Problems. San Diego, Academic Press, 1995.
3. (c) T.W. Körner. Fourier Analysis. Cambridge, Cambridge University Press, 1988.
4. (b) A.N. Tijonov y A.A. Samarki. Ecuaciones de la Física Matemática. Perú, Mir, 1980.
5. (c) H. Weinberger. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Barcelona, Reverté, 1970.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. A veces, a partir de la serie de Fourier de una función dada f, puede formarse otra serie que es más adecuada desde el punto de vista de la convergencia puntual a f. Este es el caso por ejemplo, de la sumabilidad Cesáreo de las Series de Fourier, donde la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f, $\{\mathrm{S}_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ se sustituye por la sucesión formada por sus medias aritméticas. Se pueden consultar los libros de Apostol y Stromberg indicados al comienzo del capítulo.
2. Siempre es bonito un recorrido por los principales hechos históricos de la teoría de Series de Fourier. Pueden ser útiles las referencias de A. Cañada, E. A. González-Velasco y T.W. Körner. Además, si se trata de consultas históricas es muy útil el libro de M. Kline: Mathematical thought from ancient to modern times. Nueva York, Oxford University Press, 1972 (versión española en Alianza Editorial, Madrid, 1992). Asimismo, se puede encontrar información muy amplia en la dirección de internet
   http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/index.html
3. Es muy recomendable que el alumno consulte la bibliografía recomendada anteriormente (especialmente T.W. Körner y H. Weinberger) para estudiar los principales hechos de las series de Fourier en varias variables (especialmente en dos y tres variables), así como sus aplicaciones al estudio de problemas de tipo mixto para las ecuaciones del calor y ondas en dimensiones superiores a uno. Hay nociones que son similares (por ejemplo la noción de base del espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, donde Ω

es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$). Otras en cambio, se van complicando a medida que la dimensión aumenta, como por ejemplo los criterios de convergencia puntual de la serie de Fourier.
En general, al aplicar el **método de separación de variables** a estos problemas se llegaría a problema de valores propios del tipo

$$\begin{array}{c} \Delta X(x) \ + \ \lambda X(x) = 0, \ x \in \Omega, \\ X(x) = 0, \ x \in \partial\Omega, \end{array}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$.

4. En este capítulo se han estudiado dos problemas de tipo mixto para la ecuación del calor. En ambos se daba como dato inicial una determinada temperatura f. Además, en el primero de ellos se suponía conocida la temperatura en los extremos de $[0, \pi]$, mientras que en el segundo se daba como dato el flujo de calor a través de tales extremos. La clave para poderlos resolver, usando la teoría de Series de Fourier, se ha encontrado en el hecho de que, en ambos casos, la temperatura inicial admitía un desarrollo en serie, usando precisamente como sumandos de tal desarrollo las funciones propias de los problemas de valores propios correspondientes.
Es claro que, desde el punto de vista físico, pueden plantearse otros tipos de problemas. Por ejemplo, en un extremo de la varilla puede darse como dato la temperatura en cualquier tiempo, y en el otro, el flujo de calor, o incluso una combinación de ambos. Además, se puede suponer que la superficie lateral de la varilla no está aislada, de tal forma que puede entrar o salir calor. La intuición física sugiere que tales problemas han de tener solución única. Otra cosa es demostrarlo rigurosamente.

Desde el punto de vista matemático, los problemas citados se pueden plantear de la forma

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + g(x,t), \ 0 \le x \le \pi, \ 0 < t \le T, \\ \alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = a(t), \ 0 < t \le T, \\ \beta_1 u(\pi,t) + \beta_2 u_x(\pi,t) = b(t), \ 0 < t \le T, \\ u(x,0) = f(x), \ 0 \le x \le \pi, \end{array} \qquad (sl1)$$

donde f representa la temperatura inicial y la presencia de g significa que hay una fuente externa de calor, mientras que las otras dos condiciones en $(sl1)$ son condiciones de contorno que combinan la temperatura y el flujo de calor en los extremos de la varilla (u_x indica la función derivada parcial de u, respecto de la variable x).

Bajo ciertas restricciones de regularidad sobre las funciones f, g, a y b, y sobre el signo de los coeficientes $\alpha_i, \beta_i,\ 1 \leq i \leq 2$, puede demostrarse, bien usando el método de la energía, bien usando principios del máximo adecuados, que $(sl1)$ tiene, a lo más, una solución. Ya sabemos que a continuación viene la siguiente pregunta: ¿también a lo menos? Esto es harina de otro costal. No todos los problemas de la forma $(sl1)$ pueden resolverse por el método de separación de variables; pero combinando éste con otros métodos (como aquellos que buscan la solución como suma de dos más elementales, una de ellas estacionaria), puede resolverse un buen número de problemas similares a $(sl1)$. Se puede consultar para ello la bibliografía recomendada (especialmente L.C. Andrews y A.N. Tijonov-A.A. Samarsky).
En general, la aplicación del método de separación de variables a aquellos problemas como $(sl1)$ que sean adecuados conduce a la posibilidad del desarrollo en serie de una cierta función h, definida en $[0,\pi]$, usando como sumandos de tal desarrollo las funciones propias (soluciones no triviales) de problemas de contorno de la forma:

$$\begin{aligned} Z''(x) - \lambda Z(x) = 0,\ x \in [0,\pi], \\ \gamma_1 Z(0) + \gamma_2 Z'(0) = 0, \\ \delta_1 Z(\pi) + \delta_2 Z'(\pi) = 0, \end{aligned} \qquad (sl2)$$

donde $\gamma_i, \delta_i,\ 1 \leq i \leq n$, son constantes dadas.
Los problemas de contorno como $(sl2)$, donde las condiciones de contorno aparecen por separado, en los dos puntos extremos de $[0,\pi]$, se llaman problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville. Sorprendentemente, el conjunto de funciones propias de $(sl2)$, convenientemente ortonormalizado, forma siempre (con ciertas restricciones sobre los coeficientes $\gamma_i, \delta_i,\ 1 \leq i \leq n$) una base del espacio $L^2[0,\pi]$. La demostración más bonita que conozco de este resultado usa en primer lugar la noción de función de Green para transformar el problema diferencial en una ecuación integral equivalente. A continuación esta ecuación integral puede plantearse en términos de un problema de valores propios para operadores lineales autoadjuntos en espacios de Hilbert de dimensión infinita. Por último se puede usar la resolución espectral (o diagonalización) de este tipo de operadores para tener el resultado.
Comentarios análogos pueden realizarse para la ecuación de ondas. Por

ejemplo, pueden estudiarse problemas de la forma

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = h(x,t),\ t > 0,\ x \in (0,\pi), \\ u(x,0) = f(x),\ x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = m_1(t),\ t \geq 0, \\ u(\ell,t) = m_2(t),\ t \geq 0. \end{gathered}$$

En este caso puede ser muy útil la referencia de H. Weinberger.

EJERCICIOS

1. Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \tag{5}$$

si $f(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{2x}{\pi}$.

2. Calcúlese la única solución de (5) si

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } 0 \leq x \leq a, \\ \dfrac{a}{a-\pi}\ (x-\pi), \text{ si } a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

donde a es una constante dada tal que $0 < a < \pi$.

3. (**Ejercicio propuesto en el examen del 18/06/04)** Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \tag{C2}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

a) Para cada función $h \in L^2(0,\pi)$, escríbase el desarrollo en serie de Fourier de h respecto de la base $\{(\pi)^{-1/2}, (2/\pi)^{1/2}\cos\ n(.),\ n \in \mathbb{N}\}$. Dar condiciones suficientes que permitan asegurar que si $h_n,\ n \in \mathbb{N}$ son los coeficientes de Fourier de h respecto de esta base, entonces la serie $\sum |h_n|$ es convergente.

b) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

c) Pruébese que si $f \in C^1[0,\pi]$, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{b_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx) \exp(-n^2 t), & \text{si } \ t > 0, \\ f(x), & \text{si } \ t = 0 \end{cases}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\ dx,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

4. Calcúlese la única solución de

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, && 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi, \end{aligned}$$

si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

5. Encuéntrese la única solución de (6) cuando $f(x) = ax + b$, $\forall x \in [0,\pi]$, siendo a y b números reales dados.
6. Calcúlese la única solución de

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0. \end{aligned}$$

cuando $f(x) = \operatorname{sen}^3(x),\ g(x) = x(\pi - x),\ \forall\ x \in [0,\pi]$.

7. Demuéstrese que el problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \operatorname{sen}(x), && 0 \le x \le \pi,\ t > 0 \\
u(x,0) &= 2 \operatorname{sen}(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0
\end{aligned}$$

tiene una única solución u. Defínase la energía de la onda u, en el tiempo t. Demuéstrese que dicha energía no es constante.

8. Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, && t \ge 0,
\end{aligned}$$

cuando tomamos las funciones $f(x) = \cos^2 x,\ g(x) = 2x - \operatorname{sen}(2x),\ \forall\, x \in [0,\pi]$.

9. (**Propuesto en Ingeniería de Caminos el 03/02/05**) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \cos x, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= \operatorname{sen} x, && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0.
\end{aligned}$$

10. (**Propuesto en el examen del 26/04/05**) Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & & 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & & 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), & & 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \qquad (C2)$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

a) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

b) Aplíquese el método de separación de variables para encontrar soluciones elementales de (C2).

c) Usando el apartado anterior, propóngase una fórmula que proporcione la única solución de (C2), dando condiciones suficientes sobre f que permitan probar, rigurosamente, que la fórmula propuesta es válida.

11. (**Propuesto en el examen del 25/04/06**) Se considera el problema de tipo mixto para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= f(x,t), & & 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, & & 0 \le t, \\ u(x,0) = u_t(x,0) &= 0, & & 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \qquad (ONH)$$

donde f y f_x son continuas en $[0,\pi] \times [0,\infty)$ y $f(0,t) = f(\pi,t) = 0,\ \forall\ t \ge 0$.

a) Si $F(x,t)$ es la extensión impar y $2\pi-$ periódica de f, respecto de x, pruébese que la función

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F(\psi,\tau)\ d\psi\ d\tau$$

es solución de (ONH).

b) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \operatorname{sen}(3x), \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t, \\ u(x,0) = -\operatorname{sen}x,\ u_t(x,0) &= 8\operatorname{sen}(5x), \qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned}$$

12. (**Propuesto en el examen del 25/04/06)** Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \qquad (C2)$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

a) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

b) Demuéstrese rigurosamente que las funciones propias de (C2) son las funciones $\cos(\frac{2n-1}{2}\ x),\ n \in \mathbb{N}$.

c) Usando el hecho de que las funciones $\{\cos(nx),\ n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$ constituyen una base ortogonal de $L^2(0,\pi)$, demuéstrese que las funciones $\{\cos(\frac{2n-1}{2}\ x),\ n \in \mathbb{N}\}$ también forman una base ortogonal de $L^2(0,\pi)$.

d) Usando el apartado anterior, propóngase una fórmula que proporcione la única solución de (C2), dando condiciones suficientes sobre f que permitan probar, rigurosamente, que la fórmula propuesta es válida.

13. (**Propuesto en el examen del 20/09/06**) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ 0 \le t, \\ &u(x,0) = f(x),\quad u_t(x,0) = g(x),\ 0 \le x \le \pi \end{aligned} \qquad (ONH)$$

a) Interprétese (ONH) desde el punto de vista de la Física.
b) Defínase con precisión el concepto de solución de (ONH) y pruébese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución (sugerencia: método de la energía).
c) Si f y g son funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \cos(nx), \quad g(x) = \sum_{n=0}^{p} b_n \cos(nx),$$

siendo $a_n,\ 0 \le n \le m,\ b_n,\ 0 \le n \le p$, números reales dados, ¿cuál es la única solución de (ONH)?
d) Enúnciese un teorema general de existencia de soluciones de (ONH), proporcionando la fórmula de la única solución.

14. **(Propuesto en el examen del 20/09/06)**
a) Enunciado y demostración del principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.
b) Cálculese la única solución del problema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T \\ &\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0; \quad 0 < t \le T \\ &u(x,0) = \operatorname{sen}^3(x); \quad 0 \le x \le \pi \end{aligned}$$

(demuéstrese previamente que $\operatorname{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3x)\ ,\forall x \in \mathbb{R}$).

15. (**Propuesto en el examen del 28/06/06**)
a) Enúnciese con precisión el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.

b) Considérese el problema de tipo mixto

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \le t \le T, \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi,
\end{aligned}
$$

Si $f \equiv 0$, la única solución de (8) es $u \equiv 0$. Si $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, la única solución de (8) es $u(x,t) = \operatorname{sen}(2x)e^{-4t}$.
Si

$$
f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(2x), \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}
$$

1) ¿Es la función

$$
u(x,t) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(2x)e^{-4t}, \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}
$$

solución de (8)? Si la respuesta es negativa, razónese adecuadamente cuál (o cuáles) de las condiciones en (8) no se cumplen.

2) Calcúlese la única solución de (8).

CAPÍTULO III[1]: PROBLEMAS DE CONTORNO

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Extremos relativos para funciones derivables de varias variables reales.
2. Teorema de la divergencia (no imprescindible).
3. Funciones holomorfas complejas y funciones armónicas reales (no imprescindible).

Se pueden consultar las referencias:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático, Barcelona, Reverté, 1960.
2. I. Peral : Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se estudian las propiedades básicas de las ecuaciones de tipo elíptico así como algunos problemas de contorno asociados a este tipo de ecuaciones. Un papel importantísimo es desempeñado por un tipo especial de soluciones de la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

Recordemos que las soluciones de clase C^2 de la ecuación de Laplace se denominan funciones armónicas.
Cuando se buscan soluciones radiales de esta ecuación, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}\, u'(r) = 0 \tag{2}$$

donde $r = \left[(x_1 - \xi_1)^2 + ... + (x_n - \xi_n)^2\right]^{1/2}$.

Es claro que cualquier función constante es solución de (2). Además de éstas, las funciones ln r y r^{2-n} (o cualquier múltiplo de ellas) son, para $n = 2$ y $n \geq 3$ respectivamente, solución de (2). Estas últimas soluciones son las que definen la solución fundamental de (1).

[1]A. Cañada, Abril 2007, EDPMAT

Definición 1. *La solución fundamental de (1) se define como la función*

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \ln \dfrac{1}{|x-y|}, & n = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{n-2}\dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \tag{3}$$

donde $|\cdot|$ *indica la norma euclídea en* $\mathbb{R}^n$.

Observemos que la solución fundamental es una función simétrica y que, fijado $y \in \mathbb{R}^n$, la función $\Phi(x,y)$ es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. A continuación vamos a enunciar las **fórmulas de** *Green* para el operador Δ.

Teorema 2. *Sea* Ω *un dominio acotado y regular de* $\mathbb{R}^n$*; notemos por* $n(s)$ *el vector normal exterior a* Ω *en cada punto* $s \in \partial\Omega$*. Entonces:*
a) Si $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *se tiene*

$$\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) + <\nabla u(x), \nabla v(x)>\ ]\ dx = \int_{\partial\Omega} u(s)\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)}\ ds \tag{4}$$

(primera fórmula de Green).
b) Si $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *entonces*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)]\ dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[u(s)\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} - v(s)\frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} \right]\ ds \end{aligned} \tag{5}$$

(segunda fórmula de Green).

Para la demostración de la parte a), considérese el campo $A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $A(x) = u(x)\nabla v(x),\ \forall\ x \in \overline{\Omega}$. Por el Teorema de la divergencia se tiene que

$$\int_\Omega divA(x)\ dx = \int_{\partial\Omega} <n(s), A(s)>\ \ ds$$

lo que da (4). Para la parte b), simplemente aplíquese a) intercambiando los papeles de u y v y réstense después ambas expresiones.

El Teorema anterior nos va a permitir probar uno de los principales resultados de este tema: **la fórmula fundamental integral de** *Green*. En ella se va a representar cualquier función $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ y armónica en Ω, como suma de dos términos donde aparecen: la solución fundamental (3) y los valores de u y de $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ en $\partial\Omega$.

Teorema 3. *Sea Ω un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ una función armónica en Ω. Entonces:*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \Phi(x,y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} \right] \, ds(y) \tag{6}$$

para cualquier $x \in \Omega$, donde ω_n es el área de $S^{n-1}(1)$, esfera $n-1$ dimensional de radio 1 en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Nota. La esfera $n-1$ dimensional, S^{n-1}, se define como

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\}$$

y ω_n es el área de la misma (longitud si $n = 2$.) Por tanto

$$\omega_n = \int_{S^{n-1}} 1 \; ds$$

Puede probarse que $\omega_n = n v_n$, donde v_n es el volumen de la bola unidad de $\mathbb{R}^n$. La fórmula explícita que proporciona v_n es

$$v_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}, & \text{si} \quad n \text{ es par,} \\[2ex] \dfrac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{1 \cdot 3 \cdot ... n}, & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

Para la demostración del teorema anterior, si $x \in \Omega$, aplicando la segunda fórmula de Green (5) a las funciones $v(y) = \Phi(x,y), u(y)$, en el dominio $\Omega_\epsilon \equiv \Omega - \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x;\epsilon)}$, para ϵ suficientemente pequeño, se obtiene

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left[\Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} \right] \, ds(y) \; +$$

$$+ \int_{\partial B_{\mathbb{R}^n}(x;\epsilon)} \left[\Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y}{\partial n(y)} \right] \, ds(y).$$

Así el teorema estaría demostrado si probamos que

$$lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^n}(x;\epsilon)} \left[\Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y}{\partial n(y)} \right] \, ds(y) = -\omega_n u(x)$$

lo que no es difícil, teniendo en cuenta que en $\partial B_{\mathbb{R}^n}(x;\epsilon)$ se pueden calcular de manera explícita las funciones $\Phi(x,y)$ y $\dfrac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)}$. De hecho, en $\partial B_{\mathbb{R}^n}(x;\epsilon)$ se tiene

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon^{2-n}}{n-2}, & \text{si } n \geq 3, \\ -\ln \epsilon, & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} = \epsilon^{1-n}$$

De la fórmula anterior se deduce inmediatamente que cualquier función armónica en Ω es analítica en Ω.

También, dicha fórmula permite probar la **propiedad del valor medio para funciones armónicas:**

Teorema 4. *Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ y u cualquier función armónica en $B_{\mathbb{R}^n}(x; R)$ y continua en $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(x; R)}$. Entonces*

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{|y-x| \leq R} u(y)\ dy = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y-x|=R} u(s)\ ds(y) \tag{7}$$

Observemos que $\frac{\omega_n R^n}{n}$ es el volumen de la bola $|y - x| \leq R$ $(B_{\mathbb{R}^n}(x; R))$, mientras que $\omega_n R^{n-1}$ es el área de la esfera $|y - x| = R$.

Demostración: Sea $\rho \in (0, R)$. Utilizando (6) deducimos

$$u(x) = \frac{c}{\omega_n} \int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)}\ ds + \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-y|=\rho} u(s)\ ds,$$

donde c es una constante real. Ahora bien, de la segunda fórmula de *Green* se obtiene fácilmente que

$$\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)}\ ds = 0.$$

Luego

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|y-x|=\rho} u(s)\ ds.$$

Ahora tenemos una doble opción:
a) Tomar límites en la expresión anterior cuando $\rho \to R$, obteniéndose

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y-x|=R} u(s)\ ds.$$

b) Multiplicar por ρ^{n-1} e integrar, respecto de ρ, entre 0 y R, llegándose en este caso a la primera igualdad de (7).

De las fórmulas previas se deduce inmediatamente el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas. Este principio motiva el tipo de problemas que "de una manera lógica" se pueden asociar a la ecuación de Laplace: los problemas de contorno. Este hecho se ve corroborado en las aplicaciones de la teoría de ecuaciones elípticas a la Ciencia, donde tales problemas de contorno se presentan con frecuencia.

Teorema 5. *Sea Ω un dominio acotado de* $\mathbb{R}^n$ *y* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tal que* $\Delta u = 0$ *en* Ω*. Entonces*

$$max_{\overline{\Omega}} \;\; u = max_{\partial\Omega} \;\; u, \quad min_{\overline{\Omega}} \;\; u = min_{\partial\Omega} \;\; u,$$

Además, si u no es contante, ni el máximo ni el mínimo de u en $\overline{\Omega}$ *se alcanzan en* Ω*.*

Consideramos a continuación el llamado problema de Dirichlet

$$\begin{array}{c} \Delta u(x) = 0, \;\; x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), \;\; x \in \partial\Omega \end{array} \tag{8}$$

donde, en lo que sigue y salvo que explícitamente se indique otra cosa, Ω será un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$.
741 ,

Teorema 6. *Sea* $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0;1)$ *y f una función continua en* $\partial\Omega$*. Entonces, la única solución* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *de (8) es*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{\omega_n} \displaystyle\int_{|s|=1} \dfrac{-1+|x|^2}{|s-x|^n} \; f(s) \; ds, \;\; x \in \Omega, \\ \\ f(x), \;\; x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Las principales ideas de la demostración son las siguientes:
u es armónica en Ω puesto que $u \in C^\infty(\Omega)$, y además, si $x \in \Omega$, entonces

$$\Delta u(x) = \frac{-1}{\omega_n} \int_{|s|=1} \Delta_x \frac{-1+|x|^2}{|s-x|^n} \; f(s) \; ds = 0.$$

Para ver que $u \in C(\overline{\Omega})$, es suficiente con demostrar que, para $x_0 \in \partial\Omega$ arbitrario, se tiene

$$lim_{x \to x_0, \; x \in \Omega} \; u(x) = f(x_0). \tag{10}$$

Ahora bien, como la única solución del problema

$$\begin{array}{c} \Delta u(x) = 0, \;\; x \in \Omega, \\ u(x) = 1, \;\; x \in \partial\Omega, \end{array}$$

es la función constantemente 1, que es $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, por (18) se tiene

$$1 = \frac{-1}{\omega_n} \int_{|s|=1} \frac{-1+|x|^2}{|s-x|^n} \; ds, \;\; \forall \; x \in \Omega.$$

Luego, si $x \in \Omega, \;\; x_0 \in \partial\Omega$, se tiene

$$|u(x) - f(x_0)| \le \frac{1}{\omega_n} \int_{|s|=1} \frac{1-|x|^2}{|s-x|^n} \; |f(s) - f(x_0)| \; ds \equiv I$$

Si δ es un número real positivo suficientemente pequeño, la integral anterior puede descomponerse como

$$I = I_1 + I_2,$$

donde

$$I_1 = \frac{1}{\omega_n} \int_{|s|=1,\ |s-x_0|<\delta} \frac{1-|x|^2}{|s-x|^n}\ |f(s)-f(x_0)|\ ds,$$

$$I_2 = \frac{1}{\omega_n} \int_{|s|=1,\ |s-x_0|\geq\delta} \frac{1-|x|^2}{|s-x|^n}\ |f(s)-f(x_0)|\ ds.$$

Utilizando la continuidad de f en x_0, para cada $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $\delta(\epsilon)$ tal que $I_1 \leq \epsilon$. Para este $\delta(\epsilon)$, se tiene

$$I_2 \leq 2M(1-|x|^2)\ \frac{4^n}{\delta^n} \tag{11}$$

donde M es una cota cualquiera de la función $|f|$ en $\partial\Omega$. Es claro que (11) implica (10).

Nota. A la función

$$K(s,x) = \frac{1}{\omega_n}\ \frac{1-|x|^2}{|s-x|^n}$$

se le llama **núcleo de Poisson**.

Mediante un cambio de variable trivial, se puede resolver (8) en cualquier $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(a;R),\ a \in \mathbb{R}^n,\ R > 0$.

Corolario 7. *Si $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(a;R)$ y f es continua en $\partial\Omega$, la única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ de (8) es*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{R\omega_n} \displaystyle\int_{|s-a|=R} \dfrac{-R^2+|x-a|^2}{|s-x|^n}\ f(s)\ ds,\ x \in \Omega, \\ f(x),\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

A continuación aprovecharemos los resultados expuestos para obtener propiedades adicionales de las funciones armónicas.Comenzamos viendo que la propiedad del valor medio (Teorema 4) caracteriza a las mismas.

Teorema 8. *Sea Ω un dominio cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C(\Omega)$. Entonces u es armónica en Ω si y solamente si para cualquier $(x,R) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\overline{B_{\mathbb{R}^n}(x;R)} \subset \Omega, \tag{12}$$

se tiene

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_{\mathbb{R}^n}(x;R)} u(s)\ ds. \tag{13}$$

En efecto, si u es armónica en Ω, el Teorema 4 prueba que u satisface (13). Recíprocamente, sea u satisfaciendo (13), para cualquier (x, R) cumpliendo (12); tomemos $x_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tales que

$$\overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_0; R)} \subset \Omega.$$

Sea v la única solución del problema de Dirichlet

$$\begin{array}{c} \Delta v(x) = 0,\ x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0; R), \\ v(x) = u(x),\ x \in \partial B_{\mathbb{R}^n}(x_0; R). \end{array}$$

Entonces $u-v$ es una función continua en $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_0; R)}$ que satisface en este dominio el principio del máximo-mínimo, ya que ambas funciones u y v satisfacen la propiedad de la media. Como $v = u$ en $\partial\Omega$, se tiene $v = u$ en $\overline{\Omega}$, con lo que u es armónica en $B_{\mathbb{R}^n}(x_0; R)$. Como $x_0 \in \Omega$ es arbitrario, u es armónica en Ω.

Seguidamente probamos un Teorema conocido con el nombre de Teorema de Liouville, que nos afirma que las únicas funciones armónicas definidas en $\mathbb{R}^n$ que son además acotadas superior o inferiormente, son las funciones contantes:

Teorema 9. *Si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es armónica y acotada superior o inferiormente, u es constante.*

Para llevar a cabo la demostración, puesto que u es armónica si y sólo si $-u$ lo es, y para cualquier constante real c, u es armónica si y sólo si $u + c$ lo es, no es restrictivo demostrar el Teorema en el caso en que u es armónica y no negativa en $\mathbb{R}^n$. Para ello, pensemos que si $R > 0$, u es la única solución del problema de Dirichlet

$$\begin{array}{c} \Delta v(x) = 0,\ x \in B_{\mathbb{R}^n}(0; R), \\ v(x) = u(x),\ x \in \partial B_{\mathbb{R}^n}(0; R). \end{array}$$

Luego, por la fórmula de Poisson,

$$u(x) = \frac{1}{R\omega_n} \int_{|t|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-t|^n}\ u(t)\ dt,\ x \in B_{\mathbb{R}^n}(0; R).$$

Además, si $|t| = R$, entonces $|x-t| \geq |t| - |x| = R - |x|$, y $|x-t| \leq |t| + |x| = R + |x|$. Por tanto,

$$\frac{R^2 - |x|^2}{(R + |x|)^n} \int_{|t|=R} u(t)\ dt \leq R\omega_n u(x) \leq \frac{R^2 - |x|^2}{(R - |x|)^n} \int_{|t|=R} u(t)\ dt$$

que, utilizando la propiedad del valor medio, se traduce en

$$\frac{R^2 - |x|^2}{(R + |x|)^n} R^{n-2} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^2 - |x|^2}{(R - |x|)^n} R^{n-2} u(0).$$

Tomando límites en la anterior expresión cuando $R \to +\infty$, se tiene $u(x) = u(0)$; como $x \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, u es una función constante.

El siguiente resultado recibe el nombre de Teorema de Harnack y se refiere a la propiedad satisfecha por sucesiones de funciones armónicas que convergen uniformemente en la frontera de un dominio acotado cualquiera de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 10. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y $\{u_n\}$ una sucesión de funciones, cada una de las cuales es armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Si la sucesión $\{u_n\}$ es uniformemente convergente en $\partial\Omega$, entonces $\{u_n\}$ converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función u, que es armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$.*

En efecto, como $\{u_n\}$ converge uniformemente en $\partial\Omega$, el principio del máximo-mínimo implica que la sucesión $\{u_n\}$ es de *Cauchy* uniforme en $\overline{\Omega}$. Así, $\{u_n\}$ converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función continua u. Como cada u_n verifica la propiedad del valor medio en Ω, u también la verifica; luego u es armónica en Ω.

El capítulo continúa con el estudio de la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x) = g(x), \;\; x \in \Omega, \tag{14}$$

donde, salvo que explícitamente se indique otra cosa, Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función medible. Para ello, el punto de partida puede ser una generalización adecuada de la fórmula fundamental integral de Green (6) donde se representa cualquier función de clase $C^2(\overline{\Omega})$, como suma de una función armónica y un término de la forma

$$\int_\Omega \Phi(x,y)\Delta u(y) \; dy,$$

que ahora se transforma en

$$\int_\Omega \Phi(x,y) g(y) \; dy,$$

de tal manera que no es extraño que la función definida por la integral anterior (multiplicada por una constante conveniente), llamada **potencial Newtoniano con función densidad** g, desempeñe un papel fundamental en el estudio de (14). De hecho esto es así, pues se verá en este capítulo que cuando g cumple condiciones de regularidad apropiadas, el potencial Newtoniano de densidad g es solución de (14), salvo una constante no nula.

Las propiedades de regularidad del potencial Newtoniano se consiguen imponiendo a su vez propiedades de regularidad para la función de densidad g. Veremos que cuando g es acotada, entonces el potencial Newtoniano es de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$. Sorprendentemente, aunque g sea continua en Ω, el potencial Newtoniano no es necesariamente de clase $C^2(\Omega)$; esto obliga a exigir a g algo más de regularidad en orden a obtener que el potencial asociado sea de clase $C^2(\Omega)$.

Definición 11. *Si g es acotada en Ω, se llama* **potencial Newtoniano (o potencial de volumen) de densidad** g, *a la función $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$w(x) = \int_\Omega \Phi(x,y)g(y)\ dy. \tag{15}$$

Lema 12. *. Sea w el potencial de volumen definido por (15). Entonces $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$D_i w(x) = \int_\Omega D_i\Phi(x,y)g(y)\ dy,\ \ i = 1, \dots, n,$$

donde $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i},\ \ i = 1, \dots, n.$

Como ya hemos mencionado, la continuidad de g no es suficiente para conseguir que el potencial (15) sea de clase $C^2(\Omega)$. De hecho, si se intenta como en el lema previo probar que, dada g acotada, el potencial (15) es $C^2(\Omega)$ y que

$$D_{ij} w(x) = \int_\Omega D_{ij}\Phi(x,y)g(y)\ dy,$$

donde $D_{ij} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, el primer problema que surge es la existencia de las integrales anteriores; es más, dichas integrales no tienen que existir necesariamente, exigiendo sólo que g sea acotada.

Así pues, para poder demostrar que el potencial Newtoniano es $C^2(\Omega)$, es necesario exigir "algo más de regularidad" a la función densidad g.

Lema 13. *Sea g acotada y $C^1(\Omega)$. Si w es el potencial (15), se tiene que $w \in C^2(\Omega)$. Además,*

$$\Delta w(x) = -n\omega_n g(x),\ \ \forall\ x \in \Omega$$

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A.V. Bitsadze: Equations of Mathematical Physics. Mir Publishers, Moskva, 1980.
2. F. John: Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York - Heidelberg -Berlin, 1980.
3. A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. **Definición.** Una función de Green para (8) es una función $G : Dom(G) \equiv \{ [(\overline{\Omega} \times \Omega) \cup (\Omega \times \overline{\Omega})] - D \} \to \mathbb{R}$, donde $D = \{ (x,x) : x \in \Omega\}$, verificando: 1) $G(x,y) = \Phi(x,y) + g(x,y), \ \forall (x,y) \in Dom(G)$. Aquí, Φ es la solución fundamental definida en (3) y $g : [(\overline{\Omega} \times \Omega) \cup (\Omega \times \overline{\Omega})] \to \mathbb{R}$ es tal que, para cada $y \in \Omega$ fijo, la función $g(\cdot, y)$ es $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ y armónica en Ω.
2) $G(x,y) = 0$, si $x \in \partial\Omega$ ó $y \in \partial\Omega$.

Nota. Observemos que si la función G definida anteriormente existe, entonces, para cada $y \in \Omega$ fijo, la función $g(x,y)$, como función de x, es solución del problema

$$\begin{gathered} \Delta g(x,y) = 0, \ x \in \Omega, \\ g(x,y) = -\Phi(x,y), \ x \in \partial\Omega, \end{gathered}$$

por lo que, aplicando el principio del máximo-mínimo, g, y por tanto G, es única.

Una de las grandes utilidades de la función de Green es que mediante su uso, se obtiene una fórmula explícita para la (posible) solución de (8). Detallemos esto un poco más. Para ello, supongamos que puede demostrarse que la solución de (8) está en el conjunto $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Entonces, aplicando la **segunda fórmula de Green** a las funciones $g(x,s), u(s)$, se obtiene

$$0 = \int_{\partial\Omega} g(x,s) \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} \ ds - \int_{\partial\Omega} u(s) \frac{\partial g(x,s)}{\partial n(s)} \ ds, \ \forall \ x \in \Omega. \tag{16}$$

Por otro lado, por la fórmula fundamental integral de Green (6), se tiene

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \Phi(x,s) \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} \ ds - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} u(s) \frac{\partial \Phi(x,s)}{\partial n(s)} \ ds, \ \forall \ x \in \Omega. \tag{17}$$

Sumando término a término (16) y (17), obtenemos

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} u(s) \frac{\partial G(x,s)}{\partial n(s)} \ ds + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} G(x,s) \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} \ ds, \ \forall \ x \in \Omega.$$

de donde se concluye

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} u(s) \frac{\partial G(x,s)}{\partial n(s)} \ ds, \ \forall \ x \in \Omega. \tag{18}$$

Lema 14. *Si $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0;1)$, la función de Green es*

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(x,y) - \Phi(|y|x, \dfrac{y}{|y|}), & si \ \ y \neq 0, \\ \\ \Phi(x,0) - \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n(n-2)}, & si \ \ n \geq 3, \ y = 0, \\ \\ 0, \ \ si \ \ n = 2, y = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{19}$$

Puede ahora probarse que si G viene dada por la expresión (19), entonces

(20) $$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} = \frac{-1+|x|^2}{|y-x|^n}, \ \forall\ x \in \Omega, \ \forall\ y \in \partial\Omega.$$

Utilizando (18) y (20) se justifica el enunciado del Teorema 6, donde aparece la célebre **fórmula de Poisson**.

2. El uso del método de separación de variables para el problema de Dirichlet

(21) $$\begin{array}{c} \Delta u(x,y) = 0, \ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}, \\ u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in \partial\Omega. \end{array}$$

siendo f una función continua, es especialmente interesante si se quiere hacer énfasis en los métodos de Fourier clásicos. Para ello, realizando un cambio a coordenadas polares (ρ, ϕ), llegamos a un problema del tipo

(22) $$\begin{array}{c} \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \ 0 < \rho < 1, \ \phi \in \mathbb{R}, \\ \\ u(1,\phi) = g(\phi), \ \phi \in \mathbb{R}, \end{array}$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y 2π-periódica ($g(\phi) = f(cos\phi, sen\phi)$). Aplicando el método clásico de separación de variables a (22), se concluye que cuando $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, (22) tiene una solución dada por

(23) $$u(\rho,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n cosn\phi + B_n senn\phi),$$

donde $\{A_n, B_n\}$ son los coeficientes de Fourier de g, es decir

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\ d\phi,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) cosn\phi\ d\phi, \ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) senn\phi\ d\phi, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, la serie (23) se puede sumar, llegándose al final a la fórmula de Poisson

$$u(\rho,\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\psi)\frac{1-\rho^2}{\rho^2 - 2\rho cos(\phi-\psi)+1}\ d\psi, \ \rho < 1, \\ g(\phi), \ \rho = 1. \end{cases}$$

Esta fórmula tiene la ventaja de que la solución viene dada por una serie, lo que puede utilizarse para procedimientos de aproximación. Además, dicha fórmula puede usarse para calcular la solución del problema de Dirichlet para

diversas funciones g concretas (fundamentalmente del tipo $sen^n \phi, cos^m \phi$, o productos y combinaciones lineales finitas de ellas).
El método de separación de variables puede usarse para estudiar una amplia clase de problemas: el problema de Dirichlet en el exterior de una bola, el problema de Dirichlet en un rectángulo, el problema de Neumann en el interior de una bola, el problema de Neumann en el exterior de una bola, los problemas de Dirichlet y Neumann para un anillo circular, etc. Se puede consultar para ello la referencia: A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

3. En problemas variacionales relacionados con EDP, el principio de Dirichlet suele considerarse el punto de partida. Para ello, sea Ω un dominio (subconjunto abierto y conexo) acotado de $\mathbb{R}^n$. Consideremos el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{24}$$

Lo que se trata es del estudio de la existencia de funciones armónicas en Ω que tomen valores prefijados, dados por la función f, en la frontera de Ω.

En el estudio de este problema desde el punto de vista variacional, se considera el llamado funcional de energía:

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx \tag{25}$$

que está definido sobre el conjunto de funciones:

$$\mathcal{A} = \left\{ u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega), u_{|\partial\Omega} = f \right\} \tag{26}$$

(o un conjunto más amplio que se precisará en su momento). En electrostática, u es el potencial eléctrico y $F(u)$ la energía.

Los puntos estacionarios de F son, en algún sentido que se ha de precisar, soluciones del problema (24) (principio de Dirichlet). Se puede consultar: B. Dacorogna, Introduction to the calculus of variations, Imperial College Press, 2004.

EJERCICIOS

1. Sea u una función armónica en un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, C es una matriz cuadrada de orden n ortogonal y $h \in \mathbb{R}^n$, demuéstrese que la función $v(x) \equiv u(\lambda Cx + h),\ x \in \Omega'$ es también armónica, donde $\Omega' = C^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}(\Omega - h)\right)$.

2. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $\Phi(x,s)$ la solución fundamental de la ecuación de Laplace $n-$dimensional. Demuéstrese que
$$\frac{\partial \Phi(x,s)}{\partial n(s)} = -\varepsilon^{1-n},$$
para todo $s \in \partial B(x;\varepsilon)$.
3. Sea u una función armónica en un dominio Ω de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$. Demuéstrese que los ceros de u en Ω no son aislados.
4. Demuéstrese que el problema de Neumann $\Delta u(x) = 1,\ x \in \Omega;\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = 2,\ x \in \partial\Omega;\ \Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0;1)$, no tiene solución.
5. Demuéstrese que si u es solución del problema $\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega;\ (u_x^2 + u_y^2)u = 0,\ x \in \partial\Omega;\ \Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0;1)$, entonces u es constante.
6. Demuéstrese que si u es solución del problema $\Delta u(x) = u^3(x),\ x \in \Omega;\ u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega$ entonces $u \equiv 0$.
7. Demuéstrese que el problema de Dirichlet $\Delta u(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega};\ u(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega$, con $f \in C(\partial\Omega)$ y $\Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0;1)$ no tiene necesariamente solución única (puede demostrarse que existe a lo sumo una solución acotada; véase el libro de Tijonov-Smarsky).
   Demuéstrese que el resultado anterior no es cierto si $\Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0;1)$.
8. Encontrar la única solución del problema de Dirichlet
$$\Delta u(x,y) = 0,\ x^2 + y^2 < 1;\quad u(x,y) = f(x,y),\ x^2 + y^2 = 1,$$
para las siguientes condiciones de contorno:
   a) $f(x,y) = a + by,\ a, b \in \mathbb{R}$
   b) $f(x,y) = axy,\ a \in \mathbb{R}$
   c) $f(x,y) = x^2$
   d) $f(x,y) = x^2 - y^2$
   Las condiciones frontera que siguen se dan en coordenadas polares
   e) $f(\cos\varphi, \mathrm{sen}\varphi) = c\cos\varphi$
   f) $f(\cos\varphi, \mathrm{sen}\varphi) = a + b\,\mathrm{sen}\varphi$
   g) $f(\cos\varphi, \mathrm{sen}\varphi) = a\,\mathrm{sen}^2\varphi + b\cos^2\varphi$
   h) $f(\cos\varphi, \mathrm{sen}\varphi) = \mathrm{sen}^3\varphi$.
   i) $f(\cos\varphi, \mathrm{sen}\varphi) = \cos^4\varphi$.
   j) $f(\cos\varphi, \mathrm{sen}\varphi) = \cos^6\varphi + \mathrm{sen}^6\varphi$.
9. Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno
$$\begin{gathered} u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < 1, \\ u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u(x,1) = f(x) \end{gathered}$$
10. Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno
$$\begin{gathered} u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < 1, \\ u_x(0,y) = 0,\ u_x(\pi,y) = 0,\ u(x,0) = \cos x,\ u(x,1) = \mathrm{sen}^2 x. \end{gathered}$$

11. Calcúlese la única solución del problema de contorno para la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x,y,z) = g(x,y,z),\ (x,y,z) \in \Omega;\quad u(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in \partial\Omega,$$

para los casos siguientes:

a) $g(x,y,z) = 1,\quad \Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0;a),\ a > 0.$

b) $g(x,y,z) = Ar+B,\ A,B \in \mathbb{R},\ r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2},\ \Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0;a),\ a > 0.$

c) $g(x,y,z) = 1,\ \Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0;a) \setminus B_{\mathbb{R}^3}(0;b),\ a > b > 0.$

12. **Propuesto en el examen del 18/06/2004.** Considérese el problema de Dirichlet

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega \equiv B_{\mathbb{R}^n}(0;1),\quad u(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega \tag{27}$$

Demuéstrese que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un polinomio, entonces la única solución de (27) es un polinomio del mismo grado que f.

13. **Propuesto en Ingeniería de Caminos el 03/02/2005.** Considérese la ecuación de Laplace n-dimensional

$$\Delta u(x) = 0 \tag{28}$$

Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es solución de (28) de la forma $u(x) = v(\|x\|)$, con $v : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0,+\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0,\ \forall\, r \in (0,+\infty). \tag{29}$$

Recíprocamente, si v verifica (29) entonces $u(x) = v(\|x\|)$ verifica (28) en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Teniendo en cuenta esto, calcúlese la única solución del problema

$$\begin{gathered}\Delta u(x,y) = 1,\ b^2 < x^2+y^2 < a^2,\\ u(x,y) = 0,\ \text{si}\ \ x^2+y^2 = b^2\ \ \text{ó}\ \ x^2+y^2 = a^2\end{gathered}$$

14. **Propuesto en el examen del 25/06/05.** Pruébese que la ecuación

$$\Delta u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}, \tag{30}$$

se transforma en

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0,\ 0 < \rho < 1,\ \phi \in \mathbb{R}, \tag{31}$$

mediante el cambio a coordenadas polares $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\phi$.

15. (**Propuesto en el examen del 20/09/2006**)

a) Usando la propiedad del valor medio para funciones armónicas, enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para esta clase de funciones.

b) Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$\begin{gathered}u_{xx}+u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi,\\ u_y(x,0) = 0,\ u_y(x,\pi) = 0,\ u(0,y) = \cos y,\ u(1,y) = \mathrm{sen}^2 y.\end{gathered}$$

16. (**Propuesto en el examen del 28/06/2006**)

a) Enúnciese la propiedad del valor medio para funciones armónicas, tanto para bolas como para esferas.

b) Usando la propiedad anterior, enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas.

c) Considésere el problema de Dirichlet

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega,\quad u(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega \tag{32}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$. Supongamos la hipótesis siguiente:

(H): la única solución de (32) se puede calcular explícitamente siempre que la función f es un polinomio.

Sea ahora la función $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida como $f_0(x) = e^{x_1},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ y u_{f_0} la única solución de (32) con dato frontera f_0. Usando la hipótesis **(H)** y el principio del máximo-mínimo, demuéstrese que existe una sucesión de funciones $\{u_n\}$, que se puede calcular explícitamente, tal que $\{u_n\} \to u_{f_0}$ uniformemente en $\overline{\Omega}$.

CAPÍTULO IV: EL PROBLEMA DE CAUCHY [1]

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Noción de problema de Cauchy (o problema de valores iniciales, p.v.i.) para una e.d.o. Teorema de existencia y unicidad de soluciones de un p.v.i. para un sistema de e.d.o. (Teorema de Picard-Lindelöf). Teorema de regularidad de la solución general, respecto de los parámetros que aparecen en la e.d.o.
2. Teorema de la función inversa para funciones de varias variables reales.
3. Fórmula de Green en el plano (no imprescindible).

Se pueden consultar las referencias:

1. E.A. Coddington y N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill, Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1.955.
2. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1.960.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El capítulo comienza con el estudio del problema de Cauchy para la ecuación del calor

$$\begin{array}{c} u_t(x,t) = \Delta_x u(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{1}$$

Si $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > 0\}$, una solución de (1) es una función $u \in C^2_x(\Omega) \cap C^1_t(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que verifica (1) puntualmente. En consonancia con esto, suponemos $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$.
La primera nota de interés es que, en general, (1) no tiene solución única. Por ejemplo, si

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-1/t^2),\ t \neq 0, \\ 0,\ t = 0 \end{cases}$$

una solución no trivial de (1) para $\varphi \equiv 0$ es la función $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} f^{n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
Usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor puede probarse que (1) tiene, a lo sumo, una solución acotada. Se trataría ahora de probar existencia,

[1] A. Cañada, Mayo 2007, EDP

imponiendo que φ sea una función acotada. Vamos por partes. Una versión del principio del máximo mínimo es el objeto del próximo teorema.

Teorema 1.. *Sea ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $T > 0$. Notemos $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega,\ 0 < t < T\}$. Entonces si $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifica*

$$u_t - \Delta_x u \leq 0, \text{ en } \Omega, \tag{2}$$

se tiene que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial_1 \Omega} u, \tag{3}$$

donde $\partial_1 \Omega$ es la denominada frontera parabólica de Ω que se define como

$$\partial_1(\Omega) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \partial\omega,\ 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in \omega,\ t = 0\}.$$

Para la demostración, primero se considera el caso en que se tiene una desigualdad estricta en (2) y el dominio es $\Omega_\varepsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, 0 < t \leq T - \varepsilon\}$. Después se hace tender ε a cero. Para el caso en que en (2) se tiene una desigualdad no estricta, se considera la función auxiliar $v(x,t) = u(x,t) - kt$, con k conveniente.
Usando el principio del máximo-mínimo en dominios de la forma $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0;R) \times (0,T)$, puede probarse la unicidad de soluciones acotadas de (1). La existencia es cosa aparte. Por cierto, que para motivar la fórmula que define la solución se usan algunas nociones elementales de la transformada de Fourier. De hecho, esta es una de las motivaciones más bonitas que conozco de la noción de transformada de Fourier, donde se pone de manifiesto el paso del caso discreto (series), al caso continuo (transformada integral). Las ideas fundamentales son las siguientes:

En primer lugar, simplificamos la situación suponiendo que $n = 1$ y que para φ acotada, buscamos soluciones u acotadas. La búsqueda de soluciones de la forma particular $u(x,t) = X(x)T(t)$, da lugar a las e.d.o.

$$\begin{aligned} X''(x) \ &- \ \lambda X(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ T'(t) \ &- \ \lambda T(t) = 0,\ t > 0. \end{aligned}$$

Es elemental probar que la primera ecuación tiene soluciones no triviales acotadas si y solamente si $\lambda \leq 0$, de tal manera que, en adelante, sólo nos interesarán estos valores del parámetro λ. Así pues, las anteriores ecuaciones pueden escribirse de la forma

$$\begin{aligned} X''(x) \ &+ \ \lambda^2 X(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ T'(t) \ &+ \ \lambda^2 T(t) = 0,\ t > 0. \end{aligned}$$

Esto permite afirmar que, para λ un número real cualquiera, la función

$$A(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}$$

con $A(\lambda)$ una constante (que depende de λ), es una solución (compleja) acotada de la ecuación del calor.
Si la función $\varphi(x)$ fuese de la forma $\varphi(x) = c\, e^{i\lambda x}$ para algún λ y c reales, el problema estaría resuelto; ahora bien, esto no es así en general, de tal forma que la pregunta básica puede ser la siguiente:

¿ Será posible calcular la (única) solución acotada de (1) teniendo en cuenta de alguna manera todas las soluciones acotadas anteriores?. Una manera intuitiva de hacer esto es "sumar" todas las soluciones, es decir, considerar la función

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x} \, d\lambda,$$

donde $A(\lambda)$ se debe escoger para que

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} \, d\lambda.$$

De la teoría de Transformada de Fourier se sabe que, cuando φ y A cumplen algunas condiciones adicionales (por ejemplo, $\varphi, A \in L^1(\mathbb{R})$), entonces

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-i\lambda y} \, dy.$$

Sustituyendo la anterior expresión, agrupando convenientemente y teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-i\alpha)^2} \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \, du = (\pi)^{1/2}, \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R},$$

llegamos finalmente a que la única solución acotada de (1) puede ser la función

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,\xi,t) \varphi(\xi) \, d\xi, \quad \text{para} \quad t > 0,$$

donde

$$K(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-(x-\xi)^2/4t}.$$

Para n arbitrario, la función que se obtiene en el proceso anterior, es

$$K(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{\ -\|x-\xi\|^2/4t},$$

a la que se llama núcleo (o solución fundamental) de la ecuación del calor.
Al final el teorema queda como sigue.

Teorema 2.. *Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, la única solución acotada de (1) viene dada por la fórmula*

$$u(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x-\xi\|^2/4t) \varphi(\xi) \, d\xi, \ t > 0, \\ \varphi(x), \ t = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Además, u es de clase C^∞ para $t > 0$.

La demostración usa las siguientes propiedades (de comprobación inmediata) del núcleo K :
1) $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.
2) $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) K(x,\xi,t) = 0, \ \forall \ t > 0.$

3) $K(x,\xi,t) > 0,\ \forall\ t > 0$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(x,\xi,t)\ d\xi = 1, \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ t > 0.$
4) Para cualquier $\delta > 0$, se tiene

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\|\xi - x\| > \delta} K(x,\xi,t)\ d\xi = 0,$$

de manera uniforme para $x \in \mathbb{R}^n$.

Una vez puestas de manifiesto las propiedades básicas de K, la comprobación de que $u \in C^\infty(\Omega)$ es trivial así como que u satisface el problema (1). La continuidad de u en $\overline{\Omega}$ puede probarse teniendo en cuenta la igualdad

$$u(x,t) - \varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)(\varphi(y) - \varphi(\xi))\ dy$$

y a continuación expresando la integral anterior como suma de dos sumandos, donde en el primero de ellos, ξ está "cerca"de x; por último, teniendo en cuenta la continuidad de φ se prueba que $u \in C(\overline{\Omega})$.

El capítulo continua con el estudio del problema de Cauchy para la ecuación de ondas. Comenzamos estudiando el mismo para la ecuación de ondas en dimensión uno, tanto homogénea (método de propagación de las ondas) como no homogénea. La segunda parte la dedicamos al estudio del problema de Cauchy para la ecuación de ondas en dimensiones superiores a uno. El método utilizado aquí se conoce con el nombre de método de las medias esféricas y permite resolver el problema citado (con la ayuda de la solución del problema unidimensional) cuando la dimensión de las variables espaciales es impar. El método del descenso resuelve, a partir del caso anterior, el caso en que tal dimensión es par.

Este capítulo es muy adecuado para que los alumnos saquen conclusiones en relación con los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Por ejemplo, debe destacarse el hecho de que no cabe esperar la existencia, para ecuaciones hiperbólicas, de principios del máximo-mínimo semejantes a los de ecuaciones elípticas o parabólicas. La falta de efecto regularizante sobre los datos iniciales, así como la velocidad finita de propagación de perturbaciones, son otros hechos que distinguen a las ecuaciones hiperbólicas de las parabólicas. También hay semejanzas y, por ejemplo, la manera de solucionar el problema de Cauchy no homogéneo en dimensión uno, está basada en la obtención de una fórmula integral de representación de funciones regulares que utiliza ahora las derivadas parciales propias de la ecuación de ondas (fórmulas análogas se prueban en el caso parabólico).
Incluso, moviéndonos dentro del tema de la ecuación de ondas, se observan notables diferencias dependiendo de que la dimensión de las variables espaciales sea impar o par (por ejemplo, el principio de Huygens es válido en dimensión 3 y no en dimensión 2. También, lo que es el dominio de dependencia de un punto, cambia con el problema considerado. Creo que la sensación (no desprovista de razón) puede ser que la variedad es tan grande, que habría que considerar los distintos casos por separado;

sin embargo, nada más lejos de la realidad, pues cuando se desarrolla con detalle la teoría se observa que el éxito en el estudio de diversos problemas depende en gran parte de otros que se deben haber estudiado previamente (por ejemplo, la ecuación de ondas en dimensiones superiores se estudia aprovechando el estudio realizado en el caso unidimensional; también, la ecuación de ondas no homogénea en dimensiones superiores se estudia a través de los resultados obtenidos para el caso homogéneo). En definitiva, se pone de manifiesto una característica de toda la Matemática: la diversidad de métodos, situaciones y conclusiones diferentes que pueden presentarse, pero también la íntima relación que en muchísimas ocasiones existe entre ellos.

El problema de Cauchy para la ecuación de ondas homogénea en dimensión uno se escribe como

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \alpha(x),\ x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \beta(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Observemos que las condiciones iniciales se dan sobre la recta $t = 0$ que no es una curva característica de la ecuación de ondas (de hecho, las curvas características son de la forma $h(t,x) = 0$, donde $h_t^2 - h_x^2 = 0$). Además, sobre la curva inicial se dan dos datos: la solución u y el valor de su derivada normal, respecto de la curva citada.

Indicaremos por Ω al conjunto

$$\Omega = \ \{ \ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t > 0 \ \}.$$

Una solución de (5) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, que verifica (5) en todo punto.

El próximo resultado se refiere a la existencia y unicidad de soluciones de (5). La fórmula que aparece en él se llama fórmula de D'Alembert.

Teorema 3.. *Si $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$ y $\beta \in C^1(\mathbb{R})$, (5) tiene una única solución dada por la fórmula*

$$\begin{aligned} u(x,t) \ &= \frac{1}{2}[\alpha(x+t) \ + \ \alpha(x-t)] \ + \ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \beta(s)\ ds, \\ &\forall \ (x,t) \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{6}$$

En la demostración se usa el cambio de variable $\xi = x + t,\ \mu = x - t$, que transforma la ecuación $u_{tt} - u_{xx} = 0$ en $u_{\xi\mu} = 0$. Por tanto, cualquier solución de (5) debe ser de la forma

$$u(x,t) = H(x+t) \ + \ G(x-t),$$

donde $H \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Imponiendo las condiciones iniciales se llega fácilmente a la conclusión de que

$$H(x) = \frac{1}{2}\ \alpha(x)\ +\ \frac{1}{2}\int_0^x \beta(s)\ ds\ +\ c_1,$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\ \alpha(x)\ -\ \frac{1}{2}\int_0^x \beta(s)\ ds\ +\ c_2,$$

donde c_1, c_2 son constantes a determinar. Usando que $u(x,0) = \alpha(x)$, se obtiene $c_1 + c_2 = 0$, por lo que se obtiene (6).

1) La solución dada por (6) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} u(x,t)\ &= \frac{1}{2}\left[\alpha(x+t)\ +\ \int_0^{x+t} \beta(s)\ ds\right]\ + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\alpha(x-t)\ -\ \int_0^{x-t} \beta(s)\ ds\right], \end{aligned}$$

o sea,

$$u(x,t) = u_1(x,t)\ +\ u_2(x,t),$$

donde

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\alpha(x+t)\ +\ \int_0^{x+t} \beta(s)\ ds\right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left[\alpha(x-t)\ -\ \int_0^{x-t} \beta(s)\ ds\right].$$

Así, u es "suma o superposición de dos ondas" u_1 y u_2, que se desplazan, respectivamente, a la izquierda y a la derecha, con velocidad uno. De aquí, que al método utilizado en la demostración del teorema 3, se le llame método de propagación de las ondas.

2) Notemos en segundo lugar que la ecuación de ondas no tiene efecto regularizante sobre los datos iniciales, puesto que de (6) no cabe esperar que u tenga más regularidad que α.

3) De (6), se obtiene que el valor de u en un punto (x_0, t_0) de Ω, depende de los valores de α en los puntos $x_0 + t_0$ y $x_0 - t_0$ así como de los valores de β en el intervalo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$; de aquí que al intervalo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ se le llame **dominio de dependencia** del punto (x_0, t_0).
Precisamente, el dominio de dependencia de un punto (x_0, t_0), viene determinado por los puntos de intersección de las dos rectas características que lo contienen, es decir, las rectas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + t &= x_0 + t_0, \\ x - t &= x_0 - t_0, \end{aligned}$$

con el eje $t = 0$.
Al triángulo determinado por los puntos $(x_0, t_0), (x_0 - t_0, 0)$ y $(x_0 + t_0, 0)$ se le denomina triángulo característico del punto (x_0, t_0).

4) Los efectos de las perturbaciones no son instantáneos, como en el caso de la ecuación del calor, sino que éstas se propagan ahora con velocidad finita. Tal afirmación se puede comprender fácilmente si se considera el caso en que las funciones α y β son ambas idénticamente nulas; entonces la única solución de (5) es la función $u \equiv 0$. Si mantenemos $\beta \equiv 0$ y tomamos una función α que sea no nula y positiva solamente "cerca"de un punto dado $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces si x_1 es cualquier otro punto diferente de x_0, el valor $u(x_1, t)$ será cero para pequeños valores de t, (aunque no para valores "grandes"de t). Esto se puede cuantificar perfectamente teniendo en cuenta quién es el dominio de dependencia del punto (x_1, t).

5) Dado $(x_0, 0)$, el dominio de influencia de éste punto será el conjunto de todos aquellos puntos de Ω tales que su dominio de dependencia incluya al punto x_0.

Pasamos a continuación a considerar el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea:

$$
\begin{array}{c}
u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\
u(x,0) = \alpha(x), \ x \in \mathbb{R}, \\
u_t(x,0) = \beta(x), \ x \in \mathbb{R}.
\end{array} \tag{7}
$$

Como en (5), una solución de (7) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que cumple (7) puntualmente.

El estudio del problema anterior se va a realizar obteniendo una fórmula integral que representa a cualquier función regular en $\overline{\Omega}$, utilizando para ello las derivadas parciales que aparecen en la ecuación de ondas.

Lema 4.. *Sea $(x_0, t_0) \in \Omega$ y T su triángulo característico. Entonces si u es cualquier función real perteneciente a $C^2(\overline{T})$, se tiene*

$$
\begin{aligned}
u(x_0, t_0) \ &= \frac{1}{2} \ [u(x_0 + t_0, 0) \ + \ u(x_0 - t_0, 0) \ ] \ + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} u_t(s, 0) \ ds \ + \\
&+ \frac{1}{2} \int_T (u_{tt} - u_{xx})(\xi, \tau) \ d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Para la demostración se procede como sigue: Por la fórmula de Green en el plano, se tiene

$$\int_T (u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau = \int_{\partial T} (-u_t(\xi,\tau)\ d\xi - u_x(\xi,\tau)\ d\tau,$$

donde ∂T está orientada positivamente.
La integral de línea anterior se descompone en tres sumandos, correspondientes, respectivamente, a los lados del triángulo T. Parametrizando cada uno de estos lados, se pueden calcular de manera explícita las integrales resultantes, obteniéndose (8).

Escribiendo la integral

$$\int_T (u_{tt} - u_{xx})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau$$

de la forma

$$\int_0^{t_0} \int_{\tau+x_0-t_0}^{-\tau+x_0+t_0} (u_{tt} - u_{xx})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau,$$

se dispone de una fórmula que proporciona la posible solución de (7). Esto se confirma en el siguiente teorema:

Teorema 5.. *Sean* $\alpha \in C^2(\mathbb{R}),\ \beta \in C^1(\mathbb{R})$ *y* $f, \dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(\overline{\Omega})$.
Entonces la única solución de (7) es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[\alpha(x+t)\ +\ \alpha(x-t)] + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \beta(s)\ ds + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\ d\xi d\tau, \\ &\forall\ (x,t) \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Seguidamente nos planteamos el estudio del problema de Cauchy para la ecuación de ondas en dimensiones superiores a uno. Se realizará de manera detallada para los casos $n = 2$ y $n = 3$, representativos de lo que ocurre, respectivamente, para n par e impar, generales.

Sea el problema

$$(9) \qquad \begin{array}{c} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt},\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,y,z,0) = \phi(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{array}$$

Si $\Omega = \ \{\ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ :\ \ t > 0\ \}$, una solución de (9) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que satisface (9) en todo punto.

El método que vamos a utilizar para solucionar (9) se denomina método de las medias esféricas y sus ideas fundamentales son las siguientes:

1) Si u es cualquier solución de (9) y $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es un punto dado, se puede definir la función

$$I(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x,y,z);\ r)} u(y_1, y_2, y_3, t)\ ds,$$

donde $S((x, y, z);\ r)$ es la esfera centrada en (x, y, z), de radio r, y la integral anterior es una integral de superficie en las variables (y_1, y_2, y_3).

Claramente, la función anterior, llamada media esférica de u, está definida para cualquier $r > 0$ y cualquier $t \geq 0$. Además, los valores $I(r, 0)$, $I_t(r, 0)$, se calculan a partir de los datos iniciales de (9); en efecto,

$$I(r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x,y,z);\ r)} \phi(y_1, y_2, y_3)\ ds \equiv F(r),$$

$$I_t(r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x,y,z);\ r)} \psi(y_1, y_2, y_3)\ ds \equiv G(r).$$

2) El objetivo es, a partir de las funciones F y G, calcular $I(r, t)$. Posteriormente, observando que la continuidad de u, implica

$$u(x, y, z, t) = \lim_{r \to 0^+} I(r, t),$$

llegaríamos a una expresión para la función u, que tendríamos que demostrar que define una solución de (9).

La anterior discusión permite enunciar y probar el siguiente teorema sobre existencia y unicidad de soluciones de (9):

Teorema 6.. *Si* $\phi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ *y* $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, *el problema de Cauchy (9) tiene una única solución* u *dada, para* $t > 0$, *por*

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int_{S((x,y,z);\ t)} \phi(Y)\ ds_Y\right] + \\ &+ \frac{1}{4\pi t}\int_{S((x,y,z);\ t)} \psi(Y)\ ds_Y, \end{aligned} \tag{10}$$

Merece la pena realizar algunos comentarios sobre la conclusión del teorema anterior, y compararlos con los que hicimos sobre la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas homogénea en dimensión uno. Por ejemplo, el valor $u(X, t)$ depende de los valores de ψ, ϕ y de los de las derivadas parciales de primer orden de la función ϕ en la esfera centrada en X y de radio t (principio de Huygens). Así, este conjunto puede considerarse ahora como el dominio de dependencia de un punto (X,t). Recíprocamente, los datos iniciales ϕ y ψ cerca de un punto X_0 del hiperplano $t=0$, sólo tienen influencia en los valores $u(X,t)$ para aquellos puntos (X,t) que están "cerca"del cono $|X-X_0|=t$. Por tanto, si ϕ y ψ tienen soporte contenido en algún subconjunto D de $\mathbb{R}^3$, para que $u(X,t)$ no sea cero, el punto X debe pertenecer a alguna esfera de radio t con centro en algún punto $Y \in D$. La unión de todas estas esferas contiene al soporte de la función u en el tiempo t. Esto es típico de las soluciones de la ecuación de ondas en dimensiones impares.

Seguidamente, aprovechamos los resultados obtenidos sobre el problema (9), para estudiar el problema de Cauchy en dimensión dos:

$$
\begin{aligned}
u_{xx}+u_{yy} &= u_{tt},\ (x,y)\in \mathbb{R}^2,\ t>0,\\
u(x,y,0) &= \phi(x,y),\ (x,y)\in \mathbb{R}^2,\\
u_t(x,y,0) &= \psi(x,y),\ (x,y)\in \mathbb{R}^2.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Si $\Omega = \{\ (x,y,t) \in \mathbb{R}^3 :\ t>0\ \}$, una solución de (11) es cualquier función $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ que satisfaga (11) en todo punto.

A partir de la fórmula que proporciona la única solución de (9), aplicaremos el llamado **método del descenso** para encontrar la fórmula de la solución de (11).

Teorema 7. . *Si $\phi \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, el problema (11) tiene una única solución dada por*

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) \ &= \frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|\le 1} \frac{\psi(x+t\xi_1,y+t\xi_2)}{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^{1/2}}\ d\xi_1 d\xi_2\ + \\
&+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|\le 1} \frac{\phi(x+t\xi_1,y+t\xi_2)}{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^{1/2}}\ d\xi_1 d\xi_2\right].
\end{aligned} \tag{12}
$$

Quizás la novedad más importante sea lo que es ahora el dominio de dependencia de un punto (x,y,t) de Ω. Claramente se observa, a partir de las dos fórmulas anteriores, que éste debe ser la bola euclídea cerrada de centro (x,y) y radio t. Esto marca una profunda diferencia entre los casos $n=3$ (donde es válido el principio de Huygens) y $n=2$ (donde tal principio no se verifica).

En la última parte del tema nos ocupamos del problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea. Respecto de la existencia de soluciones, puede utilizarse el llamado método de Duhamel, que recuerda al método de variación de las constantes, utilizado para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, supuesto que la ecuación homogénea puede resolverse (como es nuestro caso). Dicho método consiste en "sumar de manera continua", es decir, integrar, toda una familia uniparamétrica de soluciones de problemas de Cauchy del tipo que ya hemos estudiado.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A.V. Bitsadze: Equations of Mathematical Physics. Mir Publishers, 1980.
2. F. John. Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1982.
3. I. Peral, Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.
4. A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. Es también de interés el estudio del problema de Cauchy para ecuaciones casilineales de primer orden, de la forma

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \tag{13}$$

Este tipo de ecuaciones aparece, por ejemplo, en Dinámica de poblaciones (ecuación de Mckendrik-Von Foerster), así como en diversos problemas de Geometría y Óptima Geométrica. El problema de Cauchy se plantea como el estudio de la existencia (unicidad, etc.) de soluciones de la ecuación anterior tales que la superficie integral asociada contenga a una curva dada Γ del espacio euclídeo tridimensional.
Es fácil motivar con ejemplos que, a diferencia de lo que ocurre con e.d.o., la regularidad de los coeficientes a, b y c, así como de la curva inicial Γ, no es suficiente para la existencia de solución. Por ejemplo, el problema $u_x + u_y = u,\ \Gamma(s) = (s, s, 1)$ no tiene solución. Ante la sorpresa del alumno por este hecho, que marca una diferencia profunda con las e.d.o., se recurre a la interpretación geométrica del concepto de solución para intuir las hipótesis de lo que puede ser un teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy. Se llega a la conclusión de que las superficies integrales de (13) son aquellas tales que en cada punto de la misma son tangentes al campo de vectores (llamado campo característico) definido por las funciones (a, b, c). Claramente esto sugiere que la superficie integral ha de estar formada por curvas características: soluciones del sistema (característico) de e.d.o.

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y,u),\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u),\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u).$$

Llegados a este punto, se puede intuir que la superficie integral que contenga a Γ debe estar formada por todas las curvas características que se apoyan en los puntos de Γ. Ahora bien, este proceso no está exento de dificultades. Por ejemplo, Γ no debe ser una curva característica; esto da lugar a la condición de transversalidad que aparece en el teorema. Además todas esas curvas deben "pegarse" bien, para que originen una superficie; esto no será problema usando la regularidad de los coeficientes y el teorema de la función inversa. En el teorema siguiente se afirma que si los coeficientes de la ecuación (13) son regulares y la curva inicial no es característica, entonces el problema de Cauchy tiene solución única.

Teorema 8.. *Considérese el problema de Cauchy*

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u),\qquad (14)$$
$$\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), z_0(s))$$

donde $a, b, c \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, Ω *un dominio de* $\mathbb{R}^3$ *y* $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *una función de clase* $C^1[0,1]$ *tal que* $Im\ \Gamma \subset \Omega$. *Entonces, si se verifica (la llamada condición de transversalidad)*

$$\frac{dx_0(s)}{ds}\ b(x_0(s), y_0(s), z_0(s)) - \frac{dy_0(s)}{ds}\ a(x_0(s), y_0(s), z_0(s)) \neq 0,\ \forall\ s \in [0,1] \qquad (15)$$

se tiene que (14) tiene una única solución $u \in C^2(\Omega_1)$ *donde* Ω_1 *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^2$ *que contiene al conjunto* $\{(x_0(s), y_0(s)),\ s \in [0,1]\}$.

La demostración consta de las ideas fundamentales siguientes:

a) Para cada $s \in [0,1]$, el p.v.i.

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y,u),\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u),\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u),$$
$$x(0) = x_0(s), y(0) = y_0(s), u(0) = u_0(s),$$

tiene solución única que se nota $(x(t,s), y(t,s), u(t,s))$. Esto da lugar a una función de dos variables

$$H : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ H(t,s) = (x(t,s), y(t,s), u(t,s))$$

que es de clase $C^1((-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1])$. En realidad esta es la superficie integral (dada en forma paramétrica) que verifica el problema de Cauchy.

b) Escribir (localmente) esta superficie integral en forma explícita $u = u(x,y)$. Para ello se usa el Teorema de la función inversa y la condición (14). Para la aplicación correcta del Teorema de la función inversa, conviene extender la curva inicial a una curva que siga verificando las mismas hipótesis, pero que esté definida en un intervalo abierto que contenga al $[0,1]$.

c) La unicidad local de soluciones del problema de Cauchy se prueba demostrando que cualquier superficie integral de la ecuación (13) ha de contener a las correspondientes curvas características.

d) Finalmente, usando el hecho de que la imagen de Γ es compacta, se prueba la existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy dado.

2. Se puede consultar la bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo para el estudio de ecuaciones generales de primer orden de la forma $F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$.
3. Versiones más generales del principio del máximo-mínimo para ecuaciones parabólicas (no necesariamente la ecuación del calor), así como diversas aplicaciones pueden consultarse en

Protter, M. y Weinberger, H.: Maximum principles in differential equations. Prentice Hall, 1967.

4. Si g es continua y acotada, la existencia de una única solución acotada del problema no homogéneo $u_t = ku_{xx} + g(x,t),\ u(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0,$ puede verse en
Widder, D.V. The heat equation. Academic Press, 1.975.
5. Puede demostrarse la equivalencia entre la ecuación de ondas y una cierta ecuación en diferencias, que ayuda a la aproximación numérica de las soluciones de dicha ecuación, así como al cálculo efectivo de la solución de ciertos problemas de tipo mixto. En efecto, si $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, entonces son equivalentes:
1) $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^2$.
2) $u(P_1)+u(P_4) = u(P_2)+u(P_3)$, para cualquier cuaterna de puntos P_1, P_2, P_3, P_4, de $\mathbb{R}^2$, que sean vértices de paralelogramos característicos (sus lados son rectas características) arbitrarios, situados de tal forma que P_1 y P_4 sean vértices opuestos (y por tanto, P_2 y P_3).
No deja de llamar la atención de los alumnos el hecho de que en 2) no aparezca ninguna expresión diferencial. Para este aspecto puede consultarse: F. John. Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1982.

EJERCICIOS

1. Encontrar la única solución acotada de los problemas siguientes:
a) $u_t = u_{x_1x_1},\ u(x_1,0) = \cos x_1,\ t \geq 0.$
b) $u_t = \Delta_{(x_1x_2)}u,\ u(x_1,x_2,0) = \cos(x_1+x_2),\ t \geq 0.$
c) $u_t = \Delta_{(x_1\ldots x_n)}u,\ u(x_1,...,x_n,0) = \cos(x_1+...+x_n),\ t \geq 0.$
d) $u_t = u_{x_1x_1},\ u(x_1,0) = \cos x_1 - 5\sin(8x_1) + 3\cos(\sqrt[4]{5}x_1),\ t \geq 0.$
Intenta generalizar este resultado para datos $u(x_1,0)$ más generales.
2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Considérese el problema de Cauchy $u_t = u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}$, donde $\varphi(x) = f(a)$ si $x \leq a$, $f(x)$ si $a < x < b$, $f(b)$ si $x \geq b$. Escribir la fórmula que da la única solución acotada, $u(x,t)$ de este problema de Cauchy. Pruébese que $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$, uniformemente en $[a,b]$. Por último, utilícese el desarrollo en serie de potencias del núcleo de la ecuación del calor para probar el Teorema de Aproximación de Weierstrass (de funciones continuas por polinomios).
3. (**Examen de Matemáticas, 16/09/2004**) Considérese el problema de Cauchy $u_{xy} = f(x,y),\ u(x,0) = \alpha(x),\ u_y(x,0) = \beta(x),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ con f continua en $\mathbb{R}^2$, $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$, $\beta \in C^1(\mathbb{R})$. Demuéstrese que tiene solución $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ si y solamente si se verifica $\beta'(x) = f(x,0),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
4. Sea $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{\Omega}),\ \Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$. Consideremos un punto $(x_0,t_0) \in \Omega$ y sea D su triángulo característico. Supongamos que existen constantes no negativas A, B y C tales que

$$|u_{tt} - u_{xx}| \leq A,\ \text{en } D,$$
$$|u(x,0)| \leq B,\ |u_t(x,0)| \leq C,\ \text{en } [x_0 - t_0, x_0 + t_0].$$

Demuéstrese que $|u(x_0,t_0)| \leq B + Ct_0 + At_0^2/2$.

5. Sea $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$. Consideremos un punto $(x_0,t_0) \in \Omega$ y sea D su triángulo característico. Supongamos que u verifica

$$u_{xx} - u_{tt} + u \geq 0, \text{ en } D,$$
$$u(x,0) \leq M < 0, \ u_t(x,0) \leq 0, \text{ en } [x_0 - t_0, x_0 + t_0].$$

Demuéstrese que $u(x_0,t_0) < 0$.

6. Calcular la única solución del problema de Cauchy

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = x^2, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = x, \ u_t(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R},$$

donde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. (**Examen de Caminos, 03/02/2006**) Encuéntrese la única solución del problema de Cauchy

$$u_{tt} - u_{xx} = \operatorname{sen}(x) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , t > 0$$
$$u(x,0) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}; \ \ u_t(x,0) = x^2 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$$

8. (**Propuesto en el examen del 28/06/2006**) Considérese el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= f(x,t), \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) &= \alpha(x), \ x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \beta(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{16}$$

a) Sea $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$, tal que $t_0 > 0$ y T su triángulo característico. Pruébese que si v es cualquier función real perteneciente a $C^2(\overline{T})$, se tiene

$$\begin{aligned} v(x_0,t_0) &= \frac{1}{2}\left[v(x_0+t_0,0) \ + \ v(x_0-t_0,0)\ \right] + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} v_t(s,0)\ ds + \\ &+ \frac{1}{2}\int_T (v_{tt} - v_{xx})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

Sugerencia: la fórmula de Green en el plano nos dice que si $P, Q \in C^1(\overline{T}, \mathbb{R})$, entonces $\int_T (Q_x(x,t) - P_t(x,t))\ dx\ dt = \int_{\partial T} (P\ dx + Q\ dt)$.

b) Defínase con precisión el concepto de solución de (16) y usando la fórmula anterior, pruébese que (16) puede tener, a lo sumo, una solución. Propóngase, además, la fórmula que puede proporcionar la única solución de (16).

c) Impónganse hipótesis apropiadas a las funciones f, α y β y demuéstrese que la fórmula propuesta en el apartado anterior define la única solución de (16).