ECUACIONES DIFERENCIALES
SERIES DE FOURIER
TRANSFORMADAS DE FOURIER Y LAPLACE

Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

septiembre 2006

Índice general

Lección 1

Números complejos. Series. Exponencial compleja

1.1. Introducción

Los números complejos son una herramienta básica de cálculo. Son especialmente útiles para trabajar con funciones sinusoidales, y por eso se hace uso constante de ellos siempre que representamos una señal por medio de dichas funciones, y no hay que olvidar que ése es el propósito básico de los *"métodos de Fourier"*. La *Transformada de Fourier Discreta*, una herramienta fundamental en el tratamiento digital de señales, toma valores complejos. Las *transformadas de Fourier y de Laplace* son funciones complejas. La *transformada z*, al igual que otras transformadas de uso frecuente, se define como una serie de números complejos. La función exponencial compleja desempeña un papel fundamental en el estudio de los sistemas LTI (sistemas lineales invariantes en el tiempo) y también en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales.

1.1.1. Estructura de la lección y objetivos

La lección está estructurada en tres partes:

- Álgebra y operaciones básicas con números complejos.

  Además de dar las definiciones básicas y explicar la terminología, a veces confusa, que se usa para hablar de números complejos, comprobaremos lo útiles que son las coordenadas polares para multiplicar números complejos. Aparece así la llamada *forma polar* de un número complejo y el importante concepto de *argumento principal*. Un resultado muy útil es la *fórmula de De Moivre* que nos permitirá calcular las raíces de orden n de un número complejo. Veremos que las raíces complejas no se comportan igual que las reales. Al terminar esta lección serás capaz de ver dónde está el error en expresiones como:

  $$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

También veremos que el *módulo* de un número complejo relaciona la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ con el producto complejo y ello proporciona una herramienta muy útil para trabajar con la norma euclídea en el plano.

- Sucesiones y series.

  Daremos las definiciones básicas de convergencia de sucesiones y series y veremos que el estudio de una sucesión de números complejos es equivalente a estudiar dos sucesiones de números reales.

- Funciones elementales complejas.

  Introduciremos la función exponencial compleja y comprobaremos que dicha función contiene a las funciones elementales en el sentido de que todas pueden definirse con facilidad a partir de ella. En particular, las funciones trigonométricas están relacionadas con la función exponencial; resultado que no cabe ni siquiera sospechar cuando se estudian dichas funciones en el contexto real.

Algunas cosas que deberás saber hacer cuando terminemos esta lección son:

- Sumar, multiplicar y dividir números complejos.
- Calcular el módulo y el argumento principal de un número complejo.
- Interpretar geométricamente la suma y el producto de números complejos.
- Usar la fórmula de De Moivre para obtener algunas identidades trigonométricas.
- Calcular raíces de números complejos.
- Interpretar geométricamente desigualdades entre módulos de números complejos.
- Aplicar los criterios más usados para estudiar la convergencia absoluta de una serie de números complejos.
- Aplicar los criterios de Abel y de Dirichlet para estudiar la convergencia no absoluta de una serie de números complejos.
- Usar la exponencial compleja para calcular sumas de senos y cosenos.
- Calcular logaritmos y potencias complejas.

Para seguir con comodidad esta lección conviene que repases las funciones trigonométricas reales y sus "inversas", su definición y propiedades básicas. En particular, la función arcotangente.

1.2. Operaciones básicas con números complejos

Definición 1.1. Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y $(1,0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a,-b)$ es el opuesto de (a,b), y todo $(a,b)\neq(0,0)$ tiene inverso

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ (léase "el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de adición y producto") es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman **números complejos**.

1.2.0.1. Forma cartesiana de un número complejo

El símbolo usual (a,b) para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo (a,b). Para convencerte calcula $(1,-1)^4$. Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado. Para ello hacemos la identificación $(a,0)=a$ y el número complejo $(0,1)$ lo representaremos por i. Con ello tenemos que

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

Ahora podemos escribir

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

Se dice que a es la **parte real** y b es la **parte imaginaria** del número complejo $z=a+ib$ y escribimos $a=\operatorname{Re}(z)$, $b=\operatorname{Im}(z)$. El producto ahora es muy fácil de recordar pues

$$(a+ib)(c+id)=ac+i^2bd+i(ad+bc)=ac-bd+i(ad+bc)$$

1.2.0.2. Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo

Es usual interpretar el número complejo $x+iy$ como el vector del plano (x,y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*. Si $z=x+iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** de z se define como:

$$\overline{z}=x-iy$$

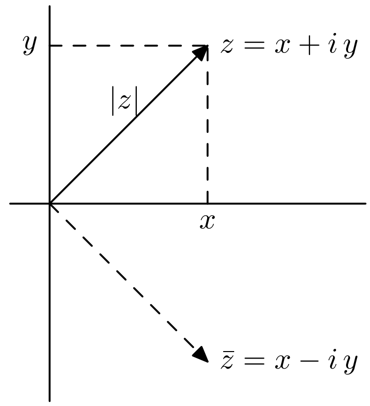


Figura 1.1: Representación de un número complejo

y el **módulo** o **valor absoluto** de z, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Geométricamente, $\overline{z}$ es la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (x, y) a $(0, 0)$ o, también, la longitud o **norma euclídea** del vector (x, y) (ver figura 1.1). La **distancia** entre dos números complejos z y w se define como $|z - w|$.

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 1.2) es $z + w$. Se comprueba

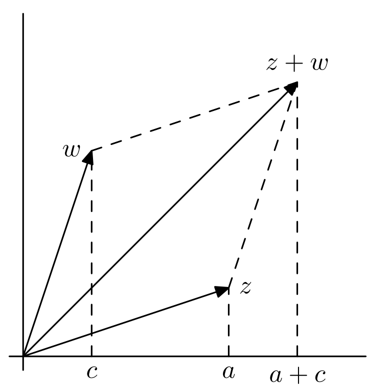


Figura 1.2: Suma de números complejos

fácilmente que si z y w son números complejos se verifica que $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z\,w} = \overline{z}\overline{w}$.

La igualdad $|z|^2 = z\overline{z}$ que se deduce directamente de la definición de módulo de un número complejo, permite probar con facilidad que para todos $z, w \in \mathbb{C}$ es

$$\textbf{a)}\quad |zw| = |z|\,|w| \quad \text{y} \quad \textbf{b)}\quad |z + w| \leqslant |z| + |w|$$

También son de comprobación inmediata las desigualdades

$$\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \tag{1.1}$$

1.2.0.3. Forma polar y argumentos de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z = x + iy \neq 0$ podemos escribir

$$z = |z|\,(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|})$$

Como $(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|})$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

para algún número $\vartheta \in \mathbb{R}$. Resulta así que

$$z = |z|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de **forma polar**, cuya interpretación gráfica vemos en la figura siguiente.

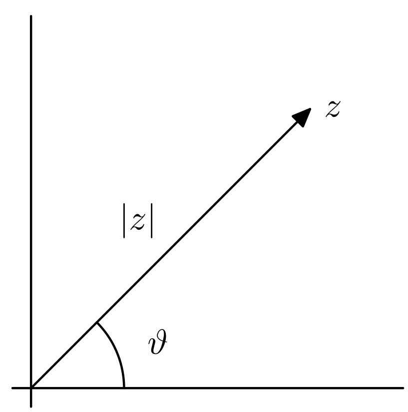


Figura 1.3: Forma polar de un número complejo

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|\,(\cos t, \operatorname{sen} t)$ cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\operatorname{Arg}(z)$.

$$\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|\,(\cos t + i\operatorname{sen} t)\}$$

Observa que

$$s,\ t \in \operatorname{Arg}(z) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos(t) = \cos(s)\\ \sin(t) = \sin(s)\end{array}\right\} \Longleftrightarrow s = t + 2k\pi \ \text{ para algún } \ k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_o \in \operatorname{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_o + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\operatorname{Arg}(z) = t_o + 2\pi\mathbb{Z}$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y se le llama **argumento principal** de z. No es difícil comprobar que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene dado por:

$$\boxed{\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi & \text{si } y \leqslant 0, x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y \leqslant 0, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi & \text{si } y \geqslant 0, x < 0 \end{cases}}$$

1.2.1. Fórmula de De Moivre y raíces de un número complejo

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$z = |z|\,(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$
$$w = |w|\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

Entonces

$$\begin{aligned} z\,w &= |z|\,|w|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |z\,w|\,[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |z\,w|\,(cos(\vartheta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)) \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.*

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Acabamos de ver que si z, w son complejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$, $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$, entonces $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(z+w)$. Es ahora fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula, muy útil, conocida como fórmula de *De Moivre*.

Proposición 1.2 (Fórmula de De Moivre)**.** *Si z es un complejo no nulo, ϑ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\vartheta \in \operatorname{Arg}(z^n)$, es decir:*

$$\boxed{z^n = \big(|z|\,(\cos\vartheta + i\ \operatorname{sen}\vartheta)\big)^n = |z|^n\,(\cos n\vartheta + i\operatorname{sen} n\vartheta), \qquad \vartheta \in \operatorname{Arg}(z),\ n \in \mathbb{Z}}$$

1.2.1.1. Raíces de un número complejo

Dados un número complejo, $z \neq 0$, y un número natural, $n \geqslant 2$, se verifica que hay n números complejos w que verifican la igualdad $w^n = z$. Dichos números se llaman raíces n-ésimas de z y vienen dados por

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Si los representamos obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.

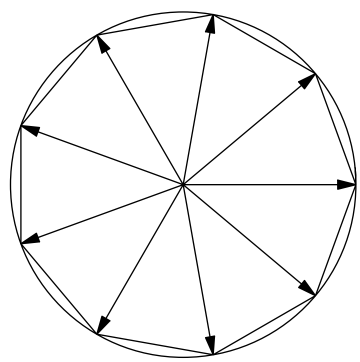


Figura 1.4: Raíces novenas de la unidad

De entre todas las raíces n–ésimas de z vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la **raíz n-ésima principal**, que se define por

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\arg z}{n}\right)}$$

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo).

En general no es cierto que dados dos números complejos z y w entonces el producto de las raíces n-ésimas *principales* de z y de w sea igual a la raíz n-ésima *principal* de $z\,w$. Lo que sí es cierto es que el producto de dos raíces n-ésimas cualesquiera de z y de w es una raíz n-ésima de $z\,w$. Por tanto, $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$, es **una** raíz n-ésima de $z\,w$ pero no tiene por qué ser la principal.

Es fácil probar que

$$\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \Longleftrightarrow -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi \Longleftrightarrow \arg(z\,w) = \arg(z) + \arg(w)$$

Si $\operatorname{Re} z > 0$ $\operatorname{Re} w > 0$, entonces $-\pi < \arg(z) + \arg(w) < \pi$ por lo que, en este caso, $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{z\,w}$.

Para $n = 2, z = w = -1$, como $\arg(-1) = \pi$, tenemos que

$$\sqrt{-1} = \cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(\pi/2) = i$$

En este caso

$$\sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = i\,i = -1 \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

es decir $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = -1$ es una raíz cuadrada de 1 (porque $1 = (-1)(-1)$) pero no es la raíz cuadrada principal de 1.

Ahora ya sabes dónde está el error en lo que sigue:

$$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

1.2.2. Ejercicios

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + i\,b$.

i) $(7-2i)(5+3i)$ ii) $(i-1)^3$ iii) $\overline{(1+i)(2+i)}(3+i)$ iv) $\dfrac{3+i}{\overline{2+i}}$

v) $\dfrac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i}$ vi) $(1+i)^{-2}$ vii) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ viii) $i^2(1+i)^3$

2. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

a) $f_1(z) = \overline{z}^2$ b) $f_2(z) = z^3$ c) $f_3(z) = \dfrac{1}{z}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ e) $f_4(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

3. Calcula las siguientes cantidades.

a) $|(1+i)(2-i)|$ b) $\left|\dfrac{4-3i}{2-i\sqrt{5}}\right|$ c) $\left|(1+i)^{20}\right|$ d) $\left|\sqrt{2} + i(\sqrt{2}+1)\right|$

4. Calcula los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

5. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

a) $-\sqrt{3} - i$ b) $-\sqrt{3} + i$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$ d) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

6. Expresa los siguientes números en la forma $a + i\,b$:

a) $(-1+i\sqrt{3})^{11}$ b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$ c) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$ d) $(-\sqrt{3}+i)^{13}$

7. Calcula $\arg(z\,w)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

8. Sea $z = x + i\,y$. Supuesto que $|z\,| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } \ 1-x+y>0 \\ -3\pi/4 & \text{si } \ 1-x+y<0 \end{cases}$$

9. Resuelve la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ donde a, b, c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

10. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^3 = 1 + i$ b) $z^4 = i$ c) $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$ d) $z^8 = 1$ e) $z^2 + \sqrt{32}\,i\,z - 6i = 0$

11. Calcula las soluciones de las ecuaciones:

a) $z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26 = 0$; b) $z^4 + (1 + 2i)z^2 + 2i = 0$

12. Demuestra la llamada "igualdad del paralelogramo":

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

13. Prueba que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}\,z}\right| < 1$ si $|z\,| < 1$ y $|a| < 1$ y también si $|z\,| > 1$ y $|a| > 1$.

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

14. Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\text{a)} \quad 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$\text{b)} \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcúlese $A + iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

15. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

a) $\operatorname{sen} 3\varphi = 3\,\operatorname{sen}\varphi - 4\,\operatorname{sen}^3\varphi$;

b) $\cos 4\varphi = 8\,\cos^4\varphi - 8\,\cos^2\varphi + 1$.

16. Representar gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$|z - 3| \leqslant 3$; $2 < |z - i| \leqslant 3$; $|\arg z| < \pi/6$; $|z - i| + |z + i| = 4$

$|z - 1| = |z - 2i|$; $\left|\dfrac{z-i}{z+2i}\right| = 2$; $\operatorname{Im}(z^2) > 6$; $|z - i| = \operatorname{Im} z + 1$

17. Encuentra los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z = 0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

18. Sea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

1.3. Sucesiones y series

Esta sección tiene un propósito esencialmente teórico; voy a intentar explicarte de la forma más sencilla posible los conceptos de sucesión convergente y de serie convergente. Son conceptos fundamentales del Análisis Matemático y los encuentras en todas partes: series de Taylor, series de Fourier, series de potencias complejas, transformada z,... Los procesos iterativos, tan frecuentes en los algoritmos de cálculo, no son sino sucesiones. Las señales discretas son sucesiones. La convolución de señales discretas viene dada por una serie. Las ecuaciones en diferencias finitas, que modelan muchos sistemas LTI, están relacionadas con un tipo especial de sucesiones que se llaman *recurrentes*. Muestreando a intervalos regulares de tiempo una señal analógica obtienes una sucesión. Muchas funciones importantes están definidas por medio de una serie (las funciones de Bessel, por ejemplo). Por todo ello creo que es imprescindible que tengas ideas claras sobre estos temas.

1.3.1. Sucesiones

Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. Una sucesión de números reales (complejos) es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) de los números reales (complejos).

Dada una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to A$ suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele notarse $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra "x" nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra). La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, el símbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe interpretarse como la **aplicación** que a cada $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el elemento x_n. Cuando no hay posibilidad de confusión escribimos simplemente $\{x_n\}$ en vez de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

En lo que sigue solamente consideraremos sucesiones de números complejos y, por tanto, representaremos por $\{z_n\}$ la **aplicación** de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{C}$ dada por $n \mapsto z_n$. Como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, en el caso particular de que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga que $z_n \in \mathbb{R}$ entonces $\{z_n\}$ es una sucesión de números reales. Es decir, las sucesiones de números complejos incluyen, como caso particular, a las sucesiones de números reales.

Naturalmente, dos sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son iguales cuando para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $z_n = w_n$. No hay que confundir la sucesión $\{z_n\}$, que es una aplicación, con su **conjunto**

imagen, que es el subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por todos los números z_n, el cual se representa por $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+1}\}$ son sucesiones distintas con el mismo conjunto imagen. El número z_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión; para $n = 1, 2, 3$ se habla respectivamente de primero, segundo, tercer término de la sucesión.

Una forma correcta de imaginar una sucesión es como un vector con infinitas componentes. La sucesión $\{z_n\}$ puedes verla como el vector $(z_1, z_2, z_3, \dots)$.

Introduciremos ahora una notación muy útil en lo que sigue.

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

se llama **disco abierto** de centro a y radio r. Observa que un disco abierto no puede ser vacío.

Si $a = \alpha + i\,\beta$ tenemos que:

$$D(a,r) = \{x + i\,y \in \mathbb{C} : |x + i\,y - \alpha - i\,\beta\,| < r\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < r^2\right\}$$

es el círculo de centro (α, β) y radio r excluida la circunferencia que lo limita.

Definición 1.3 (Sucesión convergente). Se dice que una sucesión $\{z_n\}$ converge a un número $z \in \mathbb{C}$ cuando en cualquier disco abierto $D(z, \varepsilon)$ están todos los términos de la sucesión a partir de uno de ellos en adelante.

Con más detalle: una sucesión $\{z_n\}$ se dice que **converge a un número** z si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|z_n - z| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \; : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$$

Se dice también que el número z es **límite de la sucesión** $\{z_n\}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \{z_n\} = z$ o, simplemente, $\lim\{z_n\} = z$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{z_n\} \to z$.

Se comprueba fácilmente que *una sucesión convergente tiene un único límite*.

En Matemáticas se dan definiciones para introducir nuevos conceptos y saber de qué estamos hablando, pero las definiciones no suelen ser útiles para el cálculo. Por eso no debes preocuparte si la definición anterior te parece difícil de aplicar en casos concretos. Debes hacer un esfuerzo por comprenderla pero no tendrás que usarla para hacer cálculos.

Observa que, en virtud de la definición dada, se verifica que

$$\{z_n\} \to z \quad \Longleftrightarrow \quad |z_n - z\,| \to 0$$

Recordemos que $\max\{|\operatorname{Re} z|\,, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z\,| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$. Gracias a esta desigualdad tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos que $|z_n - z| \to 0$ si, y sólo si, $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \to 0$ y $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \to 0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

Proposición 1.4. *Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son convergentes. Además, en dicho caso*

$$\text{lím}\{z_n\} = z \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z = \text{lím}\{\operatorname{Re} z_n\} \quad y \quad \operatorname{Im} z = \text{lím}\{\operatorname{Im} z_n\}$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

El siguiente resultado relaciona las operaciones algebraicas con el concepto de límite. Su demostración es un sencillo ejercicio.

Proposición 1.5. *Si $\{z_n\} \to z$ y $\{w_n\} \to w$, entonces $\{z_n + w_n\} \to z + w$ y $\{z_n w_n\} \to z w$. Además, si $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \neq 0$, entonces $\{1/z_n\} \to 1/z$.*

El siguiente resultado es quizás el más útil para calcular límites de sucesiones de números reales.

Proposición 1.6. *Sea f una función real de variable real, y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Supongamos que $\text{lím}_{x\to a} f(x) = L$. Entonces para toda sucesión $\{x_n\} \to a$ se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$.*

1.3.2. Series

Dada una sucesión, $\{z_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{S_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{z_n\}$, es decir:

$$S_1 = z_1,\ S_2 = z_1 + z_2,\ S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \ldots,\ S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n,\ \ldots$$

La sucesión $\{S_n\}$ así obtenida se llama *serie de término general z_n* y es costumbre representarla por $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ o, más sencillamente, $\sum z_n$. El número S_n se llama *suma parcial de orden n* de la serie $\sum z_n$.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, *los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series*. En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es “convergente”. Si una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \text{lím}\{S_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Como caso particular de la proposición 1.4, la serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ converge si, y sólo si, las series de números reales

$$\sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Re} z_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Im} z_n$$

son convergentes.

Observa que si la serie $\sum z_n$ converge entonces la sucesión $z_n = \sum_{j=1}^{n} z_j - \sum_{j=1}^{n-1} z_j$ es diferencia de dos sucesiones que convergen al mismo límite y por tanto converge a cero.

Proposición 1.7 (Condición necesaria para la convergencia de una serie). *Para que la serie $\sum z_n$ sea convergente es necesario que* $\lim\{z_n\} = 0$.

Ejemplo 1.8 (**Serie geométrica**). Dado $z \in \mathbb{C}$, la sucesión $\{1 + z + z^2 + \cdots + z^n\}$ se llama serie geométrica de razón z. Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\{1, z, z^2, z^3, \ldots, z^n, \ldots\}$. Es costumbre representar la serie geométrica de razón z con el símbolo $\sum_{n\geqslant 0} z^n$. Dicha serie converge si, y sólo si, $|z| < 1$, en cuyo caso su límite es igual a $\dfrac{1}{1-z}$.

Todas las afirmaciones hechas se deducen de que si $z \neq 1$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z} \tag{1.2}$$

si $|z| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{z^{n+1}}{1-z} = 0$ y obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1)$$

Si $|z| \geqslant 1$ entonces la sucesión $\{z^n\}$ no converge a 0, por lo que, en virtud de la proposición anterior, deducimos que la serie $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ no converge. ♦

Antes de ver el siguiente ejemplo hay que precisar lo que se entiende por *sucesión divergente* porque este término se utiliza mal con frecuencia.

Definición 1.9 (**Sucesiones divergentes**). Una sucesión de *números reales* $\{x_n\}$ se dice que es **positivamente divergente**, y escribimos $\lim\{x_n\} = +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

Una sucesión de *números reales* $\{x_n\}$ se dice que es **negativamente divergente**, y escribimos $\lim\{x_n\} = -\infty$, si $\{-x_n\} \to +\infty$.

Una sucesión de *números complejos* $\{z_n\}$ se dice que es **divergente**, y escribimos $\lim\{z_n\} = \infty$ si $\lim\{|z_n|\} = +\infty$.

Ejemplo 1.10 (Serie armónica). Se llama así la serie de término general $1/n$; es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$. Se verifica que la serie armónica diverge positivamente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\{1+1/2+\cdots+1/n\}=+\infty$$

En efecto, para todo $n\in\mathbb{N}$ tenemos que

$$\log n=\int_1^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{n-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{j}\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\{1+1/2+\cdots+1/n\}\geqslant\lim_{n\to\infty}\log n=+\infty\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

♦

Ejemplo 1.11 (Serie armónica alternada). Se llama así la serie de término general $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Se verifica que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\log 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log 2$$

En efecto, sustituyendo z por $-x$ en la igualdad (1.2), obtenemos la siguiente igualdad válida para todo $n\in\mathbb{N}$ y todo $x\neq -1$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}\tag{1.3}$$

integrando esta igualdad entre 0 y 1 tenemos que:

$$\log 2=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

de donde

$$\left|\log 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^{n+1}=\frac{1}{n+2}$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\log 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|=0\Longrightarrow\log 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

♦

El siguiente ejemplo te ayudará a entender el concepto de serie convergente. Vamos a ver que modificando el orden de los términos en una serie convergente podemos obtener otra serie convergente con distinta suma.

Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.

Como hemos visto, la serie armónica alternada es la sucesión que se obtiene sumando *consecutivamente* los términos de la sucesión

$$\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \ldots\ldots\right\} \tag{1.4}$$

Vamos a cambiar el orden de los términos en esta sucesión poniendo uno positivo seguido de dos negativos manteniendo sus posiciones relativas. Obtenemos así la sucesión

$$\left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{16}, \ldots\ldots\right\} \tag{1.5}$$

Cuya serie asociada, obtenida sumando *consecutivamente* sus términos, es la sucesión $\{S_n\}$ dada por:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 - \frac{1}{2} \\
S_3 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\
S_4 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\
S_5 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\
S_6 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \\
\ldots\ldots &= \ldots\ldots \\
S_9 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \\
\ldots\ldots &= \ldots\ldots \\
S_{3n} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j} \right)
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
S_{3n} &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\cdots+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{4n}\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}
\end{aligned}$$

Deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}\log 2$$

Es claro que $\lim\{S_{3n}-S_{3n-1}\}=\lim\{S_{3n}-S_{3n-2}\}=0$ de donde se sigue que

$$\lim\{S_n\}=\frac{1}{2}\log 2$$

Es decir, hemos probado que la serie obtenida reordenando los términos de la serie armónica alternada por el criterio de sumar uno positivo seguido de dos negativos, es convergente y su suma es $\frac{1}{2}\log 2$.

Este ejemplo pone claramente de manifiesto que la *suma* de una serie convergente no es una suma en el sentido usual de la palabra, es decir, no es una suma algebraica de números. Observa que los conjuntos de números (1.4) y (1.5) son los mismos pero las series correspondientes tienen *distinta* suma; la primera tiene *suma* $\log 2$ y la segunda $\frac{1}{2}\log 2$. Si la suma de una serie consistiera en sumar los infinitos términos de una sucesión, entonces el orden en que los sumáramos sería indiferente porque la suma de números tiene la propiedad conmutativa. Debes tener claro, por tanto, que cuando calculas la suma de una serie no estás haciendo una suma infinita sino que estás calculando un *límite de una sucesión* cuyos términos se obtiene sumando consecutivamente los términos de otra sucesión dada. Insisto: calcular la suma de una serie no es una operación algebraica, no consiste en sumar infinitos términos, es un proceso analítico que supone un límite.

1.3.2.1. La particularidad del estudio de las series

Ahora viene la pregunta del millón: si las series no son nada más que sucesiones, ¿por qué dedicarles una atención especial? La respuesta a esta pregunta es que en el estudio de las series hay una *hipótesis implícita* que los libros silencian. A saber: se supone que las series son sucesiones demasiado difíciles de estudiar *directamente*. La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: se trata de deducir propiedades de la serie $\{S_n\} = \{z_1 + z_2 + \cdots + z_n\}$, a partir del comportamiento de $\{z_n\}$; es decir, los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión $\{S_n\}$ haciendo hipótesis sobre la sucesión $\{z_n\}$. ¿Por qué esto es así?, ¿no sería más lógico, puesto que lo que queremos es estudiar la serie $\{S_n\}$, hacer hipótesis directamente sobre ella? La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma $z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ no es posible "realizarla" en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que *la sucesión* $\{z_n\}$ *es el dato que podemos utilizar*. Naturalmente, esto hace que el estudio de las series se preste a muchas confusiones porque, aunque su objetivo es obtener propiedades de la serie $\{S_n\}$, las hipótesis hacen siempre referencia a la sucesión $\{z_n\}$. Si bien lo pensamos, esta forma de proceder no es del todo nueva. Ya estás acostumbrado a usar la derivada de una función para estudiar propiedades de la función; pues bien, la situación aquí es parecida: para estudiar la serie $\{z_1 + z_2 + \cdots + z_n\}$ (la función) estudiamos la sucesión $\{z_n\}$ (la derivada). Un buen ejemplo de esto que digo son los siguientes criterios de convergencia.

1.3.3. Algunos criterios de convergencia para series de términos positivos

Una serie $\sum a_n$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*. Observa que una serie de términos positivos es una sucesión creciente por lo que o bien es convergente o es positivamente divergente.

Recuerda que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = x < 1$. Esto nos lleva a considerar, en el caso general de una serie de términos positivos $\sum a_n$, el comportamiento de la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)
Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que existe

$$\text{lím} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$$

Entonces se verifica que:

a) Si $L < 1$ la serie $\sum a_n$ es convergente;

b) Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Análogamente, puesto que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\sqrt[n]{a_n} = x < 1$, esto nos lleva, en el caso general de una serie de términos positivos $\sum a_n$, a considerar el comportamiento de la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)
Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n \geqslant 0$, y que existe

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces se verifica que:

a) Si $L < 1$ la serie $\sum a_n$ es convergente;

b) Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Unas series de términos positivos muy importantes son las siguientes.

Series de Riemann
Dado un número real α, la serie $\{1 + 1/2^\alpha + 1/3^\alpha + \cdots + 1/n^\alpha\}$ se llama serie de Riemann de exponente α. Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

La importancia de las series de Riemann es consecuencia del siguiente criterio de convergencia.

Criterio límite de comparación
Dadas dos series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$, tales que $\{a_n/b_n\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ se verifica:

a) Si $L = +\infty$ y $\sum b_n$ es divergente también $\sum a_n$ es divergente.

b) Si $L = 0$ y $\sum b_n$ es convergente también $\sum a_n$ es convergente.

c) Si $L \in \mathbb{R}^+$ las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Los criterios anteriores pueden aplicarse para estudiar la **convergencia absoluta** de una serie. Precisemos este concepto.

Definición 1.12. Se dice que una serie de números complejos $\sum z_n$ es **absolutamente convergente** si la serie de términos positivos $\sum |z_n|$ es convergente.

El siguiente resultado es muy importante en el estudio de las series.

Proposición 1.13. *Si una serie de números complejos $\sum z_n$ es absolutamente convergente entonces dicha serie también es convergente.*

De hecho, el concepto de convergencia absoluta de una serie es mucho más fuerte que el de convergencia. La serie armónica alternada es un ejemplo de serie convergente que no es absolutamente convergente.

Cuando una serie no es absolutamente convergente se utilizan los siguientes criterios para estudiar su convergencia.

Teorema 1.14. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos.*

Criterio de Dirichlet. *Si $\{a_n\}$ es monótona y converge a cero y la serie $\sum z_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n z_n$ converge.*

Criterio de Abel. *Si $\{a_n\}$ es monótona y acotada y la serie $\sum z_n$ converge, entonces $\sum a_n z_n$ es convergente.*

Para estudiar la convergencia de una serie $\sum z_n$ de números complejos lo primero que debes hacer es estudiar la convergencia absoluta, es decir la convergencia de la serie de términos positivos $\sum |z_n|$, para lo que se aplican los criterios de convergencia para series de términos positivos. Si la serie $\sum |z_n|$ converge hemos acabado. Cuando la serie $\sum |z_n|$ no converge se aplican los criterios de Dirichlet o de Abel para estudiar directamente la convergencia de la serie $\sum z_n$.

1.3.4. Ejercicios

1. Estudia la convergencia de las sucesiones:

$$\text{i)}\quad z_n = \sqrt[n]{n} + i\,n\,a^n \quad (a\in\mathbb{R}, |a|<1) \qquad \text{ii)}\quad z_n = \frac{2^n}{n} + \frac{i\,n}{2^n}$$

$$\text{iii)}\quad z_n = \sqrt[n]{a} + i\,\operatorname{sen}\frac{1}{n} \quad (a>0) \qquad \text{iv)}\quad z_n = n\,\operatorname{sen}\frac{1}{n} + 5\,i\,\cos\frac{1}{n}$$

$$\text{v)}\quad z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \qquad \text{vi)}\quad z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

2. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos y para todo $n\in\mathbb{N}$ sea $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\{\varphi_n\} \to \varphi$ y $\{|z_n|\} \to \rho$. Justifica que la sucesión $\{z_n\} \to \rho(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi)$.

3. Calcula el límite de la sucesión $z_n = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2} + i\frac{\pi}{3}}{n}\right)^n$.

Sugerencia: Expresa $z_n = |z_n|\,(\cos\varphi_n + i\operatorname{sen}\varphi_n)$ y usa el ejercicio anterior.

4. Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i\,\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right)$.

Sugerencia: Recuerda que el límite de la sucesión $n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$ es bien conocido.

5. Sea $z\in\mathbb{C}$, con $|z| = 1$, $z \neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

6. Explica lo que quiere decir la igualdad siguiente.

$$x = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k\,\pi x)}{k\,\pi} \qquad \text{para todo } x \in]0,1[$$

7. Estudia la convergencia de las series:

$$\text{i)}\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(1+i)^n} \qquad \text{ii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n + i\,\operatorname{sen} n}{n}$$

$$\text{iii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n + i\,\operatorname{sen} n}{n^2} \qquad \text{iv)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos\frac{\pi}{n} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{n}$$

$$\text{v)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\frac{1}{n} \qquad \text{vi)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\text{vii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\frac{\pi}{n^2} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{n^2}\right) \qquad \text{viii)}\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n+7}$$

8. Sea $\rho\in\mathbb{R}$ con $|\rho|<1$ y $\vartheta\in\mathbb{R}$. Calcula los límites $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos(n\,\vartheta)$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\operatorname{sen}(n\,\vartheta)$.

9. Estudia la convergencia absoluta de las siguientes series.

$$\textbf{a)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n!} \qquad \textbf{b)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}z^n \qquad \textbf{c)}\ \sum_{n\geqslant 1}n^{\alpha}z^n$$

$$\textbf{d)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n^n}{n!}z^n \qquad \textbf{e)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{3\cdot 5\cdots(3n+1)}{5\cdot 10\cdots 5n}z^n \qquad \textbf{f)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{1+1/2+\cdots+1/n}$$

Estudia en los casos c)y f), el comportamiento de la serie en los puntos de la circunferencia unidad.

1.4. Funciones elementales complejas

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$ cuando en $\mathbb{R}^2$ consideramos su estructura compleja. Dado un conjunto $A\subset\mathbb{C}$, a toda función compleja $f:A\to\mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u=\operatorname{Re} f$ "parte real de f" y la función $v=\operatorname{Im} f$ "parte imaginaria de f" definidas para todo $(x,y)=x+iy\in A$ por:

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$$

Naturalmente, $f(x+iy)=u(x,y)+i\,v(x,y)$.

1.4.1. La función exponencial

Una de las formas de definir la exponencial de un número real x es mediante el límite

$$\mathrm{e}^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Pues bien se puede probar con facilidad que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+i\,y}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$$

Definimos, por tanto, la exponencial compleja como

$$\mathrm{e}^{x+i\,y} = \exp(x+i\,y) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+i\,y}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$$

Observa que

$$|\,\mathrm{e}^z\,| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}, \quad \mathrm{Im}\,z \in \mathrm{Arg}(\mathrm{e}^z)$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\,t} = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t \qquad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})}$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*:

$$\boxed{\cos t = \frac{\mathrm{e}^{i\,t}+\mathrm{e}^{-i\,t}}{2}, \qquad \mathrm{sen}\,t = \frac{\mathrm{e}^{i\,t}-\mathrm{e}^{-i\,t}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

Se prueba fácilmente que $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. Se deduce que para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$ es

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z+2k\pi i}$$

Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función **periódica** con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva. Observa que la exponencial no se anula nunca pues $|\,\mathrm{e}^z\,| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z} > 0$.

1.4.2. Logaritmos complejos

Dado un número complejo $z \neq 0$, hay infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $\mathrm{e}^w = z$. Cualquiera de ellos se llama **un logaritmo** de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\mathrm{Log}\,z$ y es el conjunto:

$$\boxed{\mathrm{Log}\,z = \{\log|z\,| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}}$$

De entre todos ellos elegimos uno, llamado **logaritmo principal**, definido por

$$\boxed{\log z = \log|z\,| + i\arg(z) \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^*}$$

Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log(z) + i2k\pi$ para algún entero k. Es importante que observes que la igualdad

$$\log z\,w = \log z + \log w$$

que es válida para los logaritmos de los números reales positivos, no es siempre cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\log\left(\mathrm{e}^{i\,2\pi/3}\right)=i\frac{2\pi}{3},\ \log\left(\mathrm{e}^{i\,3\pi/4}\right)=i\frac{3\pi}{4},\ \log\left(\mathrm{e}^{i\,2\pi/3}\,\mathrm{e}^{i\,3\pi/4}\right)=\log\left(\mathrm{e}^{i\,17\pi/12}\right)=\log\left(\mathrm{e}^{-i7\pi/12}\right)=-i\frac{7\pi}{12}$$

Lo que está claro es que el número $\log z+\log w\in\operatorname{Log}(z\,w)$, es decir, $\log z+\log w$ es **un** logaritmo de $z\,w$ pero no tiene por qué ser el logaritmo **principal** de $z\,w$.

1.4.3. Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b=e^{b\log a}$. Ahora, dados $a,b\in\mathbb{C}$, con $a\neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos son de la forma $\log a+i\,2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $\mathrm{e}^{b(\log a+i\,2k\pi)}$ donde $k\in\mathbb{Z}$, es **una** potencia de base a y exponente b. Representamos por $[a^b]$ el conjunto de todas ellas.

$$[a^b]=\left\{\mathrm{e}^{b(\log a+i\,2k\pi)}:k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Se destaca una:

$$a^b=\mathrm{e}^{b\log a}$$

que se llama **valor principal** de la potencia de base a y exponente b. Observa que si $b=1/n$ donde $n\in\mathbb{N}$, el número

$$a^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\log a\right)=\exp\left(\frac{\log a}{n}+i\frac{\arg a}{n}\right)=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg a}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\arg a}{n}\right)$$

es el valor principal de la raíz n-ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$.

1.4.4. Ejercicios

1. Expresa los 8 números $\pm 1\pm i,\ \pm\sqrt{3}\pm i$ en la forma $r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$.

2. Calcula el módulo y los argumentos principales de los números

$$1+\mathrm{e}^{i\varphi},\ 1-\mathrm{e}^{i\varphi},\ -a\,\mathrm{e}^{i\varphi}$$

donde $|\varphi|\leqslant\pi$ y $a>0$.

3. Calcula $\log z$ y $\operatorname{Log} z$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i,\ -i,\ \mathrm{e}^{-3},\ \mathrm{e}^{5i},\ 4,\ -5\,\mathrm{e},\ 1+i$$

4. Calcula $\log(3i)+\log(-1+i\sqrt{3})$ y $\log\left(3i(-1+i\sqrt{3})\right)$.

5. Calcula $\log(-1-i)-\log i$ y $\log\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$.

6. Calcula

$$[(-4)^i],\ i^{-3i},\ [i^{2/\pi}],\ [i^i],\ 1^{2i},\ 3^{1-i},\ ((-i)^i)^i,\ (1+i)^{1+i}$$

7. Estudia, para $z\in\mathbb{C}^*$ y $n\in\mathbb{N}$, las igualdades:

$$\text{a) } \log(\exp(z)) = z\,;\ b)\ \exp(\log(z)) = z\,;\ c)\ \log(\sqrt[n]{z}) = \frac{\log(z)}{n}\,;\ d)\ \log(z^n) = n\log(z).$$

8. Explica con detalle dónde está el error en lo que sigue. Como $(-z)^2 = z^2$; tenemos que $2\log(-z) = 2\log(z)$ y, por consiguiente, $\log(-z) = \log(z)$.

9. Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

Lección 2

Ecuaciones Diferenciales

2.1. Introducción

Una gran cantidad de procesos de todo tipo: físicos, biológicos, económicos, químicos, ... se modelan matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales. La mecánica newtoniana y el electromagnetismo de Maxwell son ejemplos de teorías fundamentadas en sus respectivas ecuaciones diferenciales. La dinámica de poblaciones o el desarrollo de un tumor pueden describirse por medio de ecuaciones diferenciales.

Recuerda que la derivada es la herramienta que permite estudiar matemáticamente el cambio de una magnitud respecto a otra, por ello es natural que las ecuaciones diferenciales sean el modelo por excelencia para representar las relaciones que hay entre las magnitudes que intervienen en un fenómeno y sus respectivos cambios. En consecuencia, las ecuaciones diferenciales son la herramienta apropiada para resolver multitud de problemas.

2.1.1. Estructura de la lección y objetivos

La lección está estructurada en cuatro partes:

- Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Estudiamos algunos tipos sencillos de ecuaciones diferenciales cuya solución puede expresarse mediante primitivas.
- Ecuaciones diferenciales lineales y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

  Se trata quizás del tipo más importante de ecuaciones diferenciales para las que se dispone, además, de una teoría satisfactoria. Dedicamos particular atención al caso de coeficientes constantes cuyas técnicas específicas se exponen con detalle.

- Aplicaciones.

  Vemos algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales a circuitos eléctricos y sistemas mecánicos, así como a sistemas LTI.

- Transformada de Laplace.

  Es una poderosa herramienta de cálculo que transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica.

Algunas cosas que deberás saber hacer cuando terminemos esta lección son:

- Reconocer distintos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden (de variables separadas, exactas, lineales, homogéneas, ...) y calcular su solución general.
- Calcular la ecuación diferencial y la envolvente de una familia de curvas dada.
- Calcular la solución general de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.
- Usar las técnicas de variación de constantes y de los coeficientes indeterminados para calcular soluciones particulares de ecuaciones lineales completas con coeficientes constantes.
- Calcular funciones analíticas de una matriz cuadrada. En particular, calcular la exponencial de una matriz.
- Calcular la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.
- Calcular la función de transferencia de un sistema LTI modelado por una ecuación diferencial.
- Utilizar las propiedades de la transformada de Laplace para calcular la transformada de Laplace directa e inversa de algunas funciones elementales (racionales, exponenciales, trigonométricas).
- Utilizar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.

2.2. Generalidades

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que se relacionan derivadas de una función desconocida con otras funciones. Las ecuaciones siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales.

1) $y' - x \operatorname{sen} x = 1$;

2) $y'' + (x^2 - 1)y' + 3y \cos x - 4x = 2$;

3) $(x'')^2 + 3x' + \mathrm{e}^t + t^2 - 1 = 0$;

4) $\sqrt{(y')^2 + \operatorname{sen}^2(x) + 1} + \log(1 + (y')^2) = 1 + \operatorname{sen}(y\,y') + \mathrm{e}^{x^2+x+1}$;

5) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + 4xy$.

En 1), 2) y 4) se entiende que y es la función incógnita y la variable independiente es x. En 3) se entiende que la función incógnita es x y la variable independiente es t. En 5) se entiende que la función incógnita es z y las variables dependientes son x e y.

Si en la ecuación hay derivadas respecto de una sola variable independiente se dice que es una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO); y si hay derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes se llama ecuación en derivadas parciales (EDP).

Es frecuente usar la notación de Leibniz $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\,x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ para representar, respectivamente, las derivadas primera, segunda, tercera y, en general, $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ para representar la derivada de orden n de y respecto a x. En Física, especialmente en Mecánica, suele usarse la notación de Newton en la que $\dot{x}, \ddot{x}$ representan las derivadas primera y segunda de x respecto a la variable independiente t, que suele ser el tiempo.

El *orden de una ecuación diferencial* es el orden de la derivada más alta que aparece en dicha ecuación. La forma más general de representar una EDO de orden n es

$$F\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{2.1}$$

donde F es una función de $n+2$ variables. Se dice que dicha ecuación está dada en *forma implícita*.

Una EDO de orden n de la forma

$$y^{(n)} = \Phi\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\big) \tag{2.2}$$

donde Φ es una función de $n+1$ variables, se dice que está dada en *forma normal*.

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial (2.1) en el intervalo I cuando al sustituir y por f en dicha ecuación obtenemos una identidad:

$$F\big(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)\big) = 0 \qquad \forall x \in I$$

En general, la existencia de soluciones de una EDO no está garantizada y pueden darse gran diversidad de situaciones.

Suelen distinguirse tres tipos de soluciones de una ecuación diferencial.

a) La *solución general* de una EDO de orden n es una solución en la que, además de la variable independiente, intervienen n parámetros o "constantes arbitrarias".

b) Las *soluciones particulares* son las que se obtienen a partir de la solución general dando valores específicos a los parámetros.

c) Las *soluciones singulares* son soluciones que no se deducen de la solución general dando valores a los parámetros.

La ecuación $(y')^2 = y$ tiene como solución general $y = \left(\dfrac{x+C}{2}\right)^2$. Haciendo $C = 0$ obtenemos la solución particular $y = x^2/4$; mientras que $y = 0$ es una solución singular.

Las soluciones de una EDO (o, más apropiadamente, sus gráficas) se llaman también *curvas integrales*.

2.2.1. E.D. de una familia de curvas. Trayectorias

Consideremos una familia $\mathcal{F}$ de curvas planas dada por una ecuación de la forma $f(x, y, C) = 0$, donde C es un parámetro real que toma valores en un intervalo I, y para cada valor de $C \in I$ tenemos una curva de dicha familia. Para obtener la ecuación diferencial de $\mathcal{F}$ lo que se hace es eliminar C en las ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{\partial f(x, y, C)}{\partial x} + \dfrac{\partial f(x, y, C)}{\partial y} y' = 0 \end{cases}$$

obtenemos de esta forma una ED $\Phi(x, y, y') = 0$ que expresa una propiedad común a todas las curvas de $\mathcal{F}$. Naturalmente, la solución general de la ED $\Phi(x, y, y') = 0$ es la familia dada $f(x, y, C) = 0$.

Se llaman *ω-trayectorias* de $\mathcal{F}$ a las curvas que cortan bajo un ángulo constante ω a las curvas de $\mathcal{F}$. La tangente en un punto (x, y) a una curva $y = y(x)$ de la familia $\mathcal{F}$ forma un ángulo α con el eje de abscisas cuya tangente viene dada por $y' = \operatorname{tg}(\alpha)$. La pendiente en este punto de la ω-trayectoria $z = z(x)$ buscada será $z' = \operatorname{tg}(\alpha + \omega)$. Deducimos que

$$y' = \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \omega - \omega) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \omega) - \operatorname{tg}(\omega)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha + \omega)\operatorname{tg}(\omega)} = \frac{z' - \operatorname{tg}(\omega)}{1 + z'\operatorname{tg}(\omega)}$$

En consecuencia, si es $\Phi(x, y, y') = 0$ la ED de la familia $\mathcal{F}$, la ED que verifican las ω-trayectorias de dicha familia es

$$\Phi\left(x, z, \frac{z' - \operatorname{tg}(\omega)}{1 + z'\operatorname{tg}(\omega)}\right) = 0$$

Para el caso en que $\omega = \pi/2$ se tiene que $z' = -1/y'$ por lo que las *trayectorias ortogonales* de $\mathcal{F}$ satisfacen la ED $\Phi(x, y, -1/y') = 0$.

2.2.2. Envolvente de una familia de curvas

Consideremos una familia $\mathcal{F}$ de curvas planas dada por una ecuación de la forma $f(x,y,C) = 0$, donde C es un parámetro real que toma valores en un intervalo I y para cada valor de $C \in I$ tenemos una curva de dicha familia. Supongamos que hay una curva Γ con la propiedad de que por cada punto de Γ pasa una curva γ_C de la familia $\mathcal{F}$ de tal forma que en el punto de contacto las curvas Γ y γ_C tienen la misma tangente. En tal caso se dice que la curva Γ es *la envolvente* de la familia $\mathcal{F}$.

Para obtener la ecuación de la curva envolvente de $\mathcal{F}$ lo que se hace es eliminar C en las ecuaciones

$$\begin{cases} f(x,y,C) = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y,C)}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.1. Sea $\mathcal{F}$ la familia de rectas de ecuación $f(x,y,C) = y - Cx - 3/C + 2 = 0$ donde $C > 0$. Tenemos que

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y,C) = 0 \Longrightarrow y + 2 = Cx + \dfrac{3}{C} \Longrightarrow (y+2)^2 = C^2x^2 + \dfrac{9}{C^2} + 6x \\ \dfrac{\partial f(x,y,C)}{\partial C} = 0 \Longrightarrow -x + \dfrac{3}{C^2} = 0 \Longrightarrow C^2 = \dfrac{3}{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow (y+2)^2 = 12x$$

La envolvente es la parábola de ecuación $(y+2)^2 = 12x$. Puedes ver algunas rectas de la familia junto a su envolvente en la figura (2.1). ♦

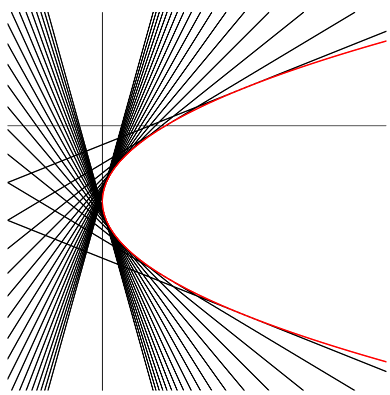


Figura 2.1: Envolvente de una familia de rectas

La solución general de una ED $F(x,y,y') = 0$ es una familia de curvas dependiente de un parámetro que se podrá representar por $f(x,y,C) = 0$. Es claro que la envolvente de dicha familia (cuando existe) es también solución de la ED; pues la pendiente de la envolvente en cada punto coincide con la de la curva integral que pasa por dicho punto. Se trata de una solución singular de la ED.

2.2.3. Problema de Cauchy. Condiciones de contorno

Con frecuencia interesa obtener solamente una solución de una EDO que verifica unas determinadas condiciones. Esto da lugar a dos tipos de problemas. Cuando las condiciones que debe verificar la solución buscada se especifican para un único valor de la variable independiente dichas condiciones reciben el nombre de “condiciones iniciales” y se dice que tenemos un *problema de valores iniciales* (PVI) para la EDO dada. Si las condiciones dadas se refieran a más de un valor de la variable independiente dichas condiciones reciben el nombre de “condiciones de contorno” y se dice que tenemos un *problema de contorno* para la EDO dada.

El caso más usual de problema de valores iniciales para una EDO de orden n es el llamado *problema de Cauchy* que consiste en obtener la solución de dicha ecuación cuyo valor y el de sus primeras $n-1$ derivadas en un punto x_0 son dados.

Ejemplo 2.2. El problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \operatorname{sen} x \\ y'(0) = 1,\ y(0) = -1 \end{cases}$$

tiene como solución $y(x) = \frac{1}{2}\left(-3\,\mathrm{e}^x + 5x\ \mathrm{e}^x + \cos x\right)$.

El problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + y = \operatorname{sen} x \\ y'(0) = \pi,\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

tiene como solución

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(2\pi\ \cos(x) - 2x\ \cos(x) + 2\operatorname{sen}(x) + 4\pi\ \operatorname{sen}(x) - 2\cos^2(x)\ \operatorname{sen}(x) + \cos(x)\ \operatorname{sen}(2x)\right).$$

♦

2.3. Métodos de resolución de EDOs de primer orden

A continuación vamos a estudiar algunos tipos sencillos de EDO cuyas soluciones pueden obtenerse con técnicas elementales. Usaremos indistintamente las siglas EDO y ED para referirnos a ecuaciones diferenciales ordinarias.

Vamos a considerar EDOs de la forma $y' = f(x,y)$ donde se supone que la función f está definida en un abierto de $\mathbb{R}^2$ y es todo lo buena que se precise para justificar en cada caso los cálculos que siguen. Las soluciones que encontraremos pueden venir dadas de tres formas.

a) **Explícitamente** cuando la solución obtenida es de la forma $y = \varphi(x)$.

b) **Implícitamente** cuando la solución obtenida viene dada por una igualdad $H(x,y) = 0$ que define a y como función (implícita) de x.

c) **Paramétricamente** cuando las curvas integrales vienen dadas en función de un parámetro, es decir, por sus ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t), y = \psi(t)$.

No hay que pensar que la solución se podrá expresar por medio de funciones elementales. Esto no puede asegurarse ni aún en el caso más simple de la ecuación $y' = f(x)$ porque puede ocurrir que la función $f(x)$ no tenga primitivas que sean funciones elementales. Por ejemplo, la solución de la ecuación $y' = \operatorname{sen}(x^2)$ que cumple la condición inicial $y(x_0) = y_0$ es

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t$$

que no puede expresarse por medio de funciones elementales. En general, una EDO se considera resuelta cuando se logra expresar su solución mediante la determinación de ciertas funciones primitivas las cuales, a su vez, podrán o no expresarse por medio de funciones elementales. En tales casos se dice que la ecuación se ha resuelto por medio de *cuadraturas*.

Las EDs del tipo $y' = f(x,y)$ también suelen expresarse en la forma $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$, que es otra manera de escribir la igualdad $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$, o sea, $y' = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. La notación diferencial $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ tiene la ventaja de que permite elegir, según interese, la variable independiente igual a x o a y.

Vamos a estudiar tres tipos básicos de ecuaciones.

- Ecuaciones de variables separadas.
- Ecuaciones exactas.
- Ecuaciones lineales.

Veremos que usando las técnicas de cambio de variable o de factor integrante otros tipos de ecuaciones pueden ser convertidos en alguno de los anteriores.

2.3.1. Ecuaciones de variables separadas

Se llaman así las ecuaciones que pueden escribirse en la forma

$$P(x) + Q(y)y' = 0 \Longleftrightarrow P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.3}$$

Es decir, el coeficiente de $\mathrm{d}x$ es sólo función de x, el de $\mathrm{d}y$ es sólo función de y. Sean $G(x)$ y $H(y)$ primitivas de $P(x)$ y $Q(y)$ respectivamente. Definamos $F(x,y) = G(x) + H(y)$. La solución general de (2.3) es la familia de curvas definidas implícitamente por $F(x,y) = C$ donde C es una constante. Pues si $y = \varphi(x)$ es una curva de esta familia se tendrá que

$$\begin{aligned} F(x,\varphi(x)) = C \Longrightarrow 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,\varphi(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(G(x) + H(\varphi(x))\right) = G'(x) + H'(\varphi(x))\varphi'(x) = \\ &= P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) \end{aligned}$$

lo que prueba que $y = \varphi(x)$ es solución de (2.3).

Recíprocamente, supongamos que $y = \psi(x)$ es una solución de (2.3) definida en un intervalo I. Se tiene entonces que

$$0 = P(x) + Q(\psi(x))\psi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}F(x,\psi(x)) \quad \forall x \in I \Longrightarrow F(x,\psi(x)) = C \quad \forall x \in I$$

Si la función $Q(y)$ no se anula en su intervalo de definición, entonces la función $H(y)$ es inyectiva por lo que existe su inversa H^{-1} y (en teoría) podemos despejar y en la igualdad $H(y) = C - G(x)$ obteniendo $y = H^{-1}(C - G(x))$.

En la práctica se sobreentiende todo lo anterior y la solución general de (2.3) se expresa simplemente por

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = C$$

que es otra forma de escribir $F(x,y) = G(x) + H(y) = C$.

Ejemplo 2.3. Calcular la velocidad crítica de escape de la Tierra de un objeto de masa m (en kilogramos) suponiendo que la única fuerza que actúa sobre dicho cuerpo es la atracción gravitatoria de la Tierra. Tomar como valor del radio de la Tierra $R = 6371$ Km.

Solución. Se trata de calcular la velocidad v_0 con la que hay disparar verticalmente dicho objeto para que permanezca alejándose de la Tierra indefinidamente.

Como el movimiento y la acción de la fuerza tienen lugar en una recta que pasa por el centro de la Tierra, elegimos un sistema de referencia con origen en el centro de la Tierra de manera que el movimiento tiene lugar en el eje OZ de dicho sistema. De esta forma podemos prescindir del carácter vectorial de las magnitudes implicadas y trabajar solamente con sus módulos (normas euclídeas).

Cuando el objeto se halla a una distancia h (en metros) del centro de la Tierra la fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el mismo es proporcional a su masa e inversamente proporcional a h^2, es decir, de la forma $F(h) = km/h^2$. Como $F(R) = m\,g$ (el peso del cuerpo en la superficie de la Tierra), deducimos que $k = gR^2$ y, por tanto, $F(h) = m\,gR^2/h^2$, donde suponemos R expresado en metros. Sean $h(t)$ la distancia del objeto al centro de la Tierra y $v(t) = h'(t)$ su velocidad en el momento t.

Teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo y que la fuerza ejercida se opone al movimiento, la segunda ley de Newton nos dice que

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{m\,gR^2}{(h(t))^2} \Longrightarrow v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\,t} = -gR^2\frac{h'(t)}{(h(t))^2} \Longrightarrow v\,\mathrm{d}v = -gR^2\frac{h'(t)}{(h(t))^2}\,\mathrm{d}\,t$$

que es una ecuación de variables separadas cuya solución viene dada por

$$\int v\,\mathrm{d}v = -gR^2\int\frac{h'(t)}{(h(t))^2}\,\mathrm{d}\,t + C$$

y deducimos que

$$v^2 = 2gR^2 \frac{1}{h(t)} + C$$

Como para $t = 0$ es $h(0) = R$ y $v(0) = v_0$, se sigue que $C = v_0^2 - 2gR$. Luego

$$(v(t))^2 = 2gR^2 \frac{1}{h(t)} + v_0^2 - 2gR$$

Puesto que debe verificarse $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$, deducimos que $\lim\limits_{t\to+\infty} (v(t))^2 = v_0^2 - 2gR$, lo que implica que $v_0^2 - 2gR \geqslant 0$, es decir, $v_0 \geqslant \sqrt{2gR} \approxeq 11180\,\mathrm{m/s}= 11,18\,\mathrm{Km/s}$. ♦

Ejemplo 2.4. La curva llamada *catenaria* es la forma que toma un cable colgante bajo la acción de la gravedad. Los cables del tendido eléctrico son un ejemplo. Queremos obtener la ecuación de dicha curva. Supondremos que el cable tiene suficiente caída como para presentar un punto P_0 con tangente horizontal. Tomamos dicho punto como origen de coordenadas y el eje OX coincidiendo con la tangente. Sea p el peso por unidad de longitud del cable. En cada punto $P = P(x, y)$ del cable hay una tensión que sería la fuerza que, cortando el cable por P, marcaría un dinamómetro intercalado entre los dos trozos de cable resultantes. Sea T_0 la tensión en P_0 y $T = T(x, y)$ la tensión en $P(x, y)$. Para obtener la ecuación de la curva utilizaremos que, al estar el cable en equilibrio, la resultante de las fuerzas que actúan en cada punto $P(x, y)$ debe ser nula. Dichas fuerzas son:

- El peso, W, del trozo de cable entre P_0 y P.
- La tensión horizontal T_0 en el punto P_0.
- La tensión T en el punto P

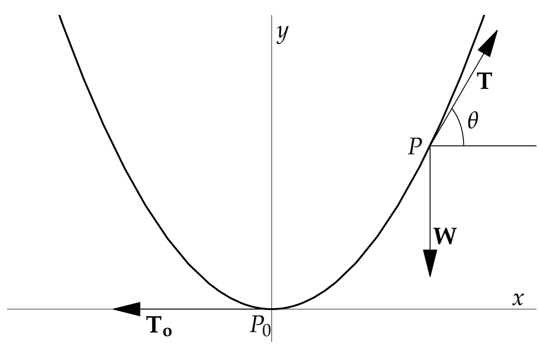


Figura 2.2: Catenaria

Deberá verificarse que:

$$\begin{cases} T\cos\theta - T_0 = 0, & \text{resultante de las componentes horizontales;} \\ T\operatorname{sen}\theta - W = 0, & \text{resultante de las componentes verticales.} \end{cases}$$

El peso se obtiene multiplicando p por la longitud del trozo de cable OP. Esto es

$$W = p\int_0^x \sqrt{1+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Deducimos que

$$T\,\mathrm{sen}\,\theta = T_0\,\mathrm{tg}\,\theta = T_0 y'(x) = p\int_0^x \sqrt{1+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Derivando obtenemos

$$y'' = \frac{p}{T_0}\sqrt{1+(y')^2}$$

Haciendo en esta ecuación $y' = z$, obtenemos una ED de variables separadas:

$$z' = \frac{p}{T_0}\sqrt{1+z^2} \iff \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,\mathrm{d}z = \frac{p}{T_0}\,\mathrm{d}x$$

Integrando entre 0 y x, usando que $z(0) = 0$, obtenemos

$$\operatorname{argsenh} z = \frac{p}{T_0}x \iff z = \operatorname{senh}\left(\frac{p}{T_0}x\right)$$

Finalmente, una nueva integración da la ecuación de la catenaria.

$$y(x) + \frac{T_0}{p} = \frac{T_0}{p}\cosh\left(\frac{p}{T_0}x\right) = \frac{T_0}{2p}\left(\mathrm{e}^{\frac{p\,x}{T_0}} + \mathrm{e}^{-\frac{p\,x}{T_0}}\right)$$

Y tomando como eje OX la horizontal que diste $\dfrac{T_0}{p}$ de P_0, punto que se llama *base* de la catenaria, será $y(0) = \dfrac{T_0}{p}$ y, por tanto

$$y(x) = \frac{T_0}{p}\cosh\left(\frac{p}{T_0}x\right) = \frac{T_0}{2p}\left(\mathrm{e}^{\frac{p\,x}{T_0}} + \mathrm{e}^{-\frac{p\,x}{T_0}}\right)$$

♦

2.3.2. Ecuaciones exactas

Supondremos en lo que sigue que P y Q son funciones con derivadas parciales continuas. La ecuación diferencial

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.4}$$

se dice que es exacta en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuando el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ es conservativo en Ω, es decir, existe un campo escalar $U(x,y)$, llamado el potencial del campo $\mathbf{F}$, determinado de manera única salvo una constante aditiva, cuyo gradiente

$$\nabla U(x,y) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)\right)$$

coincide en todo punto de Ω con $\mathbf{F}(x,y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \tag{2.5}$$

Es sabido que, en las hipótesis hechas sobre P y Q, una condición necesaria para que el campo $\mathbf{F}$ sea conservativo en Ω es que se verifiquen las igualdades

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \tag{2.6}$$

Cuando estas condiciones necesarias se cumplen y, además, Ω es un dominio simplemente conexo (sin agujeros), entonces el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ es conservativo en Ω.

Supuesto que el campo es conservativo, vamos a calcular la función potencial U que se anula en un punto $(a,b) \in \Omega$.

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \Longrightarrow U(x,y) = \int_a^x P(t,y)\,\mathrm{d}\,t + \varphi(y)$$

Derivando esta igualdad respecto de la segunda variable y usando las igualdades (2.5) y (2.6) y el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos

$$Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)\,\mathrm{d}\,t + \varphi'(y) = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}(t,y)\,\mathrm{d}\,t + \varphi'(y) = Q(x,y) - Q(a,y) + \varphi'(y)$$

y deducimos que

$$\varphi'(y) = Q(a,y) \Longrightarrow \varphi(y) = \int_b^y Q(a,t)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

luego

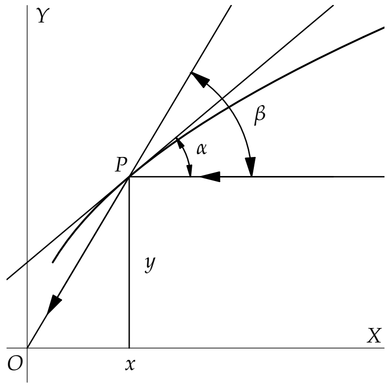
$$U(x,y) = \int_a^x P(t,y)\,\mathrm{d}x + \int_b^y Q(a,t)\,\mathrm{d}\,t$$

Observa que para que este cálculo sea correcto los segmentos que van de (a,b) a (a,y) y de (a,y) a (x,y) deben estar contenidos en Ω. Una vez que tenemos la función potencial, las soluciones de la ecuación exacta (2.4) viene dadas implícitamente por $U(x,y) = C$ donde C es una constante. Pues cualquier función derivable $y = y(x)$ definida en un intervalo I y que verifique $U(x,y(x)) = C$ para todo $x \in I$ debe verificar también que

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} U(x,y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y(x))y'(x) = P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)$$

lo que prueba que $y(x)$ es solución de (2.4).

Ejemplo 2.5. Queremos determinar las curvas planas que tienen la propiedad de concentrar en un punto un haz de rayos paralelos reflejados en ellas. Dichas curvas generan superficies de revolución con la misma propiedad que son usadas para construir los radiotelescopios.
Solución.



En la gráfica de la izquierda se ha representado parte de la curva y de su tangente en un punto P. Se ha supuesto que los rayos incidentes son paralelos al eje X y que el punto en donde se concentran los rayos reflejados es el origen. El ángulo de incidencia (el que forma el rayo incidente con la tangente en el punto de incidencia), α, debe ser igual al de reflexión (el que forma el rayo reflejado con la tangente) que es igual a $\beta - \alpha$.

Deberá cumplirse por tanto

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\beta) - \operatorname{tg}(\alpha)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)} \Longrightarrow y' = \frac{y/x - y'}{1 + y'y/x} \Longrightarrow y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{2y} \Longrightarrow$$

$$y\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}x \mp \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow \left(\mp \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 \right) \mathrm{d}x \mp \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Esta última ecuación es de la forma $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ con

$$P(x,y) = \mp \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1, \quad Q(x,y) = \mp \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \pm \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Observa que P y Q están definidas en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ que es un dominio no simplemente conexo por lo que, a priori, no es seguro que la ecuación sea exacta. Tratemos de calcular una función potencial U.

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 1 \mp \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longrightarrow U(x,y) = x \mp \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \mp \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(y) = Q(x,y) \Longrightarrow \varphi'(y) = 0 \Longrightarrow \varphi(y) = C$$

Hemos obtenido así $U(x,y) = x \mp \sqrt{x^2+y^2} + C$. Es claro que $\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ y $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Omega$. Concluimos que las curvas solución buscadas vienen dadas implícitamente por

$$\pm \sqrt{x^2+y^2} = x + c \Longrightarrow x^2 + y^2 = (x+c)^2 \Longrightarrow y^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

que es una familia de parábolas con su foco en el origen. Ya Arquímides conocía esta propiedad de las parábolas pero ahora hemos probado que son las *únicas* curvas que la tienen. ♦

2.3.3. Ecuaciones lineales

Son de la forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{2.7}$$

donde a y b son funciones reales (o complejas) continuas definidas en un intervalo I. Vamos a probar que dados $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, hay una única función derivable $y\colon I \to \mathbb{R}$ que es solución de la ecuación (2.7) y verifica que $y(x_0) = y_0$.

Notemos A la primitiva de a que se anula en x_0:

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\, \mathrm{d}s \qquad (x \in I)$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación (2.7) por $\mathrm{e}^{A(x)}$ obtenemos:

$$y'(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} + a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\, y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\, b(x)$$

ecuación que, poniendo $\varphi(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}$, puede escribirse $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\, b(x)$ y, como debe ser
$\varphi(x_0) = y(x_0) = y_0$, se tiene que:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{A(t)}\, b(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Concluimos que la función

$$y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{A(t)}\, b(t)\, \mathrm{d}t \right) \tag{2.8}$$

es una solución de la ecuación (2.7) que verifica la condición $y(x_0) = y_0$. La unicidad es consecuencia inmediata de la forma en que hemos obtenido dicha solución.

Ejemplo 2.6. Consideremos un depósito que inicialmente contiene un volumen igual a V_0 litros de agua. A partir de ese instante, en el depósito entran L litros por minuto de agua contaminada con ρ miligramos de mercurio por litro y salen M litros por minuto. Se supone que en cada instante la concentración de mercurio en el depósito es uniforme. Calcula la cantidad de mercurio que hay en el depósito en cada momento.

Solución. En cada tiempo t (en minutos) sea $V(t)$ el volumen de agua (en litros) e $y(t)$ la cantidad de mercurio (en miligramos) que hay en el depósito. Tenemos que $V(t) = V_0 + t(L - M)$. Para calcular $y(t)$ debemos tener en cuenta que la concentración de mercurio en la entrada es constante igual a ρ pero no así en la salida. La concentración de mercurio en el depósito en el tiempo t es igual a $y(t)/V(t)$; por tanto, la cantidad de mercurio que ha salido del depósito en el tiempo t es igual a $M \displaystyle\int_0^t \frac{y(s)}{V(s)}\, \mathrm{d}s$. Deducimos que

$$y(t) = \rho\, L\, t - M \int_0^t \frac{y(s)}{V(s)}\, \mathrm{d}s$$

y derivando obtenemos

$$y'(t) + \frac{M}{V_0 + t(L-M)} y(t) = \rho L$$

Se trata de una ecuación lineal con $a(t) = \dfrac{M}{V_0 + t(L-M)}$ y $b(t) = \rho L$. Supuesto que $L \neq M$ se tiene

$$A(t) = \int_0^t \frac{M}{V_0 + t(L-M)} \,\mathrm{d}\,t = \frac{M}{L-M}\Big(\log\left(V_0 + t(L-M)\right) - \log(V_0)\Big) = \log\left(1 + t\frac{L-M}{V_0}\right)^{\frac{M}{L-M}}$$

y teniendo en cuenta (2.8) y haciendo unos sencillos cálculos, obtenemos que la solución que verifica $y(0) = 0$ viene dada por

$$y(t) = \rho V_0 \left(1 + t\,\frac{L-M}{V_0}\right)\left(1 - \left(1 + t\,\frac{L-M}{V_0}\right)^{\frac{L}{M-L}}\right)$$

Si es $L = M$ se obtiene

$$y(t) = \rho V_0 (1 - \mathrm{e}^{-L\,t/V_0})$$

♦

Estudiadas con cierto detalle los tres tipos básicos de EDO1 (EDO de orden 1), en lo que sigue vamos a estudiar algunos tipos de EDO1 que pueden convertirse en alguno de ellos usando las técnicas de cambio de variable o de función y de factor integrante.

2.3.4. Ecuaciones de variables separables

Se llaman así las EDO1 que pueden transformarse mediante operaciones sencillas en una EDO1 de variables separadas.

Tipo $\mathbf{y' = f(ax + by + c)}$.

Se supone que a, b, c son números reales con $b \neq 0$. El cambio de función $y(x)$ por $z(x)$ dado por $z = ax + by + c$ la transforma en una ecuación de variables separadas en z y x.

$$y(x) = \frac{z(x) - ax - c}{b} \Longrightarrow y'(x) = \frac{z'(x) - a}{b} \Longrightarrow z'(x) - a = bf(z(x)) \Longrightarrow \frac{z'(x)}{bf(z(x)) + a} = 1$$

Hemos obtenido así la ecuación

$$\frac{1}{bf(z) + a}\,\mathrm{d}z \;-\; \mathrm{d}x \;= 0$$

cuya solución está dada implícitamente por

$$\int \frac{1}{bf(z) + a}\,\mathrm{d}z \;- x = C$$

Deshaciendo el cambio de función realizado en esta igualdad obtenemos la relación entre x e y que define implícitamente las soluciones de la ecuación dada.

2.3.5. Ecuaciones homogéneas

Se llaman así las de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para resolverla, cambiamos la función $y(x)$ por $u(x)$ donde $y(x) = u(x)x$. De esta forma obtenemos la ecuación $u'x + u = f(u)$ que podemos escribir

$$\frac{1}{f(u) - u}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0$$

que es de variables separadas.

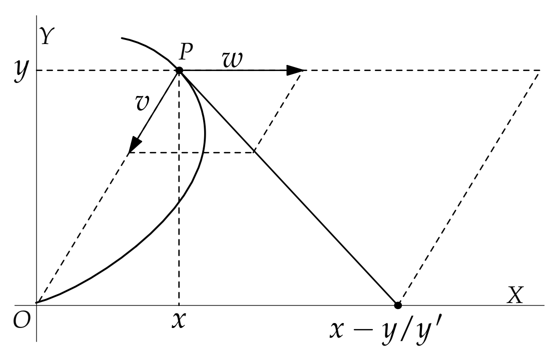
Las ecuaciones homogéneas pueden definirse también de otra manera equivalente. Una función $h(x,y)$ se dice que es homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}^*$ si para todo $t > 0$ se verifica que $h(tx,ty) = t^\alpha h(x,y)$. Es inmediato comprobar que una EDO1 de la forma

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

en la que $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado, puede escribirse como una ecuación diferencial homogénea según la definición antes dada.

Ejemplo 2.7. Determinar la trayectoria que sigue un avión cuya velocidad tiene módulo constante v y siempre está dirigida hacia el origen de coordenadas, y que sufre el empuje de un viento lateral con dirección del semieje positivo de abscisas y velocidad constante w.

Solución



En la figura de la izquierda se ha representado parte de la trayectoria buscada y de su tangente en un punto P. La tangente lleva la dirección de la resultante de las velocidades del avión y del viento lateral. La intersección de la tangente con el eje X es el punto de abscisa $x - y/y'$ representado en la figura.

Teniendo en cuenta la semejanza de triángulos, se verifica que:

$$\frac{x - y/y'}{\overline{OP}} = \frac{w}{v} = \lambda \Longrightarrow x - y/y' = \lambda\sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow y\,\mathrm{d}x + \lambda\big(\sqrt{x^2+y^2} - x\big)\,\mathrm{d}y = 0$$

Hemos obtenido una ecuación homogénea. Es preferible, debido a la forma que (intuitivamente) va a tener la curva solución, obtener x como función de y. Hacemos, pues, $x = uy$ considerando y como la variable independiente y $u = u(y)$ como función de y. De esta manera obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{\lambda\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$$

que puede integrase elementalmente obteniendo

$$\log(C\,y) = -\frac{1}{\lambda}\log(u + \sqrt{1+u^2}\,) \Longrightarrow u + \sqrt{1+u^2} = (Cy)^{-\lambda}$$

Teniendo en cuenta que $(u + \sqrt{1+u^2}\,)(u - \sqrt{1+u^2}\,) = -1$ se sigue que $u - \sqrt{1+u^2} = -(Cy)^{\lambda}$ y, finalmente, obtenemos que

$$u = \frac{(Cy)^{-\lambda} - (Cy)^{\lambda}}{2} \Longrightarrow x = \frac{(Cy)^{1-\lambda} - (Cy)^{1+\lambda}}{2C}$$

♦

2.3.6. Tipo $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

- Si $c = \gamma = 0$ es una ecuación homogénea.
- Si las rectas $ax + by + c = 0$ y $\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0$ se cortan en un punto (x_0, y_0) podemos escribir

  $$\begin{cases} ax + by + c = a(x - x_0) + b(y - y_0) \\ \alpha\, x + \beta\, y + \gamma = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \end{cases}$$

  Los cambios de variable y de función dados por $t = x - x_0$, $z = y - y_0$ convierten la ecuación en una homogénea en z, t.
- Si las rectas son paralelas, el cambio de función $z = ax + by$ transforma la ecuación en una de variables separables en z, x.

2.3.7. Ecuaciones reducibles a exactas. Factores integrantes

Decimos que $\mu(x,y)$ es un factor integrante de la ecuación

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

cuando la ecuación que resulta al multiplicar dicha ecuación por μ

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.9}$$

es una ecuación exacta.

Por ejemplo, la ecuación $y\,\mathrm{d}x + (x^2y - x)\,\mathrm{d}y = 0$ no es exacta; pero si la multiplicamos por $\mu(x,y) = 1/x^2$ obtenemos una ecuación exacta.

Se sabe que siempre existen factores integrantes aunque esto no es de tan gran ayuda como puede parecer en un primer momento porque, salvo en algunos casos típicos, el cálculo de un factor integrante es un problema mucho más difícil que la propia ecuación que queremos resolver. En general, las condiciones que debe verificar una función μ para que la ecuación (2.9) sea exacta son:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(x,y)P(x,y)\big)=\frac{\partial}{\partial x}\big(\mu(x,y)Q(x,y)\big)\Longrightarrow\\&\mu(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)+P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)=\mu(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)+Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)\end{aligned}\tag{2.10}$$

En la práctica nos interesa obtener solamente una solución de esta ecuación en derivadas parciales. Lo que se hace es tratar de encontrar un factor integrante que sea de alguna forma especial. Suelen buscarse factores integrantes de los siguientes tipos:

- $\mu=\mu(x)$ (depende solamente de x)
- $\mu=\mu(y)$ (depende solamente de y)
- $\mu=\mu(x+y)$ (puede expresarse como función de $x+y$)
- $\mu=\mu(xy)$ (puede expresarse como función de xy)

Veamos bajo qué condiciones hay un factor integrate de la forma $\mu(x)$.Teniendo en cuenta la ecuación (2.10), debe cumplirse que

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)-\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}{Q(x,y)}$$

Esta condición exige que la función de la derecha dependa solamente solamente de x, esto es

$$h(x)=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)-\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}{Q(x,y)}\Longrightarrow \mu(x)=\mathrm{e}^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

Por ejemplo, la ecuación lineal $y'+a(x)y=b(x)$, que puede escribirse $(a(x)y-b(x))\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0$, admite un factor integrante que solamente depende de x. Pues tenemos $P(x,y)=a(x)y-b(x)$, $Q(x,y)=1$, por lo que

$$h(x)=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)-\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}{Q(x,y)}=a(x)$$

Deducimos que $\mu(x)=\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}$ es un factor integrante.

2.3.8. Ecuaciones de Bernoulli

Son de la forma

$$y'+a(x)y+b(x)y^{\alpha}=0$$

donde α es un número real. Si $\alpha = 0$ se trata de una ecuación lineal y si $\alpha = 1$ se trata de una ecuación de variables separables. En otro caso, el cambio de función $z = y^{1-\alpha}$ la convierte en la ecuación lineal $z' + (1-\alpha)a(x)z = (\alpha - 1)b(x)$.

Otro método consiste en escribir $y(x) = u(x)v(x)$. Derivando resulta $y' = u'v + uv'$, y sustituyendo en la ecuación obtenemos $u'v + uv' + a(x)uv + b(x)u^{\alpha}v^{\alpha} = 0$, que puede escribirse en la forma $u'v + (v' + a(x)v)u + b(x)u^{\alpha}v^{\alpha} = 0$. Ahora igualamos a cero el coeficiente de u, con lo cual tenemos $v' + a(x)v = 0$, que es una ecuación de variables separadas en v, x. Resolviéndola calculamos $v(x)$. De esta forma, la ecuación inicial ha quedado reducida a $u'v + b(x)u^{\alpha}v^{\alpha} = 0$, que es una ecuación de variables separadas que permite calcular u.

2.3.9. Ecuaciones de Ricatti

Son de la forma

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

No hay métodos generales para resolver este tipo de ecuaciones; pero si de alguna forma somos capaces de calcular una solución particular de dicha ecuación, $y_p(x)$, entonces el cambio de función $y = y_p + z$ transforma la ecuación en $z' + \big(a(x) + 2b(x)y_p(x)\big)z + b(x)z^2 = 0$, que es una de Bernoulli con $\alpha = 2$. El cambio $z = u^{-1}$ reduce esta última ecuación a una lineal.

2.3.10. Otras formas de resolver la EDO1 lineal

Hemos visto ya dos formas de resolver la ecuación $y' + a(x)y = b(x)$. Directamente, como se hizo al estudiarla por primera vez y calculando un factor integrante para convertirla en una ecuación exacta. Otra forma es el método conocido como *variación de constantes*. Consiste en lo siguiente.

Primero se calcula la solución general de la ecuación $y' + a(x)y = 0$, que es $C\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$, donde C es una constante arbitraria. Seguidamente se forma la función $y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$ donde hemos sustituido la constante C por una función desconocida, $C(x)$, que se calcula imponiendo que $y(x)$ sea solución de la ecuación dada. De esta forma se obtiene

$$C(x) = \int b(x)\,\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\;\mathrm{d}x + C$$

lo que nos vuelve a dar como solución general de la ecuación lineal

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int b(x)\,\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\;\mathrm{d}x + C\right)$$

Otro método para resolver las ecuaciones lineales consiste en poner $y(x) = u(x)v(x)$. Con ello $y' = u'v + uv'$ y, sustituyendo en la ecuación, $u'v + uv' + a(x)uv = b(x)$. Que puede escribirse $u'v + (v' + a(x)v)u = b(x)$. Imponiendo ahora que $v' + a(x)v = 0$ podemos calcular v que viene dada por $v(x) = \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$. La ecuación inicial ha quedado reducida a $u'v = b(x)$, de donde $u'(x) = b(x)\,\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}$. Integrando, $u(x) = \displaystyle\int b(x)\,\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$. Como $y(x) = u(x)v(x)$, volvemos a obtener la solución de la ecuación lineal ya conocida.

2.4. EDO en forma implícita

Consideraremos algunos tipos de EDs de la forma $F(x, y, y') = 0$.

Cuando F es una función polinómica en y'

Son EDs de la forma

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0$$

Lo que se hace es considerar este igualdad como un polinomio en y' y se calculan sus raíces $f_i(x, y)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, con lo cual la ecuación dada se escribe en la forma

$$(y' - f_1(x, y))(y' - f_2(x, y)) \cdots (y' - f_n(x, y)) = 0$$

y deberemos resolver las n ecuaciones $y' - f_i(x, y) = 0$.

2.4.1. Ecuaciones de la forma $y = f(x, y')$

Para resolver este tipo de ecuaciones, hacemos $y' = p$ y trataremos de expresar las curvas solución por medio de sus ecuaciones paramétricas en función del parámetro p. Para ello será suficiente con que logremos expresar x como función de p. A tal efecto derivamos $y = f(x, p)$ respecto de x, con lo que tenemos

$$p = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} p'$$

que es una ED en la incógnita p que, con suerte, puede ser de alguno de los tipos ya estudiados. Supongamos que podemos expresar su solución en la forma $x = \varphi(p, C)$. Entonces, las curvas de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = f(\varphi(p, C), p) \end{cases}$$

donde p es el parámetro y C una constante, son soluciones de la ED $y = f(x, y')$. Los siguientes casos particulares son de especial interés.

2.4.2. EDs de la forma $y = f(y')$

En este caso, repitiendo el proceso anterior obtenemos

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{f(p)}{p}\,\mathrm{d}p = \varphi(p) + C \\ y = f(p) \end{cases}$$

Además, para $p = 0$ se tiene la solución constante $y = f(0)$ que representa una recta horizontal que es la envolvente de las curvas integrales.

2.4.3. Ecuaciones de Lagrange

Son de la forma
$$y + x\,\varphi(y') + \psi(y') = 0$$
Poniendo $y' = p$ y derivando respecto de x obtenemos
$$(p + \varphi(p))\,\mathrm{d}x + x\,\varphi'(p)\,\mathrm{d}p + \psi'(p)\,\mathrm{d}p = 0$$
Dividiendo por $p + \varphi(p)$ obtenemos una ecuación lineal
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{\varphi'(p)}{p + \varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p + \varphi(p)} = 0$$
en la que consideramos que x es función de la variable p. Sea $x = \phi(p, C)$ la solución de esta ecuación. Entonces las soluciones de la ecuación de partida vienen dadas por
$$\begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = -\phi(p, C)\varphi(p) - \psi(p) \end{cases}$$
El razonamiento anterior excluye los puntos p en los que $p + \varphi(p) = 0$. Veamos lo que ocurre en tal caso. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$. Es inmediato comprobar que la función dada por $y = \lambda\,x - \psi(\lambda)$ es solución de la ecuación de Lagrange. Estas rectas son soluciones singulares de la ecuación.

2.4.4. Ecuaciones de Clairaut

Son de la forma
$$y - x\,y' + \psi(y') = 0$$
Poniendo $y' = p$ y derivando respecto de x obtenemos $(-x + \psi'(p))p' = 0$. Si $p' = 0$ entonces $y' = p = \lambda$ por lo que la familia de rectas $y = \lambda\,x - \psi(\lambda)$ es solución de la ED. Si $-x + \psi'(p) = 0$ obtenemos la solución singular, envolvente del haz de rectas, dada por
$$\begin{cases} x = \psi'(p) \\ y = p\,\psi'(p) - \psi(p) \end{cases}$$

2.5. Ecuación diferencial lineal de orden n

La ecuación diferencial:
$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \tag{2.11}$$

donde a_j $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$ y b son funciones reales (o complejas) continuas definidas en un intervalo I, se llama ecuación diferencial lineal (EDL) de orden n. A diferencia de lo visto para el caso $n = 1$, no hay ningún método general de resolución de la ecuación (2.11) cuando es $n \geqslant 2$. Adquiere así importancia el siguiente resultado. Notaremos $C^n(I)$ las funciones reales (o complejas) que tienen derivada de orden n continua en el intervalo I.

Teorema de existencia y unicidad. Dados $x_0 \in I$, $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, existe una única función
$y \in C^n(I)$ que es solución de la ecuación (2.11) en el intervalo I y verifica las condiciones $y(x_o) = y_0$, $y^{(k)}(x_0) = y_k$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Los valores $x_0 \in I$, $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, se suelen llamar *condiciones iniciales*. Así, pues, aunque para $n \geqslant 2$ las soluciones de la ED (2.11), salvo en algunos casos particulares, no pueden obtenerse de forma explícita, sí sabemos que, fijadas unas condiciones iniciales, hay una única solución de dicha ecuación que las satisface; además dicha solución está definida en todo el intervalo I.

Estudiaremos a continuación algunas propiedades del *conjunto de todas las soluciones* de la ED (2.11). Aprovecharemos para ello la *linealidad* de la ecuación.

Es conveniente introducir una notación apropiada. Notaremos $C(I)$ el espacio de las funciones reales (o complejas) continuas en I. Sea $L : C^n(I) \to C(I)$ el operador que a cada función $y \in C^n(I)$ hace corresponder la función continua $L(y) \colon I \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in I$ por:

$$L(y)(x) = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x)$$

El operador así definido es evidentemente lineal. La ED (2.11) puede escribirse ahora en la forma $L(y)(x) = b(x)$ o, simplemente, $L(y) = b$. La ED $L(y) = 0$ se llama ED lineal *homogénea* de orden n. La ecuación $L(y)(x) = b(x)$ se llama también ED lineal *completa* de orden n. Notaremos por $\mathrm{Ker(L)}$ el núcleo del operador L, es decir, el conjunto de todas las soluciones de la ED $L(y) = 0$.

Sea $X = \{y \in C^n(I) : L(y) = b\}$ el conjunto de todas las soluciones de la EDL completa. Supongamos que conocemos una solución, φ, de dicha ED. Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} X &= \{y \in C^n(I) : L(y) = L(\varphi)\} = \{y \in C^n(I) : L(y-\varphi) = 0\} = \{y \in C^n(I) : y - \varphi \in \mathrm{Ker(L)}\} = \\ &= \varphi + \mathrm{Ker(L)} \end{aligned}$$

Naturalmente, $\mathrm{Ker(L)}$ es un subespacio vectorial de $C^n(I)$. Probaremos que tiene dimensión n. Para ello notemos u_j el vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son todas nulas excepto la j-ésima que es igual a 1, y notemos y_j la única solución de la ED homogénea que satisface las condiciones iniciales:

$$(y_j(x_0), y_j'(x_0), \ldots, y_j^{(n-1)}(x_0)) = u_j.$$

Comprobemos que las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forman una base de Ker(L). En efecto, si $y \in \operatorname{Ker}(L)$, entonces la función

$$h = y(x_0)y_1 + y'(x_0)y_2 + \cdots + y^{(n-1)}(x_0)y_n$$

es una solución de la ED homogénea que verifica

$$h(x_0) = y(x_0),\, h'(x_0) = y'(x_0), \ldots, h^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0)$$

En virtud de la unicidad de la solución correspondiente a unas condiciones iniciales dadas, concluimos que $h = y$. Hemos probado así que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es un sistema de generadores de Ker(L); además dichas funciones son linealmente independientes, pues si c_1, $c_2, \ldots, c_n$ son números tales que $\sum_{j=1}^{n} c_j y_j = 0$, es decir:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$$

para todo $x \in I$, entonces, evaluando esta igualdad en x_0 obtenemos que $c_1 = 0$; derivando k veces $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ obtenemos $\sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)}(x) = 0$, igualdad que al evaluarla en x_0 se convierte en $c_k = 0$. Resumimos los resultados obtenidos en el siguiente teorema.

Teorema. Las soluciones de la EDL completa (2.11) son las funciones de la forma:

$$y(x) = \varphi(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \qquad (x \in I)$$

donde φ es una solución particular de dicha ecuación, y_1, $y_2, \ldots, y_n$ son cualesquiera n soluciones linealmente independientes de la ED homogénea y c_1, $c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

2.5.1. Ecuaciones Diferenciales lineales con coeficientes constantes

Consideremos la ED

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{2.12}$$

en la que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son números reales. Notando D el operador lineal que a cada función derivable en un intervalo hace corresponder su función derivada, y definiendo

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

podemos escribir la ED (2.12) en la forma $L(y) = 0$.

Busquemos soluciones de dicha ecuación de la forma $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ donde λ es un número real o complejo. Un sencillo cálculo nos da:

$$L(\mathrm{e}^{\lambda x}) = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

y deducimos que $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ es solución de la ED (2.12) si, y sólo si, se verifica que

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

El polinomio $\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, se llama *polinomio característico* de la ED (2.12).

Proposición. Sea μ una raíz (real o compleja) de multiplicidad k del polinomio característico $\chi(\lambda)$. Entonces las funciones $\mathrm{e}^{\mu x}$, $x\,\mathrm{e}^{\mu x}$, $x^2\,\mathrm{e}^{\mu x}, \cdots, x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\mu x}$ son soluciones de la ED (2.12).

Demostración. Sea $j \in \mathbb{N}$. Notando D_λ la derivación respecto a la variable λ, $D = D_x$ la derivación respecto a la variable x, y teniendo en cuenta que $D_\lambda(D_x(\mathrm{e}^{\lambda x})) = D_x(D_\lambda(\mathrm{e}^{\lambda x}))$, se deduce que:

$$L(x^j\,\mathrm{e}^{\lambda x}) = L(D_\lambda^j(\mathrm{e}^{\lambda x})) = D_\lambda^j(L(\mathrm{e}^{\lambda x})) = D_\lambda^j(\chi(\lambda)\,\mathrm{e}^{\lambda x}) = \sum_{q=0}^{j}\binom{j}{k}\chi^{(j-q)}(\lambda)x^q\,\mathrm{e}^{\lambda x} \tag{2.13}$$

Igualdad que, con el convenio usual de que la derivada de orden cero de una función es la misma función, también es válida para $j = 0$.

Supongamos que μ es una raíz de multiplicidad k de $\chi(\lambda)$. Se verifica entonces que las derivadas de $\chi(\lambda)$ hasta la de orden $k-1$ inclusive se anulan para $\lambda = \mu$. Deducimos así, teniendo en cuenta la igualdad (2.13), que para $0 \leqslant j \leqslant k-1$ es:

$$L(x^j\,\mathrm{e}^{\mu x}) = D_\lambda^j(\chi(\lambda)\,\mathrm{e}^{\lambda x})\Big|_{\lambda=\mu} = 0.$$

Teorema. Sean μ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, las distintas raíces del polinomio característico $\chi(\lambda)$, con multiplicidades respectivas $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n)$. A cada raíz μ_j asociamos las k_j soluciones de la ED (2.12):

$$\mathrm{e}^{\mu_j x},\ x\,\mathrm{e}^{\mu_j x},\ x^2\,\mathrm{e}^{\mu_j x}, \cdots, x^{k_j-1}\,\mathrm{e}^{\mu_j x}$$

Obtenemos así n soluciones de la ED (2.12) que son linealmente independientes.

Nótese que si μ_j es una raíz compleja de $\chi(\lambda)$, entonces las soluciones de la ED (2.12) asociadas a dicha raíz son funciones complejo-valuadas. Ahora bien, puesto que los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ de la ED (2.12) son números reales, hipótesis que hasta aquí no hemos usado para nada, se sigue que si $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ es una raíz compleja de $\chi(\lambda)$, también lo es con igual multiplicidad $\overline{\mu_j} = \alpha_j - i\beta_j$. En consecuencia las $2k_j$ funciones:

$$\begin{aligned}
&x^{j-1}\,\mathrm{e}^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x) = x^{j-1}\,\mathrm{e}^{\mu_j x} + x^{j-1}\,\mathrm{e}^{\overline{\mu_j} x};\\
&x^{j-1}\,\mathrm{e}^{\alpha_j x}\operatorname{sen}(\beta_j x) = i\big(x^{j-1}\,\mathrm{e}^{\overline{\mu_j} x} - x^{j-1}\,\mathrm{e}^{\mu_j x}\big) \quad (1 \leqslant j \leqslant k_j)
\end{aligned}$$

son soluciones de la ED (2.12). Finalmente, teniendo en cuenta que si dos vectores u, v son linealmente independientes también lo son los vectores $u + v$, $u - v$, deducimos el siguiente resultado.

Teorema. Sean μ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, las distintas raíces del polinomio característico $\chi(\lambda)$, con multiplicidades respectivas $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n)$. A cada raíz real μ_j asociamos las k_j soluciones de la ED (2.12):

$$\mathrm{e}^{\mu_j x},\ x\,\mathrm{e}^{\mu_j x},\ x^2\,\mathrm{e}^{\mu_j x}, \cdots,\ x^{k_j-1}\,\mathrm{e}^{\mu_j x}$$

A cada raíz compleja $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ asociamos las $2k_j$ soluciones de la ED (2.12):

$$x^{j-1}\,\mathrm{e}^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x); \quad x^{j-1}\,\mathrm{e}^{\alpha_j x}\operatorname{sen}(\beta_j x) \quad (1 \leqslant j \leqslant k_j)$$

Obtenemos así n soluciones de la ED (2.12) que son linealmente independientes.

2.5.2. Cálculo de una solución particular de la EDL completa

Una vez que sabemos calcular la solución general de la ED (2.12), para obtener la solución general de la EDL completa:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y_0(x) = b(x) \tag{2.14}$$

donde b es una función continua real (o compleja) definida en un intervalo I solamente necesitamos calcular una solución particular de dicha ecuación. Las soluciones ya no estarán definidas en todo $\mathbb{R}$ como antes, sino en el intervalo I donde está definida la función b. Para ello suelen seguirse los siguientes procedimientos.

2.5.2.1. Método de variación de constantes

Supongamos, pues, que conocemos n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linealmente independientes de la ED homogénea (2.12), y veamos un método, conocido con el nombre de *método de Lagrange* o *de variación de constantes*, que se utiliza para obtener una solución particular de la ED completa. En este método se supone que la solución particular es de la forma:

$$\varphi = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \tag{2.15}$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son funciones derivables en el intervalo I, que se determinan imponiendo las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_1'(x)y_1(x) & + & C_2'(x)y_2(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\
C_1'(x)y_1'(x) & + & C_2'(x)y_2'(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_n'(x) & = & 0 \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = & 0 \\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & b(x)
\end{array}$$

Se comprueba fácilmente que si se satisfacen estas n condiciones entonces la función (2.15) es solución de la ED completa. Siempre es posible resolver dicho sistema para expresar las funciones $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ por medio de funciones conocidas lo que permite calcular las funciones $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

2.5.2.2. Método de los coeficientes indeterminados

Hay algunos casos especiales en que puede hallarse una solución particular de la ED (2.14) probando directamente cierto tipo de funciones. Concretamente, si la función $b(x)$ es de la forma $b(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} P_m(x)\cos(\beta x)$, o bien $b(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} P_m(x)\operatorname{sen}(\beta x)$ donde α, β son números reales (pudieran ser uno o los dos iguales a cero) y $P_m(x)$ es una función polinómica de grado m. Entonces lo que hacemos es hallar una solución particular de la ED:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y_0(x) = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} P_m(x) \tag{2.16}$$

Se procede de la siguiente forma:

a) Si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico $\chi(\lambda)$, entonces hay una solución particular de la ED (2.16) de la forma $\varphi(x) = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} Q_m(x)$, donde $Q_m(x)$ es una función polinómica de grado m con coeficientes indeterminados que se calculan imponiendo que la función $\varphi(x)$ sea solución de la ED (2.16).

b) Si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico $\chi(\lambda)$ con multiplicidad k, entonces hay una solución particular de la ED (2.16) de la forma $\varphi(x) = x^k\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} Q_m(x)$, donde $Q_m(x)$ es una función polinómica de grado m con coeficientes indeterminados que se calculan imponiendo que la función $\varphi(x)$ sea solución de la ED (2.16).

Obtenida una solución particular de la ED (2.16), su parte real o su parte imaginaria, según sea $b(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} P_m(x)\cos(\beta x)$, o $b(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} P_m(x)\operatorname{sen}(\beta x)$, es una solución particular de la ED (2.14). Naturalmente, el método también puede aplicarse cuando la función $b(x)$ es suma de funciones de los tipos considerados.

2.6. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \cdots + a_{1n}y_n(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \cdots + a_{2n}y_n(x) + b_2(x) \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \cdots + a_{nn}y_n(x) + b_n(x) \end{cases}$$

Donde a_{ij}, b_j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, son funciones reales (o complejas) conocidas, continuas en un intervalo I, se dice que constituyen un sistema diferencial lineal (SDL, en adelante) de n ecuaciones en las incógnitas $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Al igual que en los sistemas de ecuaciones lineales, es conveniente usar la notación matricial:

$$\mathbf{A}(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},\ \mathbf{b}(x)=\begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n x \end{pmatrix},\ \mathbf{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n x \end{pmatrix}$$

Lo que permite escribir el sistema en la forma:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x) \tag{2.17}$$

Cuando $\mathbf{b}(x) = 0$ para todo $x \in I$, el sistema se llama homogéneo, y completo o no homogéneo en caso contrario.

Teorema de existencia y unicidad. Dados $x_0 \in I$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, existe una única función $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$, que es solución del sistema diferencial lineal (2.17) y verifica que $\mathbf{y}(x_0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Notaremos $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial de las funciones reales (o complejas) definidas en el intervalo I con valores en $\mathbb{R}^n$ (o en $\mathbb{C}^n$) que tienen derivada continua. Teniendo en cuenta la linealidad del operador $\Lambda : C^1(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n)$ que a cada función $\mathbf{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ hace corresponder la función $\Lambda(\mathbf{y})$ definida para todo $x \in I$ por $\Lambda(\mathbf{y})(x) = \mathbf{y}'(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)$, y razonando de forma análoga a como se hizo para la EDL de orden n, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema. El conjunto de todas las soluciones del sistema diferencial lineal homogéneo $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)$ es un subespacio vectorial de dimensión n de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Las soluciones del SDL completo (2.17) son las funciones de la forma:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{h}(x) + c_1\mathbf{y_1}(x) + c_2\mathbf{y_2}(x) + \cdots + c_n\mathbf{y_n}(x) \qquad (x \in I)$$

donde $\mathbf{h}$ es una solución particular del SDL completo, $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_n}$ son n soluciones linealmente independientes del SDL homogéneo y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Un conjunto de n soluciones linealmente independientes del SDL homogéneo se dice que es un *sistema fundamental de soluciones*.

Notaremos $\mathcal{M}_n$ el espacio de las matrices cuadradas de orden n reales (o complejas). Dadas n funciones $\mathbf{y_j} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, notaremos $\mathbf{Y} = (\mathbf{y_1} \,|\, \mathbf{y_2} \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{y_n})$ la matriz o, más propiamente, la función matricial, $\mathbf{Y} : I \to \mathcal{M}_n$, cuyas columnas están formadas por las funciones $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_n}$. Naturalmente, por $\mathbf{Y}'$ entendemos la función matricial cuyas columnas son las funciones $\mathbf{y_j}'$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Con estos convenios, podemos considerar la *ecuación diferencial matricial* asociada al SDL:

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x), \qquad \mathbf{Y} \in C(I, \mathcal{M}_n) \tag{2.18}$$

Es evidente que $\mathbf{Y}$ es solución de la ecuación matricial (2.18) si, y sólo si, sus columnas son soluciones del SDL homogéneo. Una matriz cuyas columnas son un sistema fundamental de soluciones del SDL homogéneo, se llama una *matriz fundamental*.

El siguiente resultado permite reconocer cuándo n soluciones del sistema homogéneo son linealmente independientes.

Teorema. El determinante de una solución, $\mathbf{Y}$, de la ED matricial (2.18) o bien es idénticamente cero o no se anula en ningún punto del intervalo I, lo que, a su vez, equivale a que $\mathbf{Y}$ sea una matriz fundamental.

Más adelante veremos cómo obtener una matriz fundamental de un SDL con coeficientes constantes. Concluiremos ahora viendo cómo puede obtenerse una solución particular del SDL completo, supuesto que conocemos una matriz fundamental $\mathbf{Y}$. Siguiendo la técnica de variación de constantes, se busca una solución particular de (2.17) de la forma:

$$\mathbf{h}(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{C}(x) \tag{2.19}$$

donde $\mathbf{C} : I \to \mathbb{R}^n$ es una función con derivada continua en I. Teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{h}'(x) = \mathbf{Y}'(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{Y}(x)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{Y}(x)\mathbf{C}'(x)$$

y sustituyendo (2.19) en (2.17), obtenemos $\mathbf{Y}(x)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{b}(x)$, lo que permite calcular $\mathbf{C}'(x) = \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{b}(x)$, y a su vez $\mathbf{C}(x)$ por :

$$\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{b}(t)\,dt$$

donde x_0 es cualquier punto de I. Finalmente, la solución de (2.17) que verifica la condición inicial $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$, donde $\mathbf{y_0}$ es un vector dado de $\mathbb{R}^n$, viene dada por

$$\boxed{\mathbf{y}(x) = \mathbf{Y}(x)\left[\mathbf{Y}^{-1}(x_0)\mathbf{y_0} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{b}(t)\,dt\right]} \tag{2.20}$$

2.6.1. Conversión de una EDL de orden n en un SDL de n ecuaciones

Los resultados anteriores pueden usarse para estudiar la EDL de orden n. Ello se debe a que resolver una EDL de orden n equivale a resolver un SDL de n ecuaciones. En efecto, consideremos la EDL de orden n:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

Poniendo $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $\ldots, y_n = y^{(n-1)}$, podemos escribir de forma equivalente la ecuación en la forma:

$$\begin{array}{rl} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= -a_0(x)y_1(x) - a_1(x)y_2(x) - a_2(x)y_3(x)\cdots - a_{n-1}(x)y_n(x) + b(x) \end{array}$$

que es un SDL de n ecuaciones con:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Nótese que, en particular, esto justifica que consideremos tan sólo sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de *primer orden*.

2.6.2. Sistemas de EDs lineales con coeficientes constantes

En lo que sigue consideraremos un SDL homogéneo:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) \tag{2.21}$$

cuya matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, es una matriz constante, esto es, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. Nuestro problema es obtener un sistema fundamental de soluciones de dicho sistema. Teniendo en cuenta que una EDL de orden n puede escribirse como un SDL de n ecuaciones, es razonable esperar que el sistema (2.21) tenga, por analogía con la EDL de orden n y coeficientes constantes, soluciones de la forma:

$$\mathbf{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \neq \mathbf{0})$$

donde λ es un número real o complejo y $\mathbf{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ o de $\mathbb{C}^n$. Sustituyendo $\mathbf{y}(x)$ por $\mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathbf{u}$ en (2.21), obtenemos:

$$\lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathbf{u} = \mathbf{A}\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathbf{u} = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathbf{A}\mathbf{u}$$

que, cancelando el factor $\mathrm{e}^{\lambda x}$ y reordenando los términos, equivale a:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{2.22}$$

donde $\mathbf{I}$ indica la matriz identidad de orden n. Deducimos así que $\mathbf{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathbf{u}$ es solución de (2.21) si, y sólo si, λ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ satisfacen (2.22), es decir, λ es un *valor propio* de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{u}$ es un *vector propio de* $\mathbf{A}$ *asociado con* λ.

Proposición. Supongamos que hay una base de $\mathbb{C}^n$, $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$, formada por vectores propios de $\mathbf{A}$, y sea λ_j un valor propio [1] asociado con $\mathbf{u_j}$. Entonces

$$\mathbf{y_1} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\,\mathbf{u_1},\ \mathbf{y_2} = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\,\mathbf{u_2}, \ldots,\ \mathbf{y_n} = \mathrm{e}^{\lambda_n x}\,\mathbf{u_n}$$

es un conjunto fundamental de soluciones del SDL $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x)$.

Recordemos que los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ son las raíces de su polinomio característico:

$$\Delta(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$$

Nótese también que, por ser la matriz $\mathbf{A}$ de números reales, si $\mathbf{z}$ es un vector propio asociado a un valor propio complejo $\lambda = \alpha + i\,\beta$, $(\beta \neq 0)$, dicho vector tiene que tener alguna de sus coordenadas compleja, es decir será de la forma $\mathbf{z} = \mathbf{u} + i\,\mathbf{v}$ donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. En este caso también $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ es un valor propio de $\mathbf{A}$ y $\overline{\mathbf{z}} = \mathbf{u} - i\,\mathbf{v}$ es un vector propio asociado con $\overline{\lambda}$. Las correspondientes soluciones del sistema:

$$\mathbf{z}(x) = \mathrm{e}^{(\alpha+i\,\beta)x}(\mathbf{u} + i\,\mathbf{v}), \quad \overline{\mathbf{z}}(x) = \mathrm{e}^{(\alpha-i\,\beta)x}(\mathbf{u} - i\,\mathbf{v})$$

son funciones complejas conjugadas. Para obtener soluciones reales lo que se hace es sustituirlas por:

$$\frac{\mathbf{z}(x)+\overline{\mathbf{z}}(x)}{2} = \mathrm{e}^{\alpha\,x}\big(\cos(\beta\,x)\mathbf{u} - \operatorname{sen}(\beta\,x)\mathbf{v}\big), \quad \frac{\mathbf{z}(x)-\overline{\mathbf{z}}(x)}{2i} = \mathrm{e}^{\alpha\,x}\big(\operatorname{sen}(\beta\,x)\mathbf{u} + \cos(\beta\,x)\mathbf{v}\big)$$

La hipótesis hecha en la proposición anterior equivale a que la matriz $\mathbf{A}$ sea diagonalizable sobre $\mathbb{C}$, lo que no siempre es posible.

2.6.3. Funciones analíticas de una matriz

Volvamos a considerar el SDL homogéneo con coeficientes constantes dado por $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$ donde $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$. Dado un vector $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$, queremos calcular la solución de dicho sistema que verifica $\mathbf{y}(0) = \mathbf{z}_0$. En el caso más elemental en el que la matriz $\mathbf{A}$ es un número a, y $\mathbf{z}_0$ es un número z_0, el sistema es $y' = ay$ y la solución buscada es $y(x) = \mathrm{e}^{a\,x}\,z_0$. Con algo de osadía podemos imaginar que en el caso general la solución será de la forma $\mathbf{y}(x) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}x}\,\mathbf{z}_0$. Naturalmente, esto plantea dos problemas: definir la exponencial de una matriz y, una vez definida, comprobar que efectivamente la función $\mathbf{y}(x) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}x}\,\mathbf{z}_0$ es solución del SDL $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$ con $\mathbf{y}(0) = \mathbf{z}_0$. Además, veremos que $\mathrm{e}^{\mathbf{A}x}$ es una matriz fundamental.

Para definir la exponencial de una matriz cuadrada usaremos la serie que define la exponencial:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

[1] Los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ pueden ser reales o complejos y pueden repetirse.

Se trata de una serie de potencias que converge en todo $\mathbb{R}$ (y en todo $\mathbb{C}$ si interpretamos que x es un número complejo). Como las matrices cuadradas podemos multiplicarlas y sumarlas, dada una matriz $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n$, podemos considerar la sucesión de matrices

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}=\mathbf{I}+\mathbf{A}+\frac{\mathbf{A}^2}{2}+\frac{\mathbf{A}^3}{3!}+\cdots+\frac{\mathbf{A}^n}{n!} \tag{2.23}$$

Tiene perfecto sentido considerar la convergencia de esta sucesión en $\mathcal{M}_n$. A efectos de convergencia $\mathcal{M}_n$ no es otra cosa que $\mathbb{R}^q$ con $q=n^2$. Pues bien, se demuestra que la serie (2.23) converge en $\mathcal{M}_n$. Es natural definir el límite de dicha serie como la exponencial de la matriz $\mathbf{A}$. Seguimos el convenio de que $\mathbf{A}^0=\mathbf{I}$ la matriz identidad.

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!} \tag{2.24}$$

Podemos considerar ahora la función $\mathbf{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathbf{y}(x)=\mathrm{e}^{\mathbf{A}x}\,\mathbf{z}_0=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k\mathbf{A}^k}{k!}\right)\mathbf{z}_0=\left(\mathbf{I}+x\,\mathbf{A}+x^2\frac{\mathbf{A}^2}{2}+x^3\frac{\mathbf{A}^3}{3!}+\cdots+x^n\frac{\mathbf{A}^n}{n!}+\dots\right)\mathbf{z}_0$$

Derivando respecto a x término a término y notando $\mathbf{O}\in\mathcal{M}_n$ la matriz nula, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'(x)&=\left(\mathbf{O}+\mathbf{A}+x\mathbf{A}^2+x^2\frac{\mathbf{A}^3}{2!}+\cdots+x^{n-1}\frac{\mathbf{A}^n}{(n-1)!}+\dots\right)\mathbf{z}_0=\\&=\mathbf{A}\left(\mathbf{I}+x\,\mathbf{A}+x^2\frac{\mathbf{A}^2}{2}+x^3\frac{\mathbf{A}^3}{3!}+\cdots+x^{n-1}\frac{\mathbf{A}^{n-1}}{(n-1)!}+\dots\right)\mathbf{z}_0=\mathbf{A}\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}x}\,\mathbf{z}_0=\mathbf{A}\mathbf{y}(x)\end{aligned}$$

Lo que prueba que $\mathbf{y}(x)=\mathrm{e}^{\mathbf{A}x}\,\mathbf{z}_0$ es la solución del SDL homogéneo que verifica que $\mathbf{y}(0)=\mathbf{z}_0$.

Pensarás que no hemos ganado gran cosa porque el cálculo de la exponencial de una matriz no parece nada fácil. Pues de hecho hay una manera muy sencilla de hacerlo usando el siguiente resultado clave.

Teorema de Cayley-Hamilton. Toda matriz es anulada por su polinomio característico. Es decir, si

$$\Delta(z)=|\mathbf{A}-z\,\mathbf{I}|=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n$$

es el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$, se verifica que

$$\Delta(\mathbf{A})=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{A}+a_2\mathbf{A}^2+\cdots+a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}+a_n\mathbf{A}^n=\mathbf{O}.$$

Como el razonamiento que sigue es bastante general, no tenemos por qué limitarnos a la función exponencial. Consideremos, pues, una función f que viene dada como la suma de una serie de potencias en un cierto disco $\Omega\subset\mathbb{C}$ (estas funciones se llaman analíticas).

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\qquad(z\in\Omega) \tag{2.25}$$

Supondremos que Ω contiene a los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$; condición que se cumple de forma evidente cuando $\Omega = \mathbb{C}$ como sucede cuando f es la función exponencial.

Supongamos ahora que $P(z)$ es una función polinómica de grado mayor o igual que n y sea $R(z)$ el resto de la división de $P(z)$ por $\Delta(z)$. Como $\Delta(z)$ tiene grado n se tendrá que el grado de $R(z)$ es menor o igual que $n-1$. Sea λ un valor propio de $\mathbf{A}$, es decir, $\Delta(\lambda) = 0$. Tenemos que

$$P(z) = Q(z)\Delta(z) + R(z) \Longrightarrow P(\lambda) = Q(\lambda)\Delta(\lambda) + R(\lambda) = R(\lambda) \tag{2.26}$$

Esto nos dice que cualquier función polinómica en λ puede ser expresada como una función polinómica en λ de grado menor o igual que $n-1$. En particular, esto será cierto para las potencias λ^k con $k \geqslant n$. Deducimos así que el valor de $f(\lambda)$ dado por la serie (2.25) podrá expresarse en la forma

$$f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} \tag{2.27}$$

Si ahora sustituimos z por $\mathbf{A}$ en la serie (2.25) y tenemos en cuenta que por el teorema de Cayley $\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, el razonamiento que acabamos de hacer para un valor propio λ también es válido para $\mathbf{A}$ y obtenemos la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\mathbf{A}^n = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}$$

La definición de $f(\mathbf{A})$ es ahora clara (y obligada):

$$f(\mathbf{A}) = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} \tag{2.28}$$

Observa que acabamos de dar sentido al significado de $f(\mathbf{A})$ cualquiera sea f en las condiciones anteriores.

Para el cálculo efectivo de $f(\mathbf{A})$ todo lo que hay que hacer es calcular los n números α_k, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, de forma que para cada valor propio λ de $\mathbf{A}$ se verifique la igualdad (2.27). Cuando hay n valores propios distintos esto nos proporciona n condiciones que permiten calcular los α_k.

Cuando algún valor propio λ tiene multiplicidad $q > 1$, entonces se prueba que dicho valor verifica las q igualdades

$$f^{(k)}(\lambda) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}H(z)\bigg|_{z=\lambda} \qquad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

donde hemos puesto $H(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_{n-1}z^{n-1}$.

En consecuencia, siempre disponemos de n condiciones que permiten calcular los α_j.

2.6.3.1. Regla para calcular $f(\mathbf{A}x)$

En lo que sigue se supone que x es un número fijo no nulo y mantenemos las hipótesis hechas sobre f. Por lo antes visto sabemos que

$$f(\mathbf{A}x) = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}$$

Donde ahora los coeficientes α_j dependerán de x. Pongamos

$$\varphi(z, x) = f(z\,x) - \alpha_0 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \cdots - \alpha_{n-1}z^{n-1}$$

Los coeficientes se calculan por las condiciones de que para cada valor propio λ de $\mathbf{A}$ se verifique

$$\varphi(\lambda, x) = 0 \tag{2.29}$$

Para un valor propio λ de multiplicidad $q > 1$ también hay que exigir que las derivadas de órdenes menor o igual que $q-1$ con respecto a z de la función $\varphi(z, x)$ se anulen para $z = \lambda$.

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial z^k}\varphi(z\,x)\right|_{z=\lambda} = 0 \qquad k = 1, \ldots, q-1 \tag{2.30}$$

En total disponemos de n ecuaciones que permiten calcular los α_j (que serán funciones de x) y con ello $f(\mathbf{A}x)$.

Poniendo $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_{n-1}z^{n-1}$ las igualdades (2.29) y (2.30) nos dicen que para cada valor propio λ de multiplicidad $q \geqslant 1$ deben verificarse las q igualdades:

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial z^k}\varphi(z\,x)\right|_{z=\lambda} = p^{(k)}(\lambda) \qquad k = 0, \ldots, q-1 \tag{2.31}$$

Es decir, $p(z)$ es el polinomio determinado por las condiciones de que en cada valor propio λ de $\mathbf{A}$ los valores de sus derivadas hasta un orden igual al de la multiplicidad de $\lambda - 1$ coinciden con las respectivas derivadas respecto a la variable z de $f(z\,x)$ calculadas en λ. El polinomio $p(z)$ no es, por tanto, otra cosa que un polinomio interpolador para $f(z\,x)$.

Finalmente, queda por justificar que $\mathrm{e}^{\mathbf{A}x}$ es una matriz fundamental, es decir, su determinante es distinto de cero. Para ello basta probar que dicha matriz tiene inversa. Ello es consecuencia de que si A, B son matrices cuadradas de igual orden que conmutan, es decir, $A\,B = B\,A$, se verifica que $\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}}\,\mathrm{e}^{\mathbf{B}}$. En particular, como $\mathbf{A}$ conmuta con $-\mathbf{A}$, se sigue que $\mathrm{e}^{\mathbf{A}x}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{A}x} = \mathrm{e}^{\mathbf{O}x} = \mathbf{I}$, de donde se sigue que $\mathrm{e}^{-\mathbf{A}x}$ es la matriz inversa de $\mathrm{e}^{\mathbf{A}x}$.

Ejemplo 2.8. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 1$ doble. Sea $f(z) = \mathrm{e}^z$ y calculemos $\mathrm{e}^{\mathbf{A}x}$. Sabemos que

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}x} = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 \tag{2.32}$$

Pongamos

$$\varphi(z,x) = \mathrm{e}^{z\,x} - \alpha_0 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 \tag{2.33}$$

Las igualdades (2.29) se obtienen sustituyendo en (2.33) $z = 7$ y $z = 1$. Resultan así las dos ecuaciones

$$\mathrm{e}^{7x} - \alpha_0 - 7\alpha_1 - 49\alpha_2 = 0, \qquad \mathrm{e}^{x} - \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

Como $z = 1$ es un valor propio doble, obtenemos otra ecuación derivando una vez respecto a z en (2.33) y sustituyendo $z = 1$. Obtenemos así la ecuación

$$x\,\mathrm{e}^{x} - \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0$$

Obtenemos así un sistema de tres ecuaciones lineales cuyas incógnitas son α_0, α_1, α_2. La solución es

$$\alpha_0 = \frac{1}{36}\,\mathrm{e}^{x}(35 + \mathrm{e}^{6x} - 42x), \quad \alpha_1 = -\frac{1}{18}\,\mathrm{e}^{x}(-1 + \mathrm{e}^{6x} - 24x), \quad \alpha_2 = \frac{1}{36}\,\mathrm{e}^{x}(-1 + \mathrm{e}^{6x} - 6x)$$

Sustituyendo estos valores en (2.32) obtenemos fácilmente

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{x}(1 + 2\,\mathrm{e}^{6x}), & \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{x}(-1 + \mathrm{e}^{6x}), & \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{x}(-1 + \mathrm{e}^{6x}) \\ \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{x}(-1 + \mathrm{e}^{6x}), & \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{x}(5 + \mathrm{e}^{6x}), & \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{x}(-1 + \mathrm{e}^{6x}) \\ \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{x}(-1 + \mathrm{e}^{6x}), & \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{x}(-1 + \mathrm{e}^{6x}), & \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{x}(5 + \mathrm{e}^{6x}) \end{pmatrix}$$

♦

Finalmente, consideremos el SDL completo

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \tag{2.34}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ es una matriz cuadrada constante y $\mathbf{b}$ es una función vectorial con valores en $\mathbb{R}^n$. Acabamos de ver que la matriz $\mathbf{Y}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}\,t}$ es una matriz fundamental del correspondiente SDL homogéneo. En consecuencia, como caso particular de (2.20), deducimos que la solución de (2.34) que verifica las condiciones iniciales $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$ viene dada por

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\,\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)}\,\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s} \tag{2.35}$$

En particular, si consideramos que el sistema está inicialmente en reposo, es decir, que las condiciones iniciales son $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$; entonces la solución es

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)}\,\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s} \tag{2.36}$$

2.7. Algunas aplicaciones

2.7.1. Oscilaciones libres y forzadas

Consideremos un cuerpo de masa m suspendido del extremo inferior de un muelle vertical de masa despreciable. Partiendo de una posición de equilibrio, en el momento inicial $t = 0$, se aplica al cuerpo una fuerza $f(t)$ en dirección hacia abajo que produce un desplazamiento inicial y_0 y hace que el cuerpo se ponga en movimiento con una velocidad inicial v_0.

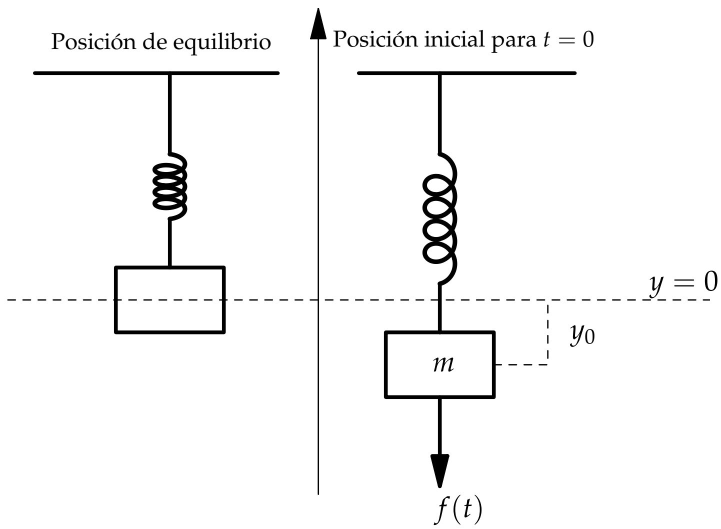


Figura 2.3: Sistema mecánico

Para obtener la ecuación del movimiento fijamos un sistema de referencia cuyo origen situamos en el centro de gravedad del cuerpo en equilibrio. Llamaremos $y(t)$ al desplazamiento vertical en el momento t medido respecto de la posición inicial de equilibrio y elegimos el sentido positivo del desplazamiento en la dirección hacia arriba. Debemos tener en cuenta la fuerza de recuperación, F_r, del muelle que viene dada por la ley de Hooke como $F_r(t) = -ky(t)$ donde $k > 0$ es una constante. Supondremos también que hay una fuerza de amortiguación, F_a, que es proporcional a la velocidad, es decir, $F_a(t) = -cy'(t)$ donde $c > 0$ es una constante de proporcionalidad (el *coeficiente de amortiguamiento*). Los signos negativos se deben a que la fuerza de recuperación F_r y la de amortiguación F_a se oponen siempre al movimiento.

Si es h la longitud del muelle en la posición inicial de equilibrio, se tendrá que $kh - m\,g = 0$. Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, deducimos que

$$m\,y''(t) = mg + f(t) - k(y(t) + h) - cy'(t) = f(t) - ky(t) - cy'(t)$$

que suele escribirse con la notación de Newton en la forma

$$m\,\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t) \tag{2.37}$$

Observa que como todas las fuerzas actúan en una misma dirección podemos ignorar el carácter vectorial y trabajar solamente con sus módulos teniendo siempre en cuenta el sentido en el que actúa cada fuerza.

Cuando la fuerza externa aplicada es nula, $f = 0$, se dice que se trata de oscilaciones libres que pueden ser con amortiguamiento $c > 0$ o sin amortiguamiento $c = 0$. Cuando la fuerza externa aplicada no es nula se trata de oscilaciones forzadas.

2.7.1.1. Oscilaciones libres no amortiguadas

En las oscilaciones libres se entiende que el cuerpo se somete a un desplazamiento inicial y_0 y después se suelta dándole una cierta velocidad inicial v_0 sin ejercer después sobre él ninguna fuerza externa. La ecuación del movimiento (2.37) queda en este caso reducida a

$$m\,\ddot{y} + k\,y = 0 \tag{2.38}$$

que se trata de una EDL homogénea de segundo orden. La ecuación característica es $m\lambda^2 + k = 0$ cuyas raíces son

$$\lambda_1 = i\,\sqrt{k/m}\,, \quad \lambda_2 = -i\,\sqrt{k/m}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación (2.38) son las funciones

$$y(t) = C_1 \operatorname{sen}(\omega\,t) + C_2 \cos(\omega\,t) \qquad \omega = \sqrt{k/m}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que pueden calcularse cuando se conocen las condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$.

Las soluciones anteriores suelen escribirse, poniendo $C_1 + i\,C_2 = A\,e^{i\,\varphi}$ donde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y $\varphi = \arg(C_1 + iC_2)$, en la forma siguiente.

$$y(t) = C_1 \operatorname{sen}(\omega\,t) + C_2 \cos(\omega\,t) = \operatorname{Im}\left((C_1 + i\,C_2)(\cos(\omega\,t) + i \operatorname{sen}(\omega\,t)\right) = \operatorname{Im}(A\,e^{i\varphi}\,e^{i\,\omega\,t}) =$$
$$= \operatorname{Im}(A\,e^{i(\omega\,t+\varphi)}) = A \operatorname{sen}(\omega\,t + \varphi)$$

Un movimiento de la forma $y(t) = A \operatorname{sen}(\omega\,t + \varphi)$ se dice que es un *movimiento armónico simple*. Dicho movimiento es periódico con periodo igual a $T = 2\pi/\omega$. El número $\nu = 1/T$ es la frecuencia en ciclos por segundo (hercios). El número ω es la *frecuencia angular o pulsación* que se mide en radianes por segundo, A es la *amplitud*, $\omega\,t + \varphi$ es la *fase* y φ es la *fase inicial*.

Es interesante observar que la pulsación, ω, es independiente de las condiciones iniciales y solamente depende de la masa m y de la constante elástica k del muelle.

2.7.1.2. Oscilaciones libres amortiguadas

En este caso la ecuación del movimiento (2.37) queda en la forma

$$m\,\ddot{y} + c\dot{y} + k\,y = 0 \tag{2.39}$$

que se trata de una EDL homogénea de segundo orden. La ecuación característica es $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ cuyas raíces son

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}, \quad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

La naturaleza de estas raíces determina las características del movimiento.

Caso de raíces reales

Si la amortiguación es muy grande de forma que $c^2 - 4km \geqslant 0$ las dos raíces son reales y negativas. En este caso no hay movimiento oscilatorio, se trata de un movimiento aperiódico de ecuación

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \qquad \text{o bien} \qquad y(t) = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^{\lambda\, t} \qquad (\text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$$

Si $c^2 - 4km > 0$ se dice que el movimiento es *sobreamortiguado*. Cuando $c^2 - 4km = 0$ se dice que hay *amortiguamiento crítico*.

Caso de raíces complejas

Cuando $c^2 - 4km < 0$ las raíces son complejas

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = -\frac{c}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

Y las soluciones son

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\,c\,t/2m}(C_1\cos(\omega\, t) + C_2\,\mathrm{sen}(\omega\, t)) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

Que, al igual que antes, puede escribirse de la forma

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\,c\,t/2m}\,A\,\mathrm{sen}(\omega\, t + \varphi) \tag{2.40}$$

Se trata de un movimiento oscilatorio cuya amplitud, $A\,\mathrm{e}^{-\,c\,t/2m}$, decrece exponencialmente. La pulsación ω es ahora menor que en el caso anterior y el período será mayor, es decir, las oscilaciones amortiguadas son más lentas.

2.7.1.3. Oscilaciones forzadas

Acabamos de ver que en las oscilaciones libres con amortiguamiento la amplitud del movimiento decae exponencialmente. Por ello, en la práctica, el movimiento cesa al poco tiempo y se dice que se trata de un movimiento transitorio. A veces interesa que dicho movimiento sea permanente para lo que es preciso aportar energía exterior al sistema por medio de una fuerza capaz de sostener la oscilación. El caso más interesante corresponde a una fuerza del tipo $f(t) = a\ \mathrm{sen}(b\,t)$. La ecuación (2.37) del movimiento es ahora

$$m\,\ddot{y} + c\dot{y} + ky = a\,\mathrm{sen}(b\,t) \tag{2.41}$$

Se trata de una EDL completa cuya solución, como sabemos, se obtiene sumando a la solución general de la ED homogénea una solución particular de la ED completa. Teniendo en cuenta la forma del término independiente (ver (2.16)), buscaremos una solución particular de la ED

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = a\,\mathrm{e}^{ib\,t} \tag{2.42}$$

que sea de la forma $\varphi(t) = M\,\mathrm{e}^{ib\,t}$ donde M es una constante que deberemos calcular y entonces $y(t) = \operatorname{Im}\varphi(t)$ será una solución particular de (2.41). Sustituyendo en (2.42) obtenemos que

$$-mMb^2 + ibcM + kM = a \Longrightarrow M = \frac{a}{k - mb^2 + ibc} = \frac{a(k - mb^2) - iabc}{\left(k - mb^2\right)^2 + b^2c^2}$$

Poniendo $k - mb^2 - ibc = \rho\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}$, donde $\rho = \sqrt{\left(k - mb^2\right)^2 + b^2c^2}$ y $\vartheta = \operatorname{Arg}(k - mb^2 - ibc)$, deducimos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Im}\varphi(t) = \operatorname{Im} M\,\mathrm{e}^{ib\,t} = \frac{a}{\left(k - mb^2\right)^2 + b^2c^2}\operatorname{Im}\Big(\left(k - mb^2 - ibc\right)\mathrm{e}^{ib\,t}\Big) = \\ &= \frac{a}{\left(k - mb^2\right)^2 + b^2c^2}\operatorname{Im}\Big(\rho\,\mathrm{e}^{i\,\vartheta}\,\mathrm{e}^{ib\,t}\Big) = \frac{a}{\sqrt{\left(k - mb^2\right)^2 + b^2c^2}}\operatorname{sen}(b\,t + \vartheta) \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación (2.41) se obtiene sumando esta solución particular a la solución general (2.40) de la homogénea antes calculada. Obtenemos así las soluciones

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\,c\,t/2m}\,A\operatorname{sen}(\omega\,t + \varphi) + \frac{a}{\sqrt{\left(k - mb^2\right)^2 + b^2c^2}}\operatorname{sen}(b\,t + \vartheta) \tag{2.43}$$

Vemos que el movimiento está formado por la superposición de un movimiento oscilatorio amortiguado, que se denomina *transitorio* porque cesa al cabo de un tiempo, y de un movimiento oscilatorio armónico simple que permanece y por ello se llama *permanente*. El sistema acaba oscilando con la misma frecuencia, b, que la fuerza exterior aplicada. Además la amplitud final del movimiento depende de dicha frecuencia.

Es fácil calcular el valor de la frecuencia de la fuerza aplicada que hace máxima la amplitud final del movimiento. Dicho valor viene dado por:

$$b_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} \tag{2.44}$$

Esta frecuencia se llama *frecuencia de resonancia* que para valores pequeños de c/m es próxima al valor $\sqrt{k/m}$ que es la pulsación propia del sistema cuando oscila libremente sin amortiguamiento.

A la frecuencia de resonancia corresponde una amplitud máxima dada por

$$A_m = \frac{a}{c\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{c^2}{4m^2}}} \tag{2.45}$$

Deducimos que, cuando el coeficiente de amortiguamiento, c, es muy pequeño, la amplitud de las oscilaciones forzadas en resonancia puede ser muy grande aunque la amplitud de la fuerza aplicada a sea pequeña.

Como veremos a continuación, los circuitos eléctricos son muy parecidos (*isomorfos*, diríamos en matemáticas) a los sistemas que estamos estudiando y en ellos se aprovecha el fenómeno de resonancia para amplificar señales; eso es lo que hacen esencialmente los sintonizadores de radio. Otras veces hay que evitar la resonancia como ocurre en las vibraciones de estructuras elásticas tales como puentes o en las vibraciones de partes de una máquina como un motor de automóvil donde el aumento de la amplitud de las vibraciones es peligroso o molesto.

2.7.2. Circuitos eléctricos RLC

La intensidad $I = I(t)$ de la corriente a través de un circuito eléctrico está caracterizada por los valores de la resistencia R (ohmios), capacitancia C (faradios), inductancia L (henrios) y fuerza electromotriz (fem) aplicada $E = E(t)$ (voltios). Los valores de R, C y L se suponen constantes y son propios de cada circuito.

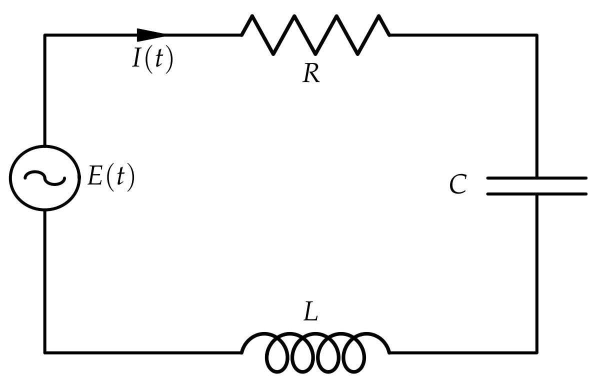


Figura 2.4: Circuito RLC

En el circuito de la figura se han representado los siguientes componentes.

- La fuerza electromotriz aplicada, $E(t)$, cuyo efecto es establecer una diferencia de potencial que da lugar al movimiento de las cargas a través del circuito produciendo una corriente $I(t)$.

  Recuerda que la intensidad $I(t)$ de la corriente eléctrica mide el flujo de carga $Q(t)$ por unidad de tiempo a través de una sección del conductor:

  $$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

  su unidad es el amperio (culombio/segundo).

- Una resistencia de R ohmios, que se opone al paso de la corriente y que provoca una caída de potencial dada por
$$V_R(t) = RI(t)$$

- Un condensador de capacitancia C, que almacena una carga $Q(t)$. En cada momento la caída de potencial entre los extremos del condensador viene dada por la igualdad
$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

- Un inductor, con inductancia L. Una corriente variable en un inductor produce un campo magnético que da lugar a una fem inducida que se opone a la fem aplicada, lo que origina una caída de potencial dada por
$$V_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

La fem aplicada produce una diferencia de potencial $E(t)$ en los extremos del circuito que, por el principio de conservación de la energía, debe ser igual a la suma de las diferencias de potencial entre los extremos de cada uno de los componentes del circuito. Como se trata de un circuito de una sola malla, a lo largo de él circulará la misma intensidad de corriente $I = I(t)$. Obtenemos así la siguiente ED:

$$L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}\,t} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t) \tag{2.46}$$

que puede escribirse de forma equivalente en función de la carga $q(t)$:

$$L\,Q'' + R\,Q' + \frac{1}{C}\,Q = E(t) \tag{2.47}$$

También podemos derivar la ED (2.46) para obtener en función de $I(t)$ la ED:

$$L\,I'' + R\,I' + \frac{1}{C}\,I = E'(t) \tag{2.48}$$

De esta forma hemos obtenido ED lineales de segundo orden con coeficientes constantes formalmente idénticas a la obtenida para el caso de oscilaciones forzadas (ecuación (2.37)). Los resultados que obtuvimos en el estudio del movimiento oscilatorio pueden ahora interpretarse en términos de circuitos eléctricos sin más que tener en cuenta las siguientes correspondencias:

oscilaciones	circuito RLC
$F(t) = m\,y''(t)$ (masa)	$V(t) = L\,Q''(t)$ (autoinductancia)
$F(t) = cy'(t)$ (amortiguador)	$V(t) = R\,Q'(t)$ (resistencia)
$F(t) = ky(t)$ (muelle)	$V(t) = Q(t)/C$ (condensador)

Desde un punto de vista matemático, ambos sistemas, el mecánico y el circuito RLC, son *el mismo* sistema o, dicho en la jerga matemática, son *sistemas isomorfos*.

2.7.3. Sistemas LTI

Un ***sistema*** es cualquier proceso que transforma señales de entrada en señales de salida. Una señal es, simplemente, una función. En términos matemáticos, podemos representar un sistema por un operador L que al actuar sobre una señal x produce una señal y, lo que se escribe $y = L\,x$.

Como puedes ver el concepto de "sistema" es muy general. Para que un concepto tan general sea realmente útil hay que suponer que se cumplen ciertas propiedades.

2.7.3.1. Propiedades de los sistemas

- **Linealidad.** Se dice que un sistema L es lineal cuando es aditivo y homogéneo, es decir, cualesquiera sean las señales de entrada x e y y los números α, β se verifica que:

  $$L(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha L\, x + \beta L\, y$$

  Esta propiedad suele llamarse *principio de superposición*.

- **Invariancia en el tiempo.** Se dice que un sistema L es invariante en el tiempo si un adelanto o retraso de la señal de entrada produce el mismo efecto en la señal de salida.

  Dado $a \in \mathbb{R}$, representaremos por τ_a el *operador de desplazamiento* que al actuar sobre una señal x la convierte en la señal $(\tau_a x)(t) = x(t-a)$. Es decir, $\tau_a x$ es la misma señal x adelantada o retrasada según que $a < 0$ o $a > 0$. La invariancia en el tiempo se expresa por la igualdad:

  $$L(\tau_a x) = \tau_a L\, x$$

  De manera más explícita, si $y(t) = (L\,x)(t)$ es la señal transformada de x y $z(t) = (L(\tau_a x))(t)$ es la señal transformada de $\tau_a x$, se verifica que $z(t) = y(t-a)$.

- **Estabilidad.** Se dice que un sistema L es estable cuando es lineal y *continuo*. Matemáticamente esto se expresa por la igualdad (que en cada caso concreto debe dotarse de significado matemático preciso):

  $$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L\, x_n$$

  También suele expresarse la estabilidad por la condición de que el sistema transforme señales acotadas (Bounded Inputs) en salidas acotadas (Bounded Outputs). A estos sistemas les llaman BIBO en los textos de procesamiento de señales.

- **Causalidad.** Se dice que un sistema L es causal cuando se verifica que

  $$u(t) = v(t)\ \ \forall t < t_0 \Longrightarrow (L\,u)(t) = (L\,v)(t)\ \ \forall t < t_0$$

  Dicho en términos familiares, un sistema es causal cuando su respuesta depende solamente del pasado.

Un sistema LTI *es un sistema lineal invariante en el tiempo.*

2.7.4. Función de transferencia de un sistema LTI

Sea L un sistema LTI y supongamos que dicho sistema admite como entrada una señal de la forma $\mathrm{e}_\lambda(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea $y_\lambda = L(\mathrm{e}_\lambda)$ la respuesta del sistema a dicha señal. En virtud de la invariancia en el tiempo, se tendrá que

$$\tau_a y_\lambda = \tau_a L(\mathrm{e}_\lambda) = L(\tau_a \mathrm{e}_\lambda)$$

Tenemos que

$$\tau_a \mathrm{e}_\lambda(t) = \mathrm{e}_\lambda(t-a) = \mathrm{e}^{\lambda(t-a)} = \mathrm{e}^{-\lambda a}\,\mathrm{e}_\lambda(t)$$

es decir, $\tau_a \mathrm{e}_\lambda = \mathrm{e}^{-\lambda a}\,\mathrm{e}_\lambda$. Como L es lineal, se sigue que

$$\tau_a y_\lambda = L(\tau_a \mathrm{e}_\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda a} L(\mathrm{e}_\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda a} y_\lambda$$

Luego $\tau_a y_\lambda = \mathrm{e}^{-\lambda a} y_\lambda$, es decir, para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica que $\tau_a y_\lambda(t) = y_\lambda(t-a) = \mathrm{e}^{-\lambda a} y_\lambda(t)$. En esta igualdad $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario por lo que podemos sustituir $t = 0$ y hacer $a = -t$ con lo que resulta $y_\lambda(t) = y_\lambda(0)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. Igualdad que podemos escribir en términos funcionales como $y_\lambda = y_\lambda(0)\,\mathrm{e}_\lambda$. Esto nos dice que la función e_λ es un vector propio de L (piensa en L como un operador lineal definido en un espacio vectorial de funciones):

$$L(\mathrm{e}_\lambda) = y_\lambda(0)\,\mathrm{e}_\lambda$$

con valor propio asociado el número (que, en general, será un número complejo) $y_\lambda(0)$. Definamos $H(\lambda) = y_\lambda(0)$. La función así definida verifica la igualdad

$$L(\mathrm{e}_\lambda) = H(\lambda)\,\mathrm{e}_\lambda$$

y se llama *función de transferencia* del sistema.

Sustituyendo el número λ por un número de la forma $i\omega$ donde $\omega \in \mathbb{R}$, obtenemos como input la señal $\mathrm{e}^{i\omega t}$ que es una sinusoide compleja de frecuencia ω. La función $\omega \mapsto H(i\omega)$ se llama la *respuesta en frecuencia* del sistema.

2.7.5. Sistemas LTI modelados por ecuaciones diferenciales

Consideremos un circuito RC como el de la figura (2.5).

Se suponen conocidos los valores constantes de la resistencia R (ohmios) y la capacidad C (faradios). Al circuito se aplica una fem $E(t)$ (input) y la salida (output) que nos interesa es la caída de potencial $y(t)$ a través del condensador. Teniendo en cuenta que $y(t) = q(t)/C$ y que $I(t) = q'(t)$, obtenemos, como caso particular de la ecuación (2.47), que

$$RC\,y'(t) + y(t) = E(t) \tag{2.49}$$

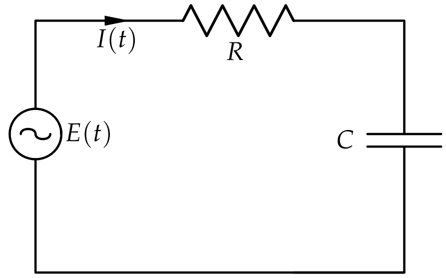


Figura 2.5: Circuito RC

Naturalmente, la fem $E(t)$ se aplica a partir de un cierto instante t_0 lo que suele expresarse por la condición $E(t) = 0$ para todo $t < t_0$. La solución que nos interesa de la ecuación (2.49) es la *solución de estado estacionario* que está determinada por la condición de que cuando se aplica la fem el sistema está en reposo, por lo que $y(t_0) = 0$.

Como caso particular de (2.8), la solución buscada de la ecuación (2.49) viene dada por

$$y(t) = \frac{1}{R\,C}\,\mathrm{e}^{-t/RC}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{s/RC}\,E(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{R\,C}\int_{-\infty}^{t}E(s)\,\mathrm{e}^{-(t-s)/RC)}\,\mathrm{d}s \tag{2.50}$$

A partir de aquí es fácil comprobar que el circuito considerado es un sistema LTI. Para calcular la respuesta en frecuencia de este sistema consideremos como señal de entrada $E(t) = \mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$. La salida correspondiente viene dada por

$$\frac{1}{R\,C}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{i\,\omega\,s}\,\mathrm{e}^{-(t-s)/RC}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{R\,C}\,\mathrm{e}^{-t/RC}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{s(i\omega+1/RC}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{i\,\omega\,R\,C+1}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$$

y deducimos que $H(i\,\omega) = \dfrac{1}{i\,\omega\,R\,C+1}$.

En general, los circuitos eléctricos formados por resistencias, condensadores y solenoides a los que se aplica una fem actúan como sistemas LTI. La señal de entrada, $u(t)$, es la fem aplicada y la señal de salida, $y(t)$, es la diferencia de potencial entre dos puntos del circuito o bien la intensidad de la corriente en un tramo del mismo. Estos sistemas LTI tienen la particularidad de que la señal de entrada y la de salida están relacionadas por una EDL con coeficientes constantes del tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u' + b_0 u \tag{2.51}$$

Ejemplo 2.9. Consideremos el circuito de la figura (2.6).

Suponemos conocidos los valores (constantes) de L, R y C, así como la fem aplicada $u(t)$ (input). El problema es obtener la caída de tensión a través de la resistencia, es decir la diferencia de potencial $y(t)$ (output) entre los puntos 2 y 3. Notaremos $V_{ij} = V_i - V_j$ la diferencia de potencial entre los puntos i, j. Naturalmente, las intensidades son funciones del tiempo $I_j = I_j(t)$ así como las cargas respectivas $q_j = q_j(t)$.

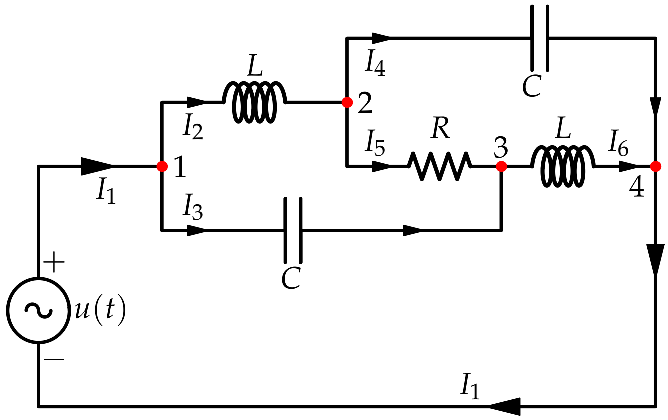


Figura 2.6: Circuito

Se sabe que la suma algebraica de las diferencias de potencial entre los extremos de los distintos elementos que forman un circuito cerrado o malla, tomadas todas en el mismo sentido, es igual a cero.

Malla 1341.

$V_{13} + V_{34} + V_{41} = 0$. Esta igualdad proporciona la ecuación:

$$\frac{q_3}{C} + L\, I_6' = u(t) \tag{2.52}$$

Malla 1231.

$V_{12} + V_{23} + V_{31} = 0$. Esta igualdad proporciona la ecuación:

$$L\, I_2' + I_5 R = \frac{q_3}{C} \tag{2.53}$$

Malla 2342.

$V_{23} + V_{34} + V_{42} = 0$. Esta igualdad proporciona la ecuación:

$$I_5 R + L\, I_6' = \frac{q_4}{C} \tag{2.54}$$

Derivando dos veces la ecuación (2.54) tenemos que

$$L\, I_6''' = \frac{I_4'}{C} - I_5'' R \tag{2.55}$$

Derivando dos veces y sustituyendo el valor de $u(t)$ dado por (2.52), tenemos que:

$$\frac{1}{L\,C} u(t) - u''(t) = \frac{q_3}{L\,C^2} + \frac{I_6'}{C} - \frac{I_3'}{C} - L\, I_6''' =$$

sustituyendo $L\, I_6'''$ por su valor dado por (2.55)

$$= \frac{q_3}{L\,C^2} + \frac{I_6'}{C} - \frac{I_3'}{C} - \frac{I_4'}{C} + I_5'' R =$$

sustituyendo I_6' por su valor dado por (2.54)

$$=\frac{q_3+q_4}{L\,C^2}-\frac{I_5 R}{L\,C}-\frac{I_3'+I_4'}{C}+I_5''R=$$

sustituyendo $\dfrac{q_3+q_4}{C}$ por su valor obtenido sumando (2.53) y (2.54)

$$=\frac{I_2'+I_6'}{C}-\frac{I_3'+I_4'}{C}+\frac{I_5 R}{L\,C}+I_5''R=$$

usando que $I_5=I_2-I_4=I_6-I_3 \Rightarrow 2I_5'=I_2'+I_6'-(I_3'+I_4')$

$$=\frac{2I_5'}{C}+\frac{I_5 R}{L\,C}+I_5''R=$$

teniendo en cuenta que $y(t)=I_5 R$

$$=y''+\frac{2}{R\,C}y'+\frac{1}{L\,C}y$$

Hemos obtenido que la relación entre la entrada (input) $u(t)$ y la salida (output) $y(t)$ viene dada por la ED:

$$y''+\frac{2}{R\,C}y'+\frac{1}{L\,C}y=-u''(t)+\frac{1}{L\,C}u(t) \tag{2.56}$$

♦

Ejemplo 2.10. Consideremos el sistema LTI que consiste en el circuito del ejemplo anterior. Sabemos que entre la señal de entrada, $u(t)$, y la de salida, $y(t)$, se verifica la relación dada por la ED

$$y''+\frac{2}{R\,C}y'+\frac{1}{L\,C}y=-u''(t)+\frac{1}{L\,C}u(t) \tag{2.57}$$

Consideremos como entrada del sistema la función $u(t)=\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$, donde $\omega\in\mathbb{R}$. Como estamos suponiendo que se trata de un sistema LTI, la respuesta será de la forma $y(t)=H(i\,\omega)\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$ donde H es la función de transferencia del sistema. Teniendo en cuenta la relación entre las señales de entrada y salida dada por la ecuación (2.57), deberá verificarse que

$$\left((i\,\omega)^2+\frac{2}{R\,C}i\,\omega+\frac{1}{L\,C}\right)H(i\,\omega)\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}=\left(-(i\,\omega)^2+\frac{1}{L\,C}\right)\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$$

de donde se sigue que la respuesta en frecuencia del sistema viene dada por

$$H(i\,\omega)=\frac{-(i\,\omega)^2+\dfrac{1}{L\,C}}{(i\,\omega)^2+\dfrac{2}{R\,C}i\,\omega+\dfrac{1}{L\,C}}$$

Supongamos ahora que $R=\sqrt{L/C}$. Poniendo $\alpha=1/R\,C$, se tiene que $\alpha^2=1/L\,C$. Con ello resulta

$$H(i\,\omega)=\frac{\alpha^2-(i\,\omega)^2}{(i\,\omega)^2+2\alpha(i\,\omega)+\alpha^2}=\frac{\alpha-i\,\omega}{\alpha+i\,\omega}$$

Por tanto, si representamos por $L(u)$ la respuesta del sistema a la entrada u, hemos probado que

$$L(\mathrm{e}_{i\,\omega})(t) = H(i\,\omega)\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} = \frac{\alpha - i\,\omega}{\alpha + i\,\omega}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$$

Supongamos ahora que la función de entrada, $u(t)$, tiene periodo T y viene dada por (desarrollo en serie de Fourier)

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{i\,n\,\omega_0 t} \qquad \text{donde } \omega_0 = 2\pi/T \quad \text{(frecuencia en radianes)}$$

Puesto que nuestro sistema es estable, tenemos que

$$L(u)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(i\,n\,\omega_0)\,\mathrm{e}^{i\,n\,\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\alpha - i\,n\,\omega_0}{\alpha + i\,n\,\omega_0}\,\mathrm{e}^{i\,n\,\omega_0 t}$$

Lo que acabamos de obtener es el desarrollo en serie de Fourier de la *respuesta periódica con periodo T* del sistema a la entrada $u(t)$. Observa que como $|H(i\,\omega)| = 1$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$, la energía de la señal de salida es la misma que la de entrada:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n H(n\,\omega_0)|^2$$

♦

2.7.5.1. Función de transferencia de un sistema LTI controlado por una EDL

Es muy fácil comprobar que la función de transferencia de un sistema LTI en el que la señal de entrada, $u(t)$, y la de salida, $y(t)$, están relacionadas por una EDL de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u' + b_0 u \tag{2.58}$$

viene dada por

$$H(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} \tag{2.59}$$

donde

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ B(\lambda) &= b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 \end{aligned}$$

2.7.5.2. Respuesta impulsiva y solución de estado estacionario

Dada una EDL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

Llamaremos *respuesta impulsiva* a la solución del PVI

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y &= 0 \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) &= 0 \\ y^{(n-1)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Se llama *solución de estado estacionario* a la solución del PVI

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y &= f(t) \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Naturalmente, la solución de estado estacionario depende de la función $f(t)$ que se considere. Esta dependencia viene dada por el siguiente importante resultado.

Teorema 2.11. *Sea φ la solución de estado estacionario y sea h la respuesta impulsiva. Entonces*

$$\boxed{\varphi(t) = \int_0^t f(x)h(t-x)\,\mathrm{d}x} \tag{2.60}$$

Es decir, el conocimiento de la respuesta impulsiva determina la respuesta del sistema para cualquier entrada por medio de la integral de convolución (2.60).

2.8. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta de gran utilidad para resolver problemas de valores iniciales de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Guiado por ese objetivo, lo que sigue es una introducción muy elemental a dicha transformada.

En lo que sigue consideramos funciones definidas en $\mathbb{R}$ que toman valores reales o complejos y que son continuas a trozos en $[0,+\infty[$, es decir, en cada intervalo de la forma [0,b] solamente pueden tener un número finito de discontinuidades de salto.

Definición 2.12. La transformada de Laplace de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ se define como la función

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}t = \lim_{u\to\infty}\int_0^u f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}t \tag{2.61}$$

2.8.0.3. Observaciones

- Consideraremos que en la definición anterior s es una variable real.
- Como los valores de f en el intervalo $]-\infty,0[$ no intervienen para nada en la definición anterior, en la teoría de la transformada de Laplace es costumbre suponer que las funciones se anulan para valores negativos de la variable.

- La transformada de Laplace de una función f solamente está definida para aquellos valores de s para los que el límite (2.61) existe y es finito. Dichos valores constituyen lo que se llama el *dominio de convergencia de la integral* el cual depende en cada caso de la función f. Se demuestra que si la integral 2.61 existe para un valor s_0 entonces también existe para todo s con $s > s_0$. Esto implica que el dominio de convergencia es un intervalo no mayorado o todo $\mathbb{R}$.

- Se dice que una función f es de *orden exponencial* si hay algún número $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-a\,t} = 0 \tag{2.62}$$

  Teniendo en cuenta que si $c > 0$ la integral $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-c\,t}\,\mathrm{d}t = 1/c < +\infty$, se deduce que si f es una función de orden exponencial que verifica 2.62, entonces la transformada de Laplace de f está definida para todo s con $s > a$.

  Las funciones polinómicas, las funciones seno y coseno y las exponenciales de la forma $\mathrm{e}^{c\,x}$ donde c es una constante real o compleja, son funciones de orden exponencial. Es claro que la suma y el producto de funciones de orden exponencial también es una función de orden exponencial.

  En lo que sigue suponemos que las funciones son de orden exponencial. Esto garantiza la existencia de su transformada de Laplace y es una hipótesis suficiente para que se verifiquen los resultados que nos interesan.

- Suele emplearse la notación $\mathcal{L}\big(f(t)\big)(s)$ para representar la transformada de Laplace de la función f evaluada en un punto s. Esta notación se presta a veces a confusiones pero es inevitable usarla y así lo haremos en lo que sigue.

2.8.0.4. Propiedades de la transformada de Laplace

Linealidad

La transformada de Laplace es un operador lineal.

$$\mathcal{L}(\lambda\, f + \beta\, g) = \lambda\,\mathcal{L}f + \beta\,\mathcal{L}g$$

Teorema de derivación

La transformada de Laplace $\mathcal{L}f(s)$ de una función f es una función indefinidamente derivable en su dominio de convergencia y su derivada de orden n viene dada por

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\,\mathcal{L}\big(f(t)\big)(s) = \mathcal{L}\big((-1)^n t^n f(t)\big)(s) \tag{2.63}$$

En particular, $\mathcal{L}f(s)$ es una función continua. Además, se verifica que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}f(s) = 0$.

Teorema de integración

Supongamos que $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)/t$ existe y sea $F(s)$ la transformada de Laplace de f. Entonces se verifica que

$$\int_s^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) \tag{2.64}$$

Transformada de Laplace de una derivada

A) Supongamos que f es continua en $]0,+\infty[$, de orden exponencial y tiene derivada f' que es continua a trozos en $[0,+\infty[$. Entonces se verifica la igualdad

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big)(s) = s\,\mathcal{L}\big(f(t)\big)(s) - f(0^+) \tag{2.65}$$

donde $f(0^+) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$.

B) En las mismas hipótesis anteriores, supongamos que f tiene discontinuidades de salto en los puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_q$, entonces se verifica que

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big)(s) = s\,\mathcal{L}\big(f(t)\big)(s) - f(0^+) - \sum_{j=1}^{q} \mathrm{e}^{-s\,t_k}\left(f\big(t_k^+\big) - f\big(t_k^-\big)\right) \tag{2.66}$$

C) Supongamos que $f(t)$, $f'(t)$,...,$f^{(n-1)}(t)$ son continuas en $]0,+\infty[$ y de orden exponencial y que $f^{(n)}(t)$ es continua a trozos en $[0,+\infty[$, entonces se verifica que

$$\mathcal{L}\big(f^{(n)}(t)\big)(s) = s^n\mathcal{L}\big(f(t)\big)(s) - s^{n-1}f\big(0^+\big) - s^{n-2}f'\big(0^+\big) - \cdots - f^{(n-1)}\big(0^+\big) \tag{2.67}$$

Estas propiedades son las responsables de la extraordinaria utilidad que tiene la transformada de Laplace para estudiar ecuaciones diferenciales.

Propiedad de traslación. Dado un número $b > 0$ se verifica que

$$\mathcal{L}\big(H(t-b)f(t-b)\big)(s) = \mathrm{e}^{-b\,s}\,\mathcal{L}\big(f(t)\big)(s) \tag{2.68}$$

donde H es la función escalón unidad.

Propiedad de cambio de escala. Dado un número real $a > 0$ se verifica que

$$\mathcal{L}\big(f(at)\big)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\big(f(t)\big)\left(\frac{s}{a}\right) \tag{2.69}$$

Teorema de convolución. Sean f y g funciones de orden exponencial y definamos su convolución por

$$f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u$$

Se verifica que la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones es igual al producto de sus transformadas de Laplace.

$$\mathcal{L}\big((f*g)(t)\big)(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)(s)\mathcal{L}\big(g(t)\big)(s) \tag{2.70}$$

2.8.0.5. Inversión de la transformada de Laplace

Definimos la transformada de Laplace inversa como el operador $\mathcal{L}^{-1}$ que a una función $F(s) = \mathcal{L}f(s)$ hace corresponder la función f.

$$\mathcal{L}^{-1}F = f \Longleftrightarrow \mathcal{L}f = F$$

Se usa la notación $\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)(t)$ para indicar la transformada de Laplace inversa de F evaluada en t.

La definición anterior está muy bien pero sirve de muy poco. Si tenemos que aplicar la definición dada para calcular transformadas inversas de Laplace, necesitamos tener alguna práctica para que cuando nos den una función seamos capaces de construir otra función cuya transformada de Laplace sea dicha función. Sin embargo, a pesar de que este procedimiento es muy rudimentario es el que suele seguirse. Más adelante veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.13. Transformada de Laplace de una exponencial, del seno y del coseno.

Sea $f(t) = \mathrm{e}^{a\,t}$ donde $a \in \mathbb{C}$. Tenemos que para $s > \operatorname{Re}(a)$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{a\,t}\big)(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{a\,t}\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}t \;&=\; \lim_{u\to+\infty}\int_0^{u} \mathrm{e}^{-(s-a)\,t}\,\mathrm{d}t \;=\; \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{-1}{s-a}\,\mathrm{e}^{-(s-a)\,t}\right]_{t=0}^{t=u} \\ &=\; \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{e^{-(s-a)\,u}}{s-a}\right) = \frac{1}{s-a} \qquad (2.71)\end{aligned}$$

pues para $s > \operatorname{Re}(a)$

$$\left|e^{-(s-a)\,u}\right| = \mathrm{e}^{-u\operatorname{Re}(s-a)} \to 0 \qquad (u \to +\infty)$$

Deducimos que para $s > 0$

$$\mathcal{L}\big(\operatorname{sen}(\omega\,t)\big)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\omega\,t} - \mathrm{e}^{-i\omega\,t}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad (2.72)$$

Análogamente

$$\mathcal{L}\big(\cos(\omega\,t)\big)(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad (2.73)$$

♦

Ejemplo 2.14. Transformada de Laplace de una función polinómica.

Como caso particular del ejemplo anterior para $a = 0$, tenemos que la transformada de Laplace de la función escalón unidad, $H(t) = 1$ para $t \geqslant 0$, $H(t) = 0$ para $t < 0$, viene dada por $\mathcal{L}H(s) = \dfrac{1}{s}$. Usando el teorema de derivación deducimos que

$$\mathcal{L}\big(t^n\big)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \qquad (2.74)$$

Este resultado, junto con la linealidad, permite obtener enseguida la transformada de Laplace de una función polinómica.

Además, teniendo en cuenta la propiedad de traslación **??**, deducimos que

$$\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{a\,t}\,t^n\big)(s) = \frac{n!}{(s-a)^{\,n+1}} \qquad (n=1,2,3,\dots,\ \operatorname{Re}(s-a)>0) \tag{2.75}$$

♦

2.8.0.6. Transformada inversa de Laplace de una función racional

Sea $R(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ una función racional donde P y Q son funciones polinómicas sin raíces comunes de grados respectivos $n<m$ y el coeficiente líder de Q es 1. Sean α_j, $(1\leqslant j\leqslant q)$ las raíces de $Q(s)$ con multiplicidades respectivas $k_j\geqslant 1$, $(k_1+k_2+\cdots+k_q=m)$. Es posible descomponer $R(s)$ en fracciones simples de la forma

$$R(s)=\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{h=1}^{k_j}\frac{C_{j\,h}}{(s-\alpha_j)^h}\right) \tag{2.76}$$

Donde los coeficientes $C_{j\,h}$ son números complejos que habrá que calcular. Teniendo en cuenta que la transformada de Laplace inversa es un operador lineal y el resultado obtenido en el ejemplo anterior, la igualdad (2.76) permite calcular la transformada de Laplace inversa de $R(s)$.

Cuando todas las raíces α_j son simples, el cálculo es muy fácil pues de la igualdad

$$R(s)=\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{s-\alpha_j} \tag{2.77}$$

se deduce que

$$C_j=\lim_{s\to\alpha_j}(z-\alpha_j)R(s)=\frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)} \tag{2.78}$$

y, por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\big(R(s)\big)(t)=\sum_{j=1}^{m}\frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)})\,\mathrm{e}^{\alpha_j\,t} \tag{2.79}$$

Ejemplo 2.15. Vamos a calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right)$$

Descomponiendo en fracciones simples tenemos que

$$\frac{s+1}{s^2(s-1)}=-\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s-1}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right)=-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)+2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-1}\right)=-2-t+2\,\mathrm{e}^t$$

♦

Ejemplo 2.16. Vamos a calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right)$$

La descomposición en fracciones simples es

$$\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2} = -\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right) = -\cos t + \mathrm{e}^t + t\,\mathrm{e}^t$$

♦

Ejemplo 2.17. Teniendo en cuenta la igualdad 2.72 y el teorema de derivación y que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = -\frac{2s\,\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$$

obtenemos

$$\mathcal{L}\big(t\ \operatorname{sen}(\omega\, t)\big)(s) = \frac{2s\,\omega}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{2.80}$$

Análogamente

$$\mathcal{L}\big(t\ \cos(\omega\, t)\big)(s) = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{2.81}$$

♦

Si los resultados anteriores los combinas con las propiedades de desplazamiento y el teorema de convolución podrás calcular fácilmente transformadas de Laplace de productos de polinomios por funciones seno y coseno y exponenciales.

Ejemplo 2.18. Calculemos $\mathcal{L}\big(\operatorname{sen}^2(\omega\, t)\big)$.

Sea $f(t) = \operatorname{sen}^2(\omega\, t)$. Tenemos que $f'(t) = 2\omega \operatorname{sen}(\omega\, t)\cos(\omega\, t) = \omega \operatorname{sen}(2\omega\, t)$. Teniendo en cuenta la igualdad 2.65, se verifica que

$$\mathcal{L}(\omega \operatorname{sen}(2\omega\, t)) = s\,\mathcal{L}(\operatorname{sen}^2(\omega\, t))$$

de donde

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}^2(\omega\, t)) = \frac{\omega}{s}\frac{2\omega}{s^2+4\omega^2} = \frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$$

♦

Ejemplo 2.19. Se trata de calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right)$$

Puede hacerse una descomposición en fracciones simples pero es más rápido si nos damos cuenta de que

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)} = \frac{1}{s^3}\,\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2}\mathcal{L}(t^2)\mathcal{L}(\operatorname{sen} t)$$

y usamos el teorema de convolución (2.70) para deducir que

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)} = \frac{1}{2}\mathcal{L}(t^2 * \operatorname{sen} t) \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right) = \frac{1}{2}t^2 * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(t^2+2\cos t-2)$$

♦

2.8.0.7. Resolución de EDL con la transformada de Laplace

La transformada de Laplace convierte una EDL de coeficientes constantes en una ecuación algebraica. Consideremos la EDL con coeficientes constantes

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \tag{2.82}$$

Sea $y(t)$ la solución que verifica las condiciones iniciales $y^{(j)}(0) = 0$ para $0 \leqslant j \leqslant n-1$ (la solución de estado estacionario). Sea $Y(s) = \mathcal{L}\big(y(t)\big)(s)$ la transformada de Laplace de $y(t)$ y $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$. Tomando transformadas de Laplace en la igualdad (2.82), y teniendo en cuenta el teorema de derivación (2.67), obtenemos la igualdad

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) = F(s) \Longrightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{2.83}$$

Para obtener $y(t)$ deberemos calcular la transformada de Laplace inversa de esta función.

De hecho, este método se puede aplicar, al menos en teoría, para obtener soluciones con condiciones iniciales arbitrarias, aunque los cálculos pueden complicarse.

Podemos obtener una interesante expresión integral para la solución de estado estacionario $y(t)$. Para ello, supongamos que $h(t)$ es una función tal que

$$\frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \mathcal{L}\big(h(t)\big)(s)$$

Entonces, por el teorema de convolución

$$Y(s) = F(s)\mathcal{L}\big(h(t)\big)(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)(s)\mathcal{L}\big(h(t)\big)(s) = \mathcal{L}\big((f*h)(t)\big)(s)$$

por lo que

$$y(t) = \int_0^t f(u)h(t-u)\,\mathrm{d}u \tag{2.84}$$

Cuando la EDL (2.82) aparece ligada a un sistema LTI, se dice que la función h es *la respuesta impulsiva* del sistema y su conocimiento permite obtener la respuesta de estado estacionario del sistema a cualquier señal $f(t)$ por medio de la convolución dada por 2.84.

Un caso particularmente sencillo es cuando el polinomio $Q(s)$ tiene todas sus raíces simples. Si éstas son α_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, entonces se deduce de (2.79) que

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{Q'(\alpha_j)} \int_0^t f(u)\, \mathrm{e}^{\alpha_j(t-u)}\, \mathrm{d}u$$

Una pequeña variante de lo anterior es cuando la EDL (2.82) aparece ligada a un sistema LTI, en cuyo caso es costumbre escribirla en la forma input-output:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \tag{2.85}$$

Llamando $U(s) = \mathcal{L}\big(u(t)\big)(s)$ y razonando como antes, obtenemos

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} U(s) = H(s)U(s)$$

donde $H(s)$ es la función de transferencia del sistema (2.59). La función $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(H(s)\big)(t)$ se llama la respuesta impulsiva del sistema y su conocimiento permite obtener la respuesta $y(t)$ del sistema para una señal de entrada $u(t)$ por medio de la integral de convolución

$$y(t) = \int_0^t u(x) h(t-x)\, \mathrm{d}x$$

Ejemplo 2.20. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$y'' + y = \operatorname{sen} t \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

Es decir, se trata de calcular una solución, $y(t)$, de la ecuación diferencial $y'' + y = \operatorname{sen} t$ que verifique las condiciones iniciales $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$. Notemos $Y(s)$ la transformada de Laplace de la función (desconocida y). Tomando transformadas de Laplace en la ecuación diferencial y teniendo en cuenta la fórmula 2.67 para la transformada de Laplace de una derivada, obtenemos

$$s^2 Y(s) - s\, y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

sustituyendo en esta igualdad las condiciones iniciales resulta

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Por una parte

$$\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}(\operatorname{sen} t) + \mathcal{L}(\cos t) = \mathcal{L}(\operatorname{sen} t + \cos t)$$

Y por otra

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{s}\frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2}\mathcal{L}1\mathcal{L}(t \operatorname{sen} t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(1 * t \operatorname{sen} t)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = \operatorname{sen} t + \cos t + \frac{1}{2} 1 * t \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t + \cos t + \frac{1}{2}\int_0^t u \operatorname{sen} u \, \mathrm{d}u \\ &= \operatorname{sen} t + \cos t + \frac{1}{2}(-t\cos t + \operatorname{sen} t) = \cos t - \frac{1}{2} t \cos t + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Puedes comprobar que, efectivamente, esa es la solución correcta.

♦

Ejemplo 2.21. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + y = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de la ecuación y poniendo $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$, tenemos

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-s\,t} \operatorname{sen} t \, \mathrm{d}t = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

Por tanto

$$Y(s) = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\pi s}}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{(s^2+1)^2}$$

En el ejemplo anterior hemos visto que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$$

teniendo en cuenta también la igualdad 2.68, deducimos que

$$y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t) + H(t-\pi)\left(\frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(t-\pi) - (t-\pi)\cos(t-\pi)\big)\right)$$

es decir

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t), & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ -\dfrac{1}{2}\pi\cos t, & t > \pi \end{cases}$$

♦

Ejemplo 2.22. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y' + z' + y + z &= 1 \\ y' + z &= \mathrm{e}^t \end{aligned} \qquad y(0) = -1, \;\; z(0) = 2$$

Tomando transformadas de Laplace y poniendo $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$, $Z(s) = \mathcal{L}z(s)$, obtenemos

$$\begin{aligned} sY(s) + 1 + sZ(s) - 2 + Y(s) + Z(s) &= \frac{1}{s} \\ sY(s) + 1 + Z(s) &= \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones deducimos que

$$Y(s) = \frac{-s^2+s+1}{s(s-1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

y tomando transformadas inversas obtenemos que

$$y(t) = 1 - 2\,\mathrm{e}^t + t\,\mathrm{e}^t, \qquad z(t) = 2\,\mathrm{e}^t - t\,\mathrm{e}^t$$

♦

2.8.0.8. Cálculo de la exponencial de una matriz por medio de la transformada de Laplace

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada y consideremos la matriz exponencial

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}\,t} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}\mathbf{A}^n + \cdots$$

Tomando transformadas de Laplace en esta igualdad obtenemos

$$\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{\mathbf{A}\,t}\big)(s) = \frac{1}{s}\mathbf{I} + \frac{1}{s^2}\mathbf{A} + \frac{1}{s^3}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{s^4}\mathbf{A}^3 + \cdots + \frac{1}{s^{n+1}}\mathbf{A}^n + \cdots$$

Multiplicando los dos lados de esta igualdad por la matriz $s\mathbf{I} - A$ se comprueba fácilmente que

$$\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{\mathbf{A}\,t}\big)(s)(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s\mathbf{I} - A)\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{\mathbf{A}\,t}\big)(s) = \mathbf{I}$$

por lo que

$$\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{\mathbf{A}\,t}\big)(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \Longrightarrow \mathrm{e}^{\mathbf{A}\,t} = \mathcal{L}^{-1}\big((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\big)(t)$$

Naturalmente, para calcular transformadas de Laplace de una matriz se calculan las transformadas de Laplace de los elementos de la matriz.

También se llega al mismo resultado teniendo en cuenta que la matriz $\mathrm{e}^{\mathbf{A}\,t}$ es la solución de la ED matricial $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{Y}(t)$ que verifica $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}$. Tomando transformadas de Laplace en esta ED se deduce

$$s\mathcal{L}\big(\mathbf{Y}(\mathbf{t})\big)(s) - \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathcal{L}\big(\mathbf{Y}(\mathbf{t})\big)(s) \Longrightarrow \mathcal{L}\big(\mathbf{Y}(\mathbf{t})\big)(s) = \big(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\big)^{-1} \Longrightarrow \mathbf{Y}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}\,t} = \mathcal{L}^{-1}\big((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\big)(t)$$

Ejemplo 2.23. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$(sI - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+1}\begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{s}{s^2+1} & \dfrac{1}{s^2+1} \\ \dfrac{-1}{s^2+1} & \dfrac{s}{s^2+1} \end{pmatrix}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace obtenemos

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}\,t} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

♦

Ejemplo 2.24. Las ecuaciones en diferencias finitas lineales pueden resolverse con ayuda de la transformada de Laplace. Veamos un ejemplo.

Se trata de resolver la ecuación

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \qquad a_0 = 0, \; a_1 = 1$$

Para ello definamos

$$y(t) = a_n \qquad n \leqslant t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Con lo cual la ecuación se convierte en

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0 \qquad y(0) = 0, \; y(1) = 1 \tag{2.86}$$

Tomando transformadas de Laplace tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(y(t+2)\big) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,t}\, y(t+2)\,\mathrm{d}t = [u = t+2] = \int_2^\infty \mathrm{e}^{-s(u-2)}\, y(u)\,\mathrm{d}u = \\
&= \mathrm{e}^{2s} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,u}\, y(u)\,\mathrm{d}u - \mathrm{e}^{2s} \int_0^2 \mathrm{e}^{-s\,u}\, y(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{2s}\, \mathcal{L}\big(y(t)\big) - \mathrm{e}^{2s} \int_0^1 \mathrm{e}^{-s\,u}\, y(0)\,\mathrm{d}u - \mathrm{e}^{2s} \int_1^2 \mathrm{e}^{-s\,u}\, y(1)\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{2s}\, \mathcal{L}\big(y(t)\big) - \frac{\mathrm{e}^s}{s}(1 - \mathrm{e}^{-s})
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\mathcal{L}\big(y(t+1)\big) = \mathrm{e}^s\, \mathcal{L}\big(y(t)\big)$$

Con lo que la ecuación 2.86 se convierte en

$$\mathrm{e}^{2s}\, \mathcal{L}\big(y(t)\big) - \frac{\mathrm{e}^s}{s}(1 - \mathrm{e}^{-s}) - 3\,\mathrm{e}^s\, \mathcal{L}\big(y(t)\big) + 2\mathcal{L}\big(y(t)\big) = 0$$

de donde fácilmente se obtiene que

$$\mathcal{L}\big(y(t)\big) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s(1 - 2\,\mathrm{e}^{-s})} - \frac{1}{s}$$

Teniendo ahora en cuenta que para $a > 0$ y notando $E(t)$ la función *parte entera* se verifica que

$$\mathcal{L}\left(a^{E(t)}\right) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s(1 - a\,\mathrm{e}^{-s})} \qquad (\mathrm{Re}(s) > \text{máx}\,\{0, \log a\})$$

concluimos que

$$\mathcal{L}\big(y(t)\big) = \mathcal{L}\left(2^{E(t)}\right) - \mathcal{L}1 = \mathcal{L}\left(2^{E(t)} - 1\right)$$

de donde resulta finalmente

$$a_n = 2^n - 1, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

♦

2.9. Ejercicios

1. Calcula, usando los ejemplos anteriores y las propiedades de la transformada de Laplace, sin necesidad de hacer integrales, las transformadas de Laplace de las funciones siguientes:

   a) $\cosh(\omega\, t)$, $\operatorname{senh}(\omega\, t)$ (seno hiperbólico y coseno hiperbólico).

   b) $\mathrm{e}^{a\,t}\operatorname{sen}(\omega\, t+\varphi)$, $\mathrm{e}^{a\,t}\cos(\omega\, t+\varphi)$.

   c) $f(t)=0$ si $0\leqslant t\leqslant 1$, $f(t)=(t-1)^2$ si $t>1$.

   d) $f(t)=\operatorname{sen} t$ si $t\geqslant 3$, $f(t)=0$ ai $0\leqslant t<3$.

   e) $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$

   f) $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$

2. Justifica la igualdad
$$\mathcal{L}\left(a^{E(t)}\right)=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s(1-a\,\mathrm{e}^{-s})}\qquad (\operatorname{Re}(s)>\text{máx}\{0,\log a\})$$

3. Calcula las transformadas de Laplace inversas de las siguientes funciones

   a) $\dfrac{\mathrm{e}^{-a\,s}-\mathrm{e}^{-b\,s}}{(b-a)s}$ donde $0\leqslant a<b$

   b) $\dfrac{\mathrm{e}^{-2\,s}}{s^2+1}$

   c) $\dfrac{s}{s^2+4s+1}$

   d) $\log\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$ donde $a>0$, $b>0$.

   e) $\dfrac{s-a}{s+a}$

4. Justifica la igualdad
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}f(s)}{s}\right)(t)=\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$$
   Aplicación: Calcula la transformada de Laplace de la función *seno integral*:
$$\mathrm{S\,i}(t)=\int_0^t\frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u$$

5. Supongamos que f es una función periódica con período T. Sea $F(s)$ la transformadas de Laplace de f y pongamos
$$F_1(s)=\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}t$$
   Justifica que
$$F(s)=\frac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-s\,T}}$$
   Aplicación: Calcula la transformada de Laplace de la función $f(t)=|\operatorname{sen}(\omega\, t)|$.

6. Calcula la solución de la ecuación diferencial

$$my''(t) + k\,y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < t \end{cases}$$

   donde $y(0) = y'(0) = 0$ y ε, m, k son constantes positivas.

7. Calcula la solución de la ecuación diferencial

$$y''(t) + \lambda^2 y(t) = \cos(\lambda\, t)$$

   que verifica $y(0) = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2\lambda}\right) = 1$.

8. Supongamos que la corriente eléctrica I en un circuito verifica

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t I(u)\,\mathrm{d}u = E$$

   donde L, C, E son constantes positivas e $I(0) = 0$. Calcula $I(t)$.

9. Una bala de masa m es disparada por un cañón con una velocidad v_0 dentro de un medio viscoso. Se sabe que el desplazamiento $y(t)$ en el tiempo $t \geqslant 0$ de la bala satisface la ecuación diferencial

$$my'' + ky' = 0$$

   donde $y(0) = 0$, $y'(0) = v_0$. Calcula $y(t)$.

10. Calcula primero la respuesta impulso y después la solución de estado estacionario del sistema dado por la ecuación diferencial

$$y'' + y' - 2y = 4\,\mathrm{e}^{-t}$$

11. Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x'' + y' + 3x &= 15\,\mathrm{e}^{-t} \\ y'' - 4x' + 3y &= 15\,\mathrm{sen}(2\,t) \end{aligned}$$

   donde $x(0) = 35$, $x'(0) = -48$, $y(0) = 27$, $y'(0) = -55$.

12. Resuelve, usando transformadas de Laplace, la ecuación en diferencias finitas

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad a_0 = 0,\ \ a_1 = 1$$

Lección 3

Conceptos básicos de la teoría de Series de Fourier

3.1. Introducción

Esencialmente la teoría de Series de Fourier persigue dos propósitos:

- El **análisis** o descomposición de una señal como suma o superposición (en general infinita) de sinusoides.
- La **síntesis** o recomposición de una señal a partir de sus sinusoides.

Habrás notado que estoy empleando la palabra "señal" como sinónimo de "función" y así lo seguiré haciendo a lo largo de esta lección con las precisiones que considere necesarias. En análisis armónico las señales más simples son las sinusoides a las que nos hemos referido antes. Conviene darles un repaso.

3.1.1. Sinusoides

Una sinusoide es una señal de la forma

$$A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + \phi).$$

El número $A > 0$ es la *amplitud*, $\nu > 0$ es la *frecuencia* medida en ciclos por segundo o Hercios (Hz), $-\pi < \phi \leqslant \pi$ es la *fase* (fase inicial), $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia medida en radianes por segundo (que se llama a veces frecuencia angular). El *período* es el tiempo que necesita la sinusoide para completar un ciclo completo, es decir, el período es $T = 1/\nu$ segundos.

$$A \operatorname{sen}(2\pi\nu(t + 1/\nu) + \phi) = A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + 2\pi + \phi) = A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + \phi).$$

En general, una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice que es *periódica* con *período* T si $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En tal caso cualquier múltiplo entero de T es también un período de f, esto es,

$f(t+kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Por convenio, una función constante se considera periódica con cualquier período. Salvo este caso, cuando se dice que una función es periódica de período T se sobreentiende que T es el número positivo más pequeño que verifica la igualdad $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En la representación gráfica de la señal $f(t) = A\operatorname{sen}(2\pi\nu t + \phi)$ se interpreta $f(t)$ como la amplitud de la señal en el instante t. La amplitud A representa la máxima altura que alcanza dicha gráfica, esto es, el máximo absoluto de la función f (el mínimo absoluto es $-A$). La frecuencia es el número de veces (ciclos) que se repite la gráfica en un segundo. El período es el tiempo necesario para que la gráfica complete un solo ciclo.

3.2. Polinomios trigonométricos y coeficientes de Fourier

Un polinomio trigonométrico de orden N es una función de la forma

$$\sum_{n=0}^{N} A_n \operatorname{sen}(2n\pi t/T + \phi_n) \tag{3.1}$$

En una suma de este tipo el número T es el *periodo fundamental* y $\nu = 1/T$ es la *frecuencia fundamental* (en hercios). A cada uno de los sumandos individuales, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia principal, se les llama *armónicos*. Esta forma de una suma trigonométrica tiene la ventaja de mostrar explícitamente la amplitud y la fase de cada uno de ellos pero es muy incómoda para los cálculos. Por ello es más frecuente escribir esta suma en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(2\pi\, n\, t/T) + b_n \operatorname{sen}(2\pi\, n\, t/T)\right) \tag{3.2}$$

la razón de escribir el término constante en la forma $a_0/2$ es para simplificar las fórmulas de los coeficientes que veremos en seguida.

Se trabaja con mucha más comodidad con estas sumas si usamos la exponencial compleja. Usando las ecuaciones de Euler tenemos que:

$$\cos(2\pi\, nt/T) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T} + \mathrm{e}^{-2\pi\, i\, n\, t/T}}{2}, \qquad \operatorname{sen}(2\pi\, nt/T) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T} - \mathrm{e}^{-2\pi\, i\, n\, t/T}}{2i}$$

con ello la suma (3.2) puede ser escrita como:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T} \tag{3.3}$$

La relación entre estas tres formas distintas de escribir una misma función viene dada por las siguientes igualdades válidas para todo $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$c_n = \frac{a_n - i\, b_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + i\, b_n}{2} \tag{3.4}$$

$$a_n = A_n \operatorname{sen}\phi_n \qquad b_n = A_n \cos\phi_n \tag{3.5}$$

Supongamos que f es una señal que podemos representar como un polinomio trigonométrico con periodo T:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T}$$

entonces se verifica que los coeficientes en esta expresión están determinados de forma única por f y vienen dados por:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi\, i\, n\, t/T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Las consideraciones anteriores motivan a las siguientes definiciones.

Definición 3.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una señal de periodo T integrable en $[0, T]$. Se definen los *coeficientes de Fourier* de f por:

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi\, i\, n\, t/T} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{Z})} \tag{3.6}$$

El polinomio trigonométrico:

$$\boxed{S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T}} \tag{3.7}$$

donde los coeficientes c_n vienen dados por (3.6), se llama *polinomio de Fourier de orden* N de f. La sucesión de los polinomios de Fourier de f se llama *serie de Fourier* de f y la representamos por $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T}$. Cuando dicha serie converge escribimos:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T}$$

Teniendo en cuenta 3.4 se deduce que las igualdades 3.6 y 3.7 pueden escribirse de forma equivalente:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(2\pi\, n\, t/T) + b_n \operatorname{sen}(2\pi\, n\, t/T)\right) \tag{3.8}$$

donde:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos(2\pi\, n\, t/T) f(t)\,\mathrm{d}t \qquad n = 0, 1, 2, \ldots} \tag{3.9}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \operatorname{sen}(2\pi\, n\, t/T) f(t)\,\mathrm{d}t \qquad n = 1, 2, \ldots} \tag{3.10}$$

Los a_n se llaman *coeficientes coseno* y los b_n *coeficientes seno* de f.

3.2.1. Observaciones

- También se utilizan las notaciones $c_n(f)$ y $\widehat{f}(n)$ para representar los coeficientes de Fourier c_n de f.

- Para calcular los coeficientes de Fourier de una señal de periodo T podemos integrar en cualquier intervalo de longitud T. Suele ser frecuente, por razones de simetría, elegir el intervalo $[-T/2, T/2]$.

- Observa que nada hemos dicho aún sobre la relación entre una función f y su serie de Fourier. La pregunta ¿de qué modo la serie de Fourier de f representa a f? no tiene una respuesta fácil porque tiene muchas respuestas. Mas adelante presentaremos algunos resultados en este sentido.

- Observa que si cambias una función en un número finito de puntos esto no afecta para nada a sus coeficientes de Fourier los cuales viene dados por medio de integrales. Igualmente, tampoco debe preocuparnos que una función no esté definida en un conjunto finito de puntos porque eso no afecta para nada a su integrabilidad ni al valor de su integral.

- A diferencia de la serie de Taylor de una función, la cual solamente está definida si dicha función es indefinidamente derivable, la única condición para que la serie de Fourier de una función esté definida es que la función sea integrable en un intervalo. Te recuerdo que hay funciones integrables con infinitas discontinuidades. Es decir, el concepto de serie de Fourier es mucho menos restrictivo que el de serie de Taylor y esa es una de las grandes ventajas de la teoría de series de Fourier: puede aplicarse a funciones muy generales.

- En contra de lo que pudiera parecer a primera vista, la hipótesis de periodicidad no es restrictiva para la aplicación de la teoría de series de Fourier.

  En efecto, si queremos representar una función f en un intervalo $[a, b]$ por medio de una serie de Fourier, lo único que se necesita es que dicha función esté definida y sea integrable en dicho intervalo. En tal caso la serie de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{2\pi i n t/(b-a)}$ cuyos coeficientes son
  $$c_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{e}^{-2\pi i n t/(b-a)} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (n\in\mathbb{Z})$$
  representa (cuando se dan las condiciones de convergencia apropiadas) una función periódica de periodo $b-a$ que coincide con f en el intervalo $]a, b[$.

  Podemos considerar esto desde otro punto de vista. Si estamos interesados en representar por medio de una serie de Fourier una función f definida e integrable en un intervalo $[a, b]$ podemos *extender* dicha función a todo $\mathbb{R}$ de manera que la extensión sea una función periódica de período $T = b-a$. Para ello basta repetir la gráfica de f en intervalos de longitud $T = b-a$ (si $f(b) = f(a+T) \neq f(a)$ será preciso cambiar el valor de f en uno de los extremos del intervalo $[a, b]$).

- La consideración de funciones complejas, si bien desde un punto de vista teórico no presenta ninguna dificultad e incluso hace que la teoría sea más elegante y fácil de desarrollar, desde un punto de vista práctico no añade nada pues en las aplicaciones siempre se consideran señales reales.

3.2.2. Ejemplos

Ejemplo 3.2. Calcular la serie de Fourier de la función 2π-periódica

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < -\pi/2 \\ 1, & \text{si } -\pi/2 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

De acuerdo con la definición de los coeficientes de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi} dx = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n\pi}\Big]_{x=-\pi/2}^{x=\pi} = \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 \quad \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos(nx)}{n\pi}\Big]_{x=-\pi/2}^{x=\pi} = \frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi/2)}{n\pi} = \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{1}{n\pi}[-1 + (-1)^{n/2}] & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto la serie de Fourier de f es

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}\left(\cos(x) + \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + \dots\right) = \\ = \;&\frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\Big((-1)^{n-1}\cos((2n-1)x) + \operatorname{sen}((2n-1)x) - \operatorname{sen}((4n-2)x)\Big) \end{aligned}$$

♦

Ejemplo 3.3. Sea $f : [4,6] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 4 < x \leqslant 5 \\ 2, & \text{si } 5 < x \leqslant 6 \end{cases}$$

Vamos a calcular sus coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \int_4^5 \mathrm{d}x + \int_5^6 2\,\mathrm{d}x = 3$$

Para $n \geqslant 1$:

$$a_n = \int_4^5 \cos(n\pi x)\ \mathrm{d}x + \int_5^6 2\cos(n\pi x)\ \mathrm{d}x = 0,$$

y

$$b_n = \int_4^5 \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx + \int_5^6 2\operatorname{sen}(n\pi x)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{-2}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto la serie de Fourier de f es

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\big((2n-1)\pi x\big)$$

♦

Ejemplo 3.4 (Función impulso rectangular). Se llaman *impulsos rectangulares* las señales que son nulas salvo en un determinado intervalo de tiempo en el que son constantes. El ejemplo típico es la función $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con más generalidad, dado un número $a > 0$ podemos considerar la función Π_a definida por $\Pi_a(x) = \Pi(x/a)$, con lo que

$$\Pi_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < a/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado un número $T > a$ podemos considerar la extensión periódica de Π_a con periodo T cuya gráfica es de la forma

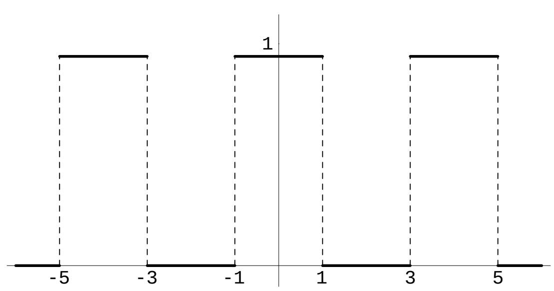


Figura 3.1: Periodización con periodo 4 de Π_2

Llamemos f a dicha función. Los coeficientes de Fourier de f son

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\ \mathrm{d}t = \frac{-1}{2\pi i n}\Big[\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\Big]_{t=-a/2}^{t=a/2} = \\ &= \frac{-1}{\pi n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\pi i n a/T} - \mathrm{e}^{\pi i n a/T}}{2i}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\pi n a/T)}{\pi n} \end{aligned}$$

para n distinto de cero, y

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t \,=\, \frac{1}{T}\int_{-a/2}^{a/2} 1\,\mathrm{d}t \,=\, \frac{a}{T}.$$

♦

Ejemplo 3.5 (Función triangular). La función "triangular" es la función $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{para } |x| > 1. \end{cases}$$

Con más generalidad, dado un número $a > 0$ podemos considerar la función Λ_a definida por $\Lambda_a(x) = \Lambda(x/a)$, con lo que

$$\Lambda_a(x) = \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{x}{a}\right|, & \text{si } |x| \leqslant a \\ 0, & \text{para } |x| > a. \end{cases}$$

Dado un número $T > 0$ podemos considerar la extensión periódica de Λ_a con periodo T.

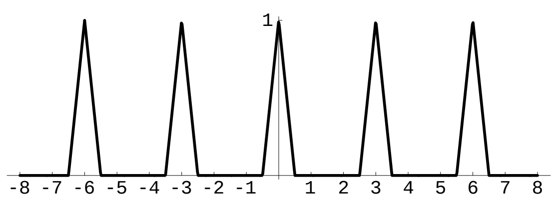


Figura 3.2: Periodización de periodo 3 de $\Lambda_{1/2}$

Calculemos sus coeficientes de Fourier.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\mathrm{d}t \,=\, \int_{-a}^{0}\left(1+\frac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a}\left(1-\frac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\mathrm{d}t \,= \\ &= \frac{2}{T}\int_0^a\left(1-\frac{t}{a}\right)\cos(2\pi n t/T)\,\mathrm{d}t \,=\, \frac{2}{T}\frac{T}{2\pi n}\left(\left[\left(1-\frac{t}{a}\right)\operatorname{sen}(2\pi n t/T)\right]_{t=0}^{t=a} + \frac{1}{a}\int_0^a \operatorname{sen}(2\pi n t/T)\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \frac{T(1-\cos(2\pi n a/T))}{2\pi^2 n^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2(\pi n a/T)}{\pi^2 n^2 a/T}\,. \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \mathrm{d}t \,=\, \frac{a}{T}\,.$$

♦

3.2.3. Series de Fourier seno y coseno

Los coeficientes seno de una función par son nulos y los coeficientes coseno de una función impar son nulos. Esto lleva a definir las series de Fourier seno y coseno de una función como sigue.

Sea f una función definida e integrable en el intervalo $[0, L]$. Podemos *extender* f al intervalo $[-L, L]$ de las formas siguientes:

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L \leqslant x < 0 \\ f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

y

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & -L \leqslant x < 0 \\ f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

Es claro que f_1 es impar y f_2 es par y coinciden con f en $[0, L]$. La función f_1 es llamada la *extensión impar* de f y f_2 es llamada la *extensión par* de f.

- La serie de Fourier de la extensión de período $2L$ de f_1 se llama la *serie de Fourier seno* de f y viene dada por:

$$\sum_{n\geqslant 1} b_n \operatorname{sen}(\pi\, n\, t/L), \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) \operatorname{sen}(\pi\, n\, t/L)\, \mathrm{d}t$$

- La serie de Fourier de la extensión de período $2L$ de f_2 se llama la *serie de Fourier coseno* de f y viene dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(\pi\, n\, t/L), \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) \cos(\pi\, n\, t/L)\, \mathrm{d}t$$

3.3. Convergencia de las series de Fourier

Una función f se dice que es *continua a trozos* en un intervalo $[a, b]$ si hay una partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$ de forma que

- f es continua en cada intervalo $]x_i, x_{i+1}[$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, y
- f tiene límites laterales en los puntos x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Diremos que una función f es *derivable a trozos* en un intervalo $[a, b]$ si hay una partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b$ del intervalo $[a, b]$ de forma que

- f es derivable en cada intervalo $]t_i, t_{i+1}[$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, y
- La función derivada f' tiene límites laterales en los puntos t_i, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Diremos que una función es *suave a trozos* en un intervalo $[a, b]$ si es derivable a trozos en dicho intervalo y su derivada es continua a trozos.

Toda función derivable a trozos en un intervalo también es continua a trozos en dicho intervalo. Las funciones continuas a trozos en un intervalo son integrables en dicho intervalo. Además, la integral la podemos calcular como suma de integrales en cada uno de los intervalos donde la función es continua.

El siguiente resultado nos dice que en condiciones razonablemente generales la serie de Fourier de una función converge puntualmente a dicha función.

Teorema 3.6 (Riemann, Dirichlet). *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una señal periódica con período T derivable a trozos en $[0, T]$. Entonces se verifica que:*

1. *En todo punto $t \in \mathbb{R}$ donde f sea continua*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t/T} = f(t)$$

2. *Si f no es continua en un punto t entonces se verifica que:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t/T} = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

donde $f(t+)$ y $f(t-)$ son, respectivamente, los límites por la derecha y por la izquierda de f en t.

En particular, una función continua y derivable a trozos está determinada de manera única por su serie de Fourier.

3.3.1. Ejercicios

1. *a*) Sea $f(t) = \operatorname{sen}(t/3) + \operatorname{sen}(t/4)$. ¿Es f periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es su período?

   b) Sea $f(t) = \operatorname{sen}(\lambda t) + \operatorname{sen}(\mu t)$. Prueba que para que f sea periódica es necesario y suficiente que λ/μ sea un número racional.

   c) ¿Es periódica la función $f(t) = \operatorname{sen}(10t) + \operatorname{sen}\big((10 + \pi)t\big)$?

2. Considera las distintas formas de escribir la serie de Fourier de una función real periódica de período 1:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n t)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2\pi n t + \phi_n)$$

   Indica con detalle cómo se pasa de una a otra, es decir, las relaciones que hay entre los distintos coeficientes.

3. Sea f una señal derivable a trozos, c_n sus coeficientes de Fourier, a_n s y b_n sus coeficientes coseno y seno respectivamente. Justifica las siguientes afirmaciones:

   a) f es real $\iff$ $c_{-n} = \overline{c_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\iff$ $a_n \in \mathbb{R},\ b_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$

   b) f es par $c_{-n} = c_n$ $(n \in \mathbb{N})$ $\iff$ $b_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$

   c) f es impar $\iff$ $c_{-n} = -c_n$ $(n \in \mathbb{N})$ $\iff$ $a_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$

   d) f real y par $\iff$ $c_{-n} = c_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$

   e) f real e impar $\iff$ $c_{-n} = -c_n \in i\,\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$

4. Da una demostración aceptable de la **igualdad de Parseval**:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

5. Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función suave a trozos se verifica que $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En otros términos: la serie de Fourier de la derivada de f se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de f.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periódica y suave a trozos. Definamos $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $G(x) = F(x) - \widehat{f}(0)x$, es periódica y expresa sus coeficientes de Fourier por medio de los de f.

7. Calcula las series de Fourier de las extensiones periódicas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

8. Calcula la serie de Fourier coseno de la función $f(x) = x$ para $x \in [0, \pi]$.

9. Calcula la serie de Fourier seno de la función $f(x) = 1$ para $x \in [0, \pi]$.

10. Calcula la serie de Fourier seno de la función $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, \pi]$.

11. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Si los coeficientes de Fourier de una señal f son c_n, ¿cuáles son los coeficientes de Fourier de la señal trasladada $g(t) = f(t - a)$? ¿Y los de la señal $h(t) = f(a\,t)$?.

12. Calcula las series de Fourier de las funciones $|\operatorname{sen} t|$ y $|\cos t|$.

13. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 1 dada por $f(t) = t$ para $0 \leqslant t < 1$ y $f(t+1) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Utiliza la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

14. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2π dada por $f(t) = t^2$ para $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ y $f(t+2\pi) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

15. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2 dada por $f(t) = |t|$ para $-1 \leqslant t \leqslant 1$ y $f(t+2) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

16. Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \notin Z$, se define la función de período 2 $f(t) = e^{i\pi a t}$ para $-1 \leqslant t < 1$ y $f(t) = f(t+2)$. Calcula la serie de Fourier de f y utiliza la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)}$$

17. Sea $f(x) = x(1-x)$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ y consideremos la extensión impar de f de período 2.

    a) Calcula la serie de Fourier seno de f.

    b) Justifica que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

    c) Calcula la serie de Fourier coseno de $f'(x) = 1-2x$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$; y la serie de Fourier de $f''(x) = -2$.

    d) deduce de lo anterior que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

3.4. Geometría de las series de Fourier

La teoría de las series de Fourier está estrechamente relacionada con los aspectos algebraicos y geométricos de los espacios euclídeos. Lo característico de la geometría euclídea es el concepto de ortogonalidad o perpendicularidad y sus consecuencias.

Definición 3.7. Representaremos por $L^2(a,b)$ el espacio de las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ que son periódicas con periodo $b-a$ y de cuadrado integrable en $[a,b]$. Este conjunto con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por escalares complejos es un espacio vectorial complejo.

Para todo par de funciones $f,g\in L^2(a,b)$ definimos su producto escalar por:

$$(f \mid g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \tag{3.11}$$

y definimos la norma de $f\in L^2(a,b)$ por:

$$\|f\| = \sqrt{(f \mid f)} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \tag{3.12}$$

Definición 3.8. Dos funciones $f,g\in L^2(a,b)$ se llaman ortogonales si $(f \mid g)=0$ en cuyo caso escribimos $f\perp g$. Un conjunto de funciones $\mathcal{B}\subset L^2(a,b)$ se dice ortogonal si para cada par de elementos distintos $f,g\in\mathcal{B}$ se tiene que $f\perp g$. Si, además para toda función $f\in\mathcal{B}$ es $\|f\|=1$ se dice que $\mathcal{B}$ es un conjunto ortonormal de funciones. Un conjunto ortonormal, $\mathcal{B}$, con la propiedad de que la única función que es ortogonal a todas las funciones del mismo es la función nula, se llama una **base ortonormal**.

Ejemplo 3.9. En el espacio $L^2(0,T)$ un ejemplo de base ortonormal de funciones especialmente importante es la formada por las exponenciales complejas:

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathrm{e}^{2\pi i n t/T} : n\in\mathbb{Z} \right\}$$

Otro ejemplo de base ortonormal es la formada por las funciones trigonométricas:

$$\mathcal{T} = \left\{ 1,\ \sqrt{2}\cos(2n\,\pi\,t/T),\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2n\,\pi\,t/T) : n\in\mathbb{N} \right\}$$

De hecho, tenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(2n\,\pi\,t/T)\cos(2m\,\pi\,t/T)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq m \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } n=m\neq 0 \\ 1 & \text{si } n=m=0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{sen}(2n\,\pi\,t/T)\,\mathrm{sen}(2m\,\pi\,t/T)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } n=m\neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{sen}(2n\,\pi\,t/T)\cos(2m\,\pi\,t/T)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall n,m\in\mathbb{N}$$

♦

Proposición 3.10. *Supongamos que* $\mathcal{B} = \{e_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ *es un conjunto de* n *funciones ortonormales en* $L^2(a,b)$ *y sea* $\mathcal{M}$ *el subespacio vectorial engendrado por* $\mathcal{B}$. *Dada una función* $f \in L^2(a,b)$ *la función:*

$$P_{\mathcal{M}}(f) = \sum_{j=1}^{n} (f \mid e_j) e_j$$

se llama la ***proyección ortogonal*** *de* f *sobre* $\mathcal{M}$ *y tiene las propiedades siguientes:*

1. $P_{\mathcal{M}}(f) \in \mathcal{M}$.
2. $f - P_{\mathcal{M}}(f)$ *es ortogonal a* $\mathcal{M}$.
3. $\min\{\|f-g\| : g \in \mathcal{M}\} = \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|$

Demostración. La primera afirmación es evidente porque por su definición $P_{\mathcal{M}}(f)$ es combinación lineal de los vectores e_k que forman una base de $\mathcal{M}$.

Para probar la segunda afirmación basta observar que:

$$(f - P_{\mathcal{M}}(f) \mid e_k) = (f \mid e_k) - \sum_{j=1}^{n} (f \mid e_j)(e_j \mid e_k) = (f \mid e_k) - (f \mid e_k) = 0$$

lo que prueba que $f - P_{\mathcal{M}}(f)$ es ortogonal a los vectores e_k y, por tanto, también es ortogonal a cualquier combinación lineal de ellos, es decir, a cualquier vector de $\mathcal{M}$.

Para probar el punto 3 basta observar que para toda $g \in \mathcal{M}$ se verifica que los vectores $f - P_{\mathcal{M}}(f)$ y $P_{\mathcal{M}}(f) - g$ son ortogonales, por lo que:

$$\|f-g\|^2 = \|(f - P_{\mathcal{M}}(f)) + (P_{\mathcal{M}}(f) - g)\|^2 = \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \|P_{\mathcal{M}}(f) - g\|^2 \geqslant \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|^2$$

Deducimos que $\|f - P_{\mathcal{M}}(f)\| \leqslant \|f - g\|$ y que la igualdad se da si, y sólo si, $g = P_{\mathcal{M}}(f)$. □

Particularicemos el resultado anterior al espacio $L^2(0,T)$ cuando se consideran conjuntos ortonormales particulares.

Dado $N \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto ortonormal

$$\mathcal{E}_{\mathcal{N}} = \left\{ \mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T} : -N \leqslant n \leqslant N \right\}$$

En este caso, representando por $\mathbf{e_n}$ la función $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T}$, esto es $\mathbf{e_n}(t) = \mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T}$, la proyección ortogonal de f sobre $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ es la función

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N} (f \mid \mathbf{e_k})\mathbf{e_k}(t) &= \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(t)\overline{\mathbf{e_k}(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathbf{e_k}(t) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\, i\, k\, t/T}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{2\pi\, i\, k\, t/T} = \\ &= \sum_{k=-N}^{N} c_k\,\mathrm{e}^{2\pi\, i\, k\, t/T}\end{aligned}$$

Donde los coeficientes c_k viene dados por (3.6). Pero esta función es justamente el polinomio de Fourier (3.7) de orden N de f .

Dado $N \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto ortonormal

$$\mathcal{T}_{\mathcal{N}} = \left\{1,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2\pi\, n\, t/T),\ \sqrt{2}\cos(2\pi\, n\, t/T) : -N \leqslant n \leqslant N\right\}$$

En este caso, poniendo por $\mathbf{u_n}(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi\, n\, t/T)$ y $\mathbf{v_n}(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2\pi\, n\, t/T)$, tenemos que la proyección ortogonal de f sobre $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ es la función

$$\begin{aligned}
&(f \mid 1) + \sum_{n=1}^{N} (f \mid \mathbf{u_n})\mathbf{u_n}(t) + \sum_{n=1}^{N} (f \mid \mathbf{v_n})\mathbf{v_n}(t) = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \ + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(t)\,\sqrt{2}\cos(2\pi\, n\, t/T)\,\mathrm{d}t\right)\sqrt{2}\cos(2\pi\, n\, t/T) + \\
&+ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(t)\,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2\pi\, n\, t/T)\,\mathrm{d}t\right)\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2\pi\, n\, t/T) = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi\, n\, t/T) + \sum_{n=1}^{N} b_n\,\mathrm{sen}(2\pi\, i\, n\, t/T)
\end{aligned}$$

Donde los coeficientes a_n, b_n viene dados por (3.9) y (3.10). Pero esta función es justamente el polinomio de Fourier (3.8) de orden N de f.

El siguiente resultado es uno de los más notables de la teoría de series de Fourier.

Teorema 3.11 (Teorema de Riesz-Fisher). *Para toda función $f \in L^2(a,b)$ se verifica que su serie de Fourier converge a f en la norma de $L^2(a,b)$:*

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} c_k\, \mathrm{e}^{2\pi\, i\, k\, t/(b-a)}\right\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{N\to\infty}\int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} c_k\, \mathrm{e}^{2\pi\, i\, k\, t/(b-a)}\right|^2 \mathrm{d}t\ = 0.$$

La convergencia en la norma de $L^2(a,b)$ se llama *convergencia en media cuadrática* . Terminaremos esta sección con un resultado muy útil conocido con el nombre de "igualdad de Parseval".

Proposición 3.12 (Igualdad de Parseval)**.** *Para toda función $f \in L^2(a,b)$ se verifica que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{3.13}$$

La igualdad de Parseval 3.13 tiene una interpretación interesante. El número $|c_n|^2$ se interpreta como la energía del armónico $c_n\,\mathrm{e}^{i\,n\,t}$, mientras que la integral $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t$ se interpreta como la energía de la señal (en este sentido se dice que las funciones de $L^2(-\pi,\pi)$ tienen energía finita). La igualdad de Parseval expresa, pues, que la energía de la señal es igual a la suma de las energías de sus armónicos componentes.

3.4.1. Suavidad de una señal y convergencia de su serie de Fourier

La primera afirmación del siguiente resultado es consecuencia directa de la igualdad de Parseval.

Proposición 3.13. *Sean $\{c_n\}$ los coeficientes de Fourier de una función f.*

1. *Si f es una función de cuadrado integrable, en particular si es continua a trozos, se verifica que* $\lim\{c_n\} = 0$.
2. *Si f tiene $k-1$ derivadas continuas y tiene derivada de orden k continua a trozos entonces se verifica que* $\lim n^k c_n = 0$.

3.4.2. Espectro, dominio del tiempo y dominio de la frecuencia

Una señal analógica dada por medio de una función $f(t)$ se dice que está dada en *el dominio del tiempo*. Supongamos que dicha señal es T-periódica y derivable a trozos, entonces

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T}$$

en todo punto de continuidad de f. Las frecuencias de los armónicos complejos que forman esta serie son n/T. El *espectro* de f se define como el conjunto de pares $\{(n/T, c_n) : n\in\mathbb{Z}\}$. El conocimiento del espectro de la señal determina a dicha señal. Podemos considerar una función $\widehat{f}$ definida en el conjunto de las frecuencias $\{n/T : n\in\mathbb{Z}\}$ por $\widehat{f}(n/T) = c_n$. Se suele decir que dicha función representa a la señal f en el *dominio de la frecuencia*. La "gráfica" de la función $\left|\widehat{f}\right|$ se llama el *espectro de amplitudes*, y la "gráfica" de la función $\arg \widehat{f}$ se llama el *espectro de fases*.

Recuerda que si la serie de Fourier la escribimos en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2n\pi\nu t + \phi_n)$$

donde $A_n \geqslant 0$ es la amplitud del armónico n-ésimo y ϕ_n es su fase, entonces, en virtud de las igualdades 3.4 y 3.5, se verifica que $c_n = \frac{-i}{2} A_n \,\mathrm{e}^{i\,\phi_n} = \frac{1}{2} A_n \,\mathrm{e}^{i(\phi_n - \pi/2)}$; y eligiendo $\phi_n \in]-\pi/2, 3\pi/2]$ resulta que $\phi_n - \pi/2 = \arg(c_n)$, lo que justifica la terminología empleada. Ten en cuenta que para una señal real se verifica siempre que $c_n = \overline{c_{-n}}$ lo que explica el aspecto de las siguientes "gráficas". El espectro de amplitudes consiste en líneas espectrales regularmente espaciadas en las frecuencias n/T. Para $n = 1$ y $n = -1$ las líneas corresponden a la *frecuencia fundamental*. Las demás líneas son llamadas *armónicos* de la señal.

Lo interesante de estas representaciones es que para manipular una señal analógica es más fácil hacerlo en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, si la señal es un sonido las frecuencias bajas corresponden a los tonos graves y las altas a los agudos, mientras que las amplitudes representan la intensidad del sonido del armónico correspondiente.

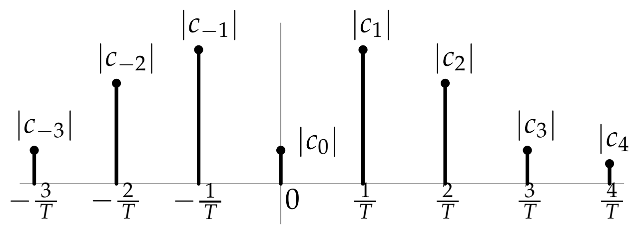


Figura 3.3: Espectro de amplitudes

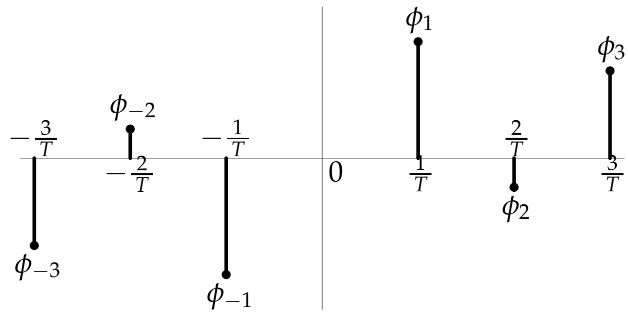


Figura 3.4: Espectro de fases

3.4.3. Ejercicios

1. Usando las propiedades algebraicas del producto escalar en $L^2(0,T)$, prueba las siguientes igualdades:

   a) $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f \mid g)$

   b) $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\,\|f\|^2 + 2\,\|g\|^2$

   c) $\|f-ig\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\,\mathrm{Im}(f \mid g)$

   d) $4(f \mid g) = \big(\,\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\,\big) + i\big(\,\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2\,\big)$

2. Comprueba que el conjunto formado por las funciones trigonométricas:

$$\{1, \cos(2\pi\, n\, t/T), \mathrm{sen}(2\pi\, n\, t/T) \,:\, n\in\mathbb{N}\}$$

   es ortogonal en $L^2(0,T)$.

3.5. Introducción a la Transformada de Fourier Discreta

Usualmente lo que conocemos de una señal es una muestra, esto es, una señal podemos verla como un vector cuyas componentes son valores de la señal en determinados instantes. Si el tamaño de la muestra es N, este vector está en el espacio vectorial N-dimensional $\mathbb{C}^N$. En términos muy generales puede afirmarse que el análisis de esta señal consiste en representarla en diferentes bases de $\mathbb{C}^N$. Estas bases se eligen de forma que la correspondiente representación pueda ser fácilmente interpretada y proporcione información útil sobre la señal. Un ejemplo de esto es la Transformada de Fourier Discreta que vamos a ver a continuación.

Supongamos que conocemos N muestras de una señal f las cuales se han tomado en instantes t_k igualmente espaciados a lo largo de un intervalo de tiempo $[0, T]$, es decir, $t_k = kT/N$, donde $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Conocemos, pues, los N números[1]:

$$f(kT/N) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Con esta información podemos calcular una aproximación de los coeficientes de Fourier de f. Para ello, podemos suponer que la señal f se repite con periodo T, en cuyo caso los coeficientes de Fourier de f vendrían dados por

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\, n\, t/T}\,\mathrm{d}t$$

Calcularemos de forma aproximada el valor de la integral. Para ello podemos proceder como sigue:

$$c_n = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{T}\int_{kT/N}^{(k+1)T/N} f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\, n\, t/T}\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N} f(kT/N)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\, n\, k/N}$$

Lo que nos lleva a tomar como una aproximación de los coeficientes c_n los números

$$Y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\, \omega^{-n\,k} \quad \text{donde } \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N} \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.14}$$

Observamos que, por ser $\omega^N = 1$, se tiene que $Y_{n+N} = Y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Es decir, la sucesión $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es periódica con período N. Por tanto, dicha sucesión repite indefinidamente los valores $(Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1})$. Definamos

$$\boldsymbol{\omega_k} = \left(1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(N-1)}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \qquad \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N}$$

Recuerda que en $\mathbb{C}^N$ el producto escalar euclídeo está dado por:

$$(\mathbf{z} \mid \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^{N-1} z_j \overline{w_j} \qquad \mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1}),\ \mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_{N-1})$$

Teniendo en cuenta que $\omega^N = 1$, es fácil comprobar que los vectores $\boldsymbol{\omega_k}$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$ son ortogonales y tienen norma igual a $\sqrt{N}$. Dichos vectores forman una base ortogonal de $\mathbb{C}^N$.

Observa que podemos escribir las igualdades (3.14) en la forma

$$Y_n = \frac{1}{N}(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\omega_n}), \qquad \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}),\ \boldsymbol{\omega_n} = (1, \omega^n, \omega^{2n}, \dots, \omega^{(N-1)n}),\ \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N} \tag{3.15}$$

de donde se deduce que $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1})$ son las coordenadas del vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ en la base $\boldsymbol{\omega_k}$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$

[1] Es usual en este contexto trabajar con índices que empiezan en 0. La gran mayoría de los textos lo hacen así.

Definición 3.14. La transformación $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ que a un vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ hace corresponder el vector $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ dado por las igualdades

$$\boxed{Y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\,\omega^{-nk} \qquad n = 0,1,2,\dots,N-1,\;\; \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N}} \tag{3.16}$$

se llama la **Transformada de Fourier Discreta** (DFT) en $\mathbb{C}^N$.

La DFT es una biyección lineal de $\mathbb{C}^N$ en $\mathbb{C}^N$ cuya inversa viene dada por

$$\boxed{y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k\,\omega^{nk} \qquad n = 0,1,2,\dots,N-1,\;\; \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N}} \tag{3.17}$$

Como ya hemos dicho antes, la DFT de un señal discreta $(y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ se considera siempre como una señal discreta periódica con periodo N. A su vez, las igualdades (3.17), nos dicen que debemos interpretar la señal $(y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ como una señal discreta periódica con periodo N.

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{k=0}^{N-1} Y_k\,\omega^{nk} = \sum_{k=0}^{N/2} Y_k\,\omega^{nk} + \sum_{k=N/2+1}^{N} Y_{k-N}\omega^{n(k-N)} = \\ &= \sum_{k=0}^{N/2} Y_k\,\omega^{nk} + \sum_{k=-N/2+1}^{-1} Y_k\omega^{nk} = Y_0 + (-1)^n Y_{N/2} + \sum_{k=1}^{N/2-1}\left(Y_k\,\omega^{nk} + Y_{-k}\omega^{-nk}\right) \end{aligned}$$

Esto nos dice que la segunda mitad de la DFT, es decir, los coeficientes Y_k para $N/2+1 \leqslant k \leqslant N-1$, corresponde a frecuencias negativas que se combinan con las positivas para reconstruir la señal original. En otras palabras, estos coeficientes no aportan frecuencias nuevas.

Es importante observar también que el polinomio trigonométrico

$$P(t) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} Y_k\,\mathrm{e}^{2i\pi\,tk/T} = Y_0 + Y_{N/2}\,\mathrm{e}^{2i\pi\,tN/2T} + \sum_{k=1}^{N/2-1}\left(Y_k\,\mathrm{e}^{2i\pi\,tk/T} + Y_{-k}\,\mathrm{e}^{-2i\pi\,tk/T}\right) \tag{3.18}$$

verifica, en virtud de (3.17), que $P(nT/N) = y_n$ para $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Dicho polinomio está determinado de forma única por la DFT.

3.5.1. Observaciones

• La definición que hemos dado de la DFT es la más usual aunque adolece de cierta falta de simetría debido al factor de escala $1/N$ que figura en la transformada directa pero no en su inversa. De hecho, la definición de la DFT puede variar de unos textos a otros. Es frecuente ortonormalizar la base formada por los vectores ω_k, esto es, considerar la base ortonormal formada por los vectores $\frac{1}{\sqrt{N}}\omega_k$. Con ello se consigue que en las fórmulas anteriores figure como factor de escala en ambas $1/\sqrt{N}$.

• Aunque hemos supuesto al principio que el vector $\mathbf{y}$ se obtenía tomando N valores igualmente espaciados de una función periódica a lo largo de un período, es claro que se trataba nada más que de una motivación inicial. La TFD (transformada de Fourier discreta) no tiene ninguna limitación: el vector $\mathbf{y}$ puede ser cualquier elemento de $\mathbb{C}^N$. De hecho, la TFD se utiliza para intentar averiguar las frecuencias presentes en series de datos de cualquier naturaleza. Pero hay un convenio que se sigue siempre cuando se trabaja con la TFD y que consiste en considerar que el vector $\mathbf{y} = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}\}$ *es una muestra de una sucesión infinita periódica de período* N. Es decir, dado un entero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$, definimos $y_k = y_q$ donde $0 \leqslant q \leqslant N-1$ es el resto de la división de k por N. También sabemos que el vector $\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y})$ verifica que $Y_{k+N} = Y_k$, es decir, es periódico con período N. *Esta propiedad se expresa diciendo que la TFD transforma señales periódicas discretas en el dominio del tiempo en señales periódicas discretas en el dominio de la frecuencia.*

• El espectro de la señal $\mathbf{y}$ es el conjunto $\{(n/N, Y_n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Los espectros de amplitudes y de fases son, respectivamente, los conjuntos $\{(n/N, |Y_n|) : n \in \mathbb{Z}\}$ y $\{(n/N, Arg(Y_n)) : n \in \mathbb{Z}\}$. Dichos conjuntos suelen representarse por segmentos de línea que unen los puntos $(n/N, 0)$ con los puntos del espectro correspondiente. Debido a la periodicidad de los Y_n es suficiente representar dichos espectros para N valores consecutivos de n.

• **Para señales $\mathbf{y}$ reales** se verifica que $Y_{-n} = \overline{Y}_n$ donde la barra indica complejo conjugado. Como $Y_{-n} = Y_{N-n}$ haciendo $n = N/2 - k$ obtenemos que $Y_{N/2+k} = \overline{Y}_{N/2-k}$ de donde se deduce que

$$|Y_{N/2+k}| = |Y_{N/2-k}| \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Arg}(Y_{N/2+k}) = \operatorname{Arg}(\overline{Y}_{N/2-k}) = -\operatorname{Arg}(Y_{N/2-k}) \tag{3.19}$$

esto es **el espectro de amplitudes es simétrico respecto a $N/2$ y el espectro de fases es antisimétrico respecto a $N/2$**. Por esta razón, como en la práctica siempre se trabaja con señales reales, *es costumbre representar solamente la mitad más uno de los puntos de dichos espectros correspondientes a los valores* $0, 1, 2, \dots, N/2$. Los cuales son suficientes para recuperar la señal original combinándolos con sus conjugados que representan frecuencias negativas.

• Hay una estrecha analogía entre la DFT y las series de Fourier.

Series de Fourier.

- Se considera una señal *continua* en el dominio del tiempo, f, con período T y, por tanto, con frecuencia $1/T$ expresada en Hercios (ciclos por segundo).
- Se trata de descomponer dicha señal como una serie de señales con frecuencias n/T (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental). La señal modelo con frecuencia n/T

(ciclos por segundo) es $\operatorname{sen}(2\pi\, n\, t/T)$. La forma compleja de dicha señal es la función $\mathbf{e}_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/T}$.

- El *peso* que la componente de frecuencia n/T tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:
$$c_n = (f \mid \mathbf{e}_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\, i\, n\, t/T}\,\mathrm{d}t$$
- La serie que representa a la señal f es $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{2\pi\, i\, k\, t/T}$. Dicha serie proporciona el espectro de la señal y constituye la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.
- En el contexto de las series de Fourier las igualdades:
$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\mathrm{d}t \tag{3.20}$$
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T} \tag{3.21}$$
se llaman, respectivamente, las ecuaciones de análisis y de síntesis.

Transformada de Fourier Discreta.

- Se considera una señal discreta $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots y_{N-1})$ formada por N valores que se interpretan como un período de una señal discreta periódica de período N.
- Se trata de descomponer dicha señal como una suma de señales con frecuencias n/N (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $1/N$). La señal *continua* modelo con frecuencia n/N (ciclos por segundo) es $\operatorname{sen}(2\pi\, n\, t/N)$. La forma compleja de dicha señal es $\mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/N}$. Puesto que de la señal original solamente conocemos un período formado por N valores consecutivos, lo que hacemos es discretizar la señal $\mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, t/N}$ evaluándola en $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ y obtenemos así el vector
$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}} = (1, \mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\,/N}, \mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\, 2/N}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi\, i\, n\,(N-1)/N})$$
- El *peso* que la componente de frecuencia n/N tiene en nuestra señal viene dado por:
$$Y_n = \frac{1}{N}(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\,\mathrm{e}^{-2i\pi\, n\, k/N}$$
- La señal discreta $\mathbf{y}$ puede expresarse en la forma $\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}}$. Dicha igualdad se interpreta como la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.

- Los coeficientes Y_n se llaman *coeficientes espectrales* de la señal $\mathbf{y}$. Las igualdades:

$$Y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\, \mathrm{e}^{-2i\pi\, n\, k/N}, \qquad n = 0,1,2,\dots,N-1 \tag{3.22}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k\, \mathrm{e}^{2i\pi\, n\, k/N}, \qquad n = 0,1,2,\dots,N-1 \tag{3.23}$$

se llaman, respectivamente, la *ecuación de análisis* y la *ecuación de síntesis*. La frecuencia fundamental en (3.23) es $\omega = 1/N$.

3.5.2. Convolución y DFT

Como acabamos de explicar, interpretamos los elementos de $\mathbb{C}^N$ como sucesiones periódicas con período N. Esto justifica la siguiente definición.

Dado $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ y un entero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$, definimos $y_k = y_q$ donde q es el resto de la división de k por N ($0 \leqslant q \leqslant N-1$).

Se define la convolución[2] (llamada a veces convolución circular o periódica o cíclica) de dos elementos de $\mathbb{C}^N$, $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ e $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ como el elemento $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ de $\mathbb{C}^N$ definido por:

$$z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Es inmediato que z_k es una sucesión periódica con período N. Escribiremos simbólicamente $\mathbf{z} = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$.

Fijado un vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$, la aplicación que a un vector $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ hace corresponder el producto de convolución $\mathbf{z} = \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$ es una aplicación lineal de $\mathbb{C}^N$ en $\mathbb{C}^N$ que podemos escribir en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_{N-1} & \cdots & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 & \cdots & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & y_{N-3} & \cdots & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Las propiedades del producto de convolución se deducen fácilmente de la siguiente importante propiedad.

[2] Este es uno de los distintos tipos de convolución más frecuentes. Las operaciones de convolución son muy usadas en el procesamiento de señales digitales. Los tipos de filtros más frecuentes actúan sobre la señal de entrada "input" haciendo una convolución con la función "respuesta impulsiva" del filtro.

Dados dos vectores $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ y $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ en $\mathbb{C}^N$ notaremos por $\mathbf{ab} \in \mathbb{C}^N$ su **producto puntual**:

$$\mathbf{ab} = (a_0 b_0, a_1 b_1, \ldots, a_{N-1} b_{N-1})$$

Proposición 3.15. *Sean* $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$ *vectores en* $\mathbb{C}^N$. *Entonces se verifica que:*

$$\mathcal{F}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = N\mathcal{F}(\mathbf{x})\mathcal{F}(\mathbf{y}), \qquad \mathcal{F}(\mathbf{xy}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) \odot \mathcal{F}(\mathbf{y}) \tag{3.25}$$

3.5.3. Ejercicios

1. Comprueba que los vectores

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{k}} = \big(1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{k(N-1)}\big), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \qquad \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N}$$

   forman una base ortogonal de $\mathbb{C}^N$.

2. Recuerda que consideramos los elementos de $\mathbb{C}^N$ como sucesiones periódicas con período N. Explícitamente: dado $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ y un entero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$, definimos $y_k = y_q$ donde $0 \leqslant q \leqslant N-1$ es el resto de la división de k por N. Por ejemplo, $y_{-1} = y_{N-1}, y_{-2} = y_{N-2}, y_N = y_0, y_{N+1} = y_1$.

   Se dice que la sucesión (y_n) es par si $y_{-n} = y_n$ y se dice que es impar si $y_{-n} = -y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

   Supongamos que $(y_n) \xmapsto{\mathcal{F}} (Y_n)$. Prueba que:

   a) $(y_{-n}) \xmapsto{\mathcal{F}} (Y_{-n})$
   b) $(\overline{y}_n) \xmapsto{\mathcal{F}} (\overline{Y}_{-n})$
   c) $(\overline{y}_{-n}) \xmapsto{\mathcal{F}} (\overline{Y}_n)$
   d) (y_n) es par (impar) $\iff$ (Y_n) es par (impar).
   e) (y_n) es real $\iff$ $Y_{-n} = \overline{Y}_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
   f) (y_n) es real y par $\iff$ (Y_n) es real y par.
   g) (y_n) es real e impar $\iff$ (Y_n) es imaginario puro e impar.

3. Calcula la transformada de Fourier discreta de las siguientes sucesiones:

   a) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
   b) $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$
   c) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$
   d) $(1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)$
   e) $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$

4. Justifica que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2$.

5. Sea $\mathbf{Z} = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbf{y}))$. Calcula las componentes Z_k de $\mathbf{Z}$ en función de las componentes y_n de $\mathbf{y}$.

3.6. Transformada de Fourier

Definición 3.16. La transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es la función $\widehat{f} = \mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\widehat{f}(s) = \mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i s t} f(t)\, \mathrm{d}t \qquad (s \in \mathbb{R}) \tag{3.26}$$

3.6.0.1. Comentarios

- Usaremos las notaciones $\widehat{f}$ y $\mathcal{F}f$ para representar la transformada de Fourier de la señal f. A veces conviene escribir $\mathcal{F}f$ en la forma $\mathcal{F}(f)$ para indicar claramente que $\mathcal{F}f$ es la transformada de Fourier de la función f.

- El parámetro "s" en la definición 3.26 se interpreta como frecuencias. La función $\widehat{f}$ se interpreta como la representación de la señal f en el dominio de la frecuencia.

- La transformada de Fourier convierte una señal, $f(t)$, dada en el dominio del tiempo en otra señal, $\widehat{f}(s)$, en el dominio de la frecuencia.

- Representaremos por $L^1(\mathbb{R})$ el espacio de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$. Para que la definición 3.26 tenga sentido es condición suficiente que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

- Para calcular la transformada de Fourier de una función tenemos libertad para modificar como queramos dicha función en un conjunto siempre que ello no afecte al valor de la integral. Por ejemplo, podemos cambiar el valor de la función en cualquier conjunto finito de puntos. Por eso, para calcular la transformada de Fourier de una función no es imprescindible que la función esté definida en todo $\mathbb{R}$, es suficiente, por ejemplo, que esté definida en todo $\mathbb{R}$ excepto en un conjunto finito de puntos.

- No hay acuerdo unánime sobre la definición de la transformada de Fourier. Algunos detalles sobre los que los distintos autores no se ponen de acuerdo son: el signo en la exponencial, multiplicar la integral por $1/2\pi$ o por $1/\sqrt{2\pi}$, incluir o no incluir 2π en el exponente de la exponencial.

3.6.0.2. La transformada inversa de Fourier

La transformada de Fourier permite analizar una señal f por sus componentes de frecuencia. El conjunto $\Omega(f) = \left\{s \in \mathbb{R} : \widehat{f}(s) \neq 0\right\}$ se llama espectro continuo de la señal f. Cada frecuencia $s \in \Omega(f)$ tiene como amplitud $\left|\widehat{f}(s)\right|$ y su fase es $\arg \widehat{f}(s)$. La señal f queda caracterizada completamente por $\widehat{f}$ en el sentido de que el conocimiento de $\widehat{f}$ permite recuperar f.

Definición 3.17. La transformada inversa de Fourier de una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es la función $\check{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\check{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i s t} g(s)\, \mathrm{d}s \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{3.27}$$

Es usual usar la notación $\check{g} = \mathcal{F}^{-1} g$ para representar la transformada de Fourier inversa de g. Se verifica el siguiente importante resultado.

Teorema 3.18 (de inversión de Fourier)**.** *Si f es una señal suave a trozos tal que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y también $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, se verifica que:*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i s t} \widehat{f}(s)\, \mathrm{d}s \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{3.28}$$

En particular, en todo punto $t \in \mathbb{R}$ en el que f sea continua es

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i s t} \widehat{f}(s)\, \mathrm{d}s \tag{3.29}$$

La igualdad (3.26) se llama la *ecuación de análisis* y la igualdad (3.29) se llama *ecuación de síntesis*. Observa que la ecuación de síntesis permite reconstruir una señal no periódica a través de sus componentes de frecuencia y puede verse como una "versión continua" de la representación de una señal periódica por su serie de Fourier.

Explícitamente, la igualdad (3.29) afirma que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i s u} f(u)\, \mathrm{d}u \right] \mathrm{e}^{2\pi i s t}\, \mathrm{d}s \tag{3.30}$$

Evidentemente, es más cómodo escribir esta igualdad en la forma:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f) \tag{3.31}$$

Es notable la simetría que hay entre la transformada de Fourier y su inversa: solamente se diferencian por un cambio de signo en la exponencial. De hecho, se verifica también la igualdad:

$$g = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1} g) \tag{3.32}$$

La transformada de Fourier es una operación que regulariza y suaviza las funciones. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

Teorema 3.19. *La transformada de Fourier de una señal integrable, $f \in L^1(\mathbb{R})$, es una función continua, acotada y* $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \mathcal{F}f(s) = 0$.

3.6.1. Propiedades de la transformada de Fourier

Algunas de las propiedades que siguen son generales, es decir, se satisfacen solamente con la hipótesis de que las funciones que en ellas intervienen estén en $L^1(\mathbb{R})$ para que sus correspondientes transformadas estén definidas. Otras propiedades requieren hipótesis adicionales en las que no vamos a entrar. Te aconsejo que aprendas estas propiedades como un formalismo útil para calcular transformadas de Fourier. Para ello tendrás que memorizar las transformadas de Fourier de unas pocas funciones básicas y a partir de ellas aplicando las propiedades que siguen, *sin necesidad de calcular integrales*, podrás deducir las transformadas de Fourier de muchísimas funciones más.

Linealidad. La transformada de Fourier es un operador lineal. Esto quiere decir que si α y β son números y f, g señales, se verifica la igualdad:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g$$

Propiedades de simetría

De las definiciones dadas para la transformada de Fourier y su inversa:

$$\mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i s t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{F}^{-1}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i s t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t + i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

y teniendo en cuenta que el coseno es par y el seno impar, se deducen las siguientes propiedades de simetría.

1. $\mathcal{F}f(s) = \mathcal{F}^{-1}f(-s)$.
2. **Regla de inversión**. $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(s) = f(-s)$.
3. Si la función f es par entonces se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   por lo que

$$\mathcal{F}f(s) = \mathcal{F}^{-1}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

   y la transformada de Fourier de f coincide con su transformada inversa y es una función par.

4. Análogamente, si f es impar su transformada de Fourier también es impar y:

$$\mathcal{F}f(s) = -\mathcal{F}^{-1}f(s) = i\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi\, s\, t) f(t)\,\mathrm{d}t \; = 2i\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi\, s\, t) f(t)$$

5. Si f es real entonces $\mathcal{F}f(-s) = \overline{\mathcal{F}f(s)}$.

6. Si f es real y par su transformada de Fourier también es real y par.

7. Si f es real e impar su transformada de Fourier es impar y toma valores imaginarios puros.

Las siguientes dos propiedades se obtienen fácilmente con un sencillo cambio de variable.

Traslación en el tiempo. Dado un número $a \in \mathbb{R}$ y una señal f, definimos la señal $\tau_a f$ por:

$$\tau_a f(t) = f(t-a)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\tau_a f}\;(s) = \mathrm{e}^{-2\pi\, i\, a\, s}\,\widehat{f}(s)$$

Es decir, una traslación en el tiempo produce un cambio de fase en la transformada.

Cambio de escala o dilatación. Dado un número $a \in \mathbb{R}^*$ y una señal f, definimos la señal $\sigma_a f$ por:

$$\sigma_a f(t) = f(at)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\sigma_a f}\;(s) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\Big(\frac{s}{a}\Big)$$

Es decir una dilatación ($a > 1$) o una compresión ($a < 1$) en el dominio del tiempo se corresponde con una compresión o dilatación en el dominio de la frecuencia más un cambio de escala.

Propiedad de modulación. Dado $a \in \mathbb{R}$, y una señal f, se verifica que la transformada de Fourier de la función $g(t) = \mathrm{e}^{2\pi\, i\, a\, t}\, f(t)$ es la función $\tau_a\widehat{f}$.

Esta propiedad es inmediata pues:

$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\, i\, s\, t}\, f(t)\,\mathrm{e}^{2\pi\, i\, a\, t}\,\mathrm{d}t \;= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\, i(s-a)t}\, f(t)\,\mathrm{d}t \;= \widehat{f}(s-a)$$

La aplicación de la transformada de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales se basa en la siguiente propiedad.

Propiedad de derivación

$$\mathcal{F}(f')(s) = 2\pi i s \mathcal{F}f(s) \qquad \mathcal{F}(-2i\pi\, t f(t))(s) = (\mathcal{F}f)'(s)$$

Igualdad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(s)\overline{\mathcal{F}g(s)}\,\mathrm{d}s$$

En particular

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(s)|^2\,\mathrm{d}s$$

3.6.2. Ejemplos

Ejemplo 3.20 (La función pulso rectangular). Es la función dada por

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Para calcular su transformada de Fourier no es preciso definir dicha función en los puntos $\pm\frac{1}{2}$ pero, para recuperar esta función por medio de una transformada de Fourier es necesario definir su valor en dichos puntos igual a $1/2$. Como se trata de una función par su transformada de Fourier viene dada por:

$$\widehat{\Pi}(s) = 2\int_0^{\infty} \Pi(t)\cos(2\pi s\,t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1/2} \cos(2\pi s\,t)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi s\,t)}{2\pi s}\right]_{t=0}^{t=1/2} = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$$

♦

Ejemplo 3.21 (La función "cardinal seno" o "función de muestreo"). Es la función dada para todo $t \in \mathbb{R}$ por

$$\operatorname{senc}(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t}$$

por supuesto, $\operatorname{senc}(0) = 1$.

La transformada de Fourier de esta función se deduce fácilmente de que, según acabamos de ver, $\widehat{\Pi} = \operatorname{senc}$ y, como la función Π es par, obtenemos

$$\mathcal{F}\operatorname{senc} = \mathcal{F}(\mathcal{F}\Pi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\Pi) = \Pi.$$

♦

Ejemplo 3.22 (Decaimiento exponencial truncado). Es la función dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

Podemos calcular su transformada de Fourier directamente:

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i s t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{(-2\pi i s - 1)t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-2\pi i s}}{1+2\pi i s}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{1+2\pi i s}$$

♦

Ejemplo 3.23 (La función de Laplace). Es la función dada por

$$g(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$$

Para calcular su transformada de Fourier observamos que $g(t) = f(t) + f(-t)$ donde f es el decaimiento exponencial truncado. Deducimos que:

$$\widehat{g}(s) = \widehat{f}(s) + \widehat{f}(-s) = \frac{1}{1 + 2\pi i s} + \frac{1}{1 - 2\pi i s} = \frac{2}{1 + 4\pi^2 s^2}$$

♦

Ejemplo 3.24 (La función gausiana unidad). Es la función definida por:

$$f(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

Esta función tiene la notable propiedad de ser invariante para la transformada de Fourier: su transformada de Fourier es ella misma. Para calcularla podemos usar el hecho de que $f'(t) = -2\pi t f(t)$ y tomar transformadas de Fourier en ambos lados de esta igualdad con lo que, en virtud de la propiedad de derivación, resulta:

$$2\pi i s \widehat{f}(s) = \frac{1}{i} \widehat{f}'(s)$$

Es decir

$$\widehat{f}'(s) + 2\pi s \widehat{f}(s) = 0$$

Deducimos de aquí que la función $\widehat{f}(s)\,\mathrm{e}^{\pi s^2}$ tiene derivada nula por lo que

$$\widehat{f}(s) = \widehat{f}(0)\,\mathrm{e}^{-\pi s^2} = \mathrm{e}^{-\pi s^2} = f(s)$$

Donde hemos usado el resultado bien conocido $\widehat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.

♦

3.6.3. Ejercicios

1. Supongamos que reproduces en un magnetofón una cinta a velocidad doble de la velocidad a que se ha grabado. Interpreta lo que ocurre mediante la propiedad de cambio de escala o dilatación de la transformada de Fourier.

2. Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, calcula, sin hacer integrales, la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

   a) $\Pi_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a/2 \\ 0, & |t| \geqslant a/2 \end{cases}$

   b) $f(t) = \Pi\big((t-b)/c\big)$ donde Π es la función "pulso rectangular".

c) $f(t)$ es una función escalonada $f(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \Pi\left(\frac{x - b_n}{c_n}\right)$.

d) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & x < 0 \text{ o } x > 2 \end{cases}$

e) $f(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & |t| < a/2 \\ 0, & |t| \geqslant a/2 \end{cases}$

f) $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, \mathrm{e}^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}$

g) $f(t) = \cos(2\pi\beta t)\, \mathrm{e}^{-\pi(x/\alpha)^2}$

h) $f(t) = \dfrac{1}{1 + 2\pi i t}$

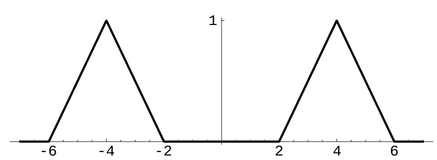
i) $f(t) = 2t\, \mathrm{e}^{-\pi t^2}$

3. Calcula mediante integración la transformada de Fourier de la "función triángulo" definida por:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leqslant 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

4. a) Supuesto conocida la transformada de Fourier de una señal f, calcula la transformada de Fourier de la señal $g(t) = f(t)\cos(2\pi a t)$.

   b) Calcula la señal (en el dominio del tiempo) cuya transformada de Fourier tiene la gráfica siguiente.



3.7. Convolución y transformada de Fourier

Procesar una señal consiste en modificar sus componentes de frecuencia. Si la señal es analógica y su transformada de Fourier es

$$\widehat{f}(s) = \left|\widehat{f}(s)\right| \mathrm{e}^{i\,\vartheta(s)}$$

donde $\vartheta(s) = \arg \widehat{f}(s)$, podemos estar interesados en modificar las amplitud $\left|\widehat{f}(s)\right|$, o las fases $\arg \widehat{f}(s)$ correspondientes a cada frecuencia s, para obtener una nueva señal que podemos representar en la forma:

$$\rho(s) \left|\widehat{f}(s)\right| \mathrm{e}^{i\,\varphi(s)}\, \mathrm{e}^{i\,\vartheta(s)}$$

donde la función $\rho(s) \geqslant 0$ da cuenta del cambio producido en la amplitud, y la función $\mathrm{e}^{i\,\varphi(s)}$ da cuenta del cambio producido en la fase. Esto nos lleva a considerar la función $\rho(s)\,\mathrm{e}^{i\,\varphi(s)}$ y a concluir que $\widehat{f}\,(s)\rho(s)\,\mathrm{e}^{i\,\varphi(s)}$ es la transformación más general que podemos hacer sobre nuestra señal modificando amplitudes y fases. Es natural interpretar la función $\rho(s)\,\mathrm{e}^{i\,\varphi(s)}$ como la transformada de Fourier de una señal analógica $g(t)$, por tanto $g(t) = \mathcal{F}^{-1}(\rho(s)\,\mathrm{e}^{i\,\varphi(s)})(t)$, y a preguntarnos qué operación debemos hacer con las señales $f(t)$ y $g(t)$ para obtener una nueva señal cuya transformada de Fourier sea precisamente $\widehat{g}\,(s)\widehat{f}\,(s)$. Está claro que dicha operación será el modelo más general del procesamiento de señales. Calculemos $\widehat{g}\,(s)\widehat{f}\,(s)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{g}\,(s)\widehat{f}\,(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i s t}\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i s x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i s t}\,\mathrm{e}^{-2\pi i s x}\,\mathrm{d}t\right] f(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i s(t+x)}\,\mathrm{d}t\right] f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u-x)f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i s u}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(u-x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i s u}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(u-x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-2\pi i s u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Pero esto que hemos obtenido es justamente la transformada de Fourier de la función

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(u-x)\,\mathrm{d}x$$

Definición 3.25. La convolución de dos señales f y g es la función

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x \qquad t\in\mathbb{R}$$

dicha función se representará por $f * g$ y se llama la convolución de f y g.

Deducimos de lo anterior el siguiente resultado que expresa que la convolución en el dominio del tiempo se corresponde con la multiplicación en el dominio de la frecuencia.

Teorema 3.26 (de convolución)**.** *$\mathcal{F}(f * g)(s) = \mathcal{F}f(s)\mathcal{F}g(s)$.*

Teniendo en cuenta la simetría entre la transformada de Fourier y su inversa, también se verifica la igualdad:

$$\mathcal{F}^{-1}(f * g) = (\mathcal{F}^{-1}f)(\mathcal{F}^{-1}g)$$

y, lo que es más interesante:

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$$

es decir, la multiplicación en el dominio del tiempo se corresponde con la convolución en el dominio de la frecuencia.

3.7.0.1. ¿Qué es la convolución?

Es la segunda vez que aparece en este curso la operación de convolución. En la lección anterior vimos la convolución cíclica de dos señales periódicas discretas y ahora surge la convolución de dos señales continuas no periódicas. Entre ambas hay ciertas analogías y ambas se comportan igual respecto a las respectivas transformadas de Fourier discreta o continua. No son estos los únicos tipos de convolución que se consideran. La convolución de funciones es una herramienta muy versátil que tiene distintos significados en distintos campos y no admite una interpretación única. Se trata de una operación que no es fácilmente visualizable y que tiene cierta complicación: para calcular el valor de la convolución de dos funciones en un solo punto hay que usar todos los valores de ambas funciones y realizar una integración. En la figura 3.5 tienes un intento de visualización del cálculo de la convolución de la función pulso rectangular, Π, consigo misma en el punto $x = 0.75$.

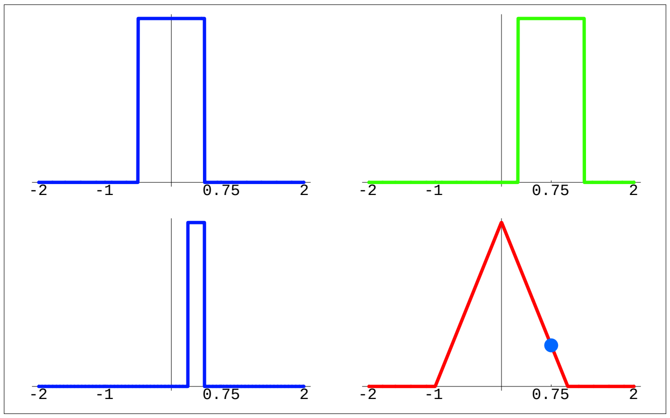


Figura 3.5: Gráficas de $\Pi(x)$ (azul), $\Pi(0.75 - x)$ (verde), $\Pi(x)\Pi(0.75 - x)$ (azul), $\Pi * \Pi(x)$ (rojo). El punto azul es el valor $\Pi * \Pi(0.55)$

Observa que aunque la función pulso rectangular es discontinua en los puntos $\pm 1/2$ su convolución es la función triángulo que es continua. Esta es una propiedad importante de la convolución: *la convolución de dos funciones es una función al menos tan buena como la mejor de ambas*.

Podemos ver la convolución como una operación para promediar y suavizar una función por medio de otra. Consideremos que g es una función positiva, concentrada cerca de 0, con área total igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Por ejemplo, g podría ser una campana de Gauss alta y estrecha centrada en 0. En tal caso, la función $x \mapsto g(t - x)$ está concentrada cerca de t y sigue teniendo área total 1. La integral

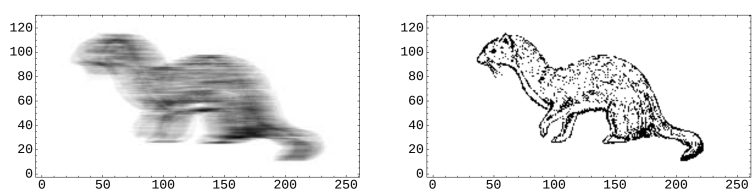
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

puede interpretarse como un *promedio* de los valores de $f(x)$ cerca de $x = t$ *ponderado* por los valores de $x \mapsto g(t - x)$. Si nos movemos a otro punto t' cercano a t y calculamos el valor, $f * g(t')$, de la convolución en t', repetiremos la operación anterior, es decir, calcularemos una media ponderada de los valores de f cerca de t' y dicha media incluirá, si t' está cerca de t, valores de f que ya se usaron en el anterior promedio. Por ello, cabe esperar que los valores de la convolución $f * g(t)$ y $f * g(t')$ estén más próximos que $f(t)$ y $f(t')$. Es decir, $f * g(t)$ *suaviza* f.

Por otra parte, este proceso de *promediar y regularizar* es lo que hacen los instrumentos de medida. Por ejemplo, cuando usamos un termómetro para medir la temperatura en un punto del espacio lo que estamos midiendo realmente es un promedio. Eso se debe a que el termómetro no mide la temperatura solamente en un punto, sino que la información que proporciona es realmente un promedio de las temperaturas en una pequeña región del espacio. La manera de realizar este promedio depende de las características físicas del instrumento y dicho promedio se realiza de igual forma en cualquier punto donde situemos el termómetro. De esta forma se entiende que los datos que proporciona el termómetro son el resultado de una convolución de la función temperatura con otra función, que podemos interpretar como una función de densidad de probabilidad - una gausiana -, que es característica del instrumento concreto que usemos. Cuanto más preciso sea el termómetro más alta y estrecha será esta gausiana y más *"concentrada"* será la lectura que se realice.

Las razones anteriores explican por qué la convolución aparece en contextos tan diversos. En algunas aplicaciones como, por ejemplo, en restauración de imágenes, lo que se quiere es invertir el proceso antes descrito, es decir, se dispone de una señal f que está "contaminada" por su convolución con otra señal g de manera que lo que nosotros recibimos es la señal $h = f * g$. La señal g se interpreta como un "ruido" y pueden hacerse hipótesis sobre su naturaleza para intentar separar la señal f del ruido g que la "contamina". En estos casos lo que se quiere es invertir un proceso de convolución.

Aquí puedes ver dos fotografías de una comadreja. La primera de ellas está "corrida" debido a un pequeño movimiento de la cámara que tomó la foto. Esto es una convolución. La segunda es el resultado de someter los datos de la foto a una de-convolución.



3.7.0.2. Propiedades de la convolución

La operación de convolución se comporta de forma parecida a la multiplicación. Concretamente, se verifican las siguientes propiedades:

- **Conmutativa.** $f * g = g * f$.
- **Asociativa.** $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- **Distributiva.** $(f + g) * h = f * h + g * h$.

La última propiedad es inmediata y las otras dos son consecuencia fácil del teorema de convolución.

3.7.1. Convolución y Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI)

Un **filtro** es un sistema LTI que además es estable.

Nuestro propósito es ver que los filtros lo que hacen es una convolución de la señal de entrada con una función que se llama la *respuesta impulsiva* del filtro. Consideremos primero filtros discretos y después filtros analógicos.

3.7.1.1. Respuesta impulsiva de un filtro discreto

Representaremos las señales discretas por funciones definidas en $\mathbb{Z}$ con valores en $\mathbb{C}$. Dadas dos señales $u, v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ se define su convolución como la señal z dada por

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)v(n-k) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

supuesto, claro está, que dicha serie converge para todo $n \in \mathbb{Z}$. La señal z se llama la *convolución* de las señales u y v y se representa por $u * v$. Esta convolución de sucesiones tiene análogas propiedades a la convolución de funciones por medio de una integral.

La señal $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definida por $\delta(n) = 0$ para $n \neq 0$ y $\delta(0) = 1$ se llama señal *impulso unidad* o señal *delta de Dirac discreta*. Dada una señal discreta $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica la igualdad:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

pues dicha suma consta realmente de un único sumando no nulo que se obtiene para $k = n$. Representaremos por δ_k la función $\delta_k(n) = \delta(n-k)$, es decir, con la notación ya usada varias veces, $\delta_k = \tau_k\delta$. La igualdad anterior nos dice que la sucesión de funciones $x_N = \sum_{k=-N}^{N} x(k)\delta_k$ converge *puntualmente* a la función x.

Supongamos ahora que $L : X \to Y$ un filtro donde X e Y son espacios vectoriales normados de sucesiones y que se verifica que x_N converge a x en la norma de X (es decir, $\|x_N - x\| \to 0$). Entonces, la linealidad y continuidad de L permite escribir:

$$L\,x = L\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} x(k)\delta_k\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} x(k)L\,\delta_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)L\,\delta_k$$

Como L es invariante en el tiempo se verifica que $L\,\delta_k = L(\tau_k\delta) = \tau_k(L\,\delta)$. Poniendo $y = L\,x$, y llamando $h = L\,\delta$, la igualdad anterior nos dice que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica que:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(\tau_k h)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Es decir, $y = x * h$. En consecuencia, la función h, que es es la respuesta del filtro a la función impulso unidad, caracteriza al filtro. Dicha función se llama la función *respuesta impulsiva* del filtro.

3.7.1.2. Respuesta impulsiva de un filtro analógico

Para un filtro analógico se demuestra que hay una función h llamada la *respuesta impulsiva* del filtro con la propiedad de que la respuesta, $y(t)$, del filtro a una entrada $x(t)$, viene dada por la convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)\,\mathrm{d}s = (x*h)(t)$$

Resulta así que todo filtro actúa por convolución.