CURSO DE VARIABLE COMPLEJA

Francisco Javier Pérez González

Universidad de Granada

Asignatura: Métodos Matemáticos I
Curso: Segundo
Titulación: Grado en Física

Septiembre de 2012

Índice general

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

El camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa con frecuencia por el análisis complejo.
Jaques Hadamard

Un poco de historia

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que *"ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación"* y acuñó el calificativo *"imaginarias"* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución de un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibniz *"el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser."*

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la *"naturaleza"* de los mismos; no se preguntaron "¿qué es un número complejo?", sino que se dijeron *"a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos"*. Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el resultado conocido como *Teorema Fundamental del álgebra* que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos*. Merece la pena que entiendas bien lo que afirma este resultado. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x+3=0, \quad 2x+3=0, \quad x^2-2=0, \quad x^2+2x+2=0$$

Cuyas soluciones

$$x=-3, \quad x=-3/2, \quad x=\pm\sqrt{2}, \quad x=-1\pm i$$

tienen sentido cuando x es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5+(1-i)x^4+(1/5-i\sqrt{2})x^2-8x+3-i/\sqrt{3}=0$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema Fundamental del álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de *"números complejos"* se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "i" que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Los números complejos son una herramienta básica de cálculo. Son especialmente útiles para trabajar con funciones sinusoidales, y por eso se hace uso constante de ellos siempre que representamos una señal por medio de dichas funciones, y no hay que olvidar que ése es el propósito básico de los *"métodos de Fourier"*. La *Transformada de Fourier Discreta*, una herramienta fundamental en el tratamiento digital de señales, toma valores complejos. Las *transformadas de Fourier y de Laplace* son funciones complejas. La *transformada z*, al igual que otras transformadas de uso frecuente, se define como una serie de números complejos. La función exponencial compleja desempeña un papel fundamental en el estudio de los sistemas LTI (sistemas lineales invariantes en el tiempo) y también en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales.

1.1. Operaciones básicas con números complejos

Los números de la forma $x+iy$, donde x e y son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$(x+iy)+(u+iv) = x+u+i(y+v) \tag{1.1}$$
$$(x+iy)(u+iv) = xu-yv+i(xv+yu) \tag{1.2}$$

se llaman números complejos.

Se dice que x es la *parte real* e y la *parte imaginaria* del número complejo $x+iy$. Dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria. Los números complejos con parte imaginaria cero, $x = x+i0$, son números reales. Los números complejos con parte real cero, $iy = 0+iy$, se llaman *imaginarios puros*.

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es 0 y la unidad del producto es 1. Además, $-x-iy$ es el opuesto de $x+iy$, y todo número $x+iy \neq 0$ tiene inverso:

$$(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 1.$$

Estas propiedades se expresan diciendo que el conjunto de los números complejos con las operaciones adición (1.1) y producto (1.2) es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa por $\mathbb{C}$ y se llama *cuerpo de los números complejos*.

Convenio de notación. En lo que sigue usaremos las letras z y w para representar números complejos y las letras x, y, u, v para representar números reales. Una expresión de la forma $z = x+iy$ se interpreta como que z es el número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y. Se escribe $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ para representar las partes real e imaginaria de z.

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Como veremos en este curso, al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho pero también perdemos algo. Te recuerdo que $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en $\mathbb{C}$ no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en $\mathbb{C}$, pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. Es decir, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden. Así que ya sabes: **¡nunca escribas desigualdades entre números complejos!** Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales. En lo que sigue, una expresión del tipo $x \geqslant 0$ deberá entenderse “x es un número real mayor o igual que 0”.

1.1.1. Representación cartesiana. Complejo conjugado y módulo

Es usual representar el número complejo $z = x+iy$ como el vector del plano (x,y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

Si $z = x+iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** de z se define como:

$$\overline{z} = x - iy$$

Geométricamente, $\overline{z}$ es la reflexión o simétrico de z respecto al eje real.

Es muy fácil comprobar (¡hazlo!) que *el conjugado de una suma es la suma de los conjugados* y que el *conjugado de un producto es el producto de los conjugados*:

$$\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}. \tag{1.3}$$

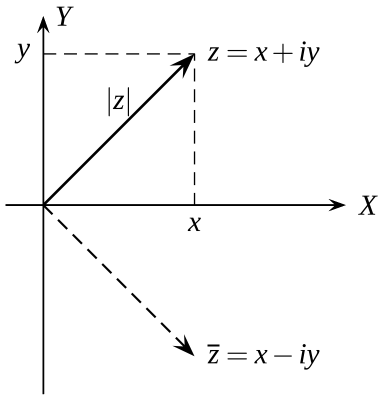


Figura 1.1. Representación de un número complejo

Además, evidentemente, se verifica que $\overline{\overline{z}} = z$.

El **módulo** o **valor absoluto** de $z = x + iy$, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observa que $\sqrt{x^2+y^2}$ está definido sin ambigüedad: es la raíz cuadrada del número real no negativo $x^2 + y^2$.

Recuerda que la **norma euclídea** de un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se define por:

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Y la **distancia euclídea** entre dos puntos (x, y), (u, v) del plano viene dada por:

$$\|(x,y) - (u,v)\| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

En particular, $\|(x,y)\|$ es la distancia del punto (x, y) al origen $(0,0)$.

Por tanto, el módulo de un complejo $z = x + iy$ coincide con la norma euclídea del vector (x, y) y es la distancia euclídea del punto (x, y) a $(0,0)$ (ver figura 1.1). La **distancia** entre dos números complejos $z = x + iy$ y $w = u + iv$ se define como $|z - w|$ y es la distancia euclídea entre los puntos del plano (x, y) y (u, v):

$$|z - w| = \|(x,y) - (u,v)\|$$

Teniendo en cuenta que $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ obtenemos la igualdad:

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

que permite utilizar el producto complejo para trabajar con módulos y es de gran utilidad como veremos enseguida.

Conviene recordar que:

$$|z| = 1 \Longleftrightarrow |z|^2 = 1 \Longleftrightarrow z\overline{z} = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$$

Es decir, los números complejos de módulo 1 son aquellos cuyo inverso es igual a su conjugado.

Para expresar un cociente de números complejos en la forma usual $a+ib$ se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{u+iv}{x+iy}=\frac{(u+iv)(x-iy)}{x^2+y^2}=\frac{ux+vy}{x^2+y^2}+i\frac{vx-uy}{x^2+y^2}.$$

La representación gráfica de la suma es la usual para la suma de vectores. Dos números complejos $z=x+iy$ y $w=u+iv$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 1.2) es $z+w$ (la otra diagonal es $z-w$).

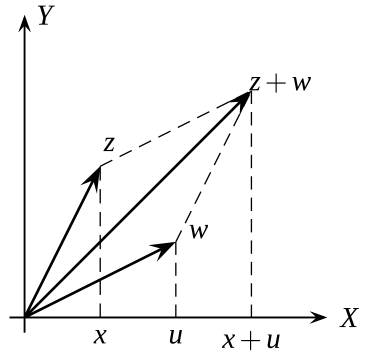


Figura 1.2. Suma de números complejos

Son de comprobación inmediata las desigualdades (recuerda que si $a\in\mathbb{R}$ entonces $\sqrt{a^2}=|a|$):

$$\boxed{\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|,|\operatorname{Im} z|\}\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|} \tag{1.4}$$

Cuyo significado geométrico es evidente. Nótese también que

$$|z|=\operatorname{Re} z \iff z\in\mathbb{R}_o^+.$$

El siguiente resultado establece las principales propiedades del módulo de un número complejo. Como verás son muy parecidas a las propiedades del valor absoluto y su demostración es prácticamente la misma.

1.1 Proposición. *Cualesquiera sean los números complejos $z,w\in\mathbb{C}$ se verifica que:*

1. *El módulo de un producto es igual al producto de los módulos y el módulo de un cociente es igual al cociente de los módulos.*

$$|zw|=|z||w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|} \tag{1.5}$$

2. *El módulo de una suma es menor o igual que la suma de los módulos.*

$$\boxed{|z+w|\leqslant|z|+|w|} \qquad \textit{(desigualdad triangular)} \tag{1.6}$$

Además, para $z,w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ se verifica que:

$$|z+w|=|z|+|w| \iff z=\lambda w \;\; \textit{con } \lambda>0 \tag{1.7}$$

$$|z+w|<|z|+|w| \iff \frac{z}{w}\notin\mathbb{R}^+ \tag{1.8}$$

Es decir, la desigualdad triangular es una igualdad si, y solamente si, alguno de los números es cero o uno de ellos es un múltiplo positivo del otro; equivalentemente, están en una misma semirrecta a partir del origen.

Demostración. Recuerda que si $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ se verifica que $a = b \Longleftrightarrow a^2 = b^2$ y $a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$.

b) Como $|zw| \geqslant 0$ y $|z||w| \geqslant 0$, para probar que $|zw| = |z||w|$ basta probar que sus cuadrados son iguales. En efecto:

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$$

De la igualdad $|zw| = |z||w|$, que acabamos de probar, se deduce enseguida que el módulo de un cociente es igual al cociente de los módulos.

c) Probaremos que $|z+w|^2 \leqslant (|z|+|w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{w}+\overline{z}w = \\ &= |z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leqslant |z|^2+|w|^2+2|\operatorname{Re}(z\overline{w})| \leqslant \\ &\leqslant |z|^2+|w|^2+2|z\overline{w}| = |z|^2+|w|^2+2|z||\overline{w}| = |z|^2+|w|^2+2|z||w| = \\ &= (|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

Evidentemente, si $z = 0$ o si $w = 0$, se verifica la igualdad. Supongamos que $z \neq 0$ y $w \neq 0$. De lo anterior deducimos que se verifica la igualdad $|z+w| = |z|+|w|$ si, y sólo si, $\operatorname{Re} z\overline{w} = |z\overline{w}|$, esto es, si $z\overline{w} \in \mathbb{R}^+$, o lo que es lo mismo $z\overline{w} = \rho$ donde $\rho \in \mathbb{R}^+$. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente, multiplicando por w, como $z|w|^2 = \rho w$; y dividiendo ahora por $|w|^2$, obtenemos $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^+$, lo que quiere decir que z y w están en una misma semirrecta a partir del origen. □

Comentarios a la definición de número complejo

A un elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se le llama a veces "par ordenado", o "punto", o "vector" o "número complejo" (cuando se identifica con el complejo $x+iy$). Esto puede resultar bastante confuso pero tiene su explicación. No debes olvidar que cada concepto matemático tiene sentido dentro de una determinada estructura. Con frecuencia, cuando sobre un mismo conjunto hay definidas varias estructuras, la terminología que se usa indica la estructura a la que nos referimos. Eso pasa en $\mathbb{R}^2$ donde conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Usualmente en $\mathbb{R}^2$ se consideran las siguientes estructuras.

- Ninguna. Es decir, solamente consideramos que $\mathbb{R}^2$ es un conjunto. En tal caso llamamos a sus elementos *pares ordenados de números reales*.
- La estructura de espacio vectorial. Esto es, vemos $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial real. En tal caso a sus elementos los llamamos *vectores*.
- La estructura de espacio euclídeo que se obtiene añadiendo a la estructura de espacio vectorial la distancia euclídea definida por el producto escalar usual. Esto es, vemos $\mathbb{R}^2$ como el plano euclídeo de la geometría elemental. En este caso a sus elementos

los llamamos *puntos*. La misma terminología se emplea cuando se considera en $\mathbb{R}^2$ la estructura de espacio afín o de espacio topológico.

- La estructura de cuerpo definida por las operaciones (1.1) y (1.2). En tal caso, a los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama *números complejos*.

Ocurre que estos términos se usan a veces en un mismo párrafo lo que puede resultar confuso. La regla que debes tener siempre presente es que todo concepto matemático tiene sentido propio dentro de una determinada estructura matemática. Por ello, a un elemento de $\mathbb{R}^2$ se le llama número complejo cuando se va a usar el producto definido en (1.2) que es lo que en realidad distingue a los números complejos de los vectores de $\mathbb{R}^2$.

Comentarios a la definición usual $i=\sqrt{-1}$

Se verifica que $i^2=-1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i=\sqrt{-1}$. Fíjate lo que ocurre si ponemos $i=\sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$-1=i^2=i\,i=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$$

Luego $1=-1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.

Naturalmente, el error procede de que estamos haciendo disparates. Fíjate que en la expresión $\sqrt{-1}$ *no puedes interpretar que* -1 *es el número real* -1 (porque, como sabes, los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real), *sino que tienes que interpretar* -1 *como el número complejo* -1 (espero que ya tengas clara la diferencia). Resulta así que estamos usando raíces de números complejos *sin haberlas definido y dando por supuesto que dichas raíces verifican las mismas propiedades que las de los números reales positivos*.

Antes de escribir $\sqrt{-1}$ hay que definir qué significa $\sqrt{z}$ para $z\in\mathbb{C}$. Cuando lo hagamos veremos ¡sorpresa! que *la igualdad* $\sqrt{z}\sqrt{w}=\sqrt{zw}$, válida cuando $z,w\in\mathbb{R}^+$, *no es cierta en general cuando* $z,w\in\mathbb{C}$.

Todavía más disparatado es *definir* $i=\sqrt{-1}$ sin ni siquiera haber definido antes los números complejos. Sin embargo, y aunque parezca mentira, en muchos textos se define (porque sí, sin más explicaciones) $i=\sqrt{-1}$ y a continuación se dice que los números de la forma $a+ib$ son los números complejos. No es de extrañar que luego resulte que $1=-1$. Todavía pueden hacerse peor las cosas. Recientemente he encontrado en un texto de una institución de educación a distancia escrito por varios profesores la siguiente asombrosa definición: $i=+\sqrt{-1}$.

Ejercicios propuestos

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $x+iy$.

i) $(7-2i)(5+3i)$ ii) $(i-1)^3$ iii) $\overline{(1+i)(2+i)}(3+i)$ iv) $\dfrac{3+i}{2+i}$

v) $\dfrac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i}$ vi) $(1+i)^{-2}$ vii) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ viii) $i^2(1+i)^3$

2. Supuesto que $z=x+iy$ es un número complejo, calcula la parte real e imaginaria de los números:

$$\text{a) } w=\overline{z}^2 \quad \text{b) } w=z^3 \quad \text{c) } w=\frac{1}{z} \quad \text{d) } w=\frac{1}{1+z^2} \quad \text{e) } w=\frac{z+i}{z-i}$$

3. Calcula el módulo de los siguientes números complejos.

$$\text{a) } \frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}} \quad \text{b) } (1+i)^{20} \quad \text{d) } \sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1) \quad \text{c) } \frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}$$

4. Calcula los números complejos $z=x+iy$ tales que el número $w=\dfrac{1+iz}{2i-z}$ es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro; c) Un número de módulo 1.

5. Dado un número complejo $a+ib\in\mathbb{C}^*$, calcula los números complejos $w=u+iv$ que verifican que $w^2=a+ib$.

6. Demuestra la llamada "igualdad del paralelogramo":

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2) \quad (z,w\in\mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

7. Prueba que $\left|\dfrac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|<1$ si $|z|<1$ y $|w|<1$ y también si $|z|>1$ y $|w|>1$.

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

8. Prueba que para todo $z\neq 0$ se verifica que $|z-1|\leqslant ||z|-1|+|z||\arg(z)|$. Interpreta geométricamente esta desigualdad.

9. Justifica que si $z_1,z_2,\dots,z_n$ son números complejos de módulo 1 y tales que

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|=n$$

entonces se verifica que todos son iguales $z_1=z_2=\cdots=z_n$.

10. Estudia para cada una de las igualdades siguientes si hay algún número complejo $z\in\mathbb{C}$ con $|z|=1$ que la verifica:

$$\text{(a) } |z^3+z^2+1|=3 \quad \text{(b) } |z^4-2z-i|=4 \quad \text{(c) } |z^6+z^3+2|=4+|4+4z^2|$$

1.1.2. Forma polar y argumentos de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z = x + iy \neq 0$ podemos escribir

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$$

Como $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right)$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

para algún número $\vartheta \in \mathbb{R}$. Resulta así que

$$z = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de **forma polar**, cuya interpretación gráfica vemos en la figura (1.3).

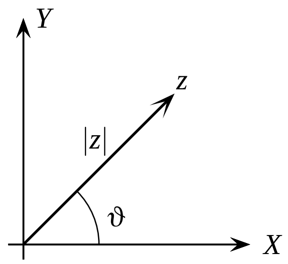


Figura 1.3. Forma polar de un número complejo

Para distinguirla de la forma polar, la representación de número complejo como $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se llama **forma binómica** o **cartesiana**.

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|(\cos t, \operatorname{sen} t)$ cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\operatorname{Arg}(z)$.

$$\boxed{\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)\}}$$

Observa que

$$s, t \in \operatorname{Arg}(z) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \cos(t) = \cos(s) \\ \sin(t) = \sin(s) \end{matrix} \right\} \Longleftrightarrow s = t + 2k\pi \ \text{ para algún } \ k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_0 \in \operatorname{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_0 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\operatorname{Arg}(z) = t_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y se llama **argumento principal** de z.

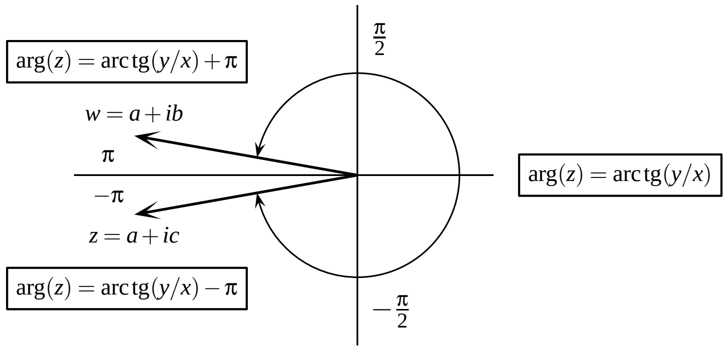


Figura 1.4. Argumento principal

En el ejercicio 11 te propongo que pruebes que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene dado por:

$$\boxed{\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi & \text{si } y < 0,\, x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y < 0,\, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0,\, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi & \text{si } y \geqslant 0,\, x < 0 \end{cases}}$$

Conviene observar que los números complejos de módulo 1 son los números de la forma:

$$z = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

También es claro que todos los números complejos que están en una misma semirrecta a partir del origen tienen los mismos argumentos.

Igualdad de dos números complejos en forma polar

Para que dos números complejos escritos en forma polar $z = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$ y $w = |w|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, sean iguales es condición necesaria y suficiente que los módulos sean iguales $|z| = |w|$, y los argumentos sean iguales, $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(w)$, y ésta condición equivale a que $\vartheta - \varphi$ sea un múltiplo entero de 2π.

$$|z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) = |w|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \Longleftrightarrow \begin{cases} |z| = |w| & \\ \vartheta - \varphi = 2m\pi & (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Observaciones a la definición de argumento principal

Puede parecer un poco extraña la forma de elegir el argumento principal de un número complejo. La elección que hemos hecho supone que medimos ángulos en el semiplano superior de 0 a π y en el semiplano inferior de 0 a $-\pi$ sin llegar a $-\pi$.

Fíjate (ver figura 1.4) que si tomas un número complejo que esté situado en el tercer cuadrante $z = a + ic$ con $a < 0, c < 0$ y supones que c es próximo a 0, su argumento principal está próximo a $-\pi$. Si ahora consideramos el número $w = a + ib$ con $b > 0$, que esta situado en el segundo cuadrante, y supones que b es próximo a 0, su argumento principal está próximo a π. Además, la distancia $|w - z| = |b - c| = b - c$ es tan pequeña como quieras. Esto nos dice que el argumento principal tiene una discontinuidad en el eje real negativo: salta de $-\pi$ a π cuando atravesamos dicho eje desde el tercer al segundo cuadrante.

Peor todavía, dirás. Hasta cierto punto. Primero, la discontinuidad es inevitable. Si queremos elegir argumentos en un intervalo de longitud 2π, digamos $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, entonces dichos argumentos saltan de α a $\alpha + 2\pi$ cuando atravesamos la semirrecta $(x, y) = \rho(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $(\rho > 0)$. En particular, si tomamos argumentos en el intervalo $[0, 2\pi[$ (cosa que, a primera vista, parece lo razonable) nos encontramos con que entonces se produce una discontinuidad de dichos argumentos en *el eje real positivo*. Bien, sucede que *la extensión a* $\mathbb{C}$ de algunas funciones definidas en $\mathbb{R}^+$ (el logaritmo, las raíces) hace intervenir el argumento principal. Naturalmente, queremos que dichas extensiones sigan siendo continuas en $\mathbb{R}^+$ y ello justifica que tengamos que tomar argumentos principales de la forma en que lo hemos hecho: porque preferimos introducir una discontinuidad en $\mathbb{R}^-$ a perder la continuidad en $\mathbb{R}^+$.

Fórmula de De Moivre

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos.

1.2 Proposición. *Sean z, w complejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$. Entonces se verifica que $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$ y $-\vartheta \in \operatorname{Arg}(1/z) = \operatorname{Arg}(\overline{z})$.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta) \\ w &= |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|(\cos(\vartheta + \varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta + \varphi)) \end{aligned}$$

Lo que nos dice que $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$.

Como $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$, los números $1/z$ y $\overline{z}$ están en una misma semirrecta a partir del origen, por lo que $\operatorname{Arg}(1/z) = \operatorname{Arg}(\overline{z})$. Además:

$$\overline{z} = |z|(\cos\vartheta - i\operatorname{sen}\vartheta) = |z|(\cos(-\vartheta) + i\operatorname{sen}(-\vartheta))$$

Por lo que $-\vartheta \in \operatorname{Arg}(\overline{z})$. □

Hemos probado que *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.*

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Observa que, como consecuencia de la proposición (1.2), tenemos que $\arg z + \arg w \in \operatorname{Arg}(zw)$; es decir, $\arg z + \arg w$ es *un* argumento de zw, pero lo que no podemos afirmar es que $\arg z + \arg w$ sea igual al argumento principal de zw. Naturalmente, esto ocurrirá cuando $-\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi$.

$$\boxed{\arg z + \arg w = \arg(zw) \Longleftrightarrow -\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi} \tag{1.9}$$

La siguiente igualdad, muy útil, conocida como *fórmula de De Moivre*, se demuestra fácilmente por inducción a partir de la proposición (1.2).

1.3 Proposición (Fórmula de De Moivre). *Si z es un complejo no nulo, ϑ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\vartheta \in \operatorname{Arg}(z^n)$, es decir:*

$$\boxed{z^n = \big(|z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)\big)^n = |z|^n(\cos n\vartheta + i\operatorname{sen} n\vartheta), \qquad \vartheta \in \operatorname{Arg}(z),\ n \in \mathbb{Z}} \tag{1.10}$$

1.1.3. Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Escribamos w en forma polar:

$$w = |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

Ahora, usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n(\cos n\varphi + i\operatorname{sen} n\varphi) = |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Donde $\vartheta = \arg z$. Esta igualdad se da cuando $|w|^n = |z|$ y $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Deducimos que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (ojo: se trata de la raíz n–ésima de un número positivo, cosa ya conocida). Ahora bien, para cualquier número φ_k de la forma $\varphi_k = (\vartheta + 2k\pi)/n$ tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\varphi_k + i\operatorname{sen}\varphi_k)$$

tal que $(w_k)^n = z$. Como una ecuación polinómica de grado n no puede tener más de n soluciones, se sigue que distintos valores de k deben dar lugar al mismo número w_k. Veamos:

$$w_k = w_q \Leftrightarrow \varphi_k - \varphi_q = 2m\pi \Leftrightarrow k - q = nm$$

Es decir, si k y q dan el mismo resto al dividirlos por n entonces $w_k = w_q$. Deducimos que para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ obtenemos w_k distintos y cualquier otro w_q es igual a uno de ellos. Por tanto hay n raíces n–ésimas distintas de z.

Hemos obtenido que las n raíces n–ésimas de z vienen dadas por

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1} \tag{1.11}$$

Observa que definiendo $u = \cos(2\pi/n) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/n)$, los números $u_0 = 1, u, u^2, \ldots, u^{n-1}$ son las raíces n–ésimas de la unidad. Podemos escribir las raíces n–ésimas de z en la forma $z_k = z_0\, u^k$. Como multiplicar por u es un giro de amplitud $2\pi/n$, deducimos que las n raíces de z se obtienen girando la raíz n–ésima principal, z_0, con giros sucesivos de amplitud $2\pi/n$. Es decir, si representamos todas las raíces n–ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.

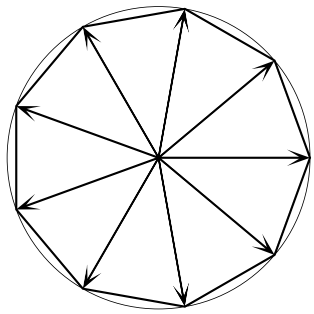


Figura 1.5. Raíces novenas de la unidad

De entre todas las raíces n–ésimas de z vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la **raíz n-ésima principal**, que está definida por

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{\arg z}{n}\right)} \tag{1.12}$$

Observa que $\arg\left(\sqrt[n]{z}\right) = \dfrac{\arg z}{n}$ y, en consecuencia:

$$-\frac{\pi}{n} < \arg\left(\sqrt[n]{z}\right) \leqslant \frac{\pi}{n} \tag{1.13}$$

Además, la raíz n-ésima principal de z es la única de las raíces n-ésimas de z cuyo argumento principal está en el intervalo $]-\pi/n, \pi/n]$. Dicho de otra forma, la raíz n-ésima principal de un número complejo está situada en una región angular, simétrica con respecto al eje real y de amplitud $2\pi/n$, que incluye a su borde superior pero no incluye a su borde inferior.

Notación de las raíces complejas

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo). Es decir, acabamos de *extender* la función raíz n-ésima de $\mathbb{R}^+$ a todo $\mathbb{C}$ conservando el significado que esa función tenía en $\mathbb{R}^+$. Observa, sin embargo, que si $x \in \mathbb{R}^-$ y n es impar, la raíz real de orden n de x no coincide con el valor principal de la raíz de orden n de x considerado como número complejo. Este pequeño inconveniente no es tal si tenemos claro dónde estamos trabajando si en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$; esto es, si cuando n es impar estamos considerando funciones raíces n-ésimas definidas en $\mathbb{R}$, o si estamos considerando dichas funciones definidas en $\mathbb{C}$. Observa que para n par no hay confusión alguna, solamente cuando n es impar y x es un número real negativo hay que tener cuidado. Por ejemplo, $\sqrt[3]{-1}=-1$ cuando consideramos a la raíz cúbica como una función real, y $\sqrt[3]{-1}=\cos(\pi/3)+i\operatorname{sen}(\pi/3)$ cuando consideramos a la raíz cúbica como función compleja. Programas de cálculo simbólico, como *Mathematica* o *Maxima*, siguen precisamente este convenio y usan la notación $\sqrt[n]{z}$ para el valor principal de la raíz n-ésima del número complejo z.

En muchos textos se representa con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ *el conjunto formado por todas las raíces n-ésimas del número complejo* z. Esto presenta bastantes problemas porque, digo yo, si hemos de ser coherentes, habrá que entender que $\sqrt[27]{1}$ ya no vale 1 sino que es un conjunto formado por 27 números complejos. Y las reglas que conocemos para las raíces reales ya ni siquiera pueden formularse. ¿Qué sentido tiene ahora escribir que $\sqrt[5]{2}\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{2}$? ¿Es una igualdad entre conjuntos? ¿Debemos multiplicar cada elemento del conjunto $\sqrt[5]{2}$ por cada elemento del conjunto $\sqrt[5]{1}$ y comprobar que de esa forma obtenemos todos los elementos de $\sqrt[5]{2}$? ¿Cómo hay que sumar ahora $\sqrt[3]{2}+\sqrt[7]{3}$? Porque $\sqrt[3]{2}$ debe entenderse como un conjunto de 3 elementos y $\sqrt[7]{3}$ como un conjunto de 7 elementos. Los autores que hacen esto interpretan la "raíz n-ésima" compleja como una *función multivaluada*. Ya la propia expresión "función multivaluada" es muy desafortunada pues propiamente se trata de una correspondencia: la que a cada complejo $z\neq 0$ hace corresponder el conjunto formado por sus n raíces n-ésimas complejas. Naturalmente, en estos libros cuando se usa el símbolo $\sqrt[n]{z}$ para hacer operaciones como, por ejemplo, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\left(\sqrt[n]{z}-1\right)\right\}$ o $\int\limits_{C(0,1)}\sqrt[n]{z}\,\mathrm{d}z$ debe entenderse que en dichas expresiones se ha seleccionado uno solo de los valores de $\sqrt[n]{z}$. Con lo cual sigue la confusión pues el mismo símbolo, $\sqrt[n]{z}$, puede significar distintas cosas según el contexto en que estemos. Pese a todo, hay razones que pueden justificar esta forma de proceder pero las mismas no son fáciles de exponer en un curso básico de variable compleja. Volveremos sobre este asunto más adelante.

En este curso, para nosotros, el símbolo, $\sqrt[n]{z}$ representará siempre el valor principal de la raíz n-ésima de z antes definido. Más adelante, cuando estudiemos las potencias, introduciremos un símbolo que permitirá representar todas las raíces n-ésimas de z. Finalmente, observa que en la definición (1.12) de $\sqrt[n]{z}$ interviene el argumento principal, $\arg(z)$. Por la definición dada de argumento principal, tenemos que $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ y, como ya hemos visto anteriormente, se produce una discontinuidad del argumento principal en el eje real negativo y, en consecuencia, la función $z\mapsto\sqrt[n]{z}$ es discontinua en el eje real negativo. Te informo que no hay que preocuparse mucho por esta discontinuidad, de hecho es muy útil y, entre otras cosas, sirve para contar ceros de funciones. Lo que quiero es llamarte la atención sobre lo que ocurre cuando se elige el argumento principal en en el intervalo $[0,2\pi[$. Cuando se hace así, la función $z\mapsto\sqrt[n]{z}$ resulta ser discontinua en el eje real positivo. Mala cosa; con esa elección para el argumento principal, una función que era continua en $\mathbb{R}^+$, al extenderla a $\mathbb{C}$ ya no es continua en $\mathbb{R}^+$.

La igualdad $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{zw}$

En general, no es cierto que, dados dos números complejos z y w, el producto de las raíces n-ésimas *principales* de z y de w sea igual a la raíz n-ésima *principal* de zw. Lo que, evidentemente, sí es cierto es que el producto de dos raíces n-ésimas cualesquiera de z y de w es una raíz n-ésima de zw. Por tanto, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$, es *una* raíz n-ésima de zw *pero no tiene por qué ser la principal*. Vamos a ver qué condiciones deben cumplirse para que $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$ sea la raíz n-ésima principal de zw. Para ello, bastará con exigir que el argumento principal de $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$ esté en el intervalo $]-\pi/n,\pi/n]$. Como suponemos que n es un número natural $n\geqslant 2$, tenemos que $-\pi < \dfrac{\arg z}{n}+\dfrac{\arg w}{n}\leqslant \pi$ y, por (1.9), deducimos que $\arg\left(\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}\right)=\dfrac{\arg z}{n}+\dfrac{\arg w}{n}=\dfrac{\arg z+\arg w}{n}$. Tenemos que:

$$\arg\left(\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}\right)=\frac{\arg z+\arg w}{n}\in\left]-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right]\Longleftrightarrow -\pi<\arg z+\arg w\leqslant\pi$$

Hemos probado que

$$\boxed{\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{zw}\Longleftrightarrow -\pi<\arg(z)+\arg(w)\leqslant\pi}$$

Por ejemplo, si los números z y w están en el semiplano de la derecha, es decir, $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Re} w>0$, entonces $-\pi/2<\arg(z)<\pi/2$ y $-\pi/2<\arg(w)<\pi/2$; por tanto en este caso $\arg(z)+\arg(w)=\arg(zw)$ por lo que $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{zw}$. En particular, esto es cierto cuando $z,w\in\mathbb{R}^+$. Por tanto, *no perdemos ninguna de las propiedades de las raíces reales positivas al extender las raíces a* $\mathbb{C}$.

En el caso en que $n=2$, $z=w=-1$, tenemos que $\arg(-1)+\arg(-1)=2\pi$, y no se cumple la condición anterior. En este caso

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1\neq 1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}$$

es decir $\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1$ es una raíz cuadrada de $1=(-1)(-1)$ pero no es la raíz cuadrada principal de 1. Ahora ya sabes dónde está el error en lo que sigue:

$$-1=i^2=i\,i=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$$

Ejercicios propuestos

11. Comprueba que el argumento principal de $z=x+iy\neq 0$ viene dado por

$$\vartheta=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x)-\pi & \text{si } y<0,\ x<0\\ -\pi/2 & \text{si } y<0,\ x=0\\ \operatorname{arctg}(y/x) & \text{si } x>0\\ \pi/2 & \text{si } y>0,\ x=0\\ \operatorname{arctg}(y/x)+\pi & \text{si } y\geqslant 0,\ x<0\end{cases}$$

12. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

a) $-\sqrt{3}-i$ b) $-\sqrt{3}+i$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$ d) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

13. Expresa los siguientes números en forma binómica:

$$\text{a) } (-1+i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 \quad \text{c) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 \quad \text{d) } (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

14. Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

15. Supuesto que $|z|=1$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

16. Sea $z = x+iy$. Supuesto que $|z|=1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1-x+y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } 1-x+y < 0 \end{cases}$$

17. Resuelve la ecuación cuadrática $az^2+bz+c=0$ donde a,b,c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

18. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^3 = 1+i \quad \text{b) } z^4 = i \quad \text{c) } z^3 = -1+i\sqrt{3} \quad \text{d) } z^8 = 1 \quad \text{e) } z^2+2iz-\sqrt{3}i = 0$$

19. Prueba que si una ecuación polinómica con coeficientes reales admite una raíz compleja, z, entonces también admite como raíz a $\overline{z}$. Da un ejemplo de una ecuación polinómica de grado mayor que 1 que tenga como raíz compleja $1+i$ pero no admita como raíz a $1-i$.

20. Calcula las soluciones de las ecuaciones siguientes y exprésalas en forma cartesiana.

$$\text{a) } z^2-4iz-4+2i=0, \quad \text{b) } z^4+4z^2+16=0, \quad \text{c) } z^4-i\sqrt{3}z^2-1=0$$

21. Sea $w = \cos t + i \operatorname{sen} t$ un número complejo de módulo 1. Utiliza el número complejo $u = \cos(t/2) + i \operatorname{sen}(t/2)$ para expresar los números $w-1$ y $w+1$ en forma polar.

22. Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx &= \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)} \\ \text{b)} \quad \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} nx &= \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcula $A+iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre y simplifica usando el ejercicio anterior.

23. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

$$\text{a) } \operatorname{sen} 3\varphi = 3\operatorname{sen}\varphi - 4\operatorname{sen}^3\varphi, \qquad \text{b) } \cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$$

24. Representa gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$\begin{array}{llll} |z-3| \leqslant 3; & 2 < |z-i| \leqslant 3; & |\arg z| < \pi/6; & |z-i| + |z+i| = 4 \\ |z-1| = |z-2i|; & \left|\dfrac{z-i}{z+2i}\right| = 2; & \operatorname{Im}(z^2) > 6; & |z-i| = \operatorname{Im} z + 1 \end{array}$$

25. Encuentra los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z = 0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

26. Resuelve la ecuación $(z-1)^n = (z+1)^n$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1.2. Topología del plano complejo

Como conjunto, $\mathbb{C}$, no es otra cosa que $\mathbb{R}^2$, por tanto, dar una topología en $\mathbb{C}$ es lo mismo que dar una topología en $\mathbb{R}^2$. Pues bien, consideraremos en $\mathbb{C}$ la topología usual en $\mathbb{R}^2$, es decir, la asociada a la norma euclídea. Escribiendo la norma en términos de $\mathbb{C}$, ésta viene dada por

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Mientras que la distancia euclídea en $\mathbb{C}$ viene dada por $(z,w) \mapsto |z-w| \;\; z,w \in \mathbb{C}$.

En $\mathbb{C}$ suele usarse la siguiente terminología. Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

se llama *disco abierto* de centro a y radio r. Observa que un disco abierto no puede ser vacío. Por convenio pondremos $D(a,+\infty) = \mathbb{C}$.

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r \geqslant 0$, el conjunto

$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\}$$

se llama *disco cerrado* de centro a y radio r. Observa que $\overline{D}(a,0) = \{a\}$.

Representaremos por $C(a,r)^* = \{z \in C : |z-a| = r\}$ la circunferencia de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$.

Se dice que un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ está *acotado* si está contenido en algún disco centrado en el origen, es decir, si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|z| \leqslant M$ para todo $z \in A$.

Un conjunto $C \subset \mathbb{C}$ se dice que es conexo si la única partición de C por *abiertos relativos* es la trivial. Esto quiere decir que si $C = A \cup B$ donde A y B son conjuntos abiertos relativos de C disjuntos, entonces debe ser $\{A,B\} = \{\varnothing, C\}$. Las curvas en el plano son conjuntos conexos. Los únicos conexos en la recta real son los intervalos.

En este curso vamos a trabajar con frecuencia con ciertos subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ que se llaman **dominios**. Un dominio es un conjunto abierto y conexo. La idea intuitiva que debes tener es que un dominio en $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ que no se puede expresar como unión de subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos. Por así decir, un dominio es un abierto de "un solo trozo". Observa que si Ω es un conjunto abierto A y B son subconjuntos abiertos de Ω tales que $\Omega = A \cup B$ y $A \cap B = \varnothing$ entonces A y B son también conjuntos cerrados relativos de Ω (porque cada uno es el complemento del otro en Ω). El siguiente resultado caracteriza los dominios en $\mathbb{C}$.

1.4 Proposición. *Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Equivalen las siguientes propiedades:*

1. *La única descomposición de Ω en la forma $\Omega = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos, es la trivial, es decir, $\{A, B\} = \{\varnothing, \Omega\}$.*

2. *Los únicos subconjuntos de Ω que son abiertos y cerrados relativos a Ω son el $\varnothing$ y Ω.*

3. *Dos puntos cualesquiera de Ω pueden unirse por una curva contenida en Ω.*

De estas propiedades la tercera es la más intuitiva pero usaremos también con frecuencia la segunda propiedad. Te recuerdo también que todo conjunto abierto no vacío en $\mathbb{C}$ es unión numerable de dominios disjuntos (sus *componentes conexas*). En la recta real los únicos dominios son los intervalos abiertos. Por convenio, en lo que sigue, *solamente consideraremos dominios distintos del vacío*.

Con frecuencia trabajaremos con otro tipo especial de conjuntos: los conjuntos **compactos**. Naturalmente, los compactos de $\mathbb{C}$ son los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$. Te recuerdo que la compacidad es una propiedad topológica, es decir, puede expresarse exclusivamente en términos de abiertos. Concretamente, un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ se llama compacto si dada una familia cualquiera, $\mathcal{G}$, de conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$ cuya unión contiene a K, $K \subset \bigcup\limits_{G \in \mathcal{G}} G$, se verifica que hay un número finito de conjuntos abiertos de dicha familia $G_1, G_2, \dots, G_m$ cuya unión también contiene a K. Esta definición es la *definición topológica* de compacidad en la que solamente intervienen los abiertos de la topología. Es la más general pero no es la más cómoda de usar. Afortunadamente, los conjuntos compactos de $\mathbb{C}$ tienen caracterizaciones muy fáciles que se recogen en el siguiente resultado que ya debes conocer.

1.5 Teorema. *Sea $K \subseteq \mathbb{C}$. Equivalen:*

(a) *K es compacto (definición topológica).*

(b) *Todo subconjunto infinito de puntos de K tiene algún punto de acumulación en K.*

(c) *Toda sucesión de puntos de K tiene alguna sucesión parcial que converge a un punto de K.*

(d) *K es cerrado y acotado.*

El siguiente resultado contiene importantes propiedades de las funciones continuas que ya debes conocer.

1.6 Teorema.

- *Toda función continua que toma valores reales definida en un compacto alcanza en dicho compacto un valor máximo y un valor mínimo absolutos.*
- *Toda función continua que toma valores reales o complejos definida en un compacto es uniformemente continua.*
- *Las funciones continuas transforman conexos en conexos y compactos en compactos.*

1.2.1. Sucesiones de números complejos

Una sucesión de números complejos es una aplicación del conjunto de los números naturales en $\mathbb{C}$. Como de costumbre, representaremos por $\{z_n\}$ la sucesión dada por $n \mapsto z_n$ donde $z_n \in \mathbb{C}$. La definición de sucesión convergente es exactamente la misma que para sucesiones reales.

1.7 Definición. Se dice que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es *convergente* si hay un número complejo z con la propiedad de que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|z_n - z| < \varepsilon$. En tal caso dicho número z es único y escribimos $\lim\{z_n\} = z$ o $\{z_n\} \to z$ y se dice que z es el límite de la sucesión $\{z_n\}$.

Observa que $\{z_n\} \to z$ si, y sólo si, $|z_n - z| \to 0$. Teniendo en cuenta la desigualdad (1.4) tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \tag{1.14}$$

Deducimos que $|z_n - z| \to 0$ si, y sólo si, $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \to 0$ y $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \to 0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

1.8 Proposición. *Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son convergentes. Además en dicho caso*

$$\lim\{z_n\} = z \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z = \lim\{\operatorname{Re} z_n\} \quad y \quad \operatorname{Im} z = \lim\{\operatorname{Im} z_n\}$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión tal que para todo $K > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant n_0$ entonces $|z_n| \geqslant K$. En dicho caso diremos que la sucesión $\{z_n\}$ es divergente o que *diverge* y escribiremos $\{z_n\} \to \infty$. Observa que $\{z_n\} \to \infty$ es lo mismo que $\{|z_n|\} \to +\infty$.

Los resultados que conoces para sucesiones de números reales en los que no interviene el orden son también válidos para sucesiones de números complejos. Destacamos entre ellos los más importantes.

1.9 Proposición (Álgebra de límites)**.**

- *Si* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{w_n\} \to w$*, entonces* $\{z_n + w_n\} \to z + w$ *y* $\{z_n w_n\} \to zw$*. Además, si* $z_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $z \neq 0$*, entonces* $\{1/z_n\} \to 1/z$*.*
- *Si* $\{z_n\}$ *diverge y* $\{w_n\}$ *está acotada entonces* $\{z_n + w_n\}$ *diverge.*
- *Si* $\{z_n\}$ *diverge y* $\{w_n\}$ *está separada de* 0*, esto es, existen* $\rho > 0$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de forma que para* $n \geqslant n_0$ *se cumple* $|w_n| \geqslant \rho$*, entonces* $\{z_n w_n\}$ *diverge.*

1.10 Definición. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se dice que es de *Cauchy* si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant n_0$ entonces $|z_p - z_q| < \varepsilon$

Volviendo a utilizar las desigualdades (1.14), deducimos que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy si, y sólo si, $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son sucesiones de Cauchy. Por el teorema de complitud de $\mathbb{R}$, si $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son de Cauchy convergen y, por tanto, $\{z_n\}$ es convergente.

1.11 Teorema (Teorema de complitud de $\mathbb{C}$)**.** *Toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente.*

Recuerda que una *sucesión parcial* de una sucesión $\{z_n\}$ es cualquier sucesión de la forma $\{z_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente. Si $\{z_n\} \to z$, entonces cualquier sucesión parcial de $\{z_n\}$ también converge a z.

Teniendo en cuenta que $\{z_n\}$ es una sucesión acotada si, y sólo si, $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son acotadas y que toda sucesión acotada de números reales tiene una sucesión parcial convergente, se deduce fácilmente el siguiente resultado.

1.12 Teorema (Teorema de Bolzano –Weierstrass.)**.** *Toda sucesión acotada de números complejos tiene alguna sucesión parcial convergente.*

1.2.2. Series de números complejos

Dada una sucesión, $\{z_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{S_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{z_n\}$, es decir:

$$S_1 = z_1,\ S_2 = z_1 + z_2,\ S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \dots, S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \dots$$

La sucesión $\{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} z_k \right\}$ así obtenida se llama *serie de término general* z_n y es costumbre representarla por $\sum_{n \geqslant 1} z_n$ o, más sencillamente, $\sum z_n$[1]

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, *todos los conceptos y resultados estudiados ya para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series*. En

[1]El concepto de serie se estudia con mucho más detalle en el capítulo 9 de mi libro Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable que puedes descargar de mi página Web. Allí también se demuestran algunos resultados que aquí solamente voy a enunciar.

particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es "convergente". Si una serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ para representar el límite de la serie que suele llamarse *suma* de la serie. Naturalmente $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \text{lím}\{S_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Como caso particular de la proposición 1.8, la serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ converge si, y sólo si, las series

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{n\geqslant 1} z_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Re} z_n \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{n\geqslant 1} z_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Im} z_n$$

son convergentes.

Conviene que recuerdes la condición básica *necesaria* para la convergencia de una serie. Si la serie $\sum z_n$ converge entonces la sucesión $z_n = \sum_{j=1}^{n} z_j - \sum_{j=1}^{n-1} z_j$ es diferencia de dos sucesiones que convergen al mismo límite y por tanto converge a cero.

1.13 Proposición. *Condición necesaria para que la serie $\sum z_n$ converja es que $\{z_n\} \to 0$.*

Para las series es posible definir otro tipo de convergencia, la *convergencia absoluta*.

1.14 Definición. Se dice que una serie de números complejos $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ *converge absolutamente* si la serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} |z_n|$ es convergente.

1.15 Proposición. *Si una serie de números complejos $\sum z_n$ es absolutamente convergente entonces dicha serie también es convergente.*

Demostración. Pongamos $S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j$, $A_n = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$ y supongamos que la sucesión $\{A_n\}$ es convergente, es decir, $\sum z_n$ es absolutamente convergente. Dado $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy para $\{A_n\}$ nos dice que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=p+1}^{q} |z_k| = \left|A_q - A_p\right| < \varepsilon \quad \text{para cualesquiera } p, q \in \mathbb{N} \text{ tales que } \quad q > p \geqslant n_0$$

Deducimos que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $q > p \geqslant n_o$ se verifica que

$$\left|S_q - S_p\right| = \left|z_{p+1} + z_{p+2} + \cdots + z_q\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |z_k| < \varepsilon$$

Lo que prueba que la sucesión $\{S_n\}$, es decir, la serie $\sum z_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. □

Para estudiar la convergencia absoluta de una serie de números complejos se usan los criterios de convergencia para series de números positivos, criterios que ya debes conocer. Pero, ¿qué hacer cuando una serie no es absolutamente convergente? En tal caso, para estudiar si la serie es convergente podemos intentar comprobar si verifica la condición de Cauchy, pero este procedimiento con frecuencia es difícil. Pues bien, los criterios siguientes proporcionan información sobre la convergencia no absoluta en algunos casos que ocurren con frecuencia.

1.16 Teorema. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos.*

Criterio de Dirichlet. *Si $\{a_n\}$ es monótona y converge a cero y la serie $\sum z_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n z_n$ converge.*

Criterio de Abel. *Si $\{a_n\}$ es monótona y acotada y la serie $\sum z_n$ converge, entonces $\sum a_n z_n$ es convergente.*

Demostración. Son, respectivamente, los corolarios 9.43 y 9.44 de mi libro de Cálculo diferencial antes citado.

Ejercicios propuestos

27. Sean $F \subset \mathbb{C}$ un cerrado y $K \subset$ un compacto no vacíos tales que $F \cap K = \emptyset$. Prueba que hay puntos $a \in F$, $b \in K$ tales que

$$|a-b| = \text{ínf}\{|z-w| : z \in F, w \in K\}.$$

28. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de complejos no nulos y para $n \in \mathbb{N}$ sea $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\{\varphi_n\} \to \varphi$ y $\{|z_n|\} \to \rho$. Justifica que $\{z_n\} \to \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$.

29. Estudia la convergencia de las sucesiones:

$$\text{i)}\quad z_n = \sqrt[n]{n} + ina^n \quad (a \in \mathbb{R}, |a| < 1) \qquad \text{ii)}\quad z_n = \frac{2^n}{n} + \frac{in}{2^n}$$

$$\text{iii)}\quad z_n = \sqrt[n]{a} + i \operatorname{sen}\frac{1}{n} \quad (a > 0) \qquad \text{iv)}\quad z_n = n \operatorname{sen}\frac{1}{n} + 5i \cos\frac{1}{n}$$

$$\text{v)}\quad z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \qquad \text{vi)}\quad z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

30. Calcula el límite de la sucesión $z_n = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2} + i\frac{\pi}{3}}{n}\right)^n$.

Sugerencia: Expresa $z_n = |z_n|(\cos\varphi_n + i \operatorname{sen}\varphi_n)$ y usa el ejercicio 28.

31. Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\big(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\big) - 1\right)$.

Sugerencia: recuerda que el límite de la sucesión $n\big(\sqrt[n]{2} - 1\big)$ es bien conocido.

32. La serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ tiene la propiedad de que las cuatro partes suyas formadas por los términos pertenecientes a un mismo cuadrante cerrado del plano convergen. Demuestra que dicha serie es absolutamente convergente.

33. Dado $z\in\mathbb{C}$, estudia la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ (**serie geométrica**).

34. Estudia la convergencia de las series:

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}+i\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \qquad b)\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\frac{1}{n}.$$

35. Sea $z\in\mathbb{C}$, con $|z|=1$, $z\neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

36. Estudia la convergencia de las series:

$$\text{i)}\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(1+i)^n} \qquad \text{ii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n+i\operatorname{sen} n}{n}$$

$$\text{iii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n+i\operatorname{sen} n}{n^2} \qquad \text{iv)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos\frac{\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{n}$$

$$\text{v)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\frac{\pi}{n^2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n^2}\right) \qquad \text{vi)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{(in)^n}$$

$$\text{vii)}\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n+7} \qquad \text{viii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

37. Sea $\rho\in\mathbb{R}$ con $|\rho|<1$ y $\vartheta\in\mathbb{R}$. Calcula los límites $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos(n\vartheta)$ y $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\operatorname{sen}(n\vartheta)$.

38. Prueba que si la serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ converge y hay un número $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $|\arg(z_n)|<\alpha$, entonces dicha serie converge absolutamente.

39. Supón que las series $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} z_n^2$ son convergentes y que $\operatorname{Re}(z_n)\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que $\sum_{n\geqslant 1}|z_n|^2$ es convergente.

Capítulo 2

Funciones holomorfas. Series de potencias. Funciones complejas elementales

2.1. Funciones complejas

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$, cuando en $\mathbb{R}^2$ consideramos su estructura compleja. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, a toda función compleja $f : A \to \mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u = \operatorname{Re} f$ "parte real de f" y la función $v = \operatorname{Im} f$ "parte imaginaria de f" definidas para todo $(x, y) = x + iy \in A$ por:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

Naturalmente, $f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$.

La *función conjugada* de f es la función $\overline{f}$ dada por $\overline{f}(z) = \operatorname{Re} f(z) - i \operatorname{Im} f(z)$. La *función módulo* de f es la función $|f|$ dada por $|f|(z) = |f(z)|$.

2.1.1. Continuidad y límite funcional

2.1 Definición. Se dice que la función $f : A \to \mathbb{C}$ es *continua* en un punto $a \in A$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ |z - a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Usando una vez más las desigualdades

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

se prueba fácilmente que una función compleja f es continua en a si, y sólo si, las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en a.

2.2 Definición. Dado un punto a de acumulación de A, se dice $f : A \to \mathbb{C}$ tiene *límite* en a si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z-a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to a} f(z) = L$.

Usando las desigualdades anteriores y llamando $a = \alpha + i\beta$, $L = \lambda + i\mu$ tenemos

$$\lim_{z \to a} f(z) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \operatorname{Re} f(x,y) = \lambda \\ \lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \operatorname{Im} f(x,y) = \mu \end{cases}$$

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite infinito en un punto a de acumulación de A si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z-a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z)| > M$$

Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

Si A no está acotado, se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite en infinito si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K > 0$ tal que si $z \in A$ y $|z| > K$ entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = L$.

Si A no está acotado, se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite infinito en infinito si para todo $M > 0$ existe $K > 0$ tal que si $z \in A$ y $|z| > K$ entonces $|f(z)| > M$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$.

Observa que hay una completa analogía formal entre las definiciones anteriores y las correspondientes para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de cálculo de límites conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

El siguiente resultado, aunque elemental, es importante.

2.3 Proposición (Continuidad del argumento principal.)**.** *La función argumento principal es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y es discontinua en $\mathbb{R}^-$.*

Demostración. Probaremos que el argumento principal de un número complejo $z = x + iy \neq 0$ viene dado por

$$\vartheta = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x + |z|} \quad \text{si } z \notin \mathbb{R}^-$$
$$\vartheta = \pi \quad \text{si } z \in \mathbb{R}^-$$

La comprobación es fácil. Como $-\pi/2 < \operatorname{arc\,tg} t < \pi/2$, se sigue que $-\pi < \vartheta \leqslant \pi$. Si $z \in \mathbb{R}^-$ es evidente que $z = |z|(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$. Y para $z \notin \mathbb{R}^-$ se tiene:

$$\cos(\vartheta) = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\vartheta/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\vartheta/2)} = \frac{(|z|+x)^2-y^2}{(|z|+x)^2+y^2} = \frac{2x(|z|+x)}{2|z|(|z|+x)} = \frac{x}{|z|}$$

$$\operatorname{sen}(\vartheta) = \frac{2\operatorname{tg}(\vartheta/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\vartheta/2)} = \frac{2y(|z|+x)}{(|z|+x)^2+y^2} = \frac{2y(|z|+x)}{2|z|(|z|+x)} = \frac{y}{|z|}$$

Deducimos que $z = |z|(\cos(\vartheta) + i\operatorname{sen}(\vartheta))$, lo que prueba que $\vartheta = \arg(z)$.

Como el conjunto $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ es abierto y la restricción del argumento principal a dicho conjunto, según acabamos de probar, viene dado por

$$\arg z = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+|z|}$$

deducimos, teniendo en cuenta que para $z = x+iy \in \mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ es $x+|z| > 0$, que la función arcotangente es continua y el carácter local de la continuidad, que el argumento principal es continuo en $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$.

Sea $a \in \mathbb{R}^-$ y pongamos $z_n = a + i\dfrac{(-1)^n}{n}$. Claramente $\{z_n\} \to a$. Como

$$\arg(z_{2n}) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2n}\right) + \pi \longrightarrow \pi$$
$$\arg(z_{2n-1}) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-1}{2n-1}\right) - \pi \longrightarrow -\pi$$

Concluimos que la sucesión $\{\arg(z_n)\}$ no converge y por tanto el argumento principal es discontinuo en a.

De hecho, tenemos que si $a \in \mathbb{R}^-$ es

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \arg(a+it) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} (\operatorname{arc\,tg}(y/a) + \pi = \pi \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \arg(a+it) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \operatorname{arc\,tg}(y/a) - \pi = -\pi$$

2.2. Derivada de una función compleja

2.4 Definición. Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Se dice que f es derivable en a cuando existe el límite

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \in \mathbb{C}$$

el valor de dicho límite se llama *derivada de f en el punto a*, y se representa por $f'(a)$.

La única novedad de la definición es que se está utilizando el producto complejo y eso, como veremos, hace que la condición de derivabilidad en sentido complejo sea mucho más restrictiva que la derivabilidad para funciones reales.

Casos Particulares

- Cuando $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, la definición dada coincide con la conocida para una función real de variable real
- Para funciones complejas de una variable real se tiene el siguiente resultado.

  Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{C}$. Entonces la función f es de la forma
  $$f(t) = u(t) + iv(t)$$
  donde u y v son funciones reales de variable real. En este caso tenemos:
  $$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{u(t) - u(a)}{t - a} + i\frac{v(t) - v(a)}{t - a}$$
  y deducimos que f es derivable en a si, y sólo si, las funciones u y v son derivables en a, en cuyo caso
  $$f'(a) = u'(a) + iv'(a)$$

Observa que hay una completa analogía formal entre el concepto de función derivable para funciones de variable compleja y para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de derivación conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

2.5 Teorema (Reglas de derivación.)**.** *Sean dos funciones $f, g : A \to \mathbb{C}$ con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Supongamos que f y g son derivables en a. Entonces:*

- *$f + g$ es derivable en a y $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
- *fg es derivable en a y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
- *Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in A$, entonces f/g es derivable en a*
  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$
- ***Regla de la cadena.** Sean $f : A \to \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$ tales que $f(A) \subseteq B$, y consideremos la función compuesta $h = g \circ f : A \to \mathbb{C}$. Supongamos que f es derivable en $a \in A \cap A'$ y g es derivable en $f(a) \in B \cap B'$. entonces h es derivable en a y*
  $$h'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a)$$

Demostración. Probemos la regla de la cadena. Para ello pongamos $b = f(a)$ y consideremos la aplicación $\varphi : B \to \mathbb{C}$ dada por
$$\varphi(w) = \frac{g(w) - g(b)}{w - b} \qquad w \in B \setminus \{b\}$$
$$\varphi(b) = g'(b)$$
Puesto que g es derivable en b, φ es continua en b. Ahora bien, nótese que para todo $z \in A \setminus \{a\}$ se tiene que
$$\frac{h(z) - h(a)}{z - a} = \frac{g\big(f(z)\big) - g\big(f(a)\big)}{z - a} = \varphi\big(f(z)\big)\,\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$
de donde se deduce el resultado sin más que tomar límite para $z \to a$. □

2.2.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

2.6 Teorema (Relación ente la derivabilidad compleja y la diferenciabilidad real.). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, a un punto de Ω y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función de Ω en $\mathbb{C}$. Notemos $a = \alpha + i\beta$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) *f es derivable (en sentido complejo) en a.*

ii) *Las funciones $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ son diferenciables en (α,β) y además se verifican las condiciones de Cauchy–Riemann:*

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha,\beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,\beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta) \end{aligned}}$$

En caso de que se cumplan i) y ii) se tiene

$$\boxed{f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)}$$

Demostración. Por definición, f es derivable si, y sólo si existe un número complejo, la derivada de f en a, $f'(a) = \lambda + i\mu$ que verifica

$$\lim_{z\to a} \frac{|f(z) - f(a) - (\lambda + i\mu)(z-a)|}{|z-a|} = 0.$$

Pongamos $z = x + iy$. Si tenemos en cuenta la igualdad

$$(\lambda + i\mu)(z-a) = (\lambda + i\mu)(x + iy - \alpha - i\beta) = \lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta) + i[\mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta)]$$

y el hecho de que el módulo de un complejo coincide con la norma euclídea (visto como vector en $\mathbb{R}^2$), el límite anterior se escribe como sigue:

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{\|(u(x,y),v(x,y)) - (u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)) - (\lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta), \mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta))\|}{\|(x,y) - (\alpha,\beta)\|} = 0$$

o bien, como $\left(\lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta), \mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta)\right) = \left[\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}\right]^t$,

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{\left\| \big(u(x,y),v(x,y)\big) - \big(u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)\big) - \left[\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}\right]^t \right\|}{\|(x,y) - (\alpha,\beta)\|} = 0.$$

La condición anterior quiere decir que la aplicación $(x,y) \mapsto (u(x,y),v(x,y))$ de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es diferenciable en el punto (α,β) y su diferencial es la aplicación lineal dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por tanto $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ es la matriz jacobiana de la aplicación $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ en (α,β), esto es

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) = \lambda, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,\beta) = -\mu, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta) = \mu, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha,\beta) = \lambda$$

Finalmente

$$f'(a) = f'(\alpha + i\beta) = \lambda + i\mu = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)$$

$\square$

Observaciones

Este resultado explica por qué si eliges dos funciones u, v y defines una función compleja por la igualdad $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, lo más probable es que, a pesar de lo buenas que puedan ser las funciones u y v, la función f así definida no sea derivable pues las funciones u y v no tienen por qué verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto indica (aunque esta es una idea difícil de precisar) que las funciones complejas derivables son "auténticas funciones complejas" en el sentido de que si la función $u(x,y) + iv(x,y)$ es derivable entonces la expresión que se obtiene al sustituir en $u(x,y) + iv(x,y)$ la variable x por $(z+\overline{z})/2$ e y por $(z-\overline{z})/2i$ debe depender únicamente de la variable z. Para formalizar esta idea pongamos

$$f(z) = u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$

Para que la función $f(z)$ definida por esta igualdad dependa solamente de z y no dependa de $\overline{z}$ es necesario que se verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

que son precisamente las ecuaciones de Cauchy – Riemann.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2.1}$$

2.7 Ejemplos.

- $f(x+iy) = x$ no es derivable en ningún punto.
- $f(x+iy) = (x+iy)(x^2+y^2)$ sólo es derivable en cero.
- $f(x+iy) = 2xy + i(y^2 - x^2)$ es derivable en todo $\mathbb{C}$.
- $f(x+iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ es derivable en todo $\mathbb{C}$ y $f'(z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2.2.2. Primeras propiedades de las funciones holomorfas

2.8 Definición. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ se dice que es *holomorfa* en Ω si f es derivable en todo punto de Ω. En tal caso la función definida para $z\in\Omega$ por $z\mapsto f'(z)$ se llama *función derivada* de f. Notaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω. Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman *funciones enteras*.

Era costumbre hace años llamar “funciones enteras” a las funciones polinómicas. Precisamente, la palabra “holomorfa” significa “de forma entera”, y veremos que, efectivamente, las funciones holomorfas se comportan en algunos aspectos de forma parecida a las funciones polinómicas.

2.9 Ejemplos.

- Las *funciones polinómicas*, es decir, las funciones de la forma

$$p(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$$

donde $c_k\in\mathbb{C}$ para $0\leqslant k\leqslant n$, son funciones enteras. La función derivada de p viene dada por

$$p'(z)=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\cdots+nc_nz^{n-1}\qquad(z\in\mathbb{C})$$

- Las *funciones racionales*, es decir, las funciones de la forma $R(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinómicas, son holomorfas en su dominio natural de definición $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:q(z)\neq 0\}$. La función derivada de R viene dada por

$$R'(z)=\frac{p'(z)q(z)-p(z)q'(z)}{q(z)^2}\qquad(z\in\Omega)$$

Como consecuencia de las reglas de derivación tenemos el siguiente resultado.

2.10 Proposición. *El conjunto $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto Ω con la suma y el producto usual de funciones es un álgebra.*

2.11 Proposición. *Una función holomorfa en un dominio cuya derivada es nula en todo punto es constante.*

Demostración. Sea Ω un dominio, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f'(z)=0$ para todo $z\in\Omega$. Fijado $z_0\in\Omega$, definimos

$$A=\{z\in\Omega:\ f(z)=f(z_0)\}$$

A es no vacío y, por ser f continua, es un cerrado relativo de Ω. Veamos que también es abierto. Sea $a\in A$ y como Ω es abierto, existe $r>0$ tal que $D(a,r)\subset\Omega$. Tomamos $b\in D(a,r)$ y definimos $\varphi:[0,1]\to\mathbb{C}$ por $\varphi(t)=f((1-t)a+tb)$. Como f es derivable, la regla de la cadena nos dice que φ es derivable y

$$\varphi'(t)=f'((1-t)a+tb)(b-a)=0$$

Por ser φ una función compleja de variable real tenemos

$$\varphi'(t) = (\operatorname{Re}\varphi)'(t) + i(\operatorname{Im}\varphi)'(t) = 0 \qquad (t \in [0,1])$$

Luego $(\operatorname{Re}\varphi)'(t) = 0$ y $(\operatorname{Im}\varphi)'(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. Puesto que $\operatorname{Re}\varphi$ y $\operatorname{Im}\varphi$ son funciones reales de variable real definidas en $[0,1]$, se sigue que son constantes. Luego φ es constante y por tanto $\varphi(0) = f(a) = \varphi(1) = f(b)$ luego $b \in A$. Hemos probado que $D(a,r) \subset A$, luego A es abierto. El hecho de que Ω sea un dominio permite concluir que $A = \Omega$, es decir, f es constante en Ω. $\square$

2.12 Corolario. *Si dos funciones holomorfas tienen la misma derivada en un dominio y coinciden en un punto son iguales.*

La siguiente proposición vuelve a poner de manifiesto que la condición de que una función sea holomorfa es mucho más restrictiva que la derivabilidad real.

2.13 Proposición. *Sean Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

(a) $\operatorname{Re} f$ *es constante en* Ω.

(b) $\operatorname{Im} f$ *es constante en* Ω.

(c) La función compleja conjugada de f, $\overline{f}$, es holomorfa en Ω.

(d) f es constante en Ω.

(e) $|f|$ es constante en Ω.

Demostración. Pongamos $f = u + iv$, con $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Es claro que la condición *(d)* implica todas las demás.

(a)⇒(d) Las ecuaciones de Cauchy–Riemann afirman que

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \qquad (z = x+iy \in \Omega)$$

Puesto que $\operatorname{Re} f$ es constante tenemos $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$ lo que implica que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$ de donde deducimos *(d)* gracias a la proposición anterior.

(b)⇒(d) Puesto que $\operatorname{Im} f = -\operatorname{Re}(if)$ la implicación *(a)⇒(d)* ya probada nos dice que la función if es constante y, por lo tanto, f también lo es.

(c)⇒(d) Como f es holomorfa y $\overline{f}$ lo es por hipótesis tenemos que $f + \overline{f} = 2\operatorname{Re} f$ es holomorfa. Puesto que $\operatorname{Im}(\operatorname{Re} f) = 0$ es constante, deducimos, por *(b)⇒(d)*, que $\operatorname{Re} f$ es constante y por *(a)⇒(d)* concluimos que f es constante.

(e)⇒(d) Si $|f| = \alpha$ entonces $f(z)\overline{f}(z) = \alpha^2$. Si $\alpha = 0$ entonces f es idénticamente nula y hemos acabado. Si $\alpha \neq 0$ entonces f no se anula en ningún punto por lo que la función $\overline{f}(z) = \dfrac{\alpha^2}{f(z)}$ es holomorfa en Ω y, por *(c)⇒(d)*, concluimos que f es constante. $\square$

Observemos que estas propiedades de las funciones holomorfas están muy lejos de ser ciertas para funciones reales diferenciables. Por ejemplo, dada una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ diferenciable que no se anule nunca, dividiéndola por su norma obtenemos una función diferenciable cuyo módulo es constante.

Ejercicios propuestos

40. Estudia la derivabilidad de la función $f(x+iy) = x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2y)$.

41. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} \quad \text{si } z = x+iy \neq 0, \quad f(0) = 0$$

Estudia la continuidad y la derivabilidad de f.

42. Sea Ω un abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sean $\Omega^* = \{z : \overline{z} \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ la función definida por $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ para todo $z \in \Omega^*$. Prueba que f^* es holomorfa en Ω^*.

43. Calcula una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ para cualesquiera $x,y \in \mathbb{R}$. Si se exige que sea $f(0) = 0$, entonces dicha función es única.

44. Demuestra que si $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ es una función polinómica de grado $n \geqslant 1$, se verifica que $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \infty$.

45. Escribe las ecuaciones de Cauchy-Riemann para

$$f(z) = U(\rho,\vartheta) + iV(\rho,\vartheta) \quad \text{donde} \quad z = \rho(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Expresa la derivada de f por medio de las derivadas parciales de U y V.

46. Consideremos la función dada para $z \neq 0$ por $f(z) = \dfrac{\overline{z}^2}{z}$, y $f(0) = 0$. ¿En qué puntos verifica f las ecuaciones de Cauchy-Riemann? ¿Es f derivable en $z = 0$?.

47. Sea Ω un dominio y f una función holomorfa en Ω. Supongamos que hay números $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que $a\operatorname{Re} f(z) + b\operatorname{Im} f(z) = c$ para todo $z \in \Omega$. Prueba que f es constante en Ω.

48. Encuentra una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los números reales a,b,c para que exista una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, verificando que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$$

para cualesquiera $x,y \in \mathbb{R}$. Determina, cuando dicha condición se cumpla, todas las funciones enteras f cuya parte real es de la forma indicada.

49. **Determinación de una función holomorfa por su parte real o por su parte imaginaria.** Sea $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ una función holomorfa en un dominio Ω y sea a un punto de Ω. Prueba que:

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\overline{a}}{2},\frac{z-\overline{a}}{2i}\right)-\overline{f(a)}=2iv\left(\frac{z+\overline{a}}{2},\frac{z-\overline{a}}{2i}\right)+\overline{f(a)}$$

Usa este resultado para determinar en cada caso una función holomorfa cuya parte real viene dada por:

$$u(x,y)=4xy(y^2-x^2)$$
$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Sugerencia. Define $F(z)=2u\left(\frac{z+\overline{a}}{2},\frac{z-\overline{a}}{2i}\right)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$. Comprueba que F verifica las ecuaciones de Cauchy – Riemann y que $F'(z)=f'(z)$.

50. Sea $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ una función holomorfa con derivada no nula. Prueba que las curvas de nivel $u(x,y)=c$, $v(x,y)=k$ son dos familias de trayectorias ortogonales.

2.3. Sucesiones y series de funciones

Hasta ahora sólo conocemos como ejemplos de funciones holomorfas los polinomios y las funciones racionales. Si queremos construir más ejemplos ya no encontraremos más por métodos elementales. Por ejemplo ¿cómo se extiende la exponencial real a $\mathbb{C}$? Claro, podemos dar una definición de e^z para $z\in\mathbb{C}$, seguramente ya la conoces y te habrás preguntado cómo se llega a la misma porque no es nada *natural*. En lo que sigue vamos a ver una forma *natural* de extender ciertas funciones reales al cuerpo complejo de manera que la extensión sea holomorfa. Para eso necesitamos estudiar un poco de sucesiones de funciones porque vamos a construir funciones holomorfas como límite uniforme de funciones polinómicas.[1]

2.3.1. Sucesiones de funciones

Una sucesión de funciones, como su nombre indica, es una sucesión cuyos elementos son funciones. Formalmente, es una aplicación que a cada número natural le asigna una función, en nuestro caso una función compleja.

Consideremos una sucesión de funciones $\{f_n\}$ con $f_n:A\to\mathbb{C}$ donde $A\subseteq\mathbb{C}$.

[1] Antes de seguir debes leer el capítulo 10 de mi libro Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable donde se exponen con todo detalle los conceptos que siguen, se incluyen numerosos ejemplos que ayudan a entenderlos y se demuestran algunos resultados que aquí solamente voy a citar pero no a demostrar. Además, aunque allí considero solamente funciones reales – lo que hace que los ejemplos sean fáciles de visualizar – es un buen ejercicio que compruebes que las demostraciones de los resultados en que no intervienen derivadas ni integrales valen exactamente igual, sin cambiar nada, para sucesiones de funciones complejas. También puedes bajar de mi página Web una colección de ejercicios resueltos con todo detalle de sucesiones y series de funciones.

Convergencia puntual Decimos que $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en un punto $z \in A$ si la sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ converge.

Llamamos *campo de convergencia puntual* de la sucesión $\{f_n\}$ al conjunto

$$C = \{z \in A : \{f_n(z)\} \text{ converge}\}$$

y llamamos *límite puntual* a la función $f : C \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \text{lím}\{f_n(z)\} \qquad (z \in C)$$

Convergencia uniforme Se dice que $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a una función f en un conjunto $B \subseteq A$ si

$$\text{lím}_{n\to\infty} \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in B\} = 0$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$ ***para todo*** $z \in B$.

2.14 Teorema (Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme.)**.** *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en B si, y sólo si, verifica uniformemente en B la condición de Cauchy:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ p, q \geqslant n_0 \Rightarrow \sup\{|f_p(z) - f_q(z)| : z \in B\} \leqslant \varepsilon$$

Demostración. Es el teorema 10.10 de mi libro de Cálculo diferencial. □

2.15 Teorema (**Conservación de la continuidad**)**.** *Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un conjunto B. Sea $a \in B$ y supongamos que las funciones f_n son todas ellas continuas en a. Se verifica entonces que la función f es continua en a. En particular, si las funciones f_n son todas ellas continuas en B. Se verifica entonces que la función f es continua en B.*

Demostración. Es el teorema 10.15 de mi libro de Cálculo diferencial. □

2.16 Teorema (**Permutación de la integración con el límite uniforme**)**.** *Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en un intervalo $[a,b]$ y que las funciones f_n son todas ellas continuas en $[a,b]$. Se verifica entonces que:*

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\text{lím}_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Demostración. Es el teorema 10.16 de mi libro de Cálculo diferencial. □

2.3.2. Series de funciones

Dada una sucesión de funciones, $\{f_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de la primera, esto es:

$$F_1 = f_1,\ F_2 = f_1 + f_2,\ F_3 = f_1 + f_2 + f_3,\ \dots, F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \cdots$$

Dicha sucesión de funciones, $\{F_n\}$, así obtenida se llama *serie de término general* f_n y la representamos por $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ o, más sencillamente, $\sum f_n$.

Puesto que las series de funciones son sucesiones de funciones, los conceptos de convergencia puntual, campo de convergencia puntual y convergencia uniforme para series de funciones no precisan de nueva definición. El siguiente resultado es de comprobación inmediata.

2.17 Proposición. *Condición necesaria para que la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ *converja puntualmente (resp. uniformemente) en un conjunto A es que la sucesión* $\{f_n\}$ *converja puntualmente (resp. uniformemente) a cero en A.*

La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ se dice que *converge absolutamente* en un punto $a \in A$ cuando la serie de los módulos, $\sum\limits_{n\geqslant 1} |f_n(a)|$, converge. Se define el *campo de convergencia absoluta* como el conjunto

$$\left\{ z \in A : \sum_{n\geqslant 1} |f_n(z)| \text{ converge} \right\}$$

Al igual que para series de números complejos la convergencia absoluta de una serie de funciones implica convergencia pero no al contrario.

El siguiente criterio que proporciona condiciones suficientes para la convergencia uniforme y absoluta de una serie de funciones será usado con frecuencia en lo que sigue.

2.18 Teorema (Criterio de Weierstrass.)**.** *Sea* $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ *una serie de funciones definidas en un conjunto* $A \subseteq \mathbb{C}$. *Supongamos que hay una sucesión* $\{\alpha_n\}$ *de números reales positivos tal que:*

(a) $|f_n(z)| \leqslant \alpha_n$ *para todo* $z \in A$.

(b) La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$ *es convergente.*

Entonces la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ *converge absolutamente y uniformemente en A.*

Demostración. Por el criterio de comparación para series de términos positivos *(a)* y *(b)* implican que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} |f_n(z)|$ converge para $z \in A$.

Para probar la convergencia uniforme en A veamos que se cumple la condición uniforme de Cauchy en A.

Como la serie $\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n$ converge cumple la condición de Cauchy. Luego dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $p > q \geqslant n_0$ se verifica

$$\alpha_p + \alpha_{p-1} + \cdots + \alpha_{q+1} \leqslant \varepsilon$$

Deducimos que para $p > q \geqslant n_0$ y para todo $z\in A$ se verifica

$$\begin{aligned} |\sum_{j=1}^{p} f_j(z) - \sum_{j=1}^{q} f_j(z)| = |f_p(z) + f_{p-1}(z) + \cdots + f_{q+1}(z)| &\leqslant \\ \leqslant |f_p(z)| + |f_{p-1}(z)| + \cdots + |f_{q+1}(z)| &\leqslant \\ \leqslant \alpha_p + \alpha_{p-1} + \cdots + \alpha_{q+1} \leqslant \varepsilon& \end{aligned}$$

Como queríamos probar. □

Observa que los conceptos de convergencia absoluta y de convergencia uniforme son independientes: una serie puede ser uniformemente convergente en un conjunto A y no ser absolutamente convergente en A. En tales casos se aplican los siguientes criterios de convergencia no absoluta para series de funciones.

2.19 Proposición. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto A.*

Criterio de Dirichlet. *Supongamos que:*

a) $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales monótona y convergente a cero.

b) La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A.

Entonces la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Criterio de Abel. *Supongamos que:*

a) La serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

b) Para cada $z \in A$ $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de números reales monótona y la sucesión de funciones $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en A.

Entonces la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Demostración. Es la proposición 10.13 de mi libro de Cálculo diferencial. □

2.3.3. Series de potencias complejas. Funciones analíticas

Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ y un número $a\in\mathbb{C}$ consideremos la sucesión de funciones

$$\begin{aligned} f_0(z) &= c_0 \\ f_n(z) &= c_n(z-a)^n \qquad n\geqslant 1 \end{aligned}$$

La serie definida por esta sucesión de funciones, es decir, la sucesión

$$\left\{c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n\right\}$$

se representa por $\sum\limits_{n\geqslant 0}c_n(z-a)^n$ y se llama *serie de potencias centrada en a*. La sucesión $\{c_n\}$ recibe el nombre de sucesión de coeficientes de la serie.

2.20 Teorema (Lema de Abel)**.** *Sea $\rho>0$ un número positivo tal que la sucesión $\{c_n\rho^n\}$ está acotada. Entonces se verifica que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0}c_n(z-a)^n$ converge absolutamente en el disco $D(a,\rho)$ y converge uniformemente en compactos $K\subseteq D(a,\rho)$.*

Demostración. Tomemos un compacto $K\subset D(a,\rho)$. Llamemos $r=\text{máx}\{|z-a|:z\in K\}<\rho$. Puesto que $\{c_n\rho^n\}$ está acotada existe una constante $M>0$ tal que $|c_n\rho^n|\leqslant M$ para todo número natural n. Tenemos que

$$|c_n(z-a)^n|=\left|c_n\rho^n\frac{(z-a)^n}{\rho^n}\right|=|c_n\rho^n|\,\frac{|z-a|^n}{\rho^n}\leqslant M\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n\leqslant(z\in K)\leqslant M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

Consideramos ahora la sucesión $\{\alpha_n\}=\{M(r/\rho)^n\}$ y aplicamos el criterio de Weierstrass para dicha sucesión. Ya que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha_n$ converge por ser una serie geométrica de razón menor que 1, dicho criterio nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0}c_n(z-a)^n$ converge absolutamente y uniformemente en K.

Como la serie converge absolutamente en cualquier compacto contenido en $D(a,\rho)$ se sigue que converge absolutamente en todo el disco. □

El lema anterior conduce de manera natural a considerar el más grande $\rho>0$ tal que la sucesión $\{c_n\rho^n\}$ está acotada. Introducimos para ello el conjunto

$$A=\{\rho\geqslant 0:\{c_n\rho^n\}\text{ está acotada}\}$$

y definimos $R=\sup(A)\in\mathbb{R}_0^+\cup\{+\infty\}$. Pueden presentarse los casos:

- $R=0$. Entonces $A=\{0\}$, luego si $z\neq a$ la sucesión $\{c_n(z-a)^n\}$ no está acotada y, en particular, no converge a cero. Por tanto la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0}c_n(z-a)^n$ no converge.

  En este caso se dice que *la serie de potencias es trivial* pues solamente converge para $z=a$.

- $0 < R < +\infty$. Sea $K \subseteq D(a,R)$ compacto y $r = \text{máx}\{|z-a| : z \in K\} < R$. Por definición de supremo existe $\rho \in A$ tal que $r < \rho \leqslant R$. Aplicando el lema de Abel para dicho ρ deducimos que la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ converge uniformemente y absolutamente en K.

  Como K es un compacto arbitrario contenido en $D(a,R)$, concluimos que la serie converge absolutamente en $D(a,R)$ y converge uniformemente en compactos contenidos en dicho disco.

  Si $|z-a| > R$ entonces la sucesión $\{c_n(z-a)^n\}$ no está acotada y, por tanto, la serie no converge.

  Nada puede afirmarse en general del comportamiento de la serie en la frontera del disco $D(a,R)$.

- Si $R = +\infty$ el argumento anterior es válido para cualquier compacto K con lo cual la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y uniformemente en compactos.

Al número R se le llama **radio de convergencia** de la serie. Observa que R sólo depende de la sucesión $\{c_n\}$ de coeficientes de la serie y no del centro de la serie. Dada una serie de potencias no trivial, $\sum c_n(z-a)^n$, llamaremos *dominio de convergencia de la serie* al conjunto $D(a,R)$ donde R es el radio de convergencia de la serie (recuerda que si $R = +\infty$ entonces $D(a,+\infty) = \mathbb{C}$).

Los siguientes criterios permiten en muchos casos calcular el radio de convergencia.

2.21 Proposición (Criterio del cociente o de D'Alembert)**.** *Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}$ supuesto que*

- $c_n \neq 0$ *para todo n a partir de un índice en adelante, y que*
- $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$

entonces $R = 1/L$ con los convenios: $R = 0$ si $L = +\infty$ y $R = +\infty$ si $L = 0$.

Demostración. Para obtener este resultado basta aplicar el criterio del cociente a la serie $\sum_{n\geqslant 0} |c_n(z-a)^n|$. Tenemos

$$\frac{|c_{n+1}(z-a)^{n+1}|}{|c_n(z-a)^n|} = \frac{c_{n+1}}{c_n}|z-a| \longrightarrow L\,|z-a|$$

Deducimos que:

- Si $L\,|z-a| < 1$ la serie converge.
- Si $L\,|z-a| > 1$ la serie no converge.

y concluimos que $R = 1/L$ con los convenios anteriores. □

De forma análoga se obtiene el siguiente resultado.

2.22 Proposición (Criterio de la raíz o de Cauchy). *Si* $\{\sqrt[n]{|c_n|}\} \to L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ *entonces* $R = 1/L$ *con los mismos convenios anteriores.*

Los criterios anteriores son en realidad bastante restrictivos. Por ejemplo ninguno de ellos puede aplicarse para estudiar la convergencia de una serie de potencias cuyos coeficientes vienen dados por $c_{2n-1} = 1/2^n$, $c_{2n} = 1/3^n$. El siguiente resultado proporciona un método general para calcular el radio de convergencia.

Recuerda que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos mayorada se define el *límite superior* de dicha sucesión, $\limsup\{x_n\}$, como el límite de la sucesión $\{s_n\}$ donde $s_n = \sup\{x_k : k \geqslant n\}$. Si $\{x_n\}$ no está mayorada se define su límite superior igual a $+\infty$.

2.23 Teorema (Fórmula de Cauchy–Hadamard). *El radio de convergencia R de una serie de potencias* $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ *viene dado por*

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

con los convenios usuales.

Demostración. Llamemos $L = \limsup\{\sqrt[n]{|c_n|}\} \in R_0^+ \cup \{+\infty\}$.

Supongamos que $L = +\infty$ lo que equivale a que $\sqrt[n]{|c_n|}$ no está acotada. En tal caso veamos que $\{c_n\rho^n\}$ no está acotada para ningún $\rho > 0$. En caso contrario existirían $M > 1$ y $\rho > 0$ tales que $|c_n|\rho^n \leqslant M$ para todo natural n. Luego

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{\sqrt[n]{M}}{\rho} \leqslant \frac{M}{\rho} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ estaría acotada en contra de la hipótesis. Deducimos que $R = 0$.

Supongamos que $L \in \mathbb{R}_0^+$. Vamos a probar las implicaciones

$$\rho L < 1 \Rightarrow \rho \in A \Rightarrow \rho L \leqslant 1$$

Supuesto probadas, si $L = 0$ cualquier $\rho > 0$ cumple lo anterior luego $\mathbb{R}_0^+ \subset A$ y $R = +\infty$. Si $0 < L < +\infty$ entonces $[0, 1/L[\subseteq A \subseteq [0, 1/L]$ de donde $R = 1/L$.

Probemos la primera implicación. Pongamos $b_n = \sup\{\sqrt[k]{|c_k|} : k \geqslant n\}$. Por definición de límite superior es $L = \lim\{b_n\}$. Supongamos que $\rho L < 1$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho b_{n_0} < 1$ de donde $\rho\sqrt[n]{|c_n|} < 1$ para todo $n \geqslant n_0$, elevando a n tenemos $\rho^n|c_n| < 1$ para cada $n \geqslant n_0$. De lo anterior concluimos que la sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ está acotada y, por tanto, que $\rho \in A$.

Veamos la segunda implicación. Supongamos que $\rho \in A$ luego $\{|c_n|\rho^n\}$ está acotada, esto es, existe una constante positiva $M > 1$ de forma que $|c_n|\rho^n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Extrayendo raíces de orden n se tiene

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{\sqrt[n]{M}}{\rho}$$

Fijemos $q \in \mathbb{N}$ arbitrario, la desigualdad anterior es cierta para cada $n \in \mathbb{N}$, en particular lo es para cada $n \geqslant q$. Con lo cual

$$b_q = \sup\{\sqrt[n]{|c_n|} : n \geqslant q\} \leqslant \frac{\sqrt[q]{M}}{\rho}$$

donde hemos usado que para $M > 1$ la sucesión $\{\sqrt[n]{M}\}$ es decreciente. Acabamos de probar que $\rho b_q \leqslant \sqrt[q]{M}$ para cualquier q. Tomando límite en q deducimos que $\rho L \leqslant 1$ □

El siguiente lema nos dice que derivando término a término una serie de potencias obtenemos otra serie de potencias con el mismo radio de convergencia que la serie de partida.

2.24 Lema. *Las series de potencias*

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} nc_n(z-a)^{n-1}$$

tienen igual radio de convergencia.

Demostración. [2] La serie $\sum_{n\geqslant 1} nc_n(z-a)^{n-1}$ y

$$(z-a)\sum_{n\geqslant 1} nc_n(z-a)^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} nc_n(z-a)^n$$

convergen para los mismos valores de z y, por tanto, tienen igual radio de convergencia. La fórmula de Cauchy–Hadamard nos dice que el radio de convergencia de dicha serie viene dado por

$$\limsup\{\sqrt[n]{n|c_n|}\}$$

Para probar el resultado basta justificar la igualdad

$$\limsup\{\sqrt[n]{n|c_n|}\} = \limsup\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$$

Llamemos

$$b_n = \sup\{\sqrt[k]{|c_k|} : k \geqslant n\} \quad \beta_n = \sup\{\sqrt[k]{k|c_k|} : k \geqslant n\}$$

Teniendo en cuenta que la sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$ es decreciente, resulta que

$$b_n \leqslant \beta_n \leqslant \sqrt[n]{n}\, b_n$$

y como $\lim\{\sqrt[n]{n}\} = 1$, concluimos que $\lim \beta_n = \lim b_n$. □

[2] Una demostración que no utiliza la fórmula de Cauchy-Hadamard puedes verla en mi libro de Cálculo diferencial - Lema 10.26. También debes leer las observaciones que preceden a ese resultado donde indico algunos trucos para calcular el radio de convergencia

2.25 Teorema (Teorema de derivación de una serie de potencias.). *Sea* $a\in\mathbb{C}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ *una serie de potencias no trivial y* Ω *su dominio de convergencia. Sea* $f:\Omega\to\mathbb{C}$ *la función suma de la serie, esto es,*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad z\in\Omega$$

Entonces f *es indefinidamente derivable en* Ω *y, para cada* $k\in\mathbb{N}$ *su derivada k-ésima se obtiene derivando k veces la serie término a término, esto es:*

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k} \qquad z\in\Omega$$

En particular $f^{(k)}(a)=k!\,c_k$ *o, lo que es lo mismo*

$$c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad \textit{para todo } k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Demostración. En primer lugar, no es restrictivo suponer que $a=0$, puesto que en caso contrario podemos considerar la función

$$g(z)=\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \qquad z\in\Omega-a$$

con lo que $f(z)=g(z-a)$. Luego si g es derivable también f es derivable y las derivadas de f en a son las derivadas de g en 0.

Sea, pues, $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ para $z\in\Omega$. Tomemos un punto $b\in\Omega$ y para $z\in\Omega$, $z\neq b$ sea

$$\varphi(z)=\frac{f(z)-f(b)}{z-b}=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\frac{z^n-b^n}{z-b}=\sum_{n=1}^{\infty} p_n(z)$$

donde $p_n(z)=c_n\sum\limits_{j=1}^{n} z^{n-j}b^{j-1}$. Lo que queremos probar es que dicho cociente tiene límite en b, esto es, que f es derivable en b.

Puesto que Ω es un abierto podemos tomar $\overline{D}(b,\delta)\subseteq\Omega$ para algún $\delta>0$. Para $z\in\overline{D}(b,\delta)$ se cumple que $|z|\leqslant|b|+\delta$ y, evidentemente, $|b|\leqslant|b|+\delta$, con lo cual

$$|p_n(z)|\leqslant|c_n|n(|b|+\delta)^{n-1} \qquad \text{para todo } z\in\overline{D}(b,\delta) \tag{2.3}$$

Vamos a aplicar el criterio de la mayorante de Weierstrass a la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} p_n$. Para ello veamos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} n|c_n|(|b|+\delta)^{n-1}$ es convergente.

Pero esto último es claro ya que sabemos, por el lema anterior, que $\sum\limits_{n\geqslant 1} nc_n w^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia que $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n w^n$, y esta última converge en Ω. Como el disco

$\overline{D}(b,\delta)$ está contenido en Ω y en dicho disco hay puntos de módulo igual a $|b|+\delta$ (por ejemplo $w_0 = b+\delta\frac{b}{|b|}$ si $b\neq 0$, y $w_0=\delta$ si $b=0$) y las series de potencias convergen absolutamente en su dominio de convergencia, concluimos que la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} n|c_n|(|b|+\delta)^{n-1}$$

es convergente. Ahora, por la desigualdad 2.3, el criterio de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n\geqslant 1} p_n$ converge uniformemente en el disco $\overline{D}(b,\delta)$ y, por tanto, la función suma de dicha serie es continua en dicho disco. En particular tenemos que

$$\lim_{z\to b}\frac{f(z)-f(b)}{z-b} = \lim_{z\to b}\varphi(z) = \lim_{z\to b}\sum_{n=1}^{\infty}p_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty}p_n(b) = \sum_{n=1}^{\infty}nc_nb^{n-1}$$

es decir, hemos probado que f es derivable en b y

$$f'(b) = \sum_{n=1}^{\infty}nc_nb^{n-1}$$

Puesto que b es un punto arbitrario de Ω obtenemos que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1} \qquad \text{para todo } z\in\Omega$$

Una sencilla inducción prueba que f tiene derivadas de todos los órdenes en Ω y

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)c_nz^{n-k} \qquad \text{para todo } z\in\Omega$$

En dicha igualdad haciendo $z=0$ obtenemos

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad \text{para todo } k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

□

2.26 Definición. Sea f una función indefinidamente derivable en un abierto $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ y sea $a\in\Omega$. La serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

se llama **serie de Taylor** de f en el punto a.

2.27 Corolario. *Las series de potencias no triviales son series de Taylor (de su función suma).*

El resultado anterior nos lleva a definir el concepto de **función analítica**.

2.28 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, se dice que una función compleja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en Ω cuando *localmente* puede representarse como la función suma de una serie de potencias. Es decir, para cada punto $b \in \Omega$ hay un disco abierto $D(b, \rho_b) \subseteq \Omega$ y una serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n^{(b)}(z-b)^n$$

cuyo dominio de convergencia contiene a $D(b, \rho_b)$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(b)}(z-b)^n \qquad \text{para todo } z \in D(b, \rho_b)$$

En virtud del teorema anterior, deducimos que una función analítica f en Ω es indefinidamente derivable en Ω y todas sus derivadas son también analíticas. Además se tiene que

$$c_n^{(b)} = \frac{f^{(n}(b)}{n!}$$

Equivalentemente, una función f es analítica en un abierto Ω si es indefinidamente derivable en dicho abierto y para cada punto $b \in \Omega$ la serie de Taylor de f en b converge y su suma es igual a f en algún disco abierto centrado en b y contenido en Ω.

Observaciones sobre la terminología que estamos usando

En muchos textos de variable compleja se llaman “analíticas” a las funciones que nosotros hemos llamado “holomorfas”. Otros, incluso, usan desde el principio dichos términos como sinónimos. Sucede que el concepto de “función analítica” es muy antiguo. Durante los siglos XVII y XVIII se admitía implícitamente que cualquier función podía expresarse como su desarrollo en serie de Taylor y de esta forma se resolvían muchos problemas; por ejemplo, las ecuaciones diferenciales se resolvían sustituyendo la “función incógnita” por su serie de Taylor e identificando coeficientes. Además, se trata de un concepto que no tiene nada que sea esencialmente complejo; si en la definición anterior consideras solamente series de potencias reales, y en lugar de discos consideras sus intervalos de convergencia obtienes el concepto de función analítica real. Por ello el concepto de “función analítica” es muy anterior al desarrollo de la teoría de funciones de variable compleja.

En la definición anterior lo que se ha hecho es extender el concepto de función analítica real a funciones complejas. Esta forma de proceder es coherente con el significado que tiene dicho concepto para funciones reales. Por eso no me parece en absoluto conveniente llamar “analíticas” a las funciones que hemos llamado “holomorfas”. Además, la palabra “holomorfa” que significa “de forma entera” está más de acuerdo con la tradición: antiguamente se llamaba “funciones enteras” a las funciones polinómicas, y veremos que esa es una característica de las funciones holomorfas: en algunos aspectos se comportan de forma parecida a las funciones polinómicas (aunque esta analogía no puede llevarse demasiado lejos). Otra cosa muy diferente, y una de las grandes sorpresas de la teoría de funciones holomorfas, es el hecho de que toda función holomorfa es analítica, algo que demostraremos en el capítulo siguiente y que es un resultado específico de variable compleja que desde luego no se cumple para funciones derivables reales. El mero enunciado de este resultado hace que valga la pena distinguir en principio entre funciones holomorfas y funciones analíticas complejas, aunque a la postre ambos conceptos sean el mismo, algo que, también en principio, está muy lejos de ser evidente. Mientras llega ese momento distinguiremos cuidadosamente ambos conceptos.

El siguiente resultado es muy útil para calcular la suma de una serie de potencias en puntos de la frontera de su disco de convergencia.

2.29 Teorema (Continuidad radial)**.** *Sea $\sum c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $0 < R < +\infty$. Sea $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ la función suma de la serie y supongamos que la serie es convergente en un punto z_0 de la frontera del disco $D(0,R)$. Entonces se verifica que*

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} f(rz_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$$

Demostración. Para $r\in[0,1]$ la sucesión $\{r^n\}$ es monótona decreciente y la sucesión de funciones $r\mapsto r^n$ está uniformemente acotada en $[0,1]$ y la serie $\sum c_n z_0^n$ es convergente por hipótesis. Por tanto el criterio de Abel (proposición 2.19) nos dice que la serie

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(rz_0)^n = \sum_{n\geqslant 0} c_n r^n z_0^n$$

converge uniformemente para $r\in[0,1]$ y por tanto su suma es una función continua en dicho intervalo y, en particular, es continua en $r=1$, es decir

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(rz_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$$

como queríamos demostrar. □

Ejercicios propuestos

51. Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n \qquad (z\neq i)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

52. Calcula la función límite puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dada por:

$$f_n(z) = n\left(\sqrt[n]{z}-1\right)$$

53. Calcula la función límite puntual de la sucesión de funciones $f_n(z) = \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$.

Sugerencia: escribe $f_n(z) = \rho_n\left(\cos\varphi_n + i\operatorname{sen}\varphi_n\right)$.

54. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

55. Justifica que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ converge uniformemente y absolutamente en todo compacto contenido en $D(0,1)$ y en todo compacto contenido en $\{z\in\mathbb{C} : |z| > 1\}$.

56. Justifica que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ converge absoluta y uniformemente en compactos contenidos en $D(0,1)$ y en compactos contenidos en $\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,1)$. Calcula la suma de dicha serie.

57. Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\left(\frac{2z-i}{2+iz}\right)^n \qquad (z\neq 2i)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

58. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos de módulo 1. Prueba que la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(z-a_n)}$$

converge uniformemente en compactos contenidos en $D(0,1)$ o en $\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,1)$.

59. Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n+3}{5n+6}\right)^n z^n$ ii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}z^n$ iii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{2n}}{(1+2i)^n}$

iv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{n^2}}{n!}$ v) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}[3+(-1)^n]^n z^n$ vi) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a^{n^2}z^n$

vii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}2^n z^{n!}$ viii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$ ix) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}z^n$

60. Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$ b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+a^n)z^n$ c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^{\log n}z^n$

61. Expresa $\dfrac{1}{z}$ como suma de una serie de potencias centrada en un punto $a\neq 0$ e indica en dónde es válida dicha igualdad.

62. Expresa $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ como suma de una serie de potencias.

63. Calcula la suma de las series: a) $\sum\limits_{n\geqslant 1} nz^n$, b) $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^2z^n$.

64. Calcula el dominio de convergencia y la suma de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0}(2^{n+1}-n)z^n$.

65. Prueba que la función

$$f(z)=\frac{z^2-3z+1}{z^2-5z+6}$$

es analítica en $\mathbb{C}\setminus\{2,3\}$.

Sugerencia. Usa la descomposición en fracciones simples.

66. Estudia el comportamiento en la frontera del disco de convergencia de las series:

$$\text{a)}\ \sum_{n\geqslant 1} z^n, \quad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}, \quad \text{c)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n^2}, \quad \text{d)}\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\log n}z^{3n-1}$$

67. Justifica que toda función analítica tiene *localmente* primitivas.

2.4. Funciones complejas elementales

2.4.1. Exponencial compleja

Sabemos que para todo $x\in\mathbb{R}$ se verifica que $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Esto lleva, de forma natural, a considerar la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$. Aplicando el criterio del cociente obtenemos $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\to 0$, luego la serie converge para todo $z\in\mathbb{C}$. Llamamos *exponencial compleja* a la función definida para todo $z\in\mathbb{C}$ por

$$\boxed{\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=\lim_{n\to\infty}\left\{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\right\}}$$

Propiedades

(1) $\exp'(z)=\exp(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

(2) $\exp(0)=1$

(3) $\exp(x)$ para $x\in\mathbb{R}$ coincide con la exponencial real, esto es, la exponencial compleja extiende a la exponencial real. Esto justifica el uso de la notación $\exp(z)=\mathrm{e}^z$.

(4) Las propiedades (1) y (2) caracterizan a la función exponencial, esto es, si $\varphi\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es tal que $\varphi'(z)=\varphi(z)$ para cada $z\in\mathbb{C}$ y $\varphi(0)=1$ entonces $\varphi(z)=\exp(z)$.

(5) **Teorema de adición**: $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

(6) **Fórmula de Euler**: Dado $t \in \mathbb{R}$ se cumple $\exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t$. En particular tenemos la igualdad

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

(7) Dado $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{C}$ entonces

$$\boxed{\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)}$$

Por tanto $\boxed{|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(\mathrm{e}^z)}$.

(8) **La exponencial compleja no se anula nunca.**

(9) **La exponencial compleja es una función periódica** de periodo $2\pi i$. Concretamente $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^w$ si, y sólo si, $z - w \in 2\pi i \mathbb{Z}$.

(10) La exponencial compleja es una función analítica.

Demostración.

(1) Puesto que la exponencial está definida en términos de una serie de potencias convergente basta derivar término a término la serie para obtener la derivada de la exponencial. Así

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z)$$

(2) Evidentemente al hacer $z = 0$ en la serie que define a la exponencial se anulan todos los términos menos el primero que es 1.

(3) Para $x \in \mathbb{R}$ sabemos que $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

(4) Tomemos $a \in \mathbb{C}$ y llamemos $h(z) = \varphi(a-z)\exp(z)$, luego

$$h'(z) = -\varphi'(a-z)\exp(z) + \varphi(a-z)\exp(z) = 0$$

luego h es constante, en particular, $h(0) = h(a)$, es decir, $\varphi(a) = \exp(a)$. Puesto que a es un número complejo arbitrario la igualdad es válida para todo $a \in \mathbb{C}$

(5) Sea $a \in \mathbb{C}$ y consideremos la función $H(z) = \exp(a-z)\exp(z)$. Si derivamos resulta $H'(z) = 0$ luego H es constante y $H(0) = H(z)$, esto es, $\exp(a) = \exp(a-z)\exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, sustituyendo $a = z + w$ obtenemos que

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$$

(6) De la definición de la exponencial compleja se sigue que

$$\begin{aligned}\exp(it) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(it)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(it)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1}{k!}(it)^k = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k} + i\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}\right) = \\ &= \cos t + i\operatorname{sen} t\end{aligned}$$

(7) Sea $z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z$ un número complejo cualquiera. Tenemos

$$\exp z = \exp(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z)}\exp(i\operatorname{Im}(z)) = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)$$

(8) Consecuencia de que $|\exp z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} > 0$.

(9) Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera

$$\begin{aligned}\exp(z+2\pi i) &= \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z+2\pi i)}\big(\cos\operatorname{Im}(z+2\pi i) + i\operatorname{sen}\operatorname{Im}(z+2\pi i)\big) = \\ &= \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z + 2\pi) + i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z + 2\pi)\big) = \\ &= \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big) = \\ &= \exp(z)\end{aligned}$$

(10) Tomemos $a \in \mathbb{C}$, por el teorema de adición $\exp(z) = \exp(a)\exp(z-a)$, esto es,

$$\exp(z) = \exp(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^a}{n!}(z-a)^n$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ □

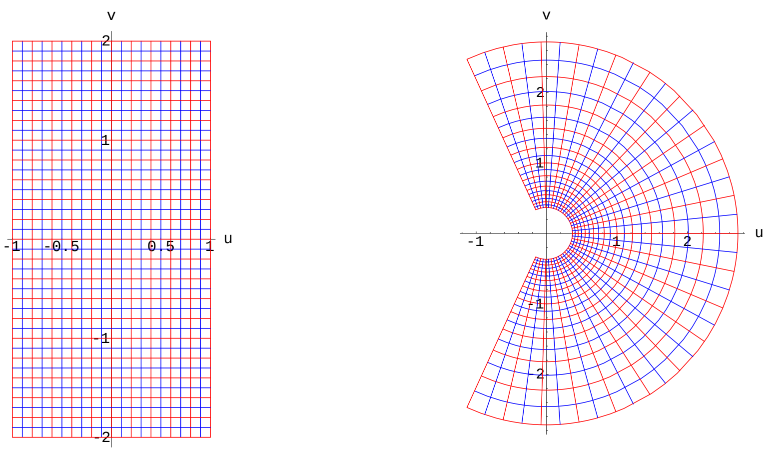


Figura 2.1. Imagen por la función exponencial $w = \mathrm{e}^z$ del rectángulo $[-1,1]\times[-2,2]$

El uso de la función exponencial permite escribir un número complejo en la forma $z = |z|\,\mathrm{e}^{it}$ donde $t \in \operatorname{Arg}(z)$ y se dice que z está escrito en **forma exponencial**. Observa que la fórmula de De Moivre se expresa ahora simplemente por $z^n = |z|^n\,\mathrm{e}^{int}$.

2.4.2. Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $\mathrm{e}^w = z$, donde z es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones $w \in \mathbb{C}$. En efecto, como

$$\mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $\mathrm{e}^w = z$ es necesario y suficiente que:

1. $|\mathrm{e}^w| = |z|$, esto es, $\mathrm{e}^{\operatorname{Re} w} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re} w = \log|z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).
2. $\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} z$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im} w = \arg(z) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que

$$\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^w = z\} = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $\mathrm{e}^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$.

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) \qquad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

De entre todos ellos elegimos uno, llamado *logaritmo principal* (o rama principal), definido por

$$\boxed{\log z = \log|z| + i\arg(z) \qquad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log z + i2k\pi$ para algún entero k. Además, para $z \in \mathbb{R}^+$ el logaritmo principal, $\log z$, coincide con el logaritmo natural de z.

Teniendo en cuenta la proposición 2.3, resulta que el logaritmo principal es continuo en $C^* \backslash \mathbb{R}^-$ y es discontinuo en $\mathbb{R}^-$.

También es importante que observes que la igualdad

$$\log zw = \log z + \log w$$

que es válida para los logaritmos de los números reales positivos, no es siempre cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\log(-1 + i\sqrt{3}) = \log 2 + i\frac{2\pi}{3}, \quad \log(-\sqrt{3} + i) = \log 2 + i\frac{5\pi}{6}$$
$$\log((-1 + i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)) = \log(-4i) = \log 4 - i\frac{\pi}{2}$$
$$\log 4 - i\frac{\pi}{2} \neq \log 2 + i\frac{2\pi}{3} + \log 2 + i\frac{5\pi}{6} = \log 4 + i\frac{3\pi}{2}$$

Lo que está claro es que $\boxed{\log z + \log w \in \operatorname{Log}(zw)}$, es decir, $\log z + \log w$ es *un* logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo *principal* de zw.

2.30 Definición. Sea $f : A \to \mathbb{C}^*$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$.

- Cualquier función $g : A \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) \in \operatorname{Log} f(z)$ para todo $z \in A$ se llama *un logaritmo de f en A* o **una rama del logaritmo de f en** A. Cuando f es la identidad se dice simplemente que g es *un logaritmo* en A o **una rama del logaritmo en** A.
- Cualquier función $\vartheta : A \to \mathbb{R}$ tal que $\vartheta(z) \in \operatorname{Arg} f(z)$ para todo $z \in A$ se llama *un argumento de f en A* o **una rama del argumento de f en** A. Cuando f es la identidad se dice simplemente que ϑ es un argumento en A o **una rama del argumento en** A.

En este curso estaremos interesados en el siguiente problema: Dada una función holomorfa que no se anula en un abierto Ω, ¿existen logaritmos holomorfos de f en Ω? (dicho de otra forma ¿existen ramas holomorfas del logaritmo de f en Ω?) Respuestas cada vez más precisas a este problema se irán obteniendo a lo largo del curso.

El siguiente resultado nos dice que *un logaritmo continuo de una función holomorfa es automáticamente un logaritmo holomorfo.*

2.31 Proposición. *Sea $f : A \to \mathbb{C}^*$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Sea $g : A \to \mathbb{C}$ un logaritmo de f en A. Supongamos además que f es derivable en a y que g es continua en a. Entonces g es derivable en a y*

$$g'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

En consecuencia, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $0 \notin f(\Omega)$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en Ω y tal que $\mathrm{e}^{g(z)} = f(z)$ para cada $z \in \Omega$ entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Llamemos $b = g(a)$ y consideremos la aplicación

$$\varphi(z) = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^b}{z - b} \qquad z \neq b$$
$$\varphi(b) = \mathrm{e}^b$$

Claramente φ es continua en b. Además

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\mathrm{e}^{g(z)} - \mathrm{e}^{g(a)}}{z - a} = \varphi(g(z))\frac{g(z) - g(a)}{z - a}$$

Puesto que por hipótesis g es continua en a, y φ es continua en $g(a) = b$ tenemos que $\varphi(g(z))$ es continua en $z = a$ y $\varphi(g(a)) = \mathrm{e}^b \neq 0$. Por continuidad existe $\delta > 0$ de forma que si $z \in D(a,\delta) \cap A$, $z \neq a$ entonces $\varphi(g(z)) \neq 0$. Despejando de la expresión anterior tenemos

$$\frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \frac{1}{\varphi(g(z))}\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \qquad \text{para } z \in D(a,\delta) \cap A,\ z \neq a$$

Como $\lim\limits_{z \to a} \varphi(g(z)) = \mathrm{e}^b = f(a)$ deducimos que

$$\lim_{z \to a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

□

2.32 Corolario. *El logaritmo principal es una función holomorfa en* $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ *y su derivada viene dada por* $\log'(z)=\dfrac{1}{z}$ *para todo* $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_o^-$.

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior para las funciones $f(z)=z$, $g(z)=\log z$. Puesto que el logaritmo principal es continuo en $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ y $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ obtenemos que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ y su derivada viene dada para todo $z\in\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ por $\log'(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{1}{z}$. □

2.33 Teorema. *Sea* $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ *un conjunto abierto y* $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^*$ *una función holomorfa. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

(a) *f tiene argumentos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $\vartheta:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que $\vartheta(z)\in\operatorname{Arg}(f(z))$ para $z\in\Omega$.*

(b) *f tiene logaritmos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $g:\Omega\to\mathbb{C}$ tal que $g(z)\in\operatorname{Log} f(z)$ para $z\in\Omega$.*

(c) *f tiene logaritmos holomorfos en Ω, es decir, existe una función holomorfa $g:\Omega\to\mathbb{C}$ tal que $g(z)\in\operatorname{Log} f(z)$ para $z\in\Omega$.*

(d) *La función $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ tiene primitivas en Ω, es decir, existe $\varphi\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi'(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z\in\Omega$.*

Demostración.

$(a)\Rightarrow(b)$ Si ϑ es un argumento continuo entonces la aplicación $g(z)=\log|f(z)|+i\vartheta(z)$ es un logaritmo continuo de f.

$(b)\Rightarrow(a)$ Si g es un logaritmo continuo de f entonces $\operatorname{Im} g(z)$ es un argumento continuo de f.

$(b)\Rightarrow(c)$ Es consecuencia de la proposición anterior

$(c)\Rightarrow(d)$ Es consecuencia de la proposición anterior

$(d)\Rightarrow(b)$ Consideremos $h(z)=\exp(-\varphi(z))f(z)$. Tenemos que

$$h'(z)=\mathrm{e}^{-\varphi(z)}\left[-\frac{f'(z)}{f(z)}f(z)+f'(z)\right]=0$$

y, en consecuencia, h es constante en cada componente conexa de Ω. Sea $\lambda(z)$ una función constante en cada componente conexa – y por tanto continua en Ω – que verifique $\mathrm{e}^{\lambda(z)}=h(z)$ para todo $z\in\Omega$. Resulta así que

$$\mathrm{e}^{\varphi(z)+\lambda(z)}=f(z)\qquad(z\in\Omega)$$

Por tanto $\varphi(z)+\lambda(z)$ es un logaritmo continuo de $f(z)$ en Ω. □

2.34 Proposición. *En cualquier disco que no contenga al origen hay logaritmos holomorfos. Concretamente, si $a \in \mathbb{C}^*$, entonces en el disco $D(a, |a|)$ hay logaritmos holomorfos.*

Demostración. El apartado *(d)* de la proposición anterior (con $f(z) = z$) nos dice que debemos buscar una primitiva de $\frac{1}{z}$ en $D(a, |a|)$. Para ello vamos a expresar la función $\frac{1}{z}$ como suma de una serie de potencias centrada en a.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+z-a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\dfrac{z-a}{a}} = \left(\text{cuando } \frac{|z-a|}{|a|} < 1\right)$$
$$= \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-a}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(z-a)^n$$

La anterior igualdad es válida cuando $\frac{|z-a|}{|a|} < 1$, esto es, $z \in D(a, |a|)$. Definimos la función

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(z-a)^{n+1} \qquad z \in D(a, |a|)$$

El teorema de derivación afirma que la función φ es derivable y su derivada se obtiene derivando la serie término a término, esto es, $\varphi'(z) = \frac{1}{z}$. Por la demostración de la proposición anterior sabemos que, para un valor conveniente de λ, $\varphi(z) + \lambda$ es un logaritmo holomorfo en $D(a, |a|)$, es decir,

$$e^{\varphi(z)+\lambda} = z \qquad z \in D(a, |a|)$$

Haciendo $z = a$ y teniendo en cuenta que $\varphi(a) = 0$ resulta $e^{\lambda} = a$, luego λ ha de ser un logaritmo de a. Por comodidad podemos tomar el logaritmo principal, $\lambda = \log(a)$. En conclusión, la función

$$\Phi(z) = \log a + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(z-a)^{n+1} \qquad z \in D(a, |a|)$$

es un logaritmo holomorfo en $D(a, |a|)$. □

Inevitablemente surge la pregunta de si la función Φ coincide con el logaritmo principal en $D(a, |a|)$. Sabemos que

$$\Phi'(z) = \frac{1}{z} = \log'(z) \quad \text{y} \quad \Phi(a) = \log(a)$$

La igualdad $\Phi'(z) = \frac{1}{z} = \log'(z)$ es cierta siempre que ambas funciones, Φ y log, sean derivables. Como sabemos, log es holomorfo en $\mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$, lo que nos lleva a distinguir los casos:

- Si $\operatorname{Re}(a) \geqslant 0$, esto es, a se encuentra en el semiplano de la derecha, entonces tenemos que $D(a, |a|) \cap \mathbb{R}_o^- = \emptyset$ y, por tanto, $\log z$ es holomorfo en todo el disco $D(a, |a|)$. Puesto que ambas funciones tienen la misma derivada y coinciden en un punto son la misma función (ya que el disco es un dominio).

- Si $\operatorname{Re} a < 0$ y $a \notin \mathbb{R}^-$ entonces $D(a,|a|) \cap \mathbb{R}_o^- \neq \emptyset$ luego $\log z$ no es continua en todo el disco $D(a,|a|)$ y, evidentemente, las funciones Φ y $\log$ no pueden coincidir puesto que una es continua pero la otra no. Aunque en el disco completo es imposible que coincidan no así en el disco $D(a,|\operatorname{Im} a|)$, puesto que dicho disco no corta a $\mathbb{R}_o^-$ y el logaritmo principal sí es holomorfo ahí. Es más, las dos funciones coinciden en una región mayor que dicho disco, a saber, en la componente conexa en que queda dividido el disco $D(a,|a|)$ por el semieje $\mathbb{R}_o^-$ donde se encuentra el punto a (ver figura 2.2).

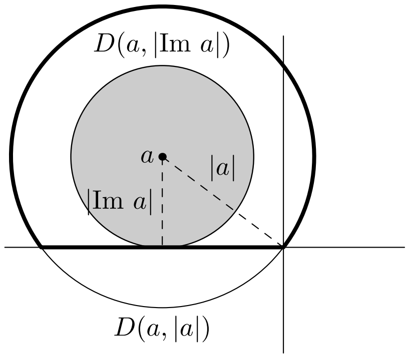


Figura 2.2. Analiticidad del logaritmo

Hemos justificado la siguiente igualdad

$$\log z = \log a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(z-a)^{n+1} \tag{2.4}$$

para $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y $z \in D(a,\rho_a)$ con

$$\rho_a = \begin{cases} |a| & \text{si } \operatorname{Re} a \geqslant 0 \\ |\operatorname{Im} a| & \text{si } \operatorname{Re} a < 0 \end{cases}$$

lo que prueba que el el logaritmo principal es una función analítica en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

2.35 Proposición. *Sea A un subconjunto* conexo *de $\mathbb{C}^*$, y supongamos que en A hay una rama continua, φ, del argumento. Entonces cualquier otro argumento continuo en A es de la forma $\varphi + 2k\pi$ para algún entero k.*

Demostración. Sea $\vartheta : A \to \mathbb{R}$ otro argumento continuo en A. La función $z \mapsto \dfrac{\varphi(z) - \vartheta(z)}{2\pi}$ es continua en A y toma valores enteros. Como A es conexo concluimos que dicha función es constante. □

2.36 Proposición. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{C}^*$ que contiene a una circunferencia centrada en cero entonces en A no hay ninguna rama continua del argumento. En particular, en $\mathbb{C}^*$ no hay argumentos continuos.*

Demostración. Supongamos que φ es un argumento continuo en A. Sea $C(0,\rho)^*$ una circunferencia contenida en A. La restricción de φ a $C(0,\rho)^* \setminus \{-\rho\}$ es un argumento continuo. Como el argumento principal también es un argumento continuo en dicho conjunto que es conexo deducimos, por la proposición anterior, que hay un entero k tal que $\arg(z) = \varphi(z) + 2k\pi$ para todo $z \in C(0,\rho)^* \setminus \{-\rho\}$. Como φ es continua en $C(0,\rho)^*$, la igualdad anterior implica que existe el límite $\displaystyle\lim_{\substack{z\to-\rho \\ |z|=\rho}} \arg(z)$ lo que, a su vez, implica que

$$\lim_{\substack{t\to\pi \\ 0<t<\pi}} \arg(\rho\, e^{it}) = \lim_{\substack{t\to\pi \\ 0<t<\pi}} t = \pi = \lim_{\substack{t\to-\pi \\ -\pi<t<0}} \arg(\rho\, e^{it}) = \lim_{\substack{t\to-\pi \\ -\pi<t<0}} t = -\pi$$

lo que es contradictorio. □

2.37 Definición. Dados una función compleja, f, definida en un subconjunto A de $\mathbb{C}$ y un número natural $n \geqslant 2$, cualquier función, $h : A \to \mathbb{C}$, tal que $(h(z))^n = f(z)$ para todo $z \in A$, se llama una *(función) raíz de orden n de f en A* o **una rama de la raíz n-ésima de f en A**. Una raíz de orden n de la función identidad en A se llama, simplemente, *una raíz de orden n en A* o **una rama de la raíz n-ésima en A**. Como de costumbre las (funciones) raíces de orden 2 se llaman raíces cuadradas. Las expresiones "raíz de orden n continua" o "raíz de orden n holomorfa" se entienden por sí mismas.

2.38 Proposición. *Sea f una función holomorfa y que no se anula en un abierto Ω. Si f tiene un logaritmo holomorfo en Ω entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, f también tiene raíces n-ésimas holomorfas en Ω.*

Demostración. Si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ es tal que $\exp(g(z)) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$, entonces la función $h(z) = \exp(g(z)/n)$ es holomorfa en Ω y $(h(z))^n = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. □

2.4.3. Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b\log a}$. Ahora, dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos son de la forma $\log a + i2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $e^{b(\log a + i2k\pi)}$ donde $k \in \mathbb{Z}$, es *una* potencia de base a y exponente b. Representaremos por $[a^b]$ el conjunto de todas ellas.

$$\boxed{[a^b] = \exp(b\,\mathrm{Log}(a)) = \{\exp(bw) : w \in \mathrm{Log}(a)\}}$$

De entre las potencias de base a y exponente b se destaca una:

$$\boxed{a^b = e^{b\log a}}$$

y dicho número se llama *valor principal* (o rama principal) de la potencia de base a y exponente b. Observa que si $b = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
[a^{1/n}] &= \left\{\exp\left(\frac{1}{n}\Big(\log|a| + i\arg(a) + 2k\pi i\Big)\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} = \\
&= \left\{\exp\left(\frac{1}{n}\log|a|\right)\exp\left(\frac{i}{n}\Big(\arg(a) + 2k\pi\Big)\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} = \\
&= \left\{\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\arg(a)+2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}
\end{aligned}$$

Es decir, $[a^{1/n}]$ es el conjunto de las raíces n-ésimas de a. Además

$$a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log a\right) = \exp\left(\frac{\log|a|}{n} + i\frac{\arg a}{n}\right) = |a|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg a}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg a}{n}\right)$$

es el valor principal de la raíz n-ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$.

La definición anterior da lugar a las funciones exponenciales complejas de base a, $z \longmapsto a^z$, definidas por $a^z = \exp(z\log a)$ que son holomorfas en todo el plano.

Por otro lado la función potencia compleja de exponente b, es la función $z \mapsto z^b$, dada por $z^b = \exp(b\log z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$.

Las funciones exponenciales cumplen evidentemente la igualdad $a^{z+w} = a^z a^w$ pero las funciones potencias no cumplen, en general como vimos al estudiar las raíces, la propiedad $(zw)^b = z^b w^b$. Esta igualdad se da en el caso de que

$$\exp(b\log(zw)) = \exp(b\log z + b\log w)$$

equivalentemente, puesto que la función exp es periódica de periodo $2\pi i$, cuando verifique que

$$b\log(zw) = b\log z + b\log w + 2k\pi i, \qquad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Como caso particular, cuando z y w pertenecen al primer cuadrante sabemos que la igualdad $\log(zw) = \log z + \log w$ es cierta con lo cual lo anterior se cumple para $k = 0$. Por los mismos motivos la igualdad $(z^b)^c = z^{bc}$ no es cierta en general.

2.4.4. Funciones trigonométricas complejas

Seno y coseno complejos

Sustituyendo en la fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i\operatorname{sen} t$, t por $-t$ tenemos

$$e^{-it} = \cos(-t) + i\operatorname{sen}(-t) = \cos t - i\operatorname{sen} t$$

y despejando obtenemos las llamadas “ecuaciones de Euler”:

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}}$$

Estas igualdades, válidas para todo $t \in \mathbb{R}$, también tienen sentido para números complejos. Por ello, para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos el coseno y el seno complejos por:

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

Es inmediato que el seno y coseno complejos extienden a las funciones seno y coseno reales.

Puesto que el coseno y el seno complejos están definidos como combinación de exponenciales, sus propiedades se deducen fácilmente a partir de las propiedades de la exponencial.

(1) Identidad fundamental $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

(2) La función coseno es par $\cos(-z) = \cos(z)$, y la función seno es impar $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$. Ambas son funciones periódicas con período 2π.

(3) Fórmulas de adición

$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$$
$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$$

(4) Las funciones seno y coseno son enteras y analíticas en $\mathbb{C}$ y

$$\cos'(z) = -\operatorname{sen} z, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \operatorname{sen}'(z) = \cos z, \quad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

(5) Relación con las funciones hiperbólicas

$$\cos(ix) = \cosh x \qquad \operatorname{sen}(ix) = -i \operatorname{senh} x$$

(6) Para todo $z = x + iy$ se cumplen las igualdades

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$
$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

(7) Las funciones seno y coseno complejos no están acotadas en $\mathbb{C}$ aunque sí lo están en bandas horizontales de anchura acotada.

(8) Las funciones seno y coseno complejas no tienen más ceros que los reales, esto es, $\operatorname{sen} z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), y $\cos z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Demostración. Las propiedades (1) a (4) son inmediatas a partir de la definición.

(5) Recordemos que el seno y coseno hiperbólico están definidos para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

luego

$$\cos(ix) = \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$
$$\operatorname{sen}(ix) = \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} = i\frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \operatorname{senh} x$$

(6) Sea $z = x + iy$ un número complejo cualquiera. Usando la fórmula de adición (3) tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cos(iy) + \cos x \operatorname{sen}(iy) = \text{(usando las igualdades (5))} \\ &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \\ \cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(iy) = \text{(de nuevo usando (5))} \\ &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \end{aligned}$$

(7) Usando la propiedad anterior resulta

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y = \\ &= \operatorname{sen}^2 x (1+\operatorname{senh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y = \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \\ |\cos z|^2 &= (\text{de forma análoga}) = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y\end{aligned}$$

y puesto que senh no está acotado se sigue que el coseno y el seno tampoco lo están. Ahora bien si acotamos la variable y entonces $\operatorname{senh} y$ está acotado y, por tanto, las funciones seno y coseno están acotadas en bandas horizontales de anchura acotada.

(8) De las igualdades

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \qquad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$

se deduce que $|\cos z| = 0$ (equivalentemente $\cos z = 0$) si, y sólo si, $\cos x = 0$ y $\operatorname{senh} y = 0$. Pero $\operatorname{senh} y = 0$ sólo en el caso en que $y = 0$. Con lo cual el coseno complejo se anula en los puntos $z = x + iy$ con $y = 0$, $x = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. El razonamiento para el seno es análogo.

Tangente compleja

Por analogía con la tangente real definimos la función tangente compleja como

$$\boxed{\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \big(z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\big)}$$

Puesto que el seno y el coseno son funciones enteras la tangente compleja es una función holomorfa en su dominio de definición $\mathbb{C} \setminus \{z : \cos z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Las propiedades de la tangente se deducen con facilidad de las propiedades del seno y el coseno. Por ejemplo, puedes comprobar que

$$\operatorname{tg}(z+w) = \frac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} w}$$

2.4.5. Funciones trigonométricas inversas

Arcocoseno complejo

Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$ se trata de calcular los complejos w tales que $\cos w = z$.

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z \iff e^{iw} + e^{-iw} - 2z = 0$$

puesto que $\exp(w) \neq 0$ para cualquier w, podemos multiplicar por e^{iw} la expresión anterior

$$e^{2iw} - 2z e^{iw} + 1 = 0$$

Poniendo $u = e^{iw}$, la ecuación anterior podemos escribirla $u^2 - 2zu + 1 = 0$, cuyas raíces son

$$u = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = z \pm i\sqrt{1 - z^2}$$

Observa que dichas raíces son distintas de 0, de hecho una es inversa de la otra pues su producto es igual a 1. Hemos obtenido que:

$$\exp(iw) = z \pm i\sqrt{1-z^2} \Longleftrightarrow iw \in \mathrm{Log}(z \pm i\sqrt{1-z^2}) \Longleftrightarrow \cos w = z$$

Naturalmente, hay infinitos valores de w que verifican la igualdad anterior. El conjunto de todos ellos se representa por $\mathrm{Arccos}\, z$.

$$\boxed{\mathrm{Arccos}\, z = \frac{1}{i}\mathrm{Log}(z \pm i\sqrt{1-z^2})}$$

De todos ellos elegimos el que corresponde al logaritmo principal y le llamamos valor principal (o rama principal) de $\mathrm{Arccos}\, z$ que está definido por:

$$\boxed{\arccos z = \frac{1}{i}\log(z + i\sqrt{1-z^2})}$$

Veamos que el $\arccos z$ extiende al arcocoseno real. En efecto, para $z = x \in [-1,1]$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\log(x + i\sqrt{1-x^2}) &= \frac{1}{i}\big(\log|x + i\sqrt{1-x^2}| + i\arg(x + i\sqrt{1-x^2})\big) = \\ &= \frac{1}{i}\big(\log 1 + i\arg(x + i\sqrt{1-x^2})\big) = \arg(x + i\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

Observemos que $(x, \sqrt{1-x^2})$ es un punto de la mitad superior de la circunferencia unidad y una medida del ángulo que forma el número complejo $x + i\sqrt{1-x^2}$ con el eje real positivo es precisamente el arco cuyo coseno es x. Además, para $x \in [-1,1]$ se tiene que $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Deducimos que $\arg(x + i\sqrt{1-x^2}) = \arccos x$.

Teniendo en cuenta que $\sqrt{1-z^2} = \exp(\frac{1}{2}\log(1-z^2))$, y que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, deducimos, por la regla de la cadena, que la función $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$ es holomorfa en el conjunto

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 - z^2 \notin \mathbb{R}_o^-\right\} = \mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)$$

Análogamente $\log(z + i\sqrt{1-z^2})$ es derivable en el conjunto

$$\Omega_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : z + i\sqrt{1-z^2} \notin \mathbb{R}_o^-\right\}$$

Como $z + i\sqrt{1-z^2}$ y $z - i\sqrt{1-z^2}$ son inversos, tenemos que

$$z + i\sqrt{1-z^2} \in \mathbb{R}_o^- \Rightarrow z - i\sqrt{1-z^2} \in \mathbb{R}_o^- \Rightarrow \left.\begin{cases} z \in \mathbb{R}^- \\ \sqrt{1-z^2} \in i\mathbb{R} \end{cases}\right\} \Rightarrow z \in]-\infty,-1]$$

deducimos que $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus]-\infty,-1] \supset \Omega$. Luego la rama principal del arcocoseno es holomorfo en Ω. La regla de la cadena nos permite calcular su derivada

$$\arccos'(z) = \frac{1}{i}\,\frac{1 + i\dfrac{-z}{\sqrt{1-z^2}}}{z + i\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,\frac{\sqrt{1-z^2} - iz}{iz - \sqrt{1-z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$$

Arcoseno complejo

Dado un número complejo z queremos calcular los complejos w tales que $\operatorname{sen} w = z$. El conjunto de tales números lo representaremos por $\operatorname{Arcsen} z$. Aunque podemos repetir el mismo proceso anterior, podemos aprovechar lo ya hecho y observar que

$$\operatorname{sen} w = \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right)$$

luego $\operatorname{sen} w = z$ si, y sólo si, $\dfrac{\pi}{2} - w \in \dfrac{1}{i}\operatorname{Log}\big(z \pm i\sqrt{1-z^2}\big)$. Es decir

$$\boxed{\operatorname{Arcsen} z = \frac{\pi}{2} + i\operatorname{Log}\big(z \pm i\sqrt{1-z^2}\big)}$$

El valor principal (o rama principal) del arcoseno, que notaremos por $\operatorname{arc\,sen} z$, se define eligiendo el logaritmo principal:

$$\boxed{\operatorname{arc\,sen} z = \frac{\pi}{2} + i\log\big(z + i\sqrt{1-z^2}\big) \qquad z \in \mathbb{C}}$$

y es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$. Observa que

$$\operatorname{arc\,sen} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} z$$

Arcotangente compleja

Dado $z \in \mathbb{C}$ queremos calcular los complejos w tales que $z = \operatorname{tg} w$, esto es, $z = \dfrac{\operatorname{sen} w}{\cos w}$ o, lo que es lo mismo , $z \cos w = \operatorname{sen} w$. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Arctg} z$. Escribiendo la definición de seno y coseno

$$\frac{\mathrm{e}^{iw} - \mathrm{e}^{-iw}}{2i} = z\,\frac{\mathrm{e}^{iw} + \mathrm{e}^{-iw}}{2}$$

Si $z = \pm i$ la ecuación anterior no tiene solución por lo que consideramos $z \neq \pm i$. Multiplicando por $\mathrm{e}^{iw} = u$ la expresión anterior resulta

$$u^2 - 1 = iz(u^2+1) \Rightarrow u^2(1-iz) = 1 + iz$$

puesto que $z \neq -i$ podemos escribir $u^2 = \dfrac{1+iz}{1-iz}$, esto es,

$$\mathrm{e}^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} \Longleftrightarrow w \in \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)$$

Por tanto

$$\boxed{\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

Definimos el valor principal (o rama principal) de $\operatorname{Arctg} z$ por:

$$\boxed{\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

Puedes probar ahora que la función $\operatorname{arctg} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i\rho : \rho \in \mathbb{R}, |\rho| \geqslant 1\}$

Es fácil probar que la rama principal del arcotangente complejo, al igual que ocurre con las ramas principales de las demás funciones trigonométricas complejas, extiende a la función arcotangente real.

Ejercicios propuestos

68. Calcula $\log(-1-i) - \log i$ y $\log\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$. Comenta el resultado obtenido.

69. Calcula el módulo y el argumento principal de los números

$$1+e^{i\vartheta},\; 1-e^{i\vartheta},\; -a\,e^{i\vartheta}$$

donde $|\vartheta| \leqslant \pi$ y $a > 0$.

70. Expresa los ocho números $\pm 1 \pm i$, $\pm\sqrt{3} \pm i$ en forma exponencial.

71. Calcula $\log z$ y $\operatorname{Log} z$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i,\, -i,\, e^{-3},\, e^{5i},\, 4,\, -5\,e,\, 1+i,\, e^{i},\, e^{-1+i},\, -1+i$$

72. Calcula $\log(3i) + \log(-1+i\sqrt{3})$ y $\log\big(3i(-1+i\sqrt{3})\big)$. Comenta el resultado.

73. a) Estudia, para $z \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{N}$, las igualdades:

$$\text{a) } \log(\exp(z)) = z; \quad \text{b) } \exp(\log(z)) = z; \quad \text{c) } \log\left(\frac{1}{z}\right) = -\log(z);$$

$$\text{d) } \log(\sqrt[n]{z}) = \frac{\log(z)}{n}; \quad \text{e) } \log(z^n) = n\log(z).$$

74. Calcula el valor de las funciones $f(z) = \sqrt{1/z}$ y $g(z) = 1/\sqrt{z}$ en el punto $z = -1$. ¿Dónde coinciden dichas funciones?

75. Calcula la imagen por la función exponencial de:

i) Una recta paralela a uno de los ejes coordenados.

ii) Una banda horizontal de anchura menor que 2π.

iii) Un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados.

iv) El conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$.

76. Prueba que el logaritmo principal establece una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ y $\Omega = \{z\in\mathbb{C}^* : -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$.

77. ¿Tiene la función exponencial límite en infinito? Dado $w\in\mathbb{C}$ con $|w| = 1$, estudia la existencia del límite $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \exp(rw)$.

78. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función verificando

$$f(z+w) = f(z)f(w), \quad \forall z,w \in \mathbb{C}.$$

Probar que si f es derivable en un punto entonces f es entera. Encontrar todas las funciones enteras que verifiquen la condición anterior. Dar un ejemplo de una función que verifique dicha propiedad y no sea entera.

79. Justifica que en ningún conjunto A que contenga a una circunferencia centrada en cero puede haber ramas continuas de la raíz cuadrada.

80. Con una interpretación adecuada de la suma justifica que:

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \qquad \operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$$

81. Indica el error en los razonamientos siguientes: $(-z)^2 = z^2$; por tanto $2\operatorname{Log}(-z) = 2\operatorname{Log}(z)$ y, por consiguiente, $\operatorname{Log}(-z) = \operatorname{Log}(z)$.

82. Calcula

$$[(-i)^i],\ i^{-3i},\ [i^{2/\pi}],\ [i^i],\ 1^{2i},\ (3^{-i})^{1/3},\ ((-i)^{1/2})^i,\ (1-i)^{1+i},\ [(-4)^i],\ 3^{1-i},\ ((-i)^i)^i.$$

83. Calcula las soluciones de $z^{1+i} = 4$.

84. Calcula las partes real e imaginaria de los números $\operatorname{sen}(1+i)$, $\cos(1-i)$, $\operatorname{tg}(1+2i)$.

85. Calcula $\operatorname{Arcsen}(1+i)$, $\operatorname{Arctg}(1-i)$, $\operatorname{arc\,sen} i$, $\operatorname{arc\,tg} 2i$.

86. Calcula la derivada de la función $f(z) = z^{2/3}$ en el punto $z = -8i$.

87. Prueba que la función $\operatorname{arc\,tg} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i\rho : \rho \in \mathbb{R}, |\rho| \geqslant 1\}$.

88. Estudia, interpretándolas convenientemente cuando sea necesario, las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \operatorname{Log}[a^b] = b\operatorname{Log}(a) \quad \text{b) } \log[a^b] = b\operatorname{Log}(a) \quad \text{c) } \log(a^b) = b\log a$$

89. Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:

$$i = (-1)^{1/2} = \left((-1)^3\right)^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

90. Indica los conjuntos de puntos $z\in\mathbb{C}$ donde las funciones e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{arc\,sen} z$, $\operatorname{arc\,tg} z$ toman:

a) Valores reales.

b) Valores imaginarios puros.

91. Da condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto $[a^b]$ de las potencias de base a y exponente b sea finito.

92. Estudia qué relación hay entre los conjuntos $[a^{m/n}]$ y $[(a^m)^{1/n}]$, donde $a\in\mathbb{C}^*$, $m,n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$. ¿Qué puede afirmarse, en particular, cuando m y n son primos entre sí?.

93. Sean $\rho > 0$, $\alpha < \beta$ tales que $\rho\alpha, \rho\beta, \alpha, \beta\in[-\pi,\pi]$. Prueba que $z\mapsto z^\rho$ es una biyección de $\Omega_1 = \{z\in\mathbb{C}^* : \alpha < \arg z < \beta\}$ sobre $\Omega_2 = \{z\in\mathbb{C}^* : \rho\alpha < \arg z < \rho\beta\}$.

94. Sean $a\in\mathbb{C}$ y $\{z_n\}$ una sucesión de complejos no nulos verificando que $\{|z_n|\}\to+\infty$. Justifica que

$$\left\{\left(1+\frac{a}{z_n}\right)^{z_n}\right\}\to\exp(a)\ ;\quad \left\{z_n\left(a^{\frac{1}{z_n}}-1\right)\right\}\to\log(a)\quad (a\neq 0)$$

95. Prueba que

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n\quad\forall z\in D(0,1)$$

a) Deduce que para todo $\theta\in]-\pi,\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos(n\theta)=\log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\theta)=\frac{\theta}{2}.$$

b) Cambiando z por $-z$, deduce que para todo $\theta\in]0,2\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}=-\log\left(2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}.$$

96. Calcula el dominio de convergencia y la suma de las series de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}-\frac{n}{3^n}\right)z^n,\qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(n^2+\frac{1}{n}\right)(z-1)^n$$

97. Justifica que la función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por:

$$f(z)=2z-(1+z)\log(1+z)+(1-z)\log(1-z)\quad (z\neq\pm 1),$$

y $f(1)=2-2\log(2)=-f(-1)$, es holomorfa en $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}:|x|\geqslant 1\}$ y, para todo $z\in\overline{D}(0,1)$, se verifica que $f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}$. Calcula, en particular, la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.

98. Supongamos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}c_n z^n$ tiene radio de convergencia $R\in\mathbb{R}^+$. Sea f la función suma de la serie. Prueba que para cada $r\in]0,R[$ se verifica la igualdad

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\,e^{it})|^2\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}$$

99. Estudia la convergencia puntual de las series de funciones:

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 0} \exp(-nz) \quad \text{b)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{3^n} \quad \text{c)} \sum_{n\geqslant 0} \exp(-nz^2) \quad \text{d)} \sum_{n\geqslant 0} nz\exp(-nz^2)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

100. Consideremos la función f definida por $f(z) = \log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1,-1\}$. Prueba que f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : |x|\geqslant 1\}$ y, en particular, en $D(0,1)$. Prueba también que $f(z) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $\forall z\in D(0,1)$ y aplica este resultado para calcular la suma de las series

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{2n+1} \quad (0<\theta<\pi)$$

2.5. Ramas de las funciones multiformes complejas

Recuerda que en matemáticas una **correspondencia** de un conjunto A en otro B es una aplicación de A en el conjunto, $\mathcal{P}(B)$, de las partes de B. Es decir, si $\mathcal{F}$ es una correspondencia de A en B, entonces para cada $a\in A$ $\mathcal{F}(a)$ es un subconjunto de B. Suele decirse que los elementos de $\mathcal{F}(a)$ son los “valores que $\mathcal{F}$ toma en a”. Al estudiar las funciones complejas elementales han aparecido de forma natural algunas correspondencias:

- La dada por $\mathcal{F}(z) = \operatorname{Log}(z)$ que a cada $z\neq 0$ hace corresponder el conjunto $\operatorname{Log}(z)$ de todos los logaritmos de z.
- La dada por $\mathcal{F}(z) = [z^{1/n}]$ que a cada complejo $z\neq 0$ hace corresponder el conjunto formado por sus n raíces n-ésimas.
- La dada por $\mathcal{F}(z) = \operatorname{Arg}(z)$ que a cada complejo $z\neq 0$ hace corresponder el conjunto formado por todos sus argumentos.

En general, si $\mathcal{F}$ es una correspondencia compleja, es decir, una correspondencia de un subconjunto de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, cualquier función $h : A\to\mathbb{C}$ que verifique $h(z)\in\mathcal{F}(z)$ para todo $z\in A\subset\mathbb{C}$ se llama una **rama** o una **determinación** de $\mathcal{F}$ en A. El logaritmo principal, el valor principal de la raíz n-ésima y el argumento principal son ramas de las respectivas correspondencias.

En el contexto de la variable compleja es frecuente llamar a las correspondencias **“funciones multiformes”** y también **“funciones multivaluadas”** aunque esta última expresión sea un oxímoron, porque en matemáticas el término “función” es sinónimo de “aplicación” y, por definición, una aplicación toma en cada punto de su dominio un único valor. Te digo esto porque hay que tener las ideas claras y para que una terminología inapropiada no te despiste.

El problema en el que estamos interesados es el siguiente: dados un conjunto $\Omega\subset\mathbb{C}$, una correspondencia compleja $\mathcal{F}$ definida en Ω y un conjunto $A\subset\Omega$ queremos saber si puede asegurarse la existencia en A de ramas continuas o ramas holomorfas de $\mathcal{F}$. Este problema no siempre tiene solución como pone de manifiesto la proposición 2.36. Por otra parte, hemos visto que en todo disco abierto que no contenga al origen hay ramas continuas del argumento y ramas holomorfas del logaritmo y, por tanto, ramas holomorfas de la raíz n-ésima cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

2.5.1. Ramas holomorfas del logaritmo y de la raíz n-ésima

A la vista del teorema 2.33, es conveniente estudiar la existencia de ramas continuas del argumento, pues donde hay ramas continuas del argumento también hay ramas holomorfas del logaritmo y de las raíces n-ésimas. Conviene saber que en un conexo dichas ramas continuas están determinadas de manera única cuando se especifica su valor en un punto. El siguiente resultado es consecuencia directa de la proposición 2.35. Por comodidad de referencia, vuelvo a dar aquí la demostración.

2.39 Proposición. *Sea $A \subset \mathbb{C}^*$ un conjunto conexo no vacío.*

a) Supongamos que φ y ψ son ramas continuas del argumento en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(z) = \psi(z) + 2k\pi$ para todo $z \in A$.

b) Supongamos que f y g son ramas continuas del logaritmo en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = g(z) + i2k\pi$ para todo $z \in A$.

c) Supongamos que α y β son ramas continuas de la raíz n-ésima en A. Entonces hay un número u que es una raíz n-ésima de 1 tal que $\alpha(z) = u\beta(z)$ para todo $z \in A$.

Demostración. *a)* Para todo $z \in A$ se tiene que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ y $\psi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ y, por tanto, para todo $z \in A$ hay un entero $k(z) \in Z$ tal que $\varphi(z) - \psi(z) = 2k(z)\pi$. La función $h(z) = \dfrac{\varphi(z) - \psi(z)}{2\pi}$ es continua en A y , por ser A conexo, su imagen $h(A) \subset \mathbb{R}$ es un intervalo. Como la función h toma valores enteros deducimos que h es constante en A.

b) Toda rama continua del logaritmo en A es de la forma $z \mapsto \log|z| + i\varphi(z)$ donde φ es una rama continua del argumento en A. Por tanto el punto *b)* es consecuencia de *a)*.

c) La función $\gamma(z) = \dfrac{\alpha(z)}{\beta(z)}$ es continua en A por lo que su imagen, $\gamma(A)$, debe ser un conexo. Como $(\gamma(z))^n = 1$ se tiene que $\gamma(z) \in [1^{1/n}]$, es decir γ toma un número finito de valores. En consecuencia el conexo $\gamma(A)$ tiene que reducirse a un punto. Es decir, existe $u \in [1^{1/n}]$ tal que $\gamma(z) = u$ para todo $z \in A$. □

2.40 Corolario. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un dominio.*

1. *Si en Ω hay una rama holomorfa del logaritmo entonces hay infinitas ramas holomorfas del logaritmo, todas ellas se obtienen a partir de una dada sumando una constante de la forma $2k\pi i$ donde $k \in \mathbb{Z}$.*

2. *Si en Ω hay una rama holomorfa de la raíz n-ésima entonces hay exactamente n ramas holomorfas de la raíz n-ésima, todas ellas se obtienen a partir de una dada multiplicando por las raíces n-ésimas de la unidad.*

Sabemos que la rama principal del argumento definida por $\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) \cap]-\pi, \pi]$ es continua en $\mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$ y discontinua en $\mathbb{R}^-$. El conjunto $\mathbb{R}^-$ es una semirrecta en el plano. Podemos generalizar fácilmente este resultado para cualquier semirrecta. Dado un número $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos

$$S_\alpha = \left\{ \rho \, e^{i\alpha} : \rho > 0 \right\}$$

Es decir, S_α es la semirrecta con vector de dirección $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Observa que $S_\alpha = S_{\alpha+2\pi}$ y que $\mathbb{R}^- = S_{-\pi} = S_\pi$. Definamos $\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C}^* \backslash S_\alpha$. Observa que $\mathbb{C}_\alpha$ es un dominio por lo que una rama continua del argumento o del logaritmo o de la raíz n-ésima en $\mathbb{C}_\alpha$ está determinada de forma única cuando se especifica su valor en un punto.

2.41 Definición. Dado un número real, α, llamaremos $\arg_\alpha$ a la rama del argumento definida para todo $z \in \mathbb{C}_\alpha$ por $\arg_\alpha(z) = \operatorname{Arg}(z) \cap]\alpha, \alpha + 2\pi[$. Es decir, $\arg_\alpha(z)$ es el único argumento de $z \in \mathbb{C}_\alpha$ que está en el intervalo $]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

2.42 Proposición. *La rama del argumento* $\arg_\alpha$ *viene dada para todo* $z \in \mathbb{C}_\alpha$ *por:*

$$\arg_\alpha(z) = \arg(-z\, e^{-i\alpha}) + \pi + \alpha \tag{2.5}$$

Dicha rama es continua en $\mathbb{C}_\alpha$.

Demostración. Observa que $-z\,e^{-i\alpha} \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow z = \rho\, e^{i\alpha}$ con $\rho > 0 \Leftrightarrow z \in S_\alpha$. Por tanto, para $z \in \mathbb{C}_\alpha$ se tiene que $-\pi < \arg(-z\,e^{-i\alpha}) < \pi$ y deducimos que $\alpha < \arg(-z\,e^{-i\alpha}) + \alpha + \pi < \alpha + 2\pi$. Además, como $\arg(-z\,e^{-i\alpha}) \in \operatorname{Arg}(-z\,e^{-i\alpha})$, $\alpha \in \operatorname{Arg}(e^{i\alpha})$ y $\pi \in \operatorname{Arg}(-1)$, se sigue que el número $\arg(-z\,e^{-i\alpha}) + \alpha + \pi \in \operatorname{Arg}(-z\,e^{-i\alpha}\,e^{i\alpha}(-1)) = \operatorname{Arg}(z)$. Hemos probado así la igualdad (2.5). Finalmente, la aplicación $\arg_\alpha(z)$ es continua en $\mathbb{C}_\alpha$ por ser la composición de las aplicaciones continua $z \mapsto -z\,e^{-i\alpha}$ de $\mathbb{C}_\alpha$ en $\mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$ y $z \mapsto \arg(z) + \alpha + \pi$ de $\mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$ en $\mathbb{R}$. □

Observación. La rama $\arg_\alpha(z)$ puede extenderse a todo $\mathbb{C}^*$ definiéndola en los puntos de la semirrecta S_α. Sea $z_0 = \rho\, e^{i\alpha}$ con $\rho > 0$. Definamos $z_n = (\rho + i/n)\, e^{i\alpha}$. Tenemos que $\{z_n\} \to z_0$ y

$$\arg_\alpha(z_n) = \arg(-z_n\, e^{-i\alpha}) + \pi + \alpha = \arg(-\rho - i/n) + \pi + \alpha \to -\pi + \pi + \alpha = \alpha$$

Definamos ahora $z_n = (\rho - i/n)\, e^{i\alpha}$. Tenemos que $\{z_n\} \to z_0$ y

$$\arg_\alpha(z_n) = \arg(-z_n\, e^{-i\alpha}) + \pi + \alpha = \arg(-\rho + i/n) + \pi + \alpha \to \pi + \pi + \alpha = \alpha + 2\pi$$

Esto nos dice que la función $\arg_\alpha$ no tiene límite en los puntos de S_α. Por tanto, cualquier extensión que hagamos de dicha función a $\mathbb{C}^*$ será discontinua en S_α. Tenemos dos posibles elecciones razonables para definir $\arg_\alpha$ en S_α: o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha$ o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha + 2\pi$ para todo $z \in S_\alpha$. En ambos casos la función así extendida, que seguiremos notando igual, será discontinua en S_α. Pero en el primero será continua cuando nos acerquemos a puntos de S_α por el semiplano $\alpha < \arg_\alpha(z) < \alpha + \pi$, y en el segundo será continua cuando nos acerquemos a puntos de S_α por el semiplano $\alpha + \pi < \arg_\alpha(z) < \alpha + 2\pi$. En el primer caso la función $\arg_\alpha$ toma valores en $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ y en el segundo caso en $]\alpha, \alpha + 2\pi]$. La elección de una u otra posibilidad dependerá de cada situación concreta.

Observa también que, al ser $S_\alpha = S_{\alpha+2k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$, las ramas $\arg_\alpha$ y $\arg_{\alpha+2k\pi}$ son continuas en $\mathbb{C}_\alpha$.

Convenio. A efectos de este curso, si no se especifica lo contrario, entenderemos que $\arg_\alpha(z) = \alpha + 2\pi$ para todo $z \in S_\alpha$. Con este convenio tenemos que $\arg_{-\pi}$ coincide con el argumento principal.

2.43 Corolario. *Para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$ *representaremos por* $\log_\alpha$ *la rama del logaritmo definida en* $\mathbb{C}^*$ *por*

$$\boxed{\log_\alpha(z) = \log|z| + i\arg_\alpha(z)}$$

Dicha rama es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus S_\alpha$ *y es discontinua en* S_α.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ *representaremos por* $[z^{1/n}]_\alpha$ *la rama de la raíz n-ésima definida en* $\mathbb{C}^*$ *por*

$$\boxed{[z^{1/n}]_\alpha = \mathrm{e}^{\log_\alpha(z)/n} = \sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\arg_\alpha(z)/n}}$$

Dicha rama es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus S_\alpha$ *y es discontinua en* S_α.

Observación. Con la notación que acabamos de introducir y el convenio anterior, la rama $\log_{-\pi}$ coincide con la rama principal del logaritmo, por lo que seguiremos usando para ella la notación usual $\log_{-\pi}(z) = \log(z)$. Análoga situación se tiene para la rama $[z^{1/n}]_{-\pi}$ que coincide con la rama principal de la raíz n-ésima, por lo que mantendremos para ella la notación usual $[z^{1/n}]_{-\pi} = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$.

Observa también que, por lo antes dicho, la rama $\log_{\alpha+2k\pi}$ donde $k \in \mathbb{Z}$ es holomorfa en $\mathbb{C}_\alpha$ y discontinua en S_α.

Observación. En muchos textos se dice que la semirrecta $S_\alpha \cup \{0\}$ produce un “corte” en el plano y llaman a $\mathbb{C}_\alpha$ el plano “cortado”. Volveremos más adelante sobre esto.

A veces interesa definir ramas holomorfas de la raíz n-ésima de una función holomorfa f en un cierto conjunto Ω. Para ello puedes hacer lo siguiente: compruebas que la imagen de Ω por f, esto es, el conjunto $f(\Omega)$, está contenido en algún dominio del tipo $\mathbb{C}_\alpha$ para algún valor de α. Entonces la función $h(z) = \exp(\log_\alpha(f(z))/n)$ es una rama holomorfa de la raíz n-ésima de f en Ω. En cualquier caso, definiendo $\Omega_\alpha = \{z \in \Omega : f(z) \in \mathbb{C}_\alpha\}$, se tiene que la función $h(z) = \exp(\log_\alpha(f(z))/n)$ es una rama holomorfa de la raíz n-ésima de f en el abierto Ω_α.

Más adelante veremos cómo al extender una función holomorfa por el procedimiento de “prolongación analítica” podemos obtener una función compleja multiforme. Por ahora es suficiente con lo dicho.

Sobre la notación que estamos usando

Creo que una de las cosas que complica innecesariamente el estudio de las funciones de variable compleja es la deficiente notación que se emplea con demasiada frecuencia. El hecho de que no haya una notación unánimemente aceptada permite a cada autor un cierto margen de discrecionalidad para elegir la que más le gusta. Las cosas son así y no parece que vayan a cambiar por ahora, pero dentro de ese margen de discrecionalidad que existe creo que cualquier notación debe respetar dos reglas básicas:

Un mismo símbolo no debe usarse para representar objetos matemáticos distintos, es decir, un símbolo debe tener siempre el mismo significado.

Dos símbolos diferentes no deben representar el mismo objeto matemático.

Parecen reglas de sentido común ¿verdad? Pues habrá que convenir en que el sentido común no es demasiado *común*. Porque en muchísimos textos de variable compleja las notaciones que se usan no respetan estas normas. Por ejemplo, de acuerdo a estas normas, los símbolos que representan funciones de variable real deben conservarse iguales cuando extendemos dichas funciones al campo complejo. Así lo estamos haciendo nosotros. Por ejemplo, las funciones que representamos con $\log(z)$, $\operatorname{arc sen}(z)$ o $\operatorname{arc tg}(z)$, son las extensiones al campo complejo de las respectivas funciones reales. Su significado se ha definido de forma precisa y siempre tendrán el mismo significado. Sucede que en muchos textos el uso que estamos haciendo nosotros de las mayúsculas y minúsculas se invierte. Te habrás dado cuenta de que siempre usamos las mayúsculas para representar las funciones multiformes complejas y las minúsculas para representar sus "ramas principales", y éstas se definen de forma que extiendan a las correspondientes funciones reales. Pues bien, en muchos textos se hace justamente al revés. Ello tiene como consecuencia que se están usando dos símbolos para representar lo mismo, y además lo que antes era una función ahora deja de serlo: si $\operatorname{arc sen} z$ es un conjunto de infinitos números complejos habrá que aceptar que $\operatorname{arc sen}(\pi/2)$ ya no es igual a 1. Otras veces la cosa es peor. Ya comentamos que las notaciones que con frecuencia se usan para las raíces n-ésimas son bastante confusas: a veces el símbolo $\sqrt[n]{z}$ representa todos los números complejos cuya potencia n-ésima es z y a veces representa alguno de estos números sin que se sepa exactamente cuál de ellos.

Ejercicios propuestos

101. ¿Qué condición debe cumplir α para que $\mathbb{C}_\alpha \supset \mathbb{R}^+$? Supuesto que esto se cumple, ¿cuándo se verifica que $\log_\alpha(1) = 0$? Supuesto que esto también se cumple, ¿cuál es la restricción de $\log_\alpha$ a $\mathbb{R}^+$?

102. Sean $z, w \in \mathbb{C}_\alpha$ indica bajo qué condiciones se verifica la igualdad

$$\log_\alpha(zw) = \log_\alpha(z) + \log_\alpha(w).$$

103. Sea $t \in]\alpha, \alpha+2\pi[\cap]\beta, \beta+2\pi[$. Compara $\log_\alpha e^{it}$ y $\log_\beta e^{it}$. Describe la intersección $\mathbb{C}^*_\alpha \cap \mathbb{C}^*_\beta$ y compara en ella las ramas $\log_\alpha$ y $\log_\beta$.

104. Dado $a \in \mathbb{Z}$ define ramas holomorfas de $\operatorname{Log}(z-a)$. Indica abiertos en donde hay ramas holomorfas de $\operatorname{Log}(z(z-1))$.

105. Dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ define ramas holomorfas de $[(z-a)(z-b)]^{1/2}$.

106. Define ramas holomorfas de $[z(1-z)^3]^{1/4}$ en dominios apropiados.

107. Sean a y b números complejos distintos. Indica dominios en $\mathbb{C}$ en los que hay ramas holomorfas de la función multiforme $\operatorname{Log}\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$.

2.6. Aplicaciones de los números complejos

Como ya hemos dicho anteriormente, la exponencial compleja es la herramienta más útil para trabajar con funciones sinusoidales, esto es, las funciones seno y coseno. Muchísimos procesos naturales, entre los que destacan por su importancia y universalidad los movimientos oscilatorios y ondulatorios, se describen adecuadamente por medio de funciones sinusoidales. Eso explica la presencia de la exponencial compleja y de los números complejos en teorías que, a primera vista, nada tienen que ver con ellos. Veamos algunos ejemplos.

2.6.1. Movimiento armónico simple

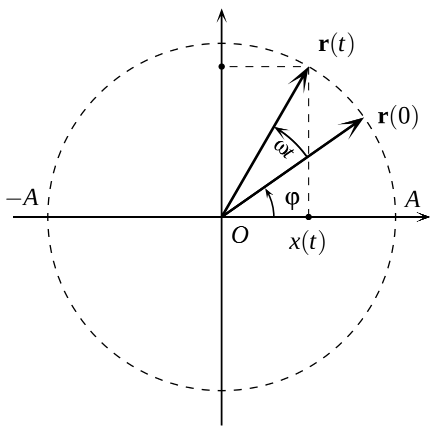


Figura 2.3. Movimiento circular

Un número complejo es un vector del plano que, escrito en forma polar, tiene asociado un ángulo y por eso, los números complejos son muy apropiados para representar giros y movimientos circulares. Consideremos un móvil que recorre una circunferencia centrada en el origen y de radio R con una velocidad angular constante ω. Supongamos que su posición inicial para $t=0$ viene dada por $(A\cos\varphi, A\operatorname{sen}\varphi)$. La posición de dicho móvil en el tiempo t es

$$\mathbf{r}(t) = \big(A\cos(\omega t+\varphi), A\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)\big)$$

Usando números complejos, podemos escribir

$$\mathbf{r}(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + iA\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$$

Que se expresa mejor con la exponencial compleja:

$$\mathbf{r}(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + iA\operatorname{sen}(\omega t+\varphi) = A\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)} = A\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

Recuerda que multiplicar por $\mathrm{e}^{i\omega t}$ es un giro de amplitud ωt. La igualdad $\mathbf{r}(t) = A\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ nos dice que la posición del móvil en el tiempo t se obtiene girando el vector que representa su posición inicial $\mathbf{r}(0) = A\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ un giro de amplitud ωt.

La proyección sobre el eje de abscisas del vector $\mathbf{r}(t)$ es la primera componente de dicho vector:

$$x(t) = \operatorname{Re}\mathbf{r}(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \tag{2.6}$$

Interpretamos $|x(t)|$ como la distancia al origen en el instante t de un móvil que se desplaza sobre el eje de abscisas y cuya posición en el tiempo t viene dada por la igualdad (2.6). Observa que dicho móvil recorre el segmento $[-A,A]$ con un movimiento que se caracteriza porque se repite a intervalos regulares de tiempo, pues definiendo $T=2\pi/\omega$, se tiene que:

$$x(t+T) = A\cos(\omega(t+T)+\varphi) = A\cos(\omega t+2\pi+\varphi) = A\cos(\omega t+\varphi) = x(t)$$

Dicho movimiento se llama *movimiento armónico simple*. Naturalmente, la proyección sobre el eje de ordenadas del vector $\mathbf{r}(t)$ también describe un movimiento armónico simple de ecuación

$$y(t) = \operatorname{Im}\mathbf{r}(t) = A\operatorname{sen}(\omega t+\varphi) \tag{2.7}$$

Las ecuaciones (2.6) y (2.7) representan un mismo tipo de movimiento pues un seno no es más que un coseno retrasado en $\pi/2$, como se sigue de la igualdad $\cos(x-\pi/2)=\operatorname{sen} x$.

En el movimiento armónico simple $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ el número A se llama *amplitud*, el número $\omega t+\varphi$ se llama *fase*, siendo φ la *fase inicial*; ω es la *frecuencia angular* que se mide en radianes por segundo. El número $T=2\pi/\omega$ es el *periodo*, que es el tiempo, medido en segundos, que el móvil tarda en completar un ciclo. El número $f=1/T$ es la *frecuencia*, que es el número de ciclos recorridos en un segundo. La unidad de la frecuencia es el ciclo por segundo que se llama *herzio*.

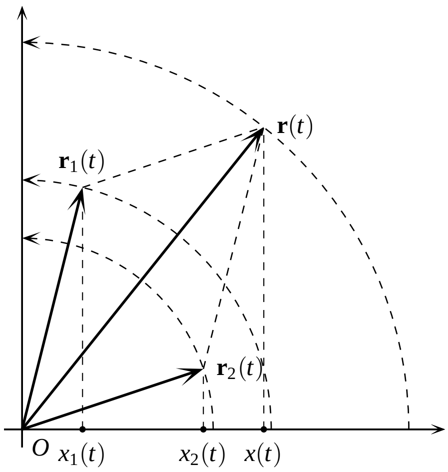


Figura 2.4. Composición de movimientos armónicos

La representación compleja proporciona una visualización gráfica del movimiento que es muy útil para el estudio de la composición de movimientos armónicos simples. Consideremos dos movimientos armónicos simples de igual frecuencia dados por

$$x_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1), \qquad x_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

Queremos estudiar el movimiento dado por $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$. La representación compleja de los movimientos permite dar una respuesta sin necesidad de hacer cálculos. Pongamos

$$x_1(t)=\operatorname{Re}\mathbf{r}_1(t)=\operatorname{Re}A_1\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi_1)}; \qquad x_2(t)=\operatorname{Re}\mathbf{r}_2(t)=\operatorname{Re}A_2\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi_2)}$$

Claramente, $x(t)=x_1(t)+x_2(t)=\operatorname{Re}(\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t))$. Como los vectores $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ giran con igual velocidad angular, ω, el vector suma $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t)$ también gira con la misma velocidad angular (el paralelogramo de lados $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ gira todo él con velocidad angular ω). Deducimos que $x(t)=\operatorname{Re}(\mathbf{r}(t))$ es la ecuación de un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω, amplitud igual al módulo de $\mathbf{r}(t)$ (que debe ser constante) y fase igual al argumento del número complejo $\mathbf{r}(t)$. El cuadrado del módulo de una suma ya sabemos calcularlo. En nuestro caso es

$$|\mathbf{r}(t)|^2=|\mathbf{r}_1(t)|^2+|\mathbf{r}_2(t)|^2+2\operatorname{Re}(\mathbf{r}_1(t)\overline{\mathbf{r}_2(t)})=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

Como la frecuencia angular debe ser ω, la fase será $\omega t+\varphi$ donde φ es la fase inicial, que es el argumento del número complejo

$$\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_1(0)+\mathbf{r}_2(0)=A_1\,\mathrm{e}^{i\varphi_1}+A_2\,\mathrm{e}^{i\varphi_2}=(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2)+i(A_1\operatorname{sen}\varphi_1+A_2\operatorname{sen}\varphi_2)$$

que ya debes saber calcular.

2.6.2. Circuitos eléctricos

En el análisis de circuitos eléctricos los números complejos, con el nombre de *fasores*, fueron introducidos en 1863 por el matemático e ingeniero Charles Proteus Steinmetz (1865-1923). Un fasor es un número complejo que representa la amplitud y fase inicial de una sinusoide. Los fasores proporcionan una herramienta útil para estudiar circuitos eléctricos cuyo voltaje es de tipo sinusoidal $V(t)=V_m\cos(\omega t+\varphi)$. Aquí $V_m>0$ es la amplitud o máximo valor del voltaje, y φ la fase inicial.

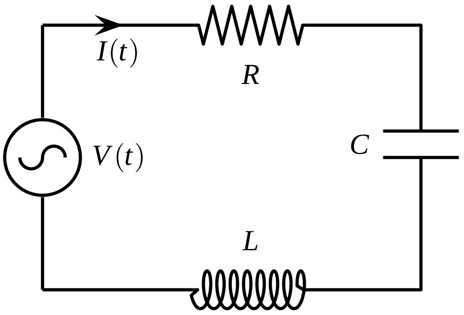


Figura 2.5. Circuito RLC

Podemos asociar a $V(t)$ un fasor que representamos $\mathbf{V}$ y es el número complejo $\mathbf{V}=V_m\,\mathrm{e}^{i\varphi}$. De esta forma podemos escribir $V(t)=\operatorname{Re}(\mathbf{V}\,\mathrm{e}^{i\omega t})$ con lo que separamos la información de frecuencia y de fase. Observa que, conocida la frecuencia, la sinusoide queda determinada de forma única por su fasor asociado. La derivada de una sinusoide es otra sinusoide. El fasor que representa a la derivada se expresa muy fácilmente mediante el fasor que representa a la sinusoide.

$$V'(t)=\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=-V_m\omega\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)=V_m\omega\cos(\omega t+\varphi+\pi/2)=\operatorname{Re}(i\omega\mathbf{V}\,\mathrm{e}^{i\omega t})$$

Deducimos que el fasor que representa a $V'(t)$ es $i\omega\mathbf{V}$. Observa que $i\omega\mathbf{V}=\omega V_m\,\mathrm{e}^{i(\varphi+\pi/2)}$, por lo que el fasor que corresponde a la derivada de una sinusoide va adelantado 90 grados respecto a la sinusoide.

De la misma forma, el fasor que representa a la primitiva de la sinusoide $V(t)$ es $\dfrac{1}{i\omega}\mathbf{V}$ y va retrasado 90 grados respecto a la sinusoide.

Supongamos que en el circuito de la figura (2.5) se tiene que la intensidad de la corriente viene dada por una sinusoide (lo cual se sabe que es así cuando la fuerza electromotriz aplicada es sinusoidal). Pongamos $I(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi)$ y sea $\mathbf{I}$ su fasor asociado. Expresemos la caída de potencial en cada uno de los elementos que forman el circuito mediante los fasores de la corriente y el voltaje. Se trata de un circuito RLC que consta de una resistencia de R ohmios, un condensador de capacitancia C y un inductor, con inductancia L.

La diferencia de potencial en los extremos de la resistencia viene dada por

$$V_R(t)=RI(t)=RI_m\cos(\omega t+\varphi)$$

La relación entre los fasores respectivos es

$$\mathbf{V_R} = R\mathbf{I}.$$

Como $R > 0$ se tiene que el voltaje a través de una resistencia está en fase con la corriente.

Es sabido que una corriente variable en un inductor produce un campo magnético que da lugar a una fuerza electromotriz inducida que se opone a la fuerza electromotriz aplicada, lo que origina una caída de potencial dada por

$$V_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

Deducimos que la relación entre los correspondientes fasores es

$$\mathbf{V_L} = i\omega L\mathbf{I}$$

y por tanto el voltaje a través de un inductor va adelantado 90 grados respecto a la corriente.

Llamando $Q(t)$ a la carga que almacena el condensador en el tiempo t, se sabe que la diferencia de potencial entre los extremos del condensador viene dada por la igualdad

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(s)\,\mathrm{d}s$$

Y deducimos que la relación entre los correspondientes fasores es

$$\mathbf{V_C} = \frac{1}{i\omega C}\mathbf{I} = -\frac{i}{\omega C}\mathbf{I}$$

y por tanto el voltaje a través de un inductor va retrasado 90 grados respecto a la corriente.

La suma de las diferencias de potencial a través de los distintos elementos del circuito debe ser igual al voltaje aplicado. En términos de los fasores asociados, esto quiere decir que:

$$R\mathbf{I} + i\omega L\mathbf{I} - \frac{i}{\omega C}\mathbf{I} = \left(R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right)\mathbf{I} = \mathbf{V} \tag{2.8}$$

El número complejo

$$\mathbf{Z} = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

se llama *impedancia*. La impedancia depende de la frecuencia de la fuerza electromotriz aplicada y de las características del circuito. Cuando se conocen la impedancia y el voltaje, podemos calcular el fasor de la corriente por la igualdad

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{V}}{R + i\omega L - \dfrac{i}{\omega C}}$$

y la corriente en el circuito viene dada por $I(t) = \mathbf{I}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$.

Tenemos que

$$|\mathbf{I}| = \frac{|\mathbf{V}|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

El número $\omega L - \dfrac{1}{\omega C}$ se llama *reactancia*. El valor de la frecuencia para el que la reactancia se anula viene dado por $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ y se llama *frecuencia de resonancia*. Es el valor de la frecuencia para el cual el valor de $|\mathbf{I}|$ es máximo.

Procesamiento digital de señales

Como sin duda sabes, los formatos digitales más frecuentes de audio e imagen son, respectivamente, MP3 y JPG. Cuesta trabajo imaginar cómo sería Internet sin estos formatos. Lo que quizás no sepas es que la codificación MP3 y la JPG se llevan a cabo con algoritmos que usan números complejos. El hecho, por extraño que pueda parecer, es que las principales herramientas para trabajar con todo tipo de señales (audio, vídeo, voz, imagen,...) son complejas. La *transformada Z, la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto*, la *Transformada Discreta de Fourier*, la *Función de Transferencia*, los *modelos de polos y ceros*, la *Transformada de Laplace* y otras muchas herramientas básicas para el tratamiento de señales, son todas ellas transformaciones que usan números complejos. Todavía más, las propias señales se caracterizan por su *espectro* que ¡es un conjunto de números complejos! Si te sientes atraído por el apasionante mundo del tratamiento digital de señales, todo lo que sepas de números complejos te será útil en tu trabajo.

Capítulo 3

Teoría de Cauchy Elemental

Introducción

En este capítulo estaremos interesados en el problema de la existencia de primitivas, problema que, por el teorema 2.33, está estrechamente relacionado con la existencia de logaritmos holomorfos.

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que toda función real de variable real continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo. La situación es muy distinta para funciones complejas de variable compleja. Ni siquiera el hecho de que una función sea holomorfa en un dominio garantiza que tenga primitivas en dicho dominio.

Ejemplo. La función $f(z) = \dfrac{1}{z}$ es holomorfa en el dominio $\mathbb{C}^*$ y no tiene primitivas en dicho dominio.

En efecto, en virtud del teorema 2.33, la existencia de primitivas en $\mathbb{C}^*$ de la función $f(z) = \dfrac{1}{z}$ equivale a la existencia de argumentos continuos en $\mathbb{C}^*$ y, por la proposición 2.36, sabemos que no hay argumentos continuos en $\mathbb{C}^*$.

A pesar de este resultado, en este capítulo probaremos que toda función holomorfa en un disco tiene primitivas en dicho disco. Es decir, toda función holomorfa en un abierto tienen *localmente* primitivas en dicho abierto.

Como ya debes saber, la herramienta que se usa para la construcción de primitivas es la integración. No debe extrañarte por ello que en este capítulo nuestra herramienta básica sea la integración de funciones complejas. Uno de los resultados más importantes que obtendremos es la llamada “fórmula de Cauchy para una circunferencia” que permite representar los valores que una función holomorfa toma en un disco por medio de una integral en la que solamente intervienen los valores de dicha función en la circunferencia frontera del disco. De dicha fórmula se deduce sin dificultad uno de los resultados más importantes y sorprendentes de la teoría de funciones holomorfas, el teorema de Taylor que afirma que toda función holomorfa es analítica.

También obtendremos en este capítulo el teorema de Liouville estableciendo que toda función entera y acotada es constante y, como consecuencia, el Teorema Fundamental del Álgebra afirmando que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Lo más llamativo de todo es que estos resultados los vamos a obtener con facilidad y con una herramienta muy elemental: la integral de Riemann de funciones continuas.

3.1. Integral de Riemann para funciones de variable real con valores complejos

Diremos que una función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ es *integrable Riemann* en el intervalo $[a,b]$, y escribiremos $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$, si las funciones $\operatorname{Re}(\varphi)$ y $\operatorname{Im}(\varphi)$ son integrables Riemann en $[a,b]$ (en el sentido que conocemos, ya que son funciones reales de variable real definidas en un intervalo) en cuyo caso definimos la integral de φ en $[a,b]$ como el número complejo

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re}\varphi(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \operatorname{Im}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Es claro que una condición necesaria para la integrabilidad de φ es la acotación. La integrabilidad se puede caracterizar en los siguientes términos:

3.1 Teorema (Criterio de integrabilidad de Lebesgue.)**.** *Sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ una función acotada. Entonces $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$ si, y sólo si, φ es continua casi por doquier en $[a,b]$. En particular, toda función acotada y continua salvo en un número finito de puntos es integrable.*

En lo sucesivo la expresión “f es integrable” se entenderá como “f es integrable Riemann”. Indicamos a continuación las propiedades principales de la integral de Riemann de funciones de variable real con valores complejos. Todas ellas se deducen con facilidad de las propiedades correspondientes de la integral de Riemann de funciones reales de variable real que suponemos conocidas.

Propiedades

1. El conjunto $\mathcal{R}([a,b])$ es un espacio vectorial complejo y la aplicación $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi$ es una forma lineal. Además, el producto de funciones integrables Riemann en $[a,b]$ es integrable Riemann en $[a,b]$.

2. **Acotación básica** Si $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$ se verifica que $|\varphi| \in \mathcal{R}([a,b])$ y

$$\boxed{\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sup\{|\varphi(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}(b-a)} \qquad (3.1)$$

La segunda desigualdad es conocida. La estrategia para probar la primera parte de esta desigualdad consiste en reducirla a la conocida desigualdad análoga para funciones reales. Para ello, pongamos $\alpha = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Si $\alpha = 0$ no hay nada que probar. Sea, pues, $\alpha \neq 0$ y sea $\beta = \overline{\alpha}/|\alpha|$. Tenemos que

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| = |\alpha| = \beta\alpha = \beta\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \beta\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Esta igualdad nos dice que la última integral es un número real positivo pues es igual a $|\alpha|$, luego

$$\int_a^b \beta\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re}\big(\beta\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \left|\operatorname{Re}\big(\beta\varphi(t)\big)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |\beta\varphi(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

3. Si $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de funciones integrables en $[a,b]$ que converge uniformemente a φ en $[a,b]$, entonces φ es integrable y $\lim \int_a^b \varphi_n = \int_a^b \varphi$. En particular, si $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ es una serie de funciones integrables que converge uniformemente en $[a,b]$, entonces la función $t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t}$$

En efecto, que la función φ es integrable es consecuencia de que la convergencia uniforme conserva la continuidad y la acotación. Por la desigualdad básica, se tiene que

$$\left|\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b (\varphi_n(t)-\varphi(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\sup\{|\varphi_n(t)-\varphi(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}$$

Y, por definición de convergencia uniforme, $\sup\{|\varphi_n(t)-\varphi(t)| : a\leqslant t\leqslant b\} \to 0$.

4. **Aditividad respecto al intervalo**. Si $a < c < b$ y $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$ entonces $\varphi \in \mathcal{R}([a,c])$ y $\varphi \in \mathcal{R}([c,b])$ y

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$$

5. **Teorema fundamental del cálculo**. Si $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces la función dada por

$$G(t) = \int_a^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s \qquad (t \in [a,b])$$

es continua. Si, además, φ es continua, entonces G es una primitiva de φ en $[a,b]$.

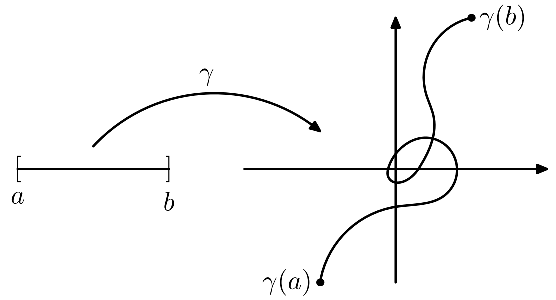
6. **Regla de Barrow**. Si $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ es derivable en $[a,b]$ y $F'\in\mathcal{R}([a,b])$, entonces
$$\int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a).$$

7. **Fórmula del cambio de variable** Sea $\lambda:[c,d]\to\mathbb{R}$ una función estrictamente creciente con derivada continua. Supongamos que φ es integrable en $[\lambda(c),\lambda(d)]$. Entonces
$$\int_{\lambda(c)}^{\lambda(d)}\varphi(s)\,\mathrm{d}s = \int_c^d \varphi\big(\lambda(t)\big)\lambda'(t)\,\mathrm{d}t$$

3.2. Curvas en el plano

Una curva en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$. Hay que distinguir entre la curva y su imagen (también llamada traza o soporte), que notaremos por $\gamma^*=\gamma([a,b])$. Es claro que γ^* es un conjunto compacto y conexo. Al punto $\gamma(a)$ se le llama *punto inicial* de la curva γ y a $\gamma(b)$ *punto final*. Ambos reciben el nombre de *extremos de la curva*.

Se dice que γ es una curva *cerrada* cuando sus extremos coinciden, esto es, $\gamma(a)=\gamma(b)$.



Diremos que una curva es *regular*[1] si la aplicación que la define es derivable con derivada continua, esto es, es de clase $\mathcal{C}^1$.

3.2 Definición (Curvas regulares a trozos o caminos.)**.** Una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ es *regular a trozos*, y la llamaremos un *camino*, si hay una partición $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$ de $[a,b]$ de manera que $\gamma_{|[t_{k-1},t_k]}$ es regular para $1\leqslant k\leqslant n$.

Operaciones con las curvas

Curva opuesta de γ

Llamaremos curva opuesta de una dada $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, y la notaremos por $\dot{-}\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, a la curva definida por
$$(\dot{-}\gamma)(t)=\gamma(b+a-t)$$

[1]En Geometría por *curva regular* se entiende una curva con derivada continua *cuyo vector derivada no se anula en ningún punto*.

Se trata de una curva que tiene la misma traza que γ pero la recorre en sentido contrario, esto es, el punto inicial de $\dot{-}\gamma$ es el punto final de γ y viceversa. Observa que la curva opuesta de un camino es un camino.

Yuxtaposición de curvas

Dadas dos curvas $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ y $\sigma:[c,d]\to\mathbb{C}$ con $\gamma(b)=\sigma(c)$, definimos una nueva curva que llamaremos yuxtaposición de γ y σ o también suma de γ y σ, y la notaremos por $\gamma\dot{+}\sigma$, como

$$(\gamma\dot{+}\sigma)(t)=\begin{cases}\gamma(t) & a\leqslant t\leqslant b\\ \sigma(c-b+t) & b\leqslant t\leqslant b+d-c\end{cases}$$

Geométricamente se trata de "pegar" las trazas de γ y σ, de ahí que se exija que $\gamma(b)=\sigma(c)$, esto es, que podamos pegarlas de forma continua. Evidentemente en los puntos de unión entre una curva y otra puede que no haya derivabilidad. Es fácil probar que $(\gamma\dot{+}\sigma)^*=\gamma^*\cup\sigma^*$.

Observa que la yuxtaposición de dos caminos también es un camino.

Caminos más usuales

- **Segmento de origen** z **y extremo** w. Es la curva $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ definida por

  $$\gamma(t)=(1-t)z+tw$$

  Notaremos a esta curva como $\gamma=[z,w]$. Resaltemos que no se trata de un intervalo en $\mathbb{C}$ ya que en $\mathbb{C}$ no hemos definido ningún orden.

  Es fácil comprobar que $\dot{-}[z,w]=[w,z]$

- **Circunferencia de centro** a **y radio** r. Es la curva $\gamma:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ definida por

  $$\gamma(t)=a+r\,\mathrm{e}^{it}$$

  La vamos a representar por el símbolo $C(a,r)$. No hay que confundir a la curva con su imagen, que en este caso es una circunferencia y que notamos como $C(a,r)^*\subset\mathbb{C}$.

- **Poligonal de vértices** $z_0,z_1,\dots,z_n$. Es la curva

  $$[z_0,z_1]\dot{+}[z_1,z_2]\dot{+}\cdots\dot{+}[z_{n-1},z_n]$$

  y la representaremos por $[z_0,z_1,\dots,z_n]$. La poligonal es un camino, es decir, es una curva regular a trozos.

3.3 Definición (Longitud de un camino.)**.** Si $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ es un camino, entonces γ' está definida y es continua en $[a,b]$ excepto en un conjunto finito de puntos de $]a,b[$ en los cuales tiene límites laterales distintos, dándole a γ' en cada uno de esos puntos el valor del límite por la izquierda (aunque esto es totalmente irrelevante, podemos darle cualquier valor) es claro que γ' es acotada en $[a,b]$ y tiene un número finito de discontinuidades, luego es integrable en $[a,b]$. Se define la *longitud* de γ por

$$\ell(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

3.4 Definición (Curvas equivalentes.)**.** Dos curvas $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ se dice que son *equivalentes* cuando existe una aplicación $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ cumpliendo

- $\varphi \in \mathcal{C}^1([c,d])$
- $\varphi'(u) > 0$ para todo $u \in [c,d]$
- $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$

y tal que $\gamma \circ \varphi = \sigma$. En tal caso se dice también que σ es una *reparametrización* de γ.

Dos curvas equivalentes tienen la misma traza, mismo punto inicial y mismo punto final.

3.3. Integral curvilínea

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una aplicación continua. Definimos la *integral de f a lo largo del camino* γ como el número complejo

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Observemos que $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es una función de variable real con valores complejos que está acotada y solamente puede tener un número finito de discontinuidades, luego la integral de la derecha es la integral que ya hemos definido antes.

En lo que sigue notaremos $\mathcal{C}(\gamma^*)$ el espacio vectorial complejo de las funciones complejas continuas en γ^*.

Observaciones. Observa que para que la integral $\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ tenga sentido es suficiente que la función $t \mapsto f \circ \gamma(t) = f\big(\gamma(t)\big)$ sea continua en $[a,b]$. Para ello no es imprescindible que f sea continua en γ^*. Por ejemplo, aunque la función $f(z) = \sqrt{z}$ no es continua en $C(0,1)^*$, la función compuesta $f \circ C(0,1)$ sí es continua pues $f \circ C(0,1)(t) = f(\mathrm{e}^{it}) = \mathrm{e}^{it/2}$ para todo $t \in [-\pi,\pi]$. Por tanto:

$$\int_{C(0,1)} \sqrt{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{it/2}\, i\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\big[\mathrm{e}^{i3t/2}\big]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{2}{3}\big(\mathrm{e}^{i3\pi/2} - \mathrm{e}^{-i3\pi/2}\big) = -\frac{4}{3}i$$

Ideas claras

Hemos hecho antes una distinción entre lo que es una curva, que es una aplicación, y su imagen, que es un conjunto de puntos del plano. Quiero que te convenzas de que esta distinción no es un capricho sino que es esencial tenerla clara para entender el significado de la integral curvilínea. Los siguientes ejemplos son especialmente ilustrativos.

Sean γ_1, γ_2 y γ_3 los caminos definidos por $\gamma_1(t) = e^{it}$, $\gamma_2(t) = e^{-it}$ y $\gamma_3(t) = e^{3it}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos que:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, i\, e^{it}\, dt = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{-it}}(-i)\, e^{-it}\, dt = -2\pi i$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{3it}} 3i\, e^{3it}\, dt = 6\pi i$$

Observa que las tres curvas tienen la misma imagen que es la circunferencia de centro 0 y radio 1. Parece que la integral de *una misma función* en la *misma circunferencia unidad* unas veces vale una cosa y otras veces vale otra. ¿Cómo es posible? Respuesta: porque no estamos integrando en la circunferencia unidad sino que estamos calculando la integral de la función $1/z$ a lo largo de los caminos γ_1, γ_2 y γ_3 y estos caminos son distintos. Es cierto que todos ellos tienen el mismo soporte, la circunferencia unidad, pero cada uno de ellos la recorre de forma diferente: γ_1 la recorre una sola vez en sentido anti horario, γ_2 la recorre una sola vez en sentido horario y γ_3 la recorre tres veces en sentido anti horario. ¿Te das cuenta de lo que pasa? En lo que se refiere al concepto de “integral curvilínea” *una curva no es un objeto geométrico, no es un conjunto de puntos del plano, sino un objeto analítico, es una aplicación.* Cuando calculas una integral curvilínea tienes que saber en qué sentido se recorre la curva y cuántas veces se recorre y *esas cosas no se saben con el sólo conocimiento del soporte sino que necesitas conocer la representación concreta de la curva, la aplicación que la define.*

Supongo que estas cosas ya las sabrás porque has estudiado integrales curvilíneas de campos, pero las repito porque en este asunto hay una gran confusión favorecida porque con frecuencia hablamos de “la integral a lo largo de una circunferencia” o “la integral a lo largo de una elipse” sin especificar cómo se recorren esa circunferencia o esa elipse. Aquí hay una especie de acuerdo no escrito según el cual las curvas familiares se recorren una sola vez en el sentido anti horario, ese acuerdo no escrito convendría hacerlo explícito y así lo acabamos de hacer arriba para las situaciones más familiares: circunferencias, segmentos y poligonales.

Llama la atención que en algunos textos se define la integral curvilínea haciendo particiones de puntos *sobre el soporte de la curva*, como si dicho soporte permitiera por sí solo definir esta integral. No, para definir la integral curvilínea es imprescindible usar la función concreta que representa dicho soporte, no podemos olvidarnos de ella. Si la integral curvilínea dependiera solamente del soporte de la curva las tres integrales anteriores deberían ser iguales ¿verdad?. Hay que tener las ideas claras.

Propiedades

1. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ son caminos equivalentes y $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$ se verifica que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\sigma f(z)\,dz$$

En efecto, puesto que $\gamma^* = \sigma^*$ la integral de f a lo largo de σ está definida. Por hipótesis existe una aplicación $\varphi \in \mathcal{C}^1([c,d])$ con derivada positiva que transforma $[c,d]$ en $[a,b]$ y tal que $\gamma \circ \varphi = \sigma$. Tenemos así que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} t = \varphi(s) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(s)\,\mathrm{d}s \end{bmatrix} =$$
$$= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\Big(\gamma\big(\varphi(s)\big)\Big)\gamma'\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_c^d f\big(\sigma(s)\big)\sigma'(s)\,\mathrm{d}s = \int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z$$

2. Dados dos caminos γ, σ y una función compleja f continua en $\gamma^* \cup \sigma^*$ se cumple

$$\int_{\gamma \dotplus \sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z$$

En efecto, por las definiciones dadas

$$\int_{\gamma \dotplus \sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^{b+d-c} f\big((\gamma \dotplus \sigma)(t)\big)(\gamma \dotplus \sigma)'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{b+d-c} f\big(\sigma(t-b+c)\big)\sigma'(t-b+c)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \begin{bmatrix} s = t-b+c \\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^d f\big(\sigma(s)\big)\sigma'(s)\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z$$

3. $\displaystyle\int_{\dot{-}\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$. Es de comprobación inmediata.

4. Acotación básica

$$\boxed{\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}\,\ell(\gamma)}$$

En efecto

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \big|f\big(\gamma(t)\big)\big|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma^*\} \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}\,\ell(\gamma)$$

5. **Linealidad**. Se verifica que la aplicación $f \longmapsto \int_\gamma f$ del espacio vectorial $\mathcal{C}(\gamma^*)$ en $\mathbb{C}$ es una forma lineal.

6. **Permutación del límite uniforme y la integral**. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en γ^* que converge uniformemente en γ^* a una función f, se verifica que f es continua en γ^* y
$$\lim \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$
En particular
$$\boxed{\int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z}$$
siempre que la serie converja uniformemente en γ^*.

   Esto es consecuencia inmediata de la desigualdad
$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\gamma (f_n(z) - f(z))\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \text{máx}\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \gamma^*\}\,\ell(\gamma)$$

3.4. Existencia de primitivas

El cálculo de una integral curvilínea es inmediato si se conoce una primitiva de la función que integramos.

3.5 Teorema (Regla de Barrow para integrales curvilíneas.). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, f una función continua en Ω y supongamos que hay una función $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino cualquiera en Ω (esto es, $\gamma^* \subset \Omega$), entonces*
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que γ es un camino regular, es decir, γ tiene derivada continua en $[a,b]$. En tal caso la función $h(t) = (F\circ\gamma)(t)$ es derivable en $[a,b]$ con
$$h'(t)) = F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) = f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) \qquad (t \in [a,b])$$
Por lo que
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a) = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$
Supongamos ahora que γ es regular a trozos. Entonces existe una partición del intervalo $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ de forma que $\gamma_k = \gamma_{|[t_{k-1},t_k]}$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$. Teniendo en cuenta lo antes visto resulta que
$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\Big(F\big(\gamma_k(t_k)\big) - F\big(\gamma_k(t_{k-1})\big)\Big) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big(F\big(\gamma(t_k)\big) - F\big(\gamma(t_{k-1})\big)\Big) = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\end{aligned}$$

como pretendíamos demostrar. □

De la regla de Barrow se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

3.6 Teorema (Condición necesaria para la existencia de primitivas.). *Si una función continua f en un abierto Ω admite una primitiva en Ω, entonces la integral curvilínea de f es la misma para todos los caminos en Ω que tienen los mismos puntos inicial y final. En particular, para todo camino cerrado γ en Ω se verifica que $\int_\gamma f(w)\,dw = 0$.*

3.7 Proposición. *La función suma de una serie de potencias no trivial tiene primitivas en el dominio de convergencia de la serie. En consecuencia, una función analítica en un abierto tiene localmente primitivas.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ es una serie de potencias no trivial. Sea Ω su dominio de convergencia y para $z\in\Omega$ sea $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ la función suma. Se deduce del lema 2.24 que la serie $\sum_{n\geqslant 0}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ tiene también como dominio de convergencia Ω. El teorema de derivación de series de potencias nos dice que la función

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

es una primitiva de φ en Ω. □

Volviendo al ejemplo del principio del capítulo, sea $f(z)=\dfrac{1}{z}$ para $z\in\mathbb{C}^*$. Tenemos que

$$\int\limits_{C(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\mathrm{e}^{it}}i\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = 2\pi i\neq 0$$

luego f no tiene primitiva en $\mathbb{C}^*$ (cosa que ya sabíamos). Pero vimos en el Capítulo I que f es analítica en $\mathbb{C}^*$ con lo cual f tiene primitivas localmente. Esto pone de manifiesto que *el problema de existencia de primitivas es un problema global, no local.*

El anterior corolario nos dio una condición necesaria para la existencia de primitiva de una función. Esta condición es también suficiente. El siguiente lema es de interés.

3.8 Lema. *Dos puntos cualesquiera de un dominio se pueden unir mediante una poligonal contenida en el dominio.*

Demostración. Sea Ω un dominio. Fijemos un punto $a\in\Omega$ y sea W el conjunto de los puntos $z\in\Omega$ que pueden unirse con a por medio de una poligonal en Ω. Evidentemente, $a\in W$. Si $b\in W$ y $D(b,r)\subset\Omega$, es claro que $D(b,r)\subset W$; pues si $z\in D(b,r)$ podemos añadir a una poligonal en Ω que une a con b el segmento $[b,z]$ (que está contenido en el disco $D(b,r)$ y, por tanto, en Ω) y obtenemos así una poligonal en Ω que une a con z. Esto prueba que W es abierto. Veamos que también es cerrado relativo a Ω. Sea $c\in\overline{W}\cap\Omega$. Como $c\in\Omega$ tiene que haber un $\rho>0$ tal que

$D(c,\rho) \subset \Omega$. Como $c \in \overline{W}$ tiene que haber un punto $z_0 \in D(c,\rho/2) \cap W$. Entonces tenemos que $D(z_0,\rho/2) \subset D(c,\rho)$ luego $D(z_0,\rho/2) \subset \Omega$ y, por lo antes visto, se sigue que $D(z_0,\rho/2) \subset W$ y, como $c \in D(z_0,\rho/2)$, concluimos que $c \in W$ lo que prueba que $W = \overline{W} \cap \Omega$, es decir, W es cerrado relativo a Ω. Por conexión concluimos que $W = \Omega$. $\square$

3.9 Lema (Construcción de primitivas.). *Sea f una función continua en un abierto Ω y supongamos que la integral de f sobre todo camino cerrado en Ω es nula.*

Fijemos un punto $z_0 \in \Omega$, y para cada $z \in \Omega$ sea γ_z un camino en Ω cuyo punto inicial sea z_0 y cuyo punto final sea z. La función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w$$

es una primitiva de f en Ω.

Demostración. En virtud del lema anterior sabemos que para cada $z \in \Omega$ hay caminos γ_z en Ω con punto inicial z_0 y punto final z. Lo primero que hay que ver es que la función F está bien definida, es decir, que el número $F(z)$ no depende del camino γ_z elegido sino solamente de z.

Sea σ_z otro camino en Ω con punto inicial z_0 y punto final z. Consideremos $\Gamma = \gamma_z \dot{+} (\dot{-}\sigma_z) \equiv \gamma_z \dot{-} \sigma_z$. Γ así definido es un camino cerrado en Ω. La hipótesis afirma que

$$0 = \int_{\Gamma} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\dot{-}\sigma_z} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{\sigma_z} f(w)\,\mathrm{d}w$$

con lo cual $\displaystyle\int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\sigma_z} f(w)\,\mathrm{d}w$ y F está bien definida.

Probaremos que F es holomorfa en Ω y $F'(a) = f(a)$ para todo $a \in \Omega$.

Sea $a \in \Omega$. Dado $\varepsilon > 0$, por continuidad de f existe $\delta > 0$ de forma que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y para $w \in D(a,\delta)$ se cumple que $|f(w) - f(a)| < \varepsilon$.

Para $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$ tenemos que $[a,z]^* \subset D(a,\delta)$ y $\Gamma = \gamma_z \dot{+} [z,a] \dot{-} \gamma_a$ es un camino cerrado en Ω por lo que $\displaystyle\int_{\Gamma} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$, de donde se deduce que

$$\int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{\gamma_a} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[a,z]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

Así, para $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$ tenemos que

$$\frac{F(z) - F(a) - f(a)(z-a)}{z-a} = \frac{\displaystyle\int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{\gamma_a} f(w)\,\mathrm{d}w - f(a)(z-a)}{z-a} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{[a,z]} f(w)\,\mathrm{d}w - f(a)(z-a)}{z-a} = \frac{\displaystyle\int_{[a,z]} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{[a,z]} f(a)\,\mathrm{d}w}{z-a} = \frac{\displaystyle\int_{[a,z]} \big(f(w) - f(a)\big)\,\mathrm{d}w}{z-a}$$

Y como $[a,z]^* \subset D(a,\delta)$ deducimos que

$$\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a}-f(a)\right| = \frac{\left|\displaystyle\int_{[a,z]}\big(f(w)-f(a)\big)\,\mathrm{d}w\right|}{|z-a|} \leqslant \max\{|f(w)-f(a)| : w \in [a,z]^*\} \leqslant \varepsilon$$

De lo anterior se sigue que F es derivable en a y $F'(a)=f(a)$, esto es, F es una primitiva de f en Ω. □

De este lema y del teorema 3.6 se deduce el siguiente resultado.

3.10 Teorema (Caracterización de existencia de primitivas.). *Sea f una función continua en un abierto Ω. Se verifica que f tiene primitivas en Ω si, y sólo si, la integral de f sobre todo camino cerrado en Ω es nula.*

Ejercicios propuestos

108. Prueba que una integral de línea compleja $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ es igual a la suma de dos integrales de línea de campos vectoriales. Si la función f es holomorfa en un abierto Ω, dichos campos vectoriales son localmente conservativos en Ω.

109. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$ siendo $\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}$ el camino dado por:

a) $\gamma(t) = t^2 + it$; b) $\gamma(t) = 2t + it$; c) $\gamma(t) = \begin{cases} 2it & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2i + 4(t-1) & 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$

110. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z$ siendo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ el camino dado por:

a) $\gamma(t) = t + it$; b) $\gamma(t) = \exp(2\pi it)$

111. Calcula $\displaystyle\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z$ siendo $\gamma = [i, 1+i, 3+3i]$.

112. Calcula $\displaystyle\int_\gamma |z|\overline{z}\,\mathrm{d}z$ siendo γ el camino formado por la mitad superior de la circunferencia unidad y el segmento $[-1,1]$.

113. Calcula $\displaystyle\int_{[0,a+ib]} \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z$ y deduce el valor de las integrales $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$.

114. Calcula $\displaystyle\int_{C(5,2)} (4z^2\cos z\operatorname{senh}(z) - 3\overline{z})\,\mathrm{d}z$.

115. Sea $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ un camino y $\overline{\gamma}$ el camino conjugado de γ. Prueba que:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\,\mathrm{d}z \qquad (\forall f\in C(\gamma^*))$$

Deduce que si f es continua en la circunferencia unidad, se verifica que

$$\overline{\int_{C(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z} = -\int_{C(0,1)} \overline{f(z)}\,\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$$

116. Sean $\Omega\subset\mathbb{C}$ abierto, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado en Ω. Prueba que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\overline{f'(z)}\,\mathrm{d}z$ es un número imaginario puro.

117. Prueba que para $0<r<1$, se tiene que $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z}\,\mathrm{d}z = 0$. Deduce que

$$\int_0^{2\pi} \log(1+r^2+2r\cos\vartheta)\,d\vartheta = 0$$

118. Calcula las integrales

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{\sqrt[n]{z}}\,\mathrm{d}z, \qquad \int_{C(0,1)} \log z\,\mathrm{d}z, \qquad \int_{C(0,1)} z^\alpha \log z\,\mathrm{d}z \quad (\alpha\in\mathbb{C})$$

.

119. Sea $\Omega\subset\mathbb{C}^*$ un dominio y supongamos que la integral de la función $f(z)=1/z$ a lo largo de todo camino cerrado en Ω es nula. Para cada $z\in\Omega$ sea γ_z cualquier camino en Ω con punto inicial z_0 y punto final z. Justifica que la función $h:\Omega\to\mathbb{C}$ dada por

$$h(z) = w_0 + \int_{\gamma_z} \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w$$

Donde $w_0\in\mathrm{Log}(z_0)$ es la única rama holomorfa del logaritmo en Ω que verifica que $h(z_0)=w_0$.

120. Calcula $\displaystyle\int_{C(a,R)} P(z)\,\overline{\mathrm{d}z}$ donde $P(z)$ es una función polinómica no constante.

121. Sea $\{\gamma_n\}$ una sucesión de caminos definidos en un intervalo $[a,b]$ que converge uniformemente en dicho intervalo a un camino γ. Sea f una función continua en un conjunto compacto K que contiene a los soportes de dichos caminos. Prueba que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

122. Integrando la función $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por:

$$h(z)=\frac{e^{iz}-1}{z}\quad \forall z\in\mathbb{C}^*,\ h(0)=i$$

a lo largo del camino formado por la yuxtaposición del segmento $[-r,r]$ y de la semicircunferencia γ_r de centro 0 y radio r contenida en el semiplano superior, deduce que para todo $r>0$ se verifica que:

$$\left|\int_{-r}^{r}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx-\pi\right|<\frac{\pi}{r}$$

123. Sea f holomorfa en un abierto $\Omega\subset\mathbb{C}$ y verificando que $|f(z)-1|<1\ \forall z\in\Omega$. Justifica que $\displaystyle\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=0$ para todo camino cerrado γ en Ω.

124. Sean $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ y $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, $\forall z\in\Omega$. Justifica que f no admite una primitiva en Ω.

3.5. Versión elemental del teorema de Cauchy

La utilidad del teorema anterior para probar la existencia de primitivas es dudosa puesto que para justificar que una función tiene primitivas en un cierto dominio Ω sería necesario comprobar que su integral a lo largo de *todo* camino cerrado en Ω es cero, lo que no parece nada fácil en la práctica. Afortunadamente, hay teoremas que garantizan que bajo ciertas condiciones la integral de una función a lo largo de cualquier camino cerrado es nula. Estos teoremas reciben el nombre de teoremas de Cauchy. En ellos se considera un abierto Ω y un camino cerrado γ en Ω. Se suponen hipótesis adicionales sobre Ω o sobre γ para concluir que $\displaystyle\int_\gamma f(w)\,dw=0$ para toda función $f\in\mathcal{H}(\Omega)$.

3.11 Teorema (Teorema de Cauchy–Goursat (1904).)**.** *Sea f una función holomorfa en un abierto $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ y sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo de vértices a,b,c contenido en Ω, esto es,*

$$\Delta(a,b,c)=\{\mu a+\lambda b+\gamma c:\mu+\lambda+\gamma=1:\ \mu,\lambda,\gamma\geqslant 0\}\subset\Omega$$

Entonces

$$\int_{[a,b,c,a]}f(z)\,dz=0$$

Demostración. La demostración que sigue fue dada por Pringsheim en 1934.

Llamemos $\gamma=[a,b,c,a]$, $\Delta=\Delta(a,b,c)$ e $I=\displaystyle\int_\gamma f(w)\,dw$. El objetivo es probar que $I=0$. Para esto consideremos los puntos medios de los lados

$$a'=\frac{b+c}{2}\qquad b'=\frac{a+c}{2}\qquad c'=\frac{a+b}{2}$$

Podemos escribir I en la forma

$$I = \int_{\gamma} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[a,c',b',a]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[c',b,a',c']} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[a',c,b',a']} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[b',c',a',b']} f(w)\,\mathrm{d}w$$

Esta igualdad es cierta ya que hay caminos (los interiores al triángulo) que están recorridos en direcciones opuestas luego las respectivas integrales se anulan (ver figura 3.1).

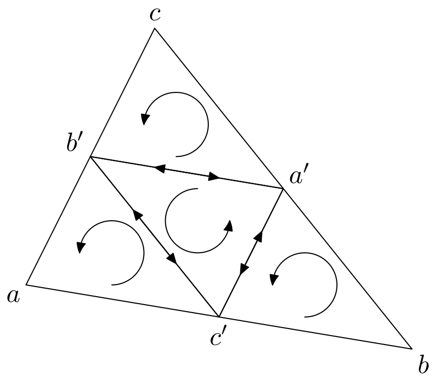


Figura 3.1. Esquema del camino de integración

Si llamamos J_1, J_2, J_3, J_4 a estas cuatro integrales, I_1 a una de las integrales de mayor módulo de entre ellas, y $\gamma_1 = [a_1, b_1, c_1, a_1]$ al camino de I_1, tenemos

$$|I| \leqslant 4|I_1|$$

Repitiendo el mismo argumento para el triángulo $\Delta_1 = \Delta(a_1, b_1, c_1)$ obtenemos una sucesiones de triángulos $\Delta_n = \Delta(a_n, b_n, c_n)$ y poligonales $\gamma_n = [a_n, b_n, c_n, a_n]$ con la propiedad de que $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$ y

$$\begin{aligned}
\text{diámetro}(\Delta_n) &= \frac{1}{2}\text{diámetro}(\Delta_{n-1}) = \frac{1}{2^n}\text{diámetro}(\Delta) \\
\ell(\gamma_n) &= \frac{1}{2}\ell(\gamma_{n-1}) = \frac{1}{2^n}\ell(\gamma) \\
|I_{n-1}| &\leqslant 4|I_n|
\end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ (existe puesto que estamos considerando la intersección de una sucesión decreciente de cerrados no vacíos con sucesión de diámetros convergente a cero en un espacio métrico completo). Claramente, $\alpha \in \Delta(a,b,c) \subset \Omega$. Pongamos $p(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha)$ que es una función polinómica y por tanto tiene primitiva; luego $\displaystyle\int_{\gamma_n} p(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Podemos escribir por tanto

$$I_n = \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_n} \big(f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z-\alpha)\big)\,\mathrm{d}z$$

Dado $\varepsilon > 0$, por la derivabilidad de f en α existe $\delta > 0$ de forma que $D(\alpha,\delta) \subset \Omega$ y para $z \in D(\alpha,\delta)$ se cumple que

$$|f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z-\alpha)| \leqslant \varepsilon|z-\alpha|$$

Si diámetro$(\Delta_n) < \delta$ entonces $\Delta_n \subset D(\alpha, \delta)$. Tenemos por tanto

$$\begin{aligned}
|I| &\leqslant 4^n\,|I_n| \leqslant 4^n\,\ell(\gamma_n)\,\text{máx}\{|f(z) - f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha)| : z \in \gamma_n^*\} \leqslant \\
&\leqslant 4^n\,\ell(\gamma_n)\,\varepsilon\,\text{máx}\{|z-\alpha| : z \in \gamma_n^*\} \leqslant \\
&\leqslant 4^n\,\varepsilon\,\ell(\gamma_n)\,\text{diámetro}(\Delta_n) = \\
&= 4^n\,\varepsilon\,\frac{1}{2^n}\,\ell(\gamma)\,\frac{1}{2^n}\,\text{diámetro}(\Delta) = \\
&= \varepsilon\,\ell(\gamma)\,\text{diámetro}(\Delta)
\end{aligned}$$

de donde se deduce que $|I| = 0$ sin más que hacer tender ε a cero. Por tanto $I = 0$ como queríamos probar. □

Un abierto Ω es un *dominio estrellado* respecto de un punto $z_0 \in \Omega$ si el segmento que une z_0 con cualquier otro punto de Ω se queda dentro de Ω, esto es, $[z_0, z]^* \subset \Omega$ para todo $z \in \Omega$. Por ejemplo un disco es un dominio estrellado respecto cualquiera de sus puntos.

Por supuesto, cualquier conjunto convexo es un dominio estrellado respecto de cualquiera de sus puntos, pero hay dominios estrellados que no son convexos (por ejemplo el polígono que se muestra en la figura 3.2).

3.12 Teorema (Teorema de Cauchy para dominios estrellados.)**.** *Toda función holomorfa en un dominio estrellado tiene primitivas en dicho dominio.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con Ω un dominio estrellado respecto de z_0. Buscamos una primitiva de f y la forma más intuitiva de definirla es

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

Vamos a probar que F así definida es ciertamente una primitiva de f en Ω. Puesto que Ω es un dominio estrellado en z_0 la función F está bien definida. Sea $a \in \Omega$ y $\rho > 0$ tal que $D(a, \rho) \subset \Omega$. Tomemos un punto $z \in D(a, \rho)$. Como todos los puntos del segmento $[a, z]$ están contenidos en Ω el segmento que une z_0 con cualquiera de estos puntos también estará contenido en Ω por ser este estrellado. Por tanto el triángulo $\Delta(z_0, a, z)$ está totalmente contenido en Ω (ver figura 3.2).

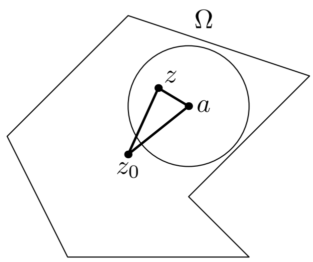


Figura 3.2. Dominio estrellado

Ahora el teorema de Cauchy–Goursat afirma que

$$\int_{[z_0,z,a,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

Esta integral podemos escribirla como

$$\int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,a]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[a,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

esto es

$$F(z) - F(a) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{[z_0,a]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[a,z]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

A partir de esta última igualdad, siguiendo el mismo razonamiento que utilizamos en la demostración del lema 3.9, se prueba que F es derivable en a y $F'(a) = f(a)$ lo que concluye la demostración. □

3.13 Corolario. *Toda función holomorfa que no se anula en un dominio estrellado tiene logaritmos holomorfos en dicho dominio. En particular, tiene raíces holomorfas de cualquier orden.*

Demostración. Sea Ω un dominio estrellado y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $0 \notin f(\Omega)$. En tal caso la función $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ es holomorfa en Ω y, en virtud del teorema de Cauchy para dominios estrellados, se sigue que dicha función tiene primitivas en Ω. En virtud del teorema 2.33, sabemos que esto equivale a que f tiene un logaritmo holomorfo en Ω. Es decir, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\exp\big(g(z)\big) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Dado $m \in \mathbb{N}$ la función $h(z) = \exp\big(g(z)/m\big)$ es holomorfa en Ω y verifica que

$$\big(h(z)\big)^m = \exp\big(g(z)/m\big)\big)^m = \exp\big(g(z)\big)\big) = f(z) \qquad \text{para todo } z \in \Omega$$

es decir, h es una raíz m-ésima holomorfa de f en Ω. □

El teorema de Cauchy–Goursat y el teorema de Cauchy para dominios estrellados permanecen válidos si suponemos que f es continua en Ω y es derivable en Ω salvo en algún punto α de Ω. Aunque este resultado pueda parecer una generalización de estos dos teoremas en realidad no es así, pues más adelante probaremos que si f es continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$ entonces f también es derivable en α.

3.14 Teorema. *Sea Ω un abierto, $\alpha \in \Omega$ y f una función continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo contenido en Ω, entonces* $\displaystyle\int_{[a,b,c,a]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0.$

Demostración. *Caso 1*. $\alpha \notin \Delta(a,b,c)$. En tal caso $\Delta(a,b,c) \subset \Omega \setminus \{\alpha\}$ y se aplica el teorema de Cauchy–Goursat a la función f en el abierto $\Omega \setminus \{\alpha\}$.

Caso 2. El punto α es un vértice del triángulo. Por comodidad supondremos que $\alpha = a$. Tomamos los puntos $c_\rho = (1-\rho)a + \rho b$, $b_\rho = (1-\rho)a + \rho c$ para $\rho \in]0,1[$. En este caso

$$\int_{[a,b,c,d]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[a,c_\rho,b_\rho,a]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[c_\rho,b,c,c_\rho]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[c,b_\rho,c_\rho,c]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[a,c_\rho,b_\rho,a]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

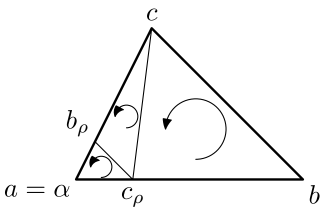


Figura 3.3. Caso 2

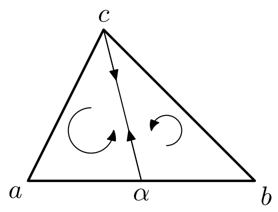


Figura 3.4. Caso 3

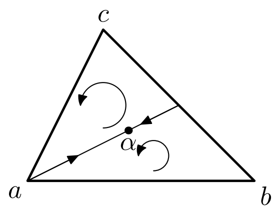


Figura 3.5. Caso 4

ya que las dos últimas integrales son nulas por el caso 1. Tomando módulos y acotando tenemos

$$\left|\int_{[a,b,c,a]} f(w)\,\mathrm{d}w\right| = \left|\int_{[a,c_\rho,b_\rho,a]} f(w)\,\mathrm{d}w\right| \leqslant K\rho\big(|a-b|+|b-c|+|c-a|\big)$$

donde $K = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \Delta(a,b,c)\}$. Esta acotación es válida para todo ρ luego haciendo $\rho \to 0$ obtenemos el resultado.

Caso 3. α está en un lado del triángulo. Por comodidad supongamos que se encuentra en el lado de extremos a y b. Consideramos los triángulos $\Delta(\alpha,b,c)$ y $\Delta(\alpha,c,a)$, ambos se encuentran en el caso 2 luego la integral sobre su frontera es nula y, por tanto, la integral en la frontera del triángulo $\Delta(a,b,c)$ es también nula.

Caso 4. α está en el interior del triángulo. Unimos α con alguno de los vértices y obtenemos dos triángulos que están en el caso 3. □

Puesto que el teorema de Cauchy–Goursat es cierto suprimiendo la derivabilidad de f en un punto α y el teorema de Cauchy para dominios estrellados se deduce de aquél, podemos enunciar también la siguiente versión del teorema de Cauchy para dominios estrellados.

3.15 Teorema. *Sea Ω un dominio estrellado, α un punto de Ω y f una función continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Entonces f tiene primitivas en Ω.*

3.16 Lema. *Se verifica que*

(a) $\displaystyle\int_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0$ *si* $z \notin \overline{D}(a,\rho)$.

(b) $\displaystyle\int_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$ *si* $z \in D(a,\rho)$.

Demostración. Para el apartado *(a)* consideremos un semiplano abierto H que contiene a $\overline{D}(a,\rho)$ y no contiene al punto z. La función $w \longmapsto \dfrac{1}{w-z}$ es holomorfa en H y además H es un dominio estrellado. El teorema de Cauchy para dominios estrellados afirma que la aplicación tiene primitivas en H; luego su integral a lo largo de un camino cerrado contenido en H, como es la circunferencia $C(a,\rho)$, es nula.

(b) Escribimos

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a-(z-a)}=\frac{1}{w-a}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}}=\left(\text{si } \frac{|z-a|}{|w-a|}<1\right)=$$
$$=\frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \tag{3.2}$$

Fijamos un punto $z\in D(a,\rho)$ y tomamos $w\in C(a,\rho)^*$ arbitrario. Se cumple por tanto

$$\frac{|z-a|}{|w-a|}=\frac{|z-a|}{\rho}<1$$

Puesto que

$$\frac{|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n=\alpha_n$$

y $\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha_n$ converge por ser una serie geométrica de razón $|z-a|/\rho<1$, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que la serie 3.2 converge uniformemente en $C(a,\rho)^*$. Podemos permutar por tanto la integral y la suma de la serie con lo que obtenemos

$$\int_{C(a,\rho)}\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int_{C(a,\rho)}\frac{1}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

La función $w\mapsto\dfrac{1}{(w-a)^k}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ y tiene primitiva $\dfrac{1}{-k+1}(w-a)^{-k+1}$ para cualquier $k\in\mathbb{Z}$ con $k\neq 1$. Luego la integral $\displaystyle\int_{C(a,\rho)}\frac{1}{(w-a)^k}\,\mathrm{d}w=0$ para $k>1$. Con lo cual

$$\int_{C(a,\rho)}\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int_{C(a,\rho)}\frac{1}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w=\int_{C(a,\rho)}\frac{1}{w-a}\,\mathrm{d}w=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a+\rho\,\mathrm{e}^{it}-a}\rho i\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t=2\pi i$$

como queríamos probar. □

3.6. Analiticidad de las funciones holomorfas. Teorema de Taylor

El siguiente resultado es la clave para probar que toda función holomorfa es analítica.

3.17 Teorema (Fórmula de Cauchy para una circunferencia.). *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y supongamos que el disco cerrado $\overline{D}(a,R)$ está contenido en Ω. Entonces se verifica que*

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad (z\in D(a,R))}$$

Antes de ver la demostración observemos que esta es una "fórmula de representación" pues representa los valores de una función holomorfa f en todo un disco mediante una integral que depende únicamente de los valores de la función en la frontera de ese disco. Destaquemos además que el radio R que tomamos es cualquiera que cumpla la condición $\overline{D}(a,R)\subset\Omega$, esto es, la fórmula no depende de la circunferencia que tomemos.

Demostración. Como $\overline{D}(a,R)\subset\Omega$, podemos tomar $\rho>R$ tal que $D(a,\rho)\subset\Omega$. Sea $z\in D(a,R)$ fijo en lo que sigue. Definimos la función $g:D(a,\rho)\to\mathbb{C}$ por

$$g(w)=\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\qquad w\neq z$$
$$g(z)=f'(z)$$

Claramente g es continua en $D(a,\rho)$ ya que f es derivable en z. Además g es derivable en todo el disco $D(a,\rho)$ salvo quizá en el punto z. Podemos, pues, aplicar a g en el dominio $D(a,\rho)$ la versión generalizada del teorema de Cauchy para dominios estrellados, teorema 3.15, con lo que obtenemos que g tiene primitiva en $D(a,\rho)$ y, en particular, $\displaystyle\int_{C(a,R)} g(w)\,\mathrm{d}w=0$. Teniendo en cuenta el lema anterior, deducimos que para $z\in D(a,R)$ es

$$0=\int_{C(a,R)}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w-f(z)\int_{C(a,R)}\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w=$$
$$=\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w-f(z)2\pi i$$

y despejando $f(z)$ en esta igualdad obtenemos la fórmula de Cauchy. □

Observación

Observa que si $z\notin\overline{D}(a,R)$ entonces podemos tomar $\rho>R$ tal que $D(a,\rho)\subset\Omega$ y además $z\notin D(a,\rho)$. La función $w\mapsto\dfrac{f(w)}{w-z}$ es holomorfa en $D(a,\rho)$ y el teorema de Cauchy para dominios estrellados implica que

$$\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=0\qquad (z\notin\overline{D}(a,R))$$

3.18 Teorema (Integrales tipo Cauchy.). *Sean γ un camino en $\mathbb{C}$ y $\varphi:\gamma^*\to\mathbb{C}$ una función continua. Pongamos $\Omega=\mathbb{C}\setminus\gamma^*$, y sea $h:\Omega\to\mathbb{C}$ la función dada por*

$$h(z)=\int_\gamma\frac{\varphi(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\qquad (z\in\Omega)$$

Para cada $a\in\Omega$ sea $\rho_a=\inf\{|z-a|:z\in\gamma^*\}$. Entonces se verifica que:

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma\frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^n\qquad \textit{para todo } z\in D(a,\rho_a)$$

Es decir, h es analítica en Ω*. Por tanto, h es indefinidamente derivable en* Ω *y*

$$\frac{h^{(n)}(z)}{n!} = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad \textit{para todo } z\in\Omega \tag{3.3}$$

Demostración. Sea $a\in\Omega$. Claramente $\rho_a > 0$ y $D(a,\rho_a) \subset \Omega$. Sea $z\in D(a,\rho)$, *fijo en lo que sigue*. Consideremos la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n \qquad (w\in\gamma^*) \tag{3.4}$$

donde la variable es w que toma valores en γ^* (repito a y z están fijos en este razonamiento). Como φ es continua y γ^* es compacto, la función $w\mapsto|\varphi(w)|$ está acotada en γ^*, es decir, existe $M>0$ tal que $|\varphi(w)|\leqslant M$ para todo $w\in\gamma^*$.Para todo $w\in\gamma^*$ tenemos que $|w-a|\geqslant\rho_a$ y por tanto:

$$\left|\frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n\right| \leqslant \frac{M}{\rho_a}\left(\frac{|z-a|}{\rho_a}\right)^n$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{|z-a|}{\rho_a}\right)^n$ converge por ser una serie geométrica de razón $\dfrac{|z-a|}{\rho_a} < 1$, el criterio de Weierstrass nos dice que la serie (3.4) converge uniformemente en γ^*. Como para todo $w\in\gamma^*$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n = \frac{\varphi(w)}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \frac{\varphi(w)}{w-a}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} = \frac{\varphi(w)}{w-z}$$

y por ser la convergencia uniforme podemos permutar la integral con la suma de la serie, obtenemos:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^n$$

Igualdad que es válida para cualquier $z\in D(a,\rho_a)$. Hemos probado así que h es analítica en Ω. Por tanto h es indefinidamente derivable en Ω y su serie de Taylor centrada en a es la serie anterior, de donde se sigue que:

$$\frac{h^{(n)}(a)}{n!} = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

Y como a es cualquier punto de Ω, queda probada la igualdad (3.3) del enunciado. □

El siguiente es uno de los resultados más sorprendentes de la teoría de funciones holomorfas. Para que comprendas bien su alcance conviene que tengas en cuenta los siguientes ejemplos.

- Una función real derivable una vez pero no dos veces derivable.

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2/2 & \text{si } x<0 \\ x^2/2 & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

La función f es derivable y su derivada viene dada por:

$$f'(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

Es decir, $f'(x)=|x|$, que no es derivable en $x=0$.

- Una función real indefinidamente derivable cuya serie de Taylor en un punto no converge a la función.

  Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 0 \\ \exp\left(-1/x^2\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$$

  La función f es indefinidamente derivable y sus derivadas en $x=0$ son todas nulas, $f^{(n)}(0)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por tanto la serie de Taylor de f en $x=0$ es la serie nula. Sin embargo f no es nula en ningún intervalo abierto que contenga a 0.

El siguiente resultado nos dice que para funciones complejas derivables estas situaciones no se pueden dar.

3.19 Teorema (Teorema de Taylor.). *Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en Ω . Para cada $a\in\Omega$ definamos*

$$R_a=\inf\{|z-a|:z\in\mathbb{C}\setminus\Omega\} \qquad (R_a=+\infty \text{ si } \Omega=\mathbb{C})$$

Entonces para todo $z\in D(a,R_a)$ se verifica que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{3.5}$$

Y para $0<R<R_a$ los coeficientes de la serie vienen dados por

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad (n\in\mathbb{N}\cup\{0\}). \tag{3.6}$$

En consecuencia, la función f es analítica en Ω y para todo $z\in D(a,R_a)$

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad (n\in\mathbb{N}\cup\{0\}) \tag{3.7}$$

Y las integrales anteriores no dependen de R.

Demostración. Sean $a\in\Omega$ y $z\in D(a,R_a)$ *fijos en lo que sigue*. Es claro que $R_a>0$ y $D(a,R_a)\subset\Omega$. Tomemos $0<R<R_a$ fijo en lo que sigue, de manera que $z\in D(a,R)$. Puesto que $\overline{D}(a,R)\subset\Omega$, en virtud de la fórmula de Cauchy para una circunferencia tenemos que

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,R)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad z\in D(a,R)$$

Podemos aplicar ahora el teorema anterior con $\gamma=C(a,R)$, $h=f$ y tomando como φ la restricción de f a γ^*. Observa que, al aplicar dicho teorema, tenemos que $\rho_a=R$, y como $z\in D(a,R)$ se verifica que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^n$$

Lo que prueba las igualdades (3.5) y (3.6). Y también se verifican las igualdades (3.7) para z como caso particular de las (3.3). Puesto que $z\in D(a,R_a)$ es cualquier punto en dicho disco, deducimos que las igualdades obtenidas son válidas para todo $z\in D(a,R_a)$.

Finalmente, es claro que las integrales en la igualdad (3.7) no dependen de R pues solamente dependen, salvo una constante, del valor de las derivadas de f. □

Observa que el teorema anterior nos dice que la serie de Taylor de f converge *por lo menos* en el disco más grande centrado en a y contenido en Ω y que su suma en *dicho disco* es f. Por tanto, el radio de convergencia, R, de la serie de Taylor de f en a es mayor o igual que R_a ($R=+\infty$ si $R_a=+\infty$), pero puede ocurrir que $R>R_a$.

Las igualdades (3.7) se conocen como *fórmulas de Cauchy para las derivadas*.

3.20 Corolario. *Sea f una función entera. Entonces la serie de Taylor de f centrada en cualquier punto converge en todo $\mathbb{C}$ y su suma es igual a f.*

El teorema de Taylor pone de manifiesto la gran diferencia que hay entre la derivabilidad en el campo real y en el campo complejo. En el campo real podemos tener una función que sea continua pero no derivable; derivable pero sin derivada continua; de clase $\mathcal{C}^1$ pero no dos veces derivable, y así sucesivamente. Esto es, si representamos por $\mathcal{D}^k(I)$ las funciones reales k veces derivables en un intervalo I, por $\mathcal{C}^k(I)$ las funciones reales con derivada k-ésima continua en I y por $\mathcal{FA}(I)$ las funciones reales analíticas en I, tenemos la siguiente cadena infinita de inclusiones estrictas:

$$\mathcal{C}(I)\supsetneqq\mathcal{D}^1(I)\supsetneqq\mathcal{C}^1(I)\supsetneqq\mathcal{D}^2(I)\supsetneqq\mathcal{C}^2(I)\supsetneqq\cdots\supsetneqq\mathcal{C}^\infty(I)\supsetneqq\mathcal{FA}(I)$$

Pues bien, en variable compleja esta cadena infinita de conjuntos se reduce a dos:

$$\mathcal{C}(\Omega)\supsetneqq\mathcal{H}(\Omega)=\mathcal{FA}(\Omega).$$

En particular, este resultado nos dice que si una función f tiene primitiva entonces dicha función f es holomorfa puesto que es la derivada de una función holomorfa. Por tanto, para que una función compleja tenga primitiva debemos exigir que sea holomorfa, no sólo continua como ocurría en el caso real, aunque por supuesto esta condición no garantiza que la función tenga primitiva.

El siguiente resultado es un recíproco del teorema de Cauchy–Goursat para un triángulo.

3.21 Teorema (Teorema de Morera.). *Sea Ω un abierto y f una función compleja continua en Ω. Equivalen:*

(a) f *es holomorfa en* Ω.

(b) $\displaystyle\int_{[a,b,c,a]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$ *siempre que el triángulo* $\Delta(a,b,c)$ *esté contenido en* Ω.

Demostración. La implicación $(a) \Rightarrow (b)$ es el teorema de Cauchy–Goursat. Veamos entonces que $(b) \Rightarrow (a)$.

Sea $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $D(z_0,R) \subset \Omega$. El disco es un dominio estrellado y además la integral sobre cualquier triángulo contenido en él es cero. Esto nos permite construir una primitiva

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w \qquad \text{para } z \in D(z_0,R)$$

F es una primitiva de f en $D(z_0,R)$, es decir, $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D(z_0,R)$ (la prueba de esto es idéntica a la demostración de la existencia de primitivas en dominios estrellados, ver teorema 3.12). Luego f es en el disco $D(z_0,R)$ la derivada de una función holomorfa y, por tanto, es ella misma holomorfa en dicho disco; en particular, f es derivable en z_0. De la arbitrariedad de z_0 obtenemos que f es holomorfa en Ω. □

Ejercicios propuestos

125. Calcula la integral $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,\mathrm{d}z$ donde $r > 0$, $r \neq 2$.

126. Calcula $\displaystyle\int_{C(2+i,\sqrt{2})} \frac{\mathrm{e}^z \cos z}{(1+z^2)\operatorname{sen} z}\,\mathrm{d}z$.

127. Dado $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$, calcula la integral $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$.

128. Calcula las integrales:

a) $\displaystyle\int_{C(0,2a)} \frac{\mathrm{e}^z}{a^2+z^2}dz \quad (a > 0)$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log|a + r\,\mathrm{e}^{it}|\,dt \quad 0 < r < |a|$

129. Sea f una función holomorfa en un disco de centro cero y radio $R > 1$. Calcula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} \frac{\overline{f(w)}}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad (z\in\mathbb{C},\ |z| \neq 1)$$

130. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$, donde $\gamma(t) = \cos t + \frac{i}{2}\operatorname{sen} t,\ \ \forall t \in [-\pi, \pi]$.

131. Sea $\gamma = C(a,r)$ y $b, c \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Calcula todos los posibles valores de $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-b)(z-c)}$ dependiendo de la posición relativa de los puntos b y c respecto de γ.

132. Calcula la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3+z}\mathrm{d}z$, para $\gamma = C(0,2),\ \gamma = C(0,1/2),\ \gamma = C(i/2,1)$.

133. Sean f una función entera, $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y $R > \max\{|a|, |b|\}$. Prueba que

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Deduce que toda función entera y acotada es constante.

134. Para todo $z\in\mathbb{C}$, $z \neq -i$, definamos $f(z) = \log(i+z)$ (logaritmo principal).

a) Justifica que f es discontinua en los puntos de la forma $\rho - i$, con $\rho < 0$, y holomorfa en $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{\rho - i : \rho \leqslant 0\}$

b) Halla la serie de Taylor de f centrada en $z_0 = -1+i$. Sea φ la función suma de dicha serie definida, naturalmente, en su disco de convergencia. Indica para qué valores de $z\in\Omega$ se verifica que $f(z) = \varphi(z)$.

135. Obtener el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función f, y calcular el radio de convergencia de la serie resultante en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$.

b) $f(z) = \cos^2(z)$.

c) $f(z) = \operatorname{arc\,tg} z$.

136. **Desarrollo limitado de Taylor.** Sea f una función holomorfa en un abierto que contenga a $\overline{D}(a,r)$. Prueba que para todo $z\in D(a,r)$ y todo $n\in\mathbb{N}$ es:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

137. **Serie binomial de Newton.** Sea $a\in\mathbb{C}^*$. Justifica que

$$(1+z)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}z^n \qquad (|z| < 1)$$

138. Obtener el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función f, y calcular el radio de convergencia de la serie resultante en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(z) = \log(z^2 - 3z + 2)$.

b) $f(z) = \operatorname{arc\,sen} z$.

c) $f(z) = \log(1 + \sqrt{1+z^2})$.

139. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Definamos $f(z) = \log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$.

a) Justifica que f es una función holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus [a, b]^*$.

b) Justifica que para todo camino cerrado γ en Ω se verifica que

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{dz} = \int_\gamma \frac{1}{z-b}\,\mathrm{dz}$$

c) Si $a = i, b = 1$, calcula la serie de Taylor de f en $z = 0$. Calcula el radio de convergencia de dicha serie e indica dónde su suma es igual a f.

140. Sea $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Justifica que hay una única función f holomorfa en $D(0, 1)$ tal que

$$z f'(z) + \alpha f(z) = \frac{1}{1+z}, \qquad (z \in D(0, 1))$$

141. Justifica que hay una única función $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ tal que $\exp(-z f'(z)) = 1 - z$ para todo $z \in D(0, 1)$, y $f(0) = 0$. Calcula la serie de Taylor de f centrada en 0.

142. Prueba que los coeficientes c_n de la serie de Taylor de

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

centrada en $z = 0$ satisfacen las igualdades: $c_0 = c_1 = 1$, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ para todo $n \geqslant 0$. Calcula dichos coeficientes de forma explícita descomponiendo la fracción dada en fracciones simples. Calcula el radio de convergencia de la serie $\sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$. La sucesión $\{c_n\}$ se llama sucesión de Fibonacci.

143. En cada uno de los siguientes casos, determinar si hay una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga que $f^{(n)}(0) = a_n$. En caso afirmativo, encontrar todas las funciones f que verifiquen las condiciones pedidas.

a) $\Omega = \mathbb{C} \quad a_n = n$

b) $\Omega = \mathbb{C} \quad a_n = (n+1)!$

c) $\Omega = D(0, 1) \quad a_n = 2^n n!$

d) $\Omega = D(0, \frac{1}{2}) \quad a_n = n^n$

144. Considera las funciones complejas dadas para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ por:

$$f(z) = \log\left(\frac{z-i}{z+i}\right); \qquad g(z) = \log(z-i) - \log(z+i)$$

a) Estudia dónde son holomorfas las funciones f y g.

b) ¿Dónde coinciden f y g?

c) Calcula el desarrollo de Taylor de g centrado en $z=1$.

d) Justifica que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n2^n}$ converge (absolutamente) y calcula su suma.

145. Definimos para todo $z\in\mathbb{C}$:

$$F(z)=\mathrm{e}^{z^2}\int_{[0,z]}\mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w$$

Prueba que F es una función entera y que $F'(z)=1+2zF(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

146. Para $z\neq -1$ sea $f(z)=\dfrac{1}{z}\left(\mathrm{e}^{-z}-\dfrac{1}{1+z}\right)$ y $f(0)=0$.

a) Justifica que f es holomorfa en el abierto $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$.

b) Integra dicha función a lo largo de la frontera de la parte del disco $D(0,R)$ que queda en el primer cuadrante para calcular el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx$$

3.7. Desigualdades de Cauchy. Teoremas de Liouville, de extensión de Riemann y de convergencia de Weierstrass

3.22 Teorema (Desigualdades de Cauchy.)**.** *Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un abierto, f una función holomorfa en Ω, a un punto cualquiera de Ω y $R>0$ tal que $\overline{D}(a,R)\subset\Omega$. Entonces para todo $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ se verifica que*

$$\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}\leqslant\frac{M(R)}{R^k}$$

donde $M(R)=\text{máx}\{|f(w)|:w\in C(a,R)^*\}$

Demostración. Sabemos que

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}w$$

para $a\in\Omega$ siempre que $\overline{D}(a,R)\subset\Omega$. Pues bien, tomando módulos y usando la acotación básica para integrales obtenemos

$$\frac{\left|f^{(k)}(a)\right|}{k!}\leqslant\frac{1}{2\pi}\text{máx}\left\{\left|\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\right|:w\in C(a,R)^*\right\}2\pi R=$$
$$=\frac{1}{R^k}\text{máx}\{|f(w)|:w\in C(a,R)^*\}=\frac{M(R)}{R^k}$$

□

Es interesante comparar este resultado con el teorema del valor medio para funciones reales. El teorema del valor medio nos dice que conociendo una cota, M, de la derivada de una función h podemos acotar el incremento de la función, esto es,

$$|h(x)-h(y)| \leqslant M|x-y|$$

En el caso complejo, las desigualdades de Cauchy nos dicen que conociendo una cota de la función podemos acotar a sus derivadas. Veremos pronto que estas desigualdades son las principales responsables de que la convergencia uniforme de sucesiones de funciones holomorfas implique que la sucesión de sus derivadas también converja uniformemente.

A partir de las desigualdades de Cauchy es fácil probar el siguiente resultado conocido como teorema de Liouville, aunque fue Cauchy el primero en establecerlo

3.23 Teorema (Teorema de Liouville.)**.** *Toda función entera y acotada es constante.*

Demostración. Sea f una función entera acotada. Entonces existe una constante positiva M de forma que $|f(z)| < M$ para todo número complejo $z \in \mathbb{C}$. El teorema de Taylor afirma que la serie de Taylor de f converge a f en todo $\mathbb{C}$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

Puesto que para todo $R > 0$ el disco $\overline{D}(0,R)$ está contenido en $\mathbb{C}$, las desigualdades de Cauchy para $a = 0$ con $R > 0$ arbitrario nos dicen que

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leqslant \frac{M(R)}{R^n} \leqslant \frac{M}{R^n}$$

Tomando límite ahora cuando $R \to +\infty$ obtenemos $f^{(n)}(0) = 0$ para cualquier $n \geqslant 1$. Con lo cual la serie de Taylor de f centrada en 0 se reduce al término $f(0)$. Luego $f(z) = f(0)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, esto es, f es constante. □

Este resultado permite demostrar de forma sencilla el que se conoce como Teorema Fundamental del Álgebra cuya primera demostración diera Gauss en 1799.

3.24 Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra.)**.** $\mathbb{C}$ *es un cuerpo algebraicamente cerrado.*

Demostración. Sea $p(z)$ un polinomio con coeficientes complejos no constante. Queremos ver que $p(z)$ tiene alguna raíz en $\mathbb{C}$. Razonamos por reducción al absurdo, supongamos que $p(z) \neq 0$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Consideremos en dicho caso la función $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$. Dicha función es evidentemente entera y acotada puesto que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. En estas condiciones el teorema de Liouville afirma que f es constante, es decir, p es constante. Esta contradicción nos dice que $p(z)$ tiene que anularse para algún $z \in \mathbb{C}$. □

3.25 Teorema. *La imagen de una función entera no constante es densa en el plano. Simbólicamente, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es no constante entonces $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $\alpha \in \mathbb{C}$ de forma que $\alpha \notin \overline{f(\mathbb{C})}$. Por definición existe $\rho > 0$ de manera que $\overline{D}(\alpha, \rho) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$, o dicho de otra forma, $|f(z) - \alpha| > \rho$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Construimos la aplicación $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - \alpha}$ para $z \in \mathbb{C}$. Es claro que g es una función entera y además está acotada puesto que

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - \alpha|} < \frac{1}{\rho}$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$. El teorema de Liouville afirma que g es constante, luego ha de serlo también f en contradicción con la hipótesis. □

3.26 Corolario. *Si f es una función entera no constante y u, v son sus funciones parte real e imaginaria, entonces*

$$u(\mathbb{C}) = \mathbb{R} \qquad y \qquad v(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$$

Demostración. Por el teorema anterior, los conjuntos $u(\mathbb{C})$ y $v(\mathbb{C})$ no pueden estar mayorados ni minorados. Puesto que ambos son conexos de $\mathbb{R}$, es decir, intervalos, se sigue que deben ser iguales a $\mathbb{R}$. □

3.27 Teorema (Teorema de extensión de Riemann.). *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $\alpha \in \Omega$ y supongamos que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalen:*

(a) f tiene una extensión holomorfa a Ω, es decir, existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para cualquier punto de $z \in \Omega$, $z \neq \alpha$.

(b) f tiene una extensión continua en Ω, esto es, existe $h \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $h(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalentemente existe el límite $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z)$.

(c) f está acotada en un entorno reducido de α.

(d) $\lim\limits_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z) = 0$.

Demostración. Es claro que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$. Probemos, por tanto, que $(d) \Rightarrow (a)$. Sea $F(z) = (z - \alpha)^2 f(z)$ para $z \neq \alpha$, $F(\alpha) = 0$. La hipótesis nos dice que $F \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\alpha\})$. Como

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{F(z) - F(\alpha)}{z - \alpha} = \lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z) = 0$$

deducimos que F es derivable en α con lo cual $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $F'(\alpha) = 0$. Sea $D(\alpha, \rho) \subset \Omega$ aplicando el teorema de Taylor y teniendo en cuenta que $F(\alpha) = F'(\alpha) = 0$ tenemos

$$F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{(n}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n \qquad \text{para todo } z \in D(\alpha, \rho)$$

Sacando factor común $(z-\alpha)^2$ en la serie anterior, resulta que

$$F(z) = (z-\alpha)^2 \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-\alpha)^{n-2} = (z-\alpha)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-\alpha)^n$$

igualdad válida para $z \in D(\alpha, \rho) \subset \Omega$ donde hemos notado $c_n = \dfrac{F^{(n}(\alpha)}{n!}$. De lo anterior se deduce que para $z \in D(\alpha, \rho)$, $z \neq \alpha$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-\alpha)^n$$

Definimos la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ de la forma

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) \qquad \text{para } z \in \Omega \setminus \{\alpha\} \\ g(\alpha) &= c_2 \end{aligned}$$

Evidentemente g es derivable en $D(\alpha, \rho)$, pues g es suma de una serie de potencias convergente en dicho disco, en particular, g es derivable en α y, por tanto, es una extensión derivable de f como pretendíamos probar. □

Por supuesto, este resultado puede enunciarse para una función derivable en Ω excepto en un número finito de puntos de Ω.

Observa que este resultado implica que si una función es derivable en un abierto excepto en un conjunto finito de puntos del mismo, dicha función no puede ser continua en dichos puntos, ni siquiera puede estar acotada en un entorno de cualquiera de ellos.

3.28 Corolario. *Si una función compleja es continua en un abierto Ω y es derivable en $\Omega \setminus \{\alpha\}$ entonces dicha función es holomorfa en Ω.*

3.29 Teorema (Teorema de convergencia de Weierstrass.)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la función límite puntual*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(z)\} \qquad (z \in \Omega)$$

Entonces

(i) f es holomorfa en Ω.

(ii) Para cada natural k la sucesión de las derivadas k-ésimas $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a la derivada k-ésima $f^{(k)}$ de la función límite.

Demostración.

(i) Las hipótesis implican que f es continua en Ω. Sea $\Delta(a,b,c) \subset \Omega$, puesto que la integral respeta la convergencia uniforme y $[a,b,c,a]^* \subset \Omega$ es un compacto

$$\int_{[a,b,c,a]} f_n(z)\, \mathrm{d}z \longrightarrow \int_{[a,b,c,a]} f(z)\, \mathrm{d}z$$

Ahora bien $\displaystyle\int_{[a,b,c,a]} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$ ya que, por hipótesis, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para cualquier natural n. Luego

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

para cualquier triángulo $\Delta(a,b,c)$ contenido en Ω. El teorema de Morera nos asegura que f es holomorfa en Ω.

(ii) Sea $K \subset \Omega$ un compacto. Elijamos $0 < \rho < \operatorname{dist}(K, \operatorname{Fr}\Omega)$ y sea

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z,K) \leqslant \rho\}$$

Por la forma de definirlo es claro que H es un compacto y $K \subset H \subset \Omega$. Tomemos un punto cualquiera $a \in K$, entonces $\overline{D}(a,\rho) \subset H \subset \Omega$.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Aplicando las desigualdades de Cauchy a la función $f_n(z) - f(z)$ en el disco $\overline{D}(a,\rho)$ tenemos

$$\begin{aligned}|f_n^{(k)}(a) - f^{(k)}(a)| &\leqslant \frac{k!}{\rho^k} \text{máx}\{|f_n(w) - f(w)| : w \in C(a,\rho)^*\} \leqslant \\ &\leqslant \frac{k!}{\rho^k} \text{máx}\{|f_n(w) - f(w)| : w \in H\}\end{aligned}$$

La convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en H nos dice que dado $\varepsilon > 0$ existe un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \geqslant n_0$ se cumple $\text{máx}\{|f_n(w) - f(w)| : w \in H\} \leqslant \varepsilon$. Deducimos que para $n \geqslant n_0$

$$|f_n^{(k)}(a) - f^{(k)}(a)| \leqslant \frac{k!}{\rho^k}\varepsilon$$

Desigualdad que es válida para cualquier punto $a \in K$ con lo cual

$$\text{máx}\{|f_n^{(k)}(a) - f^{(k)}(a)| : a \in K\} \leqslant \frac{k!}{\rho^k}\varepsilon$$

De donde se deduce que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente en K a $f^{(k)}$. □

Ejercicios propuestos

147. Sea f una función entera tal que:

$$|f(z)| \leqslant A + B|z|^\alpha \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| \geqslant M$$

donde A, B, α, M son constantes no negativas. Prueba que f es una función polinómica de grado menor o igual que α.

148. Sea f una función entera no constante. Dado $w \in \mathbb{C}$, justifíquese que se cumple alguna de las dos siguientes afirmaciones:

a) La ecuación $f(z) = w$ tiene solución.

b) Existe una sucesión $\{z_n\} \to \infty$ tal que $\{f(z_n)\} \to w$.

149. ¿Puede existir una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ tal que $|f(z)| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{|z|}}$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$?

150. Calcula $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(2z)}{(z-\pi/4)^2(z^2+9)}\,dz$.

151. Calcula $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{dw}{(w-a)(w-b)^m}$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $|b| < r < |a|$.

152. Prueba que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{-n}\operatorname{sen}(nz)$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < 1\}$ y calcula su suma.

153. Prueba que toda función entera que no tome valores reales es constante.

154. Sea f una función entera verificando:

$$f(z) = f(z+1) = f(z+i), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Prueba que f es constante.

155. Sean f y g dos funciones enteras cuya composición es constante. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?.

156. Sea $f \in H(D(0,1))$ tal que $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{1-|z|}$ $(|z| < 1)$. Prueba que

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant e(n+1)! \quad \text{para todo} n \in \mathbb{N}$$

.

157. Sea f una función entera tal que $f(z) = f(f(z))$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué puede afirmarse de f?

158. Calcula la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$ para $\gamma = C(1/4, 1/2)$, $\gamma = C(1, 1/2)$, $\gamma = C(2,3)$.

159. Calcula la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z\,dz}{z^2(z-1)}$ para $\gamma = C(0, 1/3)$, $\gamma = C(1, 1/3)$, $\gamma = C(0,2)$.

160. Dado $n \in \mathbb{N}$, calcula las siguientes integrales:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\,dz\,; \quad \int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\,dz\,; \quad \int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{\log z}{z^n}\,dz$$

161. Se considera la sucesión de funciones dada por $f_n(z) = \dfrac{1}{n}\operatorname{sen}(nz)$. Justifica que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero no converge uniformemente en ningún subconjunto abierto de $\mathbb{C}$.

162. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{1-z^n}$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es una función holomorfa.

3.8. Cálculo de integrales de línea de campos vectoriales

Podemos utilizar la integración de funciones complejas para calcular algunas integrales de línea de campos vectoriales de dos variables. De hecho, calcular una integral de línea compleja equivale a calcular dos integrales de línea reales.

Pongamos $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ y $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ donde $a\leqslant t\leqslant b$. Tenemos que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\Big(u\big(x(t),y(t)\big)+i\,v\big(x(t),y(t)\big)\Big)\big(x'(t)+iy'(t)\big)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_a^b\Big(u\big(x(t),y(t)\big)x'(t)-v\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\,\mathrm{d}t+i\int_a^b\Big(u\big(x(t),y(t)\big)y'(t)+v\big(x(t),y(t)\big)x'(t)\Big)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_\gamma u(x,y)\,\mathrm{d}x-v(x,y)\,\mathrm{d}y+i\int_\gamma v(x,y)\,\mathrm{d}x+u(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\gamma \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}+i\int_\gamma \mathbf{G}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{3.8}$$

Donde las dos últimas integrales son las integrales de línea de los campos vectoriales de dos variables $\mathbf{F}(x,y)=\big(u(x,y),-v(x,y)\big)$, $\mathbf{G}(x,y)=\big(v(x,y),u(x,y)\big)$ a lo largo del camino $\gamma(t)=(x(t),y(t))$.

Hemos obtenido que:

$$\int_\gamma \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_\gamma u(x,y)\,\mathrm{d}x-v(x,y)\,\mathrm{d}y = \operatorname{Re}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) \tag{3.9}$$

$$\int_\gamma \mathbf{G}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_\gamma v(x,y)\,\mathrm{d}x+u(x,y)\,\mathrm{d}y = \operatorname{Im}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) \tag{3.10}$$

Recuerda que un campo vectorial $\mathbf{H}(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ se dice que es **localmente conservativo** en un abierto Ω, si para todo $(x,y)\in\Omega$ se verifica que $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.

Si la función f es holomorfa en Ω, las ecuaciones de Cauchy–Riemann para f equivalen a que los dos campos vectoriales $\mathbf{F}(x,y)=\big(u(x,y),-v(x,y)\big)$ y $\mathbf{G}(x,y)=\big(v(x,y),u(x,y)\big)$ sean localmente conservativos en Ω.

Se trata ahora de invertir este proceso. Dado un campo vectorial $\mathbf{H}(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ de clase $\mathcal{C}^2$ y localmente conservativo en un abierto Ω, comprobamos que el campo $\mathbf{J}(x,y)=\big(Q(x,y),-P(x,y)\big)$ también es localmente conservativo en Ω. En tal caso, la función $f(x+iy)=Q(x,y)+iP(x,y)$ es holomorfa en Ω. Haciendo en lo anterior $u(x,y)=Q(x,y)$,

$v(x,y) = P(x,y)$ resulta, como caso particular de (3.10), que:

$$\int_\gamma \mathbf{H}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \operatorname{Im}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right)$$

Para calcular la última integral hay que expresar $f(z) = Q(x,y) + iP(x,y)$ en función de $z = x+iy$ y utilizar técnicas de integración compleja.

Naturalmente, la función $-if(x+iy) = P(x,y) - iQ(x,y)$ también es holomorfa y se tiene, como caso particular de (3.9), que:

$$\int_\gamma \mathbf{H}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \operatorname{Re}\left(-\int_\gamma i f(z)\,\mathrm{d}z\right)$$

Ejercicios propuestos

163. a) Justifica que si φ es una primitiva de $f(z) = Q(x,y) + iP(x,y)$ en un dominio Ω, entonces $\operatorname{Im}(\varphi)$ es una función potencial para $\mathbf{H}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ en Ω.

b) Justifica que si φ es una primitiva de $f(z) = P(x,y) - iQ(x,y)$ en un dominio Ω, entonces $\operatorname{Re}(\varphi)$ es una función potencial para $\mathbf{H}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ en Ω.

164. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{2-y}{(x-1)^2+(y-2)^2}, \dfrac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)$ definido en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$.

a) Calcula $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}$ donde $\gamma = C((1,2),r)$ es la circunferencia de centro $(1,2)$ y radio $r > 0$.

b) Calcula una función potencial de $\mathbf{F}$ en el semiplano $A = \{(x,y) : y > 2\}$.

165. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2}, \dfrac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}\right)$ definido en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.

a) Calcula $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}$ donde $\gamma = C((1,0),r)$ es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio $r > 0$. .

b) Calcula una función potencial de $\mathbf{F}$ en el semiplano $A = \{(x,y) : y > 0\}$.

166. Calcula una función potencial del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2), -\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)$ en el dominio $\Omega = \{(x,y) : x > 0\}$.

Capítulo 4

Propiedades locales. Prolongación analítica. Funciones armónicas

Introducción

En este capítulo vamos a ver que en algunos aspectos las funciones holomorfas se comportan localmente de forma parecida a las funciones polinómicas. Ello se debe, naturalmente, a que las funciones holomorfas son analíticas y, por tanto, localmente, son límites uniformes de sucesiones de funciones polinómicas (sus polinomios de Taylor). Los resultados principales de este capítulo son generalizaciones para funciones holomorfas de resultados conocidos para funciones polinómicas. Por ejemplo, es sabido que si dos funciones polinómicas de grado n coinciden en un punto junto con sus derivadas hasta la de orden n inclusive, entonces dichas funciones son idénticas. La generalización para funciones holomorfas de este resultado afirma que si dos funciones holomorfas en un dominio coinciden ellas y todas sus derivadas en un punto entonces ambas funciones son idénticas (teorema 4.1).

El estudio del módulo de una función holomorfa lleva de forma natural a introducir las funciones subarmónicas. Los resultados hasta aquí obtenidos para las funciones holomorfas se aplican para probar con comodidad importantes resultados para funciones armónicas.

4.1. Ceros de funciones holomorfas. Principio de identidad

Es sabido que una función polinómica $p(z)$ tiene un cero de orden k en un punto $a \in \mathbb{C}$, si dicha función y todas sus derivadas, hasta la de orden $k-1$ inclusive, se anulan en a y la derivada de orden k no se anula en a. Además, si una función polinómica $p(z)$ tiene un cero de orden k en un punto a entonces dicha función factoriza en la forma $p(z) = (z-a)^k q(z)$ donde $q(z)$ es una función polinómica que no se anula en a. No es posible extender este concepto de *orden de un cero* a funciones reales no polinómicas.

Por ejemplo, la función real de variable real

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{-1/x^2} \qquad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Tanto f como todas sus derivadas se anulan en 0. ¿Debemos decir que f tiene un cero de *"orden infinito"* en $a = 0$?

Los ceros de una función polinómica son, evidentemente, un conjunto de puntos aislados en $\mathbb{C}$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \text{si } x \neq 0 \\ g(0) &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos que g es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$ y se anula en 0 y en todos los puntos de la sucesión $x_n = 1/n\pi$. Por tanto, en cualquier entorno de 0 hay infinitos ceros de g, es decir el conjunto de los ceros de g tiene a 0 como punto de acumulación.

En contraste con esta situación, vamos a ver que los ceros de las funciones holomorfas pueden caracterizarse de forma parecida a los ceros de las funciones polinómicas. El resultado principal es el siguiente.

4.1 Teorema. *Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en Ω y*

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Equivalen:

(a) El conjunto $Z(f)$ tiene un punto de acumulación en Ω, es decir, $Z(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$.

(b) Existe un punto $a \in \Omega$ tal que $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(c) f es la función constante cero en Ω.

Demostración.

(a)⇒(b) Por hipótesis hay algún punto $a \in Z(f)' \cap \Omega$. Sea $\rho > 0$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$. Existe una sucesión de puntos $a_n \in D(a,\rho)$ con $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{a_n\} \to a$. El teorema de Taylor afirma que

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho)$$

siendo $c_n = \dfrac{f^{(n}(a)}{n!}$.

En primer lugar, por la continuidad de f, tenemos que $f(a) = \lim\{f(a_n)\} = 0$.

Volvemos a escribir la serie teniendo en cuenta que $f(a) = 0$ y dividimos por $z - a$ con lo que

$$\frac{f(z)}{z-a} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1} \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho) \setminus \{a\}$$

Pongamos $g_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1}$, función que es holomorfa en $D(a,\rho)$ y $g_1(a) = 0$. Con ello

$$\frac{f(z)}{z-a} = c_1 + g_1(z)$$

Evaluando en a_n obtenemos $0 = c_1 + g_1(a_n)$ y, tomando límites deducimos que

$$0 = c_1 + \operatorname{lím} g_1(a_n) = c_1 + g_1(a) = c_1$$

Hemos obtenido $c_1 = 0$. Razonemos por inducción sobre k. Supuesto probado que $c_j = 0$ para $j = 1, \ldots, k$, podemos escribir

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = c_{k+1} + \sum_{j=k+2} c_j (z-a)^{j-k-1} \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho) \setminus \{a\}$$

De nuevo llamamos $g_{k+1}(z) = \sum_{j=k+2} c_j (z-a)^{j-k-1}$, evaluamos la igualdad anterior en $z = a_n$ y tomamos límites para obtener

$$0 = c_{k+1} + \lim_{n\to\infty} g_{k+1}(a_n) = c_{k+1}$$

luego $c_{k+1} = 0$ y, por inducción, concluimos que $c_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ como queríamos probar.

(b)⇒(c) Llamemos $A = \{z \in \Omega : f^{(k)}(z) = 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. A no es vacío por hipótesis y es inmediato que A es cerrado relativo a Ω puesto que es intersección de cerrados relativos

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{z \in \Omega : f^{(k)}(z) = 0\}$$

Sea $a \in A$ y tomemos $\rho > 0$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$. El teorema de Taylor afirma que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{n!} (z-a)^n \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho)$$

luego $f(z) = 0$ para todo $z \in D(a,\rho)$ con lo cual $f^{(k)}(z) = 0$ para todo $z \in D(a,\rho)$ y para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto último implica que $D(a,\rho) \subset A$, luego A es abierto. Por conexión $A = \Omega$

(c)⇒(a) Es evidente. □

Con frecuencia el resultado anterior no se interpreta correctamente. Considera los siguientes casos.

La función $\operatorname{sen} z$ es entera y tiene infinitos ceros $z_n = n\pi$ pero el conjunto de ellos no tiene puntos de acumulación.

La función $\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$ es holomorfa en el dominio $\mathbb{C}^*$ y sus ceros $\dfrac{1}{n\pi}$ se acumulan en 0 que *no pertenece a* $\mathbb{C}^*$.

A continuación enunciamos uno de los resultados más útiles de la teoría de funciones holomorfas. Este resultado afirma, en particular, que los valores de una función holomorfa en un dominio están determinados de forma única por los valores que dicha función toma en los puntos de una sucesión que converja a un punto del dominio.

4.2 Teorema (Principio de identidad para funciones holomorfas.)**.** *Si dos funciones holomorfas en un dominio Ω coinciden en un subconjunto de Ω que tiene algún punto de acumulación en Ω entonces dichas funciones coinciden en Ω.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ donde Ω es un dominio. Llamemos $h = f - g$. La hipótesis nos dice que $Z(h)' \cap \Omega \neq \emptyset$ y, por el resultado anterior, h es idénticamente nula, esto es, $f(z) = g(z)$ para $z \in \Omega$. □

4.3 Corolario. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función no idénticamente nula en Ω. Sea*

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Entonces:

(i) Todo punto de $Z(f)$ es un punto aislado de $Z(f)$.

(ii) $Z(f)$ es numerable.

Demostración.

(i) Las hipótesis implican por el resultado anterior que $Z(f)$ no tiene ningún punto de acumulación en Ω,lo que implica la afirmación *(i)* del enunciado.

(ii) Basta tener en cuenta que todo abierto en $\mathbb{C}$ es unión numerable de compactos y que si K es un compacto contenido en Ω entonces el conjunto $Z(f) \cap K$ es finito. □

4.4 Definición (Orden de un cero.)**.** Sea f una función holomorfa y no idénticamente nula en un dominio Ω y supongamos que f tiene un cero en un punto $a \in \Omega$. Como consecuencia del teorema 4.1, sabemos que alguna derivada de f no se anula en a. Sea $k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}$. Decimos entonces que f tiene en a un cero de orden k.

El siguiente resultado pone de manifiesto que los ceros de una función holomorfa permiten factorizar dicha función de forma análoga a como factorizan las funciones polinómicas.

4.5 Teorema (Caracterización del orden de un cero.)**.** *Sea f una función holomorfa no idénticamente nula en un dominio Ω. Dado $a \in \Omega$, se verifica que f tiene en a un cero de orden k si, y sólo si, existe una función holomorfa en Ω, g, de forma que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^k g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Demostración. Supongamos que existe g holomorfa en Ω con $g(a)\neq 0$ y $f(z)=(z-a)^k g(z)$. Tomamos $\rho>0$ de tal forma que $D(a,\rho)\subset\Omega$. El teorema de Taylor nos permite escribir g como suma de su serie de Taylor

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-a)^n \qquad z\in D(a,\rho)$$

Se cumple que $\alpha_0\neq 0$ puesto que $g(a)\neq 0$. Con lo cual

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-a)^{n+k} \qquad \text{para } z\in D(a,\rho)$$

Ya que el desarrollo de Taylor de una función holomorfa es único tenemos que $f^{(q)}(a)=0$ para todo $0\leqslant q\leqslant k-1$ y $\alpha_0=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}\neq 0$, esto es, $f^{(k)}(a)\neq 0$. Hemos obtenido que f tiene en a un cero de orden k.

Recíprocamente, sea a un cero de orden k de f, es decir,

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad \text{para todo } z\in D(a,\rho)\subset\Omega$$

con $c_k\neq 0$. Consideremos la función $g:\Omega\to\mathbb{C}$ definida por

$$\begin{aligned} g(a)&=c_k\\ g(z)&=\frac{f(z)}{(z-a)^k} \quad z\in\Omega\setminus\{a\}\end{aligned}$$

Claramente g es holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$ y como

$$g(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-a)^{n-k} \qquad \text{para todo } z\in D(a,\rho)$$

deducimos que g es holomorfa en $D(a,\rho)$ y, en particular, es derivable en a. Luego g es holomorfa en Ω. Además se cumple que $f(z)=(z-a)^k g(z)$ para $z\in\Omega$ y $g(a)\neq 0$. □

4.6 Teorema (Regla de L'Hôpital.). *Sean f, g dos funciones holomorfas no idénticamente nulas en un dominio Ω. Supongamos que $f(a)=g(a)=0$ en un punto $a\in\Omega$. Entonces*

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Demostración. Por el anterior corolario, puesto que f no es idénticamente nula, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $f(z)=(z-a)^m F(z)$ con F una función holomorfa en Ω cumpliendo $F(a)\neq 0$. Análogamente para g existe $n\in\mathbb{N}$ y una función holomorfa en Ω, G, de forma que $g(z)=(z-a)^n G(z)$ con $G(a)\neq 0$. Además existe un disco $D(a,\rho)\subset\Omega$ tal que $g(z)\neq 0$ y $g'(z)\neq 0$ para $z\in D(a,\rho)\setminus\{a\}$. Para $z\in D(a,\rho)\setminus\{a\}$ tenemos que

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-a)^m F(z)}{(z-a)^n G(z)}, \qquad \frac{f'(z)}{g'(z)}=(z-a)^{m-n}\frac{mF(z)+(z-a)F'(z)}{nG(z)+(z-a)G'(z)}$$

Tomando límites para $z\to a$ obtenemos:

- Si $m = n$ el valor común de ambos límites es $F(a)/G(a)$.
- Si $m > n$ ambos límites son nulos.
- Si $m < n$ ambos límites son ∞.

Ejercicios propuestos

167. Sea f una función entera verificando que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Prueba que f es una función polinómica.

168. Sean f y g dos funciones enteras no constantes verificando que $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?.

169. Sea f una función entera no constante verificando que $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Prueba que f es de la forma $f(z) = \alpha z^n$ donde n es un número natural y $|\alpha| = 1$.

170. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función f holomorfa en un entorno del origen, verificando que $f(1/n) = a_n$ para todo número natural n suficientemente grande:

a) $a_{2n} = 0,\ a_{2n-1} = 1$

b) $a_{2n} = a_{2n-1} = \dfrac{1}{2n}$.

c) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

171. Comprueba que la función

$$f(x+iy) = \mathrm{e}^{-x}(x\operatorname{sen} y - y\cos y) + i\,\mathrm{e}^{-x}(y\operatorname{sen} y + x\cos y)$$

es entera y exprésala únicamente por medio de la variable compleja $z = x+iy$.

172. Sabido que la función

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \cosh y \operatorname{sen} x(x\mathrm{e}^x\cos y - y\mathrm{e}^x\sin y) - \cos x \operatorname{senh} y(y\mathrm{e}^x\cos y + x\mathrm{e}^x\operatorname{sen} y) + \\ &+ i\Big(\cosh y \operatorname{sen} x(y\mathrm{e}^x\cos y + x\mathrm{e}^x\operatorname{sen} y) + \cos x \operatorname{senh} y(x\mathrm{e}^x\cos y - y\mathrm{e}^x\operatorname{sen} y)\Big) \end{aligned}$$

es una función entera, exprésala únicamente por medio de la variable compleja $z = x+iy$.

173. Sea f una función entera tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Prueba que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

174. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Justifica que el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en Ω es un dominio de integridad, es decir, no tiene divisores de cero.

175. Sean f y g funciones holomorfas en un dominio Ω. Supongamos que hay una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de Ω que converge a un punto $a \in \Omega$ con $a_n \neq a$ y $f'(a_n)g(a_n) = g'(a_n)f(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que las funciones f y g son linealmente dependientes.

176. Sea f una función holomorfa en el disco unidad verificando que $f(0)=0$. Prueba que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f(z^n)$ converge en el disco unidad y que su suma es una función holomorfa en dicho disco.

177. Da un ejemplo de dos funciones holomorfas en un dominio acotado que coincidan en infinitos puntos del mismo y no sean idénticas. Considera también el caso de que el dominio no sea acotado.

4.2. Prolongación analítica

En el capítulo 2 se dijo algo sobre las llamadas “funciones multiformes” complejas (también llamadas “funciones multivaluadas”). Las funciones multiformes que conocemos proceden de resolver ecuaciones que no tienen solución única. Por ejemplo, la función multiforme raíz n-ésima compleja, dada por $z \mapsto [z^{1/n}]$ procede de resolver la ecuación $w^n = z$; y la función multiforme logaritmo complejo, dada por $z \mapsto \operatorname{Log}(z)$ para todo $z \neq 0$, procede de resolver la ecuación $\mathrm{e}^w = z$. En general, si f es una función compleja no inyectiva, la aplicación que a cada valor z en la imagen de f hace corresponder el conjunto de puntos donde f toma dicho valor, $z \mapsto f^{-1}(z)$, es una correspondencia, es decir, una función multiforme. Sucede que no todas las funciones multiformes complejas son de este tipo. En lo que sigue vamos a ver un procedimiento muy natural de extender analíticamente una función holomorfa dada que nos va a llevar a considerar funciones multiformes complejas muy generales.

Para empezar, considera la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ que tiene radio de convergencia 1 y define una función analítica en $D(0,1)$ dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad (|z|<1)$$

La serie que define a f no converge para $|z| \geqslant 1$, es decir, la función así definida no tiene sentido para $z \notin D(0,1)$. Sin embargo, hay una función analítica que está definida en un dominio mucho más grande que $D(0,1)$ y que extiende a f. Seguro que la conoces: la función $h(z) = \dfrac{1}{1-z}$ que es analítica en el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Claramente $D(0,1) \subset \Omega$ y $f(z) = h(z)$ para todo $z \in D(0,1)$. Esto es, la función h extiende a f a un dominio mucho más grande que el disco $D(0,1)$ en el que vive f.

Consideremos ahora que tenemos una función analítica definida por una serie de potencias convergente en un cierto disco:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad (|z-a|<R)$$

Esta situación no es artificial, con frecuencia la solución de muchos problemas de la física matemática viene dada por una función analítica definida por su serie de potencias. Es natural preguntarse si dicha función puede prolongarse mas allá del disco donde está inicialmente definida *sin perder la analiticidad*. Si lo piensas un poco, caerás en que hay un procedimiento natural para tratar de extender f de forma analítica, pues las funciones analíticas vienen dadas localmente por series de potencias. Entonces, la idea es considerar un punto cualquiera $b \neq a$ en el disco $D(a,R)$ donde inicialmente está definida f y desarrollar f en serie de potencias centrada en b. De esta forma obtenemos una nueva serie de potencias $\sum b_n(z-b)^n$ con radio de convergencia $R_b > 0$ que define una función:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n, \qquad (|z-b| < R_b)$$

tal que $f_1(z) = f(z)$ para todo $z \in D(a,R) \cap D(b,R_b)$. Puede ocurrir que el disco $D(b,R_b)$ se salga fuera del disco $D(a,R)$. En tal caso, la función $F : D(a,R) \cup D(b,R_b) \to \mathbb{C}$ dada por:

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{para } z \in D(a,R); \\ f_1(z), & \text{para } z \in D(b,R_b). \end{cases}$$

es una extensión analítica de f al dominio $D(a,R) \cup D(b,R_b)$. Lo más interesante es que esta es la *única* posible extensión de f a dicho dominio como se deduce fácilmente del principio de identidad. Podemos repetir ahora con f_1 este mismo proceso y así podríamos continuar indefinidamente (al menos en teoría). De esta forma lo que obtenemos es una colección de series de potencias con sus discos de convergencia, la unión de los cuales es un abierto en el que podemos definir una "función" que "prolonga analíticamente" a la función inicial. Puede ocurrir que la "función" así obtenida no sea una verdadera función sino una correspondencia, es decir, una función multiforme. Resulta así que las funciones multiformes complejas aparecen de manera completamente natural en el proceso de prolongación analítica. Precisemos conceptos.

4.2.1. Prolongación analítica a lo largo de curvas

Llamaremos **elemento de función** a un par (f,D) donde D es un disco abierto y $f \in \mathcal{H}(D)$. Dos elementos de función (f_0,D_0), (f_1,D_1) se dice que son **prolongación analítica directa** uno de otro si $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$ y $f_0(z) = f_1(z)$ para todo $z \in D_0 \cap D_1$. En tal caso escribiremos

$$(f_0,D_0) \sim (f_1,D_1) \tag{4.1}$$

La relación así definida es claramente simétrica pues $(f_0,D_0) \sim (f_1,D_1)$ significa exactamente lo mismo que $(f_1,D_1) \sim (f_0,D_0)$. Es importante observar que si $(f_0,D_0) \sim (f_1,D_1)$ y $(f_0,D_0) \sim (g_1,D_1)$ entonces $f_1 = g_1$. Pues se tiene que para todo $z \in D_0 \cap D_1$ es $f_1(z) = f_0(z) = g_1(z)$, y, por el principio de identidad, se sigue que $f_1(z) = g_1(z)$ para todo $z \in D_1$. En otras palabras, una prolongación analítica directa de un elemento de función está determinada de manera única por dicho elemento.

Una *cadena de discos* es un conjunto finito de discos abiertos $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \dots, D_n\}$ tales que $D_{k-1} \cap D_k \neq \varnothing$ para $k = 1,2,\dots,n$. Dado un elemento de función (f_0,D_0), supongamos que hay elementos (f_k,D_k) tales que $(f_{k-1},D_{k-1}) \sim (f_k,D_k)$ para $k = 1,2,\dots,n$. Entonces se dice que (f_n,D_n) es una prolongación analítica de (f_0,D_0) a lo largo de la cadena de discos $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \dots, D_n\}$. Puesto que cada función f_k está determinada de manera única por f_{k-1}, deducimos que f_n está determinado de forma única por f_0 y $\mathcal{C}$.

Es interesante observar que en este proceso de prolongación cada función f_k solamente está obligada a "guardar memoria" de la que le precede f_{k-1}, pero puede ocurrir que $D_0 \cap D_n \neq \varnothing$ y las funciones f_0 y f_n no coincidan en dicho conjunto. Esto se debe a que la relación (4.1) no es transitiva. El siguiente ejemplo es ilustrativo de lo que puede pasar.

4.7 Ejemplo.

Vamos a partir del elemento de función (f_0, D_0) donde $D_0 = D(1,1)$ y f_0 es la rama holomorfa de la raíz cuadrada en D_0 que verifica $f_0(1) = 1$. Como $D_0 \subset \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$, sabemos que dicha rama viene dada por el valor principal de la raíz cuadrada $f_0(z) = \sqrt{z}$. Puesto que $D_1 \subset \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$ podemos tomar también $f_1(z) = \sqrt{z}$, con lo que es evidente que $f_0(z) = f_1(z)$ para todo $z \in D_0 \cap D_1$. Sin embargo en D_2 no podemos tomar la rama de la raíz cuadrada que viene dada por el valor principal pues dicha rama ni siquiera es continua en D_2. Tenemos que tomar una rama holomorfa de la raíz cuadrada en D_2 que coincida con f_1 en la intersección de $D_1 \cap D_2$.

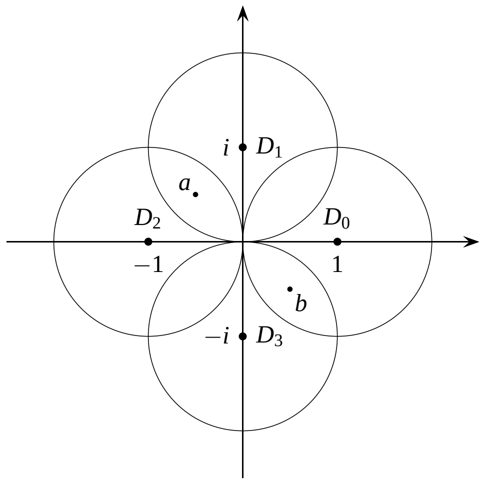


Figura 4.1. Prolongación analítica

Como $D_2 \subset \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^+$, una rama holomorfa en D_2 viene dada por $f_2(z) = \sqrt{|z|}\, \mathrm{e}^{i\frac{\arg_0(z)}{2}}$ donde $\arg_0$ es la rama del argumento que toma valores en $[0, 2\pi[$ (ver proposición 2.42). De hecho, f_2 es holomorfa en $\mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^+$. En el dominio $D_1 \cap D_2$ tenemos ahora dos ramas holomorfas de la raíz cuadrada f_1 y f_2. En dicho dominio ambas ramas o bien coinciden o son opuestas (ver corolario 2.40). Tomando $a = (-1+i)/2$ tenemos que $f_1(a) = f_2(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i3\pi/8}$. Concluimos que f_1 y f_2 coinciden en $D_1 \cap D_2$ (de hecho, dichas funciones coinciden en todo el semiplano superior). Como $D_3 \subset \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^+$ podemos tomar $f_3(z) = f_2(z)$. Hemos formado así una cadena de elementos de función (f_k, D_k), $k = 0, 1, 2, 3$ en la que cada elemento es prolongación analítica directa del que le precede. Como $D_3 \cap D_0 \neq \varnothing$ es natural preguntarse si f_0 y f_3 coinciden en dicha intersección. Tomando $b = (1-i)/2$ tenemos que

$$f_3(b) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i7\pi/8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i(\pi - \pi/8)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-i\pi/8}$$

y $f_0(b) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-i\pi/8}$. Concluimos que $f_0(z) = -f_3(z)$ en $D_0 \cap D_3$ (de echo, $f_0(z) = -f_3(z)$ para todo z en el semiplano inferior).

Si ahora queremos obtener una prolongación analítica directa de (f_3, D_3) a $D_4 = D_0$ debemos tomar en D_0 la rama $f_4(z) = \sqrt{|z|}\, \mathrm{e}^{i\frac{\arg_\pi(z)}{2}}$ donde $\arg_\pi$ es la rama del argumento que toma valores en $[\pi, 3\pi[$. Observa que f_4 coincide con f_3 en el semiplano inferior, por lo que $f_4(b) = -f_0(b)$. Concluimos que $f_4(z) = -f_0(z)$ para todo $z \in D_0$.

En resumen, hemos partido de una rama holomorfa de la raíz cuadrada y después de "dar una vuelta alrededor del origen" por medio de una cadena de prolongaciones analíticas directas, hemos llegado a otra rama holomorfa de dicha función distinta de la inicial. Esto se expresa diciendo que el 0 es un “punto de ramificación” de la raíz cuadrada. Precisaremos este concepto más adelante.

Podemos seguir este proceso de prolongación tomando $D_5 = D_1$ y $f_5 = f_4$. En $D_6 = D_2$ tomamos $f_6(z) = \sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\arg_{2\pi}(z)}{2}}$ donde $\arg_{2\pi}$ es la rama del argumento que toma valores en $[2\pi, 4\pi[$. En $D_7 = D_3$ tomamos $f_7 = f_6$. Como

$$f_7(b) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i15\pi/8} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\pi/8} = f_0(b)$$

Concluimos que f_7 y f_0 coinciden en $D_0 \cap D_7$.

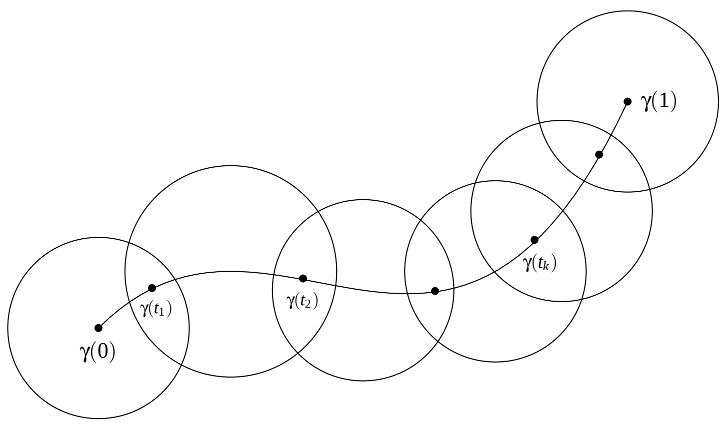
Si ahora queremos obtener una prolongación analítica directa de (f_7, D_7) a $D_8 = D_0$ debemos tomar en D_0 la rama $f_8(z) = \sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\arg_{3\pi}(z)}{2}}$ donde $\arg_{3\pi}$ es la rama del argumento que toma valores en $[3\pi, 5\pi[$. Observa que f_8 coincide con f_7 en el semiplano inferior, por lo que $f_8(b) = f_0(b)$. Concluimos que $f_8(z) = f_0(z)$ para todo $z \in D_0$.

Es decir, después de dar dos vueltas alrededor del origen por una cadena de elementos $\{(f_k, D_k)\}$ $0 \leqslant k \leqslant 8$, cada uno prolongación analítica directa del que le precede, regresamos a la rama inicial. ♦

4.8 Definición. Sea (f_0, D_0) un elemento de función, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva con punto inicial $\gamma(0)$ que es el centro del disco D_0. Supongamos que hay elementos de función (f_k, D_k) $0 \leqslant k \leqslant n$ y una partición $t_0 = 1 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ tal que $\gamma(1)$ es el centro de D_n y

$$\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset D_{i-1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

y tal que (f_n, D_n) es una prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de la cadena de discos $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$, se dice entonces que (f_0, D_0) **puede prolongarse analíticamente a lo largo de** γ y que (f_n, D_n) es la **prolongación analítica de** (f_0, D_0) **a través de** γ**.**



Aunque en la definición anterior hay muchos datos, lo importante es que la prolongación analítica a lo largo de una curva γ está determinada de forma única por el elemento de función inicial (f_0, D_0) y la propia curva, en el sentido de que si (f_n, D_n) es una prolongación analítica de (f_0, D_0) a través de γ según la cadena de discos $\mathcal{C}_1 = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$, y si $(g_m, \mathcal{D}_m)$ es una prolongación analítica de (f_0, D_0) a través de γ según la cadena de discos $\mathcal{C}_2 = \{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m\}$, entonces $f_n = g_m$ en $D_n \cap \mathcal{D}_m$. De hecho, como D_n y $\mathcal{D}_m$ son discos con el mismo centro y las funciones f_n y g_m son analíticas, si coinciden en el disco más pequeño entonces ambas coinciden en el disco más grande y podemos considerar que ambas funciones están definidas en dicho disco y coinciden.

En el ejemplo 4.7 el elemento (f_4, D_4) es la prolongación analítica de (f_0, D_0) a través de la curva $\gamma(t) = \mathrm{e}^{i2\pi t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. En el mismo ejemplo, el elemento $(f_8, D_8) = (f_0, D_0)$ es la prolongación analítica de (f_0, D_0) a través de la curva $\gamma(t) = \mathrm{e}^{i4\pi t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Observación. No siempre es posible prolongar un elemento dado de función. Por ejemplo, el elemento de función $(f, D(0,1))$ donde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \qquad (|z| < 1)$$

no puede prolongarse fuera del disco unidad porque para todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ se verifica que $\lim\limits_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} f(\rho\, \mathrm{e}^{ir}) = \infty$, es decir, f tiene límite radial infinito en todo punto de la circunferencia unidad de la forma e^{ir} con $r \in \mathbb{Q}$ y tales puntos forman un conjunto denso en $C(0,1)^*$.

4.2.2. Funciones multiformes analíticas. Puntos de ramificación

Una **función analítica en el sentido de Weierstrass** es la colección de todos los elementos de función que pueden obtenerse por prolongación analítica a partir de un elemento de función dado. Si $\mathcal{F}$ es una función analítica en sentido de Weierstrass, su dominio es el abierto Ω formado por la unión de todos los discos de convergencia de sus elementos de función (puede probarse que Ω es un dominio). Para cada punto $z \in \Omega$ se define $\mathcal{F}(z)$ como el conjunto de valores que toman en z los elementos de función de $\mathcal{F}$ cuyo disco de convergencia contiene a z. Por tanto, una función analítica en el sentido de Weierstrass es una "correspondencia analítica". Vamos a darle la vuelta a esta situación y a precisar la expresión "correspondencia analítica".

4.9 Definición. Sea $\mathcal{F}$ una función multiforme (correspondencia) compleja definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que $\mathcal{F}$ es holomorfa o analítica en Ω si:

$a)$ Para cada punto $z \in \Omega$ hay un un disco, D_z, centrado en z y un elemento de función (f, D_z) que es una rama holomorfa de $\mathcal{F}$ (diremos que estos elementos *pertenecen* a $\mathcal{F}$ y que z es el *centro* del elemento (f, D_z)).

$b)$ Dos elementos cualesquiera de $\mathcal{F}$ son prolongación analítica uno de otro a través de alguna curva en Ω.

$c)$ Todo elemento de función que puede ser obtenido por prolongación analítica de un elemento de $\mathcal{F}$ es también un elemento de $\mathcal{F}$.

$d)$ Todo elemento (f, D_z) de $\mathcal{F}$ puede prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier curva contenida en Ω cuyo punto inicial sea z.

La condición *b)* se pone para evitar, por ejemplo, funciones multiformes que pudieran asociar a cada $z\in\mathbb{C}^*$ sus raíces cuadradas y también sus raíces cúbicas. La condición *c)* se pone para evitar, por ejemplo, funciones multiformes que a cada $z\in\mathbb{C}^*$ asignaran cuatro de sus raíces octavas.

Con esta definición las correspondencias $\mathcal{F}(z) = \operatorname{Log}(z)$ y $\mathcal{G}(z) = [z^{1/n}]$ son holomorfas en $\mathbb{C}^*$.

4.10 Definición. Sea $\mathcal{F}$ una correspondencia holomorfa cuyo abierto de definición es Ω.

• Se dice que un punto a es un **punto singular aislado** de $\mathcal{F}$, si hay un disco $D(a,r)$ tal que $D(a,r)\setminus\{a\}\subset\Omega$.

• Un punto singular aislado, a, se dice que es un **punto de ramificación** de orden $n-1$ de $\mathcal{F}$ si la prolongación analítica de cualquier elemento de $\mathcal{F}$ a lo largo de una curva del tipo $\gamma(t) = a+\rho\,e^{i2\pi nt}$ donde $t\in[0,1]$ termina en el mismo elemento de partida y n es el menor número natural con dicha propiedad. Si la prolongación analítica a lo largo de curvas del tipo $\gamma(t) = a+\rho\,e^{i2\pi nt}$ donde $t\in[0,1]$ no conduce nunca al mismo elemento de partida se dice que a es un punto de ramificación logarítmico o de orden infinito de $\mathcal{F}$.

• Se dice que ∞ es un punto de ramificación de $\mathcal{F}$ si 0 es un punto de ramificación de $\mathcal{G}$ donde $\mathcal{G}(z) = \mathcal{F}(1/z)$

Con un poco más de detalle:

Un punto singular aislado de $\mathcal{F}$ es un punto a que no es centro de ningún elemento de $\mathcal{F}$, es decir, no es posible prolongar analíticamente ningún elemento de $\mathcal{F}$ a través de una curva que pase por dicho punto, pero hay un disco $D(a,r)$ tal que todo punto $z\in D(a,r)$ con $z\neq a$ es centro de un elemento de $\mathcal{F}$.

Un punto de ramificación de orden $n-1$ de $\mathcal{F}$ es un punto singular aislado a tal que hay un disco $D(a,r)$ con la propiedad de que todo $z\in D(a,r)$ con $z\neq a$ es centro de un elemento (f,D_z) de $\mathcal{F}$, y si prolongamos dicho elemento a lo largo de una circunferencia centrada en a y que rodea n veces a dicho punto volvemos al elemento inicial. Este hecho también se puede expresar diciendo que en cada punto del disco $D(a,r)$ distinto de a la función multiforme $\mathcal{F}$ toma exactamente n valores.

En el ejemplo 4.7 hemos visto que 0 es un punto de ramificación de orden 1 de la raíz cuadrada. Es fácil comprobar que 0 e ∞ son puntos de ramificación de orden $n-1$ de $\mathcal{F}(z) = [z^{1/n}]$ y son puntos de ramificación de orden infinito de $\mathcal{F}(z) = \operatorname{Log}(z)$.

Seguro que habrás pensado que eso de "obtener todos los posibles elementos de función por prolongación analítica a partir de uno dado" es algo que se dice muy fácilmente pero no parece fácil de realizar en la práctica. Estoy de acuerdo contigo. Lo que estamos viendo en esta sección tiene un interés teórico, sirve para precisar algunos conceptos como el de punto de ramificación. Además, con mucha frecuencia hay otras formas de realizar la prolongación analítica de una función holomorfa dada, sin necesidad de recurrir a cadenas de series de potencias. El siguiente resultado es un ejemplo de esto.

4.11 Proposición (Principio de reflexión de Schwarz)**.** *Sea $\Omega\subset$ un dominio contenido en el semiplano superior tal que $Fr(\Omega)\cap\mathbb{R} = I$ es un intervalo abierto y definamos $\Omega^* = \{\overline{z} : z\in\Omega\}$. Sea f una función holomorfa en Ω y continua en $\Omega\cup I$ que toma valores reales en I. Entonces* *la función* $F:\Omega\cup I\cup\Omega^*\to\mathbb{C}$ *definida por:*

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & \textit{si } z\in\Omega\cup I;\\ \overline{f(\overline{z})}, & \textit{si } z\in\Omega^*.\end{cases}$$

es holomorfa.

Demostración. Por el ejercicio 42 sabemos que F es holomorfa en $\Omega\cup\Omega^*$. También es fácil probar, usando que f es continua en $\Omega\cup I$ y toma valores reales en I, la continuidad de F en $\Omega\cup I\cup\Omega^*$. Ahora, usando el teorema de Morera y el ejercicio 121, resulta que la integral de F a lo largo de la poligonal formada por la frontera de cualquier triángulo contenido en $\Omega\cup I$ o en $\Omega^*\cup I$ es cero. Basta tener finalmente en cuenta que todo triángulo contenido en el dominio $\Omega\cup I\cup\Omega^*$ se puede descomponer en no más de tres triángulos contenidos en $\Omega\cup I$ o en $\Omega^*\cup I$ y aplicar de nuevo el teorema de Morera. Los detalles debes completarlos tú. □

Ejercicios propuestos

178. Haz un estudio análogo al que hemos hecho en el ejemplo 4.7 para las raíces cúbicas. Concretamente, prueba que la rama holomorfa de la raíz cúbica definida en $D(1,1)$ puede prolongarse a lo largo de la curva $\gamma(t)=\mathrm{e}^{i2\pi t}$ donde $t\in[0,1]$. ¿Cuál es la rama final en esta prolongación? ¿Y si prolongamos a lo largo de la curva $\gamma(t)=\mathrm{e}^{i6\pi t}$ donde $t\in[0,1]$?

179. Prueba que la rama principal del logaritmo definida en $D(1,1)$ puede prolongarse a lo largo de la curva $\gamma(t)=\mathrm{e}^{i2\pi t}$ donde $t\in[0,1]$. ¿Cuál es la rama final en esta prolongación? ¿Y si prolongamos a lo largo de la curva $\gamma(t)=\mathrm{e}^{i8\pi t}$ donde $t\in[0,1]$?

4.3. Funciones armónicas y subarmónicas

4.12 Proposición. *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω y $R>0$ tal que $\overline{D}(a,R)\subset\Omega$. Entonces*

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+R\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(igualdad de la media)}$$

esto es, el valor que toma f en el centro de una circunferencia es la media de los valores que toma en la circunferencia. Además

$$|f(a)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(a+Re^{it})|\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(desigualdad de la media)}$$

Demostración. La fórmula de Cauchy para una circunferencia nos dice que

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,R)}\frac{f(z)}{z-a}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(a+Re^{it})}{Re^{it}}iR\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\;=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t$$

La desigualdad de la media se deduce directamente de la igualdad anterior. □

4.3.1. Funciones subarmónicas. Principio del máximo

4.13 Definición. Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un abierto. Una función $\varphi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ continua en Ω se dice que es *subarmónica* en Ω si verifica la desigualdad

$$\varphi(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t$$

siempre que $\overline{D}(a,R)\subset\Omega$.

Según acabamos de ver en la proposición 4.12, el módulo de una función holomorfa es una función subarmónica.

4.14 Teorema (Principio del máximo para funciones subarmónicas.)**.** *Una función subarmónica en un dominio que alcanza un máximo absoluto es constante.*

Demostración. Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un dominio y sea $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ una función subarmónica en Ω. Supongamos que existe $a\in\Omega$ tal que $\varphi(a)\geqslant\varphi(z)$ para cualquier $z\in\Omega$. Definimos

$$A=\{z\in\Omega:\,\varphi(z)=\varphi(a)\}$$

Es claro que $a\in A$ y que A es cerrado relativo a Ω. Sea $b\in A$ y $R>0$ tal que $D(b,R)\subset\Omega$. Podemos escribir

$$D(b,R)=\bigcup_{0\leqslant r<R}C(b,r)^*$$

Para probar que $D(b,R)\subset A$ y, por tanto, que A es abierto veamos que cada circunferencia $C(b,r)^*$ se queda dentro de A.

Para cualquiera de las circunferencias $C(b,r)^*$ tenemos

$$\varphi(a)=\varphi(b)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(b+r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t$$

luego

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\varphi(a)-\varphi(b+r\,\mathrm{e}^{it})\big)\,\mathrm{d}t\;\leqslant 0$$

Pero la función (real) que estamos integrando verifica que $\varphi(a) - \varphi(b + r\,\mathrm{e}^{it}) \geqslant 0$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$ puesto que φ alcanza en a un máximo absoluto. Como la integral de una función positiva no puede ser un número negativo, deducimos que

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\varphi(a) - \varphi(b + r\,\mathrm{e}^{it})\right) \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi(a) - \varphi(b + r\,\mathrm{e}^{it})\right| \mathrm{d}t$$

y como la función que integramos es continua, esta igualdad implica que

$$\varphi(a) - \varphi(b + r\,\mathrm{e}^{it}) = 0 \quad \text{para todo } t \in [-\pi, \pi]$$

Obtenemos así que $b + r\,\mathrm{e}^{it} \in A$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$, escrito de otra forma $C(b, r)^* \subset A$. Concluimos que A es abierto y, por conexión, que $A = \Omega$ □

Teniendo en cuenta que una función real continua en un compacto alcanza un máximo absoluto, del resultado anterior se deduce fácilmente el siguiente corolario.

4.15 Corolario. *Sea Ω un dominio acotado, $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua en $\overline{\Omega}$ y subarmónica en Ω. Entonces*

$$\text{máx}\{\varphi(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \text{máx}\{\varphi(z) : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

esto es, el máximo de φ se alcanza en la frontera de Ω.

4.3.2. Principios del módulo máximo y del módulo mínimo

4.16 Teorema (Principio del módulo máximo.)**.** *Una función holomorfa en un dominio cuyo módulo alcanza un máximo relativo es constante.*

Demostración. Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. La hipótesis nos dice que existe $a \in \Omega$, $\rho > 0$ tal que $D(a, \rho) \subset \Omega$ y $|f(a)| \geqslant |f(z)|$ para $z \in D(a, \rho)$.

Sabemos que $|f(z)|$ es una función subarmónica en Ω. Aplicando el teorema 4.14 a $\varphi(z) = |f(z)|$ en el dominio $D(a, \rho)$ obtenemos que $|f(z)|$ es constante en $D(a, \rho)$. Por la proposición 2.13, sabemos que si el módulo de una función holomorfa en un dominio es constante entonces la función es constante. Deducimos así que f es constante en $D(a, \rho)$. Aplicando el principio de identidad, teorema 4.2, concluimos que f es constante en todo Ω. □

4.17 Teorema (Principio del módulo mínimo.)**.** *Una función holomorfa en un dominio cuyo módulo alcanza un mínimo relativo distinto de cero es constante.*

Demostración. Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por hipótesis existen $z_0 \in \Omega$ y $\rho > 0$ de forma que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ y $0 < |f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ para $z \in D(z_0, \rho)$. Definimos $g : D(z_0, \rho) \to \mathbb{C}$ como $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Es claro que $g \in \mathcal{H}(D(z_0, \rho))$ puesto que $f(z) \neq 0$ para $z \in D(z_0, \rho)$. Además el módulo de g tiene un máximo absoluto en $D(z_0, \rho)$ porque

$$|g(z_0)| = \frac{1}{|f(z_0)|} \geqslant \frac{1}{|f(z)|} = |g(z)| \qquad z \in D(z_0, \rho)$$

Por el principio del módulo máximo g es constante en $D(a,\rho)$, luego también lo es f. Por el principio de identidad se sigue que f es constante en Ω. □

4.18 Corolario. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces se verifica:*

(a) $|f|$ alcanza su máximo en la frontera de Ω, es decir,

$$\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

(b) Si f no se anula en Ω entonces el mínimo de $|f|$ también se alcanza en la frontera, es decir,

$$\text{mín}\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \text{mín}\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

(c) Si f no es constante en Ω y $|f|$ es constante en $\operatorname{Fr}\Omega$ entonces f se anula en algún punto de Ω.

Demostración. Puesto que $\overline{\Omega}$ es compacto y $|f|$ es continua y toma valores reales, $|f|$ debe alcanzar un mínimo y un máximo absolutos en $\overline{\Omega}$.

(a) Si $|f|$ alcanza el máximo en un punto interior, el principio del módulo máximo nos asegura que f es constante en Ω y, por continuidad, f es constante en $\overline{\Omega}$, en cuyo caso se verifica la igualdad del enunciado.

(b) Si $|f|$ no se anula y alcanza el mínimo en un punto interior entonces por el principio del módulo mínimo f sería constante y volvemos a concluir como en el apartado anterior.

(c) Si f no se anula en Ω entonces, según acabamos de ver, $|f|$ alcanza su mínimo en la frontera al igual que su máximo. Puesto que, por hipótesis, $|f|$ es constante en la frontera, deducimos que el mínimo y el máximo de $|f|$ en $\overline{\Omega}$ coinciden y, por tanto, $|f|$ es constante. Luego f también es constante en contra de la hipótesis. □

4.3.3. Funciones armónicas

4.19 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω. Se dice que φ es armónica en Ω si para todo $(x,y) \in \Omega$ se verifica

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Representaremos por $\mathcal{A}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones armónicas en Ω.

Observa que aunque los nombres “subarmónica” y “armónica” suenan parecidos, los conceptos que definen son totalmente distintos, puesto que ser “subarmónica” se define por una propiedad global que involucra un promedio integral, mientras que ser “armónica” es una propiedad local pues viene expresada por medio de derivadas parciales.

Relación entre funciones armónicas y funciones holomorfas

4.20 Proposición. *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y llamemos* $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. *Entonces* u, v *son armónicas en* Ω *y además* $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Demostración. Razonemos por inducción. Sea P_n la afirmación siguiente: *"las partes real e imaginaria de toda función holomorfa en* Ω *son funciones de clase* $\mathcal{C}^n$ *en* Ω*"*.

P_1 es cierta porque f es holomorfa en Ω y su derivada, gracias a las ecuaciones de Cauchy–Riemann, viene dada por

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Pero, en virtud del teorema de Taylor, sabemos que f' vuelve a ser holomorfa en Ω, luego su parte real e imaginaria son continuas.

Supongamos que la propiedad es cierta para n. Aplicamos la hipótesis de inducción a $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ son funciones de clase $\mathcal{C}^n(\Omega)$, esto es, $u, v \in \mathcal{C}^{n+1}(\Omega)$.

De las ecuaciones de Cauchy–Riemann obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

luego u es armónica. El cálculo es análogo para v. □

4.21 Proposición. *Sea* u *una función armónica en* Ω. *Entonces la función*

$$f(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \qquad x+iy \in \Omega$$

es holomorfa en Ω. *En consecuencia toda función armónica es de clase* $\mathcal{C}^\infty$.

Demostración. Como u tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, sus derivadas parciales de primer orden son diferenciables. Además se cumplen las ecuaciones de Cauchy–Riemann para f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{por ser } u \text{ armónica} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{por ser } u \text{ de clase } \mathcal{C}^2 \end{aligned}$$

□

Acabamos de probar que la parte real de cualquier función holomorfa es una función armónica. ¿Es cierto el recíproco? Es decir, si tenemos una función armónica φ en un abierto Ω ¿existe una función f holomorfa en Ω tal que φ sea la parte real de f? En general esto no va a ser cierto y el que lo sea va a depender de las propiedades topológicas del abierto Ω. El siguiente resultado es una primera aproximación a este problema.

4.22 Proposición. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y supongamos que toda función holomorfa en Ω tiene primitiva en Ω. Entonces toda función armónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω (la cual es única salvo una constante aditiva).*

Demostración. Sea u una función armónica en Ω. Por la proposición anterior la función

$$f(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

es holomorfa en Ω. Por hipótesis existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para $z \in \Omega$.

Llamemos $\tilde{u} = \operatorname{Re} F$, $\tilde{v} = \operatorname{Im} F$. Resulta

$$F'(z) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x,y) = f(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

deducimos que $\tilde{u} - u$ tiene derivadas parciales nulas en el dominio Ω y por tanto es constante, es decir, $u = \tilde{u} + \lambda$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Concluimos que $u = \operatorname{Re}(F + \lambda)$. □

Teniendo en cuenta el teorema de Cauchy para dominios estrellados podemos enunciar.

4.23 Corolario. *Toda función armónica en un dominio estrellado es la parte real de una función holomorfa en dicho dominio.*

4.24 Corolario. *Una función u es armónica en un abierto Ω si, y sólo si, para todo disco $D(a,R)$ contenido en Ω existe una función holomorfa en dicho disco, $f_a \in \mathcal{H}(D(a,R))$, tal que $u(x,y) = \operatorname{Re} f_a(x+iy)$ para todo $x+iy \in D(a,R)$.*

Este resultado implica que *localmente* las funciones armónicas son partes reales de funciones holomorfas. Esto nos proporciona una herramienta muy útil para obtener propiedades locales de las funciones armónicas. El siguiente resultado es un ejemplo de esto.

4.25 Teorema (Igualdad de la media para funciones armónicas.)**.** *Las funciones armónicas verifican la igualdad de la media. Esto es, dados $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$ entonces*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})\,\mathrm{d}t$$

Demostración. Tomemos $\rho > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset D(a,\rho) \subset \Omega$. La función u es armónica en $D(a,\rho)$ que es un dominio estrellado luego existe $g \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ de forma que $u(z) = \operatorname{Re} g(z)$ para $z \in D(a,\rho)$. Ahora bien las funciones holomorfas verifican la igualdad de la media

$$g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(a + Re^{it})\,\mathrm{d}t$$

Tomando partes reales en ambos miembros de la igualdad concluimos que

$$u(a) = \operatorname{Re} g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} g(a + Re^{it})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})\,\mathrm{d}t \qquad \square$$

4.26 Teorema (Principio de extremo para funciones armónicas.). *Sea u una función armónica en un dominio Ω y supongamos que u alcanza en algún punto de Ω un extremo relativo. Entonces u es constante en Ω.*

Demostración. Puesto que si u es armónica lo es también $-u$, no es restrictivo suponer que el extremo de u sea un máximo relativo.

Sea, pues, $a \in \Omega$ un máximo relativo de u. Sea $\rho > 0$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$ y $u(z) \leqslant u(a)$ para todo $z \in D(a,\rho)$. Acabamos de ver que las funciones armónicas verifican la igualdad de la media luego, en particular, toda función armónica es subarmónica. Podemos aplicar, por tanto, el principio del máximo para funciones subarmónicas a la función u en el disco $D(a,\rho)$ y deducimos que u es constante en dicho disco. Sea $f(x+iy) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ para $(x,y) \in \Omega$. Puesto que u es armónica, sabemos que la función f así definida es holomorfa en Ω. Lo anterior implica que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(a,\rho)$ luego, por el principio de identidad, $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$, lo que implica que u es una función constante en Ω como queríamos probar. $\square$

La función $u(x,y) = x^2 - y^2$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, no idénticamente nula, y se anula en las rectas $y = \pm x$. Esto nos indica que no podemos esperar un principio de identidad para funciones armónicas tan bueno como el que conocemos para funciones holomorfas.

4.27 Teorema (Principio de identidad para funciones armónicas.). *Sean u y v dos funciones armónicas definidas sobre un dominio Ω tales que el conjunto donde coinciden tiene interior no vacío. Entonces ambas funciones coinciden sobre todo Ω.*

Demostración. Consideremos la función $u - v \in \mathcal{A}(\Omega)$. La hipótesis afirma que existe algún punto a interior al conjunto

$$A = \{z \in \Omega : u(z) = v(z)\}$$

Tomamos $\rho > 0$ de forma que $D(a,\rho) \subset A$ con lo cual se cumple que $u(z) - v(z) = 0$ para todo $z \in D(a,\rho)$, luego $u - v$ es constante (igual a cero) en $D(a,\rho)$, en particular, todo punto de $D(a,\rho)$ es un extremo relativo de $u - v$. El resultado anterior afirma entonces que $u - v$ es constante (igual a cero) en Ω, es decir, u y v coinciden en Ω. $\square$

4.28 Corolario. *Sea Ω un dominio acotado, u una función armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces u alcanza el máximo y el mínimo en la frontera de Ω, esto es,*

$$\max\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{u(z) : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$
$$\min\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \min\{u(z) : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

En consecuencia si v es armónica en Ω, continua en $\overline{\Omega}$ y coincide con u en $\operatorname{Fr}\Omega$, entonces v coincide con u en todo Ω.

Demostración. Ya que Ω es acotado, $\overline{\Omega}$ es compacto. Por ser u continua en $\overline{\Omega}$ tiene que alcanzar en $\overline{\Omega}$ un máximo valor y un mínimo valor.

Si el máximo (o el mínimo) se alcanza en la frontera hemos acabado. En caso contrario, se alcanza en un punto interior y, por tanto, u es constante luego también se alcanza en la frontera.

Para la segunda afirmación, tenemos $v-u \in \mathcal{A}(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, por hipótesis $v(z)-u(z)=0$ para cualquier $z\in \operatorname{Fr}\Omega$. Luego

$$\text{máx}\{v(z)-u(z) : z\in\overline{\Omega}\}=0$$
$$\text{mín}\{v(z)-u(z) : z\in\overline{\Omega}\}=0$$

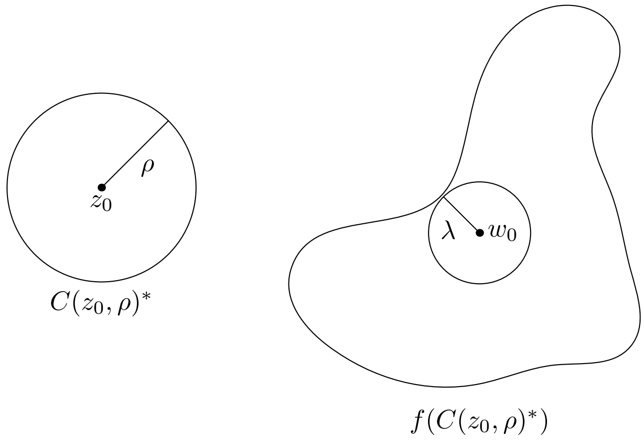
con lo cual $v-u$ es idénticamente nula en Ω, es decir, $u(z)=v(z)$ para $z\in\Omega$. □

4.4. Comportamiento local de una función holomorfa: teoremas de la aplicación abierta y de la función inversa

4.29 Teorema (Teorema de la aplicación abierta.)**.** *Una función holomorfa y no constante en un dominio es una aplicación abierta.*

Demostración. Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función holomorfa no constante y Ω un dominio. Tomemos U abierto en Ω. Probaremos que $f(U)$ es abierto.

Sea $w_0\in f(U)$ y sea $z_0\in U$ tal que $f(z_0)=w_0$. El punto z_0 es un cero de la función no constante $z\mapsto f(z)-w_0$ y debe ser un cero aislado de dicha función. Luego existe un número $\rho>0$ de forma que $\overline{D}(z_0,\rho)\subset U$ y para $z\in\overline{D}(z_0,\rho)\setminus\{z_0\}$ se tiene que $f(z)\neq w_0$.



Llamemos $\lambda=\text{mín}\{|f(z)-w_0| : z\in C(z_0,\rho)^*\}$ y veamos que $D(w_0,\lambda/2)\subseteq f(U)$. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $w\in D(w_0,\lambda/2)$ tal que $w\notin f(U)$. Sea

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w},\qquad z\in U$$

La función g así definida es holomorfa en U, además

$$|g(z_0)|=\frac{1}{|w_0-w|}>\frac{1}{\lambda/2}=\frac{2}{\lambda}$$

Para $z \in C(z_0,\rho)^*$ tenemos que

$$\begin{aligned}|g(z)| &= \frac{1}{|f(z)-w|} = \frac{1}{|f(z)-w_0-(w-w_0)|} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{|f(z)-w_0|-|w-w_0|} \leqslant \frac{1}{\lambda-|w-w_0|} < \frac{1}{\lambda-\lambda/2} = \frac{2}{\lambda}\end{aligned}$$

Hemos probado que en el centro del disco $\overline{D}(z_0,\rho) \subset U$ el módulo de g toma un valor $|g(z_0)| > 2/\lambda$ mientras que en la frontera de dicho disco toma valores menores que $2/\lambda$. Esto contradice el principio del módulo máximo que afirma que $|g|$ debe alcanzar su máximo en $\overline{D}(z_0,\rho)$ siempre en la frontera. □

4.30 Lema. *Dada una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se verifica que la función $g : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\begin{aligned} g(z,w) &= \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \qquad && z \neq w \\ g(z,z) &= f'(z) && z = w \end{aligned}$$

es continua en $\Omega\times\Omega$.

Demostración. Sea $G = \{(z,w) \in \Omega\times\Omega : z \neq w\}$ que es un conjunto abierto en $\Omega\times\Omega$. La restricción de g a dicho conjunto es evidentemente continua, luego g es continua en G. Los únicos puntos donde debemos probar la continuidad de g son los de la forma (a,a) para $a \in \Omega$. Veamos que g es continua también en dichos puntos.

Dado $\varepsilon > 0$ por la continuidad de f' existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y para $z \in D(a,\delta)$ se tiene que $|f'(z)-f'(a)| < \varepsilon$. Veamos que dicho δ cumple la condición de continuidad para g, esto es, si

$$\left.\begin{aligned} |z-a| < \delta \\ |w-a| < \delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow |g(z,w)-g(a,a)| = |g(z,w)-f'(a)| < \varepsilon$$

Si $z = w$ la desigualdad anterior se reduce a la continuidad de f'. Supongamos entonces que $z \neq w$ son puntos en $D(a,\delta)$. Escribimos

$$f(z)-f(w) = \int_{[w,z]} f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^1 f'\big((1-t)w+tz\big)(z-w)\,\mathrm{d}t$$

con lo cual $g(z,w) = \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} = \displaystyle\int_0^1 f'\big((1-t)w+tz\big)\,\mathrm{d}t$. Ahora bien

$$g(z,w)-f'(a) = \int_0^1 \Big(f'\big((1-t)w+tz\big)-f'(a)\Big)\,\mathrm{d}t$$

tomando módulos

$$|g(z,w)-f'(a)| \leqslant \int_0^1 |f'\big((1-t)w+tz\big)-f'(a)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

puesto que el segmento $[z,w]^* \subset D(a,\delta)$ y por tanto $|f'\big((1-t)w+tz\big)-f'(a)|<\varepsilon$ para todo $t\in[0,1]$. $\square$

Este lema permite ahora demostrar de forma cómoda el siguiente resultado.

4.31 Teorema (Teorema de inversión local.)**.** *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω en el que $f'(a)\neq 0$. Entonces existe un abierto $U\subset\Omega$ que contiene al punto a verificándose que*

(I) *f es inyectiva en U y la imagen $f(U)=V$ es abierto.*

(II) *La función $\varphi=(f|_U)^{-1}:V\to\mathbb{C}$ es holomorfa en V siendo $\varphi'\big(f(z)\big)f'(z)=1$ para todo $z\in U$.*

Demostración. Sea g la función del lema anterior. Por hipótesis $g(a,a)=f'(a)\neq 0$. Sea $\lambda=|f'(a)|$. Puesto que g es continua también lo es $|g|$, luego existe $\delta>0$ tal que $D(a,\delta)\subset\Omega$, y para $z,w\in D(a,\delta)$ se cumple $|g(z,w)|\geqslant\lambda/2>0$. Esta condición implica que para $z\neq w$ en $D(a,\delta)$ es

$$|f(z)-f(w)|\geqslant\frac{\lambda}{2}|z-w| \tag{4.2}$$

lo que prueba la inyectividad de f en $D(a,\delta)$. Además $g(z,z)=f'(z)\neq 0$ para todo $z\in D(a,\delta)$.

Sea $U=D(a,\delta)$. Puesto que f es holomorfa y no constante en U, el teorema de la función abierta nos asegura que f es abierta. En consecuencia $f(U)=V$ es un conjunto abierto y, además, la función $\varphi=(f|_U)^{-1}:V\to\mathbb{C}$ es continua (lo que también se deduce inmediatamente de la desigualdad (4.2)).

Falta probar la derivabilidad de φ. Sea $w\in V$ y tomemos una sucesión de número complejos $\{w_n\}$ en V con $w_n\neq w$ que converja a w. La sucesión $z_n=\varphi(w_n)\in U$ converge a $z=\varphi(w)$. Por la inyectividad se tiene que $z_n\neq z$. Ahora bien

$$\frac{\varphi(w_n)-\varphi(w)}{w_n-w}=\frac{z_n-z}{f(z_n)-f(z)}=\frac{1}{\dfrac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}}\to\frac{1}{f'(z)}$$

lo que prueba que $\varphi'(w)=\dfrac{1}{f'(z)}$ donde $w=f(z)$. $\square$

Podemos preguntarnos qué ocurriría en el teorema de inversión local si $f'(a)=0$. Por ejemplo, podemos considerar la función polinómica $f(z)=z^n$ cuya derivada se anula en $a=0$ donde f tiene un cero de orden n y en cualquier entorno de cero la función f toma cada valor exactamente n veces. Este comportamiento de la función $f(z)=z^n$ en un entorno de cero da una pista de lo que sucede en el caso general.

4.32 Teorema (Comportamiento local de una función holomorfa.)**.** *Sea Ω un dominio, a un punto de Ω y f una función holomorfa y no constante en Ω. Sea m el orden del cero que tiene en el punto a la función $z\mapsto f(z)-f(a)$. Entonces existen $\delta>0$ y $\varepsilon>0$ tales que $D(a,\delta)\subset\Omega$ y para todo $w\in D\big(f(a),\varepsilon\big)\setminus\{f(a)\}$ se verifica que hay exactamente m puntos $z_k\in D(a,\delta)$, $1\leqslant k\leqslant m$, tales que $f(z_k)=w$.*

Demostración. Por la caracterización de los ceros de una función holomorfa sabemos que

$$f(z) - f(a) = (z-a)^m \varphi(z)$$

siendo φ una función holomorfa en Ω que no se anula en el punto a, $\varphi(a) \neq 0$. Tomemos $\rho > 0$ de forma que $D(a,\rho) \subset \Omega$ y $\varphi(z) \neq 0$ para $z \in D(a,\rho)$.

Por el corolario 3.13 sabemos que φ tiene una raíz m-ésima holomorfa en el disco $D(a,\rho)$, esto es, existe $g \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ de forma que $g(z)^m = \varphi(z)$ para $z \in D(a,\rho)$. Llamemos $h(z) = (z-a)g(z)$. Evidentemente $h \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ y verifica $f(z) - f(a) = h(z)^m$.

Puesto que $h'(a) = g(a) \neq 0$ aplicamos el teorema de inversión local a h y encontramos $\delta > 0$ de forma que $D(a,\delta) \subset D(a,\rho)$ y h es inyectiva en $D(a,\delta)$. Además, como $0 \in h\big(D(a,\delta)\big)$ que es un conjunto abierto por ser h holomorfa (teorema de la aplicación abierta), existe $\varepsilon > 0$ de forma que

$$D(0, \sqrt[m]{\varepsilon}) \subset h\big(D(a,\delta)\big)$$

Tomemos ahora $w \in D(f(a),\varepsilon) \setminus \{f(a)\}$ con lo cual $0 < |w - f(a)| < \varepsilon$. Sean $\{w_1, \ldots, w_n\}$ las raíces de orden m del número complejo $w - f(a)$. Todas ellas se encuentran en el disco $D(0, \sqrt[m]{\varepsilon})$. Puesto que $D(0, \sqrt[m]{\varepsilon}) \subset h\big(D(a,\delta)\big)$ y h es inyectiva en el disco $D(a,\delta)$, existen exactamente m puntos $z_1, \ldots, z_k \in D(a,\delta)$ tales que $h(z_k) = w_k$ para $1 \leqslant k \leqslant m$. De todo lo anterior obtenemos

$$f(z_k) - f(a) = \big(h(z_k)\big)^m = w - f(a)$$

con lo cual $f(z_k) = w$ para $k = 1, \ldots, m$. Finalmente, es inmediato comprobar que

$$\{z \in D(a,\delta) : f(z) = w\} = \{z_1, \ldots, z_m\}$$

es decir, no hay otros puntos en $D(a,\delta)$ cuya imagen por f sea w. □

Observa que el caso particular de este teorema para el caso de un cero de orden 1 contiene parte del teorema de inversión local.

4.33 Corolario. *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y a un punto de Ω. Equivalen:*

(a) $f'(a) \neq 0$

(b) *f es inyectiva en un entorno de a.*

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Es el teorema de inversión local.

$(b) \Rightarrow (a)$ Si fuese $f'(a) = 0$ entonces la aplicación $z \to f(z) - f(a)$ tendría un cero en a de orden al menos 2. El teorema anterior afirma que en estas condiciones f toma cualquier valor en un entorno de a al menos dos veces, luego no sería inyectiva en contra de lo supuesto. □

En variable real una función derivable en un intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ es inyectiva en I. El recíproco no es cierto como lo prueba la función $x \mapsto x^3$. En variable compleja acabamos de probar que esto ocurre al contrario, una función holomorfa inyectiva en Ω tiene derivada no nula en todo punto de Ω, mientras que el recíproco no es cierto como le ocurre a la función $z \mapsto \mathrm{e}^z$.

4.34 Teorema (Teorema de inversión global.)**.** *Sea f una función holomorfa en Ω e inyectiva. Entonces f es una biyección biholomorfa de Ω sobre $f(\Omega)$.*

Demostración. El corolario anterior nos asegura, gracias a la inyectividad, que $f'(z) \neq 0$ para cualquier $z \in \Omega$. Puesto que f es inyectiva existe su inversa. El teorema de inversión local nos garantiza que f es localmente invertible de forma holomorfa, luego f^{-1} es holomorfa en $f(\Omega)$. $\square$

Ejercicios propuestos

180. Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante. Se define

$$M(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\} \quad (0 < r < 1).$$

a) Prueba que la función M es estrictamente creciente.

b) Supuesto que hay un número natural, n, tal que para todo $r \in]0,1[$ es $M(r) = r^n$, deduce que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$.

181. Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos del plano, $f \in H(\Omega_1)$ con $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$, y $u \in A(\Omega_2)$. Prueba que la composición $u \circ f$ es armónica en Ω_1.

182. Sea u una función armónica en todo el plano y supongamos que existen números reales positivos, a, b, tales que $u(z) \leqslant a|\log|z|| + b$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$. ¿Qué puede afirmarse de u?

183. Sea f una función continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en su interior, tal que $f(z) = 0$ para todo $z = \exp(it)$ con $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Prueba que $f(z) = 0$ para todo $z \in \overline{D}(0,1)$.

184. Sea f una función no constante, continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en su interior, tal que $|f(z)| = 1$ siempre que $|z| = 1$. Prueba que $f(\overline{D}(0,1)) = \overline{D}(0,1)$.

Sugerencia: Sea $\mathcal{V} = f(D(0,1))$. Justifica que $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}} \cap D(0,1)$.

185. Sea f una función entera no constante y supongamos que hay un número complejo $\alpha \neq 1$ tal que $f(z) = f(\alpha z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

a) Prueba que, $f(z) = f(\alpha^n z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $z \in \mathbb{C}$, y deduce que, necesariamente, $|\alpha| = 1$.

b) Justifica que el conjunto $\{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es finito y, por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^m = 1$.

c) Sea m el menor número natural tal que $\alpha^m = 1$. Justifica que hay una función entera g tal que $f(z) = g(z^m)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

186. Sea f una función holomorfa no constante en el disco $D(a,R)$. Para $0 < r < R$ definamos

$$M(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z-a| = r\} \qquad A(r) = \text{máx}\{\operatorname{Re} f(z) : |z-a| = r\}$$

Prueba que las funciones $r \mapsto M(r)$ y $r \mapsto A(r)$ son estrictamente crecientes. Si se supone que f es una función entera no constante entonces $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = \lim\limits_{r\to+\infty} A(r) = +\infty$.

187. Sea Ω un dominio acotado del plano y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y holomorfas en Ω. Prueba que si $\{f_n\}$ converge uniformemente en la frontera de Ω también converge uniformemente en $\overline{\Omega}$.

188. Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos del plano, $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ continua con $g(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$ y $f \in H(\Omega_2)$ tal que $f'(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \Omega_2$. Prueba que si $f \circ g$ es holomorfa en Ω_1 también lo es g.

189. Sea f una función entera tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para $|z| = 1$. Prueba que f es constante.

190. Sean $f, g : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas en el disco abierto unidad y continuas en el disco cerrado unidad. Se supone que para $|z| = 1$ se verifica que $g(z) = \overline{f(z)}$. Prueba que f y g son constantes.

191. Sea $f \in H(\mathbb{C}^*)$ tal que $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Prueba que f tiene un cero en $\mathbb{C}^*$.

192. Justifica que no puede existir una función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que para todo w con $|w| = 1$ se tenga $\lim\limits_{z\to w} f(z) = \infty$.

193. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y verificando que $|f(z^2)| \geqslant |f(z)|$ para todo $z \in D(0,1)$. Prueba que f es constante.

194. ¿Verdadero o falso?

a) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\operatorname{Re}(f)$ está acotada entonces f es constante.

b) Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $\operatorname{Re}(f)$ está acotada entonces f está acotada.

195. Describir las funciones f holomorfas en $\mathbb{C}^*$ que verifican $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty$ y $|f(z)| = 1$ siempre que $|z| = 1$.

196. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$, y sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω verificando que $f(z) = 0$ siempre que $z \in \overline{\Omega}$ y $\operatorname{Re} z = 1$. Prueba que $f(z) = 0$ para todo $z \in \overline{\Omega}$.

Sugerencia: considera la función $g(z) = f(z)f(iz)f(-z)f(-iz)$.

197. Sea f una función polinómica de grado $n \geqslant 1$. Supongamos que $|f(z)| \leqslant 1$ siempre que $|z| = 1$. Pruébese que $|f(z)| \leqslant |z|^n$ siempre que $|z| \geqslant 1$.

198. Sea f una función entera acotada en el conjunto de puntos $(\mathbb{R} + i\mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} + i\mathbb{R})$. Justifica que f es constante.

199. Sea f una función entera no constante. Dado un número $\rho > 0$, definamos:

$$E_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \rho\}, \quad F_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leqslant \rho\}$$

a) Prueba que la adherencia de E_ρ es igual a F_ρ.

b) Justifica que en cada componente conexa acotada de E_ρ hay por lo menos un cero de f.

200. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$, holomorfa en Ω y que tiene límite finito en infinito. Justifica que la función $|f|$ alcanza un máximo absoluto en un punto de la circunferencia unidad y que, si f no es constante, la función φ definida para todo $r > 1$ por

$$\varphi(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\}$$

es estrictamente decreciente.

201. Sea Ω un abierto del plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$. Prueba que en cualquier entorno de z_0 hay puntos a, b tales que $f'(z_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

202. Sea f holomorfa en un abierto Ω, $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$. Prueba que, para $r > 0$ suficientemente pequeño, se verifica que:

$$\frac{2\pi i}{f'(a)} = \int_{C(a,r)} \frac{1}{f(w) - f(a)}\, dw.$$

Capítulo 5

Forma general del teorema de Cauchy

Introducción

En este capítulo pretendemos dar respuesta a los dos problemas siguientes:

1. Caracterizar los *caminos* cerrados γ en un abierto Ω tales que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para toda función f holomorfa en Ω.
2. Caracterizar los *abiertos* Ω tales que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para todo camino cerrado γ en Ω y toda función holomorfa f en Ω. Equivalentemente, caracterizar los abiertos en los que se verifica que toda función holomorfa tiene primitivas.

Supongamos que γ es un camino cerrado en un abierto Ω y se verifica que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para cualquier función f holomorfa en Ω. Entonces, como caso particular, si z es un punto que no está en Ω la función $w \mapsto \dfrac{1}{w-z}$ es holomorfa en Ω, luego deberá cumplirse que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw = 0$$

Si ahora f es una función holomorfa en Ω y $z \in \Omega$, la aplicación

$$w \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases}$$

es holomorfa en Ω (pues es continua en Ω y holomorfa en $\Omega\setminus\{z\}$ por lo que el teorema de extensión de Riemann nos asegura que es holomorfa en todo Ω) y deberá ser

$$\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0$$

Supuesto que $z\notin\gamma^*$ tenemos que

$$0 = \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z)\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

de donde

$$f(z)\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Para el caso de que γ sea la circunferencia frontera de un disco contenido en Ω y z pertenezca a dicho disco sabemos que $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$ por lo que la igualdad anterior es la conocida fórmula de Cauchy para una circunferencia. En el caso general, la igualdad anterior nos proporciona una representación integral de f conocidos sus valores sobre un cierto camino cerrado γ.

Queda claro, por estas consideraciones, que para responder a los problemas planteados debemos empezar estudiando la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w$ donde $z\notin\gamma^*$.

5.1. Índice de un punto respecto a un camino cerrado

5.1 Proposición. *Sea $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ un camino cerrado en $\mathbb{C}$, para cada punto $z\in\mathbb{C}$ por el que no pasa el camino γ, esto es $z\notin\gamma^*$, definimos*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad (z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*) \tag{5.1}$$

Entonces se verifica que $F(z)$ es un número entero.

Demostración. Llamemos $\sigma(t)=\gamma(t)-z$ al camino trasladado de γ. Tenemos que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\,\mathrm{d}t$$

Observa que $\sigma(t)\neq 0$ para todo $t\in[a,b]$. No es restrictivo suponer que γ, y por tanto también σ, tiene derivada continua en $[a,b]$. Haciendo el cociente indicado, podremos escribir

$$\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = \alpha(t) + i\beta(t)$$

donde α y β serán funciones continuas reales en $[a,b]$. Sabemos que una función real continua en un intervalo tiene primitivas. Sean $A(t)$, $B(t)$ primitivas de α y β en $[a,b]$. Definamos $h(t) = A(t)+iB(t)$. Tenemos que

$$h'(t) = A'(t)+iB'(t) = \alpha(t)+i\beta(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$$

Es decir, $h(t)$ es una primitiva de la función que integramos, por lo que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{h(b)-h(a)}{2\pi i} \tag{5.2}$$

Calculemos $h(b)-h(a)$. Tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-h(t)}\sigma(t)\right) = \mathrm{e}^{-h(t)}\left(-h'(t)\sigma(t)+\sigma'(t)\right) = \mathrm{e}^{-h(t)}\left(-\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\sigma(t)+\sigma'(t)\right) = 0$$

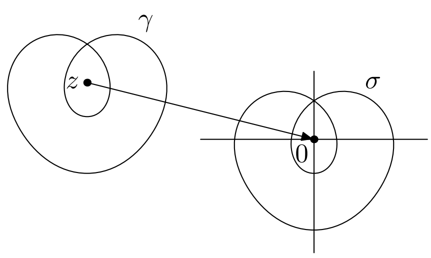
Deducimos que $\mathrm{e}^{-h(t)}\sigma(t) = \mathrm{e}^{-h(a)}\sigma(a)$ para todo $t\in[a,b]$. Como h está determinada salvo una constante aditiva, podemos suponer que $\mathrm{e}^{-h(a)}\sigma(a) = 1$. Hemos obtenido que

$$\sigma(t) = \mathrm{e}^{h(t)} \qquad t\in[a,b]$$

Esto nos dice que $h(t)$ es un logaritmo de $\sigma(t)$ y, por tanto, tiene que ser de la forma $h(t) = \log(|\sigma(t)|)+i\vartheta(t)$, donde $\vartheta(t)$ es un argumento de $\sigma(t)$, $\vartheta(t)\in\operatorname{Arg}(\sigma(t))$. Además como h es derivable, las funciones $\log(|\sigma(t)|)$ y $\vartheta(t)$ han de ser derivables y, por tanto, continuas. Resulta así que

$$h(b)-h(a) = \log(|\sigma(b)|)+i\vartheta(b)-\log(|\sigma(a)|)+i\vartheta(a) = i(\vartheta(b)-\vartheta(a))$$

Donde hemos tenido en cuenta que, al ser la curva γ cerrada, $\sigma(a) = \gamma(a)-z = \gamma(b)-z = \sigma(b)$. Como $\vartheta(a)$ y $\vartheta(b)$ son dos argumentos de un mismo número complejo ($\sigma(a) = \sigma(b)$), deben diferenciarse en un múltiplo entero de 2π, luego tiene que haber un entero $k\in\mathbb{Z}$ tal que $\vartheta(b)-\vartheta(a) = 2k\pi$. Con ello tenemos que $h(b)-h(a) = 2k\pi i$. Finalmente, de (5.2), obtenemos que $F(z) = k\in Z$. □



¿Qué representa el valor del entero dado por (5.1)? Observa que en la demostración anterior hemos obtenido que

$$F(z) = \frac{\vartheta(b)-\vartheta(a)}{2\pi}$$

Geométricamente, $\vartheta(t)$ es una medida del ángulo que forma con el eje de abscisas el segmento que une z con $\gamma(t)$. Cada vez que γ da una vuelta completa alrededor de z en sentido contrario al de las agujas del reloj $\vartheta(t)$ aumenta en 2π y si la vuelta es en el sentido de las agujas del reloj $\vartheta(t)$ disminuye en 2π. Por ello $F(z)$ es el número de veces que la curva γ rodea al punto z teniendo en cuenta que vueltas alrededor de z en sentido opuesto se cancelan. Dicho número se llama **índice de γ respecto a** z y se representa por $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$. En resumen, la integral

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w \tag{5.3}$$

es un número entero que es igual al número de veces que el camino γ rodea al punto z.

Conviene también no olvidar que

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{\vartheta(b)-\vartheta(a)}{2\pi}$$

donde $\vartheta : [a,b] \to \mathbb{R}$ es un argumento continuo de $\gamma - z$. Puesto que dos argumentos continuos de $\gamma - z$ se diferencian en un múltiplo entero de 2π, para calcular el índice de γ respecto a z es suficiente que conozcamos cualquier argumento continuo de $\gamma - z$.

Ya puedes adivinar que, en la práctica, la integral que figura en (5.3) no hace falta calcularla porque siempre integramos sobre caminos sencillos y sabemos cuántas veces rodean a cada punto del plano.

5.2 Teorema (Propiedades del índice.)**.** *Dada una curva cerrada $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, la función definida para $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$ por $z \mapsto \operatorname{Ind}_\gamma(z)$ tiene las propiedades:*

1. *Es continua y por tanto es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$.*
2. *Vale cero en la componente no acotada de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$.*

Demostración.

1. Observa que el índice viene dado por un integral tipo Cauchy (ver teorema 3.18) por lo que es una función analítica y, por tanto, continua. Como toma valores enteros deducimos que es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$.

2. Sea $R > 0$ tal que $|\gamma(t)| < R$ para todo $t \in [a,b]$ y elijamos z_0 de modo que $\operatorname{Re} z_0 < -R$. Evidentemente $z_0 \notin \gamma^*$ y $\operatorname{Re}(\gamma(t) - z_0) > 0$. Hemos trasladado la curva al semiplano de la derecha. En dicha región tenemos un argumento continuo, el argumento principal. Definimos

$$\vartheta(t) = \arg(\gamma(t) - z_0)$$

que es un argumento continuo de $\gamma - z_0$ y además $\vartheta(a) = \vartheta(b)$, por tanto, $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) = 0$.

Ahora bien, $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -R\}$ que es un conjunto conexo no acotado contenido en $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ y por tanto está contenido en la componente no acotada de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$. Como el índice es constante en componentes conexas deducimos que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ para cualquier z en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$. □

5.1.1. Cadenas

En lo que sigue nos va a interesar integrar en varios caminos al mismo tiempo por lo que es conveniente introducir la terminología de "cadenas". Una *cadena* es una combinación lineal formal con coeficientes enteros de caminos, es decir, una expresión de la forma

$$\Gamma = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \cdots + m_q\gamma_q$$

donde cada γ_i es un camino y cada m_i es un entero. El símbolo "$+$" que hemos escrito en la expresión anterior no representa a la suma de funciones ni a la yuxtaposición de caminos, es una manera de decir que la cadena Γ está formada por varios caminos. Por ejemplo, podemos considerar la cadena

$$\Gamma = C(0,1) + C(i,2) - 2C(1+i,1/2)$$

que está formada por tres circunferencias, la última de ellas considerada dos veces y recorrida en sentido contrario.

Se define además el *soporte* de Γ, que notaremos Γ^*, como

$$\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup \cdots \cup \gamma_q^*$$

y la *longitud* de Γ por

$$\ell(\Gamma) = \sum_{j=1}^{q} |m_j|\, \ell(\gamma_j)$$

Por definición, para integrar una función sobre una cadena se integra la función sobre cada uno de los caminos que forman la cadena y se suman dichas integrales.

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{q} m_j \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Dadas dos cadenas Γ y $\Sigma = k_1\sigma_1 + \cdots + k_p\sigma_p$ entonces su suma es otra cadena compuesta por todos los caminos que forman Γ y todos los que forman Σ:

$$\Gamma + \Sigma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_q\gamma_q + k_1\sigma_1 + \cdots + k_p\sigma_p$$

Evidentemente se cumple

$$\int_{\Gamma+\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\Sigma f(z)\,\mathrm{d}z$$

Es cierta también la acotación básica, esto es, si $M = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \Gamma^*\}$ entonces

$$\left| \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \ell(\Gamma) M$$

Como caso particular de cadenas tenemos los *ciclos*. Un ciclo es una cadena formada por caminos cerrados. En el ejemplo anterior Γ era un ciclo pues estaba formado por circunferencias.

Si Γ es un ciclo se define el índice de un punto $z \notin \Gamma^*$ respecto a Γ como la suma de los índices del punto z respecto a cada uno de los caminos que forman el ciclo.

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \sum_{j=1}^{q} m_j \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(z)$$

5.3 Proposición. *Dado un ciclo Γ, la función $z \mapsto \operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ es continua, luego constante en componentes conexas de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$ y vale 0 en la componente conexa no acotada.*

5.4 Definición. Dos cadenas Σ y Γ se llaman *equivalentes* si para toda función f continua en $\Sigma^* \cup \Gamma^*$ se verifica que $\displaystyle\int_\Sigma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

5.5 Definición. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y un ciclo Γ en Ω, diremos que Γ es *nulhomólogo* respecto de Ω si el índice de Γ con respecto a todo punto que no esté en Ω es cero:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0 \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$$

5.2. Forma general del teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy

Pero volvamos al primero de los problemas planteado al principio. Supongamos que γ es un camino cerrado en un abierto Ω y se verifica que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ para cualquier función f holomorfa en Ω. Entonces si z es un punto que no está en Ω, como la función $w \mapsto \dfrac{1}{w-z}$ es holomorfa en Ω, deberá cumplirse que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0$$

Es decir, $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ para todo $z \notin \Omega$. En otros términos, el camino cerrado γ no puede rodear a ningún punto fuera de Ω. Dicho de otra forma γ debe ser nulhomólogo respecto a Ω. Vamos a ver que esta condición necesaria resulta ser también suficiente.

5.6 Lema. *Dados un abierto Ω, una cadena Γ y una función continua $F : \Omega \times \Gamma^* \to \mathbb{C}$, definamos*

$$h(z) = \int_\Gamma F(z,w)\,\mathrm{d}w \qquad \textit{para } z \in \Omega$$

Entonces h es continua en Ω.

Si además para cada $w \in \Gamma^*$ la función $F_w : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $F_w(z) = F(z,w)$ es holomorfa en Ω, entonces $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$ y sea sucesión $\{z_n\}$ una sucesión de puntos de Ω convergente a z_0. Tenemos que

$$|h(z_n) - h(z_0)| = \left| \int_\Gamma F(z_n,w) - F(z_0,w)\,\mathrm{d}w \right| \leqslant \ell(\Gamma)\ \text{máx}\{|F(z_n,w) - F(z_0,w)| : w \in \Gamma^*\}$$

Como el conjunto $K = \big\{\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_0\}\big\} \times \Gamma^*$ es compacto (producto de compactos), F es uniformemente continua en K. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z'| < \delta$ y $|w - w'| < \delta$ entonces $|F(z,w) - F(z',w')| < \varepsilon$. Sea ahora n_0 tal que para $n \geqslant n_0$ es $|z_n - z_0| < \delta$. Entonces tenemos que $|F(z_n,w) - F(z_0,w)| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $w \in \Gamma^*$, por lo que

$$|h(z_n) - h(z_0)| \leqslant \ell(\Gamma)\varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$. Luego $\{h(z_n)\} \to h(z_0)$ lo que prueba la continuidad de h en z_0 y por ser este punto arbitrario obtenemos la continuidad en Ω.

Para la segunda afirmación apliquemos el teorema de Morera. Sea un triángulo $\Delta(a,b,c) \subset \Omega$. Tenemos

$$\int_{[a,b,c,a]} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{[a,b,c,a]} \left[\int_\Gamma F(z,w)\,\mathrm{d}w\right] \mathrm{d}z \overset{(*)}{=} \int_\Gamma \left[\int_{[a,b,c,a]} F(z,w)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}w = \int_\Gamma 0\,\mathrm{d}w = 0$$

ya que $F_w(z) = F(z,w)$ es holomorfa en Ω luego, por el teorema de Cauchy–Goursat, la integral a lo largo de la frontera de un triángulo contenido en Ω es nula.

Resta justificar la permutación de integrales en $(*)$. Por la linealidad de la integral basta probarla para dos caminos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ cualesquiera.

$$\int_\sigma \left[\int_\gamma F(z,w)\,\mathrm{d}w\right] \mathrm{d}z = \int_c^d \left[\int_a^b F(\sigma(s),\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right] \sigma'(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d F(\sigma(s),\gamma(t))\sigma'(s)\,\mathrm{d}s\right] \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma \left[\int_\sigma F(z,w)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}w$$

□

5.7 Teorema (Forma general del Teorema de Cauchy y de la Fórmula Integral de Cauchy.)**.** *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, Γ un ciclo en Ω nulhomólogo respecto de Ω. Entonces para toda función holomorfa f en Ω se verifica:*

(I) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

(II) $\displaystyle f(z)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$*, para todo $z \in \Omega\backslash\Gamma^*$*

Demostración. [Demostración (J. D. Dixon 1971)] Definimos $F : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$F(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases}$$

Sabemos que F así definida es continua en $\Omega \times \Omega$. Fijado $w \in \Omega$, es claro que $F_w \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{w\})$. Pero F_w es continua en Ω luego, por el teorema de extensión de Riemann, F_w es holomorfa en Ω.

Ahora definimos $h:\Omega\to\mathbb{C}$ por

$$h(z)=\int_\Gamma F(z,w)\,\mathrm{d}w \qquad (z\in\Omega)$$

Por el lema anterior $h\in\mathcal{H}(\Omega)$. Consideremos el conjunto $\Omega_0=\{z\in\mathbb{C}\backslash\Gamma^*:\operatorname{Ind}_\Gamma(z)=0\}$ que es abierto por ser unión de componentes conexas de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$. La hipótesis de que Γ es nulhomólogo respecto a Ω nos dice que $\mathbb{C}\backslash\Omega\subseteq\Omega_0$ y por tanto $\Omega\cup\Omega_0=\mathbb{C}$. Sea entonces

$$\begin{aligned} F_0:\Omega_0\times\Gamma^* &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (z,w) &\longmapsto F_0(z,w)=\frac{f(w)}{w-z}\end{aligned}$$

F_0 está bien definida ya que $w-z\neq 0$ por ser $\Omega_0\cap\Gamma^*=\emptyset$ y además es continua. Fijado $w\in\Gamma^*$, $F_{0w}\in\mathcal{H}(\Omega_0)$ ya que se trata de una función racional.

Sea

$$h_0(z)=\int_\Gamma F_0(z,w)\,\mathrm{d}w=\int_\Gamma\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Aplicando el lema anterior obtenemos que $h_0\in\mathcal{H}(\Omega_0)$. Por último definimos

$$\varphi(z)=\begin{cases} h(z) & z\in\Omega\\ h_0(z) & z\in\Omega_0\end{cases}$$

Veamos que φ está bien definida, es decir, si $z\in\Omega\cap\Omega_0$ entonces $h(z)=h(z_0)$. Pero esto es cierto ya que si $z\in\Omega\cap\Omega_0$ entonces $z\notin\Gamma^*$ y

$$\begin{aligned} h(z)=\int_\Gamma\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w &=\int_\Gamma\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w-f(z)\int_\Gamma\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w=\\ &=\int_\Gamma\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w-f(z)\operatorname{Ind}_\Gamma(z)2\pi i=h_0(z)\end{aligned}$$

ya que $z\in\Omega_0$ y por tanto $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)=0$. Concluimos que φ es entera ya que es holomorfa en $\Omega\cup\Omega_0=\mathbb{C}$.

Sea $R>0$ tal que $|w|<R$ para cualquier $w\in\Gamma^*$. Si $z\in\mathbb{C}$ es tal que $|z|>R$, entonces z está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$ y, por tanto, está en Ω_0. Luego

$$\varphi(z)=h_0(z)=\int_\Gamma\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Poniendo $M=\max\{|f(w)|:w\in\Gamma^*\}$, y teniendo en cuenta que $|w-z|\geqslant|z|-R$ para todo $w\in\Gamma^*$, tenemos que

$$|\varphi(z)|\leqslant\ell(\Gamma)\frac{M}{|z|-R}$$

Tomando límite para $z\to\infty$ deducimos que $\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=0$, lo cual implica que φ está acotada. El teorema de Liouville fuerza a que φ sea constante pero dicha constante debe ser 0. Obtenemos, por tanto, que $h(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Tomemos un punto $z \in \Omega \backslash \Gamma^*$ entonces

$$0 = h(z) = \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw - f(z) \int_\Gamma \frac{1}{w - z} \, dw =$$
$$= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw - f(z) \operatorname{Ind}_\Gamma(z) 2\pi i$$

despejando obtenemos la fórmula general de Cauchy:

$$f(z) \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw \qquad \text{para todo } z \in \Omega \backslash \Gamma^*$$

Por otra parte si tomamos $a \in \Omega \backslash \Gamma^*$ y le aplicamos a la función $g(z) = (z - a) f(z)$, que es holomorfa en Ω, lo que acabamos de probar para f en el punto a obtenemos:

$$0 = g(a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(w - a) f(w)}{w - a} \, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w) \, dw$$

□

Es cómodo introducir la siguiente terminología.

5.8 Definición. Dos ciclos Γ, Σ en un abierto Ω se dicen *homológicamente equivalentes* respecto de Ω si se verifica que

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \operatorname{Ind}_\Sigma(z) \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \backslash \Omega$$

El teorema de Cauchy que acabamos de probar afirma que si Γ, Σ son ciclos en un abierto Ω homológicamente equivalentes respecto de Ω, entonces $\int_\Gamma f(z) \, dz = \int_\Sigma f(z) \, dz$ para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. En lo que sigue vamos a ver cómo este teorema permite reducir el cálculo de integrales de funciones holomorfas sobre caminos cerrados al cálculo de integrales sobre circunferencias. El siguiente ejemplo es ilustrativo de esto.

5.9 Ejemplo. Sea el abierto Ω el plano complejo $\mathbb{C}$ al que le hemos quitado tres puntos a, b y c. Pretendemos calcular la integral de una función holomorfa en Ω a lo largo del camino Γ que se presenta en la figura 5.1

Teniendo en cuenta que el índice de los puntos a, b y c respecto de Γ es el número de veces que Γ los rodea (teniendo en cuenta que el sentido es positivo si los rodea en sentido contrario al de las agujas del reloj) a la vista de la figura tenemos:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 1, \qquad \operatorname{Ind}_\Gamma(b) = 2, \qquad \operatorname{Ind}_\Gamma(c) = -1$$

Consideremos las circunferencias $C(a, \rho)$, $C(b, \rho)$ y $C(c, \rho)$ que se presentan en la figura y formemos el ciclo

$$\Sigma = C(a, \rho) + 2C(b, \rho) - C(c, \rho)$$

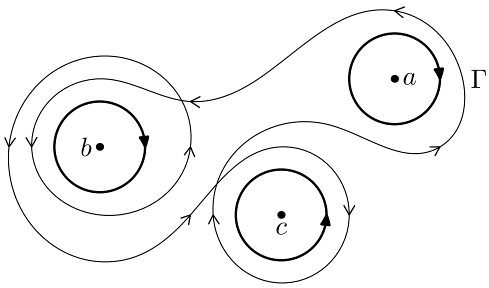


Figura 5.1. Un camino complicado

El ciclo Σ es homológicamente equivalente al ciclo Γ respecto de Ω. El teorema de Cauchy nos dice que en estas condiciones para cualquier función holomorfa en Ω, f, se cumple que

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C(a,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z + 2\int_{C(b,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C(c,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

De esta forma hemos reducido el cálculo de la integral de cualquier función holomorfa sobre el camino Γ a tres integrales sobre circunferencias. Observa, además, que podemos tomar las circunferencias de radio tan pequeño como queramos. Esto nos dice que es el comportamiento de f en un entorno reducido de los puntos a, b y c el que determina el valor de la integral de f sobre cualquier camino cerrado. Volveremos sobre esta idea al estudiar las singularidades aisladas de una función holomorfa. ♦

5.10 Definición. Un abierto Ω se llama *homológicamente conexo* si todo ciclo en Ω es nulhomólogo respecto de Ω.

Aunque en la definición se han considerado ciclos podemos limitarnos a caminos cerrados, es decir, un abierto Ω es homológicamente conexo si todo camino cerrado en Ω es nulhomólogo respecto de Ω. Intuitivamente, un abierto es homológicamente conexo si no tiene “agujeros”. Por ejemplo, un disco o un semiplano son conjuntos homológicamente conexos.

El nombre de “homológicamente conexo” induce a pensar que este concepto implica conexión. Esto no es cierto; por ejemplo, dos discos abiertos disjuntos forman un abierto homológicamente conexo pero evidentemente no forman un conjunto conexo.

5.11 Teorema. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) Ω es homológicamente conexo.

(b) La integral de toda función holomorfa en Ω sobre cualquier ciclo en Ω es nula.

(c) Toda función holomorfa en Ω tiene primitivas en Ω.

(d) Toda función armónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω.

(e) Toda función holomorfa que no se anula en Ω tiene logaritmos holomorfos en Ω.

Demostración.

(a)$\Rightarrow$ *(b)* Es el teorema de Cauchy (teorema 5.7).

(b)$\Rightarrow$*(c)* Consecuencia de la caracterización de existencia de primitivas (teorema 3.10).

(c)$\Rightarrow$*(d)* Es consecuencia de la proposición 4.22.

(d)$\Rightarrow$ *(e)* Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(z) \neq 0$ para $z \in \Omega$. Consideremos un disco $D(a,r) \subset \Omega$. Como consecuencia del lema 3.13 existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\exp\big(g(z)\big) = f(z)$ para todo $z \in D(a,r)$. Por tanto $\log|f(z)| = \operatorname{Re}\big(\exp\big(g(z)\big)\big)$ para todo $z \in D(a,r)$ y, por tanto, $\log|f(z)|$ es armónica en $D(a,r)$. Como esto es cierto para cualquier disco abierto contenido en Ω concluimos que $\log|f(z)|$ es armónica en Ω. Por hipótesis existe una función $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\log|f(z)| = \operatorname{Re} h(z)$ para todo $z \in \Omega$. Definamos $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ por $\varphi(z) = \dfrac{\exp\big(h(z)\big)}{f(z)}$. Tenemos que

$$|\varphi(z)| = \frac{\big|\exp\big(h(z)\big)\big|}{|f(z)|} = \frac{\exp\big(\operatorname{Re} h(z)\big)}{|f(z)|} = \frac{\exp\big(\log|f(z)|\big)}{|f(z)|} = 1$$

lo que, en virtud de la proposición 2.13, implica que φ es constante en cada componente conexa de Ω y por tanto $\varphi'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Calculando $\varphi'(z)$ obtenemos que $h'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ lo que, en virtud del teorema 2.33, implica que f tiene logaritmos holomorfos en Ω.

(e)$\Rightarrow$ *(a)* Sea $z \notin \Omega$. La función $w \mapsto w - z$ es holomorfa y no se anula en Ω, por lo que existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\exp\big(g(w)\big) = w - z$ para todo $w \in \Omega$. Pero entonces $g'(w) = \dfrac{1}{w - z}$ por lo que $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{w - z}\,dw = 0$ para todo camino cerrado γ en Ω. □

5.12 Definición. Se dice que un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo si su complemento $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no tiene componentes conexas acotadas[1]

Intuitivamente, un abierto es simplemente conexo si no tiene “agujeros”. A la vista de esto, el siguiente resultado no debe sorprenderte.

5.13 Teorema. *Un abierto es simplemente conexo si y sólo si es homológicamente conexo.*

Demostración. Sea Ω un abierto simplemente conexo y sea γ un camino cerrado en Ω. Dado $z \notin \Omega$, sea C la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que contiene a z. Tomemos $R > 0$ tal que $\gamma^* \subset D(0,R)$. Sea U la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Claramente U contiene a $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$ y como, por hipótesis, C no está acotada deducimos que $C \cap U \neq \emptyset$. Como $C \subset \mathbb{C} \setminus \Omega \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, se sigue que $C \subset U$ y, por tanto, $z \in U$ lo que, según sabemos, implica que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$.

Hemos demostrado una implicación. Para probar que todo abierto homológicamente conexo es simplemente conexo se necesita un resultado técnico, intuitivo pero entretenido de formalizar. Es el siguiente.

5.14 Teorema (Ciclo que rodea a un compacto.)**.** [2] *Sea Ω un abierto y K un subconjunto compacto de Ω, entonces existe un ciclo Γ verificando:*

[1] Esta definición de conexión simple es válida solamente para el plano, no es válida para $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 3$.

[2] Puedes ver la demostración en mi libro Funciones de variable compleja.

(a) $\Gamma^* \subset \Omega \backslash K$.

(b) Γ *es nulhomólogo con respecto a* Ω.

(c) $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) \in \{0,1\}$ *para todo* $z \in \Omega \backslash \Gamma^*$.

(d) $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1$ *para todo* $z \in K$.

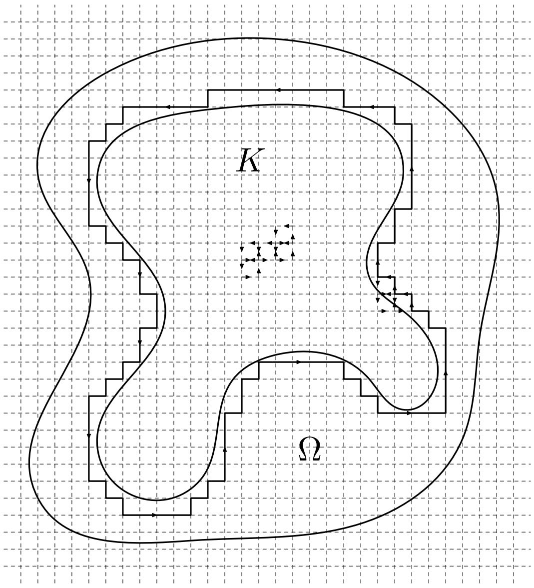


Figura 5.2. Ciclo que rodea un compacto

Utilizando este resultado, podemos probar la implicación que nos falta. Si Ω es un abierto cuyo complemento tiene una componente conexa acotada K entonces K es un compacto y el conjunto $\Omega_1 = \Omega \cup K$ es abierto. Aplicando el teorema anterior al abierto Ω_1 y al compacto K obtenemos un ciclo Γ en Ω que satisface la condición *(d)* y, por tanto, Ω no es homológicamente conexo. □

Sobre los cortes en el plano y las ramas holomorfas de las correspondencias analíticas elementales

Cuando al final del capítulo 2 hablamos de las ramas del logaritmo y de la raíz n-ésima indicamos que suele llamarse “el plano cortado” al plano complejo al que se ha quitado una semirrecta, también se dice que quitar una semirrecta es hacer un “corte en el plano complejo”. A la vista del resultado anterior y del teorema general de Cauchy, está claro que en cualquier abierto simplemente conexo que no contenga al origen hay primitivas de la función $1/z$ y, por tanto, hay ramas holomorfas del logaritmo y, en consecuencia, hay ramas holomorfas de la raíz n-ésima.

La forma más fácil de obtener un dominio simplemente conexo que no contenga al origen es suprimir en el plano complejo los puntos de cualquier curva simple (que no se corte a sí misma) que tenga su punto inicial en 0 y que se aleje arbitrariamente. Una tal curva se dice que une 0 con ∞. Por ejemplo, cualquier semirrecta que empiece en 0. Pero hay otras; por ejemplo, una espiral. O varias semirrectas con orígenes distintos y que no se corten (todas ellas se unen en ∞). Los dominios así obtenidos son simplemente conexos. Por ejemplo, si consideramos la función multiforme $z \mapsto [(z-a)(z-b)(z-c)]^{1/3}$ podemos asegurar que en cualquier dominio simplemente conexo que no contenga los puntos a, b y c hay ramas holomorfas de la misma.

Sin embargo, en algunos casos también hay ramas holomorfas de una función multiforme en dominios que no son simplemente conexos. Por ejemplo, la función multiforme $\operatorname{Log}\left(\dfrac{z-a}{z-a}\right)$ sabemos que tiene ramas holomorfas en el dominio $\Omega = \mathbb{C}\setminus[a,b]^*$ que se obtiene al suprimir en en el plano el segmento de extremos a y b y está claro que Ω no es simplemente conexo. Por supuesto, en todo abierto simplemente conexo que no contenga los puntos a y b hay ramas holomorfas de $z \mapsto \operatorname{Log}\left(\dfrac{z-a}{z-a}\right)$, pero también puede haberlas en abiertos que no sean simplemente conexos. Es decir, el teorema general de Cauchy permite en algunos casos obtener abiertos simplemente conexos en los que una función multiforme analítica tiene ramas holomorfas; pero puede haber abiertos no simplemente conexos en los que también existan ramas holomorfas de dicha función multiforme. Esto es algo que depende de la función multiforme concreta en cada caso.

Ejercicios propuestos

203. Sea $\rho : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^+$ una función continua tal que $\rho(\pi) = \rho(-\pi)$, y sea $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ la curva definida, para todo $t \in [-\pi,\pi]$, por $\gamma(t) = \rho(t)e^{it}$. Calcula $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

204. Justifica que el índice de un punto respecto de una curva cerrada es invariante por giros, homotecias y traslaciones.

205. Consideremos el rectángulo $\gamma = [a+ib, c+ib, c+id, a+id, a+ib]$, donde a,b,c,d son números reales tales que $a < c$ y $b < d$. Calcula $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

206. Dados dos números complejos distintos a y b, sea Ω el dominio obtenido al suprimir en el plano el segmento de extremos a y b. Justifica que Ω no es simplemente conexo. Prueba que existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $[f(z)]^2 = (z-a)(z-b)$ para todo $z \in \Omega$.

207. Sean z_1, z_2, z_3 números complejos distintos y F un conexo cerrado que los contiene. Estudia si la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

tiene primitiva en el abierto $\Omega = \mathbb{C}\setminus F$.

208. Sea γ un camino cerrado en $\mathbb{C}^*$ tal que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \{0,1\}$ para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Supongamos que $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 1$. Sea f una función entera. Calcula el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z f(w)}{(z-w)w}\,\mathrm{d}w$$

cuando z está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ y para z en la componente conexa de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ que contiene a 0.

209. Considera las curvas:

$$\gamma_1(t) = t,\ \ \forall t \in [-1,1];\ \ \gamma_2(t) = \mathrm{e}^{it}\ \ \forall t \in [0,\pi]\ \text{ y }\ \gamma = \gamma_1 \dotplus \gamma_2.$$

Calcula $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

210. Sea $w \in \mathbb{C}^*$ y γ un camino en $\mathbb{C}^*$ cuyo origen es 1 y cuyo extremo es w. Justifica que $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} \in \operatorname{Log}(w)$.

211. Prueba que si Ω es un dominio estrellado, $\mathbb{C}\setminus\Omega$ no tiene componentes conexas acotadas.

212. Sea $\alpha : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ una función continua tal que $\alpha(0) = 0$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) = \infty$. Justifica que el conjunto $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{\alpha(t) : t \geqslant 0\}$ es abierto y que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\exp(f(z)) = z$ para todo $z \in \Omega$.

213. Sea Ω un abierto simplemente conexo del plano que no contiene al cero y contiene a $\mathbb{R}^+$. Justifica que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(x) = x^x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. ¿Puede suprimirse la hipótesis de que Ω sea simplemente conexo?

214. Sea γ la elipse de centro $(0,0)$ y semiejes a y b. Calcula de dos formas distintas la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ y deduce el valor de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}$.

5.3. Series de Laurent. Funciones holomorfas en un anillo

Nos proponemos estudiar el comportamiento de una función holomorfa en un entorno reducido de un punto, esto es, en un conjunto de la forma $D(a,\rho)\setminus\{a\}$. En el ejemplo que sigue al teorema de Cauchy vimos que el valor de la integral de una función depende de los valores de dicha función en conjuntos de la forma $D(a,\rho)\setminus\{a\}$ con ρ arbitrariamente pequeño. Es decir, depende del comportamiento de la función en el punto a. Observa que el conjunto $D(a,\rho)\setminus\{a\}$ es un tipo especial de anillo. El *anillo* (abierto) de centro a, radio interior r y radio exterior R, donde $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, es el conjunto

$$A(a;r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

Claramente $D(a,r)\setminus\{a\} = A(a;0,\rho)$. Sabemos que una función holomorfa en un disco $D(a,r)$ es igual a la suma de su serie de Taylor centrada en a y que dicha serie converge por lo menos en dicho disco. Queremos ahora obtener una representación de una función holomorfa en un anillo por medio de una serie convergente en dicho anillo. La consideración de algunos casos sencillos nos puede dar la pista del tipo de series apropiadas para tal fin.

$$\operatorname{sen}(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} \quad \text{para todo } z \in A(0;0,+\infty)$$

$$\frac{e^z}{(z-a)^q} = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-a)^{q-n}} + \sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-a)^{n-q} \quad \text{para todo } z \in A(a;0,+\infty)$$

$$\exp(1/z) + \log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} z^{n+1} \quad \text{para todo } z \in A(0;0,1)$$

Las series anteriores son todas ellas de la forma $\sum \frac{a_n}{(z-a)^n} + \sum b_n(z-a)^n$, es decir, son suma de dos series (alguna de ellas puede reducirse a una suma finita o incluso no tener ningún término); una es una serie de potencias centrada en a y la otra es una serie en potencias *negativas* de $z-a$. Tales series se llaman *series de Laurent*. Vamos a definirlas de manera formal y a introducir la notación especial que suele usarse para este tipo de series que consiste en que, por comodidad de notación, los coeficientes de las potencias negativas de $z-a$ se notan con subíndices negativos de la forma c_{-n}.

Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y un número $a \in \mathbb{C}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por

$$f_0(z) = c_0$$
$$f_n(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + c_n(z-a)^n = c_{-n}(z-a)^{-n} + c_n(z-a)^n \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}$$

La serie de término general f_n, es decir, la sucesión

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n(z) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} f_n(z) \right\} = \left\{ c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_{-n}(z-a)^{-n} + c_n(z-a)^n \right) \right\} = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} c_n(z-a)^n \right\}$$

se llama *serie de Laurent centrada en a con coeficientes* c_n. Es costumbre representar dicha sucesión como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$. Cuando dicha serie converge representaremos su límite por

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n\geqslant 0} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

Como de costumbre, dicho límite se llama la suma de la serie.

Convergencia de una serie de Laurent

A cada serie de Laurent, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$, podemos asociarle dos series de potencias, a saber,

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \qquad \text{con radio de convergencia } R^+$$
$$\sum_{n\geqslant 1} c_{-n} z^n \qquad \text{con radio de convergencia } R^-$$

Supongamos que $1/R^- < R^+$ y consideremos el anillo $A(0;\alpha,\beta)$ donde $1/R^- < \alpha < \beta < R^+$. Como $\beta < R^+$ la serie $\sum |c_n|\beta^n$ converge; y como $1/\alpha < R^-$ la serie $\sum |c_{-n}|\alpha^{-n}$ también converge. Para todo $z\in A(0;\alpha,\beta)$ tenemos que $\alpha < |z-a| < \beta$, y por tanto

$$|c_{-n}|\,|z-a|^{-n} < |c_{-n}|\,\alpha^{-n} \qquad |c_n|\,|z-a|^n < |c_n|\,\beta^n$$

Y, por el criterio de Weierstrass, deducimos que las series $\sum c_{-n}(z-a)^{-n}$ y $\sum c_n(z-a)^n$ convergen absoluta y uniformemente en $A(0;,\alpha,\beta)$ y lo mismo le pasa a su suma, es decir a la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$. Hemos probado así que la serie converge absolutamente en el anillo $A(0;1/R^-,R^+)$ y converge uniformemente en compactos contenidos en dicho anillo. Este anillo se llama *anillo de convergencia* de la serie de Laurent. Es fácil probar que en el exterior de dicho anillo no hay convergencia porque el término general de la serie no tiende a cero mientras que en su frontera nada puede decirse del comportamiento de la serie. En el caso de que $1/R^- \geqslant R^+$ el anillo de convergencia es vacío y se dice que se trata de una serie de Laurent trivial.

En virtud del teorema de convergencia de Weierstrass para sucesiones de funciones holomorfas, la función suma $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ de una serie de Laurent no trivial es holomorfa en el anillo de convergencia $A(a;1/R^-,R^+)$. Observa que la función suma podemos escribirla como:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

Hemos probado que las series de Laurent no triviales definen funciones holomorfas en anillos. El siguiente resultado nos dice que, recíprocamente, cualquier función holomorfa en un anillo es la función suma de una cierta serie de Laurent (única) y proporciona una expresión para sus coeficientes.

5.15 Teorema (Desarrollo en serie de Laurent)**.** *Sean $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, $a \in \mathbb{C}$ y f una función holomorfa en el anillo $A(a;r,R)$. Entonces hay una única serie de Laurent centrada en a y con coeficientes $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cuyo anillo de convergencia contiene al anillo $A(a;r,R)$ y cuya suma coincide con f en dicho anillo*

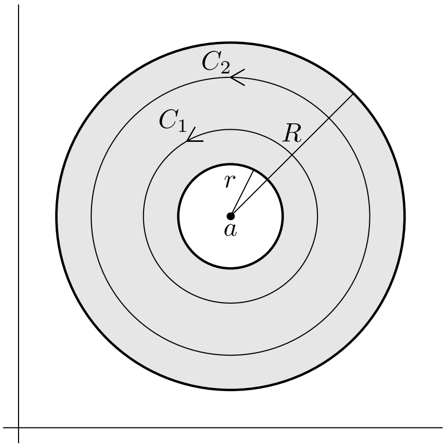
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \qquad z \in A(a;r,R)$$

Además los coeficientes de la serie vienen dados por

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad (n\in\mathbb{Z})}$$

siendo $r < \rho < R$ arbitrario.

Demostración. En primer lugar veamos que la expresión de los coeficientes c_n no depende de ρ. Tomemos $r < r_1 < r_2 < R$, pongamos $C_1 = C(a,r_1)$, $C_2 = C(a,r_2)$ y consideremos el ciclo $\Gamma = C_2 - C_1$.



Para $z \notin A(a;r,R)$ o bien es $|z-a| \geqslant R$, en cuyo caso $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \operatorname{Ind}_{C_2}(z) - \operatorname{Ind}_{C_1}(z) = 0$; o bien es $|z-a| \leqslant r$, en cuyo caso $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \operatorname{Ind}_{C_2}(z) - \operatorname{Ind}_{C_1}(z) = 1-1 = 0$. Luego el ciclo Γ es nulhomólogo respecto del anillo. Como la función $w \mapsto \dfrac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$ es holomorfa en $A(a;r,R)$, el teorema general de Cauchy nos dice que

$$0 = \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w - \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

de donde obtenemos la independencia de ρ.

Sea $z \in A(a;r,R)$, fijo en lo que sigue. Elijamos $0 \leqslant r < r_1 < |z-a| < r_2 < R$ y consideremos el ciclo $\Gamma = C(a,r_2) - C(a,r_1)$. Observemos que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1$ puesto que z es interior a $D(a,r_2)$ y exterior a $D(a,r_1)$. Por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = f(z)\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \tag{5.4}$$

Desarrollamos ahora en serie geométrica la función $w \mapsto \dfrac{1}{w-z}$ de dos formas distintas según que $w \in C(a,r_1)^*$ o $w \in C(a,r_2)^*$. Sea $w \in C(a,r_2)^*$. Entonces $\dfrac{|z-a|}{|w-a|} < 1$ y

$$\frac{f(w)}{w-z} = f(w)\frac{1}{w-a-(z-a)} = f(w)\frac{1}{w-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n$$

serie que converge uniformemente para $w \in C(a,r_2)^*$ ya que está mayorada por

$$\frac{|z-a|^n}{|w-a|^n} = \left(\frac{|z-a|}{r_2}\right)^n$$

serie numérica convergente por ser una serie geométrica de razón $\dfrac{|z-a|}{r_2} < 1$.

Supongamos ahora que $w \in C(a,r_1)^*$. Entonces $\dfrac{|w-a|}{|z-a|} < 1$ y

$$\frac{f(w)}{w-z} = f(w)\frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{-f(w)}{z-a}\frac{1}{1-\dfrac{w-a}{z-a}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

serie que converge uniformemente para $w \in C(a,r_1)^*$ ya que está mayorada por

$$\frac{|w-a|^n}{|z-a|^n} = \left(\frac{r_1}{|z-a|}\right)^n$$

serie numérica convergente por ser una serie geométrica de razón $\dfrac{r_1}{|z-a|} < 1$.

Sustituyendo los desarrollos anteriores en la igualdad 5.4 y permutando la integral con la suma de las series obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{C(a,r_2)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^n + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{C(a,r_1)} f(w)(w-a)^{n-1}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^{-n}$$

Teniendo en cuenta que z es un punto cualquiera del anillo y que

$$\int\limits_{C(a,r_1)} f(w)(w-a)^{n-1}\,\mathrm{d}w = \int\limits_{C(a,r_1)}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}\,\mathrm{d}w = c_{-n}$$

hemos probado que la serie de Laurent cuyos coeficientes son los del enunciado converge en el anillo dado y su suma en dicho anillo es igual a la función f.

La unicidad de este desarrollo es fácil. Supongamos que tenemos otra serie de Laurent que representa a f en el anillo $A(a;r,R)$, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(z-a)^n \qquad z \in A(a;r,R)$$

entonces para $r < \rho < R$ los coeficientes de la serie vienen dados por

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,\rho)}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,\rho)}\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(w-a)^n}{(w-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}w =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{C(a,\rho)}\frac{d_n}{(w-a)^{k+1-n}}\,\mathrm{d}w$$

Ahora bien, las funciones $w \mapsto (w-a)^{n-k-1}$ tienen primitiva salvo en el caso $n-k-1 = -1$, luego para $n-k-1 \neq -1$, la integral de $(w-a)^{n-k-1}$ es cero a lo largo de la circunferencia $C(a,\rho)$ con lo cual obtenemos que

$$c_k = \frac{d_k}{2\pi i}\int\limits_{C(a,\rho)}\frac{1}{w-a}\,\mathrm{d}w = \frac{d_k}{2\pi i}2\pi i = d_k$$

luego $c_k = d_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y la serie de Laurent de f es única. $\square$

Observemos que en el enunciado queda abierta la posibilidad de que el radio interior del anillo sea $r = 0$, es decir, que f sea holomorfa en un disco “pinchado”, esto es, un disco al que se le ha quitado su centro. La importancia de este caso particular se verá a continuación.

5.4. Singularidades aisladas de una función holomorfa

5.16 Definición. Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$.

(a) Se dice que f es *regular* en a o bien que a es un *punto regular* de f si es posible definir f en a de manera que sea derivable en a, lo que, en virtud del teorema de extensión de Riemann, equivale a que exista $\lim\limits_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$.

(b) Si no es posible definir f en a de manera que sea derivable en a, se dice que a es un punto *singular* aislado de f o que f presenta una *singularidad aislada* en a.

Observa que el concepto de punto regular o de singularidad aislada es un concepto local y que el abierto Ω en la definición puede muy bien ser un “pequeño” disco centrado en a. Recuerda que el teorema de extensión de Riemann (teorema 3.27) da varias condiciones equivalentes para que a sea un punto regular de f.

Supongamos que f presenta una singularidad (aislada) en el punto a. Para estudiar el comportamiento de la función en dicho punto tomemos un disco $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Puesto que f es holomorfa en el anillo $D(a,r) \setminus \{a\} = A(a;0,r) \subset \Omega \setminus \{a\}$, el teorema 5.15 nos dice que podemos representar f de manera única como

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{para todo } z \in D(a,r) \setminus \{a\} \tag{5.5}$$

Este desarrollo se llama desarrollo de Laurent de f en a. La serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ se llama *parte principal* del desarrollo de Laurent de f en a y la serie $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n (z-a)^n$ se llama *parte regular* del desarrollo de Laurent de f en a. Claramente, el “mal” comportamiento de f en a procede de la parte principal de su desarrollo de Laurent.

Observa que si f es regular en a entonces, definiendo f en a de manera que sea holomorfa en Ω, se sigue que las integrales

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}} \, \mathrm{d}w \qquad 0 < \rho < r$$

son nulas para todo $n \geqslant 1$, pues la función $w \mapsto \dfrac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}$ es holomorfa en Ω para todo $n \geqslant 1$ y el camino $C(a,\rho)$ es nulhomólogo respecto de Ω (porque $\overline{D}(a,\rho) \subset \Omega$) luego la parte principal del desarrollo de Laurent de f en a es nula y dicho desarrollo coincide con el desarrollo de

Taylor de f centrado en a. En este sentido el desarrollo de Laurent es una generalización del desarrollo de Taylor.

Puesto que la serie de Laurent de f en a es convergente en el anillo $A(a;1/R^-,R^+)$, donde R^- es el radio de convergencia de la serie $\sum c_{-n}z^n$, debe ocurrir que $A(a;1/R^-,R^+)\supseteqq A(a;0,r)$. Deducimos que $R^-=+\infty$ y, por tanto, la función dada por $h(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}z^n$ es una función entera que se anula en 0. Podemos escribir la igualdad 5.5 en la forma

$$f(z)=h\left(\frac{1}{z-a}\right)+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \text{para todo } z\in D(a,r)\setminus\{a\} \tag{5.6}$$

Por su parte la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ tiene radio de convergencia $R^+\geqslant r$ y, por tanto, la función dada por

$$\widehat{g}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \text{para todo } z\in D(a,r)$$

es una función holomorfa en $D(a,r)$. Si definimos

$$g(z)=f(z)-h\left(\frac{1}{z-a}\right) \qquad \text{para todo } z\in\Omega\setminus\{a\}$$
$$g(a)=c_0$$

se tiene que g es holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$ y, como g coincide con $\widehat{g}$ en el disco $D(a,r)$, concluimos que g es holomorfa en Ω. Además, la descomposición anterior es única, como consecuencia de la unicidad del desarrollo de Laurent . Hemos probado el siguiente resultado.

5.17 Teorema (Descomposición canónica de una función en una singularidad aislada.)**.** *Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. Entonces existen funciones g,h únicas tales que:*

(a) g es holomorfa en Ω y h es una función entera que se anula en cero.

(b) Para todo $z\in\Omega\setminus\{a\}$ se verifica que $f(z)=g(z)+h\left(\frac{1}{z-a}\right)$.

La igualdad anterior se llama descomposición canónica de f en el punto a.

Conviene destacar una consecuencia importante de este resultado.

5.18 Corolario. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $S\subset\Omega$ un conjunto de puntos aislados en Ω, y f una función holomorfa en $\Omega\backslash S$. Para cada $a\in S$ sea $h_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$ la parte principal del desarrollo de Laurent de f en a. Entonces se verifica que la función $f(z)-h_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$ es regular en a.*

Demostración. En efecto, sea $\rho>0$ tal que $D(a,\rho)\cap S=\{a\}$ y $D(a,\rho)\subset\Omega$. Podemos aplicar lo antes visto a la función f en el abierto $D(a,\rho)$ para obtener que hay una función $g_a\in\mathcal{H}(D(a,\rho))$ tal que

$$f(z)=g_a(z)+h_a\left(\frac{1}{z-a}\right) \qquad \text{para todo } \ z\in D(a,\rho)\setminus\{a\}$$

deducimos de esta igualdad que la función $f(z)-h_a\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$ tiene límite finito en a, es decir, es regular en a. $\square$

Dependiendo de que la función h sea una función polinómica o sea una función entera no polinómica se distinguen dos tipos de singularidades.

5.19 Definición. Supongamos que f tiene una singularidad (aislada) en el punto a y sea

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

el desarrollo de Laurent de f en a. Pongamos $h(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^n$.

Si la parte principal del desarrollo de Laurent de f en a tiene un número finito de coeficientes no nulos, equivalente la función h es un polinomio, entonces se dice que a es un *polo* de f o que *f tiene un polo en a*. Se define el *orden* de dicho polo como el grado del polinomio h, esto es, como $\max\{k\in\mathbb{N}:c_{-k}\neq 0\}$.

Si la parte singular de f tiene infinitos coeficientes no nulos, equivalentemente, h es una función entera no polinómica. Entonces se dice que f tiene en a una *singularidad esencial*.

5.20 Teorema (Caracterización de los polos.)**.** *Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f tiene un polo en a de orden k.

(b) Existe el límite $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z)$ y es un número complejo no nulo.

(c) Existe $\varphi\in\mathcal{H}(\Omega)$ con $\varphi(a)\neq 0$ tal que $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$ para todo $z\in\Omega\setminus\{a\}$.

Demostración. Supongamos que $D(a,r)\subset\Omega$.

$(a)\Rightarrow(b)$ Si f tiene un polo de orden k en el punto a entonces su desarrollo en serie de Laurent es:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}\qquad z\in D(a,r)\setminus\{a\}$$

luego si multiplicamos f por $(z-a)^k$ llegamos a la expresión

$$(z-a)^k f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^{n+k}+c_{-k}+c_{-k+1}(z-a)+\cdots+c_{-1}(z-a)^{k-1}\qquad z\in D(a,r)\setminus\{a\}$$

de donde se sigue que $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z)=c_{-k}\neq 0$ lo que prueba (b).

$(b)\Rightarrow(c)$ Definimos

$$\varphi(z)=(z-a)^k f(z)\qquad \text{para } z\neq a$$
$$\varphi(a)=\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)\neq 0$$

la función φ es continua en Ω y holomorfa en $\Omega\backslash\{a\}$. Por el teorema de extensión de Riemann φ es holomorfa en Ω y evidentemente cumple las condiciones de (c)

$(c) \Rightarrow (a)$ Consideremos el desarrollo en serie de Laurent de f en a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} \qquad z \in D(a,r)\backslash\{a\}$$

Por tanto

$$(z-a)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n+k} \qquad z \in D(a,r)\backslash\{a\}$$

Como la hipótesis afirma que la función $(z-a)^k f(z)$ es regular en a, deducimos que la parte principal de este desarrollo debe ser nula, luego $c_{-n} = 0$ para $n > k$. En tal caso tenemos, además, que $\varphi(a) = \lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) = c_{-k}$. Esto nos proporciona el siguiente desarrollo de Laurent para f:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \cdots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$

con $c_{-k} = \varphi(a) \neq 0$ lo que prueba que f tiene un polo de orden k en a. □

Esta caracterización nos hace ver que existe cierta similitud entre los polos de una función holomorfa y las singularidades de una función racional (los puntos donde se anula el denominador). De hecho, dada una función racional $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes, es fácil probar, que las únicas singularidades de f son los ceros de Q los cuales son polos de f y el orden de cada polo de f coincide con el orden de cada cero de Q. De hecho, esto es consecuencia del siguiente sencillo resultado,

5.21 Proposición. *Sean Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en Ω tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z\in\Omega$ con $z \neq a$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f tiene en a un cero de orden k.

(b) $1/f$ tiene en a un polo de orden k.

Demostración.
$[(a) \Rightarrow (b)]$ La hipótesis implica que hay una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^k g(z)$ para todo $z\in\Omega$. De aquí se sigue que

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k \frac{1}{f(z)} = \lim_{z\to a}(z-a)^k \frac{1}{(z-a)^k g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(a)}$$

luego $1/f$ tiene en a un polo de orden k en virtud del punto *(b)* de la caracterización anterior.

$[(b) \Rightarrow (a)]$ La hipótesis implica, en virtud del punto *(c)* de la caracterización anterior, que hay una función $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi(a) \neq 0$ y $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$ para todo $z\in\Omega\backslash\{a\}$. De aquí se sigue que $\varphi(z) \neq 0$ para todo $z\in\Omega$, por lo que la función $g(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$ es holomorfa en Ω.

Como, evidentemente, es $f(z) = (z-a)^k g(z)$ se sigue, en virtud de la conocida caracterización del orden de un cero, que f tiene en a un cero de orden k. $\square$

La siguiente es una caracterización descriptiva de los polos de una función.

5.22 Proposición. *Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f tiene un polo en a.

(b) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Demostración.
$[(a) \Rightarrow (b)]$ Es consecuencia inmediata del punto *(c)* de la caracterización de los polos (5.20).

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Por hipótesis existe $\rho > 0$ tal que si $z \in D(a,\rho)\setminus\{a\}$ entonces $|f(z)| > 1$, en particular, $f(z) \neq 0$ para $z \in D(a,\rho)$. Definimos

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{f(z)} \qquad z \in D(a,\rho)\setminus\{a\} \\ h(a) &= 0 \end{aligned}$$

h está bien definida y además es holomorfa en $D(a,\rho)$ (holomorfa en $D(a,\rho)\setminus\{a\}$ y continua en a). Ahora bien $h(a) = 0$, luego, por la proposición anterior, concluimos que f tiene un polo en a. $\square$

De los resultados anteriores se sigue enseguida, por exclusión, el siguiente corolario.

5.23 Corolario. *Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f tiene una singularidad esencial en a.

(b) f no tiene límite finito ni infinito en a.

5.24 Teorema (de Casorati–Weierstrass)**.** *Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) La función f tiene una singularidad esencial en a.

(b) La imagen por f de todo entorno reducido de a es densa en $\mathbb{C}$.

Demostración.

(a)⇒(b) Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que hay algún entorno de a, $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $f\big(D(a,r)\setminus\{a\}\big)$ no es denso en $\mathbb{C}$. Entonces existen $w\in\mathbb{C}$ y $\rho > 0$ tales que $D(w,\rho) \cap f\big(D(a,r)\setminus\{a\}\big) = \varnothing$. Es decir $|f(z) - w| \geqslant \rho$ para todo $z \in D(a,r)\setminus\{a\}$. Definimos $g(z) = \dfrac{1}{f(z)-w}$ para todo $z\in D(a,r)\setminus\{a\}$. Evidentemente, g es holomorfa en $D(a,r)\setminus\{a\}$ y está acotada, pues $|g(z)| \leqslant 1/\rho$, lo que, en virtud del teorema de extensión de Riemann, implica que

existe $\lim\limits_{z\to a} g(z) = \alpha$. Si fuera $\alpha = 0$ entonces deducimos que $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ lo, que según sabemos, implica que f tienen un polo en a lo que contradice la hipótesis. Por tanto debe ser $\alpha \neq 0$. Pero en tal caso deducimos que $\lim\limits_{z\to a} f(z) = w + 1/\alpha$, y, en consecuencia, f sería regular en a lo que también contradice la hipótesis.

(b)⇒(a) Esta implicación es clara pues la hipótesis implica que f no tiene límite finito ni infinito en a. □

De los coeficientes del desarrollo de Laurent de una función en un punto el coeficiente c_{-1} tiene una importancia especial.

5.25 Definición. Sea Ω un abierto, $a\in\Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$. El número

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(a,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

se llama *residuo de f en el punto a* y lo notaremos por $\operatorname{Res}(f(z), a)$.

5.4.1. Cálculo del residuo de una función en un punto

Puesto que el teorema de Cauchy permite reducir el cálculo de la integral de una función en un camino cerrado al cálculo de varias integrales en circunferencias, es importante disponer de algún método que permita calcular el residuo de una función en un punto *sin necesidad de calcular la integral correspondiente*.

Al igual que ocurre con los desarrollos en serie de Taylor, que pueden calcularse muchas veces sin necesidad de calcular las integrales que nos dan los coeficientes del desarrollo, con los desarrollos de Laurent sucede lo mismo: con frecuencia podemos calcularlos de forma indirecta sin necesidad de calcular las integrales que nos dan los coeficientes del desarrollo. Siempre que podamos hacer esto podremos calcular el residuo c_{-1} y con ello la integral correspondiente. De hecho, este es el único procedimiento general para calcular el residuo en una singularidad esencial. Afortunadamente, para los polos hay un método sistemático de calcular no sólo el residuo sino todos los coeficientes de la parte principal del desarrollo de Laurent.

Supongamos que f tiene en a un polo de orden k, esto quiere decir que

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

para z en un cierto anillo $A(a;0,r)$. Definimos la función

$$g(z) = (z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k} \quad z \neq a$$
$$g(a) = c_{-k}$$

g es holomorfa donde lo sea f y además es continua en a. Observemos que la expresión anterior es el desarrollo en serie de Taylor de la función g y que para $0 \leqslant j \leqslant k-1$, c_{-k+j} es el coeficiente de la potencia $(z-a)^j$ de dicha serie y por tanto viene dado por:

$$c_{-k+j} = \frac{1}{j!}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}z^j}g(z)\bigg|_{z=a}$$

Para recordar esta igualdad es más cómodo poner $-k+j=-q$ con lo que $1 \leqslant q \leqslant k$ y la igualdad anterior se escribe:

$$c_{-q} = \frac{1}{(k-q)!}\frac{\mathrm{d}^{k-q}}{\mathrm{d}z^{k-q}}g(z)\bigg|_{z=a}$$

En la práctica suele aparecer una indeterminación al evaluar esta derivada en a por lo que escribimos

$$\boxed{c_{-q} = \frac{1}{(k-q)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{k-q}}{\mathrm{d}z^{k-q}}(z-a)^k f(z)} \tag{5.7}$$

En particular, para $q=1$ obtenemos:

$$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}(z-a)^k f(z)}$$

Es decir, el residuo en un polo se calcula derivando.

En el caso particular de que exista $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=\alpha\in\mathbb{C}$ entonces se verifica que $\operatorname{Res}(f(z);a)=\alpha$. Pues si $\alpha=0$ entonces, por el teorema de extensión de Riemann, sabemos que f es regular en a y su residuo es nulo. Y si $\alpha\neq 0$, la condición anterior equivale a que f tenga en a un polo de orden 1 en cuyo caso, como hemos visto en el teorema 5.20 en la implicación *(a)⇒(b)*, su residuo viene dado por $c_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ (también se deduce directamente de lo antes visto).

Polos de cocientes de funciones holomorfas

En muchas ocasiones la función que integramos viene dada como cociente de dos funciones holomorfas $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ donde suponemos que g, h son funciones holomorfas en un abierto Ω. En tal caso las únicas posibles singularidades de f son los ceros de h. Es de comprobación inmediata que si h tiene un cero de orden k en un punto a y $g(a)\neq 0$, entonces f tiene un polo de orden k en a. En el caso de que sea un polo simple, es decir, de orden 1, tenemos

$$\operatorname{Res}(f(z),a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)} = g(a)\lim_{z\to a}\frac{z-a}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

5.4.2. Comportamiento en infinito de una función holomorfa

Mediante el artificio de invertir la variable, podemos estudiar el comportamiento en ∞ de una función holomorfa f sin más que estudiar el comportamiento en 0 de la función $z\mapsto f(1/z)$. La utilidad de este procedimiento nos lleva a establecer la siguiente definición.

5.26 Definición. Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y supongamos que para algún $R>0$ se tiene que $\Omega\supset A(0;R,+\infty)$. Definamos la función $F:D(0,1/R)\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ por $F(z)=f(1/z)$. Se dice que

a) f es regular en ∞ o que ∞ es un punto regular de f si F es regular en 0.

b) f tiene un polo de orden k en ∞ si F tiene un polo de orden k en 0.

c) f tiene una singularidad esencial en ∞ si F tiene una singularidad esencial en 0.

Sea $F(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ el desarrollo de Laurent de F en el anillo $A(0;0,1/R)$.

Entonces, por definición, el *desarrollo de Laurent de f en ∞* viene dado por

$$f(z)=F(1/z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^{-n}\qquad z\in A(0;R,+\infty)$$

La serie $\sum_{n\geqslant 1}c_{-n}z^n$ se llama *parte principal* y $\sum_{n\geqslant 0}c_n z^{-n}$ se llama *parte regular* del desarrollo de Laurent de f en ∞.

Teniendo en cuenta, una vez más, que la serie converge uniformemente en cualquier circunferencia de centro 0 y radio $\rho>R$, por lo que podemos permutar su suma con la integral, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)}f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^{-n}\right)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)}\frac{c_1}{z}\,\mathrm{d}z=c_1$$

Se define el *residuo de f en ∞* como

$$\operatorname{Res}(f(z),\infty)=-c_1=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)}f(w)\,\mathrm{d}w\qquad\text{donde }\rho>R\tag{5.8}$$

Observa que c_1 es el coeficiente de z^{-1} en el desarrollo de Laurent de f en ∞. La razón del signo "–" en la definición se debe a que "desde el infinito" las circunferencias se ven con orientación opuesta a como se ven desde el origen. Para calcular el residuo en ∞ la siguiente igualdad es útil.

$$\boxed{\operatorname{Res}(f(z);\infty)=-\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(1/z),0\right)}\tag{5.9}$$

Para comprobarlo, sea $r=1/\rho$. Tenemos

$$2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(1/z),0\right)=\int_{C(0,r)}\frac{1}{z^2}f(1/z)\,\mathrm{d}z=\int_{-\pi}^{\pi}f(\mathrm{e}^{-it}/r)\frac{\mathrm{e}^{-2it}}{r^2}ir\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(\rho\,\mathrm{e}^{-it})i\rho\,\mathrm{e}^{-it}=-\int_{\pi}^{-\pi}f(\rho\,\mathrm{e}^{is})i\rho\,\mathrm{e}^{is}=\int_{-\pi}^{\pi}f(\rho\,\mathrm{e}^{is})i\rho\,\mathrm{e}^{is}=\int_{C(0,\rho)}f(z)\,\mathrm{d}z$$

Como consecuencia inmediata de las definiciones dadas y de las caracterizaciones conocidas de los polos, así como del teorema de Casorati–Weierstrass, se tiene el siguiente resultado.

5.27 Proposición. *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y supongamos que para algún $R>0$ se tiene que $\Omega\supset A(0;R,+\infty)$. Sea*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^{-n}\qquad z\in A(0;R,+\infty)$$

el desarrollo de Laurent de f en ∞.

1. *Equivalen las siguientes afirmaciones*
   - *1.a)* *f tiene un polo en ∞.*
   - *1.b)* $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$.
   - *1.c)* *La parte principal del desarrollo de Laurent de f en ∞ es una función polinómica. Es decir el conjunto $\{n\in\mathbb{N}:c_{-n}\neq 0\}$ es finito.*
2. *Equivalen las siguientes afirmaciones*
   - *2.a)* *f es regular en ∞.*
   - *2.b)* $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\alpha\in\mathbb{C}$.
   - *2.c)* *$c_{-n}=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.*
3. *Equivalen las siguientes afirmaciones*
   - *3.a)* *f tiene una singularidad esencial en ∞.*
   - *3.b)* *f no tienen límite finito ni infinito en ∞.*
   - *3.c)* *Para todo $\rho\geqslant R$ el conjunto $\{f(z):|z|>\rho\}$ es denso en $\mathbb{C}$.*

5.28 Proposición. *Una función entera es una función polinómica no constante si, y sólo si, tiene un polo en ∞. Una función entera es constante si, y sólo si, es regular en ∞.*

Demostración. Sea f una función entera. Representemos f por medio de su serie de Taylor en 0.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\qquad\text{para todo }\ z\in\mathbb{C}$$

Tenemos que

$$F(z)=f(1/z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^{-n}\qquad\text{para todo }\ z\in\mathbb{C}^*$$

La unicidad del desarrollo en serie de Laurent implica que este es el desarrollo de Laurent de F en 0. Por tanto, la serie de Laurent de f en ∞ coincide con la serie de Taylor de f en 0. En consecuencia, f tiene un polo en ∞ si, y sólo si, f es una función polinómica no constante.

Si f es regular en ∞ entonces $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\alpha\in\mathbb{C}$, lo que implica que f está acotada en $\mathbb{C}$ y, por el teorema de Liouville, f es constante. □

Ejercicios propuestos

215. Sean $a,b\in\mathbb{C}$ tales que $|a|<|b|$. Calcula el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}\qquad z\in\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$$

en cada uno de los anillos: $A(0;|a|,|b|)$, $A(0;|b|,+\infty)$, $A(a;0,|b-a|)$ y $A(a;|b-a|,+\infty)$.

216. Clasifica las singularidades y calcula los residuos en todos los polos de la función

$$f(z)=\frac{\operatorname{sen}(\pi z)\left(\mathrm{e}^{\pi z}-1\right)}{z^3(z^2+1)(z^2+3z+2)}$$

217. Clasifica las singularidades de las siguientes funciones y calcula los residuos correspondientes (incluyendo el punto ∞ cuando tenga sentido).

$$\text{a)}\ \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+z+1}\quad \text{b)}\ \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+1)}\quad \text{c)}\ \frac{\operatorname{sen}(1/z)}{(z+1/z)^3}\quad \text{d)}\ \frac{1}{z-\operatorname{sen} z}$$

218. Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, $a\in\Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. Prueba que si la parte real de f está mayorada o minorada en un entorno reducido de a entonces f es regular en a. Deduce que si f tiene una singularidad en a entonces $\exp(f)$ tiene una singularidad esencial en a.

219. Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, $\{a_n\}$ una sucesión de puntos distintos de Ω que converge a un punto $a\in\Omega$. Sea f una función holomorfa en el abierto $V=\Omega\setminus(\{a_n:n\in\mathbb{N}\}\cup\{a\})$ y que tiene un polo en cada punto a_n. Prueba que, para cada $\rho>0$, el conjunto $f(D(a,\rho)\cap V)$ es denso en $\mathbb{C}$.

220. Sea $R>0$, $a\in D(0,R)\setminus\{0\}$, y f una función holomorfa en $D(0,R)\setminus\{a\}$ que tiene un polo simple en a. Sea $c_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Prueba que $\lim\left\{\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right\}=a$.

221. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en un número finito de puntos que son polos de f. Supongamos, además, que f o bien es regular o tiene un polo en infinito. Prueba que f es una función racional.

222. Sea $\Omega=\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Justifica que las funciones f y h definidas en Ω por:

$$f(z)=\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2\pi z},\quad h(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}\qquad (z\in\Omega)$$

son holomorfas en Ω y tienen la misma parte principal en cada entero $n\in\mathbb{Z}$.

Dedúzcase que la función $g(z)=f(z)-h(z)$, $(z\in\Omega)$, puede extenderse a una función entera y acotada y que, por tanto, g es i dénticamente nula.

223. Sea f una función holomorfa que no se anula en el anillo $A(0;1,2)$. Pruébese que hay un entero $n\in\mathbb{Z}$, y una función g holomorfa en dicho anillo, tal que $f(z)=z^n\exp(g(z))$ para todo $z\in A(0;1,2)$.

224. Calcula el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2} \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1\})$$

en cada uno de los anillos siguientes: $A(1;0,2)$ y $A(1;2,+\infty)$.

225. Clasifica las singularidades de las siguientes funciones y calcula los residuos correspondientes (incluyendo el punto ∞ cuando tenga sentido).

$$\text{a)}\ \frac{1-\cos z}{z^n} \quad \text{b)}\ z^n\operatorname{sen}(1/z) \quad \text{c)}\ \frac{1}{z(1-e^{2\pi i z})} \quad \text{d)}\ \frac{z}{\operatorname{tg}\pi z} \quad \text{e)}\ \frac{e^{1/z}}{z-1}$$

226. Prueba que una función entera e inyectiva es una función polinómica de grado uno.

227. Supongamos que f y g son holomorfas en un entorno de un punto a; que $f(a)\neq 0$ y que g tiene un cero de orden 2 en a. Prueba que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)};a\right)=2\frac{f'(a)}{g''(a)}-\frac{2}{3}\frac{f(a)g'''(a)}{\big(g''(a)\big)^2}$$

228. Sea Ω un abierto en el plano, $a\in\Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en a de las funciones f y f'?

229. Sea f una función holomorfa en un entorno reducido de un punto a que no se anula en dicho entorno. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en a de las funciones f y $1/f$?

230. Sean f y g funciones holomorfas en un entorno reducido de un punto a. Estúdiese el comportamiento en a de las funciones $f+g$ y fg, supuesto conocido el de f y g.

231. La función f es holomorfa en un entorno del punto a y la función g tiene un polo de orden m en el punto $f(a)$. ¿Cómo se comporta en el punto a la función compuesta $g\circ f$? ¿Qué ocurre si g tiene una singularidad esencial en a?

232. Justifica que la suma de los residuos de una función racional, incluyendo el residuo en ∞, es igual a 0.

233. Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$ que tiene un polo de orden n en a. Prueba que para $|w|$ suficientemente grande la ecuación $f(z)=w$ tiene exactamente n soluciones.

234. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en $D(a,R)\setminus\{a\}$ que converge uniformemente en compactos de $D(a,R)\setminus\{a\}$ a una función f. Justifica la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si las funciones f_n tienen un polo en a también f tiene un polo en a.

b) Si las funciones f_n tienen una singularidad esencial en a también f tiene una singularidad esencial en a.

c) Si las funciones f_n son regulares en a también f es regular en a.

5.5. Teorema de los residuos

5.29 Teorema (Teorema de los residuos.). *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $S \subset \Omega$ un conjunto de puntos aislados en Ω, es decir, $S' \cap \Omega = \emptyset$ y sea f una función holomorfa en $\Omega \backslash S$. Si Γ es un ciclo en $\Omega \backslash \{S\}$ nulhomólogo respecto de Ω entonces*

(a) El conjunto $\{a \in S : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ es finito.

(b) $\boxed{\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a \in S} \operatorname{Res}(f(z), a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a)}$

Demostración. La demostración del teorema consiste en construir otro ciclo Σ formado por circunferencias centradas en los puntos singulares de f de forma que $\Gamma - \Sigma$ sea un ciclo nulhomólogo respecto de $\Omega \backslash S$ y en esta situación aplicar el teorema general de Cauchy.

En primer lugar veamos que la suma anterior es finita, es decir, $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0$ salvo para un número finito de puntos $a \in S$. Consideremos el abierto (unión de componentes conexas de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$) $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma^* : \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$. Por la hipótesis de que Γ es nulhomólogo respecto de Ω tenemos que $\Omega_0 \supseteq \mathbb{C} \backslash \Omega$. Sea

$$K = \mathbb{C} \backslash \Omega_0 = \Gamma^* \cup \{z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma^* : \operatorname{Ind}_\Gamma(z) \neq 0\}$$

Tenemos que $K \subset \Omega$ y K es cerrado (como complemento de un abierto) y acotado (porque no corta a la componente no acotada de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$) luego es compacto. Con lo cual $S \cap K$ es un conjunto finito, ya que en otro caso tendría un punto de acumulación que, por compacidad, debería quedarse en K lo que implicaría que $S' \cap \Omega \neq \emptyset$ en contradicción con la hipótesis.

Lo anterior nos asegura que el conjunto $\{a \in S : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\} = S \cap K$ es finito luego podemos enumerarlo $S \cap K = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ lo que justifica que la suma en el enunciado es una suma con un número finito de términos distintos de cero.

Centremos en cada uno de los puntos a_k un disco contenido en Ω y que no contenga a otros puntos de S. Para ello sea $\rho > 0$ de forma que $\overline{D}(a_k, \rho) \subseteq \Omega$ y $\overline{D}(a_k, \rho) \cap S = \{a_k\}$ para $k = 1, \dots, q$. Para cada k sea $m_k = \operatorname{Ind}_\Gamma(a_k)$ y $\gamma_k = m_k C(a_k, \rho)$. Consideremos el ciclo $\Sigma = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j$. A continuación probaremos que el ciclo $\Gamma - \Sigma$ es nulhomólogo respecto de $\Omega \backslash S$, esto es, para $z \notin \Omega \backslash S$ se verifica que $\operatorname{Ind}_{\Gamma-\Sigma}(z) = 0$. Distinguimos varios casos:

- Si $z \notin \Omega$ entonces $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ por hipótesis y además $z \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para $1 \leqslant k \leqslant q$ luego $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant q$, de donde $\operatorname{Ind}_\Sigma(z) = 0$. Concluimos que $\operatorname{Ind}_{\Gamma-\Sigma}(z) = 0$.

- $z \in S$ tenemos dos posibilidades:

  - $z \neq a_k$ para $1 \leqslant k \leqslant q$, en cuyo caso $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ y además $z \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para $1 \leqslant k \leqslant q$ por construcción, luego también $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z) = 0$ para cada k. Concluimos de nuevo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma-\Sigma}(z) = 0$.

  - $z = a_j$ para cierto j. Entonces $\operatorname{Ind}_\Gamma(a_j) = m_j$ y, por definición, $\operatorname{Ind}_{\gamma_j}(a_j) = m_j$ y $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}(a_j) = 0$ para $k \neq j$ ya que $a_j \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para $k \neq j$. Luego tenemos

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma-\Sigma}(z) = \operatorname{Ind}_\Gamma(z) - \operatorname{Ind}_\Sigma(z) = m_j - \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(a_j) = m_j - m_j = 0$$

Hemos justificado así que el ciclo $\Gamma - \Sigma$ es nulhomólogo respecto del abierto $\Omega \backslash S$. Aplicamos ahora el teorema general de Cauchy a dicho abierto para el ciclo $\Gamma - \Sigma$ y a la función $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash S)$ y obtenemos que

$$0 = \int_{\Gamma - \Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

despejando resulta

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{q} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{q} m_j \int_{C(a_j,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_j)\,\mathrm{Res}(f(z), a_j)$$

como queríamos probar. □

5.6. Aplicaciones del teorema de los residuos para calcular integrales

Los siguientes resultados se necesitan con frecuencia al aplicar el teorema de los residuos.

5.30 Lema. *Sea* $A_r = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| \leqslant r, \alpha \leqslant \arg(z-a) \leqslant \beta\}$ *donde* $(-\pi \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi)$. *Supongamos que* f *es continua en* A_r *y que* $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in A_r}} (z-a) f(z) = L \in \mathbb{C}$. *Para* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *y* $0 < \rho \leqslant r$ *pongamos* $\gamma_\rho(t) = a + \rho\, e^{it}$. *Entonces se verifica que*

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = i(\beta - \alpha) L$$

En particular si f *tiene un polo simple en* a *entonces*

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = i(\beta - \alpha)\,\mathrm{Res}(f(z), a)$$

Demostración. Tenemos que

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z - i(\beta - \alpha) L = \int_{\gamma_\rho} \left(f(z) - \frac{L}{z-a} \right) \mathrm{d}z$$

Y deducimos

$$\left| \int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z - i(\beta - \alpha) L \right| \leqslant \text{máx}\left\{ |f(z)(z-a) - L| : z \in \gamma_\rho^* \right\} (\beta - \alpha) \tag{5.10}$$

Como $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in A_r}} (z-a) f(z) = L \in \mathbb{C}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |z-a| < \delta$ se verifica que $|f(z)(z-a) - L| < \varepsilon/(\beta - \alpha)$. Como para $z \in \gamma_\rho^*$ es $|z-a| = \rho$ deducimos, de la desigualdad (5.10) que para $0 < \rho < \delta$ se verifica

$$\left| \int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z - i(\beta - \alpha) L \right| < \varepsilon$$

que es lo que se quería probar. □

5.31 Lema. *Sea f continua en un conjunto de la forma $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geqslant 0, |z| \geqslant K\}$ para algún $K \geqslant 0$ y tal que $\displaystyle\lim_{\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0}} f(z) = 0$. Sea γ_R la semicircunferencia de centro 0 y radio R contenida contenida en Ω, es decir, $R \geqslant K$ y $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, entonces para todo $\lambda > 0$ se verifica que*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{i\lambda z} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

Demostración. Tenemos que

$$\left| \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{i\lambda z} f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leqslant R \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda R \operatorname{sen} t} |f(R\mathrm{e}^{it})|\, \mathrm{d}t \leqslant \max\left\{ |f(R\mathrm{e}^{it})| : 0 \leqslant t \leqslant \pi \right\} R \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda R \operatorname{sen} t}\, \mathrm{d}t$$

Recordando que $\operatorname{sen} t \geqslant \frac{2}{\pi} t$ para $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, tenemos:

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda R \operatorname{sen} t}\, \mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\lambda R \operatorname{sen} t}\, \mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\lambda R \frac{2}{\pi} t}\, \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{\lambda R} \left[\mathrm{e}^{-\lambda R \frac{2}{\pi} t} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} < \frac{\pi}{\lambda R}$$

Por tanto

$$\left| \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{i\lambda z} f(z)\, \mathrm{d}z \right| < \lambda \max\left\{ |f(R\mathrm{e}^{it})| : 0 \leqslant t \leqslant \pi \right\}$$

Como $\displaystyle\lim_{\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0}} f(z) = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$, y podemos suponer también que $M > K$, tal que para todo $z\in\mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$ y $|z| \geqslant M$ se verifica que $|f(z)| < \varepsilon/\lambda$. Por tanto para todo $t \in [0, \pi]$ y para todo $R \geqslant M$ se tiene que $|f(R\mathrm{e}^{it})| < \varepsilon/\lambda$, lo que implica que

$$\left| \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{i\lambda z} f(z)\, \mathrm{d}z \right| < \varepsilon$$

□

5.32 Lema. *Sea f una función continua en un conjunto de la forma $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geqslant 0, |z| \geqslant K\}$ para algún $K \geqslant 0$, y supongamos que hay un $\alpha > 1$ tal que $\displaystyle\lim_{\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0}} |z|^{\alpha} |f(z)| = L \in \mathbb{R}_0^+$. Sea γ_R la semicircunferencia de centro 0 y radio R contenida en Ω, es decir, $R \geqslant K$ y $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, entonces se verifica que*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

Demostración. La hipótesis hecha implica que dado un número $N > L$, existe $M > 0$, y podemos suponer también que $M > K$, tal que para todo z con $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ y $|z| \geqslant M$ se verifica que $|f(z)| < N|z|^{-\alpha}$. Para todo $R \geqslant M$ tenemos que:

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \pi R \max\left\{ |f(R\,\mathrm{e}^{it})| : 0 \leqslant t \leqslant \pi \right\} < \pi R N R^{-\alpha} = \pi N R^{1-\alpha}$$

Y, como, $1-\alpha < 0$ se sigue que $\lim\limits_{R\to+\infty} R^{1-\alpha} = 0$. $\square$

5.6.1. Integrales del tipo $\int\limits_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t$

Suponemos que R es una función racional de dos variables continua en la circunferencia unidad. La idea para calcular esta integral por el método de residuos es convertirla en una integral sobre $C(0,1)$ de una función compleja que también va a ser racional. Para ello recordemos que

$$\operatorname{sen} t = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i} = \frac{\mathrm{e}^{2it} - 1}{2i\,\mathrm{e}^{it}} \qquad \cos t = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2it} + 1}{2\,\mathrm{e}^{it}}$$

Por tanto, se verifica que

$$\int_{C(0,1)} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz} \right) \frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t\,.$$

En consecuencia, si notamos $f(z) = R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz} \right) \frac{1}{iz}$. Tenemos que $f(z)$ es una función racional por lo que sus únicas posibles singularidades son polos. Para calcular la integral sólo nos interesan los polos que están dentro del disco unidad. Supongamos que estos son $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$. El teorema de los residuos nos dice que

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz} \right) \frac{1}{iz}, z_j \right)}$$

Ejercicios propuestos

Usando el teorema de los residuos calcula las siguientes integrales.

235. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5 + 4\cos t}\,\mathrm{d}t$

236. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, donde $a > 0$ y $b > 0$.

237. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

238. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\varphi}{5-4\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$

239. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{5-3\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

240. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5\cos^2 t+4}\,\mathrm{d}t$

241. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{15\operatorname{sen}^2 t+1}\,\mathrm{d}t$

242. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\operatorname{sen} x+b\cos x+c}\,\mathrm{d}x \quad (a,b,c\in\mathbb{R},\ a^2+b^2<c^2)$

243. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3\cos^2 t+2\operatorname{sen}^2 t}{9\cos^2 t+4\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t$

244. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x\,\mathrm{d}x$

Usando el teorema de los residuos prueba las siguientes igualdades.

245. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (0<b<a)$

246. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{a+b\cos t}\,dt = \frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right) \quad (0<b<a)$

247. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1-2a\cos\vartheta+a^2} = \frac{2\pi}{|a^2-1|} \quad |a|\neq 1$

248. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{(1+a\cos\vartheta)^2} = \frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}} \quad |a|<1$

249. $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2\vartheta}{1+a^2-2a\cos(\vartheta-\varphi)}\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1+a^2\cos 2\varphi}{2(1-a^2)} \quad (a\in\mathbb{R}, |a|<1)$

250. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{1+r^2-2r\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi r^n}{1-r^2} \quad |r|<1$

251. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t}{1+a^2-2a\cos 2t}\,dt = \pi\frac{a^2-a+1}{1-a} \quad (0<a<1)$

252. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{5+3\cos x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{\pi}{23^n} \quad (n\in\mathbb{N})$

253. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos t)^n\cos nt}{3+2\cos t}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}(3-\sqrt{5})^n \quad (n\in\mathbb{N})$

254. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt-\operatorname{sen} t)\exp(\cos t)\,dt = \frac{2\pi}{n!}$

5.6.2. Integrales impropias de Riemann

Recuerda que en la integral de Riemann se consideran funciones acotadas en intervalos acotados. Cuando alguna de estas condiciones no se cumple se definen las llamadas “integrales impropias de Riemann”. Conviene considerar varios casos.

A. Integral de una función continua no acotada en un intervalo acotado.

A1. Dada una función $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ continua con $\displaystyle\lim_{x\to b-}|f(x)|=+\infty$. Se define:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

A2. Dada una función $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ continua con $\displaystyle\lim_{x\to a+}|f(x)|=+\infty$. Se define:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

B. Integral de una función continua en un intervalo no acotado.

B1. Dada una función $f:]-\infty,b]\to\mathbb{R}$ continua se define:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

B2. Dada una función $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ continua se define:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Cuando los límites anteriores existen (y son números reales) se dice que la correspondiente integral impropia *es convergente* en el intervalo en cuestión.

Los siguientes casos se reducen a los ya considerados:

C. Dada una función continua $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ donde $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, se dice que la integral de f es convergente en $]a,b[$ si elegido $u\in]a,b[$ las integrales de f en $]a,u]$ y en $[u,b[$ son convergentes según las definiciones dadas en **A** y **B**, en cuyo caso se define

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^u f(x)\,dx+\int_u^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{s\to a\\ s>a}}\int_s^u f(x)\,dx+\lim_{\substack{t\to b\\ t<b}}\int_u^t f(x)\,dx \tag{5.11}$$

Puedes comprobar fácilmente que esta definición para nada depende del punto u.

D. Dada una función continua $f:[a,b]\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$ con $a<c<b$ y $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=+\infty$ se dice que la integral de f es convergente en $[a,b]$ si las integrales de f en $[a,c[$ y en $]c,b]$ son convergentes según las definiciones dadas en **A1** y **A2**, en cuyo caso se define

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

E. Dada una función continua $f:]a,b[\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$ donde $-\infty\leqslant a<c<b\leqslant+\infty$ y $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=+\infty$ se dice que la integral de f es convergente en $]a,b[$ si las integrales de f en $]a,c[$ y en $]c,b[$ son convergentes según **C**, en cuyo caso se define

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

En general, para estudiar la convergencia de la integral de una función f en un intervalo hay que expresar dicho intervalo como unión de intervalos en los que podamos aplicar las definiciones anteriores y la integral debe ser convergente en cada uno de estos intervalos. Por ejemplo, considera la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x(x-2)}\,dx$$

Dicha integral es convergente si son convergentes las integrales de dicha función en cada uno de los intervalos $]-\infty,-1]$, $[-1,0[$, $]0,1]$,$[1,2[$,$]2,3]$ y $[3,+\infty[$.

Un resultado importante respecto a las integrales impropias de Riemann es el siguiente. Se trata de la versión para integrales impropias del resultado para series que afirma que una serie absolutamente convergente es convergente.

5.33 Proposición. *Supongamos que la integral impropia de Riemann de la función valor absoluto $x\mapsto|f(x)|$ es convergente en un cierto intervalo, entonces se verifica que la integral impropia de Riemann de f también es convergente en dicho intervalo.*

Cuando la integral impropia de Riemann de la función valor absoluto $x\mapsto|f(x)|$ es convergente en un cierto intervalo, se dice que la integral impropia de Riemann de f es **absolutamente convergente** en dicho intervalo. Las integrales de Riemann absolutamente convergentes son, de hecho, integrales en el sentido de la teoría de la integral de Lebesgue.

Valor principal de Cauchy

Dada una función continua $f:]-\infty,+\infty[\to\mathbb{R}$, se define el valor principal de Cauchy de la integral de f en $]-\infty,+\infty[$ como el límite

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.12}$$

cuando dicho límite existe.

Observa que, como caso particular de la definición (5.11), la integral impropia de f en $]-\infty,+\infty[$ es convergente cuando son convergentes las integrales impropias de f en $]-\infty,0]$ y en $[0,+\infty[$ es decir, cuando existen los límites: lím $\lim\limits_{s\to-\infty}\int_{s}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$, en cuyo caso $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ se define como la suma de ambos. Como

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Se sigue que si la integral impropia de f en $]-\infty,+\infty[$ es convergente su valor coincide con su valor principal de Cauchy.

Pero puede ocurrir que exista el valor principal de Cauchy de la integral de f en $]-\infty,+\infty[$ aunque la integral impropia de f en $]-\infty,+\infty[$ no sea convergente. Por ejemplo

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} x\,\mathrm{d}x = 0$$

pero la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ no es convergente.

Dada una función continua $f:[a,b]\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$ donde $a<c<b$, se define el valor principal de Cauchy de la integral de f en $[a,b]$ como el límite:

$$V.P.\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

cuando dicho límite existe.

Al igual que antes, si la integral de f es convergente en $[a,b]$ su valor coincide con su valor principal de Cauchy, pero puede ocurrir que el valor principal exista aunque la integral no sea convergente. Por ejemplo

$$V.P.\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x\right)=0$$

pero la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ no es convergente.

Dada una función continua $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, se define el valor principal de Cauchy de la integral de f en $]a,b[$ como el límite:

$$V.P. \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

cuando dicho límite existe.

Dada una función continua $f :]-\infty,+\infty[\setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, supongamos que existen las integrales impropias de f en $]-\infty,a]$ y en $[b,+\infty[$ para $a < c < b$. Se define el valor principal de Cauchy de la integral de f en $]-\infty,+\infty[$ como el límite:

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-\infty}^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

cuando dicho límite existe.

En general, el valor principal de Cauchy de la integral de una función f en un intervalo se obtiene expresando dicho intervalo como unión de intervalos en los que podamos aplicar las definiciones anteriores de valor principal de Cauchy. Por ejemplo:

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x + \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x \right)$$

Puedes comprobar calculando una primitiva que el límite anterior vale 0 aunque la integral impropia no es convergente. Observa que no se exige que exista cada límite por separado sino la suma de todos. Es decir, el valor principal de Cauchy en un intervalo no es la suma de los valores principales de Cauchy en los subintervalos en que lo hemos dividido. En el ejemplo anterior no existe el valor principal de Cauchy en ninguno de los subintervalos $]-\infty,0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$ (el límite correspondiente es $\pm\infty$).

Sea $f : I \to \mathbb{C}$ una función compleja continua en un intervalo I. Supongamos que las funciones $\operatorname{Re}(f)$ o $\operatorname{Im}(f)$ y el intervalo I están en algunas de las situaciones antes consideradas. Se dice que la integral impropia de Riemann de f es convergente en I si son convergentes las integrales impropias de las funciones $\operatorname{Re}(f)$ y $\operatorname{Im}(f)$ en I en cuyo caso la integral impropia de f en I se define como el número complejo cuya parte real es la integral impropia de Riemann de $\operatorname{Re}(f)$ en I y cuya parte imaginaria es la integral impropia de Riemann de $\operatorname{Im}(f)$ en I. El valor principal de Cauchy de f en I se define como el número complejo cuya parte real es el valor principal de Cauchy de $\operatorname{Re}(f)$ en I y cuya parte imaginaria es el valor principal de Cauchy de $\operatorname{Im}(f)$ en I.

5.6.3. Integrales del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P) + 2$.

Se verifica que:

3a. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O bien se verifica que:

3b. $Q(x)$ tiene ceros simples reales.

Entonces:

A) Si se dan las hipótesis **1**, **2** y **3a** se verifica que la integral es absolutamente convergente y si z_k $(k = 1, 2, \dots, q)$ son los ceros de Q que están en el semiplano superior se tiene que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)} \tag{5.13}$$

B) Si se dan las hipótesis **1**, **2** y **3b** se verifica que la integral no es convergente y si z_k $(k = 1, 2, \dots, q)$ son los ceros de Q que están en el semiplano superior y $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ son los ceros de Q que están en el eje real, se verifica que

$$\boxed{V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, x_j\right)} \tag{5.14}$$

El valor principal de Cauchy está definido como el límite

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{x_1 - \varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \sum_{j=1}^{p-1} \int_{x_j + \varepsilon}^{x_{j+1} - \varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \int_{x_p + \varepsilon}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \right)$$

Demostración. Las afirmaciones hechas sobre la convergencia de las integrales no las vamos a probar. Probaremos las igualdades (5.13) y (5.14). Es suficiente probar la segunda porque su demostración puede modificarse fácilmente para probar la primera.

Consideremos, para no complicar innecesariamente la notación, que Q tiene dos ceros simples reales a y b con $a < b$. Vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$. Sea $\Gamma(R, \varepsilon)$ el camino (ver figura 5.3)

$$\Gamma(R, \varepsilon) = [-R, a - \varepsilon] \dot{-} \gamma(a, \varepsilon) \dot{+} [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \dot{-} \gamma(b, \varepsilon) \dot{+} [b + \varepsilon, R] \dot{+} \gamma(R)$$

donde $\gamma(a, \varepsilon)$ y $\gamma(b, \varepsilon)$ son las semicircunferencias centradas en a y b de radio ε y $\gamma(R)$ es la circunferencia de centro 0 y radio R todas ellas recorridas en sentido anti horario. Se supone que tomamos R suficientemente grande y ε suficientemente pequeño para que todos los ceros

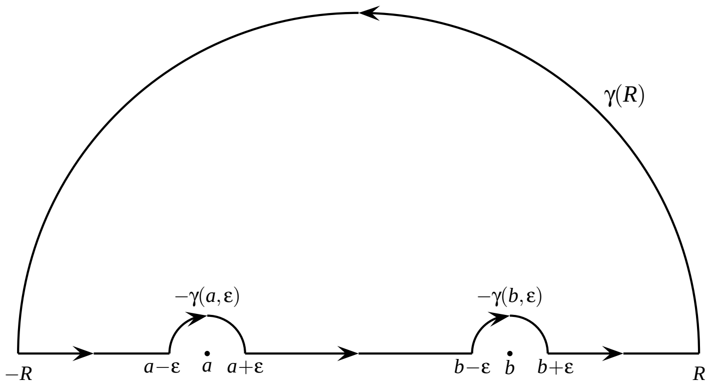


Figura 5.3. El camino $\Gamma(R,\varepsilon)$

del polinomio Q que están en el semiplano superior queden en el interior de $\Gamma(R,\varepsilon)$ de modo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma(R,\varepsilon)}(z_j) = 1$ para $1 \leqslant j \leqslant q$.

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

Observa que en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de R y ε. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma(a,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x - \\ &- \int_{\gamma(b,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{b+\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma(R)} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Y, por tanto:

$$\begin{aligned}&2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) + \int_{\gamma(a,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma(b,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = \\ &= \int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma(R)} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (5.15)\end{aligned}$$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q podemos aplicar el lema 5.32 con $\alpha = 2$ por lo que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma(R)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Y por el lema 5.30 tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(a,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = i\pi \operatorname{Res}(f(z), a), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(b,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = i\pi \operatorname{Res}(f(z), b)$$

Además, por las hipótesis hechas se verifica que:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{b+\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{b+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Es decir, dichas integrales convergen. Por tanto, tomando límite en (5.15) para $R \to +\infty$ obtenemos:

$$2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) + \int_{\gamma(a,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma(b,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z =$$
$$= \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Tomando ahora límite para $\varepsilon \to 0$, concluimos que:

$$2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) + i\pi\left(\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, a\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, b\right)\right) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{b+\varepsilon}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x\right)$$

Pero el lado de la derecha de esta igualdad es, por definición, el valor principal de Cauchy. Hemos probado así que dicho valor principal existe y viene dado por:

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) + i\pi\left(\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, a\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, b\right)\right)$$

Que es lo que queríamos probar. □

5.34 Ejemplo. Queremos calcular la integral

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x$$

donde suponemos que $a > 0$ y $b > 0$ son distintos. La función que integramos tiene dos polos simples en el semiplano superior en los puntos ia, ib. Según acabamos de ver

$$\mathrm{I} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ia\right) + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ib\right)$$

Tenemos que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ia\right) = \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{1}{(z-ia)(z+ia)(z^2+b^2)}$$
$$= \lim_{z\to ia} \frac{1}{(z+ia)(z^2+b^2)} = \frac{1}{2ia(b^2-a^2)}$$

Análogamente

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ib\right) = \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}$$

Luego

$$\mathrm{I} = 2\pi i\left(\frac{1}{2ia(b^2-a^2)} + \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}\right) = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

♦

Ejercicios propuestos

Calcula por el método de residuos las siguientes integrales.

255. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$

256. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} \quad (a,b,c\in\mathbb{R},\ b^2<4ac)$

257. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$

258. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$

259. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$

260. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$

261. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$

Calcula el valor principal de Cauchy de las siguientes integrales por el método de residuos.

262. $\displaystyle V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x$

263. $\displaystyle V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$

264. $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

5.6.4. Integrales del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes y $\lambda > 0$.

2. $\mathrm{grado}(Q) \geqslant \mathrm{grado}(P) + 1$.

Se verifica que:

3a. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O bien se verifica que:

3b. $Q(x)$ tiene ceros simples reales.

Entonces:

A) Si se dan las hipótesis **1**, **2** y **3a** se verifica que la integral es convergente y si z_k ($k = 1, 2, \ldots, q$) son los ceros de Q que están en el semiplano superior se se verifica que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{e}^{i\lambda z}, z_j\right)} \tag{5.16}$$

En particular, si los polinomios P y Q tienen coeficientes reales se verifica que:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{e}^{i\lambda z}, z_j\right)\right)} \tag{5.17}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{e}^{i\lambda z}, z_j\right)\right)} \tag{5.18}$$

B) Si se dan las hipótesis **1**, **2** y **3b** se verifica que la integral no es convergente y si z_k ($k = 1, 2, \ldots, q$) son los ceros de Q que están en el semiplano superior y $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ son los ceros de Q que están en el eje real, se verifica que

$$\boxed{V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{e}^{i\lambda z}, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{e}^{i\lambda z}, x_j\right)} \tag{5.19}$$

En particular, si los polinomios P y Q tienen coeficientes reales se verifica que:

$$\boxed{V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\lambda x) dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, x_j\right)\right)} \tag{5.20}$$

$$\boxed{V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x) dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, x_j\right)\right)} \tag{5.21}$$

En el caso de que los ceros reales de Q coincidan con ceros de $\cos(\lambda x)$, la integral en (5.20) es convergente. En el caso de que los ceros reales de Q coincidan con ceros de $\operatorname{sen}(\lambda x)$, la integral en (5.21) es convergente.

Demostración. Las afirmaciones hechas sobre la convergencia de las integrales no las vamos a probar. Probaremos las igualdades (5.16) y (5.19). Es suficiente probar la segunda porque su demostración puede modificarse fácilmente para probar la primera.

Consideremos, para no complicar innecesariamente la notación, que Q tiene dos ceros simples reales a y b con $a < b$. Vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}$$

en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$. Sea $\Gamma(R,\varepsilon)$ el camino (ver figura 5.4)

$$\Gamma(R,\varepsilon) = [-R, a-\varepsilon] \dot{-} \gamma(a,\varepsilon) \dot{+} [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \dot{-} \gamma(b,\varepsilon) \dot{+} [b+\varepsilon, R] \dot{+} \gamma(R)$$

donde $\gamma(a,\varepsilon)$ y $\gamma(b,\varepsilon)$ son las semicircunferencias centradas en a y b de radio ε y $\gamma(R)$ es la circunferencia de centro 0 y radio R todas ellas recorridas en sentido anti horario. Se supone que tomamos R suficientemente grande y ε suficientemente pequeño para que todos los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior queden en el interior de $\Gamma(R,\varepsilon)$ de modo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma(R,\varepsilon)}(z_j) = 1$ para $1 \leqslant j \leqslant q$.

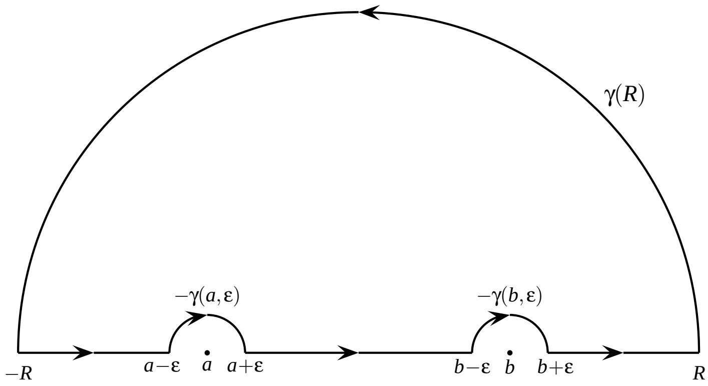


Figura 5.4. El camino $\Gamma(R,\varepsilon)$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}(f(z), z_j)$$

Observa que en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de R y ε. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma(a,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x - \\ &- \int_{\gamma(b,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{b+\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma(R)} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Y, por tanto:

$$\begin{aligned}&2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}(f(z),z_j) + \int_{\gamma(a,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma(b,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = \\ &= \int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma(R)} f(z)\,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{5.22}$$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q, se tiene que $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{P(z)}{Q(z)} = 0$, por lo que podemos aplicar el lema 5.31 para obtener que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma(R)} \frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{e}^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z = 0$$

Y por el lema 5.30 tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(a,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = i\pi \operatorname{Res}(f(z),a), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma(b,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = i\pi \operatorname{Res}(f(z),b)$$

Además, por las hipótesis hechas se verifica que:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{b+\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{b+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Es decir, dichas integrales convergen. Por tanto, tomando límite en (5.22) para $R \to +\infty$ obtenemos:

$$\begin{aligned}&2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}(f(z),z_j) + \int_{\gamma(a,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma(b,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Tomando ahora límite para $\varepsilon \to 0$, concluimos que:

$$\begin{aligned}&2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}(f(z),z_j) + i\pi(\operatorname{Res}(f(z),a) + \operatorname{Res}(f(z),b)) = \\ &\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right)\end{aligned}$$

Pero el lado de la derecha de esta igualdad es, por definición, el valor principal de Cauchy. Hemos probado así que dicho valor principal existe y viene dado por:

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}(f(z), z_j) + i\pi(\operatorname{Res}(f(z), a) + \operatorname{Res}(f(z), b))$$

que es lo que queríamos probar. □

5.35 Ejemplo. Queremos calcular la integral $\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{a^2 + x^2}\, dx$. Suponemos que $a > 0$ y $\lambda > 0$.

Como

$$\mathrm{I} = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2 + x^2}\, dx \right)$$

Calcularemos $\mathrm{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2 + x^2}\, dx$. Según acabamos de ver, teniendo en cuenta que la función $\frac{1}{a^2 + z^2}$ solamente tiene un polo simple en el semiplano superior en el punto ai, se sigue que

$$\frac{1}{2\pi i}\mathrm{J} = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\lambda z}}{a^2 + z^2}, ai \right) = \lim_{z\to ai} (z - ai) \frac{e^{i\lambda z}}{a^2 + z^2} = \lim_{z\to ai} (z - ai) \frac{e^{i\lambda z}}{(z - ai)(z + ai)} = \frac{1}{2i} \frac{e^{-\lambda a}}{a}$$

Luego $\mathrm{I} = \pi \frac{e^{-\lambda a}}{a}$. ♦

5.36 Ejemplo.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \operatorname{Im}\left(\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) \right) = \operatorname{Im}\left(\pi i \lim_{z\to 0} z \frac{e^{iz}}{z} \right) = \pi$$

♦

Ejercicios propuestos

Utilizando el método de residuos calcula las integrales.

265. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} 3x}{x^2 + 9}\, dx$

266. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 - 2x + 2}\, dx$

267. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$

268. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$

269. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

270. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Utilizando el método de residuos prueba las siguientes igualdades.

271. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)\,\mathrm{e}^{-at} \quad (a>0, t>0)$

272. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-a}}{a} - \frac{\mathrm{e}^{-b}}{b}\right) \quad (a \neq b, a>0, b>0)$

Usando el método de residuos calcula las integrales siguientes.

273. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{x(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x \quad (\lambda>0, a>0)$

274. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x-\pi/2)(x-\pi)}\,\mathrm{d}x$

275. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x-\pi/2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

276. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$

277. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x \quad (a>0, b^2-4ac<0)$

278. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2-\pi^2)}\,\mathrm{d}x$

Calcula el valor principal de Cauchy de las siguientes integrales por el método de residuos.

279. $\displaystyle V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x-1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$

280. $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

281. $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$

282. $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

5.6.5. Integrales del tipo $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P)+2$.

3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \geqslant a$.

En estas condiciones si z_k $(k=1,2,\dots,q)$ son los ceros de Q se verifica que

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log_0(z-a), z_j\right)} \tag{5.23}$$

donde $\log_0$ es el logaritmo de z definido por

$$\boxed{\log_0(z) = \log|z| + i\vartheta(z) \qquad \vartheta(z) \in \operatorname{Arg}(z) \cap [0, 2\pi[}$$

Demostración. Vamos a considerar dos ramas del logaritmo de $z-a$ que coincidan en el eje real a la izquierda del punto a. Concretamente, consideremos las funciones

$$F_1(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\log_{\frac{-\pi}{2}}(z-a), \qquad F_2(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\log_{\frac{\pi}{2}}(z-a)$$

Recuerda que $\log_{\frac{-\pi}{2}}(z-a)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*\backslash L_1$ donde L_1 es la semirrecta $L_1 = \{a - i\rho : \rho > 0\}$. Análogamente $\log_{\frac{\pi}{2}}(z-a)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*\backslash L_2$ donde L_2 es la semirrecta $L_2 = \{a + i\rho : \rho > 0\}$. Además F_1 y F_2 coinciden en el semiplano a la izquierda de a, $H_1 = \{x+iy : x < a\}$ y se diferencian en $2\pi i$ en el semiplano a la derecha de a, $H_2 = \{x+iy : x > a\}$.

Como las hipótesis hechas no excluyen la posibilidad de que $Q(x)$ se anule en puntos del eje real a la izquierda de a, para no complicar innecesariamente la notación, supondremos que

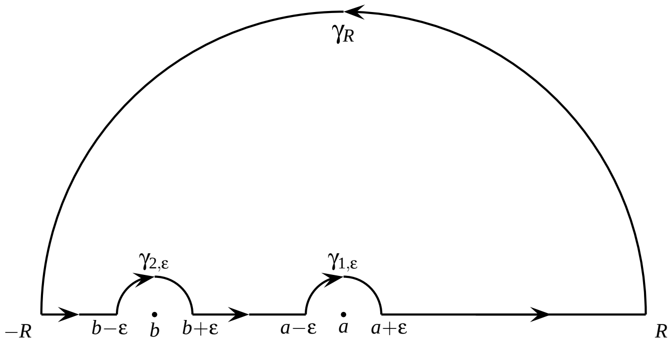


Figura 5.5. El camino $\Gamma_1(R,\varepsilon)$

hay un único punto $b \in \mathbb{R}$, $b < a$ tal que $Q(b) = 0$. Se trata ahora de aplicar el teorema de los residuos a las funciones F_1 y F_2 en sendos caminos cerrados $\Gamma_1(R,\varepsilon)$ y $\Gamma_2(R,\varepsilon)$.

Se supone que tomamos $R > 0$ suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que todos los ceros de Q que están en el semiplano superior queden dentro de $\Gamma_1(R,\varepsilon)$. Por el teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} F_1(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}(F_1(z), z) \tag{5.24}$$

Se supone que tomamos $R > 0$ suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que todos los ceros de Q que están en el semiplano inferior queden dentro de $\Gamma_2(R,\varepsilon)$. Por el teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{\Gamma_2} F_2(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z < 0} \operatorname{Res}(F_2(z), z) \tag{5.25}$$

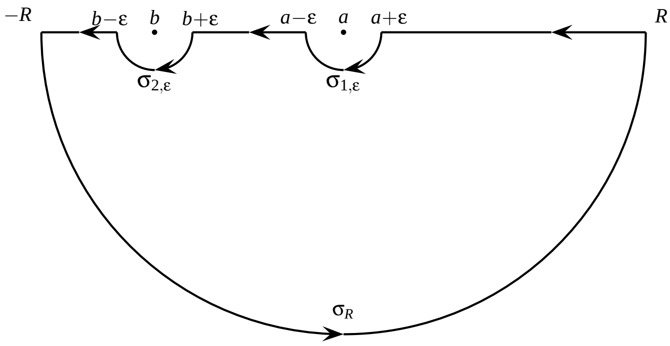


Figura 5.6. El camino $\Gamma_2(R,\varepsilon)$

Teniendo en cuenta que F_1 y F_2 coinciden en H_1, las integrales de ambas funciones en los segmentos $[-R, b-\varepsilon]$, $[b+\varepsilon, a-\varepsilon]$ son iguales y como se recorren en sentidos opuestos en ambos caminos, al sumar las integrales cancelan. Como $\gamma_{2,\varepsilon} \dot{+} \sigma_{2,\varepsilon} = -C(b,\varepsilon)$, al sumar las correspondientes integrales (sin olvidar que ambas funciones coinciden en H_1), obtenemos como resultado $-2\pi i \operatorname{Res}(F_1(z), b)$. Resulta así que:

$$\int_{\Gamma_1(R,\varepsilon)} F_1(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2(R,\varepsilon)} F_2(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi i \operatorname{Res}(F_1(z), b) + \int_{\gamma_{1,\varepsilon}} F_1(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} F_1(z)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{\sigma_{1,\varepsilon}} F_2(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\sigma_R} F_2(z)\,\mathrm{d}z + \int_{a+\varepsilon}^{R} (F_1(x) - F_2(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}(F_1(z), z) + 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z < 0} \operatorname{Res}(F_2(z), z)$$

Es fácil comprobar que $\displaystyle\lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z > 0}} (z-a)F_1(z) = \lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z < 0}} (z-a)F_2(z) = 0$, por lo que en virtud del lema 5.30 tenemos que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_{1,\varepsilon}} F_1(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\sigma_{1,\varepsilon}} F_2(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Por la hipótesis **2** se verifica que para $1 < \alpha < 2$ es $\displaystyle\lim_{\substack{z \to \infty \\ \operatorname{Im} z > 0}} |z|^{\alpha} |F_1(z)| = \lim_{\substack{z \to \infty \\ \operatorname{Im} z < 0}} |z|^{\alpha} |F_2(z)| = 0$, por lo que en virtud del lema 5.32 tenemos que:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} F_1(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} F_2(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Además, como para $x > a$ es $\log_{\frac{\pi}{2}}(x-a) = \log(x-a) + 2\pi i$ y $\log_{\frac{-\pi}{2}}(x-a) = \log(x-a)$. Se tiene que para $x > a$ es

$$F_1(x) - F_2(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \log(x-a) - \frac{P(x)}{Q(x)} (\log(x-a) + 2\pi i) = -2\pi i \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Por tanto

$$\lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{a+\varepsilon}^{R} (F_1(x) - F_2(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{a+\varepsilon}^{R} -2\pi i \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = -2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Deducimos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{Res}(F_1(z), b) - \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}(F_1(z), z) - \sum_{\operatorname{Im} z < 0} \operatorname{Res}(F_2(z), z) \tag{5.26}$$

Naturalmente, si hubiera más ceros reales de Q a la izquierda de a habría que tener en cuenta el residuo de F_1 en todos ellos, es decir, en la igualdad anterior habría que sustituir $\operatorname{Res}(F_1(z), b)$ por $\displaystyle\sum_{\operatorname{Im} z = 0} \operatorname{Res}(F_1(z), z)$.

Puesto que $\log_{-\frac{\pi}{2}}(z-a)$ coincide con $\log_0(z-a)$ en el semiplano superior y $\log_{\frac{\pi}{2}}(z-a)$ coincide con $\log_0(z-a)$ en el semiplano inferior. Y los tres coinciden en el semiplano a la izquierda de a. Tenemos que

$$\sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}(F_1(z),z) = \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log_0(z-a),z\right)$$
$$\sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}(F_2(z),z) = \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log_0(z-a),z\right)$$
$$\sum_{\operatorname{Im} z=0} \operatorname{Res}(F_1(z),z) = \sum_{\operatorname{Im} z=0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log_0(z-a),z\right)$$

Y la suma de estas tres expresiones es igual a

$$\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log_0(z-a),z_j\right)$$

donde z_k $(k=1,2,\ldots,q)$ son todos los ceros de Q. Por tanto, la igualdad (5.26) es la misma igualdad (5.23). □

Ejercicios propuestos

Usando el método de residuos calcula las siguientes integrales.

283. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+a^3} \quad (a>0)$

284. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)(x+1)}$

285. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(8x^2+3)(3x^2+2)}$

286. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \quad (a>0, b>0)$

287. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x\cos\lambda+1)^2} \quad (0<\lambda<\pi)$

5.6.6. Integrales del tipo $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes y λ no es un número entero.

2. $\lambda > -1$ y $\operatorname{grado}(Q) > \operatorname{grado}(P) + \lambda + 1$.

3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \geqslant 0$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^{\lambda}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{2i\pi\lambda}}\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\exp(\lambda\log_0 z), z_j\right)} \tag{5.27}$$

donde $\log_0$ es el logaritmo de z definido por

$$\boxed{\log_0(z) = \log|z| + i\vartheta(z) \qquad \vartheta(z) \in \operatorname{Arg}(z)\cap[0,2\pi[}$$

Demostración. Vamos a considerar dos ramas del logaritmo de z que coincidan en el eje real negativo. Concretamente, consideremos las funciones

$$F_1(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\exp(\log_{\frac{-\pi}{2}}(z)), \qquad F_2(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\exp(\log_{\frac{\pi}{2}}(z)$$

Recuerda que $\log_{\frac{-\pi}{2}}(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*\backslash i\mathbb{R}^-$ y $\log_{\frac{\pi}{2}}(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*\backslash i\mathbb{R}^+$. Además F_1 y F_2 coinciden en el semiplano de la izquierda, $H_1 = \{x+iy : x<0\}$, y se diferencian en $2\pi i$ en el semiplano de la derecha $H_2 = \{x+iy : x>0\}$.

Se trata ahora de aplicar el teorema de los residuos a las funciones F_1 y F_2 en sendos caminos cerrados $\Gamma_1(R,\varepsilon)$ y $\Gamma_2(R,\varepsilon)$.

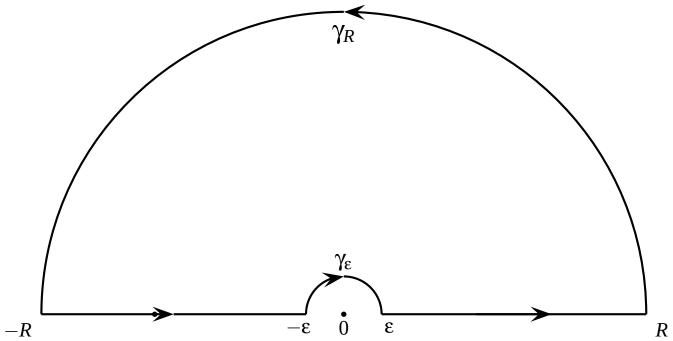


Figura 5.7. El camino $\Gamma_1(R,\varepsilon)$

Se supone que tomamos $R>0$ suficientemente grande y $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño para que todos los ceros de Q que están en el semiplano superior queden dentro de $\Gamma_1(R,\varepsilon)$. Por el teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} F_1(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{Res}(F_1(z),z) \tag{5.28}$$

Se supone que tomamos $R>0$ suficientemente grande y $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño para que todos los ceros de Q que están en el semiplano inferior queden dentro de $\Gamma_2(R,\varepsilon)$. Por el teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{\Gamma_2} F_2(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}(F_2(z),z) \tag{5.29}$$

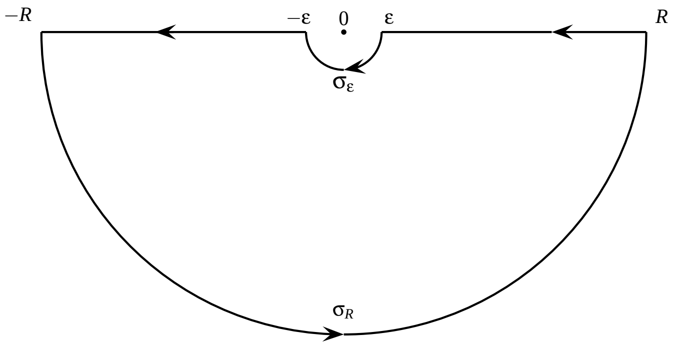


Figura 5.8. El camino $\Gamma_2(R,\varepsilon)$

Teniendo en cuenta que F_1 y F_2 coinciden en H_1, las integrales de ambas funciones en los segmentos $[-R,-\varepsilon]$ son iguales y como se recorren en sentidos opuestos en ambos caminos, al sumar las integrales cancelan. Resulta así que:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1(R,\varepsilon)} F_1(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2(R,\varepsilon)} F_2(z)\,\mathrm{d}z &= -\int_{\gamma_\varepsilon} F_1(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} F_1(z)\,\mathrm{d}z + \\ &+ \int_{\sigma_\varepsilon} F_2(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\sigma_R} F_2(z)\,\mathrm{d}z + \int_\varepsilon^R (F_1(x)-F_2(x))\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}(F_1(z),z) + 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}(F_2(z),z)\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ \operatorname{Im} z>0}} zF_1(z) = \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ \operatorname{Im} z<0}} zF_2(z) = 0$, por lo que en virtud del lema 5.30 tenemos que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} F_1(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\sigma_\varepsilon} F_2(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Por la hipótesis **2** se verifica que para $1<\alpha$ tal que grado$Q>$grado$P+\lambda+\alpha$ es $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \operatorname{Im} z>0}} |z|^\alpha |F_1(z)| = \lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \operatorname{Im} z<0}} |z|^\alpha |F_2(z)| = 0$, por lo que en virtud del lema 5.32 tenemos que:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} F_1(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} F_2(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Además como para $x>0$ es $\log_{\frac{\pi}{2}}(x) = \log x + 2\pi i$ y $\log_{\frac{-\pi}{2}}(x) = \log x$. Se tiene que para $x>0$ es

$$F_1(x) - F_2(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\exp(\lambda \log x) - \frac{P(x)}{Q(x)}\exp(\lambda(\log x + 2\pi i)) = x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}(1-\mathrm{e}^{2i\pi\lambda})$$

Por tanto

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^R (F_1(x)-F_2(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^R (1-\mathrm{e}^{2i\pi\lambda}) x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = (1-\mathrm{e}^{2i\pi\lambda}) \int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Deducimos:

$$(1-\mathrm{e}^{2i\pi\lambda}) \int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}(F_1(z),z) + 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}(F_2(z),z) \tag{5.30}$$

Puesto que $\log_{-\frac{\pi}{2}}(z)$ coincide con $\log_0(z)$ en el semiplano superior y $\log_{\frac{\pi}{2}}(z)$ coincide con $\log_0(z)$ en el semiplano inferior. Tenemos que

$$\sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}(F_1(z),z) = \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\exp(\log_0(z)),z\right)$$
$$\sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}(F_2(z),z) = \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\exp(\log_0(z)),z\right)$$

Y la suma de estas dos expresiones es igual a

$$\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\exp(\log_0(z)),z_j\right)$$

donde z_k $(k=1,2,\dots,q)$ son todos los ceros de Q. Por tanto, la igualdad (5.30) es, salvo dividir por $1-\mathrm{e}^{2i\pi\lambda}$, la misma igualdad (5.27). □

5.37 Ejemplo. Calculemos la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda}}{x+1}\,\mathrm{d}x$ donde $0<\lambda<1$. Tenemos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda}}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{-2i\pi\lambda}} \operatorname{Res}\left(\frac{\exp(-\lambda\log_0 z)}{z+1},-1\right) = \frac{2\pi i\,\mathrm{e}^{-i\pi\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-2i\pi\lambda}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\lambda\pi)}$$

♦

5.6.7. Integrales del tipo $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)} (\log x)^m \,\mathrm{d}x$

Se suponen las mismas hipótesis del caso precedente. Estas integrales se obtienen de las anteriores derivando respecto al parámetro λ.

5.38 Ejemplo.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda}}{x+1}\log x\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda}}{x+1}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\lambda\pi)}\right) = \frac{\pi^2\cos(\lambda\pi)}{\operatorname{sen}^2(\lambda\pi)}$$

♦

Ejercicios propuestos

Usando el método de residuos calcula las integrales siguientes.

288. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda}}{ax+b}\,dx \quad (0<\lambda<1, a>0, b>0)$

289. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda \log x}}{ax+b}\,dx \quad (0<\lambda<1, a>0, b>0)$

290. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda}}{(x+a)^2}\,dx \quad (-1<\lambda<1, a>0)$

291. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+a)^2}\,dx \quad (a>0)$

292. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda}}{x^2+2ax\cos\vartheta+a^2}\,dx \quad (-1<\lambda<1, a>0)$

293. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda}}{x^2+a}\,dx \quad (-1<\lambda<1, a>0)$

294. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda}}{x^2+x+1}\,dx \quad (-1<\lambda<1)$

5.6.8. Integrales del tipo $\displaystyle\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P)+1$.

3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\boxed{\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log\frac{z-b}{z-a}, z_j\right)}$$

Para ello, teniendo en cuenta que la función $\log\dfrac{z-b}{z-a}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash[a,b]$, vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\log\frac{z-b}{z-a}$$

en el abierto $\Omega=\mathbb{C}\backslash[a,b]$. Consideramos un ciclo formado por dos poligonales (rectángulos) recorridos en sentidos opuestos (ver figura 5.9).

$$\begin{aligned}\Gamma(R,\varepsilon)=&[b+R+iR,a-R+iR,a-R-iR,b+R-iR,b+R+iR]\dot{-}\\ &\dot{-}\,[b+\varepsilon+i\varepsilon,a-\varepsilon+i\varepsilon,a-\varepsilon-i\varepsilon,b+\varepsilon-i\varepsilon,b+\varepsilon+i\varepsilon]\end{aligned}$$

donde R, ε son números positivos que tomamos de forma que todos los ceros del polinomio Q queden en el interior del rectángulo grande y fuera del pequeño de modo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma(R,\varepsilon)}(z_j)=1$ para $1\leqslant j\leqslant q$.

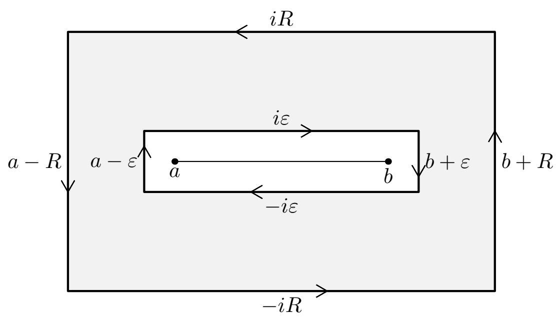


Figura 5.9. $\Gamma(R,\varepsilon)$

Observa que el ciclo $\Gamma(R,\varepsilon)$ es nulhomólogo respecto de $\Omega=\mathbb{C}\backslash[a,b]$. El teorema de los residuos nos dice que

$$\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)}\frac{P(z)}{Q(z)}\log\frac{z-b}{z-a}\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log\frac{z-b}{z-a},z_j\right)$$

Como en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de R y ε, será suficiente para nuestros propósitos probar que cuando $R\to+\infty$ y $\varepsilon\to 0$ se verifica que

$$\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)}\frac{P(z)}{Q(z)}\log\frac{z-b}{z-a}\,\mathrm{d}z\longrightarrow 2\pi i\int_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q se tiene que existen números $K>0$ y $M>0$ tales que

$$|z|\geqslant K\Rightarrow\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\leqslant\frac{M}{|z|}\tag{5.31}$$

En lo que sigue suponemos que $R>K$.

Como la función $Q(z)$ no se anula en $[a,b]^*$ podemos fijar un número $0<\rho<1$ tal que en el rectángulo cerrado

$$\mathcal{R}=\{x+iy\in\mathbb{C}: a-\rho\leqslant x\leqslant b+\rho,\ -\rho\leqslant y\leqslant\rho\}$$

la función $Q(z)$ no se anule. Por continuidad y compacidad, la función $\dfrac{|P(z)|}{|Q(z)|}$ alcanzará un valor máximo en $\mathcal{R}$. Sea

$$L = \text{máx}\left\{\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} : z \in \mathcal{R}\right\} \tag{5.32}$$

En lo que sigue suponemos que $\varepsilon < \rho/2$.

Probaremos en primer lugar que las integrales sobre los lados verticales de los rectángulos tienden a 0. Consideremos para ello un segmento de la forma

$$J(\lambda) = [b+\lambda-i\lambda, b+\lambda+i\lambda]^* \qquad (\lambda > 0)$$

Usando la acotación básica para integrales, tenemos que

$$\left|\int\limits_{[b+\lambda-i\lambda,b+\lambda+i\lambda]} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\lambda\,\text{máx}\left\{\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\left|\log\frac{z-b}{z-a}\right| : z\in J(\lambda)\right\} \tag{5.33}$$

Naturalmente

$$\log\frac{z-b}{z-a} = \log\left|\frac{z-b}{z-a}\right| + i\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

por lo que

$$\left|\log\frac{z-b}{z-a}\right| \leqslant \left|\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right|\right| + \left|\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)\right|$$

Vamos a calcular el máximo de la función $\left|\log\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right|\right|$ cuando $z\in J(\lambda)$. Es evidente que para $z\in J(\lambda)$ se tiene que $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| < 1$, por lo que $\left|\log\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right|\right| = -\log\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right|$. En consecuencia

$$\text{máx}\left\{\left|\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right|\right| : z\in J(\lambda)\right\} = -\,\text{mín}\left\{\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right| : z\in J(\lambda)\right\}$$

Teniendo en cuenta que el logaritmo es estrictamente creciente, será suficiente calcular el mínimo de $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right|$ en $J(\lambda)$. Los puntos de $J(\lambda)$ son de la forma $b+\lambda+it$ donde $|t| \leqslant \lambda$. Tenemos que

$$\left|\frac{b+\lambda+it-b}{b+\lambda+it-a}\right| = \frac{|\lambda+it|}{|b-a+\lambda+it|} = \sqrt{\frac{\lambda^2+t^2}{(b-a+\lambda)^2+t^2}}$$

Para calcular el mínimo podemos prescindir de la raíz. Hemos reducido nuestro problema a calcular el mínimo de $\dfrac{\lambda^2+t^2}{(b-a+\lambda)^2+t^2}$ en $[-\lambda,\lambda]$. Derivando se comprueba enseguida que el mínimo valor se alcanza para $t=0$. Por tanto

$$\text{máx}\left\{\left|\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right|\right| : z\in J(\lambda)\right\} = -\frac{1}{2}\log\frac{\lambda^2}{(b-a+\lambda)^2} \tag{5.34}$$

Acotamos ahora $\left|\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)\right|$ en $J(\lambda)$. Interesa acotar de forma diferente según que sea $\lambda=\varepsilon$ o $\lambda=R$.

Como el número complejo

$$\frac{b+\lambda+it-b}{b+\lambda+it-a}=\frac{\lambda+it}{b+\lambda+it-a}=\frac{\lambda(b-a)+\lambda^2+t^2+it(b-a)}{(b-a+\lambda)^2+t^2}$$

tiene parte real positiva, tenemos que

$$\left|\arg\left(\frac{\lambda+it}{b+\lambda+it-a}\right)\right|=\operatorname{arctg}\left(\frac{|t(b-a)|}{\lambda(b-a)+\lambda^2+t^2}\right)\leqslant\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{\varepsilon(b-a)}{\varepsilon(b-a)}=\dfrac{\pi}{4} & (\lambda=\varepsilon)\\ \operatorname{arctg}\dfrac{R(b-a)}{R^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{(b-a)}{R} & (\lambda=R)\end{cases}$$

Haciendo en la desigualdad 5.33 $\lambda=\varepsilon$ y teniendo en cuenta 5.32 y 5.34, obtenemos

$$\left|\int_{[b+\varepsilon-i\varepsilon,b+\varepsilon+i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant 2\varepsilon L\left(-\frac{1}{2}\log\frac{\varepsilon^2}{(b-a+\varepsilon)^2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

y como $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log(\varepsilon)=0$, se sigue que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{[b+\varepsilon-i\varepsilon,b+\varepsilon+i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

Análogamente, haciendo en la desigualdad 5.33 $\lambda=R$ y teniendo en cuenta 5.31 y 5.34, obtenemos

$$\left|\int_{[b+R-iR,b+R+iR]} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant 2R\frac{M}{R}\left(-\frac{1}{2}\log\frac{R^2}{(b-a+R)^2}+\operatorname{arctg}\frac{(b-a)}{R}\right)$$

Como la última expresión en esta desigualdad tiende a 0 para $R\to+\infty$, hemos probado que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{[b+R-iR,b+R+iR]} f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

Análogamente se prueba que las integrales sobre los otros dos segmentos verticales también tienden a 0.

Consideremos ahora los segmentos horizontales. Es muy fácil probar que las integrales sobre los segmentos horizontales del rectángulo grande tienden a cero para $R\to+\infty$.

Nos queda considerar las integrales sobre los segmentos horizontales del rectángulo pequeño.

$$\int_{[a-\varepsilon+i\varepsilon,b+\varepsilon+i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon}\frac{P(t+i\varepsilon)}{Q(t+i\varepsilon)}\log\left(\frac{t+i\varepsilon-b}{t+i\varepsilon-a}\right)\,\mathrm{d}t$$

Tenemos que

$$\frac{t+i\varepsilon-b}{t+i\varepsilon-a}=\frac{(t-b)(t-a)+\varepsilon^2+i\varepsilon(b-a)}{(t-a)^2+\varepsilon^2}$$

Para $a+\varepsilon<t<b-\varepsilon$ se tiene que $(t-b)(t-a)+\varepsilon^2<0$ por lo que

$$\arg\left(\frac{t+i\varepsilon-b}{t+i\varepsilon-a}\right)=\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon(b-a)}{(t-b)(t-a)+\varepsilon^2}+\pi\qquad(a+\varepsilon<t<b-\varepsilon)$$

A partir de aquí se prueba con facilidad que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{[a-\varepsilon+i\varepsilon,b+\varepsilon+i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\left(\log\frac{b-x}{x-a}+i\pi\right)\mathrm{d}x$$

Análogamente

$$\int\limits_{[a-\varepsilon-i\varepsilon,b+\varepsilon-i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon}\frac{P(t-i\varepsilon)}{Q(t-i\varepsilon)}\log\left(\frac{t-i\varepsilon-b}{t-i\varepsilon-a}\right)\mathrm{d}t$$

Tenemos que

$$\frac{t-i\varepsilon-b}{t-i\varepsilon-a}=\frac{(t-b)(t-a)+\varepsilon^2-i\varepsilon(b-a)}{(t-a)^2+\varepsilon^2}$$

por lo que

$$\arg\left(\frac{t+i\varepsilon-b}{t+i\varepsilon-a}\right)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon(b-a)}{(t-b)(t-a)+\varepsilon^2}-\pi \qquad (a+\varepsilon<t<b-\varepsilon)$$

A partir de aquí se prueba con facilidad que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{[a-\varepsilon-i\varepsilon,b+\varepsilon-i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\left(\log\frac{b-x}{x-a}-i\pi\right)\mathrm{d}x$$

Teniendo en cuenta la orientación de los segmentos, hemos probado que

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\left(\log\frac{b-x}{x-a}+i\pi\right)\mathrm{d}x-\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\left(\log\frac{b-x}{x-a}-i\pi\right)\mathrm{d}x=2\pi i\int_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

La figura siguiente muestra claramente que cuando z se acerca desde el semiplano superior a un punto x del segmento $]a,b[$ entonces se tiene que $\vartheta\to\pi$ y $\varphi\to 0$ por lo que

$$\log\frac{z-b}{z-a}\to\log\frac{b-x}{x-a}+i\pi$$

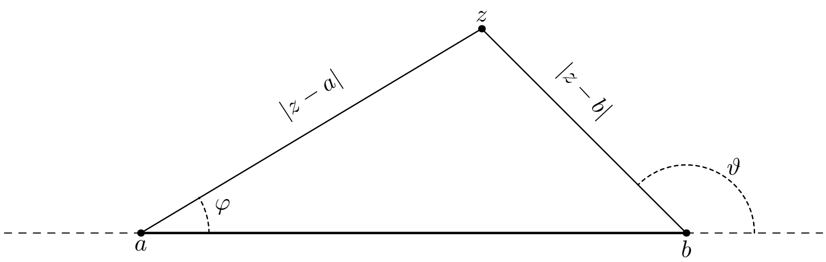


Figura 5.10. $\log\dfrac{z-b}{z-a}=\log\dfrac{|z-b|}{|z-a|}+i(\vartheta-\varphi)$

Y cuando z se acerca desde el semiplano inferior a un punto x del segmento $]a,b[$ entonces se tiene $\vartheta\to-\pi$ y $\varphi\to 0$ por lo que

$$\log\frac{z-b}{z-a}\to\log\frac{b-x}{x-a}-i\pi$$

Observa que es precisamente la discontinuidad del argumento principal lo que permite calcular la integral.

5.39 Ejemplo. Calculemos $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\lambda + 1}$ donde $0 < \lambda < \pi$.

Tenemos que $z^2 - 2z\cos\lambda + 1 = (z - \cos\lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\lambda$ por lo que la función $\dfrac{1}{z^2 - 2z\cos\lambda + 1}$ tiene polos simples en los puntos $z_1 = e^{i\lambda}$ y $z_2 = e^{-i\lambda}$. Por tanto

$$\mathrm{I} = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z}, z_1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z}, z_2\right)$$

Calculemos los residuos.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z}, z_1\right) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z} = \frac{1}{z_1 - z_2}\log\frac{z_1-1}{z_1}$$

Tenemos que $z_1 - z_2 = e^{i\lambda} - e^{-i\lambda} = 2i\operatorname{sen}\lambda$. Y

$$\log\frac{z_1-1}{z_1} = \log\bigl(e^{-i\lambda}(e^{i\lambda}-1)\bigr) = \log\bigl(e^{-i\lambda/2}(e^{i\lambda}/2 - e^{-i\lambda}/2)\bigr) = \log\bigl(e^{-i\lambda/2}\,2i\operatorname{sen}(\lambda/2)\bigr) =$$
$$= \log\bigl(e^{i(\pi-\lambda)/2}\,2\operatorname{sen}(\lambda/2)\bigr) = \log\bigl(2\operatorname{sen}\lambda/2)\bigr) + i(\pi-\lambda)/2$$

Donde hemos tenido en cuenta que $0 < \lambda < \pi$ por lo que $\operatorname{sen}(\lambda/2) > 0$. Por tanto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z}, z_1\right) = \frac{1}{2i\operatorname{sen}\lambda}\bigl(\log\bigl(2\operatorname{sen}(\lambda/2)\bigr) + i(\pi-\lambda)/2\bigr)$$

Análogamente, observando que $\dfrac{z_2-1}{z_2}$ es el complejo conjugado de $\dfrac{z_1-1}{z_1}$, se obtiene

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z}, z_2\right) = \frac{1}{z_2-z_1}\log\frac{z_2-1}{z_2} = \frac{-1}{2i\operatorname{sen}\lambda}\bigl(\log\bigl(2\operatorname{sen}(\lambda/2)\bigr) - i(\pi-\lambda)/2\bigr)$$

Deducimos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\lambda + 1} = \frac{\pi - \lambda}{2\operatorname{sen}\lambda}$$

♦

5.6.9. Integrales del tipo $\displaystyle\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\alpha, \beta \in]-1, 1[$ y $\alpha + \beta = 1$ o $\alpha + \beta = -1$.

3. $Q(x) \neq 0$ para todo $a \leqslant x \leqslant b$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\beta\pi)} \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}, z_j\right) - \\ &- \frac{1}{2i\operatorname{sen}(\beta\pi)} \lim_{R\to+\infty} \int_{C(0,R)} \frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}\mathrm{d}z \qquad (5.35)\end{aligned}}$$

Se entiende que si el polinomio Q es constante la suma anterior es igual a cero.

La función potencia que se integra es el valor principal

$$\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta} = \exp\left(\beta \log \frac{z-b}{z-a}\right)$$

Recuerda que la función $\log \dfrac{z-b}{z-a}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Aplicamos el teorema de los residuos a la función

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}$$

en el abierto $\Omega = \mathbb{C}\setminus[a,b]$ en el ciclo $\Gamma(R,\varepsilon)$ que se representa en la figura 5.11.

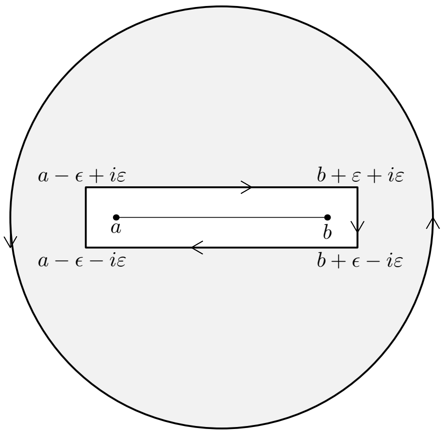


Figura 5.11. $\Gamma(R,\varepsilon)$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}, z_j\right)$$

Como en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de R y ε, es suficiente para nuestros propósitos probar que

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\operatorname{sen}(\beta\pi)\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to+\infty} \int_{C(0,R)} \frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}\mathrm{d}z \qquad (5.36)$$

Se comprueba que las integrales sobre los segmentos verticales tienden a cero. Sobre los segmentos horizontales $[a-\varepsilon\pm i\varepsilon, b+\varepsilon\pm i\varepsilon]$ se verifica que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[a-\varepsilon+i\varepsilon,b+\varepsilon+i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x+i\varepsilon)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\exp\left(\beta\left(\log\frac{b-x}{x-a}+i\pi\right)\right)(x-a)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{i\pi\beta}\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[a-\varepsilon-i\varepsilon,b+\varepsilon-i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x-i\varepsilon)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\exp\left(\beta\left(\log\frac{b-x}{x-a}-i\pi\right)\right)(x-a)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{-i\pi\beta}\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Lo que, teniendo en cuenta el sentido de recorrido de estos segmentos justifica la igualdad 5.36.

El siguiente resultado es útil para calcular este tipo de integrales.

5.40 Proposición.

(a) Supongamos que $\lim\limits_{z\to\infty} zh(z)=1$. *Entonces* $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C(0,R)} h(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i$.

(b) Supongamos que $\lim\limits_{z\to\infty} zh(z)=0$. *Entonces* $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C(0,R)} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(c) Si $\lim\limits_{z\to\infty} z\left(\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha+\beta}\right) = L\in\mathbb{C}$ *entonces*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C(0,R)} \frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^\beta (z-a)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}z = 2L\pi i$$

Demostración.

(a). Puesto que $\lim\limits_{z\to\infty} zh(z)=1$, podemos escribir $zh(z)=1+g(z)$ con $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$. Tenemos

$$\int_{C(0,R)} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C(0,R)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{C(0,R)} \frac{g(z)}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i + \int_{C(0,R)} \frac{g(z)}{z}\,\mathrm{d}z$$

Y como

$$\left|\int_{C(0,R)} \frac{g(z)}{z}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi R\,\text{máx}\left\{\frac{|g(z)|}{|z|} : |z|=R\right\} = 2\pi\,\text{máx}\{|g(z)| : |z|=R\}$$

deducimos que $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C(0,R)} \frac{g(z)}{z}\,\mathrm{d}z = 0$. Lo que prueba *(a)*.

El punto *(b)* se prueba de forma análoga y *(c)* es consecuencia inmediata de *(a)* y *(b)*. □

5.41 Ejemplo.

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = -\frac{1}{2i\,\mathrm{sen}(-\pi/2)} \lim_{R\to+\infty} \int_{C(0,R)} \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{-1/2} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \pi$$

Donde hemos aplicado la proposición anterior para calcular el límite pues poniendo $h(z) = \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{-1/2} \frac{1}{z-a}$ es claro que $\lim_{z\to\infty} zh(z) = 1$. ♦

Observación

Si $\lim_{z\to\infty} z\left(\frac{P(z)}{Q(z)} z^{\alpha+\beta}\right) = \infty$, el cálculo del límite en la fórmula 5.35 puede ser complicado. Una forma de proceder en estos casos consiste en elegir un entero $k \geqslant 1$ de manera que $\lim_{z\to\infty} z^{-k+1}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} z^{\alpha+\beta}\right) = L \in \mathbb{C}$, y tener en cuenta que

$$\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0} \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta}{(1-\delta x)^k} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Ejercicios propuestos

Calcula las siguientes integrales usando el método de residuos.

295. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$

296. $\displaystyle\int_1^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(1-x)}}$

297. $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$

298. $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+b^2)\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0, b>0)$

299. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x-c} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a<b<c)$

300. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(cx+d)\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (ac+d>0, bc+d>0)$

301. $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$

302. $\displaystyle\int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x-c} \qquad (a<b<c)$

Otras técnicas para calcular integrales

La técnica de calcular integrales usando el teorema de los residuos es más amplia que los casos estudiados. En los ejercicios que siguen puedes comprobarlo. En estos ejercicios se indica por lo general la función que debes integrar y el camino de integración y tú debes realizar las acotaciones apropiadas para calcular las integrales. No se trata de que apliques una fórmula sino de que en cada caso justifiques los cálculos necesarios.

Ejercicios propuestos

303. Integrando una conveniente función compleja a lo largo del camino $\Gamma(\varepsilon,R)$ formado por la frontera del sector circular (ver figura 5.12)

$$\left\{z\in\mathbb{C}^* : \varepsilon<|z|<R,\ 0<\arg(z)<\frac{2\pi}{n}\right\}$$

con $0<\varepsilon<1<R$, calcula la integral

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^n}\,dx$$

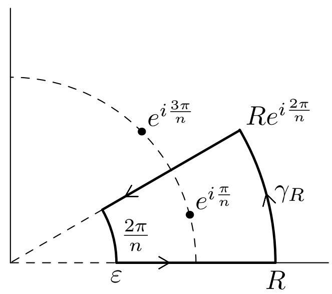


Figura 5.12. Camino $\Gamma(\varepsilon,R)$

Donde $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $\alpha\in\mathbb{R}$ y $n>1+\alpha>0$. Para $n=1$ y $n=2$ esta integral ya ha sido propuesta por otro método en los ejercicios 288 y 293. Pero como ese método requiere calcular los residuos en todos los polos de la función no es útil para valores grandes de n. El camino que se propone en este ejercicio tiene la ventaja de que sólo se precisa calcular el residuo en un polo. La elección del camino se hace además de forma que el denominador de la función que se integra se repita en los dos segmentos y es precisamente eso lo que permite calcular la integral.

304. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R)=[-R,R,R+2\pi i,-R+2\pi i,-R]$ $(R>0)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,dx=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$$

donde α es un parámetro real y $0<\alpha<1$.

Observa que la poligonal se ha elegido de forma que el denominador de la función que se integra se repita. Comprueba, con un cambio de variable, que esta integral puede reducirse a la del ejercicio **288**.

305. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R)=[-R,R,R+2\pi i,-R+2\pi i,-R]$ $(R>0)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\left(e^x+1\right)^2}\,dx=\frac{\pi(1-\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$$

donde α es un parámetro real tal que $0<\alpha<2$ y $\alpha\neq 1$.

Nota: Para calcular el residuo puedes usar la igualdad

$$e^z+1=-\left(e^{z-i\pi}-1\right)=(z-i\pi)\varphi(z)$$

donde $\varphi(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(z-i\pi)^n$.

306. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R)=[-R,R,R+\pi i,-R+\pi i,-R]$ $(R>0)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$$

donde α es un parámetro real y $-1<\alpha<1$.

307. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R)=[-R,R,R+\pi i,-R+\pi i,-R]$ $(R>0)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,e^{\alpha x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\frac{\pi^2}{4}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$$

donde α es un parámetro real y $-1<\alpha<1$. ¿Puedes deducir este resultado del ejercicio anterior?.

308. Integrando la función $z\to\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, Prueba que:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

309. Integrando la función $f(z)=\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}$ a lo largo de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$ deducir que

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^3 dx=\frac{3\pi}{8}$$

310. Integrando la función
$$f(z) = \frac{z + i\,e^{iz} - i}{z^3}$$
a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, prueba que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

311. Sea $a > 1$. Integrando a lo largo de la poligonal $[-\pi,\pi,\pi+in,-\pi+in,-\pi]$ ($n\in\mathbb{N}$) la función $z \to \dfrac{z}{a - e^{-iz}}$, Prueba que:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + a^2 - 2a\cos x}\,dx = \frac{2\pi}{a}\log\left(\frac{1+a}{a}\right).$$

312. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$ $(0 < \varepsilon < R)$, que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$$
donde α es un parámetro real y $-1 < \alpha < 1$.

313. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0,\varepsilon,R)$, Prueba que, para $-1 < \alpha < 3$, $\alpha \neq 1$, se verifica:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(1-\alpha)\sec\frac{\pi\alpha}{2}.$$

314. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, $0 < \varepsilon < 1, 2 < R$, calcula la integral:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

315. Prueba que, para $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, se verifica:
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x+e^{2x}}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}(1-\alpha)}{\operatorname{sen}\pi\alpha}.$$

316. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R) = [-R,R,R+\pi i,-R+\pi i,-R]$ $(R > 0)$, que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\operatorname{sen} 2x\,dx = \pi\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{e^\pi + e^{-\pi}}$$

317. Integrando la función

$$f(z) = \frac{1-\mathrm{e}^{2iz}}{z^2(z^2+a^2)}$$

a lo largo de la frontera de la mitad del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, $0<\varepsilon<a<R$, que está contenida en el semiplano superior, calcular la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x$$

318. Integrando la función $f(z) = \dfrac{\log(i+z)}{1+z^2}$ a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,\mathrm{R})$, $0<\varepsilon<1<\mathrm{R}$, prueba que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\log 2.$$

319. Definamos, para cada $z\in\mathbb{C}^*$, $h(z) = \log(-iz) + i\dfrac{\pi}{2}$. Dado $\alpha\in]-1,1[$, integra la función

$$f(z) = \frac{\exp(\alpha h(z))h(z)}{1+z^2}$$

a lo largo de la frontera de la mitad del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, $0<\varepsilon<1<R$, que está contenida en el semiplano superior para obtener el valor de las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \log(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

320. Sea n un número natural mayor o igual que 3. Integrando la función $z\mapsto \dfrac{\log z}{1+z^n}$ a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z\in\mathbb{C} : \varepsilon<|z|<R, 0<\arg(z)<2\pi/n\}, \quad (0<\varepsilon<1<R)$$

calcula las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

321. Integrando la función $z\mapsto \dfrac{z^2\log(z)}{1+z^4}$ a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z\in\mathbb{C} : \varepsilon<|z|<R, 0<\arg(z)<\pi/2\}, \quad (0<\varepsilon<1<R)$$

calcula las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\log(x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

322. Sea $\alpha = \mathrm{e}^{i\pi/4}$ y $R > 0$. Integra la función $f(z) = \operatorname{cosec}(\pi z)\exp(i\pi z^2)$ a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R) = [-1/2 - R\alpha, 1/2 - R\alpha, 1/2 + R\alpha, -1/2 + R\alpha, -1/2 - R\alpha]$ para calcular el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

323. Integrando $z \mapsto \mathrm{e}^{-az^2}$ a lo largo de la poligonal $\Gamma(R) = [-R, R, R + i\frac{2b}{a}, -R + i\frac{2b}{a}, -R]$ $(R > 0)$, calcula las integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(bx)\,\mathrm{d}x \quad (a > 0, b > 0)$$

324. Integrando una conveniente función compleja a lo largo del camino $\Gamma(\varepsilon, R)$ que se indica en la figura 5.13, calcula la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{\mathrm{e}^{2\pi x} - 1}\,\mathrm{d}x$$

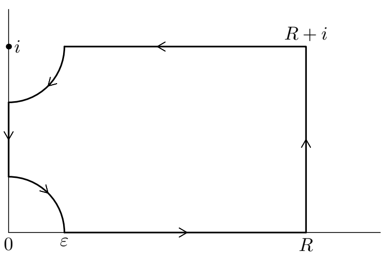


Figura 5.13. Camino $\Gamma(\varepsilon, R)$

325. Integrando una conveniente función compleja a lo largo del camino $\Gamma(\varepsilon, R)$ que se indica en la figura 5.14, calcula la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{senh}(ax)}{\operatorname{senh}(\pi x)}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0, a \neq \pi)$$

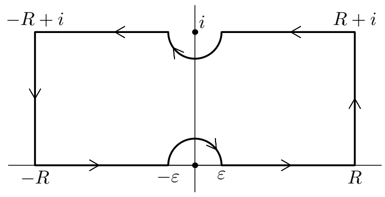


Figura 5.14. Camino $\Gamma(\varepsilon, R)$

326. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(n) = [-n, n, n + 2in, -n + 2in, -n]$, calcula la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)\cosh(\pi x/2)}$$

327. Calcula, haciendo uso del teorema de los residuos, la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x + 2)}\,dx \quad (0 < a < 2)$$

328. Calcula las integrales

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda \log x}{1 - x}\,\mathrm{d}x \quad (-1 < \lambda < 0)$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh bx}\cos cx\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{senh} ax}{\cosh bx}\operatorname{sen} cx\,\mathrm{d}x \quad (0<a<b)$

329. Naturalmente, el teorema de los residuos sirve para calcular integrales complejas.

a) Calcula el límite $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{[1-iR,1+iR]} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+2)^3}\,\mathrm{d}z$.

b) Calcula la integral $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{6z^2-5z+1}}$.

330. Sea Ω un dominio simplemente conexo, $\mathcal{S}$ un conjunto de puntos aislados en Ω y $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\mathcal{S})$. Justifica que f tiene una primitiva en $\Omega\setminus\mathcal{S}$ si, y sólo si, $\operatorname{Res}(f(z),w)=0$ para todo $w\in\mathcal{S}$.

331. Sea

$$\operatorname{cotg}(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

el desarrollo de Laurent de $\operatorname{cotg}(\pi z)$ en el anillo $A(0;1,2)$. Calcula los coeficientes a_n para n entero negativo.

332. Prueba que la función

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

tiene n ceros distintos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ que verifican la igualdad

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_j^q} = 0 \quad (2\leqslant q\leqslant n)$$

Sugerencia: considera la integral $\displaystyle\int_{C(0,R)} \frac{z^k}{f(z)}\,\mathrm{d}z \quad (0\leqslant k\leqslant n-2)$.

333. a) Prueba que hay una única función $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\overline{D(0,1)})$ tal que $f(z)^2 = z^2+z+1$ para $|z|>1$ y $f(x)>0$ para $x>1$.

b) Calcula la integral

$$\int_{C(0,R)} \frac{1}{f(z)}\,\mathrm{d}z \quad (R>1)$$

donde $f(z)$ es la función obtenida en el apartado anterior.

334. Sea f una función holomorfa e inyectiva en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ verificando que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in\mathbb{C}^*$. Pruébese que hay un número complejo $\alpha\neq 0$ tal que o bien $f(z)=\alpha z \ \ \forall z\in\mathbb{C}^*$, o bien $f(z)=\dfrac{\alpha}{z} \ \ \forall z\in\mathbb{C}^*$.

5.7. Aplicación del teorema de los residuos para sumar series

Las aplicaciones del teorema de los residuos para sumar series se basan en la siguiente idea. Supongamos que f es una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus P(f)$ donde $P(f)$ es un conjunto finito de puntos que son polos de f. Admitiremos la posibilidad de que algún polo de f sea un número entero. Sea g una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ que en cada número entero tiene un polo simple. Sea Γ_n un camino cerrado que rodee a los enteros $\{-n,-n+1,\dots,-1,0,1,\dots,n-1,n\}$ y a los polos de f una sola vez dejando fuera a los demás enteros. Teniendo en cuenta que si k es un entero que no es un polo de f se verifica que $\operatorname{Res}(f(z)g(z),k) = f(k)\operatorname{Res}(g(z),k)$, el teorema de los residuos nos dice que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_n} f(z)g(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\notin P(f)}} \operatorname{Res}(f(z)g(z),k)\operatorname{Ind}_{\Gamma_n}(k) + 2\pi i \sum_{w\in P(f)} \operatorname{Res}(f(z)g(z),w) = \\ &= 2\pi i \sum_{\substack{k=-n\\ k\notin P(f)}}^{n} f(k)\operatorname{Res}(g(z),k) + 2\pi i \sum_{w\in P(f)} \operatorname{Res}(f(z)g(z),w)\end{aligned}$$

Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n} f(z)g(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{5.37}$$

entonces obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ k\notin P(f)}}^{n} f(k)\operatorname{Res}(g(z),k) = -\sum_{w\in P(f)}\operatorname{Res}(f(z)g(z),w) \tag{5.38}$$

Las elecciones usuales para la función g son

$$g(z) = \frac{\pi}{\cos\pi z}\operatorname{sen}\pi z = \pi\operatorname{cotg}\pi z; \quad g(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z} = \pi\operatorname{cosec}\pi z$$

funciones que tienen polos simples en los enteros siendo

$$\operatorname{Res}(\pi\operatorname{cotg}\pi z,k) = 1, \quad \operatorname{Res}(\pi\operatorname{cosec}\pi z,k) = (-1)^k \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Particularizando para estos casos la igualdad 5.38, supuesto que se cumpla la condición 5.37, obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ k\notin P(f)}}^{n} f(k) &= -\sum_{w\in P(f)}\operatorname{Res}\big(\pi f(z)\operatorname{cotg}\pi z,w\big) &(5.39)\\ \lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ k\notin P(f)}}^{n} (-1)^k f(k) &= -\sum_{w\in P(f)}\operatorname{Res}\big(\pi f(z)\operatorname{cosec}\pi z,w\big) &(5.40)\end{aligned}}$$

A continuación vamos a imponer a la función f condiciones suficientes para que se cumpla la condición 5.37 para dichas elecciones de la función g.

Como camino de integración Γ_n vamos a tomar la poligonal (es un cuadrado)

$$\Gamma_n = [(n+\frac{1}{2})(-1-i),(n+\frac{1}{2})(1-i),(n+\frac{1}{2})(1+i),(n+\frac{1}{2})(-1+i),(n+\frac{1}{2})(-1-i)].$$

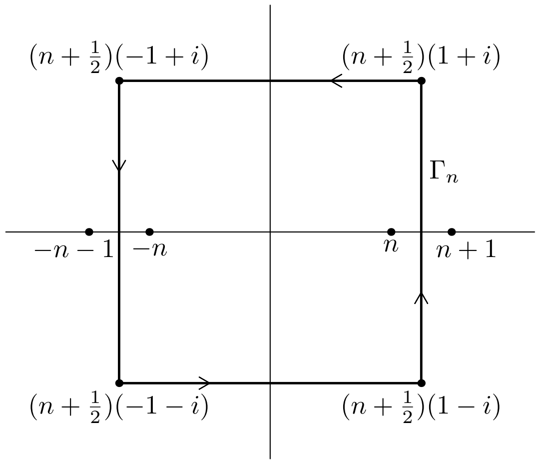


Figura 5.15. Camino Γ_n

5.42 Proposición. *Para todo* $z\in\Gamma_n^*$ *se verifica que* $|\operatorname{cotg}\pi z| < 2$ *y* $|\operatorname{cosec}\pi z| < 2$.

Demostración. Supongamos que $z = n+\frac{1}{2}+iy$. Entonces

$$\operatorname{cotg}(\pi z) = i\frac{e^{2\pi iz}+1}{e^{2\pi iz}-1} = i\frac{e^{\pi i-2\pi y}+1}{e^{\pi i-2\pi y}-1}$$
$$\operatorname{cosec}(\pi z) = \frac{2i}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = \frac{2i\,e^{i\pi z}}{e^{2i\pi z}-1} = \frac{2i\,e^{in(\pi+1/2)-\pi y}}{e^{i\pi-2\pi y}-1}$$

por lo que

$$|\operatorname{cotg}(\pi z)| = \frac{1-e^{-2\pi y}}{1+e^{-2\pi y}} < 1$$
$$|\operatorname{cosec}(\pi z)| = \frac{2\,e^{-\pi y}}{1+e^{-\pi y}} < 2$$

Análogamente, si $z = x+i(n+\frac{1}{2})$ se obtiene que

$$|\operatorname{cotg}(\pi z)| \leqslant \frac{1+e^{-\pi(2n+1)}}{1-e^{-\pi(2n+1)}} < \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} < 2$$
$$|\operatorname{cosec}(\pi z)| \leqslant \frac{2\,e^{-\pi(n+1/2)}}{1-e^{-\pi(2n+1)}} < \frac{2\,e^{-\pi/2}}{1-e^{-\pi}} < 1$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{cotg} z$ y $\operatorname{cosec} z$ son funciones impares, estas cotas también son válidas para los otros dos lados de Γ_n. □

5.43 Proposición. *Se verifica que*

$$\int_{\Gamma_n} \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z}\,\mathrm{dz} = \int_{\Gamma_n} \frac{\operatorname{cosec}(\pi z)}{z}\,\mathrm{dz} = 0$$

Demostración. En efecto, como las funciones $\dfrac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z}$ y $\dfrac{\operatorname{cosec}(\pi z)}{z}$ son pares y tienen un polo de orden dos en cero, deducimos que su residuo en cero es igual a 0. Los residuos en los demás polos se anulan dos a dos porque

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z}, k\right) = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cosec}(\pi z)}{z}, k\right) = \frac{(-1)^k}{k}$$

y en consecuencia sus integrales en Γ_n son nulas en virtud del teorema de los residuos. □

5.44 Proposición. *Supongamos que hay números $M > 0$ y $R > 0$ tales que para $|z| \geqslant R$ se verifica que $|zf(z)| \leqslant M$. Entonces se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} f(z)\operatorname{cotg}(\pi z)\,\mathrm{dz} = \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} f(z)\operatorname{cosec}(\pi z)\,\mathrm{dz} = 0$$

Demostración. Pongamos $h(z) = \dfrac{f(1/z)}{z}$. La hipótesis hecha implica que h está acotada en el disco $D(0,1/R)$ y, por tanto, h es regular en 0. Definiendo $h(0) = \lim\limits_{z\to 0} h(z)$, se tiene que h es holomorfa en el disco $D(0,1/R)$ por lo que podemos escribir

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad z \in D(0,1/R)$$

Deducimos que

$$f(1/z) - c_0 z = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} \qquad z \in D(0,1/R) \setminus \{0\}$$

Como la función $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$ es continua en $D(0,1/R)$ deducimos que está acotada en compactos. Por tanto existe $K > 0$ tal que $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}\right| \leqslant K$ para todo $z \in \overline{D}(0,1/2R)$. Deducimos que

$$\left| f(z) - \frac{c_0}{z} \right| \leqslant \frac{K}{|z|^2} \qquad |z| \geqslant 2R \tag{5.41}$$

Tenemos, en virtud de la proposición 5.43, que

$$\int_{\Gamma_n} \operatorname{cotg}(\pi z) f(z) d fz = \int_{\Gamma_n} \operatorname{cotg}(\pi z) \left(f(z) - \frac{c_0}{z} \right) \mathrm{dz} + c_0 \int_{\Gamma_n} \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z}\,\mathrm{dz} = \int_{\Gamma_n} \operatorname{cotg}(\pi z) \left(f(z) - \frac{c_0}{z} \right) \mathrm{dz}$$

Por la proposición 5.42 y la desigualdad 5.41, deducimos que para $n > 2R$ se verifica que

$$\left| \int_{\Gamma_n} \operatorname{cotg}(\pi z) f(z) d f z \right| = \left| \int_{\Gamma_n} \operatorname{cotg}(\pi z) \left(f(z) - \frac{c_0}{z} \right) \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{2K}{(n+1/2)^2} 8(n+1/2)$$

La misma acotación es válida cambiando $\operatorname{cotg}(\pi z)$ por $\operatorname{cosec}(\pi z)$. De estas acotaciones se sigue enseguida la afirmación del enunciado. □

5.7.1. Series del tipo $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P) + 1$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ Q(k)\neq 0}}^{n} \frac{P(k)}{Q(k)} = -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\pi \operatorname{cotg}(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right)} \tag{5.42}$$

Esto es consecuencia directa de los resultados anteriores pues en las hipótesis hechas se verifica que $\displaystyle\lim_{z\to\infty} z \frac{P(z)}{Q(z)} = L \in \mathbb{C}$ y, por tanto, se satisface la hipótesis de la proposición 5.44.

Es interesante observar que la existencia del límite en 5.42 no implica que la serie sea convergente. Naturalmente, que la serie $\displaystyle\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ Q(k)\neq 0}} \frac{P(k)}{Q(k)}$ sea convergente quiere decir que existe el límite

$$\lim_{\substack{q\to\infty \\ p\to\infty}} \sum_{\substack{k=-p \\ Q(k)\neq 0}}^{q} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

Por otra parte, la condición $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P) + 2$ garantiza la convergencia absoluta de la serie.

5.45 Ejemplo. Sea $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^2+\alpha^2} = -\operatorname{Res}\left(\pi \operatorname{cotg} \pi z \frac{1}{z^2+\alpha^2}, i\alpha \right) - \operatorname{Res}\left(\pi \operatorname{cotg} \pi z \frac{1}{z^2+\alpha^2}, -i\alpha \right) =$$
$$= \frac{\pi}{\alpha} \frac{\mathrm{e}^{\alpha\pi} + \mathrm{e}^{-\alpha\pi}}{\mathrm{e}^{\alpha\pi} - \mathrm{e}^{-\alpha\pi}}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{k^2+\alpha^2}$ es convergente tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^2+\alpha^2} = 2\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}$$

de donde se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\, \frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} - \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

En virtud del criterio de Weierstrass, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+\alpha^2}$ es uniformemente convergente para $\alpha\in\mathbb{R}$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{\alpha\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\, \frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} - \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

donde el último límite puede calcularse por la regla de L'Hôpital. ♦

5.7.2. Series del tipo $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P)+1$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n\\ Q(k)\neq 0}}^{n} (-1)^k \frac{P(k)}{Q(k)} = -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\pi \operatorname{cosec}(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)} \tag{5.43}$$

Es interesante observar que en este caso las hipótesis hechas garantizan, por el criterio de Dirichlet, la convergencia de la serie aunque no necesariamente la convergencia absoluta.

5.46 Ejemplo.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0}}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\operatorname{Res}\left(\pi \operatorname{cosec}(\pi z)\frac{1}{z^2}, 0\right) = -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2} z^3\left(\pi \operatorname{cosec}(\pi z)\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{\pi^2}{6}$$

De donde se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0}}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

♦

Ejercicios propuestos

335. Justifica que, excepto para ciertos valores de a (que se precisarán en cada caso), se verifican las siguientes igualdades.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\coth\pi a-\frac{1}{a^2}\right)$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4-a^4}=\frac{1}{2a^4}-\frac{\pi}{4a^3}(\operatorname{cotg}\pi a+\coth\pi a)$;

c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n-a)^2}=\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2\pi a}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi}{2a\operatorname{senh}\pi a}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4-a^4}=\frac{1}{2a^4}-\frac{\pi}{4a^3}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\pi a}+\frac{1}{\operatorname{senh}\pi a}\right)$.

336. Integrando la función $z\to\dfrac{\pi\operatorname{sen} az}{z^3\operatorname{sen}\pi z}$ a lo largo de la frontera del cuadrado cuyos vértices son $(\pm1\pm i)(n+\frac{1}{2})$, donde $n\in\mathbb{N}$, calcula la suma de las series

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} an}{n^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

5.8. Principio del argumento. Teorema de Rouché

En esta sección vamos a obtener dos importantes consecuencias del teorema de los residuos que proporcionan herramientas útiles para el estudio de los ceros de una función holomorfa. En lo que sigue vamos a considerar funciones cuyas únicas singularidades son polos.

5.47 Definición (Funciones meromorfas.)**.** Diremos que una función f es *meromorfa* en un abierto $\Omega\subset\mathbb{C}$ si las únicas posibles singularidades de f en Ω son polos, es decir, existe un conjunto $P\subset\Omega$ de puntos aislados en Ω tal que f es holomorfa en $\Omega\backslash P$ y f tiene un polo en cada punto de P. Notaremos por $\mathcal{M}(\Omega)$ el conjunto de las funciones meromorfas en Ω.

La palabra “meromorfa” significa “de forma racional” porque las funciones meromorfas se comportan de forma parecida a las funciones racionales. De hecho, los ejemplos más inmediatos de funciones meromorfas son las funciones racionales las cuales son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$. Naturalmente, toda función holomorfa es también una función meromorfa. Más aún, el cociente f/g de dos funciones holomorfas en un abierto Ω, supuesto que g no es idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω, es una función meromorfa en Ω.

5.48 Teorema (Principio de identidad para funciones meromorfas.)**.** *Una función meromorfa en un dominio cuyos ceros tienen algún punto de acumulación en el dominio es idénticamente nula.*

Demostración. Sea Ω un dominio y f una función meromorfa en Ω. Notemos $Z(f)$ el conjunto de las ceros y $P(f)$ el conjunto de los polos de f en Ω. Como $P(f)$ es un conjunto de puntos aislados en Ω, el conjunto $\Omega_1 = \Omega \backslash P(f)$ es abierto. Supongamos que $Z(f)$ tiene algún punto de acumulación en Ω. Es evidente que un punto de acumulación de ceros también es un cero de f por lo que, en la hipótesis hecha, deberá ser $Z(f)' \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. Como f es holomorfa en Ω_1, si probamos que dicho conjunto es un dominio, el principio de identidad para funciones holomorfas implicará que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega_1$, pero entonces es claro que tiene que ser $P(f) = \emptyset$ y, por tanto, habremos probado que f es idénticamente nula en Ω.

Supongamos que $\Omega_1 = A \cup B$ siendo A y B conjuntos abiertos tales que $A \cap B = \emptyset$. La idea es extender esta partición de Ω_1 a una partición por abiertos de Ω. Para ello, definimos los conjuntos

$$\widehat{A} = A \cup \{z \in P(f) : \exists r > 0, D(z,r) \backslash \{z\} \subset A\}, \quad \widehat{B} = B \cup \{z \in P(f) : \exists r > 0, D(z,r) \backslash \{z\} \subset B\}$$

es inmediato que ambos conjuntos son abiertos. Además, si $z \in P(f)$, por ser $P(f)$ un conjunto de puntos aislados en Ω, hay algún $r > 0$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$ y $D(a,r) \cap P(f) = \{z\}$. El conjunto $D(z,r) \backslash \{z\}$ está contenido en Ω_1 y, como dicho conjunto es conexo, deberá ocurrir que o bien está contenido en A o bien está contenido en B. En consecuencia $\widehat{A} \cup \widehat{B} = \Omega$ y $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \emptyset$. Como Ω es un dominio alguno de ellos debe ser vacío y, por tanto, alguno de los conjuntos A o B tiene que ser vacío. □

Este resultado permite extender para funciones meromorfas las propiedades de los ceros de las funciones holomorfas. En particular, *los ceros de una función meromorfa y no idénticamente nula, f, en un dominio, Ω, son un conjunto de puntos aislados en* Ω. En consecuencia, si a es un cero de f existe un disco $D(a,r) \subset \Omega$ tal que f es holomorfa en $D(a,r)$ y, por tanto, *el concepto de orden de un cero para funciones holomorfas (que es un concepto local) se aplica con igual significado para funciones meromorfas*. En particular, se verifica el siguiente resultado.

5.49 Corolario. *Sea f una función meromorfa en un abierto Ω y supongamos que f tiene en $a \in \Omega$ un cero de orden m. Entonces existe una función g meromorfa en Ω cuyos polos son los mismos de f tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^m g(z)$ para todo $z \in \Omega$ que no sea polo de f.*

5.50 Teorema (Principio del argumento generalizado.)**.** *Sea Ω un dominio, f una función meromorfa no idénticamente nula en Ω y g una función holomorfa en Ω. Sea $P(f)$ el conjunto de los polos y $Z(f)$ el conjunto de los ceros de f en Ω.*

Para $b \in P(f)$ notaremos $n(b)$ el orden del polo de f en b, y para $a \in Z(f)$ notaremos $m(a)$ el orden del cero de f en a. Si Γ es un ciclo en $\Omega \backslash (P(f) \cup Z(f))$ que es nulhomólogo con respecto a Ω se verifica que:

- *El conjunto $\{w \in Z(f) \cup P(f) : \operatorname{Ind}_\Gamma(w) \neq 0\}$ es finito.*

▪

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{a\in Z(f)}\operatorname{Ind}_{\Gamma}(a)m(a)g(a)-\sum_{b\in P(f)}\operatorname{Ind}_{\Gamma}(b)n(b)g(b)} \tag{5.44}$$

Demostración. Pongamos $S=Z(f)\cup P(f)$ que es un conjunto de puntos aislados en Ω. Aplicamos el Teorema de los residuos a la función

$$h(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}g(z) \qquad (z\in\Omega\backslash S)$$

que es holomorfa en $\Omega\backslash S$. Dicho teorema nos dice que el conjunto $\{w\in S:\operatorname{Ind}_{\Gamma}(w)\neq 0\}$ es finito y además

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}h(z)\,\mathrm{d}z&=\sum_{w\in S}\operatorname{Ind}_{\Gamma}(w)\operatorname{Res}(h(z),w)=\\&=\sum_{a\in Z(f)}\operatorname{Ind}_{\Gamma}(a)\operatorname{Res}(h(z),a)+\sum_{b\in P(f)}\operatorname{Ind}_{\Gamma}(b)\operatorname{Res}(h(z),b)\end{aligned}$$

Calculemos los residuos. Si $a\in Z(f)$ hay un disco $D(a,r)\subset\Omega$ tal que $D(a,r)\cap S=\{a\}$. Por tanto, existe una función $\varphi\in\mathcal{H}(D(a,r))$ tal que $\varphi(a)\neq 0$ y $f(z)=(z-a)^{m(a)}\varphi(z)$ para todo $z\in D(a,r)$. Por tanto

$$f'(z)=m(a)(z-a)^{m(a)-1}\varphi(z)+(z-a)^{m(a)}\varphi'(z) \quad z\in D(a,r).$$

y en consecuencia

$$h(z)=\frac{m(a)}{(z-a)}g(z)+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}g(z) \qquad z\in D(a,r)\backslash\{a\}$$

Deducimos que $\lim\limits_{z\to a}(z-a)h(z)=m(a)g(a)$ lo que implica que $\operatorname{Res}(h(z),a)=m(a)g(a)$.

Si $b\in P$, entonces existe un disco $D(b,r)\subset\Omega$ tal que $D(b,r)\cap S=\{b\}$. Por la caracterización de los polos sabemos que hay una función ψ holomorfa en $D(b,r)$ con $\psi(b)\neq 0$ tal que $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-b)^{n(b)}}$ para todo $z\in D(b,r)\backslash\{b\}$. Tomando r suficientemente pequeño podemos suponer que $\psi(z)\neq 0$ para todo $z\in D(b,r)$. Tenemos que

$$f'(z)=-n(b)\frac{\psi(z)}{(z-b)^{n(b)+1}}+\frac{\psi'(z)}{(z-b)^{n(b)}}$$

por tanto,

$$h(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)=\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}g(z)+\frac{-n(b)}{z-b}g(z)$$

y deducimos que $\lim\limits_{z\to b}(z-b)h(z)=-n(b)g(b)$, lo que implica que $\operatorname{Res}(h(z),b)=-n(b)g(b)$.
■

Si particularizamos la igualdad 5.44 tomando como g la función constante $g(z)=1$, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\sum_{a\in Z(f)}\operatorname{Ind}_{\Gamma}(a)m(a)-\sum_{b\in P(f)}\operatorname{Ind}_{\Gamma}(b)n(b)$$

Si ahora suponemos que para todo $z\in\Omega$ es $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)=0$ o $\operatorname{Ind}_{\Gamma}=1$ y definimos el conjunto $U=\{z\in\Omega\backslash\Gamma^{*}:\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)=1\}$, podemos escribir la igualdad anterior en la forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z&=\sum_{a\in Z(f)\cap U}m(a)-\sum_{b\in P(f)\cap U}n(b)=\\&=\text{número de ceros de } f \text{ en } U \text{ - número de polos de } f \text{ en } U\end{aligned}$$

donde cada cero y cada polo se cuenta tantas veces como indica su orden.

Veamos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\operatorname{Ind}_{f\circ\Gamma}(0)$$

Es suficiente probar esta igualdad para un camino cerrado $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$. Por la definición de integral a lo largo de un camino tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{b}\frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0)$$

Hemos probado así el siguiente teorema.

5.51 Teorema (Principio del argumento.)**.** *Sea Ω un dominio, f una función meromorfa no idénticamente nula en Ω y Γ un ciclo en Ω nulhomólogo con respecto a Ω y que no pasa por ningún polo ni por ningún cero de f. Supongamos, además, que para todo $z\in\Omega\backslash\Gamma^{*}$ se verifica que $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)\in\{0,1\}$ y definamos $U=\{z\in\Omega\backslash\Gamma^{*}:\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)=1\}$. Entonces*

$$\boxed{\operatorname{Ind}_{f\circ\Gamma}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=N_0-N_p}\tag{5.45}$$

donde N_0 es el número de ceros de f en U y N_p es el número de polos de f en U contando cada cero y cada polo tantas veces como su orden.

En particular, si f es holomorfa en Ω y Γ es un camino cerrado, se tiene que

$$\boxed{\operatorname{Ind}_{f\circ\Gamma}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=N_0}\tag{5.46}$$

Es decir, el número de ceros (contando cada cero tantas veces como su orden) de f en U (el "interior" de Γ) es igual al número de veces que el camino $f\circ\Gamma$ rodea al origen.

5.8.1. Ceros de un polinomio en una región angular

5.52 Proposición. *Sea P una función polinómica con coeficientes complejos de grado $n \geqslant 2$, y sea U la región angular*

$$U = \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha < \arg z < \beta\}.$$

donde $-\pi \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi$, y supongamos que el polinomio P no se anula en la frontera de U. Entonces el número de ceros de P en U, contando cada cero tantas veces como su orden, viene dado por

$$\boxed{N_0(U) = \frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(\lim_{t\to+\infty}\vartheta(t) - \lim_{t\to-\infty}\vartheta(t)\right)} \tag{5.47}$$

donde $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un argumento continuo de la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P\left(-t\,\mathrm{e}^{i\beta}\right) & \text{para} \quad t \leqslant 0 \\ P\left(t\,\mathrm{e}^{i\alpha}\right) & \text{para} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

Demostración. Sea $K > 0$ tal que $P(z) \neq 0$ para $|z| \geqslant K$. Consideremos, para $R > K$, el camino cerrado (ver figura 5.16) $\Gamma_R = \gamma_R \dot{+} \sigma_R$ donde

$$\gamma_R : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_R(t) = R\,\mathrm{e}^{it},$$

$$\sigma_R : [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad \sigma_R(t) = \begin{cases} -t\,\mathrm{e}^{i\beta} & \text{para} \quad -R \leqslant t \leqslant 0 \\ t\,\mathrm{e}^{i\alpha} & \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant R \end{cases}$$

Observa que, por ser $R > K$, los ceros de P en U están todos en $U_R = U \cap D(0, R)$. Por el

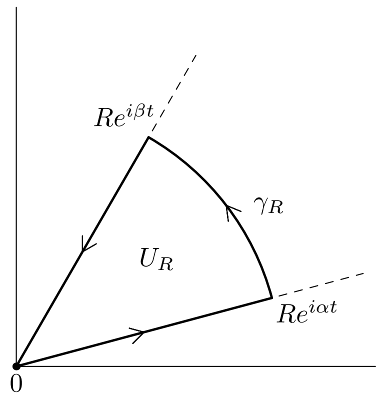


Figura 5.16. Camino Γ_R

principio del Argumento tenemos que

$$N_0(U) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z \tag{5.48}$$

Calcularemos el límite para $R \to +\infty$ de las dos últimas integrales en esta igualdad. Teniendo en cuenta que P es un polinomio de grado n, podemos escribir

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{n}{z} + \frac{P_0(z)}{Q_0(z)}$$

donde P_0 y Q_0 son polinomios verificando que gradoQ_0 - grado$P_0 \geqslant 2$.

Por tanto, existen números $M > 0$, $R_0 > 0$ tales que

$$\left|\frac{P_0(z)}{Q_0(z)}\right| \leqslant \frac{M}{|z|^2} \quad \text{siempre que } |z| \geqslant R_0$$

Por tanto, para $R \geqslant R_0$ se tiene que

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{P_0(z)}{Q_0(z)}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant R(\beta-\alpha)\frac{M}{R^2}$$

Además, para todo $R > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{n}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{n}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{iR\,\mathrm{e}^{it}}{R\,\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t = \frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}$$

Deducimos que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}$$

Calcularemos ahora el límite para $R \to +\infty$ de la última integral de la igualdad 5.48. Observa que para $t \in [-R,R]$ se tiene que $\varphi(t) = P\big(\sigma_R(t)\big)$, por lo que la función

$$L(t) = \log|P(\sigma_R(t))| + i\vartheta(t) \quad t \in [-R,R]$$

es un logaritmo continuo (y, por tanto, derivable) de $P\circ\sigma_R$. Tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{P'(\sigma_R(t))\sigma_R'(t)}{P\big(\sigma_R(t)\big)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} L'_R(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}[L(R)-L(-R)] =$$

$$= \log\left|\frac{P\big(\sigma_R(R)\big)}{P\big(\sigma_R(-R)\big)}\right| + i(\vartheta_R(R)-\vartheta_R(-R)) = \log\left|\frac{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\alpha}\big)}{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\beta}\big)}\right| + i(\vartheta(R)-\vartheta(-R))$$

Evaluando P en los puntos $R\,\mathrm{e}^{i\alpha}, R\,\mathrm{e}^{i\beta}$ se tiene

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\alpha}\big)}{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\beta}\big)} = \mathrm{e}^{in(\alpha-\beta)} \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \log\left|\frac{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\alpha}\big)}{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\beta}\big)}\right| = 0$$

Deducimos que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}(\vartheta(R)-\vartheta(-R))$$

Por tanto, tomando límites en la igualdad 5.48, deducimos que el número de ceros de P en U viene dado por

$$N_0 = \frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}(\vartheta(R)-\vartheta(-R))$$

■

5.53 Teorema (Teorema de Rouché)**.** *Sea Ω un dominio acotado, f y g funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Supongamos que*

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|+|g(z)| \qquad (z\in\operatorname{Fr}\Omega) \tag{5.49}$$

para todo z en la frontera de Ω. Entonces, contando cada cero tantas veces como su orden, se verifica que f y g tienen el mismo número de ceros en Ω.

Demostración. Observa que la desigualdad 5.49 implica que ni f ni g pueden anularse en la frontera de Ω. Dicha desigualdad, y la continuidad de f y g en $\overline{\Omega}$, implican que ni f ni g pueden ser idénticamente nulas en Ω. Por el principio de identidad y por ser $\overline{\Omega}$ compacto, deducimos que el número de ceros de f y de g en Ω es finito.

Sea K el conjunto

$$K=\{z\in\overline{\Omega}:|f(z)-g(z)|=|f(z)|+|g(z)|\}$$

Observa que K es un conjunto cerrado y acotado y por tanto es compacto. Además, en virtud de la desigualdad 5.49, se tiene que $K\subset\Omega$. Es evidente que los ceros de f y de g están en K. Sea Γ el ciclo que nos proporciona el teorema 5.14 para el compacto K en el abierto Ω.

Sea $U=\{z\in\Omega\backslash\Gamma^*:\operatorname{Ind}_\Gamma(z)=1\}$. Sabemos que $K\subset U$ por lo que los ceros de f y de g en Ω están todos en U. Por el principio del argumento deducimos que

$$N_0(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(número de ceros de } f \text{ en } \Omega \text{ contando multiplicidades)}$$

$$N_0(g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(número de ceros de } g \text{ en } \Omega \text{ contando multiplicidades)}$$

Para $z\in\Omega\backslash K$ se verifica que

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$$

lo que, según sabemos, en virtud de la desigualdad 1.8, equivale a que $\dfrac{f(z)}{g(z)}\notin\mathbb{R}_0^-$. En consecuencia la función $\varphi:\Omega\backslash K\to\mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(z)=\log\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) \qquad z\in\Omega\backslash K.$$

es holomorfa en $\Omega\backslash K$. Puesto que

$$\varphi'(z)=\frac{(f'(z)g(z)-f(z)g'(z))g(z)}{g^2(z)f(z)}=\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)},$$

resulta que φ es una primitiva en $\Omega\backslash K$ de la función $\dfrac{f'(z)}{f(z)}-\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ y, por tanto, la integral de dicha función en cualquier ciclo en $\Omega\backslash K$ es cero. En particular

$$\int_\Gamma\left(\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\mathrm{d}z=0$$

es decir, $N_0(f)=N_0(g)$. □

Observación

Es frecuente en las aplicaciones del teorema de Rouché que se verifique la desigualdad siguiente

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \qquad \text{para todo } z \in \operatorname{Fr}\Omega \tag{5.50}$$

Naturalmente si se verifica la desigualdad 5.50 también se verifica la desigualdad 5.49. Con frecuencia es fácil comprobar la desigualdad 5.50 lo que permite aplicar dicho teorema. No obstante, puede ocurrir que la desigualdad 5.50 no se verifique y sí se verifique la desigualdad 5.49.

El teorema de Rouché permite dar otra demostración sencilla del Teorema Fundamental del Álgebra.

5.54 Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra.)**.** *Todo polinomio, P, de grado n con coeficientes complejos tiene n ceros en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Podemos suponer que el coeficiente del término z^n es 1. Sea

$$P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$$

Aplicaremos el Teorema de Rouché con $f(z) = P(z)$ y $g(z) = z^n$. Debemos elegir un dominio Ω apropiado para comprobar la desigualdad 5.50. Observa que para $R > 1$ y $|z| = R$ se verifica que

$$|P(z) - g(z)| \leqslant MR^{n-1}$$

donde $M = |c_{n-1}| + \cdots + |c_1| + |c_0|$. Sea $\Omega = D(0,R)$ donde $R > M$. Entonces

$$|P(z) - g(z)| \leqslant MR^{n-1} < R^n = |g(z)| \qquad \text{para todo } \ z \in C(0,R)^*$$

El teorema de Rouché nos dice que, contando cada cero tantas veces como su orden, P tiene en el disco $D(0,R)$ tantos ceros como la función $g(z) = z^n$, esto es, n ceros. □

5.55 Corolario. *Sea Ω un dominio acotado y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ que además son holomorfas en Ω. Supongamos que la sucesión converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función f y que*

$$f(z) \neq 0, \qquad \textit{para todo } z \in \operatorname{Fr}\Omega$$

entonces existe un natural m tal que para $n \geqslant m$ se verifica que f_n y f tienen el mismo número finito de ceros en Ω (o en $\overline{\Omega}$).

Demostración. En virtud de las hipótesis, $\operatorname{Fr}\Omega$ es un compacto y f es una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω. Sea

$$\rho = \min\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

Como $f(z) \neq 0$ para $z \in \operatorname{Fr}\Omega$, tenemos que $\rho > 0$. Por definición de convergencia uniforme, existe un número $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ es $|f_n(z) - f(z)| < \rho$ para todo $z \in \overline{\Omega}$. En particular, para todo $z \in \operatorname{Fr}\Omega$ y todo $n \geqslant m$ tenemos

$$|f_n(z) - f(z)| < \rho \leqslant |f(z)| \leqslant |f(z)| + |f_n(z)|$$

por tanto, en vista del Teorema de Rouché, las funciones f_n y f tienen el mismo número finito de ceros en Ω. Además la desigualdad anterior implica que f_n y f no se anulan en la frontera de Ω, por tanto, también tienen el mismo número de ceros en $\overline{\Omega}$. □

5.56 Teorema (Teorema de Hurwitz.)**.** *Sea Ω un dominio y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω que no se anulan en ningún punto de Ω, es decir, $f_n(z) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \Omega$. Suponemos además que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función f. Entonces se verifica que o bien f es idénticamente nula en Ω, o bien f no se anula en ningún punto de Ω.*

Demostración. Por el Teorema de convergencia de Weierstrass, sabemos que f es holomorfa en Ω. Supongamos que f no es idénticamente nula en Ω. Entonces, si $f(a) = 0$ en algún punto $a \in \Omega$, como los ceros de f son puntos aislados en Ω, existirá un disco $\overline{D}(a,\delta) \subset \Omega$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D}(a,\delta) \backslash \{a\}$. El corolario anterior aplicado a la sucesión $\{f_n\}$ en el dominio formado por el disco $D(a,\delta)$ nos dice que para n suficientemente grande, f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(a,\delta)$. Deducimos así que f_n tiene al menos un cero en Ω, lo cual contradice las hipótesis hechas. Hemos probado, pues, que si f no es idénticamente nula en Ω entonces f no se puede anular en ningún punto de Ω. ■

5.57 Corolario. *Sea Ω un dominio y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en Ω que converge uniformemente en compactos de Ω a una función f. Entonces f es inyectiva o f es constante en Ω.*

Demostración. Supongamos que f no es inyectiva y probemos que es constante. Sean, pues, $a, b \in \Omega$ con $a \neq b$ tales que $f(a) = f(b)$. Consideramos el dominio $\Omega \backslash \{a\}$. Definimos las funciones

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(a) \qquad \text{para todo } z \in \Omega \backslash \{a\}$$

Como suponemos que cada f_n es inyectiva, entonces $g_n(z)$ no se anula en $\Omega \backslash \{a\}$. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente en compactos de Ω a f, la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente sobre compactos de $\Omega \backslash \{a\}$ a la función g dada por

$$g(z) = f(z) - f(a) \qquad \text{para todo } z \in \Omega \backslash \{a\}$$

Sabemos, por el Teorema de Hurwitz, que g es idénticamante cero o no se anula en ningún punto de $\Omega \backslash \{a\}$. Como $g(b) = 0$, concluimos que g idénticamente nula y, por tanto, $f(z) = f(a)$ para todo $z \in \Omega \backslash \{a\}$, esto es, f es constante en Ω, como queríamos probar. ■

Ejercicios propuestos

337. Calcula el número de ceros en el semiplano de la derecha de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10$;

b) $P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z - 10$;

c) $P(z) = z^6 - z^3 - 4z + 6$;

d) $P(z) = z^5 + 5z^3 + 11z^2 + 4z + 1$;

e) $P(z) = z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$;

f) $P(z) = z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 5$.

338. Sea f una función continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$ tal que $|f(z)| < 1$ siempre que $|z| = 1$. Prueba que f tiene exactamente un punto fijo en $D(0,1)$.

339. Calcula la distribución por cuadrantes de los ceros del polinomio

$$P(z) = z^8 + z^5 - z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 2z + 5.$$

340. Dados un número natural n y dos números reales distintos de cero a y b, determínese el número de ceros del polinomio $z^{2n} + az^{2n-1} + b^2$ situados en el semiplano de la derecha.

341. Calcula el número de ceros del polinomio $P(z) = z^6 + z^3 + 4z^2 + 2$ en cada uno de los discos $D(0, \frac{1}{2})$, $D(0,1)$ y $D(0,2)$.

342. Justifica que para $a \in \mathbb{R}$, $a > e$, la ecuación $e^z = az^n$, tiene n soluciones distintas en $D(0,1)$.

343. Prueba que la ecuación $(z+1)e^{-z} = 2z - 2$ tiene solución única en el semiplano de la derecha.

344. Sea $0 < |a| < 1$ y $p \in \mathbb{N}$. Prueba que la ecuación $(z-1)^p = a\,\mathrm{e}^{-z}$ tiene exactamente p ceros simples en $D(1,1)$ y si $|a| \leqslant 1/2^p$ dichos ceros están en $D(1, 1/2)$.

345. Prueba que los ceros del polinomio $z^4 + iz^3 + 1$ pertenecen al disco $D(0, \frac{3}{2})$ y determina cuántos de ellos se hallan en el primer cuadrante.

346. Prueba que todos los ceros del polinomio $z^8 + 3z^3 + 7z + 5$ se hallan situados en el anillo $A(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y que exactamente dos de ellos están en el primer cuadrante.

347. Prueba que todos los ceros del polinomio $P(z) = z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 6$ pertenecen al anillo $A(0; 1, \frac{7}{2})$ y determinar cuántos de ellos se hallan en el semiplano de la derecha.

348. Determina el número de ceros del polinomio $P(z) = 2z^6 - z^3 + 4z + 1$ en el semiplano de la derecha.

349. Determina el número de ceros del polinomio $z^5 + 5z^3 + 11z^2 + 4z + 1$ en el semiplano de la derecha y en el disco unidad.

350. Determina el número de ceros del polinomio $z^8 - 4z^5 + z^2 - 2$.

a) En el anillo $A(0; 1, 2)$.

b) En el semiplano de la derecha.

351. Determina el número de ceros del polinomio $P(z) = 2z^5 + 4z - 1$.

a) en el anillo $A(0; 1, 2)$;

b) en el semiplano de la derecha.

352. Determina el número de ceros del polinomio $P(z) = z^4 - z^2 + 2z + 4$.

a) en el disco unidad;

b) en el primer cuadrante.

353. Prueba que todos los ceros del polinomio $P(z) = z^6 - z^3 - 4z + 6$ pertenecen al anillo $A(0;1,2)$ y determínese cuántos de ellos se hallan en el semiplano de la derecha.

354. Dado $0 < \rho < 1$, prueba que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, el polinomio

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$$

no se anula en el disco $D(0,\rho)$.

355. Dado $\rho > 0$, prueba que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, todos los ceros de la función

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n}$$

se hallan en el disco $D(0,\rho)$.

356. Sea Ω un dominio y f una función holomorfa e inyectiva en Ω. Sea $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Justifica que para todo $w \in f(D(a,r))$ se verifica que

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z) - w} z \, \mathrm{d}z = f^{-1}(w)$$

357. Calcula, usando el principio de argumento generalizado, las integrales

$$\int\limits_{C(0,1)} z\,\mathrm{e}^z \operatorname{tg}(\pi z)\,\mathrm{d}z \qquad \int\limits_{C(0,1)} \frac{\cosh z}{\operatorname{tg} z}\,\mathrm{d}z \qquad \int\limits_{C(0,3)} \frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)(3z^2 - 4z - 1)}{z^3 - 2z^2 - z + 2}\,\mathrm{d}z$$

358. Calcula, usando el principio de argumento generalizado, las integrales

$$\int\limits_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z^3 + 1} \qquad \int\limits_{C(1,1/5)} \frac{3(z-1)^2 - 1}{z^3 - 3z^2 + 4z - 2}\,\mathrm{d}z$$

359. Demuestra el teorema de la aplicación abierta a partir del principio del argumento.

360. Demuestra el teorema del comportamiento local de una función holomorfa (teorema 4.32) a partir del principio del argumento.

361. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función f que no es idénticamente nula en Ω. Sea $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$. Prueba que hay una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de Ω tal que $\{z_n\} \to a$ y un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(z_n) = 0$ para todo $n \geqslant m$.

362. Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y regular en ∞ tal que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$ y las únicas singularidades de f son los puntos $z = -1$ donde f tiene un polo de orden uno y $\operatorname{Res}(f(z),-1) = 1$, y $z = 2$ donde f tiene un polo de orden 2 y $\operatorname{Res}(f(z),2) = -2$. Calcula f.

363. Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ cuyas únicas singularidades son $z=-1$ donde f tiene un polo de orden uno y $\operatorname{Res}(f(z),-1)=1$, y $z=2$ donde f tiene un polo de orden 2 y $\operatorname{Res}(f(z),2)=2$. Además $f(0)=7/4$ y $f(1)=5/2$. Calcula f y su desarrollo de Laurent en $A(0;1,2)$.

Capítulo 6

Series de Fourier. Transformadas de Fourier y de Laplace

Series de Fourier

Esencialmente la teoría de Series de Fourier persigue dos propósitos:

- El **análisis** o descomposición de una señal como suma o superposición (en general infinita) de sinusoides.
- La **síntesis** o recomposición de una señal a partir de sus sinusoides.

Habrás notado que estoy empleando la palabra “señal” como sinónimo de “función” y así lo seguiré haciendo a lo largo de esta lección con las precisiones que considere necesarias. En análisis armónico las señales más simples son las sinusoides a las que nos hemos referido antes. Conviene darles un repaso.

Sinusoides

Una sinusoide es una señal de la forma

$$A\operatorname{sen}(2\pi\nu t+\phi).$$

El número $A>0$ es la *amplitud*, $\nu>0$ es la *frecuencia* medida en ciclos por segundo o Hercios (Hz), $-\pi<\phi\leqslant\pi$ es la *fase* (fase inicial), $\omega=2\pi\nu$ es la frecuencia medida en radianes por segundo (que se llama a veces frecuencia angular). El *período* es el tiempo que necesita la sinusoide para completar un ciclo completo, es decir, el período es $T = 1/\nu$ segundos.

$$A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu(t+1/\nu)+\phi) = A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t+2\pi+\phi) = A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t+\phi).$$

En general, una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice que es *periódica* con *período* T si $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En tal caso cualquier múltiplo entero de T es también un período de f, esto es, $f(t+kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Por convenio, una función constante se considera periódica con cualquier período. Salvo este caso, cuando se dice que una función es periódica de período T se sobreentiende que T es el número positivo más pequeño que verifica la igualdad $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En la representación gráfica de la señal $f(t) = A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t+\phi)$ se interpreta $f(t)$ como la amplitud de la señal en el instante t. La amplitud A representa la máxima altura que alcanza dicha gráfica, esto es, el máximo absoluto de la función f (el mínimo absoluto es $-A$). La frecuencia es el número de veces (ciclos) que se repite la gráfica en un segundo. El período es el tiempo necesario para que la gráfica complete un solo ciclo.

6.1. Polinomios trigonométricos y coeficientes de Fourier

Un polinomio trigonométrico de orden N es una función de la forma

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} A_n\,\mathrm{sen}(2n\pi t/T+\phi_n) \tag{6.1}$$

En una suma de este tipo el número T es el *periodo fundamental* y $\nu = 1/T$ es la *frecuencia fundamental* (en hercios). A cada uno de los sumandos individuales, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia principal, se les llama *armónicos*. Esta forma de una suma trigonométrica tiene la ventaja de mostrar explícitamente la amplitud y la fase de cada uno de ellos pero es muy incómoda para los cálculos. Por ello es más frecuente escribir esta suma en la forma:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(2\pi nt/T)+b_n\,\mathrm{sen}(2\pi nt/T)) \tag{6.2}$$

la razón de escribir el término constante en la forma $a_0/2$ es para simplificar las fórmulas de los coeficientes que veremos en seguida.

Se trabaja con mucha más comodidad con estas sumas si usamos la exponencial compleja. Usando las ecuaciones de Euler tenemos que:

$$\cos(2\pi nt/T) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi int/T}+\mathrm{e}^{-2\pi int/T}}{2}, \qquad \mathrm{sen}(2\pi nt/T) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi int/T}-\mathrm{e}^{-2\pi int/T}}{2i}$$

con ello la suma (6.2) puede ser escrita como:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\,\mathrm{e}^{2\pi int/T} \tag{6.3}$$

La relación entre estas tres formas distintas de escribir una misma función viene dada por las siguientes igualdades válidas para todo $n = 1,2,3,\dots$:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{6.4}$$

$$a_n = A_n \operatorname{sen}\phi_n \qquad b_n = A_n \cos\phi_n \tag{6.5}$$

Supongamos que f es una señal que podemos representar como un polinomio trigonométrico con periodo T:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T}$$

entonces se verifica que los coeficientes en esta expresión están determinados de forma única por f y vienen dados por:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Las consideraciones anteriores motivan las siguientes definiciones.

6.1 Definición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una señal de periodo T integrable en $[0,T]$. Se definen los *coeficientes de Fourier* de f por:

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{Z})} \tag{6.6}$$

El polinomio trigonométrico:

$$\boxed{S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T}} \tag{6.7}$$

donde los coeficientes c_n vienen dados por (6.6), se llama *polinomio de Fourier de orden* N de f. La sucesión de los polinomios de Fourier de f se llama *serie de Fourier* de f y la representamos por $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T}$. Cuando dicha serie converge escribimos:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T}$$

Teniendo en cuenta 6.4 se deduce que las igualdades 6.6 y 6.7 pueden escribirse de forma equivalente:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\big(a_n \cos(2\pi n t/T) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n t/T)\big) \tag{6.8}$$

donde:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos(2\pi n t/T)\, f(t)\,\mathrm{d}t \qquad n = 0,1,2,\dots} \tag{6.9}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \operatorname{sen}(2\pi nt/T)\, f(t)\,\mathrm{d}t \qquad n = 1, 2, \dots} \tag{6.10}$$

Los a_n se llaman *coeficientes coseno* y los b_n *coeficientes seno* de f.

Observaciones

- También se utilizan las notaciones $c_n(f)$ y $\widehat{f}(n)$ para representar los coeficientes de Fourier c_n de f.

- Para calcular los coeficientes de Fourier de una señal de periodo T podemos integrar en cualquier intervalo de longitud T. Suele ser frecuente, por razones de simetría, elegir el intervalo $[-T/2, T/2]$.

- Observa que nada hemos dicho aún sobre la relación entre una función f y su serie de Fourier. La pregunta ¿de qué modo la serie de Fourier de f representa a f? no tiene una respuesta fácil porque tiene muchas respuestas. Mas adelante presentaremos algunos resultados en este sentido.

- Observa que si cambias una función en un número finito de puntos esto no afecta para nada a sus coeficientes de Fourier los cuales viene dados por medio de integrales. Igualmente, tampoco debe preocuparnos que una función no esté definida en un conjunto finito de puntos porque eso no afecta para nada a su integrabilidad ni al valor de su integral.

- A diferencia de la serie de Taylor de una función, la cual solamente está definida si dicha función es indefinidamente derivable, la única condición para que la serie de Fourier de una función esté definida es que la función sea integrable en un intervalo. Te recuerdo que hay funciones integrables con infinitas discontinuidades. Es decir, el concepto de serie de Fourier es mucho menos restrictivo que el de serie de Taylor y esa es una de las grandes ventajas de la teoría de series de Fourier: puede aplicarse a funciones muy generales.

- En contra de lo que pudiera parecer a primera vista, la hipótesis de periodicidad no es restrictiva para la aplicación de la teoría de series de Fourier.

  En efecto, si queremos representar una función f en un intervalo $[a, b]$ por medio de una serie de Fourier, lo único que se necesita es que dicha función esté definida y sea integrable en dicho intervalo. En tal caso la serie de Fourier $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{2\pi int/(b-a)}$ cuyos coeficientes son

  $$c_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{e}^{-2\pi int/(b-a)}\, f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

  representa (cuando se dan las condiciones de convergencia apropiadas) una función periódica de periodo $b-a$ que coincide con f en el intervalo $]a, b[$.

  Podemos considerar esto desde otro punto de vista. Si estamos interesados en representar por medio de una serie de Fourier una función f definida e integrable en un intervalo $[a, b]$

podemos *extender* dicha función a todo $\mathbb{R}$ de manera que la extensión sea una función periódica de período $T = b - a$. Para ello basta repetir la gráfica de f en intervalos de longitud $T = b - a$ (si $f(b) = f(a+T) \neq f(a)$ será preciso cambiar el valor de f en uno de los extremos del intervalo $[a, b]$).

Debes tener en cuenta que en los ejercicios suele definirse una función en un intervalo $[a, b]$ y se dice que dicha función *se considera extendida por periodicidad* fuera de dicho intervalo. *Pero esto último casi nunca se hace* por lo que, para calcular los coeficientes de Fourier debes integrar la función en el intervalo $[a, b]$ donde dicha función se define y no en otro.

- La consideración de funciones complejas, si bien desde un punto de vista teórico no presenta ninguna dificultad e incluso hace que la teoría sea más elegante y fácil de desarrollar, desde un punto de vista práctico no añade nada pues en las aplicaciones siempre se consideran señales reales.

6.2 Ejemplo (Función impulso rectangular). Se llaman *impulsos rectangulares* las señales que son nulas salvo en un determinado intervalo de tiempo en el que son constantes. El ejemplo típico es la función $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con más generalidad, dado un número $a > 0$ podemos considerar la función Π_a definida por $\Pi_a(x) = \Pi(x/a)$, con lo que

$$\Pi_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < a/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado un número $T > a$ podemos considerar la extensión periódica de Π_a con periodo T cuya gráfica es de la forma

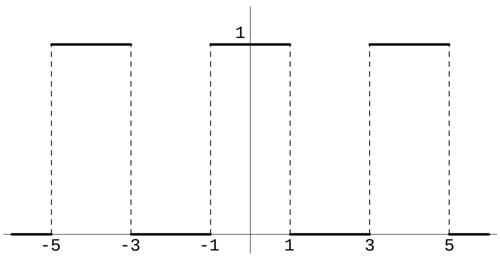


Figura 6.1. Periodización con periodo 4 de Π_2

Llamemos f a dicha función. Los coeficientes de Fourier de f son

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2\pi i n}\Big[\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\Big]_{t=-a/2}^{t=a/2} = \\ &= \frac{-1}{\pi n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\pi i n a/T} - \mathrm{e}^{\pi i n a/T}}{2i}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\pi n a/T)}{\pi n} \end{aligned}$$

para n distinto de cero, y

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-a/2}^{a/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{a}{T}.$$

♦

6.1.1. Series de Fourier seno y coseno

Los coeficientes seno de una función par son nulos y los coeficientes coseno de una función impar son nulos. Esto lleva a definir las series de Fourier seno y coseno de una función como sigue.

Sea f una función definida e integrable en el intervalo $[0,L]$. Podemos *extender* f al intervalo $[-L,L]$ de las formas siguientes:

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L \leqslant x < 0 \\ f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

y

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & -L \leqslant x < 0 \\ f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

Es claro que f_1 es impar y f_2 es par y coinciden con f en $[0,L]$. La función f_1 es llamada la *extensión impar* de f y f_2 es llamada la *extensión par* de f.

- La serie de Fourier de la extensión de período $2L$ de f_1 se llama la *serie de Fourier seno* de f y viene dada por:

$$\sum_{n\geqslant 1} b_n \operatorname{sen}(\pi n t/L), \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\operatorname{sen}(\pi n t/L)\,\mathrm{d}t$$

- La serie de Fourier de la extensión de período $2L$ de f_2 se llama la *serie de Fourier coseno* de f y viene dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(\pi n t/L), \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos(\pi n t/L)\,\mathrm{d}t$$

6.1.2. Convergencia de las series de Fourier

Uno de los problemas básicos de las series de Fourier es dar condiciones sobre una función que garanticen que su serie de Fourier converge puntualmente a dicha función. Uno de los primeros resultados en este sentido se debe a Dirichlet y se refiera a funciones monótonas a trozos. Una función f es *monótona a trozos* en un intervalo cuando dicho intervalo puede expresarse como la unión de un número finito de intervalos en los que la función es monótona. Recuerda que una función monótona acotada siempre tienes límites laterales en todo punto.

6.3 Teorema (Dirichlet)**.** *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una señal periódica con período T que es monótona a trozos y acotada en $[0,T]$. Se verifica entonces que*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T}=\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$$

donde $f(t+)$ y $f(t-)$ son, respectivamente, los límites por la derecha y por la izquierda de f en t. En particular, la serie de Fourier de f converge a $f(t)$ en todo punto de continuidad de f.

Para aplicar este resultado a los puntos extremos del intervalo se entiende que $f(T+)=f(0+)$ y $f(0-)=f(T-)$.

El resultado anterior se refiere a la convergencia puntual de la serie. Si lo que queremos es asegurar convergencia uniforme hay que ser más exigentes.

Una función f se dice que es *continua a trozos* en un intervalo $[a,b]$ si hay una partición $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ del intervalo $[a,b]$ de forma que

- f es continua en cada intervalo $]x_i,x_{i+1}[$, para $i=0,1,2,\dots,n-1$, y
- f tiene límites laterales en los puntos x_i, $i=0,1,\dots,n$.

Diremos que una función f es *derivable a trozos* en un intervalo $[a,b]$ si hay una partición $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_{m-1}<t_m=b$ del intervalo $[a,b]$ de forma que

- f es derivable en cada intervalo $]t_i,t_{i+1}[$, para $i=0,1,2,\dots,m-1$, y
- La función derivada f' tiene límites laterales en los puntos t_i, $i=0,1,\dots,m$.

Diremos que una función es *suave a trozos* en un intervalo $[a,b]$ si es derivable a trozos en dicho intervalo y su derivada es continua a trozos.

6.4 Teorema. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una señal periódica con período T que es continua y suave a trozos en $[0,T]$. Entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en $[0,T]$.*

6.1.3. Espectro, dominio del tiempo y dominio de la frecuencia

Una señal analógica dada por medio de una función $f(t)$ se dice que está dada en *el dominio del tiempo*. Supongamos que dicha señal es T-periódica y monótona a trozos, entonces

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T}$$

en todo punto de continuidad de f. Las frecuencias de los armónicos complejos que forman esta serie son n/T. El *espectro* de f se define como el conjunto de pares $\{(n/T,c_n):n\in\mathbb{Z}\}$. El conocimiento del espectro de la señal determina a dicha señal. Podemos considerar una función $\widehat{f}$ definida en el conjunto de las frecuencias $\{n/T:n\in\mathbb{Z}\}$ por $\widehat{f}(n/T)=c_n$. Se suele decir que dicha función representa a la señal f en el *dominio de la frecuencia*. La “gráfica” de la función

$|\widehat{f}|$ se llama el *espectro de amplitudes*, y la "gráfica" de la función $\arg \widehat{f}$ se llama el *espectro de fases*.

Recuerda que si la serie de Fourier la escribimos en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2n\pi\nu t + \phi_n)$$

donde $A_n \geqslant 0$ es la amplitud del armónico n-ésimo y ϕ_n es su fase, entonces, en virtud de las igualdades 6.4 y 6.5, se verifica que $c_n = \frac{-i}{2} A_n \, e^{i\phi_n} = \frac{1}{2} A_n \, e^{i(\phi_n - \pi/2)}$; y eligiendo $\phi_n \in]-\pi/2, 3\pi/2]$ resulta que $\phi_n - \pi/2 = \arg(c_n)$, lo que justifica la terminología empleada. Ten en cuenta que para una señal real se verifica siempre que $c_n = \overline{c_{-n}}$ lo que explica el aspecto de las siguientes "gráficas". El espectro de amplitudes consiste en líneas espectrales regularmente espaciadas en

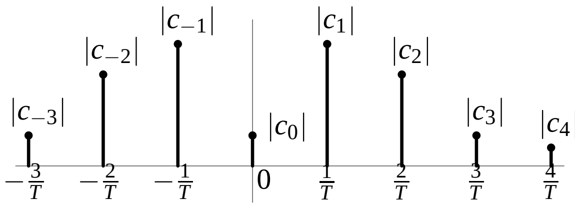


Figura 6.2. Espectro de amplitudes

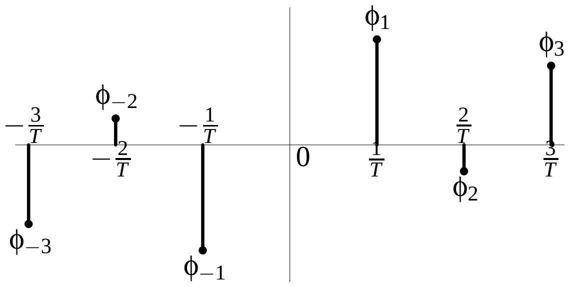


Figura 6.3. Espectro de fases

las frecuencias n/T. Para $n = 1$ y $n = -1$ las líneas corresponden a la *frecuencia fundamental*. Las demás líneas son llamadas *armónicos* de la señal.

Lo interesante de estas representaciones es que para manipular una señal analógica es más fácil hacerlo en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, si la señal es un sonido las frecuencias bajas corresponden a los tonos graves y las altas a los agudos, mientras que las amplitudes representan la intensidad del sonido del armónico correspondiente.

Cuando ves las barras que suben y bajan en un ecualizador de sonido o la gráfica de un electrocardiograma... ¡Estás viendo análisis de Fourier!

Ejercicios propuestos

370. 1. Sea $f(t)=\operatorname{sen}(t/3)+\operatorname{sen}(t/4)$. ¿Es f periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es su período?

2. Sea $f(t)=\operatorname{sen}(\lambda t)+\operatorname{sen}(\mu t)$. Prueba que para que f sea periódica es necesario y suficiente que λ/μ sea un número racional.

3. ¿Es periódica la función $f(t)=\operatorname{sen}(10t)+\operatorname{sen}\big((10+\pi)t\big)$?

371. Considera las distintas formas de escribir la serie de Fourier de una función real periódica de período 1:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2\pi nt)+b_n\operatorname{sen}(2\pi nt)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{2\pi int}$$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\operatorname{sen}(2\pi nt+\phi_n)$$

Indica con detalle cómo se pasa de una a otra, es decir, las relaciones que hay entre los distintos coeficientes.

372. Sea f una señal derivable a trozos, c_n sus coeficientes de Fourier, a_n s y b_n sus coeficientes coseno y seno respectivamente. Justifica las siguientes afirmaciones:

1. f es real $\iff$ $c_{-n}=\overline{c_n}$ $(n\in\mathbb{N})$ $\iff$ $a_n\in\mathbb{R},\ b_n\in\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$
2. f es par $c_{-n}=c_n$ $(n\in\mathbb{N})$ $\iff$ $b_n=0$ $(n\in\mathbb{N})$
3. f es impar $\iff$ $c_{-n}=-c_n$ $(n\in\mathbb{N})$ $\iff$ $a_n=0$ $(n\in\mathbb{N})$
4. f real y par $\iff$ $c_{-n}=c_n\in\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$
5. f real e impar $\iff$ $c_{-n}=-c_n\in i\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$

373. Prueba que si la serie de Fourier converge uniformemente se verifica la **igualdad de Parseval**:

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2}$$

Escribe dicha igualdad usando los coeficientes seno y coseno.

374. Prueba que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ es una función suave a trozos con periodo 2π se verifica que $\widehat{f'(k)}=ik\widehat{f}(k)$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. En otros términos: la serie de Fourier de la derivada de f se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de f.

375. Calcula la serie de Fourier de la función 2π-periódica

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } -\pi<x<-\pi/2\\ 1, & \text{si } -\pi/2<x\leqslant\pi\end{cases}$$

376. Calcula la serie de Fourier de la función $f:[4,6]\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{si } 4<x\leqslant 5\\ 2, & \text{si } 5<x\leqslant 6\end{cases}$$

377. La función "triangular" es la función $\Lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\Lambda(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } |x|\leqslant 1,\\ 0 & \text{para } |x|>1.\end{cases}$$

Con más generalidad, dado un número $a>0$ podemos considerar la función Λ_a definida por $\Lambda_a(x)=\Lambda(x/a)$, con lo que

$$\Lambda_a(x)=\begin{cases}1-|\frac{x}{a}|, & \text{si } |x|\leqslant a\\ 0, & \text{para } |x|>a.\end{cases}$$

Dado un número $T>a$ podemos considerar la extensión periódica de Λ_a con periodo T.

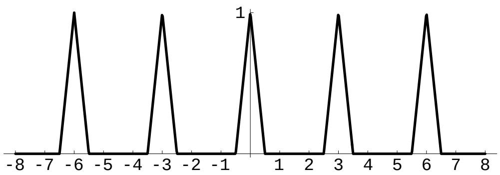


Figura 6.4. Periodización de periodo 3 de $\Lambda_{1/2}$

Calcula los coeficientes de Fourier de la extensión T-periódica de la función Λ_a.

378. Calcula las series de Fourier de las extensiones periódicas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ \pi, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

379. Calcula la serie de Fourier coseno de la función $f(x)=x$ para $x\in[0,\pi]$.

380. Calcula la serie de Fourier seno de la función $f(x)=1$ para $x\in[0,\pi]$.

381. Calcula la serie de Fourier seno de la función $f(x)=\cos x$ para $x\in[0,\pi]$.

382. Sea $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Si los coeficientes de Fourier de una señal f son c_n, ¿cuáles son los coeficientes de Fourier de la señal trasladada $g(t)=f(t-a)$? ¿Y los de la señal $h(t)=f(at)$?.

383. Calcula las series de Fourier de las funciones $|\operatorname{sen} t|$ y $|\cos t|$.

384. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 1 dada por $f(t)=t$ para $0\leqslant t<1$ y $f(t+1)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

Utiliza la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

385. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2π dada por $f(t) = t^2$ para $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ y $f(t+2\pi) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

386. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2 dada por $f(t) = |t|$ para $-1 \leqslant t \leqslant 1$ y $f(t+2) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

387. Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \notin Z$, se define la función de período 2 $f(t) = \mathrm{e}^{i\pi a t}$ para $-1 \leqslant t < 1$ y $f(t) = f(t+2)$. Calcula la serie de Fourier de f y utiliza la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)}$$

388. Sea $f(x) = x(1-x)$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ y consideremos la extensión impar de f de período 2.

1. Calcula la serie de Fourier seno de f.
2. Justifica que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.
3. Calcula la serie de Fourier coseno de $f'(x) = 1-2x$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$; y la serie de Fourier de $f''(x) = -2$.
4. deduce que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

6.2. Transformada de Fourier

6.5 Definición. La transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es la función

$$\widehat{f} = \mathscr{F} f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

definida por:

$$\boxed{\widehat{f}(s) = \mathscr{F} f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i s t} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (s \in \mathbb{R})} \tag{6.11}$$

Comentarios

- Usaremos las notaciones $\widehat{f}$ y $\mathscr{F}f$ para representar la transformada de Fourier de la señal f. A veces conviene escribir $\mathscr{F}f$ en la forma $\mathscr{F}(f)$ para indicar claramente que $\mathscr{F}f$ es la transformada de Fourier de la función f.

- El parámetro "s" en la definición 6.11 se interpreta como frecuencias. La función $\widehat{f}$ se interpreta como la representación de la señal f en el dominio de la frecuencia.

- La transformada de Fourier convierte una señal, $f(t)$, dada en el dominio del tiempo en otra señal, $\widehat{f}(s)$, en el dominio de la frecuencia.

- Representaremos por $L^1(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tales que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

  Para que la definición 6.11 tenga sentido es condición suficiente que $f\in L^1(\mathbb{R})$.

- Para calcular la transformada de Fourier de una función tenemos libertad para modificar como queramos dicha función en un conjunto siempre que ello no afecte al valor de la integral. Por ejemplo, podemos cambiar el valor de la función en cualquier conjunto finito de puntos. Por eso, para calcular la transformada de Fourier de una función no es imprescindible que la función esté definida en todo $\mathbb{R}$, es suficiente, por ejemplo, que esté definida en todo $\mathbb{R}$ excepto en un conjunto finito de puntos.

- No hay acuerdo unánime sobre la definición de la transformada de Fourier. Algunos detalles sobre los que los distintos autores no se ponen de acuerdo son: el signo en la exponencial, multiplicar la integral por $1/2\pi$ o por $1/\sqrt{2\pi}$, incluir o no incluir 2π en el exponente de la exponencial.

6.2.1. La transformada inversa de Fourier

La transformada de Fourier permite analizar una señal f por sus componentes de frecuencia. El conjunto $\Omega(f)=\left\{s\in\mathbb{R}:\widehat{f}(s)\neq 0\right\}$ se llama espectro continuo de la señal f. Cada frecuencia $s\in\Omega(f)$ tiene como amplitud $|\widehat{f}(s)|$ y su fase es $\arg\widehat{f}(s)$. La señal f queda caracterizada completamente por $\widehat{f}$ en el sentido de que el conocimiento de $\widehat{f}$ permite recuperar f.

6.6 Definición. La transformada inversa de Fourier de una función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ es la función $\breve{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida por:

$$\breve{g}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi i s t}\, g(s)\,\mathrm{d}s \qquad (t\in\mathbb{R}) \tag{6.12}$$

Es usual usar la notación $\breve{g}=\mathscr{F}^{-1}g$ para representar la transformada de Fourier inversa de g. Se verifica el siguiente importante resultado.

6.7 Teorema (de inversión de Fourier)**.** *Si f es una señal suave a trozos tal que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y también $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, se verifica que:*

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi i s t}\, \widehat{f}(s)\,\mathrm{d}s \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{6.13}$$

En particular, en todo punto $t \in \mathbb{R}$ en el que f sea continua es

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi i s t}\, \widehat{f}(s)\,\mathrm{d}s \tag{6.14}$$

La igualdad (6.11) se llama la *ecuación de análisis* y la igualdad (6.14) se llama *ecuación de síntesis*. Observa que la ecuación de síntesis permite reconstruir una señal no periódica a través de sus componentes de frecuencia y puede verse como una "versión continua" de la representación de una señal periódica por su serie de Fourier.

Explícitamente, la igualdad (6.14) afirma que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i s u}\, f(u)\,\mathrm{d}u \right] \mathrm{e}^{2\pi i s t}\,\mathrm{d}s \tag{6.15}$$

Evidentemente, es más cómodo escribir esta igualdad en la forma:

$$f = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F} f) \tag{6.16}$$

Es notable la simetría que hay entre la transformada de Fourier y su inversa: solamente se diferencian por un cambio de signo en la exponencial. De hecho, se verifica también la igualdad:

$$g = \mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1} g) \tag{6.17}$$

La transformada de Fourier es una operación que regulariza y suaviza las funciones. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

6.8 Teorema. *La transformada de Fourier de una señal integrable, $f \in L^1(\mathbb{R})$, es una función continua, acotada y* $\lim\limits_{s \to \pm\infty} \mathscr{F} f(s) = 0$.

6.2.2. Propiedades de la transformada de Fourier

Algunas de las propiedades que siguen son generales, es decir, se satisfacen solamente con la hipótesis de que las funciones que en ellas intervienen estén en $L^1(\mathbb{R})$ para que sus correspondientes transformadas estén definidas. Otras propiedades requieren hipótesis adicionales en las que no vamos a entrar. Te aconsejo que aprendas estas propiedades como un formalismo útil para calcular transformadas de Fourier. Para ello tendrás que memorizar las transformadas de Fourier de unas pocas funciones básicas y a partir de ellas aplicando las propiedades que siguen, *sin necesidad de calcular integrales*, podrás deducir las transformadas de Fourier de muchísimas funciones más.

Linealidad. La transformada de Fourier es un operador lineal. Esto quiere decir que si α y β son números y f, g señales, se verifica la igualdad:

$$\mathscr{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathscr{F} f + \beta \mathscr{F} g$$

Propiedades de simetría

De las definiciones dadas para la transformada de Fourier y su inversa:

$$\mathscr{F} f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi ist} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi st) f(t)\,\mathrm{d}t - i \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(2\pi st) f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{F}^{-1} f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi ist} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi st) f(t)\,\mathrm{d}t + i \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(2\pi st) f(t)\,\mathrm{d}t$$

y teniendo en cuenta que el coseno es par y el seno impar, se deducen las siguientes propiedades de simetría.

1. $\mathscr{F} f(s) = \mathscr{F}^{-1} f(-s)$.
2. **Regla de inversión**. $\mathscr{F}(\mathscr{F} f)(s) = f(-s)$.
3. Si la función f es par entonces se tiene que:

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(2\pi st) f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \operatorname{sen}(2\pi st) f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   por lo que

   $$\mathscr{F} f(s) = \mathscr{F}^{-1} f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi st) f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \int_{0}^{+\infty} \cos(2\pi st) f(t)\,\mathrm{d}t$$

   y la transformada de Fourier de f coincide con su transformada inversa y es una función par.
4. Análogamente, si f es impar su transformada de Fourier también es impar y:

   $$\mathscr{F} f(s) = -\mathscr{F}^{-1} f(s) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(2\pi st) f(t)\,\mathrm{d}t = 2i \int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen}(2\pi st) f(t)$$

5. Si f es real entonces $\mathscr{F} f(-s) = \overline{\mathscr{F} f(s)}$.
6. Si f es real y par su transformada de Fourier también es real y par.
7. Si f es real e impar su transformada de Fourier es impar y toma valores imaginarios puros.

Las siguientes dos propiedades se obtienen fácilmente con un sencillo cambio de variable.

Traslación en el tiempo. Dado un número $a \in \mathbb{R}$ y una señal f, definimos la señal $\tau_a f$ por:

$$\tau_a f(t) = f(t-a)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\tau_a f}\,(s) = \mathrm{e}^{-2\pi ias}\,\widehat{f}(s)$$

Es decir, una traslación en el tiempo produce un cambio de fase en la transformada.

Cambio de escala o dilatación. Dado un número $a \in \mathbb{R}^*$ y una señal f, definimos la señal $\sigma_a f$ por:

$$\sigma_a f(t) = f(at)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\sigma_a f}\,(s) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\Big(\frac{s}{a}\Big)$$

Es decir una dilatación ($a > 1$) o una compresión ($a < 1$) en el dominio del tiempo se corresponde con una compresión o dilatación en el dominio de la frecuencia más un cambio de escala.

Propiedad de modulación. Dado $a \in \mathbb{R}$, y una señal f, se verifica que la transformada de Fourier de la función $g(t) = \mathrm{e}^{2\pi iat} f(t)$ es la función $\tau_a \widehat{f}$.

Esta propiedad es inmediata pues:

$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi ist} f(t)\,\mathrm{e}^{2\pi iat}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i(s-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(s-a)$$

La aplicación de la transformada de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales se basa en la siguiente propiedad.

Propiedad de derivación

$$\mathscr{F}(f')(s) = 2\pi is\mathscr{F}f(s) \qquad \mathscr{F}(-2i\pi t f(t))(s) = (\mathscr{F}f)'(s)$$

Igualdad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}f(s)\overline{\mathscr{F}g(s)}\,\mathrm{d}s$$

En particular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathscr{F}f(s)|^2\,\mathrm{d}s$$

6.2.3. Ejemplos

6.9 Ejemplo (La función pulso rectangular). Es la función dada por

$$\Pi(t)=\begin{cases}1 & |t|<1/2\\ 0 & |t|>1/2\end{cases}$$

Para calcular su transformada de Fourier no es preciso definir dicha función en los puntos $\pm\frac{1}{2}$ pero, para recuperar esta función por medio de una transformada de Fourier es necesario definir su valor en dichos puntos igual a $1/2$. Como se trata de una función par su transformada de Fourier viene dada por:

$$\widehat{\Pi}(s)=2\int_0^{+\infty}\Pi(t)\cos(2\pi st)\,\mathrm{d}t=2\int_0^{1/2}\cos(2\pi st)\,\mathrm{d}t=2\left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi st)}{2\pi s}\right]_{t=0}^{t=1/2}=\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$$

♦

6.10 Ejemplo (La función "cardinal seno" o "función de muestreo"). Es la función dada para todo $t\in\mathbb{R}$ por

$$\operatorname{senc}(t)=\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t}$$

por supuesto, $\operatorname{senc}(0)=1$.

La transformada de Fourier de esta función se deduce fácilmente de que, según acabamos de ver, $\widehat{\Pi}=\operatorname{senc}$ y, como la función Π es par, obtenemos

$$\mathscr{F}\operatorname{senc}=\mathscr{F}(\mathscr{F}\Pi)=\mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}\Pi)=\Pi.$$

♦

6.11 Ejemplo (Decaimiento exponencial truncado). Es la función dada por

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-t}, & t>0\end{cases}$$

Podemos calcular su transformada de Fourier directamente:

$$\widehat{f}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\pi ist}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-2\pi is-1)t}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-2\pi is}}{1+2\pi is}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}=\frac{1}{1+2\pi is}$$

♦

6.12 Ejemplo (La función de Laplace). Es la función dada por

$$g(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$$

Para calcular su transformada de Fourier observamos que $g(t)=f(t)+f(-t)$ donde f es el decaimiento exponencial truncado. Deducimos que:

$$\widehat{g}(s)=\widehat{f}(s)+\widehat{f}(-s)=\frac{1}{1+2\pi is}+\frac{1}{1-2\pi is}=\frac{2}{1+4\pi^2s^2}$$

♦

6.13 Ejemplo (La función gausiana unidad). Es la función definida por:

$$f(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

Esta función tiene la notable propiedad de ser invariante para la transformada de Fourier: su transformada de Fourier es ella misma. Para calcularla podemos usar el hecho de que $f'(t) = -2\pi t f(t)$ y tomar transformadas de Fourier en ambos lados de esta igualdad con lo que, en virtud de la propiedad de derivación, resulta:

$$2\pi i s \widehat{f}(s) = \frac{1}{i}\widehat{f}'(s)$$

Es decir

$$\widehat{f}'(s) + 2\pi s \widehat{f}(s) = 0$$

Deducimos de aquí que la función $\widehat{f}(s)\,\mathrm{e}^{\pi s^2}$ tiene derivada nula por lo que

$$\widehat{f}(s) = \widehat{f}(0)\,\mathrm{e}^{-\pi s^2} = \mathrm{e}^{-\pi s^2} = f(s)$$

Donde hemos usado el resultado bien conocido $\widehat{f}(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.

♦

Ejercicios propuestos

389. Supongamos que reproduces en un magnetofón una cinta a velocidad doble de la velocidad a que se ha grabado. Interpreta lo que ocurre mediante la propiedad de cambio de escala o dilatación de la transformada de Fourier.

390. Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, calcula, sin hacer integrales, la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

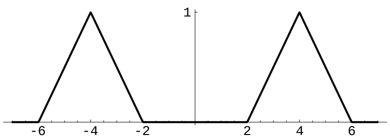
1. $\Pi_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a/2 \\ 0, & |t| \geqslant a/2 \end{cases}$
2. $f(t) = \Pi\big((t-b)/c\big)$ donde Π es la función "pulso rectangular".
3. $f(t)$ es una función escalonada $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k \Pi\left(\frac{x-b_n}{c_n}\right)$.
4. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & x < 0 \text{ o } x > 2 \end{cases}$
5. $f(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & |t| < a/2 \\ 0, & |t| \geqslant a/2 \end{cases}$
6. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\,\mathrm{e}^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}$

7. $f(t) = \cos(2\pi\beta t)\,\mathrm{e}^{-\pi(x/\alpha)^2}$
8. $f(t) = \dfrac{1}{1+2\pi i t}$
9. $f(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-\pi t^2}$

391. Calcula mediante integración la transformada de Fourier de la “función triángulo” definida por:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \leqslant 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

392.
1. Supuesto conocida la transformada de Fourier de una señal f, calcula la transformada de Fourier de la señal $g(t) = f(t)\cos(2\pi a t)$.
2. Calcula la señal (en el dominio del tiempo) cuya transformada de Fourier tiene la gráfica siguiente.



6.3. Convolución y transformada de Fourier

Procesar una señal consiste en modificar sus componentes de frecuencia. Si la señal es analógica y su transformada de Fourier es

$$\widehat{f}(s) = |\widehat{f}(s)|\,\mathrm{e}^{i\vartheta(s)}$$

donde $\vartheta(s) = \arg \widehat{f}(s)$, podemos estar interesados en modificar las amplitudes, $|\widehat{f}(s)|$, o las fases, $\arg \widehat{f}(s)$, correspondientes a cada frecuencia s, para obtener una nueva señal que podemos representar en la forma:

$$\rho(s)|\widehat{f}(s)|\,\mathrm{e}^{i\varphi(s)}\,\mathrm{e}^{i\vartheta(s)}$$

donde la función $\rho(s) \geqslant 0$ da cuenta del cambio producido en la amplitud, y la función $\mathrm{e}^{i\varphi(s)}$ da cuenta del cambio producido en la fase. Esto nos lleva a considerar la función $\rho(s)\,\mathrm{e}^{i\varphi(s)}$ y a concluir que $\widehat{f}(s)\rho(s)\,\mathrm{e}^{i\varphi(s)}$ es la transformación más general que podemos hacer sobre nuestra señal modificando amplitudes y fases. Es natural interpretar la función $\rho(s)\,\mathrm{e}^{i\varphi(s)}$ como la transformada de Fourier de una señal analógica $g(t)$, por tanto $g(t) = \mathscr{F}^{-1}(\rho(s)\,\mathrm{e}^{i\varphi(s)})(t)$, y a preguntarnos qué operación debemos hacer con las señales $f(t)$ y $g(t)$ para obtener una nueva señal cuya transformada de Fourier sea precisamente $\widehat{g}(s)\,\widehat{f}(s)$. Está claro que dicha operación será el modelo más general del procesamiento de señales. Calculemos $\widehat{g}(s)\widehat{f}(s)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(s)\widehat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi ist}\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi isx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi ist}\,\mathrm{e}^{-2\pi isx}\,\mathrm{d}t\right] f(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi is(t+x)}\,\mathrm{d}t\right] f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(u-x)\,f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi isu}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(u-x)\,\mathrm{e}^{-2\pi isu}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(u-x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-2\pi isu}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Pero esto que hemos obtenido es justamente la transformada de Fourier de la función

$$h(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(u-x)\,\mathrm{d}x$$

6.14 Definición. La convolución de dos señales f y g es la función

$$\boxed{h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)\,f(x)\,\mathrm{d}x \qquad t\in\mathbb{R}}$$

dicha función se representará por $f*g$ y se llama la convolución de f y g.

Deducimos de lo anterior el siguiente resultado que expresa que la convolución en el dominio del tiempo se corresponde con la multiplicación en el dominio de la frecuencia.

6.15 Teorema (de convolución)**.** $\mathscr{F}(f*g)(s) = \mathscr{F}f(s)\mathscr{F}g(s)$.

Teniendo en cuenta la simetría entre la transformada de Fourier y su inversa, también se verifica la igualdad:

$$\mathscr{F}^{-1}(f*g) = (\mathscr{F}^{-1}f)(\mathscr{F}^{-1}g)$$

y, lo que es más interesante:

$$\mathscr{F}(fg) = \mathscr{F}f*\mathscr{F}g$$

es decir, la multiplicación en el dominio del tiempo se corresponde con la convolución en el dominio de la frecuencia.

Propiedades de la convolución

La operación de convolución se comporta de forma parecida a la multiplicación. Concretamente, se verifican las siguientes propiedades:

- **Conmutativa.** $f*g = g*f$.
- **Asociativa.** $(f*g)*h = f*(g*h)$.
- **Distributiva.** $(f+g)*h = f*h+g*h$.

La última propiedad es inmediata y las otras dos son consecuencia fácil del teorema de convolución.

¿Qué es la convolución?

La convolución de funciones es una herramienta muy versátil que tiene distintos significados en distintos campos y no admite una interpretación única. Se trata de una operación que no es fácilmente visualizable y que tiene cierta complicación: para calcular el valor de la convolución de dos funciones en un solo punto hay que usar todos los valores de ambas funciones y realizar una integración. En la figura 6.5 tienes un intento de visualización del cálculo de la convolución de la función pulso rectangular, Π, consigo misma en el punto $x = \mathtt{0.75}$.

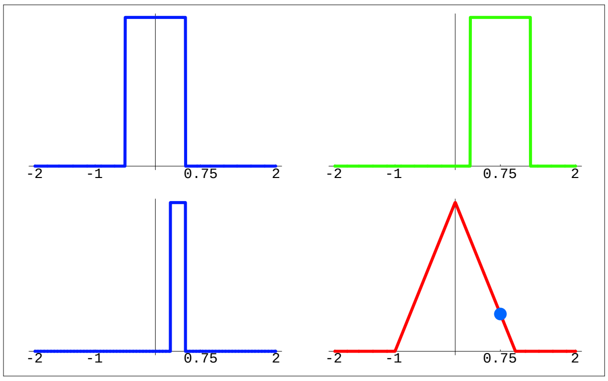


Figura 6.5. Gráficas de $\Pi(x)$ (azul), $\Pi(\mathtt{0.75}-x)$ (verde), $\Pi(x)\Pi(\mathtt{0.75}-x)$ (azul), $\Pi*\Pi(x)$ (rojo). El punto azul es el valor $\Pi*\Pi(\mathtt{0.55})$

Observa que aunque la función pulso rectangular es discontinua en los puntos $\pm 1/2$ su convolución es la función triángulo que es continua. Esta es una propiedad importante de la convolución: *la convolución de dos funciones es una función al menos tan buena como la mejor de ambas*.

Podemos ver la convolución como una operación para promediar y suavizar una función por medio de otra. Consideremos que g es una función positiva, concentrada cerca de 0, con área total igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Por ejemplo, g podría ser una campana de Gauss alta y estrecha centrada en 0. En tal caso, la función $x \mapsto g(t-x)$ está concentrada cerca de t y sigue teniendo área total 1. La integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

puede interpretarse como un *promedio* de los valores de $f(x)$ cerca de $x = t$ *ponderado* por los valores de $x \mapsto g(t-x)$. Si nos movemos a otro punto t' cercano a t y calculamos el valor, $f*g(t')$, de la convolución en t', repetiremos la operación anterior, es decir, calcularemos una media ponderada de los valores de f cerca de t' y dicha media incluirá, si t' está cerca de t, valores de f que ya se usaron en el anterior promedio. Por ello, cabe esperar que los valores de la convolución $f*g(t)$ y $f*g(t')$ estén más próximos que $f(t)$ y $f(t')$. Es decir, $f*g(t)$ *suaviza* f.

Por otra parte, este proceso de *promediar y regularizar* es lo que hacen los instrumentos de medida. Por ejemplo, cuando usamos un termómetro para medir la temperatura en un punto del espacio lo que estamos midiendo realmente es un promedio. Eso se debe a que el termómetro no mide la temperatura solamente en un punto, sino que la información que proporciona es realmente un promedio de las temperaturas en una pequeña región del espacio. La manera de realizar este promedio depende de las características físicas del instrumento y dicho promedio se realiza de igual forma en cualquier punto donde situemos el termómetro. De esta forma se entiende que los datos que proporciona el termómetro son el resultado de una convolución de la función temperatura con otra función, que podemos interpretar como una función de densidad de probabilidad - una gausiana -, que es característica del instrumento concreto que usemos. Cuanto más preciso sea el termómetro más alta y estrecha será esta gausiana y más *"concentrada"* será la lectura que se realice.

Las razones anteriores explican por qué la convolución aparece en contextos tan diversos. En algunas aplicaciones como, por ejemplo, en restauración de imágenes, lo que se quiere es invertir el proceso antes descrito, es decir, se dispone de una señal f que está "contaminada" por su convolución con otra señal g de manera que lo que nosotros recibimos es la señal $h = f * g$. La señal g se interpreta como un "ruido" y pueden hacerse hipótesis sobre su naturaleza para intentar separar la señal f del ruido g que la "contamina". En estos casos lo que se quiere es invertir un proceso de convolución.

6.4. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una de las herramientas fundamentales de la matemática aplicada debido principalmente a su gran utilidad para resolver problemas de valores iniciales.

La transformada de Laplace de una función $f :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ se define como la función de variable compleja

$$\boxed{\mathscr{L}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{u\to+\infty} \int_0^{u} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t} \tag{6.18}$$

Observaciones

- Como los valores de f en el intervalo $]-\infty, 0[$ no intervienen para nada en la definición anterior, en la teoría de la transformada de Laplace es costumbre suponer que las funciones se anulan para valores negativos de la variable.
- En la definición anterior s es una variable compleja de la forma $s = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.
- Hay una relación fácil de establecer entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace de una función f. Para cada valor fijo de $x \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\mathscr{L}f(x+iy) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-(x+iy)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{e}^{-iyt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{e}^{-iyt}\,\mathrm{d}t = \mathscr{F}h_x(y/2\pi) \tag{6.19}$$

donde h_x es la función

$$h_x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-xt} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- A diferencia de la transformada de Fourier $\mathscr{F}f(s)$ de una función $f(t)$ que, cuando existe, está definida para todos los valores del parámetro real s, *la transformada de Laplace de una función f solamente está definida para aquellos valores de s para los que el límite (6.18) existe y es finito*. Dichos valores constituyen lo que se llama *el dominio de convergencia de la integral* el cual depende en cada caso de la función f. Se demuestra que si la integral (6.18) existe para un valor s_0 entonces también existe para todo s complejo con $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$. Esto implica que el dominio de convergencia es un semiplano o bien todo el plano.

- Es importante notar que

$$|\mathrm{e}^{-st}| = |\mathrm{e}^{-xt-iyt}| = |\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{e}^{-iyt}| = \mathrm{e}^{-xt}|\mathrm{e}^{-iyt}| = \mathrm{e}^{-xt}$$

- Se dice que f es de *orden exponencial* si hay algún número $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-at} = 0 \tag{6.20}$$

  Teniendo en cuenta que si $c > 0$ la integral $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t = 1/c < +\infty$ y la observación anterior, se deduce que si f es una función de orden exponencial que verifica 6.20, entonces la transformada de Laplace de f está definida para todo s con $\operatorname{Re}(s) > a$.

  Las funciones polinómicas, las funciones seno y coseno y las exponenciales de la forma e^{cx} donde c es una constante real o compleja, son funciones de orden exponencial. Es claro que la suma y el producto de funciones de orden exponencial también es una función de orden exponencial.

- Suele emplearse la notación $\mathscr{L}\big(f(t)\big)(s)$ para representar la transformada de Laplace de la función f evaluada en un punto s. Esta notación se presta a veces a confusiones pero es inevitable usarla y así lo haremos en lo que sigue.

- A *efectos teóricos*, en lo que sigue, puedes suponer que las funciones que se consideran son continuas a trozos en todo intervalo finito $[0,T]$ y de orden exponencial. Estas condiciones son suficientes para que se verifiquen los resultados que siguen.

6.4.1. Propiedades de la transformada de Laplace

Linealidad

La transformada de Laplace es un operador lineal.

$$\mathscr{L}(\lambda f + \beta g) = \lambda\mathscr{L}f + \beta\mathscr{L}g$$

Teorema de derivación

La transformada de Laplace $\mathscr{L}f(s)$ es derivable en su dominio de convergencia y su derivada viene dada por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}\big(f(t)\big)(s) = -\mathscr{L}\big(t\,f(t)\big)(s) \tag{6.21}$$

En particular, $\mathscr{L}f(s)$ es una función continua y, además, se verifica que $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} \mathscr{L}f(s) = 0$.

Teorema de integración

Sea f continua a trozos en $[0,+\infty[$ y de orden exponencial verificando $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-at} = 0$. Supongamos que $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)/t$ existe y sea $F(s)$ la transformada de Laplace de f. Entonces se verifica que

$$\int_s^\infty F(u)\,\mathrm{d}u = \mathscr{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) \qquad (s>a) \tag{6.22}$$

Transformada de Laplace de una derivada

A) Supongamos que f es continua en $]0,+\infty[$, de orden exponencial y tiene derivada f' que es continua a trozos en $[0,+\infty[$. Entonces se verifica la igualdad

$$\mathscr{L}\big(f'(t)\big)(s) = s\mathscr{L}\big(f(t)\big)(s) - f(0^+) \tag{6.23}$$

donde $f(0^+) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$.

B) En las mismas hipótesis anteriores, supongamos que f tiene discontinuidades de salto en los puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_q$, entonces se verifica que

$$\mathscr{L}\big(f'(t)\big)(s) = s\mathscr{L}\big(f(t)\big)(s) - f(0^+) - \sum_{j=1}^{q} \mathrm{e}^{-st_k}\left(f\big(t_k^+\big) - f\big(t_k^-\big)\right) \tag{6.24}$$

C) Supongamos que $f(t)$, $f'(t)$,$\dots$, $f^{(n-1)}(t)$ son continuas en $]0,+\infty[$ y de orden exponencial y que $f^{(n)}(t)$ es continua a trozos en $[0,+\infty[$, entonces se verifica que

$$\mathscr{L}\big(f^{(n)}(t)\big)(s) = s^n\mathscr{L}\big(f(t)\big)(s) - s^{n-1}f\big(0^+\big) - s^{n-2}f'\big(0^+\big) - \cdots - f^{(n-1)}\big(0^+\big) \tag{6.25}$$

Estas propiedades son las responsables de la extraordinaria utilidad que tiene la transformada de Laplace para estudiar ecuaciones diferenciales.

Propiedades de traslación y cambio de escala

Si $\mathscr{L}f(s)$ está definida para $\mathrm{Re}(s) > c$ y $a\in\mathbb{C}$, entonces se verifica que

$$\mathscr{L}\big(f(t)\big)(s-a) = \mathscr{L}\big(\mathrm{e}^{at}\,f(t)\big)(s) \qquad (\mathrm{Re}(s-a) > c) \tag{6.26}$$

Dado un número $b>0$ se verifica que

$$\mathscr{L}\big(H(t-b)\,f(t-b)\big)(s) = \mathrm{e}^{-bs}\mathscr{L}\big(f(t)\big)(s) \tag{6.27}$$

donde H es la función escalón unidad $H(t)=0$ para $t<0$ y $H(t)=1$ para $t\geqslant 0$.

Dado un número real $a\neq 0$ se verifica que

$$\mathscr{L}\big(f(at)\big)(s)=\frac{1}{|a|}\mathscr{L}\big(f(t)\big)\left(\frac{s}{a}\right) \tag{6.28}$$

Teorema de convolución. Sean f y g funciones de orden exponencial y definamos

$$f*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u$$

Entonces se verifica que

$$\mathscr{L}(f*g)=\mathscr{L}f\mathscr{L}g \tag{6.29}$$

Inversión de la transformada de Laplace

Definimos la transformada de Laplace inversa como el operador $\mathscr{L}^{-1}$ que a una función $F(s)=\mathscr{L}f(s)$ hace corresponder la función f.

$$\mathscr{L}^{-1}F=f\Longleftrightarrow\mathscr{L}f=F$$

Se usa la notación $\mathscr{L}^{-1}\big(F(s)\big)(t)$ para indicar la transformada de Laplace inversa de F evaluada en t.

La definición anterior está muy bien pero sirve de muy poco. Si tenemos que aplicar la definición dada para calcular transformadas inversas de Laplace, necesitamos tener alguna práctica para que cuando nos den una función seamos capaces de construir otra función cuya transformada de Laplace sea dicha función. Sin embargo, a pesar de que este procedimiento es muy rudimentario es el que suele seguirse. Más adelante veremos algunos ejemplos.

6.4.2. Ejemplos y aplicaciones

6.16 Ejemplo. Transformada de Laplace de una exponencial, del seno y del coseno.

Sea $f(t)=\mathrm{e}^{at}$ donde $a\in\mathbb{C}$. Tenemos que para $\operatorname{Re}(s)>\operatorname{Re}(a)$ es

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\big(\mathrm{e}^{at}\big)(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= \lim_{u\to+\infty}\int_0^u \mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t=\lim_{u\to+\infty}\left[\frac{-1}{s-a}\,\mathrm{e}^{-(s-a)t}\right]_{t=0}^{t=u}\\ &= \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{e^{-(s-a)u}}{s-a}\right)=\frac{1}{s-a}\end{aligned} \tag{6.30}$$

pues para $\operatorname{Re}(s)>\operatorname{Re}(a)$

$$|e^{-(s-a)u}|=\mathrm{e}^{-u\operatorname{Re}(s-a)}\to 0 \qquad (u\to+\infty)$$

Deducimos que para $\operatorname{Re}(s)>0$

$$\mathscr{L}\big(\operatorname{sen}(\omega t)\big)(s)=\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\omega t}-\mathrm{e}^{-i\omega t}}{2i}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{6.31}$$

Análogamente

$$\mathscr{L}\big(\cos(\omega t)\big)(s)=\frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{6.32}$$

♦

6.17 Ejemplo. Transformada de Laplace de una función polinómica.

Como caso particular del ejemplo anterior para $a=0$, tenemos que la transformada de Laplace de la función escalón unidad $H(t)$ viene dada por $\mathscr{L}H(s)=\dfrac{1}{s}$. Usando el teorema de derivación deducimos que

$$\mathscr{L}\big(t^n\big)(s)=\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (n=1,2,3,\dots) \tag{6.33}$$

Este resultado, junto con la linealidad, permite obtener enseguida la transformada de Laplace de una función polinómica.

Además, teniendo en cuenta la propiedad de traslación 6.26, deducimos que

$$\mathscr{L}\big(\mathrm{e}^{at}\,t^n\big)(s)=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \qquad (n=1,2,3,\dots,\ \operatorname{Re}(s-a)>0) \tag{6.34}$$

♦

6.18 Ejemplo. Teniendo en cuenta la igualdad 6.31 y el teorema de derivación y que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=-\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$$

obtenemos

$$\mathscr{L}\big(t\,\mathrm{sen}(\omega t)\big)(s)=\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{6.35}$$

Análogamente

$$\mathscr{L}\big(t\cos(\omega t)\big)(s)=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{6.36}$$

♦

6.4.3. Transformada inversa de Laplace de una función racional

Sea $R(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ una función racional donde P y Q son funciones polinómicas sin raíces comunes de grados respectivos $n<m$ y el coeficiente líder de Q es 1. Sean α_j, $(1\leqslant j\leqslant q)$ las raíces de $Q(s)$ con multiplicidades respectivas $k_j\geqslant 1$, $(k_1+k_2+\cdots+k_q=m)$. Es posible descomponer $R(s)$ en fracciones simples de la forma

$$R(s)=\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{h=1}^{k_j}\frac{C_{jh}}{(s-\alpha_j)^h}\right) \tag{6.37}$$

Donde los coeficientes C_{jh} son números complejos que habrá que calcular. Teniendo en cuenta que la transformada de Laplace inversa es un operador lineal y el resultado obtenido en el ejemplo anterior, la igualdad (6.37) permite calcular la transformada de Laplace inversa de $R(s)$.

Cuando todas las raíces α_j son simples, el cálculo es muy fácil pues de la igualdad

$$R(s)=\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{s-\alpha_j} \tag{6.38}$$

se deduce que

$$C_j=\lim_{s\to\alpha_j}(z-\alpha_j)R(s)=\frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)} \tag{6.39}$$

y, por tanto

$$\mathscr{L}^{-1}\big(R(s)\big)(t)=\sum_{j=1}^{m}\frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}\Big)\,\mathrm{e}^{\alpha_j t} \tag{6.40}$$

6.19 Ejemplo. Vamos a calcular

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right)$$

Descomponiendo en fracciones simples tenemos que

$$\frac{s+1}{s^2(s-1)}=-\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s-1}$$

Por tanto

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right)=-\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)-\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)+2\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-1}\right)=-2-t+2\mathrm{e}^t$$

♦

6.20 Ejemplo. Vamos a calcular

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right)$$

La descomposición en fracciones simples es

$$\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}=-\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}$$

Por tanto

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right)=-\cos t+\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t$$

♦

Si los resultados anteriores los combinas con las propiedades de desplazamiento y el teorema de convolución podrás calcular fácilmente transformadas de Laplace de productos de polinomios por funciones seno y coseno y exponenciales.

6.21 Ejemplo. Calculemos $\mathscr{L}\big(\operatorname{sen}^2(\omega t)\big)$.

Sea $f(t) = \operatorname{sen}^2(\omega t)$. Tenemos que $f'(t) = 2\omega \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) = \omega \operatorname{sen}(2\omega t)$. Teniendo en cuenta la igualdad 6.23, se verifica que

$$\mathscr{L}(\omega \operatorname{sen}(2\omega t)) = s\mathscr{L}(\operatorname{sen}^2(\omega t))$$

de donde

$$\mathscr{L}(\operatorname{sen}^2(\omega t)) = \frac{\omega}{s}\frac{2\omega}{s^2+4\omega^2} = \frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$$

♦

6.22 Ejemplo. Se trata de calcular

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right)$$

Puede hacerse una descomposición en fracciones simples pero es más rápido si nos damos cuenta de que

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)} = \frac{1}{s^3}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2}\mathscr{L}(t^2)\mathscr{L}(\operatorname{sen} t)$$

y usamos el teorema de convolución (6.29) para deducir que

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)} = \frac{1}{2}\mathscr{L}(t^2 * \operatorname{sen} t) \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right) = \frac{1}{2}t^2 * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(t^2+2\cos t-2)$$

♦

6.23 Ejemplo. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$y''+y = \operatorname{sen} t \qquad y(0)=1,\ y'(0)=1$$

Es decir, se trata de calcular una solución, $y(t)$, de la ecuación diferencial $y''+y=\operatorname{sen} t$ que verifique las condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=1$. Notemos $Y(s)$ la transformada de Laplace de la función (desconocida y). Tomando transformadas de Laplace en la ecuación diferencial y teniendo en cuenta la fórmula 6.25 para la transformada de Laplace de una derivada, obtenemos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

sustituyendo en esta igualdad las condiciones iniciales resulta

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Por una parte

$$\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} = \mathscr{L}(\operatorname{sen} t) + \mathscr{L}(\cos t) = \mathscr{L}(\operatorname{sen} t + \cos t)$$

Y por otra

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{s}\frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2}\mathscr{L}1\mathscr{L}(t\operatorname{sen} t) = \frac{1}{2}\mathscr{L}(1 * t\operatorname{sen} t)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = \operatorname{sen} t + \cos t + \frac{1}{2} 1 * t \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t + \cos t + \frac{1}{2} \int_0^t u \operatorname{sen} u \, du \\ &= \operatorname{sen} t + \cos t + \frac{1}{2}(-t\cos t + \operatorname{sen} t) = \cos t - \frac{1}{2} t \cos t + \frac{3}{2} \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Puedes comprobar que, efectivamente, esa es la solución correcta. ♦

6.24 Ejemplo. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + y = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de la ecuación y poniendo $Y(s) = \mathscr{L}y(s)$, tenemos

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-st} \operatorname{sen} t \, \mathrm{d}t = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

Por tanto

$$Y(s) = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\pi s}}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{(s^2+1)^2}$$

En el ejemplo anterior hemos visto que

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$$

teniendo en cuenta también la igualdad 6.27, deducimos que

$$y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t) + H(t-\pi)\left(\frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(t-\pi) - (t-\pi)\cos(t-\pi)\big)\right)$$

es decir

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t), & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ -\frac{1}{2}\pi\cos t, & t > \pi \end{cases}$$

♦

6.25 Ejemplo. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y' + z' + y + z &= 1 \\ y' + z &= \mathrm{e}^t \end{aligned} \qquad y(0) = -1, \; z(0) = 2$$

Tomando transformadas de Laplace y poniendo $Y(s) = \mathscr{L}y(s)$, $Z(s) = \mathscr{L}z(s)$, obtenemos

$$\begin{aligned} sY(s) + 1 + sZ(s) - 2 + Y(s) + Z(s) &= \frac{1}{s} \\ sY(s) + 1 + Z(s) &= \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones deducimos que

$$Y(s) = \frac{-s^2+s+1}{s(s-1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

y tomando transformadas inversas obtenemos que

$$y(t) = 1 - 2\,\mathrm{e}^t + t\,\mathrm{e}^t, \qquad z(t) = 2\,\mathrm{e}^t - t\,\mathrm{e}^t$$

♦

6.26 Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \tag{6.41}$$

y condiciones iniciales

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \tag{6.42}$$

La solución de 6.41 que satisface 6.42 se llama la *solución de estado estacionario*. Tomando transformadas de Laplace en 6.41 obtenemos

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)\mathscr{L}\big(y(t)\big)(s) = \mathscr{L}\big(f(t)\big)(s)$$

esto es

$$\mathscr{L}\big(y(t)\big)(s) = \frac{\mathscr{L}\big(f(t)\big)(s)}{Q(s)}$$

donde $Q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$.

Supongamos que $g(t)$ es una función tal que

$$\frac{1}{Q(s)} = \mathscr{L}\big(g(t)\big)$$

Entonces

$$\mathscr{L}\big(y(t)\big) = \mathscr{L}\big(f(t)\big)\mathscr{L}\big(g(t)\big) = \mathscr{L}\big(f*g\big)(t)$$

por lo que

$$y(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u \tag{6.43}$$

Un caso particularmente sencillo es cuando el polinomio $Q(s)$ tiene todas sus raíces simples. Si éstas son α_j ($1 \leqslant j \leqslant n$), entones se deduce de (6.40) que

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{Q'(\alpha_j)} \int_0^t f(u)\,\mathrm{e}^{\alpha_j(t-u)}\,\mathrm{d}u$$

♦

6.27 Ejemplo. Las ecuaciones en diferencias finitas lineales pueden resolverse con ayuda de la transformada de Laplace. Veamos un ejemplo.

Se trata de resolver la ecuación

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

Para ello definamos

$$y(t) = a_n \qquad n \leqslant t < n+1, \quad n = 0,1,2,\dots$$

Con lo cual la ecuación se convierte en

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0 \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 1 \tag{6.44}$$

Tomando transformadas de Laplace tenemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\big(y(t+2)\big) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} y(t+2)\,\mathrm{d}t = [u = t+2] = \int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-s(u-2)} y(u)\,\mathrm{d}u = \\
&= \mathrm{e}^{2s} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-su} y(u)\,\mathrm{d}u - \mathrm{e}^{2s} \int_0^{2} \mathrm{e}^{-su} y(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{2s} \mathscr{L}\big(y(t)\big) - \mathrm{e}^{2s} \int_0^{1} \mathrm{e}^{-su} y(0)\,\mathrm{d}u - \mathrm{e}^{2s} \int_1^{2} \mathrm{e}^{-su} y(1)\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{2s} \mathscr{L}\big(y(t)\big) - \frac{\mathrm{e}^{s}}{s}(1 - \mathrm{e}^{-s})
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\mathscr{L}\big(y(t+1)\big) = \mathrm{e}^{s} \mathscr{L}\big(y(t)\big)$$

Con lo que la ecuación 6.44 se convierte en

$$\mathrm{e}^{2s} \mathscr{L}\big(y(t)\big) - \frac{\mathrm{e}^{s}}{s}(1 - \mathrm{e}^{-s}) - 3\,\mathrm{e}^{s} \mathscr{L}\big(y(t)\big) + 2\mathscr{L}\big(y(t)\big) = 0$$

de donde fácilmente se obtiene que

$$\mathscr{L}\big(y(t)\big) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s(1 - 2\,\mathrm{e}^{-s})} - \frac{1}{s}$$

Teniendo ahora en cuenta que para $a > 0$ y notando $E(t)$ la función *parte entera* se verifica que

$$\mathscr{L}\left(a^{E(t)}\right) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s(1 - a\,\mathrm{e}^{-s})} \qquad (\operatorname{Re}(s) > \text{máx}\{0, \log a\})$$

concluimos que

$$\mathscr{L}\big(y(t)\big) = \mathscr{L}\left(2^{E(t)}\right) - \mathscr{L}1 = \mathscr{L}\left(2^{E(t)} - 1\right)$$

de donde resulta finalmente

$$a_n = 2^n - 1, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

♦

Ejercicios propuestos

393. Calcula, usando los ejemplos anteriores y las propiedades de la transformada de Laplace, sin necesidad de hacer integrales, las transformadas de Laplace de las funciones siguientes:

1. $\cosh(\omega t)$, $\operatorname{senh}(\omega t)$ (seno hiperbólico y coseno hiperbólico).
2. $e^{at}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$, $e^{at}\cos(\omega t+\varphi)$.
3. $f(t)=0$ si $0\leqslant t\leqslant 1$, $f(t)=(t-1)^2$ si $t>1$.
4. $f(t)=\operatorname{sen} t$ si $t\geqslant 3$, $f(t)=0$ ai $0\leqslant t<3$.
5. $\dfrac{1-e^{-t}}{t}$
6. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$

394. Justifica la igualdad

$$\mathscr{L}\left(a^{E(t)}\right)=\frac{1-e^{-s}}{s(1-a\,e^{-s})}\qquad\qquad (\operatorname{Re}(s)>\text{máx}\{0,\log a\})$$

395. Calcula las transformadas de Laplace inversas de las siguientes funciones

1. $\dfrac{e^{-as}-e^{-bs}}{(b-a)s}$ donde $0\leqslant a<b$
2. $\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}$
3. $\dfrac{s}{s^2+4s+1}$
4. $\log\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$ donde $a>0$, $b>0$.
5. $\dfrac{s-a}{s+a}$

396. Justifica la igualdad

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\mathscr{L}f(s)}{s}\right)(t)=\int_0^t f(u)\,du$$

Aplicación: Calcula la transformada de Laplace de la función *seno integral*:

$$\mathrm{S\ i}(t)=\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$$

396. Supongamos que f es una función periódica con período T. Sea $F(s)$ la transformadas de Laplace de f y pongamos

$$F_1(s)=\int_0^T f(t)\,e^{-st}\,dt$$

Justifica que

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$$

Aplicación: Calcula la transformada de Laplace de la función $f(t) = |\mathrm{sen}(\omega t)|$.

397. Calcula la solución de la ecuación diferencial

$$my''(t) + ky(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < t \end{cases}$$

donde $y(0) = y'(0) = 0$ y ε, m, k son constantes positivas.

398. Calcula la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + \lambda^2 y = \cos(\lambda t)$$

que verifica $y(0) = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2\lambda}\right) = 1$.

399. Supongamos que la corriente eléctrica I en un circuito verifica

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(u)\,du = E$$

donde L, C, E son constantes positivas e $I(0) = 0$. Calcula $I(t)$.

400. Una bala de masa m es disparada por un cañón con una velocidad v_0 dentro de un medio viscoso. Se sabe que el desplazamiento $y(t)$ en el tiempo $t \geqslant 0$ de la bala satisface la ecuación diferencial

$$my'' + ky' = 0$$

donde $y(0) = 0$, $y'(0) = v_0$. Calcula $y(t)$.

401. Calcula primero la respuesta impulso y después la solución de estado estacionario del sistema dado por la ecuación diferencial

$$y'' + y' - 2y = 4\,e^{-t}$$

402. Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x'' + y' + 3x &= 15\,e^{-t} \\ y'' - 4x' + 3y &= 15\,\mathrm{sen}(2t) \end{aligned}$$

donde $x(0) = 35$, $x'(0) = -48$, $y(0) = 27$, $y'(0) = -55$.

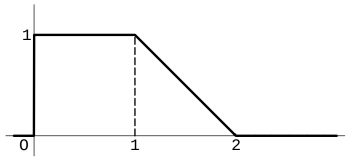
403. Resuelve, usando transformadas de Laplace, la ecuación en diferencias finitas

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad a_0 = 0,\ \ a_1 = 1$$

404. Resuelve, usando transformadas de Laplace, el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2y + 1 \\ z' = -z + \operatorname{senh} t \end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{l} x(0) = y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{array}$$

405. a) Halla la transformada de Laplace de la función $f(t)$, $t \geqslant 0$, cuya gráfica es:



b) Resuelve, usando transformadas de Laplace, el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x = f(t), \quad t \geqslant 0 \\ x(0) = 0, \; x'(0) = 1 \end{cases}$$