

---

# CÁLCULO AVANZADO

## Ingeniería Informática

---

Javier Pérez González

junio 2006

**Licencia.** Este texto se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* en virtud de la cual se permite:

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Hacer obras derivadas.

Bajo las condiciones siguientes:

- Ⓒ **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- Ⓒ **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- Ⓒ **Compartir bajo la misma licencia.** Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

---

## Índice general

---

<b>1. Números complejos y funciones complejas elementales</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Operaciones básicas con números complejos . . . . .	3
1.2.1. Forma polar y argumentos de un número complejo . . . . .	6
1.2.2. Raíces de un número complejo . . . . .	9
1.2.3. Ejercicios . . . . .	10
1.3. Sucesiones de números complejos . . . . .	12
1.4. Series de números complejos . . . . .	14
1.4.1. Criterios de convergencia no absoluta para series . . . . .	15
1.4.2. Ejercicios . . . . .	15
1.5. Funciones complejas . . . . .	16
1.5.1. Continuidad y límite funcional . . . . .	16
1.5.2. Derivada de una función de variable compleja . . . . .	17
1.5.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . . .	18
1.5.4. Propiedades de las funciones holomorfas . . . . .	20
1.5.5. Ejercicios . . . . .	22
1.6. Funciones complejas elementales . . . . .	22
1.6.1. La función exponencial . . . . .	22
1.6.2. Logaritmos complejos . . . . .	23
1.6.3. Potencias complejas . . . . .	24
1.7. Funciones trigonométricas complejas . . . . .	25
1.7.1. Funciones trigonométricas inversas . . . . .	26
1.7.2. Ejercicios . . . . .	28

<b>2. Procesos iterativos. El método de aproximaciones sucesivas.</b>	<b>30</b>
2.1. Introducción . . . . .	30
2.2. Sucesiones numéricas recurrentes . . . . .	31
2.2.1. La sucesión $x_{n+1} = i^{x_n}$ con $x_1 = i$ . . . . .	31
2.2.2. Visualización de sucesiones iterativas . . . . .	32
2.2.3. Puntos fijos y puntos periódicos . . . . .	33
2.2.4. Monotonía . . . . .	35
2.2.5. Acotación . . . . .	36
2.2.6. Ejercicios . . . . .	37
2.2.7. Comportamiento caótico y <i>efecto mariposa</i> . . . . .	37
2.3. El método de las aproximaciones sucesivas . . . . .	37
<b>3. Conceptos básicos de la teoría elemental de series de Fourier</b>	<b>43</b>
3.1. Introducción . . . . .	43
3.2. Conceptos básicos de la teoría de Series de Fourier . . . . .	44
3.2.1. Sinusoides . . . . .	44
3.2.2. Frecuencia principal y armónicos . . . . .	44
3.2.3. Representación en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia . . . . .	45
3.2.4. Polinomios trigonométricos y coeficientes de Fourier . . . . .	46
3.2.5. Series de Fourier seno y coseno . . . . .	50
3.2.6. Convergencia de las series de Fourier . . . . .	51
3.2.7. Ejercicios . . . . .	51
3.3. Geometría de las series de Fourier . . . . .	54
3.3.1. Suavidad de una señal y convergencia de su serie de Fourier . . . . .	59
3.3.2. Espectro, dominio del tiempo y dominio de la frecuencia . . . . .	60
3.3.3. Ejercicios . . . . .	61
3.4. Introducción a la Transformada de Fourier Discreta . . . . .	61
3.4.1. Convolución y DFT . . . . .	66
3.4.2. ¿Qué podemos hacer con la Transformada de Fourier Discreta? . . . . .	67
3.4.3. Noticia sobre un famoso algoritmo: la Transformada Rápida de Fourier . . . . .	67
3.4.4. Ejercicios . . . . .	68
<b>4. Transformadas de Fourier y de Laplace</b>	<b>69</b>
4.1. Introducción . . . . .	69
4.2. La transformada de Fourier . . . . .	69
4.2.1. La transformada inversa de Fourier . . . . .	72
4.2.2. Propiedades de la transformada de Fourier . . . . .	74
4.2.3. Ejemplos de transformadas de Fourier . . . . .	76

4.2.4. Ejercicios . . . . .	77
4.3. Convolución y transformada de Fourier . . . . .	78
4.3.1. ¿Qué es la convolución? . . . . .	79
4.3.2. Propiedades de la convolución . . . . .	81
4.3.3. Convolución y Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI) . . . . .	82
4.3.4. Propiedades de los sistemas . . . . .	82
4.3.5. Respuesta impulso de un filtro discreto . . . . .	83
4.3.6. Respuesta impulso de un filtro analógico . . . . .	84
4.3.7. Filtro de paso-bajo . . . . .	85
4.3.8. Filtro de paso-banda . . . . .	85
4.3.9. Filtro de paso-alto . . . . .	85
4.3.10. Una ecuación diferencial ordinaria . . . . .	86
4.3.11. Así empezó todo: la ecuación del calor . . . . .	88
4.4. Funciones generalizadas . . . . .	90
4.4.1. Funciones rápidamente decrecientes . . . . .	92
4.4.2. Propiedades de la clase $\mathcal{S}$ . . . . .	93
4.4.3. La distribución $\delta$ . . . . .	94
4.4.4. Derivación de distribuciones . . . . .	96
4.4.5. Derivada de la función escalón unidad . . . . .	96
4.4.6. Derivada de la función rampa . . . . .	97
4.4.7. La derivada generalizada de una función discontinua . . . . .	97
4.4.8. La distribución “valor principal” . . . . .	98
4.4.9. Transformada de Fourier de una distribución . . . . .	100
4.4.10. Transformada de Fourier de la distribución $\delta$ . . . . .	101
4.4.11. La transformada de Fourier de la distribución $\delta_a$ . . . . .	102
4.4.12. Las transformadas de Fourier del seno y del coseno . . . . .	103
4.4.13. Operaciones elementales con distribuciones . . . . .	103
4.4.14. Distribuciones pares e impares. Propiedades de simetría de la transformada de Fourier . . . . .	104
4.4.15. Producto de una función por una distribución . . . . .	106
4.4.16. Teorema de derivación para la transformada de Fourier . . . . .	107
4.4.17. Transformada de Fourier de la función escalón unidad, de la función “signo” y de la distribución “valor principal” . . . . .	107
4.4.18. La función generalizada “tren de impulsos” . . . . .	108
4.4.19. Convolución de una función con una distribución . . . . .	111
4.4.20. Muestreo e interpolación . . . . .	117
4.4.21. Interpolación de señales de banda limitada . . . . .	120
4.4.22. Teorema de muestreo de Shannon y Whittaker . . . . .	120

4.4.23. Espectro de una señal muestreada . . . . .	120
4.5. Transformada de Laplace . . . . .	121
4.5.1. Propiedades de la transformada de Laplace . . . . .	122
4.5.2. Inversión de la transformada de Laplace . . . . .	123
4.5.3. Transformada de Laplace de una distribución . . . . .	124
4.6. Ejemplos y aplicaciones . . . . .	124
4.6.1. Ejercicios . . . . .	127
<b>5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias</b> . . . . .	<b>129</b>
5.1. Generalidades . . . . .	129
5.1.1. Ecuación diferencial de una familia de curvas. Trayectorias . . . . .	130
5.1.2. Envolvente de una familia de curvas . . . . .	131
5.2. Métodos de resolución de EDOs de primer orden . . . . .	132
5.2.1. Ecuaciones de variables separadas . . . . .	133
5.2.2. Ecuaciones exactas . . . . .	134
5.2.3. Ecuaciones lineales . . . . .	137
5.2.4. Ecuaciones de variables separables . . . . .	138
5.2.5. Ecuaciones homogéneas . . . . .	138
5.2.6. EDO del tipo $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ . . . . .	139
5.2.7. Ecuaciones reducibles a exactas. Factores integrantes . . . . .	140
5.2.8. Ecuaciones de Bernoulli . . . . .	141
5.2.9. Ecuaciones de Ricatti . . . . .	141
5.2.10. Otras formas de resolver la EDO1 lineal . . . . .	141
5.2.11. EDO en forma implícita . . . . .	142
5.3. Ecuación diferencial lineal de orden $n$ . . . . .	143
5.3.1. Ecuaciones Diferenciales lineales con coeficientes constantes . . . . .	144
5.3.2. Cálculo de una solución particular de la ED lineal completa . . . . .	146
5.3.2.1. Método de variación de constantes . . . . .	146
5.3.2.2. Formas especiales del término independiente . . . . .	146
5.4. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales . . . . .	147
5.5. Sistemas de EDs lineales con coeficientes constantes . . . . .	149
5.6. Exponencial de una matriz . . . . .	150
5.6.1. Cálculo de $e^{Ax}$ . . . . .	152
5.6.2. Oscilaciones libres y forzadas . . . . .	153
5.6.2.1. Oscilaciones libres no amortiguadas . . . . .	154
5.6.2.2. Oscilaciones libres amortiguadas . . . . .	155
5.6.2.3. Oscilaciones forzadas . . . . .	156

---

5.6.2.4. Circuitos eléctricos RLC . . . . .	157
5.7. EDOs y transformada de Laplace . . . . .	158
5.7.1. Ejercicios . . . . .	161
5.8. Sistemas LTI y sistemas de ED . . . . .	162
5.8.1. Función de transferencia de un sistema LTI . . . . .	165
5.8.2. Función de transferencia de sistemas LTI controlados por ED lineales . . . . .	166
5.8.2.1. La convolución siempre . . . . .	166

---

## Números complejos y funciones complejas elementales

---

### 1.1. Introducción

Los números que hoy llamamos “complejos” fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que “*ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación*” y acuñó el calificativo “*imaginarias*” para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución es un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibnitz “*el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser*”.

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la “*naturaleza*” de los mismos; no se preguntaron “¿qué es un número complejo?”, sino que se dijeron “*a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos*”. Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el conocido como **Teorema Fundamental del Álgebra** que afirma que toda ecuación polinómica de grado  $n$  con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden,  $n$  raíces que *también son números complejos*. Es fácil entender lo que significa este teorema. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x + 3 = 0, \quad 2x + 3 = 0, \quad x^2 - 2 = 0, \quad x^2 + 2x + 2 = 0$$

Cuyas soluciones

$$x = -3, \quad x = 3/2, \quad x = \pm \sqrt{2}, \quad x = 1 \pm i$$

tienen sentido cuando  $x$  es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consi-



deramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5 + (1 - i)x^4 + (1/5 - i\sqrt{2})x^2 - 8x + 3 - i/\sqrt{3} = 0$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de “*números complejos*” se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra “*i*” que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

### Estructura de la lección y objetivos.

La lección está estructurada en tres partes:

- Álgebra y operaciones básicas con números complejos.

Además de dar las definiciones básicas y explicar la terminología, a veces confusa, que se usa para hablar de números complejos, comprobaremos lo útiles que son las coordenadas polares para multiplicar números complejos. Aparece así la llamada *forma polar* de un número complejo y el importante concepto de *argumento principal*. Todavía no he encontrado ningún libro que explique el porqué de su definición. Un resultado muy útil es la *fórmula de De Moivre* que nos permitirá calcular las raíces de orden  $n$  de un número complejo. Las raíces complejas no se comportan igual que las reales y eso es algo que no suele venir explicado en los libros de texto. Al terminar esta lección serás capaz de ver dónde está el error en expresiones como:

$$-1 = i^2 = ii = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

También veremos que el *módulo* de un número complejo relaciona la norma euclídea en  $\mathbb{R}^2$  con el producto complejo y ello proporciona una herramienta muy útil para trabajar con la norma euclídea en el plano.

- Sucesiones de números complejos.

Daremos las definiciones básicas de convergencia de una sucesión de números complejos y veremos que el estudio de una sucesión de números complejos es equivalente a estudiar dos sucesiones de números reales. Veremos cómo las sucesiones de números complejos permiten definir con facilidad los conjuntos fractales de Julia y de Mandelbrot.

- Funciones elementales complejas.

Daremos las definiciones básicas de continuidad y derivabilidad de funciones complejas. Introduciremos la función exponencial compleja y comprobaremos que dicha función contiene a las funciones elementales en el sentido de que todas pueden definirse con facilidad a partir de ella. En particular, las funciones trigonométricas están relacionadas con la función exponencial; resultado que no cabe ni siquiera sospechar cuando se estudian dichas funciones en el contexto real.

La justificación de esta lección es clara: los números complejos son una herramienta básica de cálculo. Son especialmente útiles para trabajar con funciones trigonométricas por medio de las *fórmulas de Euler* y por ello en la teoría de series de Fourier se hace uso constante de ellos. Las transformadas de Fourier y de Laplace son funciones complejas.

Haremos dos prácticas relacionadas con esta lección. En la primera aprenderás a usar los comando básicos de *Mathematica* para trabajar con números complejos. Precisamente, *Mathematica* trata por defecto todas las variables como si fueran números complejos. Comprenderás las respuestas llamativas que da *Mathematica* cuando escribes  $(z^3)^{1/3}$ ,  $\text{Exp}[\text{Log}[z]]$  o  $\text{Log}[\text{Exp}[z]]$ . Así mismo aprenderás a usar algunos comandos específicos para representar gráficamente funciones complejas. La segunda práctica tratará de los conjuntos de Julia y de Mandelbrot y aprenderás a usar el método de Newton para polinomios complejos con el propósito de generar hermosos conjuntos fractales.

Para seguir con comodidad esta lección conviene que repases:

- Las funciones trigonométricas reales y sus “inversas”: definición y propiedades básicas. En particular, la función arcotangente.
- El concepto de límite de una sucesión de números reales. El llamado “criterio del zapato” para la indeterminación  $1^\infty$ . La relación entre límite funcional y límite secuencial.

## 1.2. Operaciones básicas con números complejos

**Definición 1.1.** Consideremos en el conjunto  $\mathbb{R}^2$  las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  es la unidad del producto. Además,  $(-a, -b)$  es el opuesto de  $(a, b)$ , y todo  $(a, b) \neq (0, 0)$  tiene inverso

$$(a, b) \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  (léase “el conjunto  $\mathbb{R}^2$  con las operaciones de adición y producto”) es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por  $\mathbb{C}$  y sus elementos se llaman **números complejos**.

### Comentarios a la definición.

A los elementos de  $\mathbb{R}^2$  se les llama unas veces *pares ordenados de números reales*, otras *vectores* o *puntos* y también *números complejos*. La razón de esto es que en  $\mathbb{R}^2$  conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Por eso a los elementos de  $\mathbb{R}^2$  se les llama *vectores* si se está considerando la estructura de espacio vectorial, *puntos* si fijamos la atención en la estructura topológica o afín, *pares ordenados* cuando estamos pensando en  $\mathbb{R}^2$  como conjunto sin ninguna estructura particular y *números complejos* cuando se considera la estructura de cuerpo antes definida. Ocurre que estos términos se usan a veces en un mismo párrafo lo que puede resultar confuso. La regla que debes tener siempre presente es que todo **concepto matemático** tiene sentido propio dentro de una determinada **estructura matemática**. Por ello, a un elemento de  $\mathbb{R}^2$  se le llama número complejo cuando se va a usar el producto antes definido que es lo que en realidad distingue a los números complejos de los vectores de  $\mathbb{R}^2$ .

### Forma cartesiana de un número complejo.

El símbolo usual  $(a, b)$  para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo  $(a, b)$ . Para convencerte calcula  $(1, -1)^4$ . Representaremos los números complejos

con un simbolismo más apropiado en el que va a intervenir el producto complejo. Para ello, observa que:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

esto indica que los números complejos de la forma  $(a, 0)$  se comportan respecto a la suma y la multiplicación de números complejos exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias. En términos, más técnicos,  $\mathbb{R} \times \{0\}$  es un subcuerpo de  $\mathbb{C}$  isomorfo a  $\mathbb{R}$ . Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo  $(a, 0)$  por el número real  $a$ . Es decir, hacemos la identificación  $(a, 0) = a$ .

Fíjate que con dicha identificación el producto  $a(c, d)$  tiene dos posibles interpretaciones: producto del escalar real  $a$  por el vector  $(c, d)$  (estructura vectorial de  $\mathbb{R}^2$ ) y producto del complejo  $(a, 0)$  por el complejo  $(c, d)$ . Pero ambos coinciden y son iguales a  $(ac, ad)$ .

El número complejo  $(0, 1)$  lo representaremos por  $i$ . Con ello tenemos que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Ahora podemos escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$$

Se dice que  $a$  es la **parte real** y  $b$  es la **parte imaginaria** del número complejo  $a + ib$ . El producto ahora es muy fácil de recordar pues

$$(a + ib)(c + id) = ac + i^2bd + i(ad + bc) = ac - bd + i(ad + bc)$$

Es costumbre representar los números complejos con las letras  $z$  y  $w$  y reservar las letras  $x, y, u, v$  para representar números reales. Una expresión de la forma  $z = x + iy$  se interpreta como que  $z$  es el número complejo cuya parte real es  $x$  y cuya parte imaginaria es  $y$ . Se escribe  $\operatorname{Re}(z)$  e  $\operatorname{Im}(z)$  para representar las partes real e imaginaria de  $z$ . Naturalmente, dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

### Comentarios a la definición usual $i = \sqrt{-1}$

Acabamos de ver que  $i^2 = -1$  pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que  $i = \sqrt{-1}$ . Fíjate lo que ocurre si ponemos  $i = \sqrt{-1}$  y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$i^2 = -1 = ii = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Luego  $1 = -1$ . Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.

Naturalmente, el error, procede de que estamos haciendo disparates. Fíjate que en la expresión  $\sqrt{-1}$  no puedes interpretar que  $-1$  es el número real  $-1$  (porque, como sabes, los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real), sino que tienes que interpretar  $-1$  como el número complejo  $-1$  (espero que ya tengas clara la diferencia). Resulta así que estamos usando raíces de números complejos *sin haberlas definido y dando por supuesto que dichas raíces verifican las mismas propiedades que las de los números reales positivos*.

Antes de escribir  $\sqrt{-1}$  hay que definir qué significa  $\sqrt{z}$  para  $z \in \mathbb{C}$ . Cuando lo hagamos veremos ¡sorpresa! que la igualdad  $\sqrt{z} \sqrt{w} = \sqrt{zw}$ , válida cuando  $z, w \in \mathbb{R}^+$ , no es cierta en general cuando  $z, w \in \mathbb{C}$ .

Todavía más disparatado es definir  $i = \sqrt{-1}$  sin ni siquiera haber definido antes los números complejos. Sin embargo, y aunque parezca mentira, en muchos textos se define (porque sí, sin más explicaciones)  $i = \sqrt{-1}$  y a continuación se dice que los números de la forma  $a + ib$  son los números complejos. No es de extrañar que luego resulte que  $1 = -1$ .

**No hay un orden en  $\mathbb{C}$  compatible con la estructura algebraica.**

Al ampliar  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  ganamos mucho (como te convencerás cuando estudies la teoría de funciones de variable compleja) pero también perdemos algo. Te recuerdo que  $\mathbb{R}$  tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en  $\mathbb{C}$  no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en  $\mathbb{C}$ , pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. En efecto, si suponemos que  $\leq$  es una relación de orden en  $\mathbb{C}$  compatible con su estructura algebraica, como  $i \neq 0$  habría de ser  $0 < i^2 = -1$  (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación  $\leq$  no respetara el orden de  $\mathbb{R}$ ). Pero también  $0 < 1^2 = 1$ , luego  $0 < 1 + (-1) = 0$  y eso sí que es contradictorio.

Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en  $\mathbb{C}$  ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con no escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

**Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo de un número complejo.**

Es usual interpretar el número complejo  $x + iy$  como el vector del plano  $(x, y)$  y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

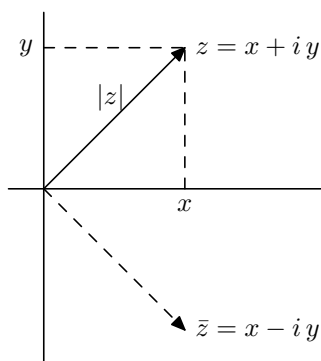


Figura 1.1: Representación de un número complejo

Si  $z = x + iy$  es un número complejo (con  $x$  e  $y$  reales), entonces el **conjugado** de  $z$  se define como:

$$\bar{z} = x - iy$$

y el **módulo** o **valor absoluto** de  $z$ , se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observa que  $\sqrt{x^2 + y^2}$  está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo  $x^2 + y^2$ .

Geoméricamente  $\bar{z}$  es sencillamente la reflexión de  $z$  respecto al eje real, mientras que  $|z|$  es la distancia euclídea del punto  $(x, y)$  a  $(0, 0)$  o, también, la longitud o norma euclídea del vector  $(x, y)$  (ver figura 1.1). La **distancia** entre dos números complejos  $z$  y  $w$  se define como  $|z - w|$ .

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos  $z = a + ib$  y  $w = c + id$  determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 1.2) es  $z + w$ .

Se comprueba fácilmente que si  $z$  y  $w$  son números complejos se verifica que  $\overline{\bar{z}} = z$ ,  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$  y  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ .

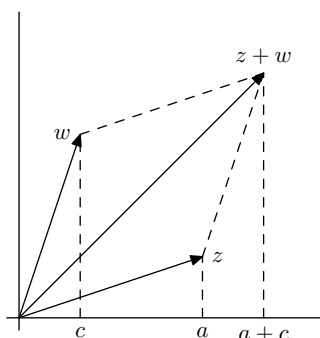


Figura 1.2: Suma de números complejos

También son de comprobación inmediata las desigualdades

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \quad (1.1)$$

La igualdad  $|z|^2 = z\bar{z}$  que se deduce directamente de la definición de módulo de un número complejo, permite utilizar el producto complejo para trabajar con módulos y es de gran utilidad. La usaremos para probar que para todos  $z, w \in \mathbb{C}$  es

$$\mathbf{a)} |zw| = |z||w| \quad \text{y} \quad \mathbf{b)} |z+w| \leq |z| + |w|$$

**a)** Basta observar que  $|zw|$  y  $|z||w|$  son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues

$$|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$$

**b)** Es suficiente probar que  $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$ . En efecto:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| \leq \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = \\ &= (|z|+|w|)^2 \end{aligned}$$

Deducimos también que se verifica la igualdad  $|z+w| = |z|+|w|$  si, y sólo si,  $\operatorname{Re} z\bar{w} = |z\bar{w}|$ , esto es, si  $z\bar{w} \in \mathbb{R}_0^+$ , o lo que es lo mismo  $z\bar{w} = \rho$  donde  $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ . Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente multiplicando por  $w$  como  $z|w|^2 = \rho w$ , esto es,  $z = \lambda w$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$  lo que quiere decir que  $z$  y  $w$  están en una misma semirrecta a partir del origen.

### 1.2.1. Forma polar y argumentos de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo  $z = x + iy \neq 0$  podemos escribir

$$z = |z| \left( \frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$$

Como  $\left( \frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right)$  es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$\left( \frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right) = (\cos \vartheta, \operatorname{sen} \vartheta)$$

para algún número  $\vartheta \in \mathbb{R}$ . Resulta así que

$$z = |z|(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de **forma polar**, cuya interpretación gráfica vemos en la figura 1.3.

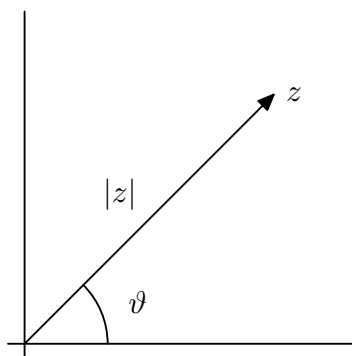


Figura 1.3: Forma polar de un número complejo

Dado  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , hay infinitos números  $t \in \mathbb{R}$  que verifican la igualdad  $z = |z|(\cos t, \operatorname{sen} t)$  cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de  $z$ . El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por  $\operatorname{Arg}(z)$ .

$$\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)\}$$

Observa que

$$s, t \in \operatorname{Arg}(z) \iff \begin{cases} \cos(t) = \cos(s) \\ \sin(t) = \sin(s) \end{cases} \iff s = t + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento  $t_0 \in \operatorname{Arg}(z)$  cualquier otro es de la forma  $t_0 + 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , es decir,  $\operatorname{Arg}(z) = t_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ .

De entre todos los argumentos de un número complejo  $z \neq 0$  hay uno único que se encuentra en el intervalo  $]-\pi, \pi]$ , se representa por  $\operatorname{arg}(z)$  y viene dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{arg}(z) &= 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} && \text{si } z \notin \mathbb{R}^- \\ \operatorname{arg}(z) &= \pi && \text{si } z \in \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

A dicho argumento se le llama **argumento principal** de  $z$ .

La comprobación de las anteriores afirmaciones es fácil. Como  $-\pi/2 < \operatorname{arctg} t < \pi/2$ , se sigue que  $-\pi < \operatorname{arg}(z) < \pi$  si  $z \notin \mathbb{R}^-$ . Luego,  $-\pi < \operatorname{arg}(z) \leq \pi$ . Si  $z = t \in \mathbb{R}^-$  es evidente que  $z = |t|(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$ . Y para  $z \notin \mathbb{R}^-$  se tiene:

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{arg}(z)) &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arg}(z)/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arg}(z)/2)} = \frac{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2}{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{2 \operatorname{Re} z (|z| + \operatorname{Re} z)}{2|z|(|z| + \operatorname{Re} z)} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \\ \operatorname{sen}(\operatorname{arg}(z)) &= \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arg}(z)/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arg}(z)/2)} = \frac{2 \operatorname{Im} z (|z| + \operatorname{Re} z)}{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{2 \operatorname{Im} z (|z| + \operatorname{Re} z)}{2|z|(|z| + \operatorname{Re} z)} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado que  $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ .

No es difícil comprobar que el argumento principal de  $z = x + iy \neq 0$  viene también dado por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctg(y/x) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y \leq 0, x = 0 \\ \arctg(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \arctg(y/x) + \pi & \text{si } y \geq 0, x < 0 \end{cases}$$

Esta última forma es más cómoda para los cálculos.

### Observaciones a la definición de argumento principal

Puede parecer un poco extraña la forma de elegir el argumento principal de un número complejo. La elección que hemos hecho supone que medimos ángulos en el semiplano superior de 0 a  $\pi$  y en el semiplano inferior de 0 a  $-\pi$ .

Fíjate que si tomas un número complejo que esté situado en el tercer cuadrante  $z = x + iy$  con  $x < 0, y < 0$  y supones que  $y$  es próximo a 0, su argumento principal está próximo a  $-\pi$ , y si tomas un número complejo que esté situado en el segundo cuadrante,  $w = x + iy$  con  $x < 0, y > 0$ , y supones que  $y$  es próximo a 0, su argumento principal está próximo a  $\pi$ . Además, la distancia  $|w - z| = |y - y| = y - y$  es tan pequeña como quieras. Esto nos dice que el argumento principal tiene una discontinuidad en el eje real negativo: salta de  $-\pi$  a  $\pi$  cuando atravesamos dicho eje desde el tercer al segundo cuadrante.

Peor todavía dirás. Hasta cierto punto. Primero, la discontinuidad es inevitable. Si queremos elegir argumentos en un intervalo de longitud  $2\pi$ , digamos,  $[\alpha, \alpha + 2\pi[$  entonces dichos argumentos saltan de  $\alpha$  a  $\alpha + 2\pi$  cuando atravesamos la semirrecta  $(x, y) = \rho(\cos \alpha, \sin \alpha)$ , ( $\rho > 0$ ). En particular, si tomamos argumentos en el intervalo  $[0, 2\pi[$  (cosa que, a primera vista, parece lo razonable) nos encontramos con que entonces se produce una discontinuidad de dichos argumentos en *el eje real positivo*. Bien, sucede que *la extensión a  $\mathbb{C}$  de algunas funciones definidas en  $\mathbb{R}^+$*  (el logaritmo, las raíces) hace intervenir el argumento principal. Naturalmente, queremos que dichas extensiones sigan siendo continuas en  $\mathbb{R}^+$  y ello justifica que tengamos que tomar argumentos principales de la forma en que lo hemos hecho: porque preferimos introducir una discontinuidad en  $\mathbb{R}^-$  a perder la continuidad en  $\mathbb{R}^+$ .

### Fórmula de De Moivre

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ w &= |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= |zw|[(\cos \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi) + i(\sin \vartheta \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi)] = \\ &= |zw|(\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi)) \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos*. Por ejemplo, para calcular  $(1 + i)^4$  como  $|1 + i| = \sqrt{2}$  y  $\arg(1 + i) = \pi/4$ , se sigue que  $(1 + i)^4 = -4$ .

Así pues, el producto de dos números complejos es geoméricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Acabamos de ver que si  $z, w$  son complejos no nulos,  $\vartheta \in \text{Arg}(z), \varphi \in \text{Arg}(w)$ , entonces  $\vartheta + \varphi \in \text{Arg}(zw)$ . Es ahora fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula, muy útil, conocida como fórmula de *De Moivre*. Observa también que si  $\varphi \in \text{Arg}(z)$  entonces  $-\varphi \in \text{Arg}(1/z)$ .

**Proposición 1.2** (Fórmula de De Moivre). Si  $z$  es un complejo no nulo,  $\vartheta$  es un argumento de  $z$  y  $n$  es un número entero, se verifica que  $n\vartheta \in \text{Arg}(z^n)$ , es decir:

$$z^n = (|z|(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta))^n = |z|^n (\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta)$$

### 1.2.2. Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación  $w^n = z$  donde  $n$  es un número natural,  $n \geq 2$ , y  $z \neq 0$  es un número complejo conocido. Escribamos  $w$  en forma polar:

$$w = |w|(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

Ahora, usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación  $w^n = z$  en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = |z|(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)$$

Esta igualdad se da cuando  $|w|^n = |z|$  y  $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$  donde  $k \in \mathbb{Z}$ . Deducimos que  $|w| = \sqrt[n]{|z|}$  (ojo: se trata de la raíz  $n$ -ésima de un número positivo, cosa ya conocida). Ahora bien, para cualquier número  $\varphi_k$  de la forma  $\varphi_k = (\vartheta + 2k\pi)/n$  tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos \varphi_k + i \operatorname{sen} \varphi_k)$$

tal que  $(w_k)^n = z$ . Como una ecuación polinómica de grado  $n$  no puede tener más de  $n$  soluciones, se sigue que distintos valores de  $k$  deben dar lugar al mismo número  $w_k$ . Veamos:

$$w_k = w_q \Leftrightarrow \varphi_k - \varphi_q = 2m\pi \Leftrightarrow k - q = nm$$

Es decir,  $k$  y  $q$  dan el mismo resto al dividirlos por  $n$ . Deducimos que para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  obtenemos  $w_k$  distintos y cualquier otro  $w_q$  es igual a uno de ellos. Por tanto hay  $n$  raíces  $n$ -ésimas distintas de  $z$ .

De entre todas las raíces  $n$ -ésimas de  $z$  vamos a designar con el símbolo  $\sqrt[n]{z}$  a la **raíz  $n$ -ésima principal**, que está definida por

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} \left( \cos \frac{\arg z}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg z}{n} \right)$$

Observa que en el caso particular de que  $z$  sea un número real positivo, entonces la raíz principal de  $z$  (considerado como número complejo) coincide con la raíz de  $z$  (considerado como número real positivo).

Hemos obtenido que las raíces  $n$ -ésimas de  $z$  vienen dadas por

$$z_k = |z|^{1/n} \left( \cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Observa que definiendo  $u = \cos(2\pi/n) + i \operatorname{sen}(2\pi/n)$ , los números  $u_0 = 1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$  son las raíces  $n$ -ésimas de la unidad. Podemos escribir las raíces  $n$ -ésimas de  $z$  en la forma  $z_k = z_0 u^k$ . Como multiplicar por  $u$  es un giro de amplitud  $2\pi/n$ , deducimos que las  $n$  raíces de  $z$  se obtienen girando la raíz  $n$ -ésima principal,  $z_0$ , con giros sucesivos de amplitud  $2\pi/n$ . Es decir, si representamos todas las raíces  $n$ -ésimas de  $z$  obtenemos  $n$  puntos sobre una circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio  $\sqrt[n]{|z|}$  que forman un polígono regular de  $n$  lados.

En general no es cierto que dados dos números complejos  $z$  y  $w$  entonces el producto de las raíces  $n$ -ésimas principales de  $z$  y de  $w$  sea igual a la raíz  $n$ -ésima principal de  $zw$ . Lo que sí es cierto es que el producto de dos raíces  $n$ -ésimas cualesquiera de  $z$  y de  $w$  es una raíz  $n$ -ésima de  $zw$ . Por tanto,  $\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{w}$ , es **una** raíz  $n$ -ésima de  $zw$  pero no tiene por qué ser la principal.



Por ejemplo, para  $n = 2, z = w = -1$ , como  $\arg(-1) = \pi$ , tenemos que

$$\sqrt{-1} = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2) = i$$

En este caso

$$\sqrt{-1} \sqrt{-1} = ii = -1 \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

La igualdad  $\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$  equivale a que para algún entero  $k$  se verifique que

$$\frac{\arg(z)}{n} + \frac{\arg(w)}{n} = \frac{\arg(zw)}{n} + 2k\pi$$

es decir,  $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw) + 2kn\pi$ . Como  $-2\pi < \arg(z) + \arg(w) \leq 2\pi$  y  $n \geq 2$  tiene que ser  $k = 0$  (pues, en otro caso,  $|2kn\pi| \geq 4\pi$ ). Luego, debe ocurrir que  $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$  lo que equivale a que  $-\pi < \arg(z) + \arg(w) \leq \pi$ .

Por ejemplo, si los números  $z$  y  $w$  están en el semiplano de la derecha, es decir,  $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0$ , entonces  $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$  y  $-\pi/2 < \arg(w) < \pi/2$ ; por tanto  $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$  por lo que, en este caso,  $\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$ .

### 1.2.3. Ejercicios

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma  $a + ib$ .

$$\begin{array}{llll} \text{i)} (7-2i)(5+3i) & \text{ii)} (i-1)^3 & \text{iii)} \overline{(1+i)(2+i)}(3+i) & \text{iv)} \frac{3+i}{2+i} \\ \text{v)} \frac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i} & \text{vi)} (1+i)^{-2} & \text{vii)} \frac{1+2i}{2-i} & \text{viii)} i^2(1+i)^3 \end{array}$$

2. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

$$\text{a)} f_1(z) = \bar{z}^2 \quad \text{b)} f_2(z) = z^3 \quad \text{c)} f_3(z) = \frac{1}{z} \quad \text{d)} f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{e)} f_4(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

3. Calcula las siguientes cantidades.

$$\text{a)} |(1+i)(2-i)| \quad \text{b)} \left| \frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}} \right| \quad \text{c)} |(1+i)^{20}| \quad \text{d)} \left| \sqrt{2} + i(\sqrt{2}+1) \right|$$

4. Calcula los números complejos  $z$  tales que  $\frac{1+z}{1-z}$  es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

5. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

$$\text{a)} -\sqrt{3}-i \quad \text{b)} -\sqrt{3}+i \quad \text{c)} \frac{3}{\sqrt{3}+i} \quad \text{d)} \frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$$

6. Expresa los siguientes números en la forma  $a + ib$ :

$$\text{a)} (-1+i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b)} \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^5 \quad \text{c)} \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^6 \quad \text{d)} (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

7. Calcula  $\arg(zw)$  y  $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$  supuestos conocidos  $\arg z$  y  $\arg w$ .

8. Supuesto que  $|z| = 1$ , prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

9. Sea  $z = x + iy$ . Supuesto que  $|z| = 1$ ,  $z \neq 1$ ,  $z \neq -i$ , prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1-x+y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } 1-x+y < 0 \end{cases}$$

10. Resuelve la ecuación cuadrática  $az^2 + bz + c = 0$  donde  $a, b, c$ , son números complejos conocidos y  $a \neq 0$ .

11. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^3 = 1 + i \quad \text{b) } z^4 = i \quad \text{c) } z^3 = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{d) } z^8 = 1 \quad \text{e) } z^2 + \sqrt{32}iz - 6i = 0$$

12. Calcula las soluciones de la ecuación  $z^4 + (1+i)z^2 + 5i = 0$ .

13. Demuestra la llamada “igualdad del paralelogramo”:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

14. Dados dos números complejos  $\alpha$  y  $\beta$ , calcula el mínimo valor para  $z \in \mathbb{C}$  de la cantidad  $|z-\alpha|^2 + |z-\beta|^2$ .

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

15. Prueba que  $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1$  si  $|z| < 1$  y  $|a| < 1$  y también si  $|z| > 1$  y  $|a| > 1$ .

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

16. Sea  $x$  un número real que no es múltiplo entero de  $2\pi$ . Prueba las igualdades

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx &= \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \text{b) } \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx &= \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Sugerencia: Si llamamos  $A$  a la primera suma y  $B$  a la segunda, calcúlese  $A + iB$  haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

17. Calcula una fórmula para la suma

$$\sum_{k=-N}^N (\cos(2k\pi t) + i \operatorname{sen}(2k\pi t))$$

(tu respuesta debería de ser un cociente de senos).

18. Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  y  $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$ . Dado un número entero  $m \in \mathbb{Z}$ , calcúlese el valor de las expresiones:

- a)  $1 + w^m + w^{2m} + \dots + w^{(n-1)m}$ ;  
 b)  $1 - w^m + w^{2m} - \dots + (-1)^{n-1} w^{(n-1)m}$ .

19. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

- a)  $\operatorname{sen} 3\varphi = 3 \operatorname{sen} \varphi - 4 \operatorname{sen}^3 \varphi$ ;  
 b)  $\operatorname{cos} 4\varphi = 8 \operatorname{cos}^4 \varphi - 8 \operatorname{cos}^2 \varphi + 1$ ;  
 c)  $\operatorname{sen} 5\varphi = 5 \operatorname{sen} \varphi - 20 \operatorname{sen}^3 \varphi + 16 \operatorname{sen}^5 \varphi$ .

20. Representar gráficamente los conjuntos de números complejos  $z$  que verifican:

$$\begin{aligned} |z-3| \leq 3; \quad 2 < |z-i| \leq 3; \quad |\arg z| < \pi/6; \quad |z-i| + |z+i| = 4 \\ |z-1| = |z-2i|; \quad \left| \frac{z-i}{z+2i} \right| = 2; \quad \operatorname{Im}(z^2) > 6; \quad |z-i| = \operatorname{Im} z + 1 \end{aligned}$$

21. Encuentra los vértices de un polígono regular de  $n$  lados si su centro se encuentra en el punto  $z = 0$  y uno de sus vértices  $z_1$  es conocido.

22. Resuelve la ecuación  $(z-1)^n = (z+1)^n$ , donde  $z \in \mathbb{C}$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

23. Sea  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ . Prueba que  $z_1, z_2, z_3$  son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si,  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .

24. Si  $0 \leq \arg w - \arg z < \pi$ , prueba que el área del triángulo de vértices  $0, z$  y  $w$  viene dada por  $\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}w)$ .

### 1.3. Sucesiones de números complejos

#### Un poco de topología.

Dados  $a \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ , el conjunto

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

se llama **disco abierto** de centro  $a$  y radio  $r$ . Observa que un disco abierto no puede ser vacío.

Dados  $a \in \mathbb{C}$  y  $r \geq 0$ , el conjunto

$$\bar{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\},$$

se llama **disco cerrado** de centro  $a$  y radio  $r$ . Observa que  $\bar{D}(a, 0) = \{a\}$ .

Un conjunto se llama **acotado** si está contenido en algún disco centrado en el origen. Un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  se dice que es un conjunto **abierto** si todo punto de  $\Omega$  es centro de algún disco abierto contenido en  $\Omega$ . Por convenio el conjunto vacío se considera abierto. Un conjunto se llama **cerrado** si su complementario es abierto. Un conjunto abierto no vacío con la propiedad de que dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse por una curva sin salirse del conjunto se llama un **dominio**. Una definición equivalente aunque menos intuitiva de dominio es la siguiente. Un dominio es un conjunto abierto no vacío,  $\Omega$ , cuya única descomposición en la forma  $\Omega = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos disjuntos es la trivial, es decir,  $\{A, B\} = \{\emptyset, \Omega\}$ . Un conjunto cerrado y acotado se llama un conjunto **compacto**.

Dado un conjunto  $A \subset \mathbb{C}$ , se dice que un punto  $z \in \mathbb{C}$  es un punto de acumulación de  $A$  si todo disco abierto con centro en  $z$  contiene puntos de  $A$  distintos de  $z$ . Observa que un punto  $z$  puede ser un punto de acumulación de  $A$  y no pertenecer a  $A$ .

Una sucesión de números complejos es una aplicación del conjunto de los números naturales en  $\mathbb{C}$ . Como es usual, representaremos por  $\{z_n\}$  la sucesión dada por  $n \mapsto z_n$  donde  $z_n \in \mathbb{C}$ . La definición de sucesión convergente es exactamente la misma que para sucesiones reales.

**Definición 1.3.** La sucesión de números complejos  $\{z_n\}$  converge a un número complejo  $z$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un número natural  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se verifica que  $|z_n - z| < \varepsilon$ . Equivalentemente,  $\{z_n\}$  converge a  $z$  si  $|z_n - z| \rightarrow 0$ .

Recordemos que  $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ . Gracias a esta desigualdad tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array} \right\} \leq |z_n - z| \leq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos que  $|z_n - z| \rightarrow 0$  si, y sólo si,  $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \rightarrow 0$  y  $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \rightarrow 0$ . Hemos probado así el siguiente resultado.

**Proposición 1.4.** Una sucesión de números complejos  $\{z_n\}$  es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales  $\{\operatorname{Re} z_n\}$  y  $\{\operatorname{Im} z_n\}$  son convergentes. Además en dicho caso

$$\lim\{z_n\} = z \iff \operatorname{Re} z = \lim\{\operatorname{Re} z_n\} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} z = \lim\{\operatorname{Im} z_n\}$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Supongamos que  $\{z_n\}$  es una sucesión tal que para todo  $K > 0$  existe un número natural  $n_0 \in \mathbb{N}$  de forma que si  $n \geq n_0$  entonces  $|z_n| \geq K$ . En dicho caso diremos que la sucesión  $\{z_n\}$  es divergente o que **diverge** y escribiremos  $\{z_n\} \rightarrow \infty$ . Observa que  $\{z_n\} \rightarrow \infty$  es lo mismo que  $\{|z_n|\} \rightarrow +\infty$ .

Los resultados que conoces para sucesiones de números reales en los que no interviene el orden son también válidos para sucesiones de números complejos. Destacamos entre ellos los más importantes.

**Proposición 1.5** (Álgebra de límites).

- Si  $\{z_n\} \rightarrow z$  y  $\{w_n\} \rightarrow w$ , entonces  $\{z_n + w_n\} \rightarrow z + w$  y  $\{z_n w_n\} \rightarrow zw$ . Además, si  $z_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $z \neq 0$ , entonces  $\{1/z_n\} \rightarrow 1/z$ .
- Si  $\{z_n\}$  diverge y  $\{w_n\}$  está acotada entonces  $\{z_n + w_n\}$  diverge.
- Si  $\{z_n\}$  diverge y  $\{w_n\}$  está separada de 0, esto es, existe  $\rho > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  de forma que para  $n \geq n_0$  se cumple  $|w_n| \geq \rho$ , entonces  $\{z_n w_n\}$  diverge.

Recuerda que una **sucesión parcial** de una sucesión  $\{z_n\}$  es cualquier sucesión de la forma  $\{z_{\sigma(n)}\}$  donde  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es una aplicación estrictamente creciente.

**Teorema 1.6** (de Bolzano–Weierstrass). Toda sucesión acotada de números complejos tiene alguna sucesión parcial convergente.

**Definición 1.7.** Una sucesión de números complejos  $\{z_n\}$  se dice que es de Cauchy si para cada número  $\varepsilon > 0$  existe un número natural  $n_0 \in \mathbb{N}$  de forma que si  $p, q \geq n_0$  entonces  $|z_p - z_q| < \varepsilon$

Repetiendo el mismo argumento anterior, deducimos que  $\{z_n\}$  es una sucesión de Cauchy si, y sólo si,  $\{\operatorname{Re} z_n\}$  y  $\{\operatorname{Im} z_n\}$  son sucesiones de Cauchy. Puesto que  $\mathbb{R}$  es completo, ser de Cauchy equivale a ser convergente, luego si  $\{\operatorname{Re} z_n\}$  y  $\{\operatorname{Im} z_n\}$  son de Cauchy convergen y, por tanto,  $\{z_n\}$  es convergente.

**Teorema 1.8** (de complitud). Toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente.

## 1.4. Series de números complejos

Dada una sucesión,  $\{z_n\}$ , podemos formar a partir de ella otra sucesión,  $\{S_n\}$ , cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de  $\{z_n\}$ , es decir:

$$S_1 = z_1, S_2 = z_1 + z_2, S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \dots, S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

La sucesión  $\{S_n\}$  así obtenida se llama *serie de término general*  $z_n$  y es costumbre representarla por  $\sum_{n \geq 1} z_n$  o, más sencillamente,  $\sum z_n$ .

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, *todos los conceptos y resultados estudiados ya para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series*. En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es “convergente”. Si una serie  $\sum_{n \geq 1} z_n$  es convergente se usa el símbolo  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  para representar el límite de la serie que suele

llamarse suma de la serie. Naturalmente  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\{S_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k$$

Como caso particular de la proposición 1.4, la serie  $\sum_{n \geq 1} z_n$  converge si, y sólo si, las series

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{n \geq 1} z_n\right) = \sum_{n \geq 1} \operatorname{Re} z_n \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{n \geq 1} z_n\right) = \sum_{n \geq 1} \operatorname{Im} z_n$$

son convergentes.

Conviene que recuerdes la condición básica *necesaria* para la convergencia de una serie. Si la serie  $\sum z_n$  converge entonces la sucesión  $z_n = \sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^{n-1} z_j$  es diferencia de dos sucesiones que convergen al mismo límite y por tanto converge a cero.

**Proposición 1.9.** *Condición necesaria para que  $\sum z_n$  sea convergente es que  $\lim\{z_n\} = 0$ .*

Para las series es posible definir otro tipo de convergencia, la **convergencia absoluta**.

**Definición 1.10.** Se dice que una serie de números complejos  $\sum_{n \geq 1} z_n$  converge absolutamente si la serie de números reales positivos  $\sum_{n \geq 1} |z_n|$  es convergente.

**Proposición 1.11.** *Si una serie de números complejos  $\sum z_n$  es absolutamente convergente entonces dicha serie también es convergente.*

*Demostración.* Pongamos  $S_n = \sum_{j=1}^n z_j$ ,  $A_n = \sum_{j=1}^n |z_j|$  y supongamos que la sucesión  $\{A_n\}$  es convergente, es decir,  $\sum z_n$  es absolutamente convergente. Dado  $\varepsilon > 0$ , la condición de Cauchy para  $\{A_n\}$  nos dice que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|A_q - A_p| = \sum_{k=p+1}^q |z_k| < \varepsilon \quad \text{para todos } p, q \in \mathbb{N} \text{ tales que } q > p \geq n_0$$

Deducimos que para todos  $p, q \in \mathbb{N}$  tales que  $q > p \geq n_0$  se verifica que

$$|S_q - S_p| = |z_{p+1} + z_{p+2} + \cdots + z_q| \leq \sum_{k=p+1}^q |z_k| < \varepsilon$$

Lo que prueba que la sucesión  $\{S_n\}$ , es decir, la serie  $\sum z_n$  cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente.  $\square$

De hecho, el concepto de convergencia absoluta de una serie es mucho más fuerte que el de convergencia como se pone de manifiesto en el siguiente resultado que no demostraremos.

**Teorema 1.12** (de Riemann). *La serie  $\sum_{n \geq 1} z_n$  converge absolutamente si, y sólo si, para toda biyección  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la serie  $\sum_{n \geq 1} z_{\pi(n)}$  es convergente. Además, en tal caso se verifica que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}$$

### 1.4.1. Criterios de convergencia no absoluta para series

Naturalmente, puedes usar los criterios de convergencia para series de números reales positivos, que ya debes conocer, para estudiar la convergencia absoluta de una serie de números complejos. Pero, ¿qué hacer cuando una serie no es absolutamente convergente? Naturalmente, podemos intentar comprobar si la serie verifica la condición de Cauchy, pero este procedimiento con frecuencia es difícil. Pues bien, los siguientes criterios de Dirichlet y Abel proporcionan información sobre la convergencia no absoluta.

**Teorema 1.13.** *Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales y  $\{z_n\}$  una sucesión de números complejos.*

**Criterio de Dirichlet.** *Si  $\{a_n\}$  es monótona y converge a cero y la serie  $\sum z_n$  tiene sumas parciales acotadas, entonces  $\sum a_n z_n$  converge.*

**Criterio de Abel.** *Si  $\{a_n\}$  es monótona y acotada y la serie  $\sum z_n$  converge, entonces  $\sum a_n z_n$  es convergente.*

### 1.4.2. Ejercicios

1. Estudia la convergencia de las sucesiones:

$$\text{i) } z_n = \sqrt[n]{n} + i n a^n \quad (a \in \mathbb{R}, |a| < 1) \quad \text{ii) } z_n = \frac{2^n}{n} + \frac{i n}{2^n}$$

$$\text{iii) } z_n = \sqrt[n]{a} + i \operatorname{sen} \frac{1}{n} \quad (a > 0) \quad \text{iv) } z_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n} + 5 i \cos \frac{1}{n}$$

$$\text{v) } z_n = \left( \frac{1+i}{2} \right)^n \quad \text{vi) } z_n = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$

2. Sea  $\{z_n\}$  una sucesión de números complejos no nulos y para todo  $n \in \mathbb{N}$  sea  $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$ . Supongamos que  $\{\varphi_n\} \rightarrow \varphi$  y  $\{|z_n|\} \rightarrow \rho$ . Justifica que la sucesión  $\{z_n\} \rightarrow \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ .

3. Calcula el límite de la sucesión  $z_n = \left( 1 + \frac{\sqrt{2} + i \frac{\pi}{3}}{n} \right)^n$ .

Sugerencia: Expresa  $z_n = |z_n|(\cos \varphi_n + i \operatorname{sen} \varphi_n)$  y usa el ejercicio anterior.

4. Calcula el límite de la sucesión  $z_n = n \left( \sqrt[n]{2} \left( \cos \frac{\pi}{2n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n} \right) - 1 \right)$ .

Sugerencia: Recuerda que el límite de la sucesión  $n(\sqrt[n]{2} - 1)$  es bien conocido.

5. Sea  $z \in \mathbb{C}$ , con  $|z| = 1$ ,  $z \neq 1$ . Prueba que la sucesión  $\{z^n\}$  no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si  $\varphi$  es un número real que no es un múltiplo entero de  $\pi$ , las sucesiones  $\{\cos(n\varphi)\}$  y  $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$  no convergen.

6. Estudia la convergencia de las series:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(1+i)^n} & \text{ii)} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n + i \operatorname{sen} n}{n} \\ \text{iii)} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n + i \operatorname{sen} n}{n^2} & \text{iv)} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos \frac{\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{n} \\ \text{v)} \sum_{n \geq 1} \frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n} \frac{1}{n} & \text{vi)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n \\ \text{vii)} \sum_{n \geq 1} \left( \cos \frac{\pi}{n^2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n^2} \right) & \text{viii)} \sum_{n \geq 0} \frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n + 7} \end{array}$$

7. Sea  $\rho \in \mathbb{R}$  con  $|\rho| < 1$  y  $\vartheta \in \mathbb{R}$ . Calcula los límites  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos(n\vartheta)$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \operatorname{sen}(n\vartheta)$ .

## 1.5. Funciones complejas

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  con valores en  $\mathbb{R}^2$  cuando en  $\mathbb{R}^2$  consideramos su estructura compleja. Dado un conjunto  $A \subset \mathbb{C}$ , a toda función compleja  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  se le asocian dos funciones reales: la función  $u = \operatorname{Re} f$  “parte real de  $f$ ” y la función  $v = \operatorname{Im} f$  “parte imaginaria de  $f$ ” definidas para todo  $(x, y) = x + iy \in A$  por:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

Naturalmente,  $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$ .

La **función conjugada** de  $f$  es la función  $\bar{f}$  dada por  $\bar{f}(z) = \operatorname{Re} f(z) - i \operatorname{Im} f(z)$ . La **función módulo** de  $f$  es la función  $|f|$  dada por  $|f|(z) = |f(z)|$ .

### 1.5.1. Continuidad y límite funcional

**Definición 1.14.** Se dice que la función  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en un punto  $a \in A$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\left. \begin{array}{l} z \in A \\ |z - a| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Usando una vez más las desigualdades

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

se prueba fácilmente que una función compleja  $f$  es continua en  $a$  si, y sólo si, las funciones  $\operatorname{Re} f$  y  $\operatorname{Im} f$  son continuas en  $a$ .

**Definición 1.15.** Dado un punto  $a$  de acumulación de  $A$ , se dice  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  tiene límite en  $a$  si hay un número complejo  $L \in \mathbb{C}$  con la propiedad de que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\left. \begin{array}{l} z \in A \\ 0 < |z - a| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Simbólicamente escribimos  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$ .

Usando las desigualdades anteriores y llamando  $a = \alpha + i\beta$ ,  $L = \lambda + i\mu$  tenemos

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} \operatorname{Re} f(x,y) = \lambda \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} \operatorname{Im} f(x,y) = \mu \end{cases}$$

Se dice que  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  tiene límite en infinito si hay un número complejo  $L \in \mathbb{C}$  con la propiedad de que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $K > 0$  tal que si  $|z| > K$  entonces  $|f(z) - L| < \varepsilon$ . Simbólicamente escribimos  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$ .

Se dice que  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  tiene límite infinito en infinito si para todo  $M > 0$  existe  $K > 0$  tal que si  $|z| > K$  entonces  $|f(z)| > M$ . Simbólicamente escribimos  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .

Se dice que  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  tiene límite infinito en un punto  $a$  de acumulación de  $A$  si para todo  $M > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left. \begin{array}{l} z \in A \\ 0 < |z - a| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(z)| > M$$

Simbólicamente escribimos  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ .

Observa que hay una completa analogía formal entre las definiciones anteriores y las correspondientes para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de cálculo de límites conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

El siguiente resultado, aunque elemental, es importante.

**Proposición 1.16** (Continuidad del argumento principal). *La función argumento principal es continua en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  y es discontinua en  $\mathbb{R}^-$ .*

*Demostración.* Sabemos que para  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  el argumento principal viene dado por

$$\arg z = 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}$$

Teniendo en cuenta que la función arcotangente es continua y que  $\operatorname{Re} z + |z| > 0$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ , deducimos que el argumento principal es continuo en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ .

Sea  $a \in \mathbb{R}^-$  y  $z_n = a + \frac{(-1)^n}{n}$ . Claramente  $\{z_n\} \rightarrow a$ , pero como

$$\arg(z_{2n}) = \operatorname{arctg}(1/na) + \pi \rightarrow \pi \quad \arg(z_{2n-1}) = \operatorname{arctg}(-1/na) - \pi \rightarrow -\pi$$

concluimos que  $\{\arg(z_n)\}$  no converge y por tanto el argumento principal es discontinuo en  $a$ .

## 1.5.2. Derivada de una función de variable compleja

Sea  $A \subset \mathbb{C}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , se dice que  $f$  es derivable en un punto  $a \in A \cap A'$  si existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \in \mathbb{C}.$$



El valor de dicho límite se representa por  $f'(a)$  y se llama derivada de  $f$  en el punto  $a$ .

La única novedad de la definición es que se está utilizando el producto complejo y eso, como veremos, hace que la condición de derivabilidad en sentido complejo sea mucho más fuerte que la derivabilidad para funciones reales.

### Casos Particulares

- Cuando  $A \subseteq \mathbb{R}$  y  $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ , la definición dada coincide con la conocida para una función real de variable real
- Para funciones complejas de una variable real se tiene el siguiente resultado.

Sea  $A \subset \mathbb{R}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces la función  $f$  es de la forma

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

donde  $u$  y  $v$  son funciones reales de variable real. En este caso tenemos:

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{u(t) - u(a)}{t - a} + i \frac{v(t) - v(a)}{t - a}$$

y deducimos que  $f$  es derivable en  $a$  si, y sólo si, las funciones  $u$  y  $v$  son derivables en  $a$ , en cuyo caso

$$f'(a) = u'(a) + iv'(a)$$

Observa que hay una completa analogía formal entre el concepto de función derivable para funciones de variable compleja y para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de derivación conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

**Proposición 1.17** (Reglas de derivación). *Sean dos funciones  $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$  con  $A \subseteq \mathbb{C}$  y  $a \in A \cap A'$ . Supongamos que  $f$  y  $g$  son derivables en  $a$ . Entonces:*

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- Si  $g(z) \neq 0$  para todo  $z \in A$  entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

- **Regla de la cadena.** Sean  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $f(A) \subseteq B$ , y consideremos la función compuesta  $h = g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Supongamos que  $f$  es derivable en  $a \in A \cap A'$  y  $g$  es derivable en  $b = f(a) \in B \cap B'$ . entonces  $h$  es derivable en  $a$  y

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a) = g'(b)f'(a)$$

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

### 1.5.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

**Teorema 1.18** (Relación entre la derivabilidad compleja y la diferenciabilidad real). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto, a un punto de  $\Omega$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función de  $\Omega$  en  $\mathbb{C}$ . Notemos  $a = \alpha + i\beta$ ,  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ . Equivalen las siguientes afirmaciones:

- i)  $f$  es derivable (en sentido complejo) en  $a = \alpha + i\beta$ .  
 ii) Las funciones  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$  son diferenciables en  $(\alpha, \beta)$  y además

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \text{Ecuaciones de Cauchy-Riemann}$$

En caso de que se cumplan i) y ii) se tiene

$$f'(a) = f'(\alpha + i\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) + i \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta)$$

*Demostración.* Por definición,  $f$  es derivable si, y sólo si existe un número complejo, la derivada de  $f$  en  $a$ ,  $f'(a) = \lambda + i\mu$  que verifica

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a) - (\lambda + i\mu)(z - a)|}{|z - a|} = 0.$$

Pongamos  $z = x + iy$ . Si tenemos en cuenta la igualdad

$$(\lambda + i\mu)(x + iy - \alpha - i\beta) = \lambda(x - \alpha) - \mu(y - \beta) + i[\mu(x - \alpha) + \lambda(y - \beta)]$$

y el hecho de que el módulo de un complejo coincide con la norma euclídea (visto en  $\mathbb{R}^2$ ), el límite anterior se escribe como sigue:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (\alpha, \beta)} \frac{\|(u(x, y), v(x, y)) - (u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)) - (\lambda(x - \alpha) - \mu(y - \beta), \mu(x - \alpha) + \lambda(y - \beta))\|}{\|(x, y) - (\alpha, \beta)\|} = 0$$

o bien, como  $(\lambda(x - \alpha) - \mu(y - \beta), \mu(x - \alpha) + \lambda(y - \beta)) = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix}$ ,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (\alpha, \beta)} \frac{\left\| (u(x, y), v(x, y)) - (u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)) - \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \right\|}{\|(x, y) - (\alpha, \beta)\|} = 0.$$

La condición anterior quiere decir que la aplicación  $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$  de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  es diferenciable en  $(\alpha, \beta)$  y su diferencial es la aplicación lineal dada por  $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Por tanto  $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$  es la matriz jacobiana de la aplicación  $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$  en  $(\alpha, \beta)$ , esto es

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) = \lambda, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) = -\mu, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) = \mu, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) = \lambda$$

Finalmente

$$f'(a) = f'(\alpha + i\beta)\lambda + i\mu = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) + i \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta)$$



Este resultado explica porqué si defines, sin pensarlo mucho, una función compleja en la forma  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  lo más probable es que, a pesar de lo buenas que puedan ser las funciones  $u$  y  $v$ , la función así definida no sea derivable. Pues las funciones  $u$  y  $v$  no tienen por qué verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto indica (aunque esta es una idea difícil de precisar) que las funciones complejas derivables son “auténticas funciones complejas” en el sentido de que si la función  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  es derivable entonces la expresión  $u(x, y) + iv(x, y)$  debe depender únicamente de la variable  $z$ . Los siguientes ejemplos son ilustrativos.

#### Ejemplos 1.19.

- $f(x + iy) = x$  no es derivable en ningún punto.
- $f(z) = z|z|^2$  sólo es derivable en cero.
- $f(x + iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$  es derivable en todo  $\mathbb{C}$  y  $f'(z) = f(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

### 1.5.4. Propiedades de las funciones holomorfas

**Definición 1.20.** Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$ . Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  se dice que es **holomorfa** en  $\Omega$  si  $f$  es derivable en todo punto de  $\Omega$ . En tal caso la función definida para  $z \in \Omega$  por  $z \mapsto f'(z)$  se llama **función derivada** de  $f$ . Notaremos por  $\mathcal{H}(\Omega)$  el conjunto de todas las funciones holomorfas en  $\Omega$ . Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman **funciones enteras**.

#### Ejemplos 1.21.

- Las funciones polinómicas, es decir, las funciones de la forma

$$p(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n$$

donde  $c_k \in \mathbb{C}$  para  $0 \leq k \leq n$ , son funciones enteras. La función derivada de  $p$  viene dada por

$$p'(z) = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \cdots + nc_nz^{n-1} \quad (z \in \mathbb{C})$$

- Las funciones racionales, es decir, las funciones de la forma  $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  donde  $p(z)$  y  $q(z)$  son funciones polinómicas, son holomorfas en su dominio natural de definición  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$ . La función derivada de  $R$  viene dada por

$$R'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q(z)^2} \quad (z \in \Omega)$$

Como consecuencia de las reglas de derivación tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.22.** El conjunto  $\mathcal{H}(\Omega)$  de las funciones holomorfas en un abierto  $\Omega$  con la suma y el producto usual de funciones es un álgebra.

**Proposición 1.23.** Una función holomorfa en un dominio cuya derivada es nula en todo punto es constante.

*Demostración.* Sea  $\Omega$  un dominio,  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in \Omega$ . Fijado  $z_0 \in \Omega$ , definimos

$$A = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}$$

$A$  es no vacío y, por ser  $f$  continua, es un cerrado relativo de  $\Omega$ . Veamos que también es abierto. Sea  $a \in A$  y como  $\Omega$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que  $D(a, r) \subset \Omega$ . Tomamos  $b \in D(a, r)$  y definimos

$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\varphi(t) = f((1-t)a + tb)$ . Como  $f$  es derivable, la regla de la cadena nos dice que  $\varphi$  es derivable y

$$\varphi'(t) = f'((1-t)a + tb)(b-a) = 0$$

Por ser  $\varphi$  una función compleja de variable real tenemos

$$\varphi'(t) = (\operatorname{Re} \varphi)'(t) + i(\operatorname{Im} \varphi)'(t) = 0 \quad (t \in [0, 1])$$

Luego  $(\operatorname{Re} \varphi)'(t) = 0$  y  $(\operatorname{Im} \varphi)'(t) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Puesto que  $\operatorname{Re} \varphi$  y  $\operatorname{Im} \varphi$  son funciones reales de variable real definidas en  $[0, 1]$ , se sigue que son constantes. Luego  $\varphi$  es constante y por tanto  $\varphi(0) = f(a) = \varphi(1) = f(b)$  luego  $b \in A$ . Hemos probado que  $D(a, r) \subset A$ , luego  $A$  es abierto. El hecho de que  $\Omega$  sea un dominio permite concluir que  $A = \Omega$ , es decir,  $f$  es constante en  $\Omega$ .  $\square$

**Corolario 1.24.** *Si dos funciones holomorfas tienen la misma derivada sobre un dominio y coinciden en un punto son iguales.*

La siguiente proposición vuelve a poner de manifiesto que la condición de que una función sea holomorfa es mucho más restrictiva que la derivabilidad real.

**Proposición 1.25.** *Sea  $\Omega$  un dominio y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Equivalen las siguientes afirmaciones:*

- (i)  $\operatorname{Re} f$  es constante en  $\Omega$
- (ii)  $\operatorname{Im} f$  es constante en  $\Omega$
- (iii) La función compleja conjugada de  $f$ ,  $\bar{f}$ , es holomorfa en  $\Omega$
- (iv)  $f$  es constante en  $\Omega$
- (v)  $|f|$  es constante en  $\Omega$

*Demostración.* Pongamos  $f = u + iv$ , con  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ . Es claro que la condición (iv) implica todas las demás.

(i)  $\Rightarrow$  (iv) Las ecuaciones de Cauchy–Riemann afirman que

$$f'(z) = f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad (z = x + iy \in \Omega)$$

Puesto que  $\operatorname{Re} f$  es constante tenemos  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$  lo que implica que  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in \Omega$  de donde deducimos (iv) gracias a la proposición anterior.

(ii)  $\Rightarrow$  (iv) Puesto que  $\operatorname{Im} f = -\operatorname{Re}(if)$  la implicación (i)  $\Rightarrow$  (iv) ya probada nos dice que la función  $if$  es constante y, por lo tanto,  $f$  también lo es.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Como  $f$  es holomorfa y  $\bar{f}$  lo es por hipótesis tenemos que  $f + \bar{f} = 2\operatorname{Re} f$  es holomorfa. Puesto que  $\operatorname{Im}(\operatorname{Re} f) = 0$  es constante, deducimos, por (ii)  $\Rightarrow$  (iv), que  $\operatorname{Re} f$  es constante y por (i)  $\Rightarrow$  (iv) concluimos que  $f$  es constante.

(v)  $\Rightarrow$  (iv) Si  $|f| = \alpha$  entonces  $f(z)\bar{f}(z) = \alpha^2$ . Si  $\alpha = 0$  entonces  $f$  es idénticamente nula y hemos acabado. Si  $\alpha \neq 0$  entonces  $f$  no se anula en ningún punto por lo que  $\bar{f}(z) = \frac{\alpha^2}{f(z)}$  es holomorfa en  $\Omega$  y, por (iii)  $\Rightarrow$  (iv), concluimos que  $f$  es constante.  $\square$

Observa que estas propiedades de las funciones holomorfas están muy lejos de ser ciertas para funciones reales diferenciables. Por ejemplo, dada una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  diferenciable que no se anule nunca, dividiéndola por su norma obtenemos una función diferenciable cuyo módulo (norma euclídea) es constante.

### 1.5.5. Ejercicios

1. Consideremos la función dada para  $z \neq 0$  por  $f(z) = \frac{\bar{z}^2}{z}$ , y  $f(0) = 0$ . ¿En qué puntos verifica  $f$  las ecuaciones de Cauchy-Riemann? ¿Es  $f$  derivable en  $z = 0$ ?
2. Sea  $\Omega$  un abierto y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Sean  $\Omega^* = \{z : \bar{z} \in \Omega\}$  y  $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$  la función definida por:  $f^*(z) = f(\bar{z})$ ,  $\forall z \in \Omega^*$ . Prueba que  $f^*$  es holomorfa en  $\Omega^*$ .
3. Sea  $\Omega$  un dominio y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Supongamos que hay números  $a, b, c \in \mathbb{R}$  con  $a^2 + b^2 > 0$ , tales que  $a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c$  para todo  $z \in \Omega$ . Prueba que  $f$  es constante en  $\Omega$ .
4. Calcula una función  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  tal que  $\operatorname{Re} f(x + iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ . Si se exige que sea  $f(0) = 0$ , entonces dicha función es única.
5. Encuentra una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los números reales  $a, b, c$  para que exista una función  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ , verificando que

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = ax^2 + bxy + cy^2$$

para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ . Determina, cuando dicha condición se cumpla, todas las funciones enteras  $f$  cuya parte real es de la forma indicada.

## 1.6. Funciones complejas elementales

### 1.6.1. La función exponencial

Una de las formas de definir la exponencial de un número real  $x$  es mediante el límite

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para  $z \in \mathbb{C}$ . Llamemos  $z = x + iy$ . Consideraremos que  $y \neq 0$ , puesto que si  $y = 0$  tendríamos que  $z = x$  sería un número real. Pongamos  $w_n = 1 + z/n$  y

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{y/n}{1 + x/n}$$

Sea  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$  se verifique que  $\operatorname{Re}(w_n) > 0$ . Entonces, para  $n \geq n_0$  resulta que  $\varphi_n = \arg(w_n)$ . Por otra parte, el módulo de  $w_n$  viene dado por

$$|w_n|^2 = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^2 = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}$$

Tenemos ahora, gracias a la fórmula de De Moivre que

$$(w_n)^n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} (\cos(n\varphi_n) + i \operatorname{sen}(n\varphi_n))$$

Pero, por el criterio de equivalencia logarítmica, es

$$\lim |w_n|^n = \lim \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \exp\left(\lim \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2}\right)\right) = e^x$$

Además, la sucesión  $\{\varphi_n\}$  es asintóticamente equivalente a la sucesión  $\left\{\frac{y/n}{1+x/n}\right\}$ . Por tanto

$$\lim\{n\varphi_n\} = \lim\left\{n\frac{y/n}{1+x/n}\right\} = y$$

En consecuencia, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |w_n|^n (\cos(n\varphi_n) + i \operatorname{sen}(n\varphi_n)) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Definimos, por tanto, la exponencial compleja como

$$e^z = \exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z))$$

Observa que

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \quad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. Haciendo  $t = \pi$  tenemos la singular igualdad

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

en la que intervienen los números más importantes de las matemáticas.

De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se deduce que la función exponencial es una función entera y  $\exp'(z) = \exp(z)$ . Se prueba fácilmente que  $e^{z+w} = e^z e^w$  para todos  $z, w \in \mathbb{C}$ . Se deduce que para todo  $z \in \mathbb{C}$  y todo  $k \in \mathbb{Z}$  es

$$e^z = e^{z+2k\pi i}$$

Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función **periódica** con período  $2\pi i$ . Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva. Observa que la exponencial no se anula nunca pues  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0$ .

## 1.6.2. Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación  $e^w = z$ , donde  $z$  es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones  $w \in \mathbb{C}$ . Como

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w} (\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w))$$

Para que  $e^w = z$  es necesario y suficiente que:

1.  $|e^w| = |z|$ , esto es,  $e^{\operatorname{Re} w} = |z|$ , es decir,  $\operatorname{Re} w = \log |z|$  (logaritmo natural del número real positivo  $|z|$ ).
2.  $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$ , esto es,  $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} z$  y esto se cumple si, y sólo si  $\operatorname{Im} w = \arg(z) + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Hemos probado que

$$\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, existen infinitos números complejos  $w$  que satisfacen la ecuación  $e^w = z$ . Cualquiera de ellos se llama **un logaritmo** de  $z$ . El conjunto de todos ellos lo representaremos por  $\text{Log } z$ . De entre todos ellos elegimos uno, llamado **logaritmo principal**, definido por

$$\log z = \log|z| + i \arg(z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^*$$

Observa que cualquier otro logaritmo de  $z$  es de la forma  $\log(z) + i2k\pi$  para algún entero  $k$ . Es importante que observes que la igualdad

$$\log zw = \log z + \log w$$

que es válida para los logaritmos de los números reales positivos, no es siempre cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\log(-1 + i\sqrt{3}) = \log|-1 + i\sqrt{3}| + i \arg(-1 + i\sqrt{3}) = \log 2 + i(\arctan(-\sqrt{3}) + \pi) = \log 2 + i\frac{2\pi}{3}$$

$$\log(-\sqrt{3} + i) = \log|-\sqrt{3} + i| + i \arg(-\sqrt{3} + i) = \log 2 + i(\arctan(-1/\sqrt{3}) + \pi) = \log 2 + i\frac{5\pi}{6}$$

$$\log((-1 + i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)) = \log(-4i) = \log 4 - i\frac{\pi}{2} \neq \log(-1 + i\sqrt{3}) + \log(-\sqrt{3} + i) = \log 4 + i\frac{3\pi}{2}$$

Lo que está claro es que el número  $\log z + \log w \in \text{Log}(zw)$ , es decir,  $\log z + \log w$  es **un** logaritmo de  $zw$  pero no tiene por qué ser el logaritmo **principal** de  $zw$ .

Como la función  $z \rightarrow \arg z$  es continua en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  y discontinua en  $\mathbb{R}_0^-$ , se deduce que el logaritmo principal es discontinuo en  $\mathbb{R}_0^-$  y continuo en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ . De hecho, el logaritmo principal es una función holomorfa en el dominio  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ . Esto puedes probarlo usando las condiciones de Cauchy-Riemann aunque en este caso es más fácil proceder como sigue. Sea  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  y  $b = \log a$ . La función

$$h(w) = \frac{e^w - e^b}{w - b}, \quad h(b) = e^b$$

es continua en todo  $\mathbb{C}$ . Además  $h(b) \neq 0$  y, por tanto, hay algún  $r > 0$  tal que  $h(w) \neq 0$  para todo  $w \in D(b, r)$ . Como la función logaritmo principal es continua en  $a$ , deducimos que hay un  $s > 0$  tal que  $w = \log z \in D(b, r)$  siempre que  $z \in D(a, s)$ . Teniendo en cuenta que la función logaritmo principal es inyectiva, podemos escribir para  $z \in D(a, s)$ :

$$\frac{\log z - \log a}{z - a} = \frac{1}{h(\log z)} \implies \lim_{z \rightarrow a} \frac{\log z - \log a}{z - a} = \frac{1}{h(\log a)} = \frac{1}{a}$$

Hemos probado, pues, que  $\log'(z) = \frac{1}{z}$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ .

### 1.6.3. Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales  $a > 0$  y  $b \in \mathbb{R}$ , la potencia de base  $a$  y exponente  $b$  se define como  $a^b = e^{b \log a}$ . Ahora, dados  $a, b \in \mathbb{C}$ , con  $a \neq 0$ , sabemos que hay infinitos logaritmos de  $a$ , todos ellos son de la forma  $\log a + i2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Por ello, cualquier número complejo de la forma  $e^{b(\log a + i2k\pi)}$  donde  $k \in \mathbb{Z}$ , es **una** potencia de base  $a$  y exponente  $b$ . De todas ellas se destaca una:

$$a^b = e^{b \log a}$$

y dicho número se llama **valor principal** de la potencia de base  $a$  y exponente  $b$ . Observa que si  $b = 1/n$  donde  $n \in \mathbb{N}$ , el número

$$a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log a\right) = \exp\left(\frac{\log a}{n} + i \frac{\arg a}{n}\right) = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\arg a}{n} + i \sen \frac{\arg a}{n}\right)$$

es el valor principal de la raíz  $n$ -ésima de  $a$  que antes hemos notado por  $\sqrt[n]{a}$ .

La definición anterior da lugar a las funciones exponenciales complejas de base  $a$ ,  $z \mapsto a^z$ , definidas por  $a^z = \exp(z \log a)$  que son holomorfas en todo el plano.

Por otro lado la función potencia compleja de exponente  $b$ ,  $z \mapsto z^b$ , definida por  $z^b = \exp(b \log z)$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ .

Las funciones exponenciales cumplen evidentemente la igualdad  $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$  pero las funciones potencias no cumplen, en general como vimos al estudiar las raíces, la propiedad  $(zw)^b = z^b w^b$ . Esta igualdad se da en el caso de que

$$\exp(b \log(zw)) = \exp(b \log z + b \log w)$$

equivalentemente, puesto que la función  $\exp$  es periódica de periodo  $2\pi i$ , cuando se verifique que

$$b \log(zw) = b \log z + b \log w + 2k\pi i, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Como caso particular, cuando  $z$  y  $w$  pertenecen al primer cuadrante la igualdad  $\log(zw) = \log z + \log w$  es cierta con lo cual lo anterior se cumple para  $k = 0$ . Por los mismos motivos la igualdad  $(z^b)^c = z^{bc}$  no es cierta en general.

## 1.7. Funciones trigonométricas complejas

### Seno y coseno complejos

Las ecuaciones de Euler:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

válidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , también tienen sentido para números complejos. Por ello, para todo  $z \in \mathbb{C}$  definimos el coseno y el seno complejos por:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Es inmediato que el seno y coseno complejos extienden a las funciones seno y coseno reales.

Puesto que el coseno y el seno complejos están definidos como combinación de exponenciales sus propiedades se deducen fácilmente a partir de las propiedades de la exponencial.

1. Identidad fundamental  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
2.  $\cos(-z) = \cos(z)$ ,  $\sin(-z) = -\sin(z)$
3. Fórmulas de adición

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \sin w \cos z \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \end{aligned}$$

4. Las funciones seno y coseno son derivables en todo  $\mathbb{C}$  con  $\sin' z = \cos z$ ,  $\cos' z = -\sin z$
5. Relación con las funciones hiperbólicas. Recordando que las funciones hiperbólicas  $\sinh x$  y  $\cosh x$  se definen por:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Es de comprobación inmediata que:

$$\cosh x = \cos(ix) \quad \sinh(x) = -i \sin(ix)$$



6. Se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \\ |\cos z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \\ |\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y\end{aligned}$$

7. Las funciones seno y coseno complejos no están acotadas, aunque si lo están en bandas acotadas paralelas al eje real.

8. Las funciones seno y coseno complejas no tienen más ceros que los reales, esto es,  $\operatorname{sen} z = 0$  si, y sólo si,  $z$  es real de la forma  $2k\pi$  y  $\cos z = 0$  si, y sólo si,  $z$  es real de la forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ .

### Tangente compleja

Por analogía con la tangente real definimos la función tangente compleja como

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \quad (\cos z \neq 0)$$

Puesto que el seno y el coseno son funciones enteras la tangente compleja es una función holomorfa en su dominio de definición  $\mathbb{C} \setminus \{z : \cos z = 0\}$ . Además sabemos que  $\cos z = 0$  sólo si  $z$  es real de la forma  $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

Las propiedades de la tangente se deducen con facilidad de las propiedades del seno y el coseno. Por ejemplo, puedes comprobar que

$$\operatorname{tg}(z+w) = \frac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} w}$$

## 1.7.1. Funciones trigonométricas inversas

### Arcocoseno complejo

Dado un número complejo  $z \in \mathbb{C}$  se trata de calcular los complejos  $w$  tales que  $\cos w = z$ .

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z \iff e^{iw} + e^{-iw} - 2z = 0$$

puesto que  $\exp(w) \neq 0$  para cualquier  $w$ , podemos multiplicar por  $e^{iw}$  la expresión anterior

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

Poniendo  $u = e^{iw}$ , la ecuación anterior podemos escribirla  $u^2 - 2zu + 1 = 0$ , cuyas raíces son

$$u = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = z \pm i \sqrt{1 - z^2}$$

Observa que dichas raíces son distintas de 0, de hecho una es inversa de la otra pues su producto es igual a 1. Hemos obtenido que:

$$\exp(iw) = z \pm i \sqrt{1 - z^2} \iff iw \in \operatorname{Log}(z \pm i \sqrt{1 - z^2}) \iff \cos w = z$$

Naturalmente, hay infinitos valores de  $w$  que verifican la igualdad anterior. El conjunto de todos ellos se representa por  $\operatorname{Arccos} z$ .

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(z \pm i \sqrt{1 - z^2})$$

De todos ellos elegimos el que corresponde al logaritmo principal y le llamamos valor principal de  $\text{Arccos } z$  que está definido por:

$$\text{arc } \cos z = \frac{1}{i} \log(z + i \sqrt{1 - z^2})$$

Veamos que el  $\text{arc } \cos z$  extiende al arcocoseno real. En efecto, para  $z = x \in [-1, 1]$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \log(x + i \sqrt{1 - x^2}) &= \frac{1}{i} (\log |x + i \sqrt{1 - x^2}| + i \arg(x + i \sqrt{1 - x^2})) = \\ &= \frac{1}{i} (\log 1 + i \arg(x + i \sqrt{1 - x^2})) = \\ &= \arg(x + i \sqrt{1 - x^2}) \end{aligned}$$

Observemos que  $(x, \sqrt{1 - x^2})$  es un punto de la mitad superior de la circunferencia unidad y una medida del ángulo que forma el número complejo  $x + i \sqrt{1 - x^2}$  con el eje real positivo es precisamente el arco cuyo coseno es  $x$ . Además, para  $x \in [-1, 1]$  se tiene que  $0 \leq \text{arc } \cos x \leq \pi$ . Deducimos que  $\arg(x + i \sqrt{1 - x^2}) = \text{arc } \cos x$ .

Teniendo en cuenta que  $\sqrt{1 - z^2} = \exp(\frac{1}{2} \log(1 - z^2))$ , y que el logaritmo principal es holomorfo en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ , deducimos, por la regla de la cadena, que la función  $z \mapsto \sqrt{1 - z^2}$  es holomorfa en el conjunto

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 - z^2 \notin \mathbb{R}_0^-\} = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$$

Análogamente  $\log(z + i \sqrt{1 - z^2})$  es derivable en el conjunto

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : z + i \sqrt{1 - z^2} \notin \mathbb{R}_0^-\}$$

Como  $z + i \sqrt{1 - z^2}$  y  $z - i \sqrt{1 - z^2}$  son inversos, tenemos que

$$z + i \sqrt{1 - z^2} \in \mathbb{R}_0^- \Rightarrow z - i \sqrt{1 - z^2} \in \mathbb{R}_0^- \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z \in \mathbb{R}^- \\ \sqrt{1 - z^2} \in i\mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow z \in ]-\infty, -1]$$

deducimos que  $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, -1] \supset \Omega$ . Luego el arcocoseno es holomorfo en  $\Omega$ . La regla de la cadena nos permite calcular su derivada

$$\begin{aligned} \text{arc } \cos 'z &= \frac{1}{i} \frac{1 + i \frac{-z}{\sqrt{1 - z^2}}}{z + i \sqrt{1 - z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \frac{\sqrt{1 - z^2} - iz}{iz - \sqrt{1 - z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - z^2}} \end{aligned}$$

### Arcoseno complejo

Dado un número complejo  $z$  queremos calcular los complejos  $w$  tales que  $\text{sen } w = z$ . El conjunto de tales números lo representaremos por  $\text{Arcsen}$ . Aunque podemos repetir el mismo proceso anterior, podemos aprovechar lo ya hecho y observar que

$$\text{sen } w = \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right)$$

luego  $\text{sen } w = z$  si, y sólo si,  $\frac{\pi}{2} - w \in \frac{1}{i} \text{Log}(z \pm i \sqrt{1 - z^2})$ . Equivalentemente si

$$w \in \frac{\pi}{2} + i \text{Log}(z \pm i \sqrt{1 - z^2})$$

El valor principal del arcoseno, que notaremos por  $\text{arc sen } z$ , se define eligiendo el logaritmo principal:

$$\text{arc sen } z = \frac{\pi}{2} + i \log(z + i \sqrt{1 - z^2}) \quad z \in \mathbb{C}$$

y es una función holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

### Arcotangente compleja

Dado  $z \in \mathbb{C}$  queremos calcular los números complejos  $w$  tales que  $z = \text{tg } w$ , esto es,  $z = \frac{\text{sen } w}{\text{cos } w}$  o, lo que es lo mismo,  $z \text{cos } w = \text{sen } w$ . El conjunto de todos ellos lo representaremos por  $\text{Arctg } z$ . Escribiendo la definición de seno y coseno

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

Si  $z = \pm i$  la ecuación anterior no tiene solución por lo que consideramos  $z \neq \pm i$ . Multiplicando por  $e^{iw} = u$  la expresión anterior resulta

$$u^2 - 1 = iz(u^2 + 1) \Rightarrow u^2(1 - iz) = 1 + iz$$

puesto que  $z \neq -i$  podemos escribir  $u^2 = \frac{1 + iz}{1 - iz}$ , esto es,

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz} \iff w \in \frac{1}{2i} \text{Log} \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right) \quad (z \neq \pm i)$$

Definimos entonces el valor principal de  $\text{Arctg } z$  por:

$$\text{arc tg } z = \frac{1}{2i} \log \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right) \quad (z \neq \pm i)$$

Puedes probar ahora que la función  $\text{arc tg } z$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{i\rho : \rho \in \mathbb{R}, |\rho| > 1\}$

Es fácil probar que la función arcotangente compleja, al igual que ocurre con las demás funciones trigonométricas complejas, extiende a la función arcotangente real.

### 1.7.2. Ejercicios

1. Expresa los 8 números  $\pm 1 \pm i$ ,  $\pm \sqrt{3} \pm i$  en la forma  $re^{i\varphi}$ .
2. Calcula el módulo y los argumentos principales de los números

$$1 + e^{i\varphi}, 1 - e^{i\varphi}, -ae^{i\varphi}$$

donde  $|\varphi| \leq \pi$  y  $a > 0$ .

3. Calcula  $\log z$  y  $\text{Log } z$  cuando  $z$  es uno de los números siguientes

$$i, -i, e^{-3}, e^{5i}, 4, -5e, 1 + i$$

4. Calcula  $\log(3i) + \log(-1 + i\sqrt{3})$  y  $\log(3i(-1 + i\sqrt{3}))$ .

5. Calcula  $\log(-1 - i) - \log i$  y  $\log\left(\frac{-1 - i}{i}\right)$ .

6. Calcula

$$[(-4)^i], i^{-3i}, [i^{2/\pi}], [i^i], 1^{2i}, 3^{1-i}, ((-i)^i)^i, (1 + i)^{1+i}$$

7. a) Estudia, para  $z \in \mathbb{C}^*$  y  $n \in \mathbb{N}$ , las igualdades:

$$a) \log(\exp(z)) = z; \quad b) \exp(\log(z)) = z; \quad c) \log\left(\frac{1}{z}\right) = -\log(z);$$

$$d) \log(\sqrt[n]{z}) = \frac{\log(z)}{n}; \quad e) \log(z^n) = n \log(z).$$

b) Prueba que la función logaritmo establece una biyección entre los conjuntos  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  y  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$ .

8. Con una interpretación adecuada de la suma justifica que:

$$\text{Arg}(zw) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w) \quad \text{Log}(zw) = \text{Log}(z) + \text{Log}(w)$$

9. Estudia, interpretándolas convenientemente cuando sea necesario, las siguientes igualdades:

$$a) \text{Log}[a^b] = b \text{Log}(a) \quad b) \log[a^b] = b \text{Log}(a) \quad c) \log(a^b) = b \log a$$

10. Indica el error en los razonamientos siguientes:  $(-z)^2 = z^2$ ; por tanto  $2 \text{Log}(-z) = 2 \text{Log}(z)$  y, por consiguiente,  $\text{Log}(-z) = \text{Log}(z)$ .

11. Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

12. Calcula las partes real e imaginaria de los números

$$\text{sen}(1+i), \quad \text{cos}(1-i), \quad \text{tg}(1+2i)$$

13. Indica los conjuntos de puntos  $z \in \mathbb{C}$  donde las funciones  $e^z$ ,  $\text{sen } z$ ,  $\text{cos } z$ ,  $\text{tg } z$ ,  $\text{arc sen } z$ ,  $\text{arc tg } z$  toman:

a) Valores reales.

b) Valores imaginarios puros.

14. Calcula  $\text{Arcsen}(1+i)$ ,  $\text{Arctg}(1-i)$ ,  $\text{arc sen } i$ ,  $\text{arc tg } 2i$ .

15. Sea  $a \in \mathbb{C}$  y  $\{z_n\}$  una sucesión de complejos no nulos tal que  $\{|z_n|\} \rightarrow +\infty$ . Justifica que

$$\left\{ \left( 1 + \frac{a}{z_n} \right)^{z_n} \right\} \rightarrow \exp(a); \quad \left\{ z_n \left( a^{\frac{1}{z_n}} - 1 \right) \right\} \rightarrow \log(a) \quad (a \neq 0)$$

---

Procesos iterativos. El método de aproximaciones sucesivas.

---

## 2.1. Introducción

En términos coloquiales podemos decir que un proceso iterativo es un proceso que se alimenta a sí mismo, es decir, se trata de un proceso secuencial en el que en cada etapa se obtiene un resultado que se utiliza para obtener el resultado de la etapa siguiente. Muchos métodos matemáticos de solución exacta o aproximada de ecuaciones de diversos tipos (ecuaciones algebraicas, diferenciales, integrales...) son procesos iterativos. Entre los más conocidos se encuentran el método de Newton-Raphson para la solución de una ecuación  $f(x) = 0$  a partir de un valor inicial y el método de Picard para la solución de una ecuación diferencial ordinaria  $x' = F(x, t)$  con condiciones iniciales dadas. Dichos métodos consisten en iterar una función  $g$  a partir de un valor inicial  $x_1$  para formar la sucesión dada por  $x_{n+1} = g(x_n)$ . No pienses que este proceso se aplica solamente a sucesiones numéricas. En el método de Picard la función  $g$  es un operador que actúa sobre una función  $x$  y proporciona otra función  $g(x)$ . En condiciones bastante generales puede asegurarse que dicho método es convergente a una solución de la ecuación  $x = g(x)$ , es decir a un punto fijo de  $g$ , que es la solución exacta de nuestro problema  $f(x) = 0$ . Naturalmente, hay que precisar qué se entiende por convergencia cuando la sucesión  $x_{n+1} = g(x_n)$  sea una sucesión de funciones. Otra ventaja de este método es que permite con frecuencia dar cotas del error cometido al aproximar la solución exacta por el término  $x_n$ .

### Estructura de la lección y objetivos.

La lección está estructurada en dos partes:

- Sucesiones numéricas recurrentes.

Estudiaremos algunos aspectos de las sucesiones numéricas recurrentes relacionados con su convergencia, con la existencia de puntos fijos y de puntos periódicos. Veremos con algunos ejemplos que estas sucesiones pueden ser muy regulares o muy sensibles a pequeñas variaciones de los datos iniciales y que pueden tener un comportamiento caótico.

- El método de las aproximaciones sucesivas.

Nos situaremos en el contexto general de los espacios métricos completos para establecer el importante teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas. Haremos uso de este resultado para obtener soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La justificación de esta lección está en su interés matemático y computacional. Se trata de una lección eminentemente práctica aunque también permite motivar e introducir algunos conceptos im-

portantes de Análisis Matemático. Estudiaremos algunos ejemplos muy bonitos de sucesiones recurrentes procurando establecer una estrecha relación entre los resultados teóricos y las prácticas con el programa *Mathematica* el cual usaremos con frecuencia porque en esta lección la visualización juega un papel muy importante.

Haremos dos prácticas relacionadas con esta lección. En la primera estudiaremos las iteraciones de la función cuadrática  $f(x) = \lambda x(1 - x)$  para distintos valores de  $\lambda$  lo que proporciona ejemplos sencillos de comportamientos caóticos. En la segunda de ellas estudiaremos la famosa sucesión de Fibonacci con distintas técnicas que pueden generalizarse para estudiar sucesiones recurrentes lineales. También estudiaremos iteraciones de punto fijo funcionales para obtener soluciones de diferentes tipos de ecuaciones funcionales.

Muchas de las ideas que siguen están tomadas del libro de Miguel de Guzmán *El rincón de la pizarra* (Ed. Pirámide, 1997). Otros libros que hay que agradecer a Miguel de Guzmán son *Para pensar mejor* (1994) y *Aventuras matemáticas* (1996), ambos en la misma editorial. Fuimos muchos los que encontramos en la amplia producción de Miguel de Guzmán dedicada a la divulgación y a la enseñanza de las matemáticas, el antídoto contra las matemáticas profundamente aburridas que llegaron a estar de moda hace algunos años. Miguel, cuya reciente pérdida todos los matemáticos lamentamos, nos enseñó que las matemáticas más útiles y más profundas son también las matemáticas más divertidas. Sirvan estos apuntes de modestísimo homenaje a quien entendió las matemáticas como una aventura que hay que acometer con la curiosidad y la espontaneidad de los niños que preguntan incansables “eso, ¿por qué?” y no se conforman con teorías oxidadas y exigen que cada pregunta vaya seguida de un descubrimiento gozoso y . . . de nuevas preguntas.

## 2.2. Sucesiones numéricas recurrentes

Una sucesión cuyo término  $n$ -ésimo viene dado en función de algunos de los términos anteriores se dice que es una sucesión recurrente. Las llamadas “iteraciones de punto fijo” consistentes en iterar una función  $g$  a partir de un valor inicial  $x_1$  para formar la sucesión dada por  $x_{n+1} = g(x_n)$  son un ejemplo de sucesiones recurrentes. Otro ejemplo es la sucesión de Fibonacci definida por la condición de que cada término es igual a la suma de los dos anteriores  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , con  $F_1 = F_2 = 1$ . Este es un caso particular de una recurrencia de tipo lineal, es decir, de la forma

$$x_{n+p} = a_p x_{n+p-1} + a_{p-1} x_{n+p-2} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n$$

donde  $p$  es un número natural fijo y  $a_0, a_1, \dots, a_p$  son números complejos conocidos. Para las recurrencias de tipo lineal hay técnicas generales que, dados unos valores iniciales para  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , permiten calcular de forma explícita  $x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Veremos ejemplos de estas técnicas en la práctica que dedicaremos a la sucesión de Fibonacci. Vamos a centrarnos ahora en el estudio de algunos aspectos de las iteraciones de punto fijo. Ya hemos visto ejemplos de tales sucesiones en la lección anterior al estudiar los conjuntos de Julia y de Mandelbrot. Empezaremos esta lección con una sucesión cuyo comportamiento es bastante sorprendente.

### 2.2.1. La sucesión $x_{n+1} = i^{x_n}$ con $x_1 = i$ .

Esta sucesión se obtiene iterando la función  $g(z) = i^z = \exp(z \log i) = \exp(iz\pi/2)$  a partir del valor inicial  $x_1 = i$ . En la figura 2.1 están representados los primeros treinta términos de esta sucesión donde cada término se ha unido con el siguiente por un segmento.

Puedes observar que la sucesión parece ser convergente a un número  $\alpha$  próximo a  $0.5 + 0.4i$  y que se forman tres espirales que se aproximan a dicho número aunque los términos de la sucesión van saltando de una a otra espiral.

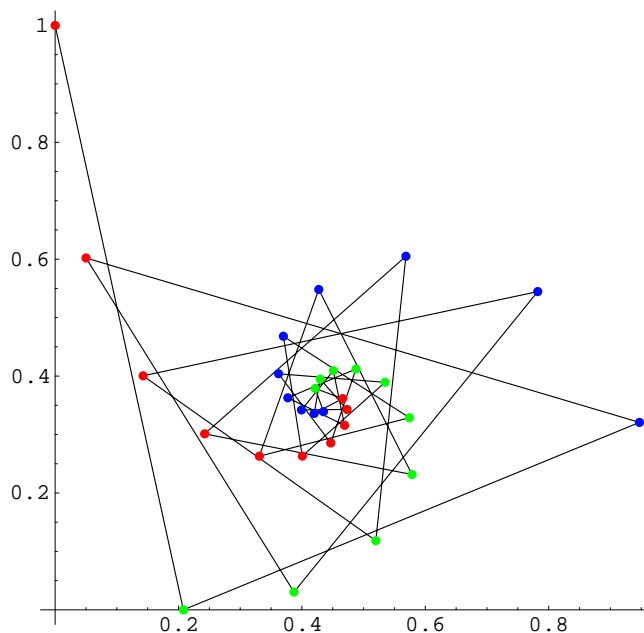


Figura 2.1: Los primeros 30 términos de  $i^{i^{i^{\dots}}}$

Como la función  $g$  es continua, el límite de la sucesión debe verificar que  $\alpha = g(\alpha)$ , es decir,  $\alpha = \exp(\alpha i \pi / 2)$ . Calculamos dicho valor con *Mathematica* y obtenemos que  $\alpha = 0.438283 + 0.360592i$ .

Para entender el comportamiento de la sucesión y justificar su convergencia podemos razonar como sigue. Observa que si  $z$  está cerca de  $\alpha$  entonces  $g(z) - g(\alpha) = g(z) - \alpha$  es aproximadamente igual a  $g'(\alpha)(z - \alpha)$ . Es decir, sustituir  $z$  por  $g(z)$  en  $z - \alpha$  tiene aproximadamente el mismo efecto que multiplicar  $z - \alpha$  por  $g'(\alpha)$ . Definamos  $e_n = x_n - \alpha$ . Entonces  $e_{n+1} \approx g'(\alpha)e_n$ . Por tanto  $e_{n+1}$  se obtiene girando  $e_n$  un ángulo (en grados) igual a  $\arg(g'(\alpha))\pi/180 \approx 129$ . Deducimos que cada término de la sucesión está girado aproximadamente unos 129 grados respecto del anterior (con centro de giro en  $\alpha$ ). Eso explica que la gráfica aparezca como una triple espiral. Además  $|e_{n+1}| \approx |g'(\alpha)||e_n| \approx 0.9|e_n|$ , lo que nos dice que la distancia de cada término de la sucesión al punto  $\alpha$  disminuye en la proporción constante de 0.9 y, por tanto,  $e_n \rightarrow 0$ , esto es,  $x_n \rightarrow \alpha$ .

## 2.2.2. Visualización de sucesiones iterativas

Para estudiar una sucesión recurrente  $x_{n+1} = g(x_n)$  de números reales es muy conveniente representar la función  $y = g(x)$  y observar cómo se van obteniendo, a partir de un valor inicial  $x_1$ , los términos  $x_2, x_3, x_4, \dots$  de la sucesión. Para ello levantamos una vertical por  $(x_1, 0)$  hasta cortar a la gráfica  $y = g(x)$  en  $(x_1, g(x_1)) = (x_1, x_2)$ . Trazamos una horizontal desde ese punto hasta cortar a la recta  $y = x$  en el punto  $(x_2, x_2)$ . Repetimos el proceso: vertical por  $(x_2, x_2)$  hasta cortar a  $y = g(x)$  en  $(x_2, g(x_2)) = (x_2, x_3)$  y horizontal desde este punto hasta cortar a la recta  $y = x$  en  $(x_3, x_3)$ ... El método es: vertical hasta la curva seguida de horizontal hasta la bisectriz. Puedes verlo en la figura 2.2 donde aparecen los primeros dieciocho puntos de la sucesión  $x_{n+1} = g(x_n)$  con  $g(x) = 2.9x(1-x)$  y  $x_1 = 0.1$  representados en color rojo sobre la bisectriz. En este caso parece que la sucesión converge siendo su límite el único punto fijo de  $g$  distinto de 0 el cual, naturalmente, está en la intersección de la recta  $y = x$  con la gráfica  $y = g(x)$ . Calculando el valor de dicho punto se obtiene que vale 0.655172 (para ser exactos  $19/29$ ). No es difícil comprobar que cualquiera sea el valor inicial que tomemos en el intervalo  $[0, 1]$  el comportamiento de la sucesión será el mismo. En la figura 2.3 puedes ver los primeros trece términos de

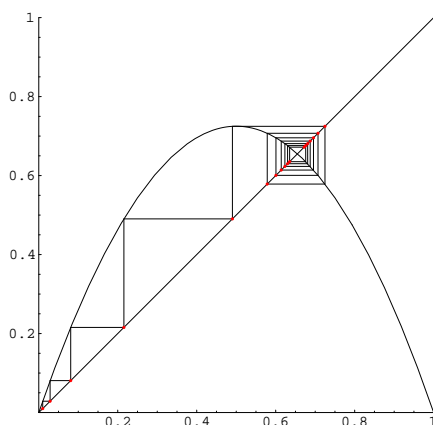


Figura 2.2: Los primeros 18 términos de  $x_{n+1} = 2.9x_n(1 - x_n)$  con  $x_1 = 0.1$

la sucesión partiendo del valor inicial  $x_1 = 0.9$ .

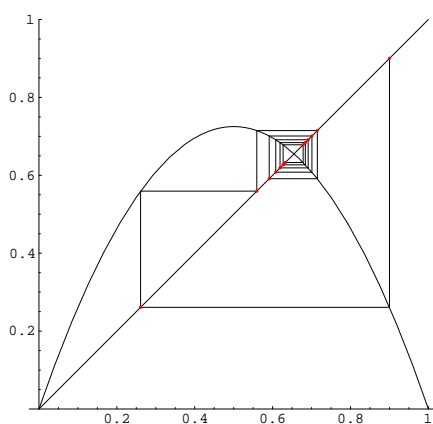


Figura 2.3: Los primeros 13 términos de  $x_{n+1} = 2.9x_n(1 - x_n)$  con  $x_1 = 0.9$

Pero si partimos de un valor inicial que no esté en el intervalo  $[0,1]$  se obtiene una sucesión divergente (figura 2.4).

El comportamiento de estas sucesiones puede ser muy complicado. En la figura 2.5 puedes ver los primeros 55 términos de la sucesión  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$  con  $x_1 = 0.2$

### 2.2.3. Puntos fijos y puntos periódicos

Si la función  $g$  tiene derivada continua y  $\alpha$  es un punto fijo de  $g$ , en virtud del teorema del valor medio se verifica que:

$$g(x) - \alpha = g(x) - g(\alpha) = g'(c)(x - \alpha)$$

donde  $c$  es un punto comprendido entre  $x$  y  $\alpha$ . Si  $x$  está próximo a  $\alpha$  entonces también  $c$  estará próximo a  $\alpha$  y, por la continuidad de la derivada, se tendrá que  $g'(c) \simeq g'(\alpha)$  y por tanto:

$$g(x) - \alpha = g(x) - g(\alpha) \simeq g'(\alpha)(x - \alpha)$$



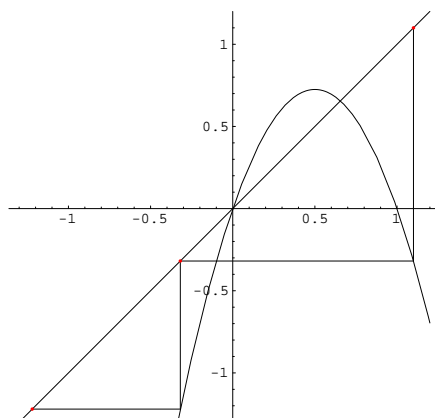


Figura 2.4: Los primeros 3 términos de  $x_{n+1} = 2.9x_n(1 - x_n)$  con  $x_1 = 1.1$

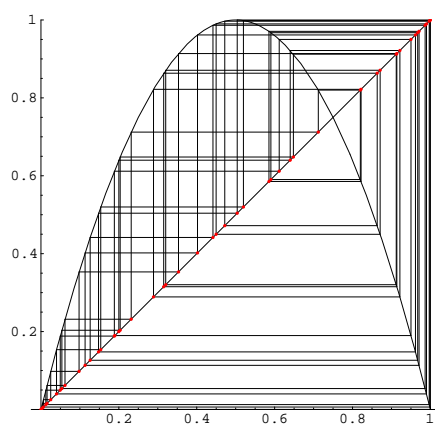


Figura 2.5: Los primeros 55 términos de  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$  con  $x_1 = 0.2$

Si  $|g'(\alpha)| < 1$  deducimos que  $|g(x) - \alpha| \leq \rho|x - \alpha|$ . Lo que, en términos de la sucesión  $x_{n+1} = g(x_n)$  se expresa por:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \rho|x_n - \alpha| \quad (0 \leq \rho < 1)$$

lo que implica que  $|x_{n+1} - \alpha| \leq \rho^n|x_1 - \alpha|$ . Deducimos que la sucesión converge rápidamente a  $\alpha$  cualquiera sea el valor inicial  $x_1$  suficientemente próximo a  $\alpha$ . Se dice que  $\alpha$  es un *punto fijo atractivo*. En la figura 2.2 el punto fijo,  $\alpha = 0.655172$ , de  $g(x) = 2.9x(1-x)$  es un punto fijo atractivo pues  $|g'(\alpha)| = 0.9$ .

Análogamente, si  $|g'(\alpha)| > 1$  la sucesión no converge cualquiera sea el valor inicial  $x_1$  suficientemente próximo a  $\alpha$  y distinto de  $\alpha$ . Se dice que  $\alpha$  es un *punto fijo repelente*. En la figura 2.5 el punto fijo,  $\alpha = 0.75$ , de  $g(x) = 4x(1-x)$  es un punto fijo repelente pues  $|g'(\alpha)| = 2$ .

Se dice que  $\alpha$  es un *punto periódico* de  $g$  de *período*  $k \geq 2$  cuando se verifica que  $\alpha$  es un punto fijo de  $g^k = g \circ \dots \circ g$  (la composición de  $g$  consigo misma  $k$  veces) pero no es punto fijo de  $g^j$  para  $1 \leq j \leq k-1$ . Equivalentemente, en la sucesión  $x_{n+1} = g(x_n)$  con  $x_1 = \alpha$  se verifica que  $x_{k+1} = x_1$  y  $x_j \neq x_1$  para  $2 \leq j \leq k$ . Observa que en tal caso también se verifica que  $x_{n+k} = x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Los puntos fijos de  $g$  se consideran puntos periódicos con período 1.

Diremos que la sucesión  $x_{n+1} = g(x_n)$  con  $x_1 = \alpha$  es *periódica* si alguno de sus términos (no necesariamente el primero) es un punto periódico para  $g$ . Observa que las sucesiones periódicas son muy regulares (figuras 2.6 y 2.7).

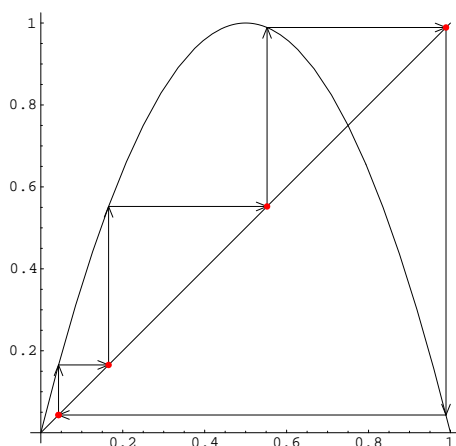


Figura 2.6:  $x_1$  es periódico con período 4

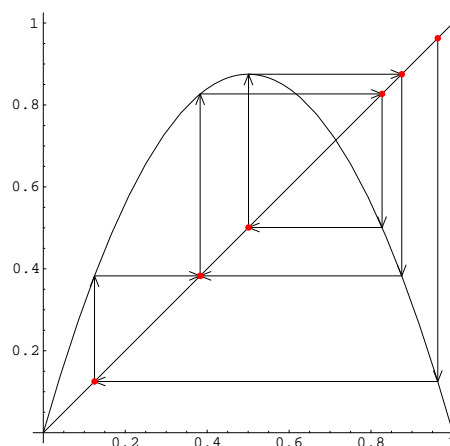


Figura 2.7:  $x_3$  es periódico con período 4

## 2.2.4. Monotonía

La monotonía de la sucesión  $x_{n+1} = g(x_n)$  tiene poca relación con la monotonía de la función  $g$  (figuras 2.8 y 2.9).

La desigualdad  $x_{n+1} \geq x_n$  es lo mismo que  $g(x_n) \geq x_n$ , que equivale a  $x_n \in \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq x\}$ . Análogamente  $x_{n+1} \leq x_n$  equivale a  $x_n \in \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq x\}$ . Por tanto, para estudiar la monotonía, podemos destacar los conjuntos:

$$\begin{aligned} A^+ &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq x\} && \text{zona de } \textit{marcha adelante} \\ A^- &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq x\} && \text{zona de } \textit{marcha atrás} \end{aligned}$$

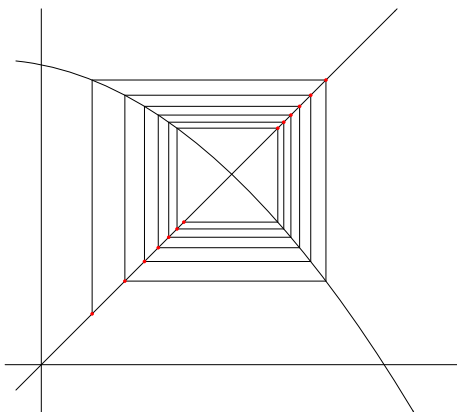


Figura 2.8:  $g$  decreciente,  $x_{n+1} = g(x_n)$  no monótona.

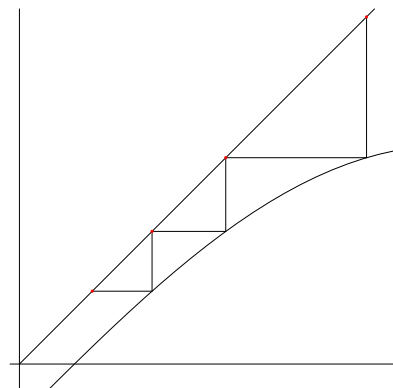


Figura 2.9:  $g$  creciente,  $x_{n+1} = g(x_n)$  decreciente.

Es claro que la sucesión  $\{x_n\}$  será creciente (resp. decreciente) cuando todos sus términos a partir de uno de ellos en adelante estén en  $A^+$  (resp.  $A^-$ ). Cuando la sucesión no es monótona es porque tiene infinitos términos en  $A^+$  e infinitos términos en  $A^-$ . Las zonas de salto de una región a otra son los conjuntos:

$$S^{+-} = A^+ \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in A^-\} \quad \text{zona de salto de } A^+ \text{ a } A^-$$

$$S^{-+} = A^- \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in A^+\} \quad \text{zona de salto de } A^- \text{ a } A^+$$

### 2.2.5. Acotación

Supongamos que  $[a, b]$  es un intervalo para el que se verifica que  $g([a, b]) \subseteq [a, b]$ . En tal caso, si un término de la sucesión  $\{x_n\}$  cae en  $[a, b]$  todos los términos siguientes permanecen dentro de dicho intervalo. Gráficamente que  $g([a, b]) \subseteq [a, b]$  se traduce en que la gráfica de  $g$  en el intervalo  $[a, b]$  queda dentro del cuadrado  $[a, b] \times [a, b]$ .

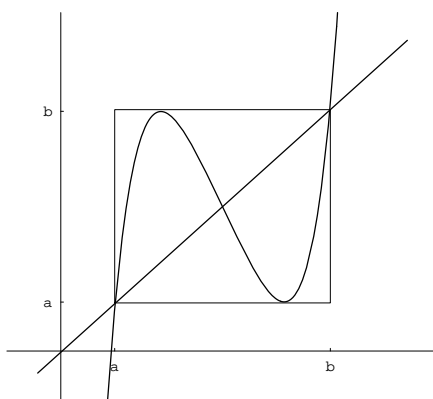


Figura 2.10:  $(x, g(x)) \in [a, b] \times [a, b] \quad (a \leq x \leq b)$

### 2.2.6. Ejercicios

1. Estudia el comportamiento de la sucesión  $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{3}{x_n}$ ,  $x_1 = \alpha \neq 0$  para los distintos valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ .
2. Estudia el comportamiento de la sucesión  $x_{n+1} = (x_n - 7)^2 + 6$ ,  $x_1 = \alpha$  para los distintos valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3. Estudia el comportamiento de la sucesión  $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ ,  $x_1 = \alpha$  para los distintos valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### 2.2.7. Comportamiento caótico y efecto mariposa

Cuando la sucesión  $x_{n+1} = g(x_n)$  con  $x_1 = \alpha$  no es convergente, ni divergente, ni periódica, ni presenta ningún tipo reconocible de regularidad se dice que tiene un comportamiento caótico. Ya hemos visto un ejemplo de dicho comportamiento en la figura 2.5 donde puedes ver cómo los términos de la sucesión están distribuidos de forma muy irregular llenando gran parte del intervalo  $[0, 1]$ . Una característica frecuente de este comportamiento es la extrema sensibilidad con respecto a pequeños cambios en las condiciones iniciales; lo que se ha dado en llamar “efecto mariposa”.

En los ejemplos anteriores hemos usado con frecuencia la función cuadrática  $g(x) = ax(1-x)$  para distintos valores del parámetro  $a$ . Dedicaremos una clase práctica al estudio del comportamiento caótico de dicha función para ciertos valores del parámetro  $a$ . Acabaremos esta parte de la lección con un ejemplo del efecto mariposa. En la figura 2.11 se han representado los primeros mil términos de la sucesión  $z_n = x_n - y_n$  donde  $x_{n+1} = 3.9x_n(1-x_n)$  con  $x_1 = 0.4$  y  $y_{n+1} = 3.9y_n(1-y_n)$  con  $y_1 = 0.400001$ . Es decir  $\{x_n\}$  y  $\{y_n\}$  se obtienen iterando la función cuadrática con  $a = 3.9$  tomando como valores iniciales respectivos  $0.4$  y  $0.400001$ . Pese a que dichos valores están muy próximos, las sucesiones obtenidas son completamente diferentes lo que se pone de manifiesto en el comportamiento de la sucesión  $z_n = x_n - y_n$  que se muestra en la figura 2.11.

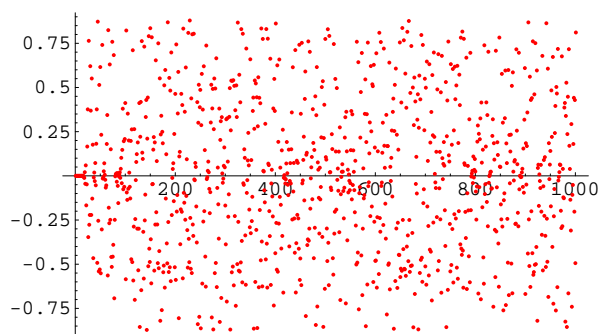


Figura 2.11: Efecto mariposa

## 2.3. El método de las aproximaciones sucesivas

Acabamos de ver que, en algunos casos, los términos de la sucesión  $x_{n+1} = g(x_n)$  para  $n$  suficientemente grande son soluciones aproximadas de la ecuación  $g(x) = x$ . Con frecuencia interesa considerar ecuaciones de la forma  $g(x) = x$  donde  $x$  es una función que pertenece a un cierto espacio de funciones, digamos  $\mathcal{X}$ , y  $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  es una aplicación de  $\mathcal{X}$  en sí mismo. Un ejemplo sencillo de esto es el conocido problema de valores iniciales. Se trata de hallar una función,  $x$ , definida en un intervalo,  $I$ ,

con derivada continua y que verifique

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I, \quad x(a) = \alpha \quad (2.1)$$

donde suponemos que  $f$  es una función conocida de dos variables suficientemente buena y que  $a$  es un punto de  $I$ . La ecuación 2.1 puede escribirse de forma equivalente como:

$$x(t) = \alpha + \int_a^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in I \quad (2.2)$$

Lo que nos dice que  $x$  es un punto fijo de la aplicación

$$\begin{aligned} G : C(I) &\rightarrow C(I) \\ \varphi \in C(I) &\rightarrow G(\varphi) \in C(I) \\ G(\varphi)(t) &= \alpha + \int_a^t f(s, \varphi(s)) ds \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

donde  $C(I)$  es el espacio de las funciones continuas en  $I$ . Siguiendo la analogía con el caso numérico, podemos partir de una función inicial  $x_1 \in C(I)$ , tal que  $x_1(a) = \alpha$ , y formar la sucesión de funciones  $x_{n+1} = G(x_n)$ . Esto se conoce como *método de las iteraciones de Picard* para resolver el problema de valores iniciales dado. ¿Podemos esperar que esta sucesión converja a una solución de la ecuación 2.2? Para responder a esta pregunta tenemos que precisar qué se entiende por convergencia en este contexto. Fíjate que en  $C(I)$  podemos considerar distintos tipos de convergencia. Supongamos, por comodidad, que  $I = [a, b]$ . Aquí tienes dos posibles tipos de convergencia en  $C(I)$ . Sea  $\varphi_n, \varphi \in C(I)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_n \rightarrow \varphi &\iff \max\{|\varphi_n(t) - \varphi(t)| : t \in [a, b]\} \rightarrow 0 \quad (\text{convergencia uniforme}) \\ \varphi_n \rightarrow \varphi &\iff \int_a^b |\varphi_n(t) - \varphi(t)| dt \rightarrow 0 \quad (\text{convergencia en media}) \end{aligned}$$

En el caso que estamos considerando la convergencia apropiada es la uniforme. ¿Podemos asegurar que la sucesión de funciones  $x_{n+1} = G(x_n)$  converge uniformemente a una solución de la ecuación 2.2? Para ello hay que imponer algunas perfecciones a la función  $f$ . Observa que

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \int_a^b |f(t, x_n(t)) - f(t, x_{n-1}(t))| dt \quad (2.3)$$

Supongamos que hay una constante  $0 < k$  tal que se cumple la condición:

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq k|u - v|$$

Entonces de 2.3 deducimos fácilmente que:

$$\max\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)| : t \in [a, b]\} \leq k(b-a) \max\{|x_n(t) - x_{n-1}(t)| : t \in [a, b]\}$$

Si  $\rho = k(b-a) < 1$ , entonces poniendo, para  $u, v \in C(I)$ ,  $d(u, v) = \max\{|u(t) - v(t)| : t \in [a, b]\}$ , la desigualdad anterior se escribe:

$$d(G(x_n), G(x_{n-1})) \leq \rho d(x_n, x_{n-1}) \quad (\rho < 1) \quad (2.4)$$

de donde se deduce, por ser  $\rho < 1$ , que  $\{x_n\}$  es una *sucesión de Cauchy* para la convergencia uniforme. Ahora necesitamos un resultado teórico importante: una sucesión de Cauchy para la convergencia uniforme en el espacio  $C(I)$  es convergente en dicho espacio. Podemos por tanto asegurar que hay una función  $x \in C(I)$  tal que  $\{x_n\}$  converge uniformemente a  $x$ . Las propiedades de la convergencia uniforme permiten ahora justificar el siguiente paso al límite:

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \alpha + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t f(s, x_{n-1}(s)) ds = \alpha + \int_a^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, x_{n-1}(s)) ds = \alpha + \int_a^t f(s, x(s)) ds$$

por lo que dicha función  $x$  es solución de 2.2 y, por tanto, de 2.1.

La situación considerada en el ejemplo anterior es tan frecuente que merece la pena abstraer sus componentes esenciales para establecer un resultado general que es el fundamento teórico que explica la convergencia de muchos procesos iterativos. Ya ves, a veces conviene demostrar un teorema. Nos situaremos en un ambiente suficientemente general e introduciremos sobre la marcha los conceptos necesarios.

Consideraremos un conjunto  $\mathcal{X}$  que puedes interpretar como un conjunto de funciones. En el ejemplo considerado  $\mathcal{X}$  era el espacio  $C[a, b]$  de las funciones continuas en  $[a, b]$ . Pero también puede ser el espacio  $\mathcal{R}[a, b]$  de las funciones integrables en  $[a, b]$ , o el espacio  $C^1[a, b]$  de las funciones con primera derivada continua en  $[a, b]$ . La naturaleza del problema es la que en cada caso determina qué espacio debemos considerar.

En el conjunto  $\mathcal{X}$  necesitamos tener un concepto de convergencia. Para ello es suficiente tener definido un concepto de *distancia* entre elementos de  $\mathcal{X}$ . Una distancia es simplemente una aplicación  $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  que a cada par de elementos  $x, y \in \mathcal{X}$  asocia un número,  $d(x, y) \geq 0$ , que se interpreta como la distancia entre dichos elementos. Tal aplicación debe verificar las condiciones siguientes:

- $d(x, y) = 0$  si, y sólo si,  $x = y$ .
- $d(x, y) = d(y, x)$  (simetría)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (desigualdad triangular)

Ejemplos de distancias en  $\mathcal{X} = C[a, b]$  son:

- $d(x, y) = \max\{|x(t) - y(t)| \mid t \in [a, b]\}$  (distancia uniforme)
- $d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$  (distancia de la convergencia en media)

El par  $(\mathcal{X}, d)$  formado por un conjunto  $\mathcal{X}$  y una distancia  $d$  definida en el mismo se llama un *espacio métrico*. Los elementos de un espacio métrico suelen llamarse *puntos* (¡aunque suelen ser funciones!). Una sucesión de puntos,  $\{x_n\}$ , de un espacio métrico  $(\mathcal{X}, d)$  se dice que es convergente si hay algún  $x \in \mathcal{X}$  tal que  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ . En tal caso el elemento  $x$  es único y se llama el límite de la sucesión. Observa que en un mismo conjunto para cada distancia tenemos su correspondiente convergencia. Naturalmente, puede ocurrir que sucesiones que converjan con una distancia no sean convergentes para otra distancia. Por ejemplo, la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  dada por  $f_n(x) = x^n$  es convergente en media a la función nula en el espacio  $C[0, 1]$  pero dicha sucesión no es convergente con la distancia uniforme.

Volvamos a nuestro ejemplo inicial. En él construimos una sucesión para justificar que el problema de valores iniciales 2.1 tiene solución cuando se cumple la condición 2.4. Esta condición es la que garantiza que la sucesión construida converge. Observa que cuando se estudia la convergencia de una sucesión  $\{x_n\}$ , lo que conocemos es, justamente, la sucesión y, naturalmente, se desconoce su posible límite el cual pudiera, incluso, no existir. Por ello interesa tener *criterios de convergencia intrínsecos a la sucesión*, es decir, que no hagan intervenir a un objeto en principio *extraño* a ella como es su posible límite. Por ejemplo, tú sabes que una sucesión monótona y acotada de números reales es convergente sin necesidad de conocer su límite. En espacios métricos abstractos el concepto de monotonía no tiene sentido pero sí lo tiene el siguiente concepto.

**Definición 2.1.** Se dice que una sucesión  $\{x_n\}$  de puntos de un espacio métrico  $(\mathcal{X}, d)$  es una *sucesión de Cauchy*, si para cada número positivo,  $\varepsilon > 0$ , existe un número natural  $m$ , tal que para todos  $p, q \in \mathbb{N}$  con  $p \geq m$  y  $q \geq m$  se verifica que  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ .

Se dice que  $(\mathcal{X}, d)$  es un *espacio métrico completo* si toda sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{X}, d)$  es convergente en  $(\mathcal{X}, d)$ .

El espacio métrico  $C[a, b]$  con la distancia uniforme es completo pero  $C[a, b]$  no es completo con la distancia de la convergencia en media.

Tenemos ya todos los elementos necesarios para entender el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $G : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva, es decir, verificando que existe un número  $0 < \rho < 1$  tal que para todos  $u, v \in X$  es*

$$d(G(u), G(v)) \leq \rho d(u, v). \quad (2.5)$$

Entonces  $G$  tiene un único punto fijo, es decir existe un único  $x \in X$  tal que  $G(x) = x$ . Además, dado un punto cualquiera  $x_1 \in X$ , la sucesión definida por  $x_{n+1} = G(x_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  es convergente, su límite es el punto fijo de  $G$  y

$$d(x_{n+1}, x) \leq \frac{\rho^n}{1-\rho} d(x_1, G(x_1))$$

**Demostración.** Sea  $x_1 \in X$ . Probaremos que la sucesión definida por  $x_{n+1} = G(x_n)$  es convergente. Como, por hipótesis,  $(X, d)$  es un espacio métrico completo, será suficiente probar que dicha sucesión es una sucesión de Cauchy. Usando la hipótesis 2.5 tenemos que para  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d(G(x_k), G(x_{k-1})) \leq \rho d(x_k, x_{k-1}) = \rho d(G(x_{k-1}), G(x_{k-2})) \leq \\ &\leq \rho^2 d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq \dots \leq \rho^{k-1} d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

Es decir  $d(x_{k+1}, x_k) \leq \rho^{k-1} d(x_2, x_1)$ . Usando esta desigualdad, para  $p, n \in \mathbb{N}$  con  $p \geq 2$  tenemos que:

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_p) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_p) \leq \\ &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + d(x_{n+p-2}, x_p) \leq \\ &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + d(x_{n+p-2}, x_{n+p-3}) + \dots + d(x_{p+1}, x_p) \leq \\ &\leq (\rho^{n+p-2} + \rho^{n+p-3} + \rho^{n+p-4} \dots + \rho^{p-1}) d(x_2, x_1) \leq \rho^{p-1} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right) d(x_2, x_1) = \\ &= \frac{\rho^{p-1}}{1-\rho} d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

Donde hemos usado que, por ser  $0 < \rho < 1$ , la serie  $\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j$  es una serie geométrica convergente. Hemos probado que

$$d(x_{n+p}, x_p) \leq \frac{\rho^{p-1}}{1-\rho} d(x_2, x_1) \quad \forall p, n \in \mathbb{N}, p \geq 2.$$

De la desigualdad anterior se deduce fácilmente que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy. En efecto, dado  $\varepsilon > 0$  elegimos  $m \in \mathbb{N}$  por la condición de que  $\frac{\rho^{m-1}}{1-\rho} d(x_2, x_1) < \varepsilon$ . Si ahora  $p, q$  son números naturales mayores que  $m$ , la desigualdad anterior implica que

$$d(x_q, x_p) \leq \frac{\rho^{m-1}}{1-\rho} d(x_2, x_1) < \varepsilon$$

Hemos probado así que existe un elemento  $x \in X$  tal que  $\{x_n\}$  converge a  $x$ . Deducimos, por la continuidad de  $G$  (la cual es consecuencia de 2.5), que:

$$x = \lim x_{n+1} = \lim G(x_n) = G(\lim x_n) = G(x)$$

Por tanto  $x$  es un punto fijo de  $G$ . Si  $y$  es un punto fijo de  $G$ , de la desigualdad 2.5 se deduce que:

$$d(x, y) = d(G(x), G(y)) \leq \rho d(x, y)$$

y, como  $\rho < 1$  esta desigualdad implica que  $d(x, y) = 0$ , es decir,  $x = y$ . Luego  $G$  tiene un único punto fijo. Finalmente:

$$d(x_{n+1}, x) = d(G(x_n), G(x)) \leq \rho d(x_n, x) = \rho d(G(x_{n-1}), G(x)) \leq \quad (2.6)$$

$$\leq \rho^2 d(x_{n-1}, x) \leq \dots \leq \rho^n d(x_1, x) \quad (2.7)$$

Pero

$$d(x_1, x) \leq d(x_1, G(x_1)) + d(G(x_1), x) = d(x_1, G(x_1)) + d(G(x_1), G(x)) \leq d(x_1, G(x_1)) + \rho d(x_1, x)$$

de donde se sigue que

$$d(x_1, x) \leq \frac{1}{1-\rho} d(x_1, G(x_1))$$

lo que, por la desigualdad 2.6, implica que

$$d(x_{n+1}, x) \leq \frac{\rho^n}{1-\rho} d(x_1, G(x_1)).$$

□

Después de establecer un resultado en un contexto abstracto es conveniente “descender” para ver lo que dicho resultado aporta en una situación familiar concreta.

**Corolario 2.3.** Sea  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función derivable en el intervalo  $[a, b]$  y supongamos que hay un número  $0 < \rho < 1$  tal que  $|g'(x)| \leq \rho$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces  $g$  tiene un único punto fijo  $x \in [a, b]$  y cualquiera sea el punto  $x_1 \in [a, b]$  la sucesión dada por  $x_{n+1} = g(x_n)$  converge al punto fijo de  $g$  y  $|x_{n+1} - x| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho} |x_1 - g(x_1)|$ .

**Demostración.** Se aplica el resultado anterior con  $\mathcal{X} = [a, b]$  que es un espacio métrico completo con la distancia usual  $d(x, y) = |x - y|$ . Basta tener en cuenta que, por el teorema del valor medio, para todos  $u, v \in [a, b]$  se verifica que  $g(u) - g(v) = g'(c)(u - v)$  donde  $c$  es un punto comprendido entre  $u$  y  $v$ . Tomando valor absoluto en esta igualdad y teniendo en cuenta que  $|g'(c)| \leq \rho$ , se deduce que

$$|g(u) - g(v)| \leq \rho |u - v|$$

Por tanto,  $g$  es una aplicación contractiva. □

Podemos usar este resultado para obtener condiciones de convergencia para el método de Newton-Raphson.

**Corolario 2.4.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función con derivada segunda continua en  $[a, b]$ . Supongamos que existe algún punto  $p \in ]a, b[$  tal que  $f(p) = 0$  y  $f'(p) \neq 0$ . Entonces existe un número  $\delta > 0$  tal que el único cero de  $f$  en  $[p - \delta, p + \delta]$  es  $p$  y cualquiera sea el punto  $x_1 \in [p - \delta, p + \delta]$  la sucesión dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge a  $p$ .

**Demostración.** Como  $f'(p) \neq 0$  y  $f'$  es continua, existirá un intervalo abierto  $J \subset [a, b]$  que contiene al punto  $p$  en el cual no se anula la derivada de  $f$ . Pongamos  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , función que estará definida para  $x \in J$ . Calculando su derivada tenemos que:

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$



Como  $f(p) = 0$  y  $f''$  es continua, se deduce que existe un número  $\delta > 0$  tal que el intervalo  $[p - \delta, p + \delta] \subset J$  y  $|g'(x)| \leq 1/2$  para todo  $x \in [p - \delta, p + \delta]$ . En tal caso, como  $g(p) = p$ , tenemos también que:

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| \leq \frac{1}{2} |x - p| \leq \frac{1}{2} \delta < \delta \quad \forall x \in [p - \delta, p + \delta]$$

Estamos, pues, en condiciones de aplicar el corolario anterior a la función  $g$  en el intervalo  $[p - \delta, p + \delta]$  de donde fácilmente se siguen las afirmaciones del enunciado.  $\square$

---

## Conceptos básicos de la teoría elemental de series de Fourier

---

### 3.1. Introducción

Con el nombre “análisis de Fourier” y también “análisis armónico” se conoce un conjunto de técnicas matemáticas dirigidas a la descomposición de señales en sinusoides (el *análisis* de la señal) y su posterior reconstrucción (la *síntesis* de la señal). La Transformada de Fourier, las Series de Fourier, la Transformada de Fourier Discreta son, junto con otras técnicas del análisis armónico, la base para el procesamiento y digitalización de todo tipo de señales; cuando escuchas música en tu ordenador, usas un escáner o haces una fotografía con una cámara digital, estás usando una tecnología que no sería posible sin dichas técnicas matemáticas. Los métodos de reconocimiento de imágenes, tan importantes en medicina y en la industria automovilística, usan también dichas técnicas. Cuando miras un analizador de frecuencias o la gráfica de un electrocardiograma o el monitor que muestra el pulso de un enfermo, estás *viendo* análisis de Fourier. Las aplicaciones del análisis armónico se han multiplicado debido a los métodos eficaces para el cálculo de la Transformada de Fourier Discreta (el algoritmo conocido como Transformada Rápida de Fourier) y a la potencia de cálculo de los modernos ordenadores.

Desde un punto de vista puramente matemático, no es exagerado afirmar que el análisis de Fourier ha sido el principal motor del desarrollo de las matemáticas en los siglos XIX y XX. Sin ir más lejos, la teoría de conjuntos infinitos de Cantor, la teoría de la medida e integración de Lebesgue y la evolución del concepto de función hasta llegar a la teoría de distribuciones, han estado motivados directamente por problemas surgidos en el análisis armónico.

#### Estructura de la lección y objetivos.

En esta lección vamos a introducir algunos conceptos elementales de la teoría de Series de Fourier y de la Transformada de Fourier Discreta. En este tema *hay matemáticas*, parece innecesario decirlo, pero eludiremos los detalles técnicos y nos centraremos en los aspectos de cálculo y en las aplicaciones. El mundo del tratamiento de la señal es muy amplio: óptica, fotografía, vídeo, telefonía, música, radio, televisión... y el tratamiento de la señal requiere potentes técnicas de cálculo que no podrían llevarse a cabo sin el concurso del ordenador. Por ello creo que este tema tiene interés para todos los profesionales de la informática. Quién sabe si alguna vez tendrás la oportunidad de trabajar en estos temas tan apasionantes. Aquí vas a aprender la terminología y los conceptos más básicos lo que te permitirá, si alguna vez lo necesitas o te interesas en ello, que puedas continuar con provecho profundizando en su estudio.

Conviene que repases las fórmulas de Euler para la exponencial compleja que vimos en la lección primera. También te vendrá bien repasar la técnica de integración por partes y el cálculo de primitivas de productos de senos y cosenos.

Haremos dos prácticas relacionadas con esta lección en las que nos ocuparemos de la aproximación por polinomios trigonométricos y del tratamiento de sonidos e imágenes con la ayuda de la Transformada de Fourier Discreta.

## 3.2. Conceptos básicos de la teoría de Series de Fourier

Esencialmente la teoría de Series de Fourier persigue dos propósitos:

- El Análisis o descomposición de una señal como suma o superposición (en general infinita) de sinusoides.
- La síntesis o recomposición de una señal a partir de sus sinusoides.

Habrás notado que estoy empleando la palabra “señal” como sinónimo de “función” y así lo seguiré haciendo a lo largo de esta lección con las precisiones que considere necesarias. En análisis armónico las señales más simples son las sinusoides a las que nos hemos referido ya varias veces. Conviene darles un repaso.

### 3.2.1. Sinusoides

Una senoide es una señal de la forma

$$A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + \phi).$$

El número  $A > 0$  es la *amplitud*,  $\nu > 0$  es la *frecuencia* medida en ciclos por segundo o Hercios (Hz),  $-\pi < \phi \leq \pi$  es la *fase* (fase inicial),  $2\pi\nu$  es la frecuencia medida en radianes por segundo (que se llama a veces frecuencia angular). El *período* es el tiempo que necesita la senoide para completar un ciclo completo, es decir, el período es  $T = 1/\nu$  segundos.

$$A \operatorname{sen}(2\pi\nu(t + 1/\nu) + \phi) = A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + 2\pi + \phi) = A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + \phi).$$

En general, una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice que es *periódica* con *período*  $T$  si  $f(t+T) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . En tal caso cualquier múltiplo entero de  $T$  es también un período de  $f$ , esto es,  $f(t+kT) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ . Cuando se dice que una función es periódica de período  $T$  se sobreentiende que  $T$  es el número positivo más pequeño que verifica la igualdad  $f(t+T) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

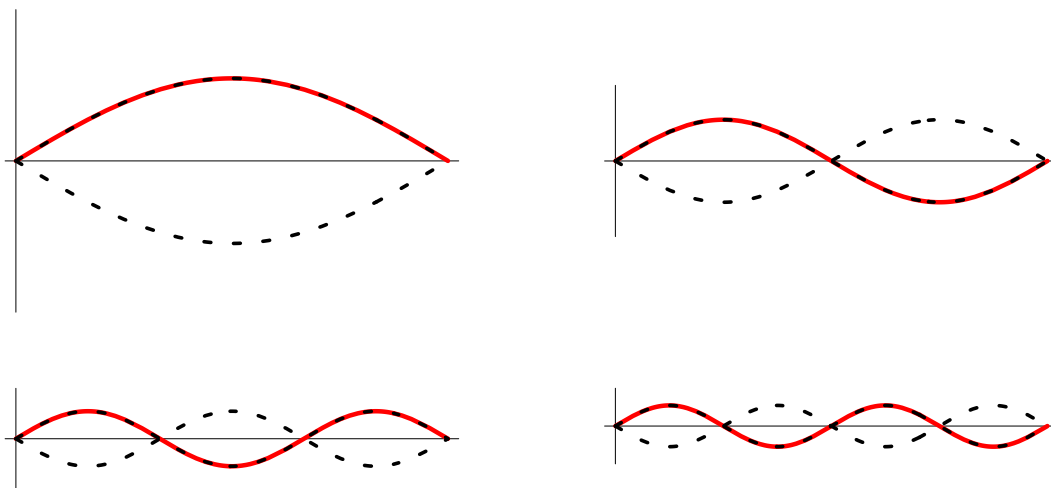
En la representación gráfica de la señal  $f(t) = A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + \phi)$  se interpreta  $f(t)$  como la amplitud de la señal en el instante  $t$ . La amplitud  $A$  representa la máxima altura que alcanza dicha gráfica, esto es, el máximo absoluto de la función  $f$  (el mínimo absoluto es  $-A$ ). La frecuencia es el número de veces (ciclos) que se repite la gráfica en un segundo. El período es el tiempo necesario para que la gráfica complete un solo ciclo.

### 3.2.2. Frecuencia principal y armónicos

Observa que cuanto mayor es la frecuencia más rápidamente oscila la señal. En lo que sigue puedes suponer que las señales representan sonidos. El rango de frecuencias audibles por el oído humano está entre 20 Hz y **22.000** Hz. Las frecuencias fundamentales de las 88 notas de un piano varían desde **27.5** Hz a 4096 Hz. El tono de un sonido depende de la frecuencia. Los sonidos graves se corresponde con bajas frecuencias y los agudos con frecuencias altas. La intensidad del sonido se mide en decibelios (db) y es proporcional a la amplitud de la señal. El timbre o calidad de un sonido (lo que distingue una misma nota en diferentes instrumentos) depende de los armónicos que acompañan al armónico principal (después explicaremos esto de los armónicos).

Las ondas sinusoidales tienen la particularidad de producir un sonido puro, es decir, un sonido que consta de una única frecuencia. Los sonidos que producen los instrumentos musicales son mucho más ricos porque en ellos se superponen sonidos de distintas frecuencias: los armónicos. Los armónicos son sonidos cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Si la frecuencia fundamental es 260 Hz, los armónicos tendrán frecuencias 520 Hz, 780 Hz, 1040 Hz etcétera.

Normalmente no escuchamos los armónicos como tonos separados debido, en parte, a que las amplitudes de los armónicos van decreciendo conforme aumenta la frecuencia. Pero son ellos los que proporcionan a los sonidos musicales y a la voz humana su profundidad y riqueza. ¿Cómo se producen los armónicos? Considera una cuerda de guitarra. Ella pueda vibrar en un movimiento simple hacia arriba y hacia abajo. Pero también puede vibrar de formas más complejas. Por ejemplo, la mitad de la cuerda vibra hacia un lado y la otra media hacia el otro (un nodo en el centro). O la tercera parte de la cuerda pueda vibrar en sentido contrario a las otras partes adyacentes (dos nodos centrales). Y así podríamos continuar. Cada modo de vibración produce una senoide con su propia frecuencia y amplitud. La frecuencia correspondiente a la vibración básica hacia arriba y hacia abajo es la frecuencia fundamental. La frecuencia de la senoide producida por la segunda forma de vibración es dos veces la frecuencia fundamental (el sonido que produce es una octava más alta que el anterior). La frecuencia que corresponde a la tercera forma de vibración es tres veces la frecuencia fundamental, etcétera.



Naturalmente, cuando una cuerda de guitarra vibra se producen todas las vibraciones consideradas simultáneamente y muchas otras más. Cada una de las sinusoides de frecuencia múltiplo entero de la fundamental se llama un armónico. En las vibraciones que se producen de forma natural hay armónicos para cada múltiplo de la frecuencia fundamental, en teoría puede haber infinitos aunque su amplitud decrece conforme aumenta la frecuencia. Prueba el siguiente experimento. Pulsa una cuerda de guitarra y cuando empiece a vibrar tócala ligeramente justo en su punto medio. Observa cómo cambia el sonido que produce: lo que estás oyendo ahora es el segundo armónico. Observa que tú no has pulsado la cuerda de guitarra una segunda vez: estos sonidos estaban allí. Al tocar suavemente la cuerda en su punto medio estás eliminando todos los armónicos cuyas frecuencias son múltiplo impar de la principal (incluida dicha frecuencia).

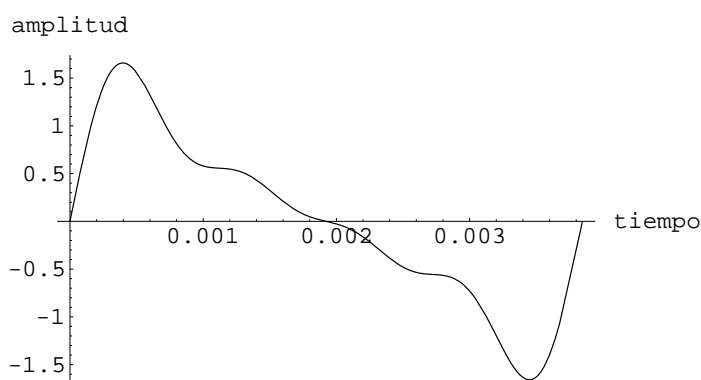
### 3.2.3. Representación en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia

Los sonidos puros pueden representarse gráficamente por una senoide con amplitud y frecuencia apropiadas. En esta representación el eje de abscisas se interpreta como el tiempo y en el eje de ordenadas se representa la amplitud. Esto es lo que se conoce como la representación en el dominio del tiempo. Pero la mayoría de los sonidos son complejos y están formados por una superposición

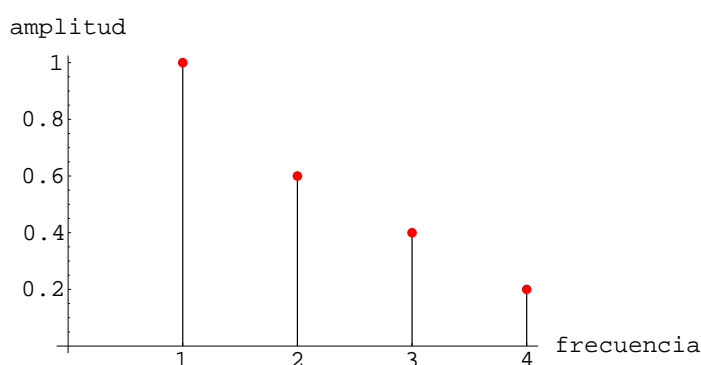
de armónicos cada uno con su propia frecuencia y amplitud. Para tales sonidos una representación en el dominio del tiempo no nos proporciona información de sus componentes. Una forma mejor de visualizar la estructura de un sonido complejo consiste en representar las frecuencias en el eje de abscisas y las amplitudes de cada frecuencia en el eje de ordenadas. De esta forma lo que obtenemos es un diagrama de barras; sobre cada frecuencia múltiplo de la principal levantamos un segmento cuya altura representa su amplitud: esta es la representación en el dominio de la frecuencia y el gráfico correspondiente se suele llamar el espectro de amplitudes de la señal. Una señal sinusoidal pura tiene el espectro de amplitudes más sencillo posible: consta de un solo segmento vertical pues dicha señal tiene toda su energía concentrada en una sola frecuencia. Otro espectro sencillo es el de un ruido. Un ruido es un sonido en el que se superponen todas las frecuencias con iguales amplitudes, el espectro correspondiente sería una recta horizontal.

Aquí tienes una representación en el dominio del tiempo de la señal

$$f(t) = \text{sen}(260 \times 2\pi t) + .6\text{sen}(2 \times 260 \times 2\pi t) + .4\text{sen}(3 \times 260 \times 2\pi t) + .2\text{sen}(4 \times 260 \times 2\pi t)$$



Aquí tienes la representación de la misma señal en el dominio de la frecuencia (la unidad en el eje de frecuencias representa 260 Hz).



### 3.2.4. Polinomios trigonométricos y coeficientes de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) escribió en 1807 un trabajo sobre la propagación del calor en el que se afirmaba que cualquier señal continua con período  $1/\nu$  podía representarse como

suma de ondas sinusoidales en la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2n\pi vt + \phi_n)$$

Para empezar nuestro estudio consideremos no una serie sino una suma finita y, por comodidad, *supondremos que el período de nuestra señal es 1*. Tenemos, pues, una suma de la forma:

$$\sum_{n=0}^N A_n \operatorname{sen}(2n\pi t + \phi_n) \quad (3.1)$$

Es frecuente llamar a las sinusoides individuales de una suma de este tipo *armónicos*. Esta forma de una suma trigonométrica de armónicos tiene la ventaja de mostrar explícitamente la amplitud y la fase de cada uno de ellos pero es muy incómoda para los cálculos. Por ello es más frecuente escribir esta suma en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi nt) + b_n \operatorname{sen}(2\pi nt)) \quad (3.2)$$

la razón de escribir el término constante en la forma  $a_0/2$  es para simplificar las fórmulas de los coeficientes que veremos pronto.

Se trabaja con mucha más comodidad con estas sumas si usamos la exponencial compleja. Usando las ecuaciones de Euler tenemos que:

$$\cos(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int} + e^{-2\pi int}}{2}, \quad \operatorname{sen}(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int} - e^{-2\pi int}}{2i}$$

con ello la suma 3.2 puede ser escrita como:

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi int} \quad (3.3)$$

La relación entre estas tres formas distintas de escribir una misma suma trigonométrica viene dada por las siguientes igualdades válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (3.4)$$

$$a_n = A_n \operatorname{sen} \phi_n \quad b_n = A_n \cos \phi_n \quad (3.5)$$

Una suma como la que estamos considerando se llama un *polinomio trigonométrico* de orden  $n$ .

Supongamos que tenemos una señal  $f$  que podemos representar como un polinomio trigonométrico:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi int}$$

Observa que para que esto sea posible la señal  $f$  tiene que ser *muy buena* pues, por ejemplo, tiene que ser indefinidamente derivable y tener período 1. Pero ahora lo que estamos suponiendo es que la función  $f$  es conocida y que se verifica la igualdad anterior y nuestro problema es calcular los coeficientes  $c_n$ . Para ello multiplicamos dicha igualdad por  $e^{-2\pi ikt}$  y obtenemos que:

$$e^{-2\pi ikt} f(t) = c_k + \sum_{n=-N, n \neq k}^N c_n e^{2\pi i(n-k)t}$$

Ahora integramos ambos lados entre 0 y 1 y tenemos en cuenta que si  $q \in \mathbb{Z}$  y  $q \neq 0$  entonces:

$$\int_0^1 e^{2\pi iqt} dt = \frac{1}{2\pi iq} [e^{2\pi iqt}]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2\pi iq} (e^{2\pi iq} - e^0) = \frac{1}{2\pi iq} (1 - 1) = 0$$

Resulta así que:

$$c_k = \int_0^1 e^{-2\pi i k t} f(t) dt$$

Es interesante observar que, debido a que  $f$  se supone con período 1, el cálculo de la integral anterior puede hacerse en cualquier intervalo de longitud 1. En efecto, si  $x \in \mathbb{R}$  tenemos que:

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x+1} e^{-2\pi i k t} f(t) dt = e^{-2\pi i k (x+1)} f(x+1) - e^{-2\pi i k x} f(x) = e^{-2\pi i k x} f(x) - e^{-2\pi i k x} f(x) = 0$$

Lo que prueba que la función  $\int_x^{x+1} e^{-2\pi i k t} f(t) dt$  es constante y, por tanto, igual a  $\int_0^1 e^{-2\pi i k t} f(t) dt$ .

Si ahora suponemos que  $f$  tiene período  $T$  podemos considerar la función  $g(t) = f(t/T)$  que tiene período 1. Supuesto que

$$g(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t}$$

se deduce enseguida que:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t/T}$$

donde los coeficientes vienen dados por:

$$c_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n s} g(s) ds = [s = t/T] = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi i n t/T} g(t/T) dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi i n t/T} f(t) dt$$

Las consideraciones anteriores motivan a las siguientes definiciones.

**Definición 3.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una señal de periodo  $T$  integrable en  $[0, T]$ . Se definen los *coeficientes de Fourier* de  $f$  por:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi i n t/T} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (3.6)$$

El polinomio trigonométrico:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t/T} \quad (3.7)$$

donde los coeficientes  $c_n$  vienen dados por 3.6, se llama *polinomio de Fourier de orden  $N$*  de  $f$ . La sucesión de los polinomios de Fourier de  $f$  se llama *serie de Fourier* de  $f$ . Cuando dicha serie converge escribimos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/T}$$

Teniendo en cuenta 3.4 se deduce que las igualdades 3.6 y 3.7 pueden escribirse de forma equivalente:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi n t/T) + b_n \sen(2\pi n t/T)) \quad (3.8)$$

donde:

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T (e^{-2\pi i n t/T} + e^{2\pi i n t/T}) f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi n t/T) f(t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{T} \int_0^T i (e^{-2\pi i n t/T} - e^{2\pi i n t/T}) f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{sen}(2\pi n t/T) f(t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Los  $a_n$  se llaman *coeficientes coseno* y los  $b_n$  *coeficientes seno* de  $f$ .

Es frecuente que  $T = 2\pi$  y que se elija como intervalo de integración  $[-\pi, \pi]$  con lo cual se tiene:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i n t} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (3.11)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n t) f(t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n t) f(t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

### Observaciones

- También se utilizan las notaciones  $c_n(f)$  y  $\widehat{f}(n)$  para representar los coeficientes de Fourier  $c_n$  de  $f$ .
- Para calcular los coeficientes de Fourier de una señal de periodo  $T$  podemos integrar en cualquier intervalo de longitud  $T$ . Suele ser frecuente, por razones de simetría, elegir el intervalo  $[-T/2, T/2]$ .
- Observa que nada hemos dicho aún sobre la relación entre una función  $f$  y su serie de Fourier. La pregunta ¿de qué modo la serie de Fourier de  $f$  representa a  $f$ ? no tiene una respuesta fácil porque tiene muchas respuestas. Mas adelante presentaremos algunos resultados en este sentido.
- Observa que si cambias una función en un número finito de puntos esto no afecta para nada a sus coeficientes de Fourier los cuales viene dados por medio de integrales.
- A diferencia de la serie de Taylor de una función, la cual solamente está definida si dicha función es indefinidamente derivable, la única condición para que la serie de Fourier de una función esté definida es que la función sea integrable en un intervalo. Te recuerdo que hay funciones integrables con infinitas discontinuidades. Es decir, el concepto de serie de Fourier es mucho menos restrictivo que el de serie de Taylor y esa es una de las grandes ventajas de la teoría de series de Fourier: puede aplicarse a funciones muy generales.
- En contra de lo que pudiera parecer a primera vista, la hipótesis de periodicidad no es restrictiva para la aplicación de la teoría de series de Fourier. En efecto, si estamos interesados en representar por medio de una serie de Fourier una función  $f$  definida e integrable en un intervalo  $[a, b]$  podemos *extender* dicha función a todo  $\mathbb{R}$  de manera que la extensión sea una función periódica de periodo  $T = b - a$ . Para ello basta repetir la gráfica de  $f$  en intervalos de longitud  $T$  (si  $f(b) = f(a+T) \neq f(a)$  será preciso cambiar el valor de  $f$  en uno de los extremos del intervalo  $[a, b]$ ).
- La consideración de funciones complejas, si bien desde un punto de vista teórico no presenta ninguna dificultad e incluso hace que la teoría sea más elegante y fácil de desarrollar, desde un punto de vista práctico no añade nada pues en las aplicaciones siempre se consideran señales reales.



### 3.2.5. Series de Fourier seno y coseno

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una señal de periodo  $T$  integrable en  $[0, T]$  y pongamos  $T/2 = L$ .

- Si  $f$  es par, esto es  $f(-t) = f(t)$ , entonces, teniendo en cuenta que la función coseno es par y la función seno es impar, se deduce que:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi nt/T) f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi nt/T) f(t) dt = \frac{2}{L} \int_0^L \cos(\pi nt/L) f(t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(2\pi nt/T) f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi nt/T) f(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- Análogamente, si  $f$  es impar, esto es  $f(-t) = -f(t)$ , entonces tenemos que:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi nt/T) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(2\pi nt/T) dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(2\pi nt/T) f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi nt/T) f(t) dt = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(\pi nt/L) f(t) dt$$

Este resultado lleva a definir las series de Fourier seno y coseno.

Sea ahora  $f$  una función definida e integrable en el intervalo  $[0, L]$ . Podemos extender  $f$  al intervalo  $[-L, L]$  de dos formas distintas:

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L \leq x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

y

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & -L \leq x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Es claro que  $f_1$  es impar y  $f_2$  es par y coinciden con  $f$  en  $[0, L]$ . La función  $f_1$  es llamada la *extensión impar* de  $f$  y  $f_2$  es llamada la *extensión par* de  $f$ .

- La serie de Fourier de la extensión impar de periodo  $2L$  de  $f_1$  se llama la *serie de Fourier seno* de  $f$  y viene dada por:

$$\sum_{n \geq 1} b_n \sin(\pi nt/L), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin(\pi nt/L) dt$$

- La serie de Fourier de la extensión par de periodo  $2L$  de  $f_2$  se llama la *serie de Fourier coseno* de  $f$  y viene dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(\pi nt/L), \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos(\pi nt/L) dt$$

### 3.2.6. Convergencia de las series de Fourier

El siguiente resultado nos dice que en condiciones razonablemente generales la serie de Fourier de una función converge puntualmente a dicha función.

**Teorema 3.2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una señal periódica con período  $T$  e integrable en  $[0, T]$ .

1. En todo punto  $t$  donde  $f$  sea derivable por la izquierda y por la derecha se verifica que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T} = f(t)$$

2. En todo intervalo  $[a, b]$  donde  $f$  sea derivable con derivada acotada se verifica que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T} = f(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

y además la convergencia es uniforme en  $[a, b]$ .

3. Si  $f$  no es continua en un punto  $t$  pero la derivada de  $f$  tiene límites por la izquierda y por la derecha en  $t$  entonces se verifica que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T} = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

donde  $f(t+)$  y  $f(t-)$  son, respectivamente, los límites por la derecha y por la izquierda de  $f$  en  $t$ .

### 3.2.7. Ejercicios

- Sea  $f(t) = \text{sen}(t/3) + \text{sen}(t/4)$ . ¿Es  $f$  periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es su período?
  - Sea  $f(t) = \text{sen}(\lambda t) + \text{sen}(\mu t)$ . Prueba que para que  $f$  sea periódica es necesario y suficiente que  $\lambda/\mu$  sea un número racional.
  - ¿Es periódica la función  $f(t) = \text{sen}(10t) + \text{sen}((10 + \pi)t)$ ?
- Supongamos que  $f$  es una función definida en  $\mathbb{R}$  que se anula fuera de un intervalo acotado y sea  $T > 0$ . Definamos

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT)$$

Observa que  $g$  es, de hecho, una suma finita.

- Prueba que  $g$  es periódica de período  $T$  ( $g$  se llama la “periodización” de  $f$  con período  $T$ ).
- Sea

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 - 2|t| & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Representa gráficamente la “periodización” de  $\Gamma(t)$  para  $T = 1/2, T = 3/4, T = 1, T = 2$ .

3. Considera las distintas formas de escribir la serie de Fourier de una función real periódica de período 1:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n t) \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} \\ & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2\pi n t + \phi_n) \end{aligned}$$

Indica con detalle cómo se pasa de una a otra, es decir, las relaciones que hay entre los distintos coeficientes.

4. Sea  $f$  una señal,  $c_n$  sus coeficientes de Fourier,  $a_n$  s y  $b_n$  sus coeficientes coseno y seno respectivamente. Justifica las siguientes afirmaciones:

$$a) f \text{ es real} \implies c_{-n} = \overline{c_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \iff a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b) f \text{ es par} \implies c_{-n} = c_n \quad (n \in \mathbb{N}) \iff b_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$c) f \text{ es impar} \implies c_{-n} = -c_n \quad (n \in \mathbb{N}) \iff a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$d) f \text{ real y par} \implies c_{-n} = c_n \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$e) f \text{ real e impar} \implies c_{-n} = -c_n \in i\mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$$

5. Da una demostración aceptable de la igualdad de Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

6. Calcula las series de Fourier de las extensiones periódicas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

7. Calcula la serie de Fourier coseno de la función  $f(x) = x$  para  $x \in [0, \pi]$ .
8. Calcula la serie de Fourier seno de la función  $f(x) = 1$  para  $x \in [0, \pi]$ .
9. Calcula la serie de Fourier seno de la función  $f(x) = \cos x$  para  $x \in [0, \pi]$ .
10. Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Si los coeficientes de Fourier de una señal  $f$  son  $c_n$ , ¿cuáles son los coeficientes de Fourier de la señal trasladada  $g(t) = f(t - a)$ ? ¿Y los de la señal  $h(t) = f(at)$ ?
11. Calcula las series de Fourier de las funciones  $|\operatorname{sen} t|$  y  $|\cos t|$ .  
Sugerencia: usa el ejercicio anterior.
12. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 1 dada por  $f(t) = t$  para  $0 \leq t < 1$  y  $f(t+1) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Utiliza la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

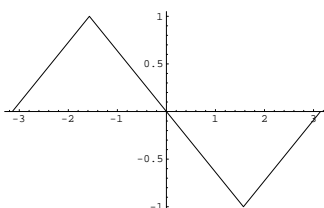
13. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período  $2\pi$  dada por  $f(t) = t^2$  para  $-\pi \leq t \leq \pi$  y  $f(t+2\pi) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

14. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2 dada por  $f(t) = |t|$  para  $-1 \leq t \leq 1$  y  $f(t+2) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

15. Calcula la serie de Fourier de la función  $2\pi$  periódica que aparece en la figura.



16. Dado  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \notin \mathbb{Z}$ , se define la función de período 2  $f(t) = e^{iat}$  para  $-1 \leq t < 1$  y  $f(t) = f(t+2)$ . Calcula la serie de Fourier de  $f$  y utiliza la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)}$$

17. Prueba que si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función  $2\pi$ -periódica y derivable, cuya derivada  $f'$  es integrable en  $[-\pi, \pi]$ , se verifica que  $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . En otros términos: la serie de Fourier de la derivada de  $f$  se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de  $f$ .

18. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periódica e integrable en  $[-\pi, \pi]$  y definamos  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Prueba que la función  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $G(x) = F(x) - \widehat{f}(0)x$ , es  $2\pi$ -periódica y expresa sus coeficientes de Fourier por medio de los de  $f$ .

19. Sea  $f(x) = x(1-x)$ , ( $0 \leq x \leq 1$ ) y consideremos la extensión impar de  $f$  de período 2.

a) Calcula la serie de Fourier seno de  $f$ .

b) Justifica que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{96}$ .

c) Calcula la serie de Fourier coseno de  $f'(x) = 1-2x$ , ( $0 \leq x \leq 1$ ); y la serie de Fourier de  $f''(x) = -2$ .

d) deduce de lo anterior que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

### 3.3. Geometría de las series de Fourier

La teoría de las series de Fourier está estrechamente relacionada con los aspectos algebraicos y geométricos de los espacios euclídeos. Lo característico de la geometría euclídea es el concepto de ortogonalidad o perpendicularidad y sus consecuencias. Te recuerdo que si  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  son vectores de  $\mathbb{R}^3$ , su *producto escalar*, que notaremos por  $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ , se define como:

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Se dice que  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son ortogonales si  $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0$  y se escribe  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ . Te recuerdo también que la *norma euclídea* de un vector  $\mathbf{x}$  viene dada por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x} | \mathbf{x})}$$

Observa que:

$$\sum_{j=1}^3 (x_j^2 + y_j^2) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

y

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \sum_{j=1}^3 (x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^3 (x_j^2 + y_j^2) + 2 \sum_{j=1}^3 x_j y_j$$

Deducimos de estas dos igualdades que:

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \sum_{j=1}^3 x_j y_j = 0 \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

que no es otra cosa que el *teorema de Pitágoras*.

Observa que si  $\|\mathbf{y}\| = 1$ , los vectores  $\mathbf{x} - (\mathbf{x} | \mathbf{y})\mathbf{y}$  e  $\mathbf{y}$  son ortogonales. Por esta razón se dice que el vector  $(\mathbf{x} | \mathbf{y})\mathbf{y}$  es la *proyección ortogonal* de  $\mathbf{x}$  sobre  $\mathbf{y}$ . Una interpretación muy sugerente del producto escalar es la siguiente: *el producto escalar de dos vectores nos dice lo que cada uno de ellos conoce del otro*.

En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  las *bases ortonormales* son muy útiles porque en ellas es muy fácil representar un vector. Te recuerdo que una base de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ , se llama ortonormal si  $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$  para  $i \neq j$  y  $\|\mathbf{u}_i\| = 1$  donde  $1 \leq i, j \leq 3$ . Dado un vector  $\mathbf{a}$ , sus componentes en una base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  son los números  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  que verifican la igualdad:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 \quad (3.14)$$

Esta igualdad vectorial es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que deberemos resolver para calcular las  $\alpha_i$ . Pero si la base  $\mathcal{B}$  es una base ortonormal entonces podemos calcular directamente las  $\alpha_i$  pues basta para ello multiplicar escalarmente la igualdad 3.14 por  $\mathbf{u}_1$  para obtener que:

$$(\mathbf{a} | \mathbf{u}_1) = \alpha_1 (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) + \alpha_2 (\mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_1) + \alpha_3 (\mathbf{u}_3 | \mathbf{u}_1) = \alpha_1$$

Análogamente se obtiene que  $\alpha_2 = (\mathbf{a} | \mathbf{u}_2)$  y  $\alpha_3 = (\mathbf{a} | \mathbf{u}_3)$ . Con ello la expresión del vector  $\mathbf{a}$  en la base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  es:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} | \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{a} | \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{a} | \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3$$

Fíjate que  $(\mathbf{a} | \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i$  es la *proyección ortogonal* de  $\mathbf{a}$  sobre  $\mathbf{u}_i$  por lo que la igualdad anterior nos dice que la expresión de un vector en una base ortonormal se obtiene sumando las proyecciones ortogonales de dicho vector sobre los vectores de la base.

Todo esto son conceptos algebraicos y geométricos. Pero en  $\mathbb{R}^3$  también hay una estructura analítica. Recuerda que la *distancia euclídea* entre dos vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  viene dada por:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Pues bien, la estructura analítica a la que me refería antes es la siguiente: con la distancia euclídea  $\mathbb{R}^3$  es un espacio métrico completo.

La generalización de lo antes dicho de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^n$  ya  $\mathbb{C}^n$  es inmediata. Nos proponemos generalizar todo esto a espacios de funciones y relacionarlo con las series de Fourier. En esta generalización es fácil entender los aspectos algebraicos y geométricos pero el aspecto analítico requiere el uso de la integral de Lebesgue por lo que no entraremos en él.

Lo primero que es fácil de generalizar es el concepto de ortogonalidad. Supongamos que  $f$  y  $g$  son funciones reales integrables en un intervalo  $[a, b]$ . Podemos considerar  $n$  puntos de dicho intervalo igualmente espaciados una distancia  $h$  y evaluar en ellos dichas funciones para obtener dos vectores  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . La suma  $h \sum_{j=1}^n u_j v_j$  es una suma de Riemann de la integral  $\int_a^b f g$  y el hecho de que los vectores  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  sean ortogonales se traduce en que  $\sum_{j=1}^n u_j v_j = 0$ , es decir, en que dicha suma sea igual a cero. De esta forma llegamos a la siguiente definición.

**Definición 3.3.** Dos funciones reales  $f$  y  $g$  son ortogonales en un intervalo  $[a, b]$  si

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$$

Cuando las funciones toman valores complejos la definición anterior requiere una modificación.

**Definición 3.4.** Dos funciones (reales o complejas)  $f$  y  $g$  son ortogonales en un intervalo  $[a, b]$  si

$$\int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt = 0$$

La definición anterior nos lleva a definir un producto escalar de la forma:

$$(f | g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt \quad (3.15)$$

y una norma por:

$$\|f\| = \sqrt{(f | \bar{f})} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad (3.16)$$

Aquí hay un detalle técnico y es que para que la definición 3.16 tenga sentido debe verificarse que la función  $|f|^2$  sea integrable en  $[a, b]$ , es decir,

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$$

se dice entonces que  $f$  es una *función de cuadrado integrable* en  $[a, b]$ . Esta condición es *más restrictiva* que exigir que  $f$  sea integrable en  $[a, b]$ . Es decir, si  $f$  es de cuadrado integrable en  $[a, b]$  también  $f$  es integrable en  $[a, b]$  pero el recíproco no tiene por qué verificarse como puedes comprobar con  $f(t) = 1/\sqrt{t}$  que es integrable en  $[0, 1]$  pero  $|f(t)|^2 = 1/t$  no es integrable en  $[0, 1]$ .

Afortunadamente esta exigencia es compatible con la definición 3.15 pues si  $f, g$  son funciones de cuadrado integrable en  $[a, b]$  entonces la función producto  $f\bar{g}$  es integrable en  $[a, b]$ .

También hay otro detalle menor y es que para conseguir que la función constante 1 tenga norma igual a 1 debemos modificar la definición 3.15. Introducimos a continuación la terminología adecuada y damos las definiciones precisas.

**Definición 3.5.** Representaremos por  $L^2(0, T)$  el espacio de las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que son  $T$  periódicas y de cuadrado integrable en  $[0, T]$ . Este conjunto con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por escalares complejos es un espacio vectorial complejo.

Para todo par de funciones  $f, g \in L^2(0, T)$  definimos su producto escalar por:

$$(f | g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt \quad (3.17)$$

y definimos la norma de  $f \in L^2(0, T)$  por:

$$\|f\| = \sqrt{(f | f)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} \quad (3.18)$$

### Observaciones

- Las propiedades del producto escalar definido por la igualdad 3.17 son las usuales. Para  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y  $f, g, h \in L^2(0, T)$  se verifica:

1.

$$(\alpha f + \beta g | h) = \alpha(f | h) + \beta(g | h)$$

Lo que se expresa diciendo que el producto escalar es lineal en la primera variable.

2.  $(f | g) = \overline{(g | f)}$

De las dos propiedades anteriores se deduce que

$$(f | \alpha g + \beta h) = \overline{\alpha}(f | g) + \overline{\beta}(f | h)$$

lo que se expresa diciendo que el producto escalar es conjugado-lineal en la segunda variable.

3.  $(f | f) \geq 0$ .

- La norma definida por la igualdad 3.18 tiene las propiedades usuales de las normas:

- $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ .
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

- Las propiedades  $(f | f) = 0 \implies f = 0$  o, lo que es igual,  $\|f\| = 0 \implies f = 0$  son también ciertas pero hay que precisar lo que se entiende por  $f = 0$ . Desde un punto de vista práctico puedes interpretar la igualdad  $f = 0$  en el sentido de que a efectos de integración la función  $f$  se comporta igual que la función nula.

- La consideración del intervalo  $[0, T]$  en lo anterior es por conveniencia. Puesto que las funciones con las que trabajamos son  $T$ -periódicas podemos considerar en las definiciones anteriores cualquier intervalo de longitud  $T$ . Por razones de simetría es frecuente considerar el intervalo  $[-T/2, T/2]$ .

**Definición 3.6.** Dos funciones  $f, g \in L^2(0, T)$  se llaman ortogonales si  $(f | g) = 0$  en cuyo caso escribimos  $f \perp g$ . Un conjunto de funciones  $\mathcal{B} \subset L^2(0, T)$  se dice ortogonal si para cada par de elementos distintos  $f, g \in \mathcal{B}$  se tiene que  $f \perp g$ . Si, además para toda función  $f \in \mathcal{B}$  es  $\|f\| = 1$  se dice que  $\mathcal{B}$  es un conjunto ortonormal de funciones.

Es inmediato que un conjunto de funciones ortogonales es linealmente independiente.

**Ejemplo 3.7.** En el espacio  $L^2(-\pi, \pi)$  con el producto escalar:

$$(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \forall f, g \in L^2(-\pi, \pi)$$

un ejemplo de conjunto ortonormal de funciones especialmente importante es el formado por las exponenciales complejas:

$$\mathcal{E} = \{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$$

Otro ejemplo de conjunto ortogonal es el formado por las funciones trigonométricas:

$$\mathcal{T} = \{1, \cos(nt), \sin(nt) : n \in \mathbb{N}\}$$

De hecho, tenemos las siguientes igualdades:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \cos(mt) dt = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

♦

Las siguientes igualdades son de comprobación inmediata:

$$\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\varphi | \psi) \quad \forall \varphi, \psi \in L^2(0, T) \quad (3.19)$$

Si  $\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$  es un conjunto de  $n$  funciones ortonormales en  $L^2(0, T)$  y  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) entonces:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \quad (3.20)$$

**Proposición 3.8.** Supongamos que  $\mathcal{B} = \{e_k : 1 \leq k \leq n\}$  es un conjunto de  $n$  funciones ortonormales en  $L^2(0, T)$  y sea  $\mathcal{M}$  el subespacio vectorial engendrado por  $\mathcal{B}$ . Dada una función  $f \in L^2(0, T)$  la función:

$$P_{\mathcal{M}}(f) = \sum_{j=1}^n (f | e_j) e_j$$

se llama la **proyección ortogonal** de  $f$  sobre  $\mathcal{M}$  y tiene las propiedades siguientes:

1.  $P_{\mathcal{M}}(f) \in \mathcal{M}$ .
2.  $f - P_{\mathcal{M}}(f)$  es ortogonal a  $\mathcal{M}$ .
3.  $\min \{\|f - g\| : g \in \mathcal{M}\} = \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|$

**Demostración.** La primera afirmación es evidente porque por su definición  $P_{\mathcal{M}}(f)$  es combinación lineal de los vectores  $e_k$  que forman una base de  $\mathcal{M}$ .



Para probar la segunda afirmación basta observar que:

$$(f - P_{\mathcal{M}}(f) | e_k) = (f | e_k) - \sum_{j=1}^n (f | e_j)(e_j | e_k) = (f | e_k) - (f | e_k) = 0$$

lo que prueba que  $f - P_{\mathcal{M}}(f)$  es ortogonal a los vectores  $e_k$  y, por tanto, también es ortogonal a cualquier combinación lineal de ellos, es decir, a cualquier vector de  $\mathcal{M}$ .

Para probar el punto 3 tenemos que para toda  $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \in \mathcal{M}$  se verifica:

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \|(f - P_{\mathcal{M}}(f)) + (P_{\mathcal{M}}(f) - g)\|^2 = \\ &\quad (\text{por 3.19 con } \varphi = f - P_{\mathcal{M}}(f), \psi = P_{\mathcal{M}}(f) - g) \\ &= \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \|P_{\mathcal{M}}(f) - g\|^2 + 2\operatorname{Re}(f - P_{\mathcal{M}}(f) | P_{\mathcal{M}}(f) - g) = \\ &\quad (\text{por ser } P_{\mathcal{M}}(f) - g \in \mathcal{M} \text{ se verifica que } (f - P_{\mathcal{M}}(f)) \perp (P_{\mathcal{M}}(f) - g)) \\ &= \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \left\| P_{\mathcal{M}}(f) - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\|^2 = \\ &\quad (\text{por 3.20 con } \lambda_j = (f | e_j) - \alpha_j) \\ &= \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \sum_{j=1}^n |(f | e_j) - \alpha_j|^2 \end{aligned}$$

Deducimos que para  $g \in \mathcal{M}$  la cantidad  $\|f - g\|$  es mínima cuando  $(f | e_j) - \alpha_j = 0$ , es decir,  $\alpha_j = (f | e_j)$ , esto es,  $g = P_{\mathcal{M}}(f)$ .  $\square$

Particularicemos el resultado anterior al espacio  $L^2(-\pi, \pi)$ .

**Proposición 3.9.** Sea  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , y sea  $\mathcal{M}$  el espacio vectorial engendrado por las funciones  $\mathcal{B} = \{e^{ikt} : -N \leq k \leq N\}$ . La proyección ortogonal de  $f$  sobre  $\mathcal{M}$  es el polinomio de Fourier de  $f$  de orden  $N$ :

$$S_N(t) = P_{\mathcal{M}}(f)(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}$$

dicho polinomio es además el polinomio trigonométrico de orden  $N$  que proporciona la aproximación óptima a  $f$  en la norma de  $L^2(-\pi, \pi)$ :

$$\min \{\|f - g\| : g \in \mathcal{M}\} = \|f - S_N\|$$

**Demostración.** Pongamos  $e_k$  para representar la función  $e^{ikt}$ . Basta observar que el conjunto de funciones  $\mathcal{B} = \{e_k : -N \leq k \leq N\}$  es ortonormal en  $L^2(-\pi, \pi)$  y que:

$$P_{\mathcal{M}}(f) = \sum_{k=-N}^N (f | e_k) e_k = \sum_{k=-N}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e_k = (\text{por 3.11}) = S_N$$

$\square$

Algunos resultados anteriores los hemos enunciado para  $L^2(-\pi, \pi)$  pero valen igualmente para  $L^2(0, T)$ . Hasta aquí hemos visto los aspectos algebraicos y geométricos de los que hablamos antes. Los aspectos analíticos se recogen en el siguiente teorema.

**Teorema 3.10** (Teorema de Riesz-Fisher). *Para toda función  $f \in L^2(0, T)$  se verifica que su serie de Fourier converge a  $f$  en la norma de  $L^2(0, T)$ :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k t / T} \right\| = 0.$$

La validez del anterior teorema depende de un hecho analítico profundo: el espacio  $L^2(0, T)$  es un espacio métrico completo con la distancia dada por

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

La convergencia en la norma de  $L^2(0, T)$  se llama *convergencia en media cuadrática*. Observa que dos funciones pueden estar muy próximas en media cuadrática y, sin embargo, tomar valores muy diferentes pues la media cuadrática mide un área.

Terminaremos esta sección con un resultado muy útil conocido con el nombre de “igualdad de Parseval”.

**Proposición 3.11** (Igualdad de Parseval). *Para toda función  $f \in L^2(0, T)$  se verifica que*

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3.21)$$

La igualdad de Parseval 3.21 tiene una interpretación interesante. El número  $|c_n|^2$  se interpreta como la energía del armónico  $c_n e^{i n t}$ , mientras que la integral  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$  se interpreta como la energía de la señal (en este sentido se dice que las funciones de  $L^2(-\pi, \pi)$  tienen energía finita). La igualdad de Parseval expresa, pues, que la energía de la señal es igual a la suma de las energías de sus armónicos componentes.

### 3.3.1. Suavidad de una señal y convergencia de su serie de Fourier

El teorema 3.2 pone de manifiesto una estrecha relación entre las propiedades locales de una función (continuidad, derivabilidad) y las propiedades globales de convergencia de su serie de Fourier. Queremos precisar un poco más esta relación. Observa que la convergencia de una serie de Fourier depende de la rapidez con la que los coeficientes  $c_n$  convergen a cero. Un primer resultado a este respecto, consecuencia directa de la igualdad de Parseval y de la condición básica necesaria para la convergencia de una serie, es el siguiente.

**Proposición 3.12.** *Los coeficientes de Fourier de una función de cuadrado integrable convergen a cero.*

La hipótesis de que una función sea de cuadrado integrable (tenga energía finita) es muy poco exigente, podemos intuir que si exigimos perfecciones mayores a la función obtendremos también más información sobre la forma en que los coeficientes de Fourier convergen a cero. De hecho, se verifica el siguiente resultado que puede probarse integrando por partes.

**Proposición 3.13.** *Sea  $f$  una función periódica y supongamos que  $f$  tiene derivadas continuas hasta el orden  $k$ . Entonces hay un número  $M > 0$  tal que*

$$|c_n| \leq \frac{M}{|n|^k} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

En el caso en que  $k = 1$  se verifica que la serie de los coeficientes de Fourier de  $f$  converge absolutamente, es decir,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < +\infty$ .

### 3.3.2. Espectro, dominio del tiempo y dominio de la frecuencia

Una señal analógica dada por medio de una función  $f(t)$  se dice que está dada en *el dominio del tiempo*. Supongamos que dicha señal es  $T$ -periódica y de cuadrado integrable y que su serie de Fourier es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}$$

(igualdad que, al menos, se verifica en el sentido de la convergencia en media cuadrática). Las frecuencias de los armónicos complejos que forman esta serie son  $n/T$ . El *espectro* de  $f$  se define como el conjunto de pares  $\{(n/T, c_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ . El conocimiento del espectro de una señal determina a dicha señal (al menos en el sentido de la convergencia en media cuadrática). Podemos considerar una función  $\hat{f}$  definida en el conjunto de las frecuencias  $\{n/T : n \in \mathbb{Z}\}$  por  $\hat{f}(n/T) = c_n$ . Se suele decir que dicha función representa a la señal  $f$  en el *dominio de la frecuencia*. La “gráfica” de la función  $|\hat{f}|$  se llama el *espectro de amplitudes*, y la “gráfica” de la función  $\arg \hat{f}$  se llama el *espectro de fases*.

Recuerda que si la serie de Fourier la escribimos en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(2n\pi vt + \phi_n)$$

donde  $A_n \geq 0$  es la amplitud del armónico  $n$ -ésimo y  $\phi_n$  es su fase, entonces, en virtud de las igualdades 3.4 y 3.5, se verifica que  $c_n = \frac{-i}{2} A_n e^{i\phi_n} = \frac{1}{2} A_n e^{i(\phi_n - \pi/2)}$ ; y eligiendo  $\phi_n \in ]-\pi/2, 3\pi/2]$  resulta que  $\phi_n - \pi/2 = \text{Arg}(c_n)$ , lo que justifica la terminología empleada. Ten en cuenta que para una señal real se verifica siempre que  $c_n = \overline{c_{-n}}$  lo que explica el aspecto de las siguientes “gráficas”.

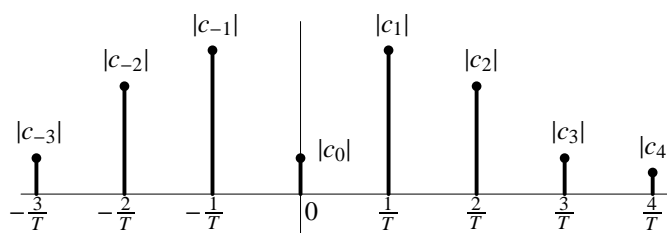


Figura 3.1: Espectro de amplitudes

El espectro de amplitudes consiste en líneas espectrales regularmente espaciadas en las frecuencias  $n/T$ . Para  $n = 1$  y  $n = -1$  las líneas corresponden a la *frecuencia fundamental*. Las demás líneas son llamadas *armónicos* de la señal.

Lo interesante de estas representaciones es que para manipular una señal analógica es más fácil hacerlo en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, si la señal es un sonido las frecuencias bajas corresponden a los tonos graves y las altas a los agudos, mientras que las amplitudes representan la intensidad del sonido del armónico correspondiente.

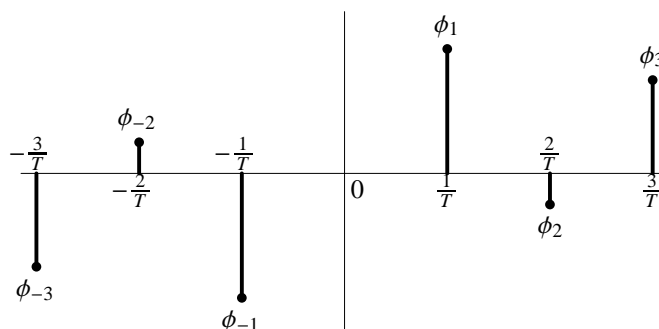


Figura 3.2: Espectro de fases

### 3.3.3. Ejercicios

- Usando las propiedades algebraicas del producto escalar en  $L^2(0, T)$ , prueba las siguientes igualdades:

$$a) \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\operatorname{Re}(f | g)$$

$$b) \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

$$c) \|f - ig\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\operatorname{Im}(f | g)$$

$$d) 4(f | g) = (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2) + i(\|f + ig\|^2 - \|f - ig\|^2)$$

- Comprueba que el conjunto formado por las funciones trigonométricas:

$$\{1, \cos(2\pi nt/T), \operatorname{sen}(2\pi nt/T) : n \in \mathbb{N}\}$$

es ortogonal en  $L^2(0, T)$ .

## 3.4. Introducción a la Transformada de Fourier Discreta

Actualmente la mayor parte de las señales están digitalizadas. Para fijar ideas, consideremos una señal de sonido. Las variaciones en la presión del aire que constituyen un sonido hacen vibrar la membrana de un micrófono que las transforma en una señal eléctrica cuyo voltaje oscila continuamente y es convertido en una serie de números por un digitalizador. Un digitalizador es algo así como un voltímetro que hace miles de medidas por segundo. Cada medida da lugar a un número que se almacena digitalmente (en formato de 8 bits o 16 bits dependiendo de la perfección con que se quiera reproducir el sonido). Este número se llama una muestra y al proceso de convertir un sonido en una serie de números se le llama muestreo.

La tarjeta de sonido de tu ordenador tiene un digitalizador. Si conectas un micrófono a tu ordenador y grabas tu voz, el archivo que resulta contiene una serie de muestras que permiten reproducir lo que has grabado.

Lo anterior quiere decir que usualmente lo que conocemos de una señal es una muestra, esto es, una señal podemos verla como un vector cuyas componentes son valores de la señal en determinados instantes. Si el tamaño de la muestra es  $N$ , este vector está en el espacio vectorial  $N$ -dimensional  $\mathbb{C}^N$ . En términos muy generales puede afirmarse que el análisis de esta señal consiste en representarla en diferentes bases de  $\mathbb{C}^N$ . Estas bases se eligen de forma que la correspondiente representación pueda ser fácilmente interpretada y proporcione información útil sobre la señal. Un ejemplo de esto es la Transformada de Fourier Discreta que vamos a ver a continuación.

Supongamos que conocemos  $N$  muestras de una señal periódica  $f$  de período  $T$  las cuales se han tomado en instantes  $t_k$  igualmente espaciados a lo largo de un período, es decir,  $t_k = kT/N$ , donde  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Conocemos, pues, los  $N$  números<sup>1</sup>:

$$f(kT/N) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

y sabemos que  $f$  tiene período  $T$ . Usando esta información *queremos calcular una buena aproximación de los coeficientes de Fourier de  $f$* .

Como tenemos  $N$  datos parece lógico calcular  $N$  coeficientes  $c_n$ . Sabemos que bajo hipótesis muy generales se verifica que  $\lim\{c_n\} = 0$ , esto es, la sucesión de los coeficientes de Fourier converge a cero. Por ello los coeficientes más significativos vienen al principio. Teniendo esto en cuenta, vamos a tratar de calcular los coeficientes  $c_n$  para  $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$  (o un intervalo centrado si  $N$  es impar). Este cálculo podemos hacerlo de dos formas.

Calculando de forma aproximada el valor de la integral

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi nt/T} dt$$

Para ello podemos proceder como sigue:

$$c_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{T} \int_{kT/N}^{(k+1)T/N} f(t) e^{-2i\pi nt/T} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} f(kT/N) e^{-2i\pi nk/N}$$

lo que nos lleva a tomar como una aproximación de los coeficientes  $c_n$  los números

$$c'_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-nk} \quad \text{donde } \omega = e^{2i\pi/N}, \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (3.22)$$

Otra forma de proceder es calcular coeficientes  $\hat{c}_n$  por la condición de que el polinomio trigonométrico

$$P(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{c}_n e^{2i\pi nt/T}$$

interpole a  $f$  en los puntos  $t_k$ , es decir, verifique que  $P(kT/N) = y_k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Debemos resolver para ello el siguiente sistema de  $N$  ecuaciones lineales con  $N$  incógnitas (los  $\hat{c}_n$ ):

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{c}_n \omega^{nk} = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\sum_{n=-N/2}^{-1} \hat{c}_n \omega^{nk} = \sum_{p=N/2}^{N-1} \hat{c}_{p-N} \omega^{(p-N)k} = \sum_{n=N/2}^{N-1} \hat{c}_{n-N} \omega^{nk}$$

y definiendo:

$$Y_n = \begin{cases} \hat{c}_n & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ \hat{c}_{n-N} & \frac{N}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

<sup>1</sup>Es usual en este contexto trabajar con índices que empiezan en 0. La gran mayoría de los textos lo hacen así. Esto tiene el pequeño inconveniente de que un vector de datos no tiene una posición 0 lo que, como veremos en las prácticas que haremos sobre este tema con *Mathematica*, obliga a hacer pequeños ajustes en los algoritmos de cálculo.

el sistema 3.23 puede escribirse en la forma:

$$\sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega^{nk} = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.24)$$

Este sistema puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Pongamos  $\Omega_N = (\omega^{nk})_{\substack{0 \leq k \leq N-1 \\ 0 \leq n \leq N-1}}$ . Es evidente que  $\Omega_N$  es una matriz simétrica. Definamos los vectores columna de esta matriz:

$$\omega_{\mathbf{k}} = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(N-1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \omega = e^{2i\pi/N}$$

Observa que, de forma natural, estamos ya trabajando en  $\mathbb{C}^N$ . Recuerda que en  $\mathbb{C}^N$  el producto escalar euclídeo está dado por:

$$(\mathbf{z} | \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^{N-1} z_j \overline{w_j} \quad \mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1}), \quad \mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_{N-1})$$

Teniendo en cuenta que  $\omega^N = 1$ , es fácil comprobar que los vectores  $\omega_{\mathbf{k}}$  ( $0 \leq k \leq N-1$ ) son ortogonales y tienen norma igual a  $\sqrt{N}$ . Dichos vectores son, por tanto, linealmente independientes y forman una base ortogonal de  $\mathbb{C}^N$ . La igualdad 3.25 nos dice que  $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1})$  son las coordenadas del vector  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$  en dicha base o, lo que es igual, notando  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$  el vector  $k$ -ésimo de la base canónica de  $\mathbb{C}^N$ :

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k \mathbf{e}_{\mathbf{k}} = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \omega_{\mathbf{k}}$$

Multiplicando escalarmente esta igualdad por  $\omega_{\mathbf{n}}$  obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} | \omega_{\mathbf{n}}) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k (\omega_{\mathbf{k}} | \omega_{\mathbf{n}}) = Y_n (\omega_{\mathbf{n}} | \omega_{\mathbf{n}}) = NY_n$$

esto es:

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-nk} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad \omega = e^{2i\pi/N} \quad (3.26)$$

Pero estas son exactamente las mismas igualdades 3.22. Observa que pueden escribirse en forma fácil de recordar:

$$Y_n = \frac{1}{N} (\mathbf{y} | \omega_{\mathbf{n}}), \quad \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}), \quad \omega_{\mathbf{n}} = (1, \omega^n, \omega^{2n}, \dots, \omega^{(N-1)n}), \quad \omega = e^{2i\pi/N} \quad (3.27)$$

Hemos probado así que:

$$c'_n = \widehat{c}_n = Y_n \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (3.28)$$

$$c'_{n-N} = \widehat{c}_{n-N} = Y_n \quad \frac{N}{2} \leq n \leq N-1 \quad (3.29)$$

**Definición 3.14.** La transformación  $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  que a un vector  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$  hace corresponder el vector  $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$  dado por las igualdades 3.26 o 3.27 se llama la Transformada de Fourier Discreta (DFT) en  $\mathbb{C}^N$ .

Observa que la DFT es una biyección lineal de  $\mathbb{C}^N$  en  $\mathbb{C}^N$  cuya inversa viene dada por 3.25. Teniendo en cuenta que  $\Omega_N$  es una matriz ortogonal simétrica cuya inversa viene dada por  $\Omega_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\Omega_N}$ , podemos escribir:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y}) = \frac{1}{N} \overline{\Omega_N} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{Y}) = \Omega_N \mathbf{Y}$$

equivalentemente

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi nk/N}, \quad y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{2i\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

### Observaciones

- La definición que hemos dado de la DFT es la más usual aunque adolece de cierta falta de simetría debido al factor de escala  $1/N$  que figura en la transformada directa pero no en su inversa. De hecho, la definición de la DFT puede variar de unos textos a otros. Es frecuente ortonormalizar la base formada por los vectores  $\omega_k$ , esto es, considerar la base ortonormal formada por los vectores  $\frac{1}{\sqrt{N}} \omega_k$ . Con ello se consigue que en las fórmulas anteriores figure como factor de escala en ambas  $1/\sqrt{N}$ .
- No hay que olvidar la relación entre los  $Y_n$  y los coeficientes aproximados de Fourier  $\hat{c}_n$  que viene dada por las igualdades 3.28 y 3.29.
- Aunque hemos supuesto al principio que el vector  $\mathbf{y}$  se obtenía tomando  $N$  valores igualmente espaciados de una función periódica a lo largo de un período, es claro que se trataba nada más que de una motivación inicial. La TFD (transformada de Fourier discreta) no tiene ninguna limitación: el vector  $\mathbf{y}$  puede ser cualquier elemento de  $\mathbb{C}^N$ . De hecho, la TFD se utiliza para intentar averiguar las frecuencias presentes en series de datos de cualquier naturaleza. Pero hay un convenio que se sigue siempre cuando se trabaja con la TFD y que consiste en considerar que el vector  $\mathbf{y} = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}\}$  es una muestra de una sucesión infinita periódica de período  $N$ . Es decir, dado un entero arbitrario  $k \in \mathbb{Z}$ , definimos  $y_k = y_q$  donde  $0 \leq q \leq N-1$  es el resto de la división de  $k$  por  $N$ . Con este convenio es inmediato comprobar que el vector  $\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y})$  verifica que  $Y_{k+N} = Y_k$ , es decir, es periódico con período  $N$ . Esta propiedad se expresa diciendo que la TFD transforma señales periódicas discretas en el dominio del tiempo en señales periódicas discretas en el dominio de la frecuencia.
- El espectro de la señal  $\mathbf{y}$  es el conjunto  $\{(n/N, Y_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ . El espectro de amplitudes es el conjunto  $\{(n/N, |Y_n|) : n \in \mathbb{Z}\}$  y el espectro de fases  $\{(n/N, \text{Arg}(Y_n)) : n \in \mathbb{Z}\}$  dichos conjuntos suelen representarse por segmentos de línea que unen los puntos  $(n/N, 0)$  con los puntos del espectro correspondiente. Debido a la periodicidad de los  $Y_n$  es suficiente representar dichos espectros para  $N$  valores consecutivos de  $n$ .
- Para señales  $\mathbf{y}$  reales se verifica que  $Y_{-n} = \overline{Y_n}$  donde la barra indica complejo conjugado. Como  $Y_{-n} = Y_{N-n}$  haciendo  $n = N/2 - k$  obtenemos que  $Y_{N/2+k} = \overline{Y_{N/2-k}}$  de donde se deduce que

$$|Y_{N/2+k}| = |Y_{N/2-k}| \quad \text{y} \quad \text{Arg}(Y_{N/2+k}) = \text{Arg}(\overline{Y_{N/2-k}}) = -\text{Arg}(Y_{N/2-k})$$

esto es el espectro de amplitudes es simétrico respecto a  $N/2$  y el espectro de fases es antisimétrico respecto a  $N/2$ . Por esta razón, como en la práctica siempre se trabaja con señales reales, es costumbre representar solamente la mitad más uno de los puntos de dichos espectros correspondientes a los valores  $0, 1, 2, \dots, N/2$ . Los cuales son suficientes para recuperar la señal original combinándolos con sus conjugados que representan frecuencias negativas.

- Hay una estrecha analogía entre la DFT y las series de Fourier.

- Series de Fourier.

- Se considera una señal *continua* en el dominio del tiempo,  $f$ , con período  $T$  y, por tanto, con frecuencia  $1/T$  expresada en Hercios (ciclos por segundo).
- Se trata de descomponer dicha señal como una serie de señales con frecuencias  $n/T$  (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental). La señal modelo con frecuencia  $n/T$  (ciclos por segundo) es  $\sin(2\pi n t/T)$ . La forma compleja de dicha señal es la función  $\mathbf{e}_n(t) = e^{2\pi i n t/T}$ .
- El *peso* que la componente de frecuencia  $n/T$  tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:

$$(f | \mathbf{e}_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n t/T} dt$$

- La serie que representa a la señal  $f$  es  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (f | \mathbf{e}_n) e^{2\pi i n t/T}$ . Dicha serie proporciona el espectro de la señal y constituye la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.
- En el contexto de las series de Fourier las igualdades:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n t/T} dt \quad (3.30)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n t/T} \quad (3.31)$$

se llaman, respectivamente, las ecuaciones de análisis y de síntesis.

- Transformada de Fourier Discreta.

- Se considera una señal discreta  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$  formada por  $N$  valores que se interpretan como un período de una señal discreta periódica de período  $N$ .
- Se trata de descomponer dicha señal como una suma de señales con frecuencias  $n/N$  (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental  $1/N$ ). La señal *continua* modelo con frecuencia  $n/N$  (ciclos por segundo) es  $\sin(2\pi n t/N)$ . La forma compleja de dicha señal es  $e^{2\pi i n t/N}$ . Puesto que de la señal original solamente conocemos sus valores para  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , lo que hacemos es evaluar en dichos puntos la señal  $e^{2\pi i n t/N}$  y obtenemos así el vector

$$\omega_{\mathbf{n}} = (1, e^{2\pi i n 2/N}, e^{2\pi i n 3/N}, \dots, e^{2\pi i n (N-1)/N})$$

- El *peso* que la componente de frecuencia  $n/N$  tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:

$$(\mathbf{y} | \omega_{\mathbf{n}}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i n k/N}$$

- La suma que representa a la señal discreta  $\mathbf{y}$  es  $\sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{y} | \omega_{\mathbf{n}}) \omega_{\mathbf{n}}$ . Dicha suma se interpreta como la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.
- Los coeficientes  $Y_n$  se llaman *coeficientes espectrales* de la señal  $\mathbf{y}$ . Las igualdades:

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i n k/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.32)$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{2\pi i n k/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.33)$$



se llaman, respectivamente, la *ecuación de análisis* y la *ecuación de síntesis*. La frecuencia fundamental en 3.33 es  $\omega = 1/N$ .

### 3.4.1. Convolución y DFT

Como acabamos de explicar, interpretamos los elementos de  $\mathbb{C}^N$  como sucesiones periódicas con período  $N$  (observa que esto se corresponde con la situación inicialmente considerada  $y_k = f(kT/N)$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  donde  $f$  era una señal con período  $T$ , lo que implica que  $y_{k+N} = y_k$ ). Esto justifica la siguiente definición.

Dado  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$  y un entero arbitrario  $k \in \mathbb{Z}$ , definimos  $y_k = y_q$  donde  $0 \leq q \leq N-1$  es el resto de la división de  $k$  por  $N$ .

Se define la convolución<sup>2</sup> (llamada a veces convolución circular o periódica o cíclica) de dos elementos de  $\mathbb{C}^N$ ,  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  e  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$  como el elemento  $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$  de  $\mathbb{C}^N$  definido por:

$$z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Es inmediato que  $z_k$  es una sucesión periódica con período  $N$ . Escribiremos simbólicamente  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ .

Fijado un vector  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ , la aplicación que a un vector  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  hace corresponder el producto de convolución  $\mathbf{z} = \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$  es una aplicación lineal de  $\mathbb{C}^N$  en  $\mathbb{C}^N$  que podemos escribir en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_{N-1} & \cdots & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 & \cdots & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & y_{N-3} & \cdots & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Las propiedades del producto de convolución se deducen fácilmente de la siguiente importante propiedad.

Dados dos vectores  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$  y  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$  en  $\mathbb{C}^N$  notaremos por  $\mathbf{ab} \in \mathbb{C}^N$  su **producto puntual**:

$$\mathbf{ab} = (a_0 b_0, a_1 b_1, \dots, a_{N-1} b_{N-1})$$

**Proposición 3.15.** Sean  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ ,  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$  vectores en  $\mathbb{C}^N$ . Entonces se verifica que:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = N \mathcal{F}(\mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{y}), \quad \mathcal{F}(\mathbf{xy}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) \odot \mathcal{F}(\mathbf{y}) \quad (3.35)$$

**Demostración.** Pongamos  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{X} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y})$  y  $\mathbf{Z} = \mathcal{F}(\mathbf{z})$ . Por definición:

$$Z_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q} \omega^{-nk}$$

permutando el orden en las sumas obtenemos que:

$$Z_n = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} x_q \omega^{-nq} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k-q} \omega^{-n(k-q)} = N X_n Y_n$$

<sup>2</sup>Este es uno de los distintos tipos de convolución más frecuentes. Las operaciones de convolución son muy usadas en el procesamiento de señales digitales. Los tipos de filtros más frecuentes actúan sobre la señal de entrada "input" haciendo una convolución con la "función respuesta-impulso del filtro".

lo que prueba la primera igualdad en 3.35. La otra igualdad se comprueba de forma análoga.  $\square$

### 3.4.2. ¿Qué podemos hacer con la Transformada de Fourier Discreta?

La DFT permite representar una muestra en el dominio de la frecuencia. Para ello representamos segmentos que unen los puntos  $(n/T, 0)$  y  $(n/T, |Y_n|)$ . En el dominio de la frecuencia la señal queda claramente descompuesta en sus componentes sinusoidales: cada segmento representa la componente sinusoidal de la frecuencia  $n/T$  y amplitud  $|Y_n|$ . Es muy fácil manipular esta representación para suprimir, por ejemplo, pequeñas distorsiones. En la señal original (en el dominio del tiempo) estas pequeñas distorsiones pueden quedar ocultas pero eso no ocurre en el dominio de la frecuencia pues en él podemos ver las distintas frecuencias que acompañan a la principal y podemos eliminar las frecuencias más altas que suelen corresponder a las distorsiones. Posteriormente recuperamos la señal modificada vía la DFT inversa. Esto es lo que se conoce como “filtrado de la señal” y eso es lo que hacen los convertidores digitales-analógicos.

El dominio de la frecuencia forma parte de nuestra vida diaria. La combinación cerebro-oído es un excelente analizador de frecuencias, capaz de distinguir en un sonido complejo frecuencias muy próximas. Un médico que ausculta un paciente está tratando de oír frecuencias que le digan que algo no va bien. Lo mismo hace un mecánico que escucha el sonido de un motor.

### 3.4.3. Noticia sobre un famoso algoritmo: la Transformada Rápida de Fourier

Para calcular la DFT usando las fórmulas 3.26 son necesarias

$$\begin{aligned} (N-1)^2 & \text{ multiplicaciones complejas} \\ N(N-1) & \text{ adiciones complejas} \end{aligned}$$

Y no hay que olvidar que una multiplicación compleja son 4 operaciones reales. Por ello el coste de cálculo de una DFT de  $N$  puntos es del orden de  $4N^2$  operaciones reales de punto flotante. Para hacernos una idea de lo que esto supone, recordemos que en los años 50 un ordenador podía realizar del orden de  $10^3$  operaciones por segundo y para calcular una DFT de 100 puntos necesitaría un tiempo de:

$$4 \times 100^2 \text{ operaciones} \times \frac{1 \text{ s}}{10^3 \text{ operaciones}} = 40 \text{ s}$$

y una DFT de 1000 puntos necesitaría un tiempo de cálculo de 4000 s = 1.1h. Actualmente un PC es capaz de realizar  $10^7$  operaciones por segundo y el tiempo de cálculo de una DFT de 1000 puntos es 0.4 segundos. Esto parece rápido pero en la práctica está muy lejos de ser suficientemente rápido. Considera que es una técnica muy frecuente hacer una DFT de 1000 puntos para generar cada imagen de una animación. Si la animación consta de 10000 imágenes (por tanto es de muy corta duración) el tiempo total de cálculo sería de 4000 segundos, unos 67 minutos. Demasiado.

Puesto que la DFT se ha convertido en la herramienta básica para el tratamiento de señales, no es de extrañar que haya quien afirme que el mundo moderno empezó en 1965 cuando J. Cooley and J. Tukey publicaron su eficaz método para calcular la DFT. Dicho método de cálculo se conoce con el nombre de *Transformada Rápida de Fourier* (FFT=Fast Fourier Transform). Este algoritmo, que marcó una importante etapa en el desarrollo de lo que se conoce como la teoría de *complejidad de algoritmos*, reduce el coste de cálculo de la DFT (suponiendo que  $N$  es de la forma  $2^p$ ) del orden de  $N^2$  al orden de  $N \log_2(N)$ . Para  $N = 1024 = 2^{10}$  esto supone unas 10.240 operaciones de punto flotante, esto es, reducimos en 1/100 el tiempo de cálculo. Esta enorme reducción del coste computacional es lo que en la práctica hizo posible realizar análisis de Fourier en ordenadores, lo que explica que el trabajo

J.W. Cooley and J.W. Tukey, *An algorithm for the machine computation of complex Fourier series*, Math. Comp. **19**(1965), 297-301

sea el trabajo de matemáticas más frecuentemente citado de todos los tiempos.<sup>3</sup>

Un uso frecuente de la FFT es para calcular convoluciones. Observa que la igualdad 3.34 implica que para calcular el producto de convolución  $\mathbf{y} \odot \mathbf{x}$  se necesitan:

$$\begin{aligned} N^2 & \text{ multiplicaciones complejas} \\ N(N-1) & \text{ adiciones complejas} \end{aligned}$$

La igualdad  $\mathcal{F}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = N\mathcal{F}(\mathbf{x})\mathcal{F}(\mathbf{y})$  implica que:

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = N\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{x})\mathcal{F}(\mathbf{y}))$$

lo que permite usar el algoritmo de la FFT para calcular convoluciones ahorrando tiempo de cálculo.

### 3.4.4. Ejercicios

1. Comprueba que los vectores

$$\omega_{\mathbf{k}} = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(N-1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \omega = e^{2i\pi/N}$$

forman una base ortogonal de  $\mathbb{C}^N$ .

2. Recuerda que consideramos los elementos de  $\mathbb{C}^N$  como sucesiones periódicas con período  $N$ . Explícitamente: dado  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$  y un entero arbitrario  $k \in \mathbb{Z}$ , definimos  $y_k = y_q$  donde  $0 \leq q \leq N-1$  es el resto de la división de  $k$  por  $N$ . Por ejemplo,  $y_{-1} = y_{N-1}$ ,  $y_{-2} = y_{N-2}$ ,  $y_N = y_0$ ,  $y_{N+1} = y_1$ .

Se dice que la sucesión  $(y_n)$  es par si  $y_{-n} = y_n$  y se dice que es impar si  $y_{-n} = -y_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Supongamos que  $(y_n) \xrightarrow{\mathcal{F}} (Y_n)$ . Prueba que:

- a)  $(y_{-n}) \xrightarrow{\mathcal{F}} (Y_{-n})$
- b)  $(\bar{y}_n) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\bar{Y}_{-n})$
- c)  $(\bar{y}_{-n}) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\bar{Y}_n)$
- d)  $(y_n)$  es par (impar)  $\iff (Y_n)$  es par (impar).
- e)  $(y_n)$  es real  $\iff Y_{-n} = \bar{Y}_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .
- f)  $(y_n)$  es real y par  $\iff (Y_n)$  es real y par.
- g)  $(y_n)$  es real e impar  $\iff (Y_n)$  es imaginario puro e impar.

3. Calcula la transformada de Fourier discreta de las siguientes sucesiones:

- a) (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
- b) (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
- c) (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)
- d) (1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)
- e) (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)

4. Justifica que  $\sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2$ .

5. Sea  $\mathbf{Z} = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbf{y}))$ . Calcula las componentes  $Z_k$  de  $\mathbf{Z}$  en función de las componentes  $y_n$  de  $\mathbf{y}$ .

<sup>3</sup>Tukey fue también el inventor del término "bit" como una abreviatura de "binary digit". ¿No sería esto motivo suficiente para pasar a la Historia?

---

## Transformadas de Fourier y de Laplace

---

### 4.1. Introducción

Los dominios del tiempo y de la frecuencia son formas alternativas de representar las señales. Si una señal es modificada en un dominio, también lo será en el otro. Los problemas que plantea el procesamiento de señales pueden tratarse en el dominio del tiempo con técnicas clásicas de ecuaciones diferenciales (señales analógicas) o ecuaciones en diferencias (señales discretas), mientras que en el dominio de la frecuencia estos problemas se traducen en ecuaciones algebraicas generalmente más sencillas de resolver. Por ejemplo, en la lección anterior hemos visto que la convolución (una operación complicada) de dos señales discretas en el dominio del tiempo se corresponde con el producto (una operación muy sencilla) de sus Transformadas de Fourier Discretas en el dominio de la frecuencia.

Las herramientas que establecen las relaciones matemáticas entre los dominios del tiempo y de la frecuencia se llaman *transformadas*. Dos de las más usadas son la transformada de Fourier y la transformada de Laplace y ambas están relacionadas. La transformada de Fourier se usa para representar en el dominio de la frecuencia señales continuas y describe el espectro continuo de una señal no periódica.

Los métodos basados en la transformada de Fourier son usados prácticamente en todas las áreas de la ciencia y de la ingeniería: óptica, diseño de circuitos, cristalografía y espectroscopía, procesamiento de señales y comunicaciones, tratamiento de imágenes.

### 4.2. La transformada de Fourier

Lo que sigue es un intento de motivar la definición de transformada de Fourier que daremos posteriormente. No nos preocuparemos mucho por la precisión matemática pues se trata de ayudar a la intuición.

La transformada de Fourier puede interpretarse como una “*versión continua*” del concepto de serie de Fourier para funciones no periódicas. Recuerda que el espectro de una señal  $f$ , periódica de período  $T$ , es el conjunto de pares  $\{(n/T, c_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ , donde  $c_n$  son los coeficientes de Fourier complejos de  $f$ . Para nuestros propósitos actuales, es conveniente considerar la función  $\hat{f}$  dada por  $\hat{f}(n/T) = c_n$ . Observa que la gráfica de dicha función es justamente el espectro de  $f$ .

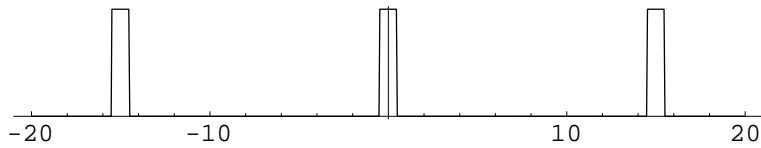
La clave de lo que sigue consiste en interpretar una función no periódica como el límite de una función periódica cuyo período,  $T$ , se hace arbitrariamente grande, es decir,  $T \rightarrow +\infty$ . Observa que cuanto mayor es el período  $T$  más cerca están los puntos del espectro de forma que cuando  $T \rightarrow +\infty$

podemos considerar que el espectro se convierte en una curva continua y la función  $\hat{f}$  en una función definida en  $\mathbb{R}$  cuya gráfica es dicha curva. Veamos todo esto con un ejemplo.

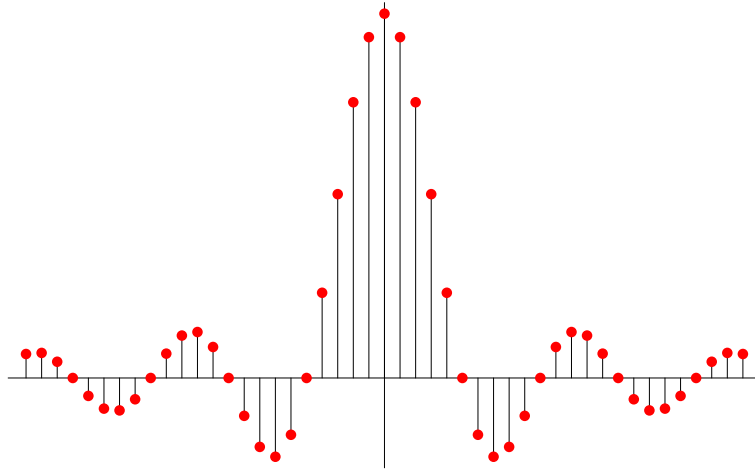
Consideremos la función “pulso rectangular” definida por:

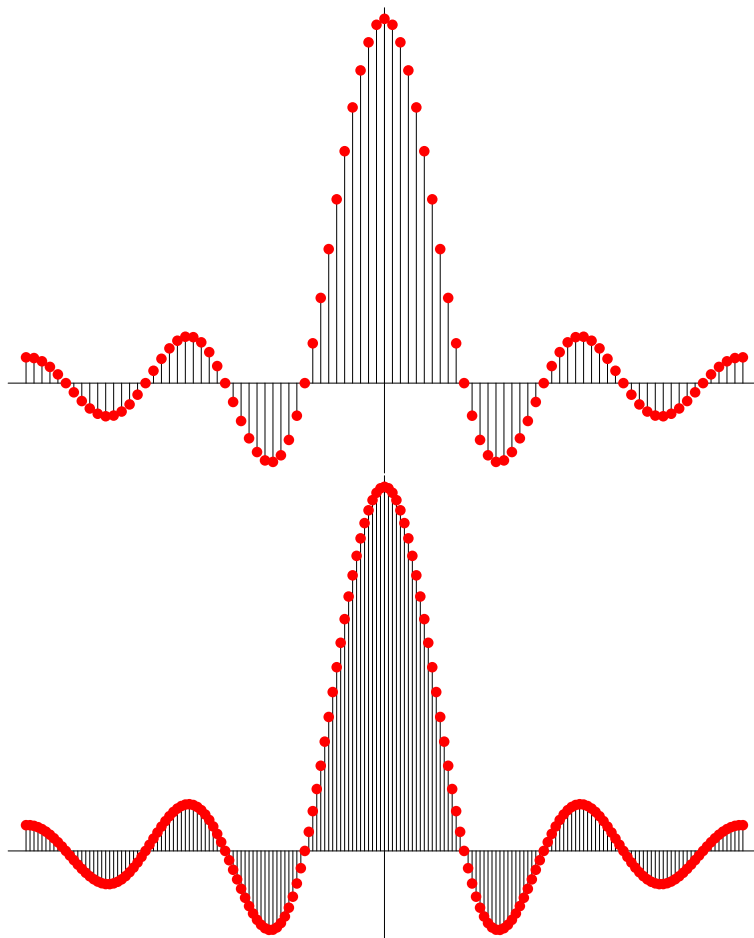
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Es claro que  $\Pi$  no es una función periódica y, por ello, no tiene una serie de Fourier asociada. No obstante, podemos considerar versiones periódicas de  $\Pi$  repitiendo su parte no nula separada regularmente por grandes intervalos en los que la función es cero. Aquí tienes la gráfica de la periodización de  $\Pi$  con período 15.



Como las periodizaciones de  $\Pi$  son funciones pares y reales sus coeficientes de Fourier son reales. Aquí tienes los gráficos de los espectros correspondientes a las periodizaciones de  $\Pi$  con períodos 5, 10 y 20.





Calculemos los coeficientes de Fourier de la periodización de  $\Pi$  con período  $T$ .

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}\left(\frac{n}{T}\right) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi i n t/T} \Pi(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t/T} dt = \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{-2\pi i n/T} e^{-2\pi i n t/T} \right]_{t=-1/2}^{t=1/2} = \frac{1}{2\pi i n} (e^{\pi i n/T} - e^{-\pi i n/T}) = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right)\end{aligned}$$

Deducimos que

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi i n t/T} \Pi(t) dt = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\frac{\pi n}{T}}$$

Haciendo ahora  $T \rightarrow +\infty$  en esta expresión podemos interpretar que la variable discreta  $n/T$  se convierte en una variable continua  $s$  con lo que resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} \Pi(t) dt = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$$

Bien, acabamos de obtener la transformada de Fourier de la función  $\Pi$ . Aquí puedes ver su gráfica.

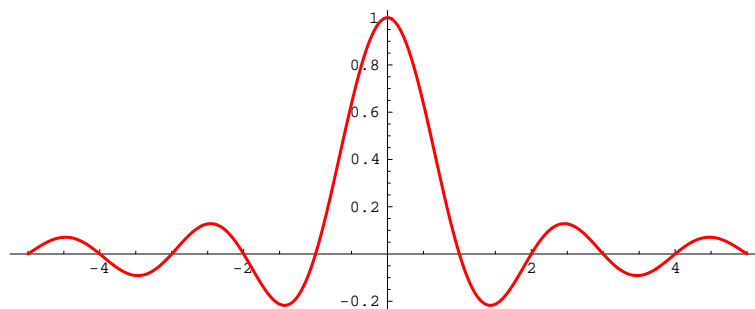


Figura 4.1: La función  $\frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$

**Definición 4.1.** La transformada de Fourier de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es la función  $\hat{f} = \mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$\hat{f}(s) = \mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) dt \quad (s \in \mathbb{R}) \quad (4.1)$$

### Comentarios

- Usaremos las notaciones  $\hat{f}$  y  $\mathcal{F}f$  para representar la transformada de Fourier de la señal  $f$ . A veces conviene escribir  $\mathcal{F}f$  en la forma  $\mathcal{F}(f)$  para indicar claramente que  $\mathcal{F}f$  es la transformada de Fourier de la función  $f$ .
- El parámetro “ $s$ ” en la definición 4.1 se interpreta como frecuencias. La función  $\hat{f}$  se interpreta como la representación de la señal  $f$  en el dominio de la frecuencia.
- La transformada de Fourier convierte una señal,  $f(t)$ , dada en el dominio del tiempo en otra señal,  $\hat{f}(s)$ , en el dominio de la frecuencia.
- Representaremos por  $L^1(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ . Para que la definición 4.1 tenga sentido es condición suficiente que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .
- Para calcular la transformada de Fourier de una función tenemos libertad para modificar como queramos dicha función en un conjunto siempre que ello no afecte al valor de la integral. Por ejemplo, podemos cambiar el valor de la función en cualquier conjunto finito de puntos. Por eso, para calcular la transformada de Fourier de una función no es imprescindible que la función esté definida en todo  $\mathbb{R}$ , es suficiente, por ejemplo, que esté definida en todo  $\mathbb{R}$  excepto en un conjunto finito de puntos.
- No hay acuerdo unánime sobre la definición de la transformada de Fourier. Algunos detalles sobre los que los distintos autores no se ponen de acuerdo son: el signo en la exponencial, multiplicar la integral por  $1/2\pi$  o por  $1/\sqrt{2\pi}$ , incluir o no incluir  $2\pi$  en el exponente de la exponencial.

### 4.2.1. La transformada inversa de Fourier

La transformada de Fourier permite analizar una señal  $f$  por sus componentes de frecuencia. El conjunto  $\Omega(f) = \{s \in \mathbb{R} : \hat{f}(s) \neq 0\}$  se llama espectro continuo de la señal  $f$ . Cada frecuencia  $s \in \Omega(f)$

tiene como amplitud  $|\widehat{f}(s)|$  y su fase es  $\arg \widehat{f}(s)$ . La señal  $f$  queda caracterizada completamente por  $\widehat{f}$  en el sentido de que el conocimiento de  $\widehat{f}$  permite recuperar  $f$ . Veamos de manera informal cómo puede hacerse esto.

Consideremos que  $f$  es una señal que se anula fuera de un intervalo acotado lo que permite considerar su periodización para valores grandes del período  $T$  de manera que  $f(t) = 0$  para  $|t| > T/2$ . Desarrollemos dicha periodización en serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}$$

Teniendo en cuenta que  $f(t) = 0$  para  $|t| > T/2$ , los coeficientes de Fourier de  $f$  vienen dados por:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt = \frac{1}{T} \widehat{f}\left(\frac{n}{T}\right)$$

Pongamos  $s_n = n/T$ . Sustituyendo el valor de  $c_n$  en la serie obtenemos:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s_n) e^{2\pi i s_n t}$$

Como los puntos  $s_n$  están igualmente espaciados una distancia  $1/T$ , podemos interpretar esta suma como una suma de Riemann de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{2\pi i s t} ds$$

Cuando  $T \rightarrow +\infty$  podemos esperar que se tenga la igualdad:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{2\pi i s t} ds$$

Llegamos así a la siguiente definición.

**Definición 4.2.** La transformada inversa de Fourier de una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es la función  $\check{g} = \mathcal{F}^{-1}g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$\check{g}(t) = \mathcal{F}^{-1}g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} g(s) ds \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (4.2)$$

Tenemos también el siguiente teorema.

**Teorema 4.3** (de inversión de Fourier). Si  $f$  es una señal continua tal que  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y también  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , se verifica que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} \widehat{f}(s) ds \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (4.3)$$

La igualdad 4.1 se llama la *ecuación de análisis* y la igualdad 4.3 se llama *ecuación de síntesis*. Observa que la ecuación de síntesis permite reconstruir una señal no periódica a través de sus componentes de frecuencia y puede verse como una “versión continua” de la representación de una señal periódica por su serie de Fourier.



Explícitamente, la igualdad 4.3 afirma que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s u} f(u) du \right] e^{2\pi i s t} ds \quad (4.4)$$

Evidentemente, es más cómodo escribir esta igualdad en la forma:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) \quad (4.5)$$

Es notable la simetría que hay entre la transformada de Fourier y su inversa: solamente se diferencian por un cambio de signo en la exponencial. De hecho, se verifica también la igualdad:

$$g = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g) \quad (4.6)$$

La transformada de Fourier es una operación que regulariza y suaviza las funciones. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

**Teorema 4.4.** *La transformada de Fourier de una señal integrable,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , es una función continua, acotada y  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}f(s) = 0$ .*

#### Observación

Hay versiones más generales del teorema de inversión en las que se permite que la función  $f$  tenga algunas discontinuidades finitas de salto. Cuando esto ocurre, la función  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)$  en dichas discontinuidades tiene un valor igual a la semisuma de los correspondientes límites laterales. Por ello, aunque para calcular la transformada de Fourier de una función tenemos libertad para modificar dicha función en algunos puntos, cuando queremos recuperar una función que tiene discontinuidades de salto a partir de su transformada de Fourier, es imprescindible regularizar dicha función definiéndola en dichas discontinuidades igual a la semisuma de los límites laterales correspondientes.

## 4.2.2. Propiedades de la transformada de Fourier

Algunas de las propiedades que siguen son generales, es decir, se satisfacen solamente con la hipótesis de que las funciones que en ellas intervienen estén en  $L^1(\mathbb{R})$  para que sus correspondientes transformadas estén definidas. Otras propiedades requieren hipótesis adicionales en las que no vamos a entrar. Te aconsejo que aprendas estas propiedades como un formalismo útil para calcular transformadas de Fourier. Para ello tendrás que memorizar las transformadas de Fourier de unas pocas funciones básicas y a partir de ellas aplicando las propiedades que siguen, *sin necesidad de calcular integrales*, podrás deducir las transformadas de Fourier de muchísimas funciones más.

**Linealidad.** La transformada de Fourier es un operador lineal. Esto quiere decir que si  $\alpha$  y  $\beta$  son números y  $f, g$  señales, se verifica la igualdad:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g$$

#### Propiedades de simetría

De las definiciones dadas para la transformada de Fourier y su inversa:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \sen(2\pi s t) f(t) dt \\ \mathcal{F}^{-1}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \sen(2\pi s t) f(t) dt \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que el coseno es par y el seno impar, se deducen las siguientes propiedades de simetría.

1.  $\mathcal{F}f(s) = \mathcal{F}^{-1}f(-s)$ .
2. **Regla de inversión.**  $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(s) = f(-s)$ .
3. Si la función  $f$  es par entonces se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(2\pi st)f(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \text{sen}(2\pi st)f(t) dt = 0$$

por lo que

$$\mathcal{F}f(s) = \mathcal{F}^{-1}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st)f(t) dt = 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi st)f(t) dt$$

y la transformada de Fourier de  $f$  coincide con su transformada inversa y es una función par.

4. Análogamente, si  $f$  es impar su transformada de Fourier también es impar y:

$$\mathcal{F}f(s) = -\mathcal{F}^{-1}f(s) = i \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(2\pi st)f(t) dt = 2i \int_0^{\infty} \text{sen}(2\pi st)f(t) dt$$

5. Si  $f$  es real entonces  $\mathcal{F}f(-s) = \overline{\mathcal{F}f(s)}$ .
6. Si  $f$  es real y par su transformada de Fourier también es real y par.
7. Si  $f$  es real e impar su transformada de Fourier es impar y toma valores imaginarios puros.

Las siguientes dos propiedades se obtienen fácilmente con un sencillo cambio de variable.

**Traslación en el tiempo.** Dado un número  $a \in \mathbb{R}$  y una señal  $f$ , definimos la señal  $\tau_a f$  por:

$$\tau_a f(t) = f(t-a)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\tau_a f}(s) = e^{-2\pi i a s} \widehat{f}(s)$$

Es decir, una traslación en el tiempo produce un cambio de fase en la transformada.

**Cambio de escala o dilatación.** Dado un número  $a \in \mathbb{R}^*$  y una señal  $f$ , definimos la señal  $\sigma_a f$  por:

$$\sigma_a f(t) = f(at)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\sigma_a f}(s) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

Es decir una dilatación ( $a > 1$ ) o una compresión ( $a < 1$ ) en el dominio del tiempo se corresponde con una compresión o dilatación en el dominio de la frecuencia más un cambio de escala.

**Propiedad de modulación.** Dado  $a \in \mathbb{R}$ , y una señal  $f$ , se verifica que la transformada de Fourier de la función  $g(t) = e^{2\pi i a t} f(t)$  es la función  $\tau_a \widehat{f}$ .

Esta propiedad es inmediata pues:

$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) e^{2\pi i a t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (s-a)t} f(t) dt = \widehat{f}(s-a)$$

La aplicación de la transformada de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales se basa en la siguiente propiedad.

#### Propiedad de derivación

$$\mathcal{F}(f')(s) = 2\pi i s \mathcal{F}f(s) \quad \mathcal{F}(-2i\pi t f(t))(s) = (\mathcal{F}f)'(s)$$

#### Igualdad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(s)\overline{\mathcal{F}g(s)} ds$$

En particular

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(s)|^2 ds$$

### 4.2.3. Ejemplos de transformadas de Fourier

#### La función pulso rectangular

Es la función dada por

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Para calcular su transformada de Fourier no es preciso definir dicha función en los puntos  $\pm \frac{1}{2}$  pero, para recuperar esta función por medio de una transformada de Fourier es necesario definir su valor en dichos puntos igual a  $1/2$ . Como se trata de una función par su transformada de Fourier viene dada por:

$$\widehat{\Pi}(s) = 2 \int_0^{1/2} \Pi(t) \cos(2\pi s t) dt = 2 \int_0^{1/2} \cos(2\pi s t) dt = 2 \left[ \frac{\text{sen}(2\pi s t)}{2\pi s} \right]_{t=0}^{t=1/2} = \frac{\text{sen}(\pi s)}{\pi s}$$

#### La función “cardinal seno” o “función de muestreo”

Es la función dada para todo  $t \in \mathbb{R}$  por

$$\text{senc}(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$$

por supuesto,  $\text{senc}(0) = 1$ . Su gráfica puedes verla en la figura 4.1.

La transformada de Fourier de esta función se deduce fácilmente de que, según acabamos de ver,  $\widehat{\Pi} = \text{senc}$  y, como la función  $\Pi$  es par, obtenemos

$$\mathcal{F}\text{senc} = \mathcal{F}(\mathcal{F}\Pi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\Pi) = \Pi.$$

#### Decaimiento exponencial truncado

Es la función dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

Podemos calcular su transformada de Fourier directamente:

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{(-2\pi i s - 1)t} dt = \left[ -\frac{e^{-t} e^{-2\pi i s t}}{1 + 2\pi i s} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{1 + 2\pi i s}$$

**La función de Laplace**

Es la función dada por

$$g(t) = e^{-|t|}$$

Para calcular su transformada de Fourier observamos que  $g(t) = f(t) + f(-t)$  donde  $f$  es el decaimiento exponencial truncado. Deducimos que:

$$\widehat{g}(s) = \widehat{f}(s) + \widehat{f}(-s) = \frac{1}{1 + 2\pi i s} + \frac{1}{1 - 2\pi i s} = \frac{2}{1 + 4\pi^2 s^2}$$

**La función gaussiana unidad**

Es la función definida por:

$$f(t) = e^{-\pi t^2}$$

Esta función tiene la notable propiedad de ser invariante para la transformada de Fourier: su transformada de Fourier es ella misma. Para calcularla podemos usar el hecho de que  $f'(t) = -2\pi t f(t)$  y tomar transformadas de Fourier en ambos lados de esta igualdad con lo que, en virtud de la propiedad de derivación, resulta:

$$2\pi i s \widehat{f}(s) = \frac{1}{i} \widehat{f}'(s)$$

Es decir

$$\widehat{f}'(s) + 2\pi s \widehat{f}(s) = 0$$

Deducimos de aquí que la función  $\widehat{f}(s)e^{\pi s^2}$  tiene derivada nula por lo que

$$\widehat{f}(s) = \widehat{f}(0)e^{-\pi s^2} = e^{-\pi s^2} = f(s)$$

Donde hemos usado el resultado bien conocido  $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1$ .

**4.2.4. Ejercicios**

- Supongamos que reproduces en un magnetofón una cinta a velocidad doble de la velocidad a que se ha grabado. Interpreta lo que ocurre mediante la propiedad de cambio de escala o dilatación de la transformada de Fourier.
- Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, calcula, sin hacer integrales, la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

$$a) \Pi_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a/2 \\ 0, & |t| \geq a/2 \end{cases}$$

$$b) f(t) = \Pi((t-b)/c) \text{ donde } \Pi \text{ es la función "pulso rectangular".}$$

$$c) f(t) \text{ es una función escalonada } f(t) = \sum_{k=1}^m a_k \Pi\left(\frac{x-b_n}{c_n}\right).$$

$$d) f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & x < 0 \text{ o } x > 2 \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & |t| < a/2 \\ 0, & |t| \geq a/2 \end{cases}$$

$$f) f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$g) f(t) = \cos(2\pi\beta t)e^{-\pi(x/\alpha)^2}$$

$$h) f(t) = \frac{1}{1+2\pi it}$$

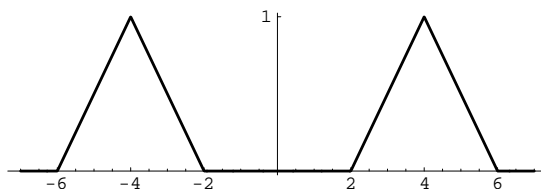
$$i) f(t) = 2te^{-\pi t^2}$$

3. Calcula mediante integración la transformada de Fourier de la “función triángulo” definida por:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

4. a) Supuesto conocida la transformada de Fourier de una señal  $f$ , calcula la transformada de Fourier de la señal  $g(t) = f(t)\cos(2\pi at)$ .

b) Calcula la señal (en el dominio del tiempo) cuya transformada de Fourier tiene la gráfica siguiente.

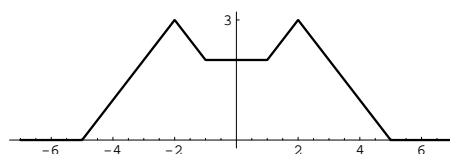
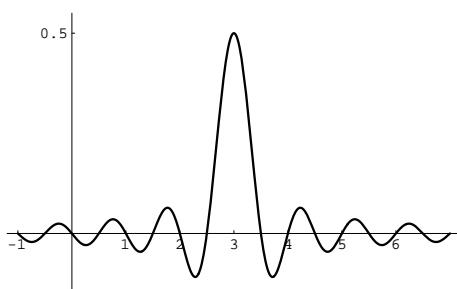


5. Supongamos que la señal  $f(t)$  es nula fuera del intervalo  $[-1/2, 1/2]$ . Sea

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-n)$$

la periodización de  $f$  con período 1. Estudia la relación entre los coeficientes de Fourier de  $g$  y la transformada de Fourier de  $f$ .

6. Calcula las transformadas de Fourier de las funciones cuyas gráficas son las siguientes.



### 4.3. Convolución y transformada de Fourier

Procesar una señal consiste en modificar sus componentes de frecuencia. Si la señal es analógica y su transformada de Fourier es

$$\hat{f}(s) = \left| \hat{f}(s) \right| \text{Arg} \hat{f}(s)$$

podemos estar interesados en modificar las amplitud  $|\widehat{f}(s)|$ , o las fases  $\text{Arg}\widehat{f}(s)$  correspondientes a cada frecuencia  $s$ , para obtener una nueva señal que podemos representar en la forma:

$$\rho(s) |\widehat{f}(s)| e^{i s \text{Arg}\widehat{f}(s)}$$

donde la función  $\rho(s) \geq 0$  da cuenta del cambio producido en la amplitud, y la función  $e^{i s}$  da cuenta del cambio producido en la fase. Esto nos lleva a considerar la función  $\rho(s) e^{i s}$  y a concluir que  $\widehat{f}(s) \rho(s) e^{i s}$  es la transformación más general que podemos hacer sobre nuestra señal modificando amplitudes y fases. Es natural interpretar la función  $\rho(s) e^{i s}$  como la transformada de Fourier de una señal analógica  $g(t)$ , por tanto  $g(t) = \mathcal{F}^{-1}(\rho(s) e^{i s})(t)$ , y a preguntarnos qué operación debemos hacer con las señales  $f(t)$  y  $g(t)$  para obtener una nueva señal cuya transformada de Fourier sea precisamente  $\widehat{g}(s) \widehat{f}(s)$ . Está claro que dicha operación será el modelo más general del procesamiento de señales. Calculemos  $\widehat{g}(s) \widehat{f}(s)$ .

$$\begin{aligned} \widehat{g}(s) \widehat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i s t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i s x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i s t} e^{-2\pi i s x} dt \right] f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i s(t+x)} dt \right] f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(u-x) f(x) e^{-2\pi i s u} du \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x) e^{-2\pi i s u} dx \right] du = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x) dx \right] e^{-2\pi i s u} du \end{aligned}$$

Pero esto que hemos obtenido es justamente la transformada de Fourier de la función

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x) dx$$

**Definición 4.5.** La convolución de dos señales  $f$  y  $g$  es la función

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) f(x) dx \quad t \in \mathbb{R}$$

dicha función se representará por  $f * g$  y se llama la convolución de  $f$  y  $g$ .

Deducimos de lo anterior el siguiente resultado que expresa que la convolución en el dominio del tiempo se corresponde con la multiplicación en el dominio de la frecuencia.

**Teorema 4.6** (de convolución).  $\mathcal{F}(f * g)(s) = \mathcal{F}f(s) \mathcal{F}g(s)$ .

Teniendo en cuenta la simetría entre la transformada de Fourier y su inversa, también se verifica la igualdad:

$$\mathcal{F}^{-1}(f * g) = (\mathcal{F}^{-1}f)(\mathcal{F}^{-1}g)$$

y, lo que es más interesante:

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$$

es decir, la multiplicación en el dominio del tiempo se corresponde con la convolución en el dominio de la frecuencia.

### 4.3.1. ¿Qué es la convolución?

Es la segunda vez que aparece en este curso la operación de convolución. En la lección anterior vimos la convolución cíclica de dos señales periódicas discretas y ahora surge la convolución de dos

señales continuas no periódicas. Entre ambas hay ciertas analogías y ambas se comportan igual respecto a las respectivas transformadas de Fourier discreta o continua. No son estos los únicos tipos de convolución que se consideran. La convolución de funciones es una herramienta muy versátil que tiene distintos significados en distintos campos y no admite una interpretación única. Se trata de una operación que no es fácilmente visualizable y que tiene cierta complicación: para calcular el valor de la convolución de dos funciones en un solo punto hay que usar todos los valores de ambas funciones y realizar una integración. En la figura 4.2 tienes un intento de visualización del cálculo de la convolución de la función pulso rectangular,  $\Pi$ , consigo misma en el punto  $x = 0.75$ .

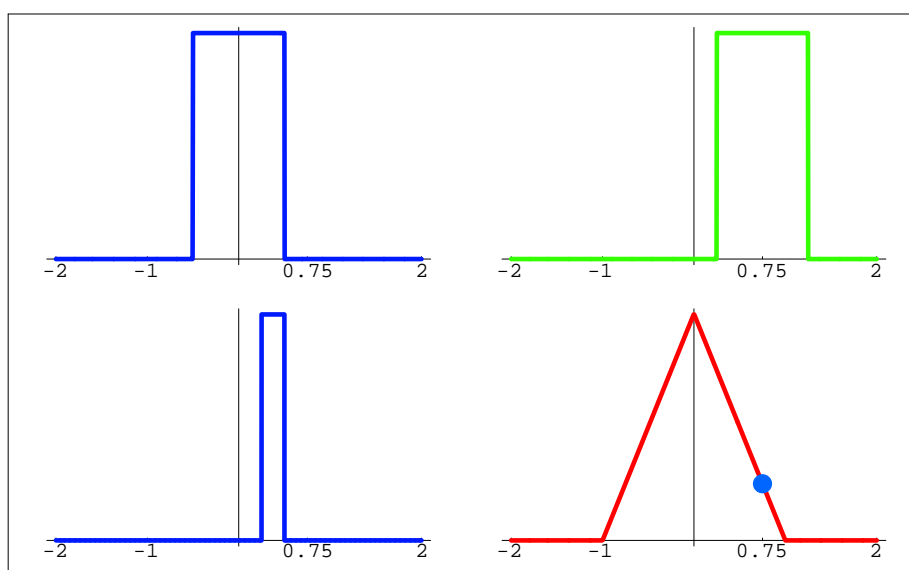


Figura 4.2: Gráficas de  $\Pi(x)$  (azul),  $\Pi(0.75 - x)$  (verde),  $\Pi(x)\Pi(0.75 - x)$  (azul),  $\Pi * \Pi(x)$  (rojo). El punto azul es el valor  $\Pi * \Pi(0.75)$

Observa que aunque la función pulso rectangular es discontinua en los puntos  $\pm 1/2$  su convolución es la función triángulo que es continua. Esta es una propiedad importante de la convolución: *la convolución de dos funciones es una función al menos tan buena como la mejor de ambas.*

Podemos ver la convolución como una operación para promediar y suavizar una función por medio de otra. Consideremos que  $g$  es una función positiva, concentrada cerca de 0, con área total igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$$

Por ejemplo,  $g$  podría ser una campana de Gauss alta y estrecha centrada en 0. En tal caso, la función  $x \mapsto g(t - x)$  está concentrada cerca de  $t$  y sigue teniendo área total 1. La integral

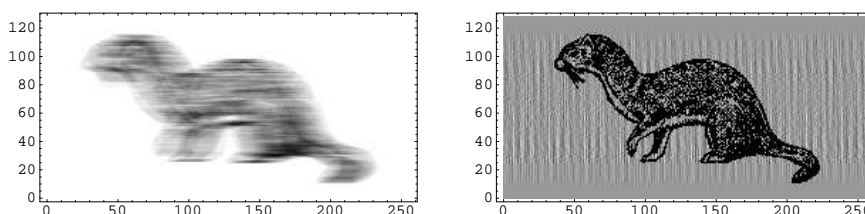
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - x)f(x) dx$$

puede interpretarse como un *promedio* de los valores de  $f(x)$  cerca de  $x = t$  *ponderado* por los valores de  $x \mapsto g(t - x)$ . Si nos movemos a otro punto  $t'$  cercano a  $t$  y calculamos el valor,  $f * g(t')$ , de la convolución en  $t'$ , repetiremos la operación anterior, es decir, calcularemos una media ponderada de los valores de  $f$  cerca de  $t'$  y dicha media incluirá, si  $t'$  está cerca de  $t$ , valores de  $f$  que ya se usaron en el anterior promedio. Por ello, cabe esperar que los valores de la convolución  $f * g(t)$  y  $f * g(t')$  estén más próximos que  $f(t)$  y  $f(t')$ . Es decir,  $f * g(t)$  *suaviza*  $f$ .

Por otra parte, este proceso de *promediar* y *regularizar* es lo que hacen los instrumentos de medida. Por ejemplo, cuando usamos un termómetro para medir la temperatura en un punto del espacio lo que estamos midiendo realmente es un promedio. Eso se debe a que el termómetro no mide la temperatura solamente en un punto, sino que la información que proporciona es realmente un promedio de las temperaturas en una pequeña región del espacio. La manera de realizar este promedio depende de las características físicas del instrumento y dicho promedio se realiza de igual forma en cualquier punto donde situemos el termómetro. De esta forma se entiende que los datos que proporciona el termómetro son el resultado de una convolución de la función temperatura con otra función, que podemos interpretar como una función de densidad de probabilidad - una gaussiana -, que es característica del instrumento concreto que usemos. Cuanto más preciso sea el termómetro más alta y estrecha será esta gaussiana y más “concentrada” será la lectura que se realice.

Las razones anteriores explican por qué la convolución aparece en contextos tan diversos. En algunas aplicaciones como, por ejemplo, en restauración de imágenes, lo que se quiere es invertir el proceso antes descrito, es decir, se dispone de una señal  $f$  que está “contaminada” por su convolución con otra señal  $g$  de manera que lo que nosotros recibimos es la señal  $h = f * g$ . La señal  $g$  se interpreta como un “ruido” y pueden hacerse hipótesis sobre su naturaleza para intentar separar la señal  $f$  del ruido  $g$  que la “contamina”. En estos casos lo que se quiere es invertir un proceso de convolución.

Aquí puedes ver dos fotografías de una comadreja. La primera de ellas está “corrida” debido a un pequeño movimiento de la cámara que tomó la foto. Esto es una convolución. La segunda es el resultado de someter los datos de la foto a una de-convolución.



### 4.3.2. Propiedades de la convolución

La operación de convolución se comporta de forma parecida a la multiplicación. Concretamente, se verifican las siguientes propiedades:

- **Conmutativa.**  $f * g = g * f$ .
- **Asociativa.**  $(f * g) * h = f * (g * h)$ .
- **Distributiva.**  $(f + g) * h = f * h + g * h$ .

La última propiedad es inmediata y las otras dos son consecuencia fácil del teorema de convolución.

Llegados aquí es natural preguntarse si hay alguna función que sea la unidad para la convolución, es decir, una función  $\delta$  que verifique que  $f * \delta = f$  para toda función integrable  $f$ . Explícitamente, una tal función habría de verificar la igualdad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x)dx = f(t)$$

En particular, tomando  $f(x) = \Pi(x/2\varepsilon)$ , se sigue que debería ser:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1$$



para todo  $\varepsilon > 0$ . Está claro que no hay ninguna función en el sentido usual que verifique estas condiciones. Volveremos sobre esto más adelante.

### 4.3.3. Convolución y Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI)

Un *sistema* es cualquier proceso que transforma señales de entrada en señales de salida. En términos matemáticos, podemos representar un sistema por un operador  $L$  que al actuar sobre una señal  $x$  produce una señal  $y$ , lo que se escribe  $y = Lx$ .

Como puedes ver el concepto de “sistema” es muy general. Ejemplos de sistema son:

- Los instrumentos que usamos para comunicarnos: teléfonos, radios, televisores, cámaras fotográficas,... Todos ellos aceptan cierto tipo de señales de entrada y producen nuevas señales de salida.
- Todo proceso matemático en el que una función se transforme en otra. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales, la convolución con una función dada.

Se distinguen distintos tipos de sistemas según el tipo de señal de entrada y de salida. Los más interesantes para nosotros son:

- *Sistemas analógicos* los que transforman señales analógicas en señales analógicas.
- *Sistemas discretos* los que transforman señales discretas en señales discretas.

Para que un concepto tan general sea realmente útil hay que suponer que se cumplen ciertas propiedades.

### 4.3.4. Propiedades de los sistemas

- **Linealidad.** Se dice que un sistema  $L$  es lineal cuando es aditivo y homogéneo, es decir, cualesquiera sean las señales de entrada  $x$  e  $y$  y los números  $\alpha, \beta$  se verifica que:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$$

Esta propiedad suele llamarse *principio de superposición*.

- **Invariancia en el tiempo.** Se dice que un sistema  $L$  es invariante en el tiempo si un adelanto o retraso de la señal de entrada produce el mismo efecto en la señal de salida.

Representando por  $\tau_a x$  la señal  $(\tau_a x)(t) = x(t - a)$ , la invariancia en el tiempo se expresa por la igualdad:

$$L(\tau_a x) = \tau_a Lx$$

De manera más explícita, si es  $y(t) = (Lx)(t)$  la señal transformada de  $x$  y es  $z(t) = (L(\tau_a x))(t)$  la señal transformada de  $\tau_a x$ , se verifica que  $z(t) = y(t - a)$ .

- **Estabilidad.** Se dice que un sistema  $L$  es estable cuando es lineal y *continuo*. Matemáticamente esto se expresa por la igualdad (que en cada caso concreto debe dotarse de significado matemático preciso):

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Lx_n$$

Un sistema LTI es un sistema lineal invariante en el tiempo <sup>1</sup>. Un **filtro** es un sistema LTI que además es estable.

Nuestro propósito es ver que los filtros lo que hacen es una convolución de la señal de entrada con una función que se llama la *respuesta impulso* del filtro. Consideremos primero filtros discretos y después filtros analógicos.

### 4.3.5. Respuesta impulso de un filtro discreto

Representaremos las señales discretas por funciones definidas en  $\mathbb{Z}$  con valores en  $\mathbb{C}$ . Dadas dos señales  $u, v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  se define su convolución como la señal  $z$  dada por

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)v(n-k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

supuesto, claro está, que dicha serie converge para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . La señal  $z$  se llama la *convolución* de las señales  $u$  y  $v$  y se representa por  $u * v$ . Esta convolución de sucesiones tiene análogas propiedades a la convolución de funciones por medio de una integral.

La señal  $\delta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\delta(n) = 0$  para  $n \neq 0$  y  $\delta(0) = 1$  se llama señal *impulso unidad* o señal *delta de Dirac*<sup>2</sup> *discreta*. Dada una señal discreta  $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$  se verifica la igualdad:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

pues dicha suma consta realmente de un único sumando no nulo que se obtiene para  $k = n$ . Representaremos por  $\delta_k$  la función  $\delta_k(n) = \delta(n-k)$ , es decir, con la notación ya usada varias veces,  $\delta_k = \tau_k \delta$ . La igualdad anterior nos dice que la sucesión de funciones  $x_N = \sum_{k=-N}^N x(k)\delta_k$  converge *puntualmente* a la función  $x$ .

Supongamos ahora que  $L : X \rightarrow Y$  un filtro donde  $X$  e  $Y$  son espacios vectoriales normados de sucesiones y que se verifica que  $x_N$  converge a  $x$  en la norma de  $X$  (es decir,  $\|x_N - x\| \rightarrow 0$ ). Entonces, la linealidad y continuidad de  $L$  permite escribir:

$$Lx = L \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N x(k)\delta_k \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N x(k)L\delta_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)L\delta_k$$

Como  $L$  es invariante en el tiempo se verifica que  $L\delta_k = L(\tau_k \delta) = \tau_k(L\delta)$ . Poniendo  $y = Lx$ , y llamando  $h = L\delta$ , la igualdad anterior nos dice que para todo  $n \in \mathbb{Z}$  se verifica que:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(\tau_k h)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Es decir,  $y = x * h$ . En consecuencia, la función  $h$ , que es la respuesta del filtro a la función impulso unidad, caracteriza al filtro. Dicha función se llama la función *respuesta impulso* del filtro.

<sup>1</sup>También puede interpretarse LTI como "sistema lineal invariante por traslaciones" pues no siempre la variable es el tiempo y lo propio de un sistema LTI, además de la linealidad, es la invariancia por traslaciones de la variable ya sea esta continua o discreta.

<sup>2</sup>P. Dirac (1902-1984). Físico inglés que propuso la existencia de partículas con energías negativas - antipartículas - asociadas al electrón que fueron descubiertas posteriormente por Carl Anderson en 1932 y se llaman positrones. Dirac desarrolló también una versión tensorial de la ecuación de Schrödinger, conocida como la ecuación de Dirac, que es correcta desde el punto de vista de la Teoría de la Relatividad. Recibió el premio Nobel de Física en 1933 por sus trabajos sobre antipartículas y mecánica de ondas. Se le considera precursor de la Teoría de Distribuciones desarrollada posteriormente por L. Schwartz.

### 4.3.6. Respuesta impulso de un filtro analógico

Admitamos que existe una “función”  $\delta$  que es la unidad para la convolución de funciones. En tal caso podremos escribir una señal  $x$  en la forma:

$$x(t) = (x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(t-s) ds$$

Usando la continuidad y linealidad del filtro  $L$  y poniendo  $L(\delta) = h$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} y(t) &= (Lx)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)L(\tau_s\delta)(t) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s)(\tau_s L\delta)(t) ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s) ds = (x * h)(t) \end{aligned}$$

Resulta así que el filtro es un filtro de convolución. La función  $h$ , que es la respuesta del filtro a la función impulso unidad,  $\delta$ , caracteriza al filtro. Dicha función se llama la función *respuesta impulso* del filtro. La transformada de Fourier de la respuesta impulso,  $H(s) = \mathcal{F}\delta(s)$  se llama la *función de transferencia* del filtro. La acción del filtro sobre una señal  $x$  viene dada en el dominio de la frecuencia por el producto  $\hat{x}(s)H(s)$ .

Este es un buen momento para explicar el papel especial que desempeñan las exponenciales complejas. Consideremos que  $a$  es un número real y sea  $e_a(t) = e^{2\pi i a t}$ . La respuesta del filtro a la señal  $e_a$  viene dada por

$$\begin{aligned} L(e_a)(t) &= (e_a * h)(t) = (h * e_a)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e_a(t-s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{2\pi i a(t-s)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-2\pi i a s} e^{2\pi i a t} ds = e^{2\pi i a t} \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-2\pi i a s} ds \\ &= H(a)e_a(t) \end{aligned}$$

la igualdad obtenida  $L(e_a)(t) = H(a)e_a(t)$  que puede expresarse en términos de funciones como  $L(e_a) = H(a)e_a$  nos dice que  $e_a$  es un vector propio de  $L$  con valor propio asociado igual a  $H(a)$ . Es decir, *las exponenciales complejas son vectores propios de los filtros*.

#### Se acerca la hora de la verdad

Ni que decir tiene que muchas de las anteriores afirmaciones carecen del más elemental rigor matemático... lo que no quiere decir que sean falsa, de hecho son esencialmente ciertas. Para dar significado matemático a la “función”  $\delta$  hay que hablar, aunque solo sea un poquito, de la teoría de distribuciones. Una teoría que está considerada como uno de los mayores logros de las matemáticas del siglo XX. No olvides que en estas notas estamos dejando deliberadamente de lado los tecnicismos matemáticos, esos que solamente interesan a quienes estamos aquejados de esa extraña enfermedad que se llama *Matemáticas*, pero a veces algunos tecnicismos matemáticos son necesarios incluso para los ingenieros, aunque solamente sea para proporcionar seguridad y confianza en los cálculos. Tendremos que volver sobre esto.

#### Así trabaja la convolución

Vamos a considerar algunos ejemplos de sistemas para comprobar cómo la convolución está presente en todos ellos.

### 4.3.7. Filtro de paso-bajo

Un filtro ideal de paso-bajo es aquél que elimina todas las frecuencias por encima de una frecuencia dada  $\nu_c$  y deja pasar inalteradas las frecuencias por debajo de  $\nu_c$ . Si escribimos la operación del filtro en la forma:

$$y(t) = (x * h)(t), \quad \widehat{y}(s) = \widehat{x}(s)H(s)$$

entonces la función de transferencia viene dada por:

$$H(s) = \begin{cases} 1, & |s| < \nu_c \\ 0, & |s| \geq \nu_c \end{cases}$$

Es claro que multiplicar  $\widehat{x}(s)$  por  $H(s)$  deja igual el espectro de  $x$  para  $|s| < \nu_c$  y elimina las demás frecuencias. Observa que  $H(s) = \Pi\left(\frac{s}{2\nu_c}\right)$  donde  $\Pi$  es la función pulso rectangular.

En el dominio del tiempo, la respuesta impulso del filtro se obtiene calculando la transformada inversa de Fourier de  $H(s)$ , que viene dada por:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}H(t) = 2\nu_c \text{senc}(2\nu_c t)$$

### 4.3.8. Filtro de paso-banda

Con frecuencia lo que se desea es filtrar una señal dejando pasar sin alterar un determinado intervalo de frecuencias y eliminando las demás. Este es el filtro ideal de paso-banda. Su función de transferencia,  $B(s)$ , puede obtenerse de la función de transferencia,  $H(s)$ , del filtro de paso-bajo. Centrando la banda de frecuencias que se quiere dejar pasar en  $\nu_0$  con un ancho de banda  $\nu_c$  tenemos que (Ver figura 4.3):

$$B(s) = \begin{cases} 1, & |s - \nu_0| < \nu_c \text{ o } |s + \nu_0| < \nu_c \\ 0, & |s - \nu_0| \geq \nu_c \text{ y } |s + \nu_0| \geq \nu_c \end{cases} = H(s - \nu_0) + H(s + \nu_0)$$

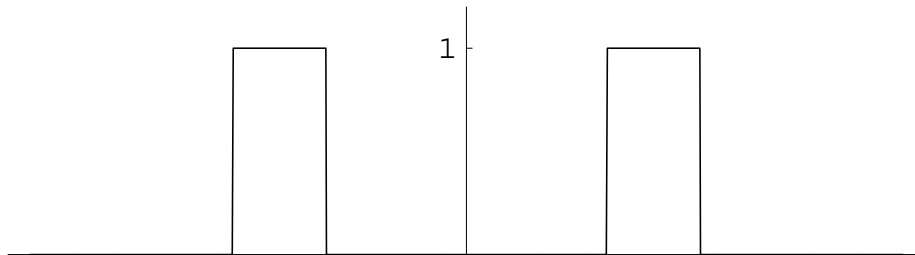


Figura 4.3: Filtro de paso-banda

Podemos obtener fácilmente la función respuesta impulso, que viene dada por:

$$b(t) = h(t)e^{2\pi i \nu_0 t} + h(t)e^{-2\pi i \nu_0 t} = 4\nu_c \cos(2\pi \nu_0 t) \text{senc}(2\nu_c t)$$

En la figura 4.4 puedes ver su gráfica para  $\nu_0 = 6$  y  $\nu_c = 2$ .

### 4.3.9. Filtro de paso-alto

En este filtro se eliminan todas las frecuencias por debajo de una frecuencia de corte  $\nu_c$  y se dejan pasar inalteradas las frecuencias por arriba de  $\nu_c$ . Este tipo de filtros es frecuente en tratamiento de

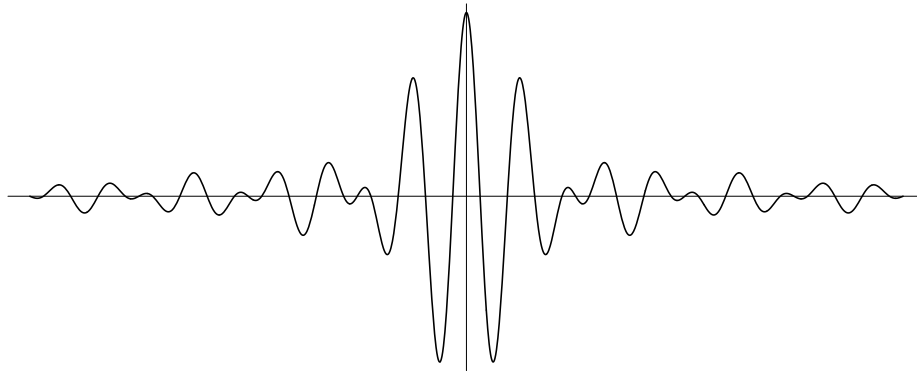


Figura 4.4: Respuesta-impulso del filtro de paso-banda

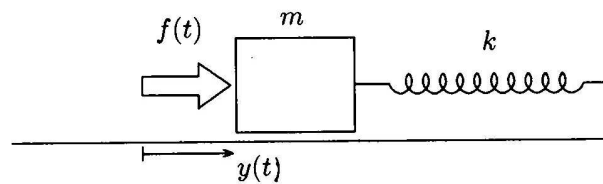
imágenes donde altas frecuencias espaciales están asociadas perfiles nítidos mientras que las bajas producen un efecto borroso. La función de transferencia de este filtro viene dada por  $1 - H(s)$  donde  $H(s)$  es la función de transferencia del filtro de paso-bajo. Por tanto, la función respuesta impulso es  $\delta(t) - 2\nu_c \text{senc}(2\nu_c t)$ .

### 4.3.10. Una ecuación diferencial ordinaria

Consideremos la ecuación diferencial

$$my''(t) + ky(t) = f(t)$$

que podemos interpretar como la ecuación de un sistema material formado por un resorte, con constante de recuperación  $k$ , que sujeta una masa  $m$  que puede deslizar sobre un plano sin fricción sometida a una fuerza  $f$ . La señal de entrada es  $f$  y la señal de salida del sistema es la función  $y(t)$  solución de la ecuación diferencial. Se trata, evidentemente, de un sistema LTI.



Tomando transformadas de Fourier en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$m(2\pi is)^2 \hat{y}(s) + k\hat{y}(s) = \hat{f}(s)$$

de donde

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{k - 4m\pi^2 s^2} \hat{f}(s)$$

La función  $1/(k - 4m\pi^2 s^2)$  recuerda a la transformada de Fourier de  $e^{-|t|}$ . Ajustando los parámetros a la vista de la propiedad de cambio de escala, obtenemos que dicha función es la transformada de Fourier de la función

$$g(t) = \frac{i}{2\sqrt{km}} e^{-i\sqrt{k/m}|t|}$$

Por tanto  $\mathcal{F}y = \mathcal{F}g\mathcal{F}f$  y, por el teorema de convolución, se sigue que:

$$y(t) = g * f(t) = \frac{i}{2\sqrt{km}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\sqrt{k/m}|t-u|} du$$

Este ejemplo puede sernos útil para motivar la función  $\delta$  desde un punto de vista físico. Consideremos para ello que sometemos al sistema a un impulso casi instantáneo de duración  $\varepsilon > 0$  y magnitud constante  $f_\varepsilon(t) = 1/\varepsilon$ , de forma que el momento lineal de dicha fuerza es:

$$\int_0^\varepsilon f_\varepsilon(t) dt = 1$$

En este caso tenemos que la ecuación diferencial se convierte en:

$$my''(t) + ky(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < t \text{ o } t < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

cuya solución viene dada por:

$$y(t) = \frac{i}{2\sqrt{km}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(u) e^{-i\sqrt{k/m}|t-u|} du = \frac{i}{2\sqrt{km}} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\sqrt{k/m}|t-u|} du$$

El cálculo de esta integral depende de que  $t$  sea mayor o menor que  $\varepsilon$ . Poniendo  $\omega = \sqrt{k/m}$ , obtenemos:

$$\frac{i}{2\sqrt{km}} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\omega|t-u|} du = \frac{1}{2m\omega^2\varepsilon} \begin{cases} 2 - e^{-i\omega t} - e^{i\omega(t-\varepsilon)}, & 0 < t < \varepsilon \\ e^{-i\omega t} (-1 + e^{i\omega\varepsilon}), & \varepsilon < t \end{cases}$$

Como estamos interesados en soluciones reales tomaremos la parte real de la función obtenida. Con ello obtenemos como solución de la ecuación 4.7:

$$y(t) = \frac{1}{2m\omega^2\varepsilon} \begin{cases} 2 - \cos(\omega t) - \cos(\omega(t-\varepsilon)), & 0 < t < \varepsilon \\ -\cos(\omega t) + \cos(\omega(t-\varepsilon)), & \varepsilon < t \end{cases}$$

Ahora observamos que podemos sumar las dos partes de la solución obtenida para simplificar la expresión de la solución en el intervalo  $0 < t < \varepsilon$ . Al mismo tiempo, para conseguir una solución continua en  $t = 0$  y  $t = \varepsilon$ , multiplicamos por 2 la parte de la solución en el intervalo  $t > \varepsilon$  (observa que esto puede hacerse porque para  $t > \varepsilon$  la ecuación 4.7 es homogénea). Resulta así que:

$$y_\varepsilon(t) = \frac{1}{m\omega^2\varepsilon} \begin{cases} 1 - \cos(\omega t), & 0 < t < \varepsilon \\ \cos(\omega(t-\varepsilon)) - \cos(\omega t), & \varepsilon < t \end{cases} \quad (4.8)$$

Por supuesto,  $y_\varepsilon(t) = 0$  para  $t < 0$ . Puedes comprobar que la solución obtenida, que claramente depende de  $\varepsilon$ , es continua y derivable una vez y es solución de la ecuación diferencial 4.7 en todo punto  $t \in \mathbb{R}$  excepto en  $t = 0$  y  $t = \varepsilon$  donde la derivada segunda no está definida.

Ahora, para  $\varepsilon \rightarrow 0$  la función respuesta  $y_\varepsilon(t)$  tiene el límite:

$$y_0(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(t) = \frac{1}{m\omega} \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \sin(\omega t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Es perfectamente natural considerar  $y_0$  como la respuesta del sistema al impulso instantáneo:

$$f_0(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)$$

con momento lineal dado por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) dt = 1$$

Naturalmente, dicho *impulso instantáneo* es una idealización. Pero también es una idealización el concepto de punto material. Lo importante es que dicho impulso instantáneo tiene una interpretación física claramente intuitiva. Esta idea de “función impulso instantáneo” ha sido usada por físicos e ingenieros (Maxwell, Heaviside, Dirac, . . .) durante más de 150 años obteniendo resultados correctos a pesar de que los métodos que empleaban no tenían justificación matemática. Al impulso instantáneo  $f_0$  se le llama función  $\delta$  y aquí nos aparece como un límite para  $\varepsilon \rightarrow 0$  de las funciones pulso rectangular  $f_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)\Pi\left(\frac{t-\varepsilon/2}{2\varepsilon}\right)$ . En la figura 4.5 puedes ver la gráfica de la respuesta  $y_\varepsilon(t)$  del sistema a un impulso  $f_\varepsilon(t)$  y en la figura 4.6 puedes ver la gráfica de la respuesta del sistema  $y_0(t)$  al impulso instantáneo  $f_0(t)$ .

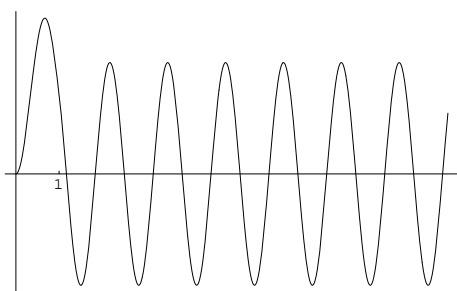


Figura 4.5: Respuesta  $y_\varepsilon(t)$  a un impulso  $f_\varepsilon(t)$ .

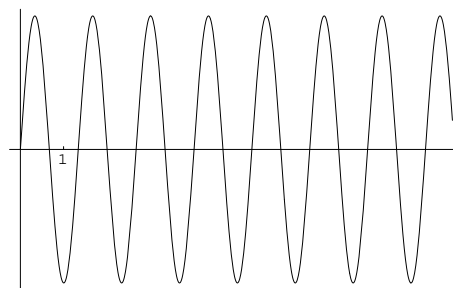


Figura 4.6: Respuesta-impulso  $y_0(t)$  del sistema al impulso instantáneo  $f_0(t)$ .

### 4.3.11. Así empezó todo: la ecuación del calor

En 1807 Fourier envió un trabajo a la Academia de Ciencias de París en el que trataba el problema de la conducción del calor. Concretamente, Fourier consideraba un alambre delgado con una distribución inicial de temperatura dada por una función  $f(x)$  (se supone que la temperatura en cada sección transversal del alambre es constante) y se trataba de calcular la función  $u(x, t)$  que proporciona la temperatura en el punto  $x$  del alambre en el instante  $t$ . La solución propuesta por Fourier implicaba la posibilidad de representar cualquier función como la suma de una serie trigonométrica y sus métodos fueron severamente criticados por su falta de rigor. Esto fue un estímulo para Fourier que siguió sus estudios publicando en 1822 su obra “*Théorie Analytique de la chaleur*” en la que hace un amplio uso de tales representaciones.

Bajo condiciones físicas adecuadas, Fourier, probó que la función  $u(x, t)$  debe satisfacer la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (4.10)$$

El valor de la constante  $1/2$  se ha elegido así para facilitar los cálculos. Supondremos que el alambre tiene longitud infinita. Nuestro dato de partida es la distribución inicial de temperatura dada por  $u(x, 0) = f(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

El sistema que estamos estudiando admite como señal de entrada  $f(x)$  y su salida es la función  $u(x, t)$ . Observa que se trata de un sistema LTI. La idea para obtener la solución de la ecuación del calor es tomar transformadas de Fourier en ambos lados *con respecto a la variable  $x$* . La notación usual  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$  puede ser confusa y emplearemos la notación  $D_{1,1}u$  para indicar la derivada parcial de la función  $u$  dos veces respecto de la primera variable. Esta notación tiene la ventaja de que permite

nombrar las variables como queramos sin que ello conduzca a error. La transformada de Fourier de la función  $x \mapsto (1/2)D_{1,1}u(x,t)$  viene dada, en virtud del teorema de derivación, por:

$$\frac{1}{2}\widehat{D_{1,1}u}(s,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} D_{1,1}u(x,t) e^{-2\pi i s x} dx = \frac{1}{2}(2\pi i s)^2 \widehat{u}(s,t) = -2\pi^2 s^2 \widehat{u}(s,t)$$

En el lado izquierdo, además de tomar transformada de Fourier respecto de  $x$ , permutamos la derivación con la integral (usamos la notación  $D_2u(x,t)$  para indicar derivación parcial una vez respecto de la segunda variable):

$$\widehat{D_2u}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} D_2u(x,t) e^{-2\pi i s x} dx = D_2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-2\pi i s x} dx \right) = D_2 \widehat{u}(s,t)$$

Por tanto, al tomar transformadas de Fourier en ambos lados de la ecuación 4.10 con respecto a la variable  $x$  obtenemos:

$$\frac{\partial \widehat{u}(s,t)}{\partial t} = -2\pi^2 s^2 \widehat{u}(s,t)$$

Para  $s$  fijo, esta es una ecuación diferencial ordinaria respecto a la variable  $t$  y podemos resolverla fácilmente para obtener:

$$\widehat{u}(s,t) = \widehat{u}(s,0) e^{-2\pi^2 s^2 t}$$

La condición inicial  $\widehat{u}(s,0)$  viene dada por:

$$\widehat{u}(s,0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) e^{-2\pi i s x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i s x} dx = \widehat{f}(s)$$

Por tanto:

$$\widehat{u}(s,t) = \widehat{f}(s) e^{-2\pi^2 s^2 t}$$

La función  $e^{-2\pi^2 s^2 t}$  recuerda la transformada de Fourier de una gaussiana; de hecho, ajustando los parámetros según la propiedad de cambio de escala, es fácil deducir que dicha función es la transformada de Fourier con respecto a la variable  $x$  de la función

$$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

Tenemos por tanto que  $\widehat{u}(s,t) = \widehat{f}(s)\widehat{h}(s,t)$  es el producto de dos transformadas de Fourier (respecto de la variable  $x$ ) y, por el teorema de convolución, deducimos que:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (f * h)(x,t) = (\text{convolución en la primera variable}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t} dy \end{aligned}$$

La solución encontrada nos dice que la temperatura del alambre en el punto  $x$  y en el tiempo  $t > 0$  es un promedio suavizado de la temperatura inicial  $f(x) = u(x,0)$ . Eso es lo que significa la convolución con una gaussiana.

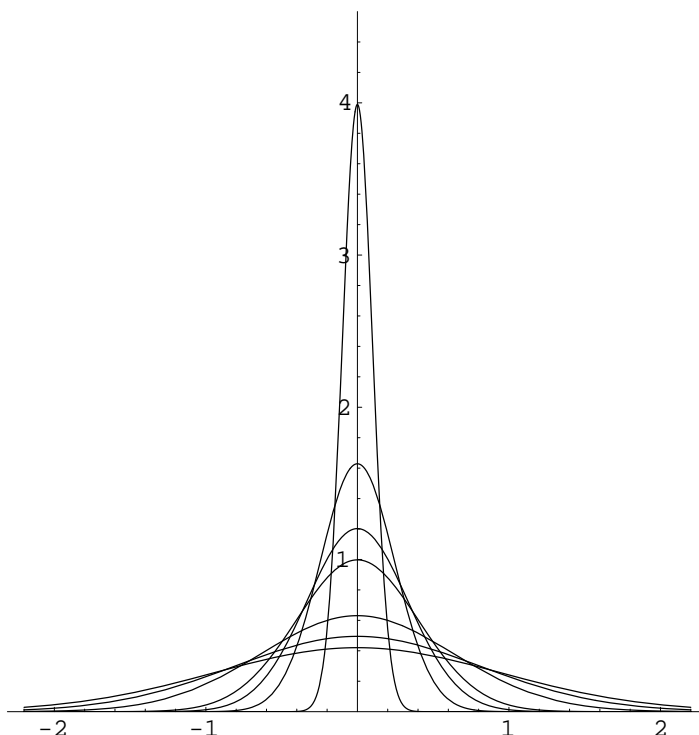
La función

$$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

es la función de Green de la ecuación del calor para un alambre infinito. Las gráficas de  $h(x,t)$  como función de  $x$  para valores de  $t=1,0.5,0.3,0.1,0.05,0.03,0.01$  puedes verlas en la figura 4.7.

Observa cómo las curvas se van concentrando en  $x = 0$ . No obstante lo hacen de forma que el área bajo cada curva es constante igual a 1 (no olvides que son funciones de densidad de la distribución normal). Por tanto, estas funciones podemos verlas, cuando  $t \rightarrow 0$ , como una aproximación de la “función”  $\delta$ .



Figura 4.7: Gaussianas aproximando a  $\delta$ 

#### 4.4. Funciones generalizadas

La “función”  $\delta$  o impulso unidad nos ha aparecido varias veces en estas notas. Las dos últimas como límite de funciones pulso rectangular o de gaussianas. En ambos casos dicha “función” parece cumplir las siguientes condiciones:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty, & t=0 \end{cases}$$

y, además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

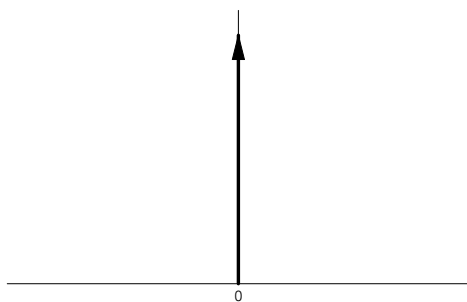


Figura 4.8: Representación del impulso unidad en el origen.

Es claro que no hay una función que verifique estas condiciones y sin embargo si aceptamos estas

propiedades y operamos con ellas sin preocuparnos del rigor podemos calcular, por ejemplo, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt$$

donde suponemos que  $f$  es derivable. Para ello integramos por partes poniendo

$$u(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt &= [u(t)f(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)f'(t) dt = f(\infty) - \int_0^{\infty} f'(t) dt = \\ &= f(\infty) - f(\infty) + f(0) = f(0) \end{aligned}$$

Como este resultado tiene perfecto sentido sin necesidad de que  $f$  sea derivable podemos definir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) = f(0)$$

para toda función continua  $f$ . Continuando este orden de ideas podemos probar con un “cambio de variable” que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a) = f(a)$$

E incluso antes hemos “probado” que la derivada de la función escalón unidad es la función  $\delta$ .

Así podríamos seguir desarrollando un formalismo que en la práctica conducía a resultados correctos pero que en sí mismo era incomprensible.

Hay, además, otras razones importantes para realizar el estudio que vamos a comenzar. Comentemos algunas de ellas. Recuerda que una de las primeras transformadas de Fourier que hemos calculado ha sido la de la función  $\text{senc}(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$ . Dicha función la obtuvimos como la transformada de la función pulso rectangular,  $\mathcal{F}\Pi(s) = \text{senc}(s)$  y, usando la propiedad de inversión de la transformada de Fourier y la paridad de  $\Pi$ , dedujimos que  $\mathcal{F}\text{senc}(s) = \Pi(s)$ . Recuerda también que la condición suficiente básica para que la transformada de Fourier de una función  $f$  esté definida es que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , es decir,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ . Pues, bien, la función  $\text{senc}$  no está en  $L^1(\mathbb{R})$ , es decir,  $\int_{-\infty}^{\infty} |\text{senc}(t)| dt = \infty$ . Te digo esto para que seas consciente de que los cálculos que hemos hecho se han basado con frecuencia en el teorema de inversión de Fourier sin molestarnos en comprobar si en cada caso se satisfacían las hipótesis de dicho teorema.

En el caso de la función  $\text{senc}$  el arreglo es fácil pues su transformada de Fourier tiene sentido como integral impropia de Riemann, es decir, se verifica que:

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} e^{-2\pi i s t} dt = \Pi(s) \quad (4.11)$$

La diferencia respecto a la integral de Lebesgue, que es la que se usa en toda la teoría de análisis armónico, es que la integral de Lebesgue de una función real  $f$  se define en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^+(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} f^-(t) dt$$

donde  $f^+(t) = \max\{f(t), 0\}$  es la parte positiva de  $f$  y  $f^-(t) = \max\{-f(t), 0\}$  es la parte negativa de  $f$ . Para que  $f$  sea Lebesgue integrable debe ocurrir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^+(t) dt < \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^-(t) dt < \infty$$

y esto no ocurre para la función senc para la cual las dos integrales anteriores son infinitas. Sin embargo, sí existe el límite 4.11 porque en él cancelan las partes positivas y negativas de la función de manera que su diferencia resulta ser convergente.

No es cómodo que la transformada de Fourier dependa de estas sutilezas y es deseable una teoría más robusta para trabajar con ella. Pero es que hay otros aspectos en la transformada de Fourier que no tienen tan fácil arreglo. Sabemos que la transformada de Fourier de una señal es la representación de dicha señal en el dominio de la frecuencia; las señales más elementales son las sinusoides. Pues bien, la señal  $\sin(2\pi t)$  no tiene transformada de Fourier. No hay ninguna teoría de la integral que pueda dotar de significado coherente a la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi t) e^{-2\pi i s t} dt$$

Es decir, las señales sinusoidales !no tienen espectro!

Ha habido otro momento en estas notas, al obtener la función respuesta impulso del filtro de paso-alto, en el que “calculamos” la transformada inversa de Fourier de la función constante 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} ds$$

¿Necesito decirte que esa integral carece por completo de significado?

En otro momento, para obtener la respuesta impulso de un filtro analógico, hemos necesitado suponer que existe una función unidad para la convolución !cuya transformada de Fourier debería ser la función constante igual a 1! Es momento de poner un poco de orden en todo esto.

#### 4.4.1. Funciones rápidamente decrecientes

Representaremos por  $\mathcal{S}$  el conjunto de las funciones  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que verifican las condiciones:

- Tienen derivadas de todos órdenes.

■

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = 0 \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

Es decir, cualquier potencia de  $x$  multiplicada por cualquier derivada de  $\varphi$  tiene límite cero en  $\pm\infty$ .

Las funciones de  $\mathcal{S}$  se llaman funciones *rápidamente decrecientes* o *funciones de Schwartz*<sup>3</sup>.

No es difícil dar ejemplos de funciones de Schwarz. Por ejemplo, la función  $e^{-x^2}$  es una función de Schwartz. También es inmediato que el producto de una función polinómica por una función de

<sup>3</sup>L. Schwartz (1915-2002) matemático francés creador en 1948 de la Teoría de Distribuciones por la que se le concedió en 1950 la medalla Fields (considerada como el premio Nobel de Matemáticas). La Teoría de Distribuciones introduce un concepto muy general de función y permite extender los procesos del Cálculo Diferencial e Integral a esta nueva clase de funciones lo que permite una nueva interpretación de las ecuaciones diferenciales e integrales del Análisis Matemático así como de sus soluciones.

Schwartz es también una función de Schwartz. Lo importante de esta clase de funciones es que son muy suaves (son de clase  $C^\infty$ ) y tienen “colas” que decrecen muy rápidamente. Son funciones excepcionalmente buenas tanto desde el punto de vista de la derivación como de la integración. Por ejemplo, la condición 4.12 implica que las funciones de Schwartz y todas sus derivadas son integrables y, por tanto, sus transformadas de Fourier están definidas.

A continuación resumimos algunas propiedades importantes de la clase  $\mathbb{S}$ . Algunas son inmediatas y, lo que es fundamental, todas ellas pueden probarse fácilmente con técnicas básicas del cálculo sin necesidad de recurrir a la teoría de la integración de Lebesgue.

#### 4.4.2. Propiedades de la clase $\mathbb{S}$

- $\mathbb{S}$  es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y producto por escalares.
- La transformada de Fourier de una función de  $\mathbb{S}$  también es una función de  $\mathbb{S}$ .
- El teorema de inversión de Fourier es válido para funciones de  $\mathbb{S}$ .

Consideremos una función  $f$  tal que para toda función  $\varphi \in \mathbb{S}$  tenga sentido la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt$$

Eso no es pedirle mucho a  $f$ . Cualquier función  $f \in L^1(\mathbb{R})$  o  $f \in L^2(\mathbb{R})$  satisface esta condición. Con mayor generalidad, es suficiente suponer que  $f$  es una función integrable en todo intervalo acotado; *condición que supondremos implícitamente en todo lo que sigue*. En tal caso, podemos definir una aplicación, que notaremos  $T_f$  de  $\mathbb{S}$  en  $\mathbb{C}$  que a cada función  $\varphi \in \mathbb{S}$  hace corresponder el número dado por la integral anterior:

$$T_f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C} \quad T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt$$

Una primera observación importante es que el conocimiento de  $T_f$  permite recuperar  $f$  en todo punto donde  $f$  sea continua. Es decir, si olvidamos la función  $f$  pero sabemos calcular para cada  $\varphi \in \mathbb{S}$  el valor de  $T_f$ , entonces podemos obtener el valor de  $f$  en sus puntos de continuidad. Para ello consideremos la función:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right), & x \in ]-1, 1[ \\ 0, & x \notin ]-1, 1[ \end{cases}$$

y definamos para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi(nx)}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(nx) dx}$$

Tenemos que  $\varphi_n \in \mathbb{S}$  y fácilmente se comprueba que si  $a$  es un punto de continuidad de  $f$  se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_n(x-a) dx = f(a)$$

La aplicación  $T_f$  tiene además otra propiedad: es lineal.

$$T_f(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T_f(\varphi) + \mu T_f(\psi) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in \mathbb{S})$$

Podemos considerar que  $T_f$  es una extensión de la función  $f$  y esa es la clave que conduce a la siguiente definición.

**Definición 4.7.** Una *función generalizada* o una *distribución temperada*  $T$  es una aplicación lineal continua de  $\mathbb{S}$  en  $\mathbb{C}$ .

Con más detalle: Una función generalizada es una aplicación  $T : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$  que es lineal:

$$T_f(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T_f(\varphi) + \mu T_f(\psi) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in \mathbb{S})$$

y es continua en el sentido de que si  $\{\varphi_n\}$  es una sucesión de funciones de Schwartz con la propiedad de que  $\{\varphi_n\} \rightarrow \varphi \in \mathbb{S}$  entonces  $T_f(\varphi_n) \rightarrow T_f(\varphi)$ .

La continuidad es la parte difícil en esta definición. Decir que  $\{\varphi_n\} \rightarrow \varphi$  en  $\mathbb{S}$  quiere decir que la sucesión  $\{\varphi_n\}$  y *todas sus derivadas*  $\{\varphi_n^{(k)}\}$  convergen uniformemente en todo intervalo acotado. Te gustará saber que no tendremos que preocuparnos por esto en lo que sigue.

Las distribuciones que hemos definido se llaman “temperadas” porque hay otros tipos de distribuciones pero, en lo que sigue, las llamaremos, simplemente, “distribuciones” o “funciones generalizadas”.

Una notación cómoda para trabajar con distribuciones es la siguiente:

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$$

que usaremos con frecuencia en lo que sigue.

Representaremos por  $T_f$  la distribución definida por una función  $f$ :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Es usual identificar  $T_f$  con  $f$  pues ambas se determinan mutuamente. Pero hay otras distribuciones que no están definidas de esta forma. Un ejemplo importante es el siguiente.

### 4.4.3. La distribución $\delta$

La aplicación  $\delta : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\delta(\varphi) = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

es una distribución temperada. La linealidad es clara pues:

$$\begin{aligned} \langle \delta, \varphi + \psi \rangle &= (\varphi + \psi)(0) = \varphi(0) + \psi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle + \langle \delta, \psi \rangle \\ \langle \delta, \lambda\varphi \rangle &= (\lambda\varphi)(0) = \lambda\varphi(0) = \lambda\langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

La continuidad también, pues si  $\{\varphi_n\} \rightarrow \varphi$  entonces, en particular,  $\{\varphi_n(0)\} \rightarrow \varphi(0)$ , por lo que

$$\langle \delta, \varphi_n \rangle = \varphi_n(0) \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Es fácil probar que no hay ninguna función  $f$  cuya distribución asociada  $T_f$  sea la distribución  $\delta$ . De esta forma,  $\delta$  aparece como la distribución temperada más sencilla que no procede de una función.

Con más generalidad. Dado  $a \in \mathbb{R}$  se define la distribución  $\delta_a$  por la igualdad:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Otras aproximaciones de  $\delta$  que se han sugerido anteriormente pueden obtenerse como sigue.

**Definición 4.8.** Una sucesión  $\{T_n\}$  de distribuciones se dice que converge (débilmente) a una distribución  $T$  si para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$  se verifica que

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

Es frecuente introducir la función  $\delta$  como un límite de funciones rectángulo o de gaussianas; nosotros mismos hemos considerado antes estas aproximaciones. El hecho de que la función  $\delta$  pueda interpretarse de maneras en apariencia tan diferentes queda explicado en la siguiente construcción.

Sea  $f$  cualquier función que verifique

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

y definamos para cada  $p > 0$  la función

$$f_p(x) = pf(px)$$

Entonces se verifica que  $T_{f_p} \rightarrow \delta$ .

La demostración es instructiva y sencilla. Hay que probar que para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$  es

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t)\varphi(t) dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t)\varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t)(\varphi(t) - \varphi(0) + \varphi(0)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t)(\varphi(t) - \varphi(0)) dt + \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t)(\varphi(t) - \varphi(0)) dt + \varphi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt + \varphi(0) \end{aligned}$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt$$

es finita, podemos tomar un número  $a > 0$  tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{-a} f(t)(\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt \right| < \varepsilon \quad \left| \int_a^{\infty} f(t)(\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt \right| < \varepsilon$$

Pongamos

$$M = \int_{-a}^a |f(t)| dt$$

Por la continuidad de  $\varphi$  en  $x = 0$  podemos tomar  $p_0$  suficientemente grande de modo que para  $p > p_0$  se tenga  $|\varphi(x/p) - \varphi(0)| < \varepsilon/m$ . Con ello resulta que

$$\left| \int_a^a f(t)(\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt \right| \leq \int_a^a |f(t)(\varphi(t/p) - \varphi(0))| dt < \varepsilon$$

Combinando las tres acotaciones anteriores se deduce que:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\varphi(t/p) - \varphi(0)) dt \right| < 3\varepsilon$$

Como queríamos probar.

#### 4.4.4. Derivación de distribuciones

Consideremos una función  $f$  derivable cuya derivada  $f'$  define una distribución. Dada  $\varphi \in \mathbb{S}$ , integrando por partes (con la hipótesis de que  $f(x)\varphi(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  que no es mucho pedir) se obtiene fácilmente:

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$

Lo interesante de esta igualdad es que en la última integral no figura la derivada de  $f$  y tiene perfecto sentido sin necesidad de que  $f$  sea derivable.

**Definición 4.9.** Dada una distribución  $T$ , su derivada es la distribución  $T'$  definida por

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

El hecho de que, efectivamente, la definición dada de  $T'$  define una distribución, es consecuencia del tipo de convergencia que se considera en  $\mathbb{S}$  que involucra no solamente a las funciones sino también a sus derivadas como ya comentamos anteriormente.

Observa que con la definición dada, si  $f$  es una función derivable se verifica que  $T'_f = T_{f'}$ , lo que permite identificar la derivada usual  $f'$  de una función derivable  $f$  con su derivada generalizada  $T'_f$ .

Naturalmente, la definición de derivada de una distribución se puede aplicar a  $T'$  para obtener la derivada segunda  $T''$  y derivadas sucesivas. Resulta así que, con la definición dada, *las distribuciones son indefinidamente derivables*.

A partir de ahora, cuando no haya lugar a confusión, identificaremos la distribución  $T_f$  con la función  $f$  y escribiremos  $\langle f, \varphi \rangle$  en lugar de  $\langle T_f, \varphi \rangle$ .

#### 4.4.5. Derivada de la función escalón unidad

La función escalón unidad llamada también *función de Heaviside*, es la función dada por:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Dicha función determina una distribución que viene dada por

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

La distribución derivada  $H'$  viene dada por:

$$\langle H', \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -(\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) - \varphi(0)) = \varphi(0)$$

Hemos obtenido que para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$  es

$$\langle H', \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Por tanto,  $H' = \delta$ .

### 4.4.6. Derivada de la función rampa

La función rampa es la función dada por:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

Dicha función determina una distribución que viene dada por

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x) dx = \int_0^{\infty} x\varphi(x) dx$$

La distribución derivada  $u'$  viene dada por:

$$\langle u', \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} x\varphi'(x) dx = - \left( [x\varphi(x)]_{x=0}^{x \rightarrow \infty} - \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \right) = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

Hemos obtenido que para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  es

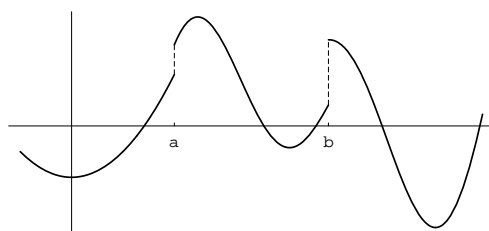
$$\langle u', \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \langle H, \varphi \rangle$$

Por tanto,  $u' = H$ .

### 4.4.7. La derivada generalizada de una función discontinua

Consideremos una función continua en  $\mathbb{R}$  excepto en dos puntos  $a < b$  donde tiene discontinuidades de salto y que tiene derivada continua en los intervalos  $] -\infty, a[$ ,  $]a, b[$  y  $]b, +\infty[$ . Vamos a calcular la derivada generalizada de  $f$  vista como distribución, es decir, identificando  $f$  con la distribución  $T_f$ . Tenemos que:

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^a f(x)\varphi'(x) dx - \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx - \int_b^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx$$



Integrando por partes en cada uno de los intervalos, notando  $f(a+)$ ,  $f(b+)$  los límites laterales por la derecha y  $f(a-)$ ,  $f(b-)$  los límites laterales por la izquierda de  $f$  en  $a$  y en  $b$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} \langle T'_f, \varphi \rangle &= -f(a-)\varphi(a) + \int_{-\infty}^a f'(x)\varphi(x) dx - f(b-)\varphi(b) + f(a+)\varphi(a) \\ &\quad + \int_a^b f'(x)\varphi(x) dx + f(b+)\varphi(b) + \int_b^{\infty} f'(x)\varphi(x) dx \end{aligned}$$



Que podemos escribir en la forma

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = \lambda \varphi(a) + \mu \varphi(b) + \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda &= f(a+) - f(a-) \\ \mu &= f(b+) - f(b-) \end{aligned}$$

Hemos obtenido que la derivada generalizada de  $f$  viene dada por

$$T'_f = T_{f'} + \lambda \delta_a + \mu \delta_b$$

que suele escribirse como

$$T'_f = f' + \lambda \delta_a + \mu \delta_b$$

Observa que en este caso la derivada generalizada,  $T'_f$ , de  $f$ , no coincide con la distribución  $T_{f'}$  definida por la derivada de  $f$ . Las discontinuidades de  $f$  en los puntos  $a$  y  $b$  hacen intervenir las funciones  $\delta_a$  y  $\delta_b$  multiplicadas por los saltos  $\lambda$  y  $\mu$  de  $f$  en dichos puntos.

El resultado anterior se generaliza fácilmente para cualquier número finito de discontinuidades de salto. Incluso puede generalizarse para funciones con infinitas discontinuidades de salto. Vamos a verlo.

Sea  $f$  una función con discontinuidades de salto en los puntos  $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ , donde suponemos que  $x_k < x_{k+1}$ . Sea

$$\lambda_k = \lim_{t \rightarrow x_k^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow x_k^-} f(t)$$

el salto de  $f$  en  $x_k$ , y supongamos que la sucesión  $\{\lambda_k\}$  está acotada (pueden hacerse hipótesis bastante más generales). Entonces, para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  se verifica que la serie  $\sum_{n=-N}^N \varphi(\lambda_k)$  es convergente (de hecho es absolutamente convergente) y la sucesión de distribuciones  $\sum_{k=-N}^N \lambda_k \delta_{x_k}$  converge a una distribución

que notamos, claro está,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_k \delta_{x_k}$  definida para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  por

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_k \delta_{x_k}, \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_k)$$

En estas condiciones, suponiendo que  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$  exceptuando los puntos  $x_k$ , se verifica que

$$T'_f = f' + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_k \delta_{x_k} \quad (4.13)$$

#### 4.4.8. La distribución “valor principal”

La función  $f(x) = 1/x$  no define una distribución pues si  $\varphi \in \mathcal{S}$  la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

puede no existir. Dado que la función  $f(x) = 1/x$  aparece con frecuencia en la práctica (piensa en la descomposición en fracciones simples de las funciones racionales) es importante darle entrada de

alguna forma en el mundo de las distribuciones. Ello puede hacerse observando que la función  $g(x) = \log|x|$  sí define una distribución pues para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$  la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log|x| \varphi(x) dx$$

está definida. Como la derivada de  $g$  es  $f$ , definimos la distribución “valor principal”, que representamos por  $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ , como la derivada generalizada de la función  $g(x) = \log|x|$ . Por tanto

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \langle T'_g, \varphi \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \log|x| \varphi'(x) dx$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log|x| \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon$$

donde

$$J_\varepsilon = -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x| \varphi'(x) dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \log|x| \varphi'(x) dx$$

Integrando por partes se obtiene fácilmente que

$$J_\varepsilon = (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \log \varepsilon + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Por el teorema del valor medio

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = 2\varepsilon \varphi'(c_\varepsilon) \quad |c_\varepsilon| < \varepsilon$$

lo que implica que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \log \varepsilon = 0$  y, por tanto, obtenemos

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$

**Teorema 4.10.** *Dos distribuciones que tienen igual derivada se diferencian en una constante.*

Es suficiente probar que si  $T$  es una distribución con derivada nula entonces hay un número  $\lambda$  tal que  $T = \lambda$ , es decir,  $\langle T, \varphi \rangle = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$  para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$ .

Por hipótesis se verifica que  $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = 0$ , esto es,  $\langle T, \varphi' \rangle = 0$  para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$ . Esto nos lleva a considerar el conjunto  $\mathbb{S}_0 = \{\varphi' : \varphi \in \mathbb{S}\}$ . Probemos que

$$\mathbb{S}_0 = \{\varphi' : \varphi \in \mathbb{S}\} = \left\{ \psi \in \mathbb{S} : \int_{-\infty}^{\infty} \psi = 0 \right\}$$

Si  $\varphi \in \mathbb{S}$  entonces también  $\varphi' \in \mathbb{S}$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi' = 0$ . Recíprocamente, si  $\psi \in \mathbb{S}$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi = 0$  definiendo

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$$

se tiene que la función  $\varphi$  pertenece a  $\mathbb{S}$  y  $\varphi'(x) = \psi(x)$ , luego  $\psi \in \mathbb{S}_0$ .

Sea  $\omega$  una función fija en  $\mathbb{S}$  tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1$ . Dado un elemento arbitrario  $\varphi$  de  $\mathbb{S}$ , definamos  $\psi_\varphi = \varphi - I(\varphi)\omega$ , donde  $I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi$ . Entonces

$$\varphi = \psi_\varphi + I(\varphi)\omega$$

y  $\psi_\varphi \in \mathbb{S}_0$ . Poniendo  $\lambda = \langle T, \omega \rangle$ , deducimos que

$$\langle T, \varphi \rangle = I(\varphi) \langle T, \omega \rangle = \lambda I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \varphi(x) dx = \langle \lambda, \varphi \rangle$$

lo que prueba que la distribución  $T$  es la distribución constante  $\lambda$ .

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de las definiciones dadas y del tipo de convergencia que se considera en  $\mathbb{S}$ .

**Teorema 4.11.** *La derivación de distribuciones es una operación continua. Es decir si una sucesión de distribuciones  $T_n$  converge a una distribución  $T$  entonces se verifica que  $T'_n$  converge a  $T'$ .*

#### 4.4.9. Transformada de Fourier de una distribución

Dada  $\psi \in \mathbb{S}$  sabemos que su transformada de Fourier,  $\mathcal{F}\psi$  también está en  $\mathbb{S}$  y, por tanto, define una distribución por la igualdad:

$$\langle \mathcal{F}\psi, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\psi(x) \varphi(x) dx$$

Podemos escribir esta integral como sigue:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\psi, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) e^{-2\pi i xy} dy \right) \varphi(x) dx = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \psi(y) e^{-2\pi i xy} d(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i xy} dx \right) \psi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(y) \psi(y) dy = \langle \psi, \mathcal{F}\varphi \rangle \end{aligned}$$

Hemos obtenido que para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$  se verifica que

$$\langle \mathcal{F}\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

Esto nos da la pista para definir la transformada de Fourier de una distribución.

**Definición 4.12.** La transformada de Fourier de una distribución  $T$  es la distribución  $\mathcal{F}T$  o  $\widehat{T}$  definida para toda función  $\varphi \in \mathbb{S}$  por la igualdad

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

La misma estrategia sirve para definir la transformada inversa de Fourier. La transformada inversa de Fourier de una distribución  $T$  es la distribución  $\mathcal{F}^{-1}T$  o  $\check{T}$  definida para toda función  $\varphi \in \mathbb{S}$  por la igualdad

$$\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$$

Las definiciones dadas hacen que el siguiente resultado sea un simple ejercicio.

**Teorema 4.13** (Teorema de inversión de Fourier). *Para toda distribución temperada  $T$  se verifica que:*

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = T \quad \text{y} \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T = T$$

La demostración es consecuencia inmediata de las definiciones dadas y de que el teorema de inversión es válido para funciones de la clase  $\mathcal{S}$  (esa es la razón que justifica la elección de dicha clase). Tenemos que:

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}T), \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Como esta igualdad es válida para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  concluimos que  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}T) = T$ . Análogamente se prueba la otra igualdad.

Si  $f$  es una función integrable se verifica que  $\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f}$ . En efecto, para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle &= \langle T_f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\mathcal{F}\varphi)(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i t x} dt \right] dx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)\varphi(t) e^{-2\pi i t x} d(t, x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(t) e^{-2\pi i t x} dx \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)(\mathcal{F}f)(t) dt = \langle T_{\mathcal{F}f}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

La permutación de integrales está justificada por la integrabilidad de  $f$ .

#### 4.4.10. Transformada de Fourier de la distribución $\delta$

La transformada de Fourier de  $\delta$  viene dada por

$$\mathcal{F}\delta = 1$$

Esta igualdad debe ser correctamente entendida. Lo que nos dice es que las distribuciones  $\mathcal{F}\delta$  y la distribución inducida por la función constante 1:

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

son iguales. Para comprobarlo basta usar las definiciones correspondientes.

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle = \mathcal{F}\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

La igualdad primera es la definición de la transformada de Fourier de una distribución, la igualdad segunda es la definición de la distribución  $\delta$  y la última igualdad es consecuencia de que el valor en  $s = 0$  de la transformada de Fourier de una función es la integral en  $\mathbb{R}$  de dicha función. Resulta así que  $\mathcal{F}\delta = 1$ . En virtud del teorema de inversión deducimos que  $\mathcal{F}^{-1}1 = \delta$ .

También podemos probar que

$$\mathcal{F}1 = \delta$$

Pues

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(s) ds$$

Pero

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(s) e^{2\pi i s t} ds \implies \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(s) ds$$

y, como el teorema de inversión de Fourier es válido en  $\mathbb{S}$ ,  $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(0) = \varphi(0)$ . Por tanto, hemos obtenido que

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

y concluimos que  $\mathcal{F}1 = \delta$ .

#### 4.4.11. La transformada de Fourier de la distribución $\delta_a$

Dado  $a \in \mathbb{R}$  se define la distribución  $\delta_a$  por la igualdad:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Calculemos su transformada de Fourier.

$$\langle \mathcal{F}\delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}\varphi \rangle = \mathcal{F}\varphi(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i a x} dx$$

La última igualdad, que es simplemente la definición de la transformada de Fourier, puede interpretarse como el valor de la distribución asociada a la función  $x \mapsto e^{-2\pi i a x}$  sobre la función  $\varphi$ , es decir:

$$\langle \mathcal{F}\delta_a, \varphi \rangle = \langle e^{-2\pi i a x}, \varphi \rangle$$

Por tanto

$$\mathcal{F}\delta_a = e^{-2\pi i a x}$$

Donde esta igualdad se entiende (no puede entenderse de otra forma) como una igualdad entre distribuciones. Observa que aunque la función  $e^{-2\pi i a x}$  no es integrable, sin embargo define una distribución por el convenio usual de que a una función  $\varphi \in \mathbb{S}$  le asigna el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i a x} dx$$

integral que sí existe por ser  $\varphi$  integrable. Por tanto, la igualdad  $\mathcal{F}\delta_a = e^{-2\pi i a x}$  es otra forma de escribir la igualdad

$$\langle \mathcal{F}\delta_a, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i a x} dx \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

También podemos comprobar que la transformada de Fourier de la distribución  $e^{2\pi i a x}$  es la distribución  $\delta_a$ .

$$\mathcal{F}e^{2\pi i a x} = \delta_a$$

Tenemos que

$$\langle \mathcal{F}e^{2\pi i a x}, \varphi \rangle = \langle e^{2\pi i a x}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i a x} \mathcal{F}\varphi(x) dx$$

Pero esta última integral es la transformada de Fourier inversa de  $\mathcal{F}\varphi$  en  $a$  y, por tanto, igual a  $\varphi(a)$ . Resulta así que

$$\langle \mathcal{F}e^{2\pi i a x}, \varphi \rangle = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

Luego  $\mathcal{F}e^{2\pi i a x} = \delta_a$ .

#### Observaciones sobre la notación.

Es frecuente escribir  $\delta(x)$  por  $\delta$  y  $\delta(x-a)$  por  $\delta_a$ . Estas notaciones son cómodas y pueden ser útiles pero no tienen mucho sentido. Recuerda:  $\delta$  y  $\delta_a$  no son funciones y no se evalúan en puntos; son distribuciones y se evalúan en funciones.

Así mismo es frecuente escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a)$$

que es otra manera de escribir las *definiciones* de dichas funciones pero no son integrales en el sentido usual del término. Nosotros también usaremos esta notación de vez en cuando.

#### 4.4.12. Las transformadas de Fourier del seno y del coseno

Podemos combinar los resultados anteriores para obtener las transformadas de Fourier del seno y del coseno.

Tenemos que

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})\right) = \frac{1}{2}(e^{-2\pi ias} + e^{2\pi ias}) = \cos(2\pi as)$$

Que suele escribirse en la forma

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(\delta(x-a) + \delta(x+a))\right) = \cos(2\pi as)$$

Y también

$$\mathcal{F}\cos(2\pi as) = \mathcal{F}\frac{1}{2}(e^{-2\pi ias} + e^{2\pi ias}) = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a}) = \frac{1}{2}(\delta(x-a) + \delta(x+a))$$

La transformada de Fourier del coseno suele representarse gráficamente como en la figura 4.9.



Figura 4.9: Representación de la transformada de Fourier del coseno.

Análogamente, para la función seno tenemos que

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2i}(\delta_{-a} - \delta_a)\right) = \frac{1}{2i}(e^{2\pi ias} - e^{-2\pi ias}) = \sin(2\pi as)$$

y

$$\mathcal{F}\sin(2\pi ax) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2i}(e^{2\pi iax} - e^{-2\pi iax})\right) = \frac{1}{2i}(\delta_a - \delta_{-a})$$

La transformada de Fourier del seno suele representarse gráficamente como en la figura 4.10.

#### 4.4.13. Operaciones elementales con distribuciones

Las operaciones elementales con señales que consisten en trasladar la variable o en multiplicarla por un número no nulo:

$$(\sigma_a f)(x) = f(ax), \quad (\tau_a f)(x) = f(x-a)$$

pueden definirse también para distribuciones siguiendo el procedimiento, que ya debe empezar a sonar familiar, que consiste en expresar primero dichas operaciones en términos de la distribución definida

#### 4.4.14 Distribuciones pares e impares. Propiedades de simetría de la transformada de Fourier

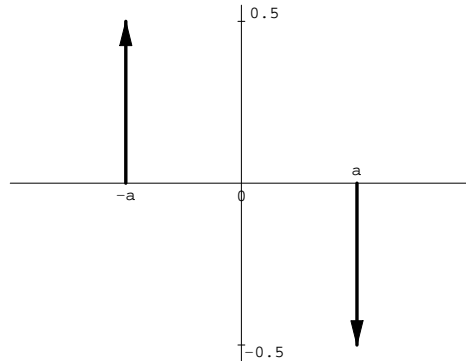


Figura 4.10: Representación de la transformada de Fourier del seno.

por una función para después generalizar al caso de una distribución cualquiera. Sea, pues,  $f$  una función y  $\varphi \in \mathbb{S}$ :

$$\begin{aligned} \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_a f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t+a) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tau_{-a} \varphi(x) dx = \langle T_f, \tau_{-a} \varphi \rangle \end{aligned}$$

En general, si  $T$  es una función generalizada definimos  $\tau_a T$  como la distribución dada por:

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Con esta definición se tiene que  $\tau_a T_f = T_{\tau_a f}$ .

Se dice que  $T$  es *periódica* con período  $a \neq 0$  si  $\tau_a T = T$ .

Análogamente, como:

$$\begin{aligned} \langle T_{\sigma_a f}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_a f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{|a|} \varphi(t/a) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{|a|} \sigma_{1/a} \varphi(x) dx = \left\langle T_f, \frac{1}{|a|} \sigma_{1/a} \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Definimos para toda función generalizada  $T$ :

$$\langle \sigma_a T, \varphi \rangle = \left\langle T, \frac{1}{|a|} \sigma_{1/a} \varphi \right\rangle \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Con esta definición se tiene que  $\sigma_a T_f = T_{\sigma_a f}$ .

Con las definiciones dadas es inmediato comprobar que  $\delta_a = \tau_a \delta$  y  $\sigma_a \delta = \frac{1}{|a|} \delta$ . Igualdades que suelen escribirse en la forma  $\delta_a(x) = \delta(x-a)$ ,  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ .

#### 4.4.14. Distribuciones pares e impares. Propiedades de simetría de la transformada de Fourier

Una función  $f$  es par cuando  $f(-x) = f(x)$  y es impar cuando  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Podemos escribir estas igualdades en la forma  $\sigma_{-1} f = f$  y  $\sigma_{-1} f = -f$  respectivamente. Diremos que una distribución  $T$  es par cuando  $\sigma_{-1} T = T$  y diremos que es impar cuando  $\sigma_{-1} T = -T$ .

#### 4.4.14 Distribuciones pares e impares. Propiedades de simetría de la transformada de Fourier 165

Es cómodo usar la notación  $\sigma_{-1}f = f^-$  y  $\sigma_{-1}T = T^-$  y así lo haremos en adelante. Por tanto:

$$\begin{aligned} T \text{ es par} &\iff \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi^- \rangle & (\varphi \in \mathbb{S}) \\ T \text{ es impar} &\iff \langle T, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi^- \rangle & (\varphi \in \mathbb{S}) \end{aligned}$$

Por ejemplo, la distribución  $\delta$  es par pues:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = \varphi(-0) = \langle \delta, \varphi^- \rangle$$

Igualmente se comprueba fácilmente que  $\delta_a + \delta_{-a}$  es par y  $\delta_a - \delta_{-a}$  es impar. No es de extrañar que podamos recuperar para distribuciones las propiedades de simetría de la transformada de Fourier. Recordemos las siguientes propiedades válidas, por supuesto, para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$ :

- a)  $\mathcal{F}\varphi(s) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(-s)$  que podemos escribir  $\mathcal{F}\varphi = (\mathcal{F}^{-1}\varphi)^-$ .
- b)  $\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi(s) = \varphi(-s)$  que podemos escribir  $\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi = \varphi^-$ . De donde se sigue que  $\mathcal{F}^{-1}(\varphi^-) = \mathcal{F}\varphi$  o, lo que es igual,  $\mathcal{F}^{-1}\varphi = \mathcal{F}(\varphi^-)$ .
- c) Si  $\varphi$  es par entonces  $\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}^{-1}\varphi$  y  $\mathcal{F}\varphi$  es una función par.
- d) Si  $\varphi$  es impar entonces  $\mathcal{F}\varphi = -\mathcal{F}^{-1}\varphi$  y  $\mathcal{F}\varphi$  es una función impar.

Pues bien, es un ejercicio sencillo probar que estas propiedades permanecen válidas para distribuciones. Si  $T$  es una distribución se verifica:

- a')  $\mathcal{F}T = (\mathcal{F}^{-1}T)^-$ .
- b')  $\mathcal{F}\mathcal{F}T = T^-$ .
- c') Si  $T$  es par entonces  $\mathcal{F}T = \mathcal{F}^{-1}T$  y  $\mathcal{F}T$  es una función generalizada par.
- d') Si  $T$  es impar entonces  $\mathcal{F}T = -\mathcal{F}^{-1}T$  y  $\mathcal{F}T$  es una función generalizada impar.

Comprobemos la primera igualdad de la que pueden deducirse las otras. Sea  $\varphi \in \mathbb{S}$ .

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{F}T)^-, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}T, \varphi^- \rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}(\varphi^-) \rangle && \text{(por definición de transformada de Fourier de } T) \\ &= \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle && \text{(por el apartado b) anterior)} \\ &= \langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle && \text{(por definición de transformada de Fourier inversa de } T) \end{aligned}$$

Deducimos que  $(\mathcal{F}T)^- = \mathcal{F}^{-1}T$  o, lo que es igual,  $\mathcal{F}T = (\mathcal{F}^{-1}T)^-$ .

Usamos estos resultados para obtener de nuevo que  $\mathcal{F}1 = \delta$ . Tenemos

$$\mathcal{F}1 = (\mathcal{F}^{-1}1)^- = \delta^- = \delta$$

Al empezar este apartado comentamos que la función sinc no es integrable en el sentido de Lebesgue y que su transformada de Fourier debe interpretarse como una integral impropia de Riemann. Aunque la función sinc no es integrable, es continua y, por tanto, define una distribución  $T_{\text{senc}}$ . Vamos a calcular  $\mathcal{F}T_{\text{senc}}$ . Usaremos que  $\mathcal{F}\Pi = \text{senc}$  igualdad perfectamente lícita pues la función  $\Pi$  es, evidentemente, integrable. En consecuencia se verifica que  $\mathcal{F}T_{\Pi} = T_{\mathcal{F}\Pi} = T_{\text{senc}}$ . Para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$  tenemos:

$$\langle \mathcal{F}T_{\text{senc}}, \varphi \rangle = \langle T_{\text{senc}}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T_{\mathcal{F}\Pi}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T_{\Pi}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T_{\Pi}, \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T_{\Pi}, \varphi^- \rangle = \langle T_{\Pi}, \varphi \rangle$$



Donde, en la última igualdad hemos tenido en cuenta la paridad de  $\Pi$ . Hemos probado que

$$\mathcal{F}T_{\text{senc}} = T_{\Pi}$$

igualdad que suele escribirse  $\mathcal{F}\text{senc} = \Pi$ .

La propiedad de cambio de escala de la transformada de Fourier válida para funciones permanece igualmente válida para distribuciones y su comprobación se deja como ejercicio.

**Cambio de escala o dilatación.** Dado un número  $a \in \mathbb{R}^*$  y una distribución  $T$ , se verifica que:

$$\mathcal{F}(\sigma_a T) = \frac{1}{|a|} \sigma_{1/a} \mathcal{F}T$$

#### 4.4.15. Producto de una función por una distribución

No pienses que con las distribuciones podemos hacer cualquier cosa; por ejemplo no es posible definir el producto de dos distribuciones cualesquiera de forma que respete el producto usual de funciones. Si fuera posible definir el producto de dos distribuciones de la forma indicada, entonces debería verificarse que

$$T_f T_g = T_{fg}$$

Pero esto no tiene por qué ser cierto ya que puede ocurrir que  $f$  y  $g$  sean localmente integrables pero su producto no lo sea (por ejemplo  $f(x) = g(x) = |x|^{-1/2}$ ).

No hay problema en definir el producto de una distribución por una función  $g$  que verifique la condición de que  $g\varphi \in \mathcal{S}$  para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  (por ejemplo, las funciones polinómicas). En tal caso se define el producto  $gT$  de  $g$  por una distribución  $T$  como la distribución dada por

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S})$$

Con esta definición es inmediato comprobar que si  $T_f$  es la distribución definida por una función, se verifica que  $gT_f = T_{gf}$ .

A las propiedades de la transformada de Fourier de distribuciones podemos añadir ahora la propiedad de traslación en el tiempo y de modulación cuya comprobación queda como ejercicio.

**Traslación en el tiempo.** Dado un número  $a \in \mathbb{R}$  y una distribución  $T$ , se verifica que:

$$\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-2\pi i a s} \mathcal{F}T$$

**Propiedad de modulación.** Dado  $a \in \mathbb{R}$ , y una distribución  $T$ , se verifica que:

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i a t} T) = \tau_a \mathcal{F}T$$

Es fácil comprobar que  $g\delta_a = g(a)\delta_a$  pues para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  es

$$\langle g\delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, g\varphi \rangle = g(a)\varphi(a) = \langle g(a)\delta_a, \varphi \rangle$$

Esta igualdad suele escribirse

$$g(x)\delta(x-a) = g(a)\delta(x-a) \quad (4.14)$$

Deducimos que si  $g$  es una función que se anula en 0 se tiene que  $g\delta = 0$ , en particular  $x\delta = 0$ .

La propiedad  $x\delta = 0$  caracteriza a  $\delta$  en el sentido de que si  $T$  es una distribución y se verifica que  $xT = 0$  entonces hay un número  $c$  tal que  $T = c\delta$ . Este resultado (cuya demostración es elemental) lo usaremos a continuación.

Es fácil, por otra parte, comprobar la igualdad  $x \cdot \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right) = 1$  pues para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  se tiene que

$$\left\langle x \cdot \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle = \left\langle \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right), x\varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

Deducimos que si  $T$  es una distribución y se verifica que  $xT = 1$  entonces

$$x \left( T - \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right) \right) = 0 \implies T - \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right) = c\delta \quad (4.15)$$

#### 4.4.16. Teorema de derivación para la transformada de Fourier

Una de las propiedades más interesantes de la transformada de Fourier es que convierte la operación de derivación en un producto; lo que hace que la transformada de Fourier sea una herramienta extraordinariamente útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales.

Recordemos que el teorema de derivación para la transformada de Fourier de funciones dice que

$$\mathcal{F}(f')(s) = 2\pi i s \mathcal{F}f(s) \quad \mathcal{F}(-2i\pi t f(t))(s) = (\mathcal{F}f)'(s)$$

dicho resultado no es válido en general pero sí lo es, por supuesto, para cualquier función de la clase de Schwartz.

Queremos generalizar este resultado para distribuciones:

$$\mathcal{F}(T') = 2\pi i s \mathcal{F}T \quad \mathcal{F}(-2\pi i s T) = (\mathcal{F}T)' \quad (4.16)$$

Probaremos la primera de estas igualdades. Basta observar que para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  se verifica

$$\langle \mathcal{F}(T'), \varphi \rangle = \langle T', \mathcal{F}\varphi \rangle = -\langle T, (\mathcal{F}\varphi)' \rangle = -\langle T, \mathcal{F}(-2i\pi s \varphi) \rangle = -\langle \mathcal{F}T, -2i\pi s \varphi \rangle = \langle 2\pi i s \mathcal{F}T, \varphi \rangle$$

#### 4.4.17. Transformada de Fourier de la función escalón unidad, de la función “signo” y de la distribución “valor principal”

La función “signo” está definida por

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Su derivada generalizada es  $\text{sgn}' = 2\delta$  por lo que  $\mathcal{F}\text{sgn}' = 2$  y como  $\mathcal{F}\text{sgn}' = 2\pi i x \mathcal{F}\text{sgn}$ , deducimos que  $\pi i x \mathcal{F}\text{sgn} = 1$  y, por 4.15, se sigue que hay un número  $c$  tal que

$$\mathcal{F}\text{sgn} = \frac{1}{\pi i} \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right) + c\delta$$

Como la función  $\text{sgn}$  es impar su transformada de Fourier también es impar y también es impar la distribución *valor principal*. Como  $\delta$  es par, la igualdad anterior exige que  $c = 0$ . Hemos obtenido así que:

$$\mathcal{F}\text{sgn} = \frac{1}{\pi i} \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right)$$

En el contexto de la teoría de distribuciones la distribución valor principal suele escribirse

$$\text{vp} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x}$$

siguiendo este convenio escribimos

$$\mathcal{F} \text{sgn} = \frac{1}{\pi i x}$$

A partir de aquí deducimos la transformada de Fourier de  $1/x$ . Como se trata de distribuciones impares resulta

$$\mathcal{F} \left( \frac{1}{x} \right) = -\pi i \text{sgn}$$

Ahora, teniendo en cuenta que la función escalón unidad  $H(t) = 1/2(1 + \text{sgn}t)$ , deducimos que

$$\mathcal{F}H = \frac{1}{2} \left( \delta + \frac{1}{\pi i x} \right)$$

#### 4.4.18. La función generalizada “tren de impulsos”

Supongamos que  $\varphi \in \mathbb{S}$  y sea  $a > 0$ . Es fácil comprobar que la serie  $\sum_{n \geq 1} \varphi(an)$  es absolutamente convergente. En efecto, como  $x^2 \varphi(x)$  tiene límite 0 cuando  $x \rightarrow +\infty$ , se sigue que existe  $M > 0$  tal que  $|x^2 \varphi(x)| \leq M$  para todo  $x \geq 0$ . Por tanto

$$|n^2 a^2 \varphi(na)| \leq M \implies |\varphi(na)| \leq \frac{M}{a^2 n^2}$$

y, por el criterio de comparación, se sigue que la serie  $\sum_{n \geq 1} \varphi(an)$  es absolutamente convergente. De la misma forma, usando que  $x^2 \varphi(x)$  tiene límite 0 cuando  $x \rightarrow -\infty$ , se justifica que la serie  $\sum_{n \geq 1} \varphi(-an)$  es absolutamente convergente. Podemos por tanto escribir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(an) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \varphi(an)$$

Sea  $T_N$  la distribución  $T_N = \sum_{n=-N}^N \delta_{an}$ . Para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$  tenemos que

$$\langle T_N, \varphi \rangle = \sum_{n=-N}^N \langle \delta_{an}, \varphi \rangle = \sum_{n=-N}^N \varphi(an)$$

y deducimos que  $T_N$  converge débilmente, en el sentido de la definición 4.8, a la distribución:

$$\mathbb{I}_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{an}$$

definida por

$$\langle \mathbb{I}_a, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(an) \quad (\varphi \in \mathbb{S})$$

Cuando  $a = 1$  la distribución  $\mathbb{III}_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$  se representa por  $\mathbb{III}$ , y se llama función *tren de impulsos* o función *peine* o función *shah*. La función generalizada  $\mathbb{III}_a$  es periódica con período  $a$ .

Suele escribirse

$$\mathbb{III}_a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{ak}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - ka)$$

Esta función se emplea para representar las muestras de una señal  $f$  a intervalos igualmente espaciados  $a$  segundos. Esto se debe a la siguiente igualdad que resulta de multiplicar la señal  $f$  por dicha función.

$$f(x)\mathbb{III}_a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(ka)\delta(x - ka) \quad (4.17)$$

Es decir, el producto  $f(x)\mathbb{III}_a(x)$  conserva los valores de  $f$  en los múltiplos enteros de  $a$  y pierde cualquier otra información sobre  $f$ ; por eso se interpreta como el resultado de muestrear la señal  $f$  a intervalos igualmente espaciados  $a$  segundos.

La función shah, como toda distribución, tiene una transformada de Fourier que vamos a calcular. Para eso necesitamos un resultado clásico que establece una llamativa igualdad.

**Fórmula de sumación de Poisson.** Para toda  $\varphi \in \mathbb{S}$  se verifica que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) \quad (4.18)$$

De hecho, esta igualdad es válida para funciones más generales que las de la clase de Schwartz pero para dichas funciones es muy fácil de probar. Basta recordar que si  $\varphi \in \mathbb{S}$  (en cuyo caso también  $\mathcal{F}\varphi \in \mathbb{S}$ ) entonces la función  $x^2\varphi(x)$  está acotada en  $\mathbb{R}$  lo que implica que las series en 4.18 son (absolutamente) convergentes y que también converge la serie:

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t - k)$$

y define una función con derivada continua. La función  $\psi$  es periódica con período 1 y tiene un desarrollo en serie de Fourier

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Tenemos que

$$\psi(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$$

Para probar 4.18 probaremos que  $c_n = \mathcal{F}\varphi(n)$ .

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \psi(t) dt = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t - k) \right) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \varphi(t - k) dt = [u = t - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{-k+1} e^{-2\pi i n(u+k)} \varphi(u) du \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{-k+1} e^{-2\pi i n t} e^{-2\pi i n k} \varphi(t) dt = [e^{-2\pi i n k} = 1] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n t} \varphi(t) dt = \mathcal{F}\varphi(n) \end{aligned}$$

Calculemos la transformada de Fourier de la función shah. Para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\mathbb{III}, \varphi \rangle &= \langle \mathbb{III}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k, \mathcal{F}\varphi \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \delta_k, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \delta_k, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k, \varphi \right\rangle = \langle \mathbb{III}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

Deducimos que  $\mathcal{F}\mathbb{III} = \mathbb{III}$ . Una notable propiedad de la función tren de impulsos: su transformada de Fourier es ella misma. Recordando que  $\mathcal{F}\delta_k = e^{-2\pi i k s}$  podemos obtener una interesante igualdad.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n = \mathbb{III} = \mathcal{F}\mathbb{III} = \mathcal{F}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\delta_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s} \quad (4.19)$$

en donde se entiende que la serie  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s}$  es convergente en el sentido de las distribuciones. Es decir, se verifica que

$$\langle \mathbb{III}, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s}, \varphi \right\rangle$$

igualdad que es bien fácil de comprobar usando la fórmula de Poisson:

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s}, \varphi \right\rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s} \varphi(s) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \mathcal{F}\varphi(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) = \langle \mathbb{III}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

Observa que, como la función seno es impar y la función coseno par, se tiene que

$$\sum_{k=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s} \varphi(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) ds + 2 \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi k s) \varphi(s) ds = \left\langle 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2\pi k s), \varphi \right\rangle$$

Por lo que también

$$\mathbb{III} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = 1 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi n x) \quad (4.20)$$

Una relación útil entre  $\sigma_a \mathbb{III}$  y  $\mathbb{III}_a$  viene dada por la igualdad fácil de comprobar:

$$\sigma_a \mathbb{III} = \frac{1}{a} \mathbb{III}_{1/a} \quad (4.21)$$

Usando esta igualdad y su equivalente  $\mathbb{III}_a = \frac{1}{a} \sigma_{1/a} \mathbb{III}$  y recordando el comportamiento de la transformada de Fourier respecto a los cambios de escala, se tiene que

$$\mathcal{F}\mathbb{III}_a = \frac{1}{a} \mathcal{F}(\sigma_{1/a} \mathbb{III}) = \sigma_a \mathcal{F}\mathbb{III} = \sigma_a \mathbb{III} = \frac{1}{a} \mathbb{III}_{1/a}$$

o, lo que es igual,  $\mathbb{III}_a = \frac{1}{a} \mathcal{F}\mathbb{III}_{1/a}$ , es decir

$$\mathbb{III}_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{an} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-an) = \frac{1}{a} \mathcal{F}\mathbb{III}_{1/a} = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\delta_{n/a} = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x n/a} \quad (4.22)$$

Al igual que antes, podemos escribir esta igualdad solamente con cosenos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-an) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \quad (4.23)$$

Deducimos también fácilmente que para  $b \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-b-an) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{a}(x-b)\right) \quad (4.24)$$

Lo repetiré una vez más: todas las igualdades anteriores son igualdades entre distribuciones.

#### 4.4.19. Convolución de una función con una distribución

Es fácil definir la convolución de una función de Schwartz con una distribución. Sea  $\psi \in \mathcal{S}$  y  $T$  una distribución. Se define la convolución  $\psi * T$  como la distribución dada por:

$$\langle \psi * T, \varphi \rangle = \langle T, \psi^- * \varphi \rangle$$

Con esta definición es fácil probar que si  $T_f$  es la distribución definida por una función  $f$  se verifica que  $\psi * T_f = T_{\psi * f}$ .

**Propiedad de convolución de  $\delta$ .** Para toda  $\psi \in \mathcal{S}$  se verifica que

$$\psi * \delta = \psi$$

igualdad que, naturalmente, se interpreta en el sentido de las distribuciones.

En efecto, para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  tenemos que:

$$\langle \psi * \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \psi^- * \varphi \rangle = (\psi^- * \varphi)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^-(-x)\varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\varphi(x) dx = \langle \psi, \varphi \rangle$$

La igualdad  $\psi * \delta = \psi$  suele escribirse en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\psi(y) dy = \psi(x) \quad (4.25)$$

y nos referiremos a ella como *propiedad de localización o de filtrado* de la función  $\delta$ .

De igual forma se obtiene que

$$\psi * \delta_a = \tau_a \psi$$

que suele escribirse como

$$\psi(x) * \delta(x-a) = \psi(x-a) \quad (4.26)$$

**Teorema 4.14** (Teorema de convolución). *Para toda  $\psi \in \mathcal{S}$  y para toda distribución  $T$  se verifica que*

$$\mathcal{F}(\psi * T) = (\mathcal{F}\psi)(\mathcal{F}T) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(\psi T) = \mathcal{F}\psi * \mathcal{F}T \quad (4.27)$$

*igualdades que, naturalmente, se interpretan en el sentido de las distribuciones. Análogas igualdades son válidas para  $\mathcal{F}^{-1}$ .*

En efecto, para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\psi * T), \varphi \rangle &= \langle \psi * T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \psi^- * \mathcal{F}\varphi \rangle && \text{(usando la igualdad } \mathcal{F}\mathcal{F}\psi = \psi^-) \\ &= \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}\psi * \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &\quad \text{(convolución de transformadas de Fourier igual a transformada de Fourier del producto)} \\ &= \langle T, \mathcal{F}((\mathcal{F}\psi)\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}T, (\mathcal{F}\psi)\varphi \rangle = \langle (\mathcal{F}\psi)(\mathcal{F}T), \varphi \rangle \end{aligned}$$

lo que prueba la primera igualdad. La otra igualdad se prueba de forma análoga.

**Convolución con la función  $\mathbb{I}_a$ .** Si  $f$  es una función para la que la convolución con la distribución  $\mathbb{I}_a$  tiene sentido resulta que:

$$f * \mathbb{I}_a = f * \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{ka} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f * \delta_{ka} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - ka) \quad (4.28)$$

que es la periodización de  $f$  con período  $a$ . Es decir, la convolución de una función  $f$  con la función  $\mathbb{I}_a$  lo que hace es periodizar la función  $f$ .

Indiquemos para terminar, que es posible definir, con algunas condiciones, la convolución de dos distribuciones pero no hay una definición de convolución que sea válida para dos distribuciones cualesquiera. Con las definiciones oportunas se prueban, por ejemplo, las igualdades

$$\delta * \delta = \delta, \quad \delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$$

#### Consideraciones sobre la teoría desarrollada.

Antes de llegar aquí te habrás preguntado si vale la pena el esfuerzo realizado. Indudablemente hemos logrado algunos de nuestros propósitos iniciales: dar sentido a la función  $\delta$  y coherencia a los cálculos con la misma; generalizar la transformada de Fourier para incluir señales sinusoidales y hemos podido introducir la función tren de impulsos que se usa mucho en muestreo de señales. Lo cierto es que las funciones  $\delta$ ,  $\text{sgn}$ , función escalón unidad y función rampa, así como la distribución valor principal y la función  $\mathbb{I}_a$ , junto con sus transformadas de Fourier, son de uso constante en el procesamiento de señales y la teoría de distribuciones nos enseña a manejarlas con seguridad. Pero, además, y esto es importante, la teoría de distribuciones permite que realicemos cálculos con una facilidad sorprendente. Con frecuencia en dichos cálculos el punto de partida y el de llegada son “clásicos” pero en los pasos intermedios se usan herramientas de la teoría de distribuciones. Vamos a ver algunos ejemplos de esto que digo.

**Ejemplo 4.15.** Se trata de calcular la transformada de Fourier de la función  $f(t) = e^{-|t|} \cos(2\pi at)$  donde  $a > 0$  es una constante.

La función  $f$  es integrable por lo que su transformada de Fourier está bien definida y, en principio, puede calcularse por integración directa lo que, en este caso, es bien fácil. Pero podemos ahorrarnos todos los cálculos si nos damos cuenta de que  $f$  es producto de dos funciones  $g(t) = e^{-|t|}$  y  $h(t) = \cos(2\pi at)$  cuyas transformadas de Fourier son conocidas:

$$\mathcal{F}g(s) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 s^2} \quad \mathcal{F}h(s) = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})$$

Por el teorema de convolución la transformada de Fourier de  $f$  es la convolución de las transformadas de Fourier de  $g$  y de  $h$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}g(u)\mathcal{F}h(s-u) du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}g(u)(\delta(s-u-a) + \delta(s-u+a)) du \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}g(s-a) + \mathcal{F}g(s+a)) = \frac{1}{1 + 4\pi^2(s-a)^2} + \frac{1}{1 + 4\pi^2(s+a)^2} \end{aligned}$$

Hemos obtenido la transformada de Fourier de  $f$  sin hacer ninguna integral usando el teorema de convolución y las propiedades de  $\delta$ .  $\blacklozenge$

**Ejemplo 4.16.** Tenemos un filtro cuya función de transferencia  $H$  es real y par. Se trata de obtener la respuesta del filtro a la señal  $f(t) = \cos(2\pi at)$ .

La respuesta del filtro a la señal  $f$  viene dada en el dominio del tiempo por  $g = f * h$  donde  $h$  es la respuesta impulso del filtro. La respuesta en el dominio de la frecuencia es  $\mathcal{F}g(s) = \mathcal{F}f(s)H(s)$ . Como  $\mathcal{F}f(s) = \frac{1}{2}(\delta(s-a) + \delta(s+a))$ , deducimos que

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}(\delta(s-a) + \delta(s+a))H(s)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}(\delta(s-a)H(a) + \delta(s+a)H(-a))\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}(\delta(s-a) + \delta(s+a))H(a)\right) = \cos(2\pi at)H(a) \end{aligned}$$

$\blacklozenge$

**Ejemplo 4.17.** El proceso de filtrado de señales, del que ya hemos visto algo, está estrechamente relacionado con el proceso de truncamiento de una señal. Esta es una técnica que consiste en multiplicar la señal de entrada por una *función ventana*. El objetivo de este proceso es suavizar la señal tratando al mismo tiempo de conservar su espectro y eliminando las rápidas oscilaciones en la frecuencia. Es una técnica que se usa con frecuencia antes de calcular la transformada de Fourier discreta de una señal digital. Si  $f$  es la señal original y  $w$  la función ventana, la señal resultante del truncamiento es  $f_w = f w$  y su transformada de Fourier se obtiene por convolución  $\mathcal{F}f_w = \mathcal{F}f * \mathcal{F}w$ . Una función ventana que se utiliza mucho es la siguiente (ventana de Hamming).

$$w(t) = \begin{cases} \cos^2(\pi t), & |t| \leq 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Calculemos su transformada de Fourier.

$$w(t) = \Pi(t) \cos^2(\pi t) = \Pi(t) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) \right)$$

Por tanto su transformada de Fourier es

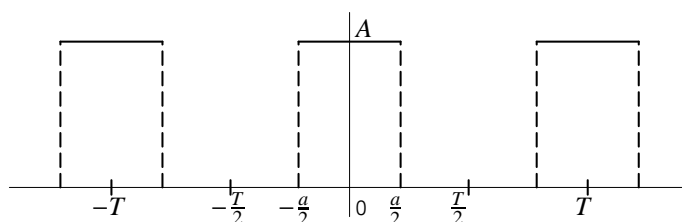
$$\mathcal{F}w(s) = \left( \text{senc} * \left( \frac{1}{2}\delta(s) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\delta(s-1) + \frac{1}{2}\delta(s+1)\right) \right) \right) (s)$$

esto es

$$\mathcal{F}w(s) = \frac{1}{2} \text{senc}(s) + \frac{1}{4} \text{senc}(s-1) + \frac{1}{4} \text{senc}(s+1)$$

$\blacklozenge$

**Ejemplo 4.18.** Calcular la serie de Fourier de la función periódica cuya gráfica es la siguiente.



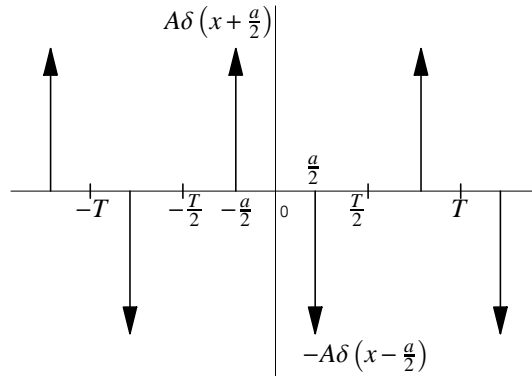
Se trata de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -T/2 \leq x \leq -a/2 \\ A, & -a/2 < x < a/2 \\ 0, & a/2 \leq x \leq T/2 \end{cases}$$



Y además  $f(x) = f(x+T)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . La función  $f$  tiene discontinuidades de salto en los puntos  $x - \frac{a}{2} + nT$  con salto igual a  $A$  y en los puntos  $x + \frac{a}{2} + nT$  con salto igual a  $-A$ . En los demás puntos es derivable con derivada nula. La derivada generalizada de  $f$  viene dada por

$$T'_f = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x + \frac{a}{2} - nT\right) - A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{a}{2} - nT\right)$$



y teniendo en cuenta la igualdad 4.24, obtenemos

$$T'_f = \frac{2A}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \cos\left(\frac{2n\pi}{T}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{T}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right) \right] = -\frac{4A}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

Pongamos

$$f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \quad g_n(x) = -\frac{T}{2n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \quad \lambda_n = -\frac{4A}{T} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{T}\right)$$

Como  $g'_n = f_n$  se sigue que  $T'_{g'_n} = T_{g'_n} = T_{f_n}$ . Por tanto, la igualdad anterior se puede escribir como

$$T'_f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_{f_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T'_{g'_n} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_{g_n} \right)' = \left( T_{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n} \right)'$$

Por tanto, las distribuciones  $T_f$  y  $T_{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n}$  tienen igual derivada y, por tanto, se diferencian en una constante, lo que equivale a afirmar que hay un número  $\lambda_0$  tal que

$$T_f = T_{\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n}$$

lo que implica que en todo punto de continuidad de  $f$  es

$$f(x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n(x) = \lambda_0 + \frac{2Aa}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{T}\right)}{\frac{n\pi a}{T}} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx = 0$$

$\lambda_0$  se calcula fácilmente integrando  $f$  en el intervalo  $[-T/2, T/2]$  resultando  $\lambda_0 = Aa/T$ . Hemos obtenido finalmente

$$f(x) = \frac{Aa}{T} + \frac{2Aa}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{T}\right)}{\frac{n\pi a}{T}} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

igualdad válida en todo punto de continuidad de  $f$ .

**Ejemplo 4.19.** Calcular la serie de Fourier de la función periódica  $f$  cuya gráfica es la siguiente.

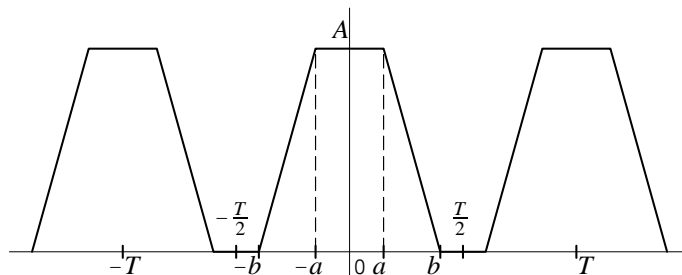


Figura 4.11: Gráfica de  $f$

Observa que  $f$  es una función par con período  $T$ . Su derivada  $f'$  está representada en la gráfica siguiente.

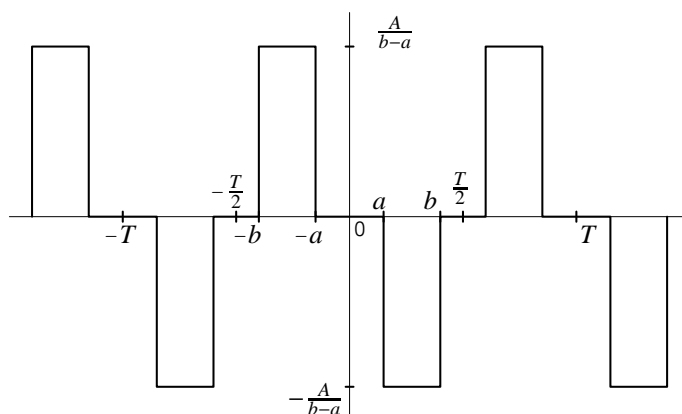


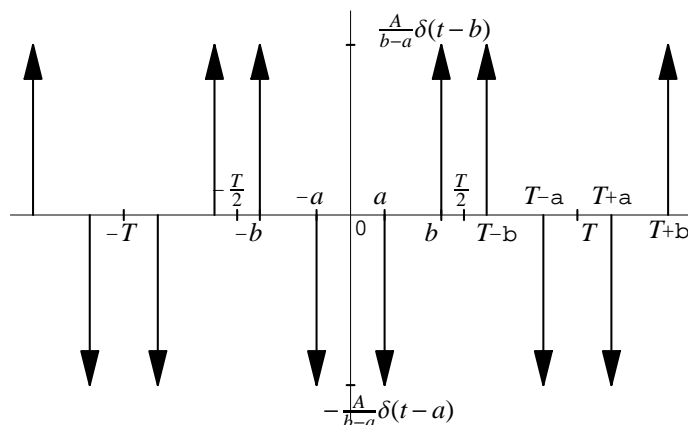
Figura 4.12: Gráfica de  $f'$

Observa que  $f'$  es una función impar con período  $T$ . En el intervalo  $[-T/2, T/2]$  la función  $f'$  tiene discontinuidades de salto en los puntos  $-b, -a, a, b$  siendo el salto en  $-b, b$  positivo de magnitud  $\frac{A}{b-a}$  y el salto en  $-a, a$  negativo de magnitud  $\frac{-A}{b-a}$ . Por periodicidad,  $f'$  tiene saltos de magnitud positiva en todos los puntos de la forma  $\{\pm b + nT : n \in \mathbb{Z}\}$  y tiene saltos de magnitud negativa en todos los puntos de la forma  $\{\pm a + nT : n \in \mathbb{Z}\}$ .

La derivada segunda  $f''$  está representada en la gráfica siguiente.

Se sigue que la derivada generalizada de  $f'$  viene dada por

$$\begin{aligned} T'_{f'} &= \frac{A}{b-a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(x \pm b + nT) - \delta(x \pm a + nT)) \\ &= \frac{2A}{(b-a)T} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos\left(\frac{2n\pi}{T}(x \pm b)\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{T}(x \pm a)\right) \right) \end{aligned}$$

Figura 4.13: Gráfica de  $f''$ 

Poniendo  $\beta_n = \frac{2n\pi}{T}$  y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\cos(\beta_n(x+b)) + \cos(\beta_n(x-b)) &= 2\cos(\beta_nb)\cos(\beta_nx) \\ \cos(\beta_n(x+a)) + \cos(\beta_n(x-a)) &= 2\cos(\beta_na)\cos(\beta_nx)\end{aligned}$$

resulta

$$T'_{f'} = \frac{4A}{(b-a)T} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(\beta_nb) - \cos(\beta_na)) \cos(\beta_nx)$$

Razonando como en el ejercicio anterior deducimos que  $T'_{f'} = T'_g$  donde

$$g(x) = \frac{4A}{(b-a)T} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(\beta_nb) - \cos(\beta_na)) \frac{1}{\beta_n} \operatorname{sen}(\beta_nx)$$

Por tanto  $f'$  y  $g$  coinciden (en todo punto de continuidad de  $f'$ ) salvo una constante y como ambas coinciden en  $x=0$  se sigue que

$$f'(x) = \frac{4A}{(b-a)T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_nb) - \cos(\beta_na)}{\beta_n} \operatorname{sen}(\beta_nx)$$

Finalmente, por integración de esta igualdad obtenemos la serie de Fourier de  $f$  excepto el primer término de la misma que, al igual que el ejercicio anterior, debe calcularse por separado resultando, después de simplificar, que

$$f(x) = \frac{A}{T}(a+b) + \frac{AT}{\pi^2(b-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_na) - \cos(\beta_nb)}{n^2} \cos(\beta_nx)$$

igualdad válida para todo  $x \in \mathbb{R}$ . ♦

Los ejemplos anteriores, en los que he sido más cuidadoso con las justificaciones de los cálculos de lo que suele ser usual en la mayoría de los textos, ponen de manifiesto que el formalismo de las distribuciones proporciona una poderosa herramienta de cálculo. Una vez que uno se acostumbra a su uso se adquiere confianza y seguridad en los resultados obtenidos, y si alguna vez surge alguna duda en la corrección de los cálculos siempre puede volverse a las definiciones dadas para comprobarlos.

Para terminar esta ya larga sección vamos a obtener un resultado básico en teoría de muestreo.

### 4.4.20. Muestreo e interpolación

Vamos a estudiar el siguiente problema:

- Dada una señal  $f(t)$  y un conjunto de valores muestrales de la misma, es decir, valores de la señal en un conjunto de puntos  $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots$ , ¿hasta dónde es posible recuperar valores de la señal  $f(t)$  en otros puntos distintos de los valores muestrales?

Esto puede verse como un problema de interpolación: queremos deducir valores de  $f(t)$  a partir de unos pocos valores conocidos. Es evidente que no cabe esperar que podamos hacer esto si no se tiene algún conocimiento de la señal; pues por un conjunto finito de puntos dados en el plano pueden pasar infinitas curvas distintas, ¿cómo puedo saber de cuál de ellas proceden mis valores? Está claro que si queremos recuperar la señal o parte de ella a partir de sus valores muestrales es preciso tener algún conocimiento previo de la señal. Por poner un caso sencillo, si sabemos que la señal es un polinomio de grado  $n$  entonces  $n + 1$  valores la determinan de forma única.

#### Señales de banda limitada

Supongamos que tomamos muestras de una señal analógica  $f(t)$  cada  $T_s$  segundos. Representemos por

$$x(n) = f(nT_s)$$

la señal en tiempo discreto obtenida de esta forma. El intervalo de tiempo  $T_s$  (medido en segundos) entre cada dos muestras consecutivas se llama *período de muestreo o intervalo de muestreo*, y su recíproco  $\nu_s = 1/T_s$  se llama *frecuencia de muestreo* y es igual al número de muestras por segundo. Supongamos que nuestra señal es una senoide

$$f(t) = A \operatorname{sen}(2\pi \nu t + \phi)$$

en cuyo caso

$$x(n) = f(nT_s) = A \operatorname{sen}(2\pi \nu nT_s + \phi) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n \nu}{\nu_s} + \phi\right)$$

La señal  $x(n)$  es una *senoide discreta* de frecuencia

$$\nu_d = \frac{\nu}{\nu_s}$$

Observa que dos senoideas discretas de la forma

$$x_1(n) = A \operatorname{sen}(2\pi n \nu_1 + \phi) \quad x_2(n) = A \operatorname{sen}(2\pi n \nu_2 + \phi) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

cuyas frecuencias se diferencian en un número entero,  $\nu_2 = \nu_1 + k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , son idénticas.

Dado un número cualquiera  $\nu_1$  hay un número entero  $k$  tal que  $-1/2 < \nu_1 - k \leq 1/2$  (basta tomar  $k = \max\{q \in \mathbb{Z} : q < \nu_1 + 1/2\}$ ). Para una fase y amplitud dadas, una senoide con frecuencia  $\nu_1$  es idéntica a la senoide (con la misma fase y amplitud) de frecuencia  $\nu_2 = \nu_1 - k \in ]-1/2, 1/2]$ . Debido a ello, para senoideas discretas solamente se consideran frecuencias en el intervalo  $] -1/2, 1/2]$ .

Volviendo a nuestra senoide discreta  $x(n) = f(nT_s)$  con frecuencia  $\nu_d = \frac{\nu}{\nu_s}$  la condición  $-1/2 < \nu_d \leq 1/2$  es equivalente a

$$-\frac{1}{2T_s} = -\frac{\nu_s}{2} < \nu \leq \frac{\nu_s}{2} = \frac{1}{2T_s}$$

Es decir, la máxima frecuencia de una señal analógica que puede determinarse cuando dicha señal se muestrea con una frecuencia de muestreo  $\nu_s = 1/T_s$  es igual a  $1/2T_s$ .

Lo anterior nos dice que para recuperar una señal analógica sinusoidal de frecuencia  $\nu$  debemos muestrearla con una frecuencia de muestreo tal que  $1/2T_s > \nu$ , es decir,  $\nu_s > 2\nu$ .

Observa que una senoide de frecuencia  $\nu$  recorre la mitad de su período en  $1/2\nu$  segundos. La condición anterior puede escribirse  $T_s < 1/2\nu$ , es decir el intervalo de tiempo que separa dos muestras consecutivas es menor que la mitad del período, por lo que esta condición garantiza que el número de muestras tomadas en un segundo,  $\nu_s = 1/T_s$ , es mayor que  $2\nu$  por lo que *tiene que haber al menos tres de dichas muestras en un mismo período de la señal*. Pero es que tres muestras *de un mismo período* es todo lo que se necesita para determinar una senoide pues son tres los parámetros que figuran en la expresión  $f(t) = A \text{sen}(2\pi\nu t + \phi)$  y es razonable suponer que con tres ecuaciones podríamos calcular los valores de dichos parámetros y para eso necesitamos conocer los valores de la función en tres puntos distintos *de un mismo período*.

Acabamos de ver que el muestreo de una señal analógica de la forma

$$f(t) = A \text{sen}(2\pi\nu t + \phi)$$

con una frecuencia de muestreo  $\nu_s = 1/T_s$  produce una señal discreta

$$x(n) = A \text{sen}(2\pi\nu_d n + \phi)$$

donde  $\nu_d = \nu/\nu_s$  y hemos justificado que para poder recuperar la señal analógica a partir del conocimiento de sus muestras, la frecuencia de muestreo  $\nu_s$  debe ser suficientemente grande para que  $-1/2 < \nu_d < 1/2$ . Supongamos que  $\nu_d$  cumple esta condición y veamos lo que ocurre si las señales

$$f_k(t) = A \text{sen}(2\pi(\nu + k\nu_s)t + \phi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

se muestrean con una frecuencia de muestreo  $\nu_s$ . Las señales discretas obtenidas son

$$x_k(n) = f_k(nT_s) = A \text{sen}(2\pi(\nu + k\nu_s)nT_s + \phi) = A \text{sen}\left(2\pi\frac{\nu + k\nu_s}{\nu_s}n + \phi\right) = A \text{sen}(2\pi\nu_d n + \phi)$$

es decir, la señal discreta que obtenemos es idéntica a la obtenida anteriormente. Resulta así que muestreando una senoide con una frecuencia de muestreo “pequeña”, donde por “pequeña” se entiende menor que el doble de la frecuencia de la senoide, las muestras que obtenemos pueden ser iguales a las que se obtendrían muestreando otra senoide de frecuencia menor. Cuando esto ocurre se dice que se ha producido un *enmascaramiento* (el término usado en inglés es *aliasing*) de la señal.

En la figura 4.14 puedes ver un ejemplo de enmascaramiento o *aliasing*. Una senoide de frecuencia 17/16 Hz (representada en azul) se ha muestreado con una frecuencia de muestreo de una muestra por segundo. En la figura se han representado 16 muestras y se observa cómo dichas muestras coinciden con muestras de otra senoide de frecuencia 1/16 Hz (representada en color violeta). Por tanto las muestras tomadas nos llevarían a reconstruir esta señal y no la original: se ha producido un enmascaramiento de la señal muestreada por otra señal de menor frecuencia.

Lo dicho para sinusoides se extiende inmediatamente para señales de la forma

$$\sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(2\pi\nu_k t + \phi_k)$$

en las cuales es el armónico de mayor frecuencia  $\nu_n$  el que nos dice cómo debe ser muestreada dicha señal para poder ser recuperada a partir de sus muestras: debemos muestrear con una frecuencia de muestreo  $\nu_s$  mayor que  $2\nu_n$ . Haciéndolo así también tenemos la certeza de que estamos muestreando adecuadamente las señales de menor frecuencia que componen la señal dada.

Todo lo dicho tiene sentido para señales que tienen una “máxima frecuencia” cosa que no siempre ocurre pues, al menos en teoría, una señal puede tener componentes de frecuencia arbitrariamente grandes; por ejemplo cualquier señal periódica cuya serie de Fourier tenga infinitos coeficientes no nulos. Esto lleva al siguiente importante concepto.

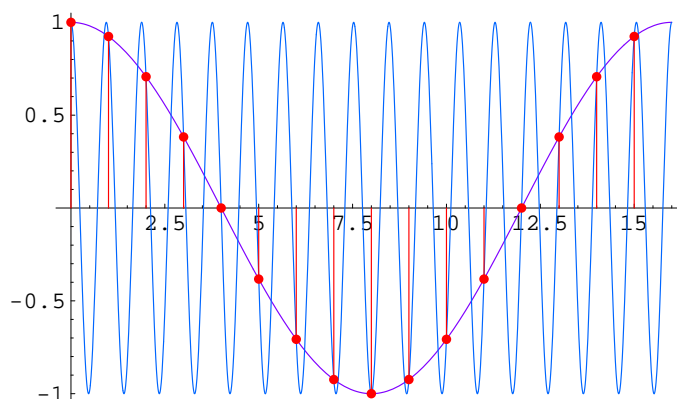


Figura 4.14: Enmascaramiento o aliasing de una señal por otra de menor frecuencia

**Definición 4.20.** Una señal  $f(t)$  se dice que es una señal de *banda limitada* si existe un número  $0 < p < +\infty$  tal que  $\mathcal{F}f(s) = 0$  siempre que  $|s| \geq p/2$ . El más pequeño número  $p$  para el cual esta condición se cumple se llama la *amplitud de banda* de  $f(t)$ .

En otros términos una señal es de banda limitada cuando su espectro está acotado.

#### 4.4.21. Interpolación de señales de banda limitada

Todo está preparado ya para justificar que una señal de banda limitada muestreada de forma apropiada puede ser *exactamente* reconstruida a partir de sus muestras. Aunque en principio este resultado parece no tener nada que ver con transformadas de Fourier, convolución de funciones y teoría de distribuciones, nosotros vamos a resolverlo de forma bastante espectacular usando muchos de los resultados vistos anteriormente y, muy especialmente, la función  $\text{III}$ .

#### 4.4.22. Teorema de muestreo de Shannon y Whittaker

Consideremos una señal  $f(t)$  de banda limitada y supongamos que  $p > 0$  es tal que  $\mathcal{F}f(s) = 0$  para  $|s| \geq p/2$ . Teniendo en cuenta la igualdad 4.28, periodizamos  $\mathcal{F}f$  con  $\text{III}_p$  (aquí se usa que la señal es de banda limitada, para que esta periodización tenga sentido) y después volvemos a recuperar  $\mathcal{F}f$  multiplicando por la función rectángulo  $\Pi_p$ . Obtenemos así la identidad:

$$\mathcal{F}f = \Pi_p(\mathcal{F}f * \text{III}_p)$$

Ahora todo se reduce a tomar transformada inversa de Fourier en esta igualdad.

$$\begin{aligned}
f(t) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}f(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\Pi_p(\mathcal{F}f * \mathbb{I}_p))(t) && \text{(por 4.27)} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\Pi_p(t) * \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f * \mathbb{I}_p)(t) && \text{(por 4.27)} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\Pi_p(t) * (\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}f(t) \mathcal{F}^{-1} \mathbb{I}_p(t)) \\
&= p \operatorname{senc}(pt) * \left(f(t) \frac{1}{p} \mathbb{I}_{1/p}(t)\right) && \text{(por 4.17)} \\
&= \operatorname{senc}(pt) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{p}\right) \delta\left(t - \frac{k}{p}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{p}\right) \operatorname{senc}(pt) * \delta\left(t - \frac{k}{p}\right) && \text{(por 4.26)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{p}\right) \operatorname{senc}\left(p\left(t - \frac{k}{p}\right)\right)
\end{aligned}$$

Hemos demostrado el teorema clásico de muestreo que podemos enunciar como sigue:

- Si  $f(t)$  es una señal de banda limitada tal que  $\mathcal{F}f(s) = 0$  para  $|s| \geq p$ , entonces

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{p}\right) \operatorname{senc}\left(p\left(t - \frac{k}{p}\right)\right)$$

Observa cómo la anchura de banda determina la mínima frecuencia de muestreo para reconstruir la señal. Si el espectro de la señal está comprendido entre  $-\nu_{\max}$  y  $\nu_{\max}$ , entonces el resultado anterior nos dice que podemos recuperar la señal muestreándola con una frecuencia de muestreo mayor que  $2\nu_{\max}$ . La frecuencia  $2\nu_{\max}$  se llama *frecuencia de Nyquist*.

#### 4.4.23. Espectro de una señal muestreada

Supondremos que  $f(t)$  es una señal de banda limitada, siendo  $2\nu_c$  la frecuencia Nyquist, es decir,  $\mathcal{F}f(s) = 0$  para  $|s| \geq \nu_c$ . Muestrear la señal  $f(t)$  cada  $a$  segundos es multiplicar  $f$  por la función  $\mathbb{I}_a$  como se pone de manifiesto en la igualdad 4.17. Para calcular el espectro de la señal muestreada debemos calcular la transformada de Fourier de  $f\mathbb{I}_a$ . Tenemos que

$$\mathcal{F}(f\mathbb{I}_a)(s) = (\mathcal{F}f * \mathcal{F}\mathbb{I}_a)(s) = \frac{1}{a} (\mathcal{F}f * \mathbb{I}_{1/a})(s) = \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f\left(s - \frac{k}{a}\right) \quad (4.29)$$

Es decir, la transformada de Fourier de la señal muestreada a intervalos regulares de  $a$  segundos es igual a la periodización con período  $1/a$  de la transformada de Fourier de la señal (más un cambio de escala debido al factor  $1/a$ ).

Deducimos que

$$\{s \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(f\mathbb{I}_a)(s) \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{s + \frac{k}{a} : \mathcal{F}f(s) \neq 0\right\} \quad (4.30)$$

Por tanto si  $s$  está en el espectro de la señal muestreada entonces  $s \pm 1/a$  también está. Podemos expresar esto diciendo que el espectro de la señal muestreada a intervalos regulares de  $a$  segundos es un conjunto periódico con período  $1/a$ . Por tanto si  $1/a > 2\nu_c$  los trasladados del espectro de  $f$  no se pisan y el espectro de  $f\mathbb{I}_a$  coincide con el espectro de  $f$  en el intervalo  $[-\nu_c, \nu_c]$  lo que explica que podamos recuperar la señal  $f$ . Si, por el contrario,  $1/a < 2\nu_c$  entonces los trasladados del espectro de  $f$  se solapan y el espectro de  $f\mathbb{I}_a$  no coincide con el espectro de  $f$  en el intervalo  $[-\nu_c, \nu_c]$ . La frecuencia de Nyquist es justamente el valor de  $a$  tal que  $1/a = 2\nu_c$ .

## 4.5. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una de las herramientas fundamentales de la matemática aplicada debido principalmente a su gran utilidad para resolver problemas de valores iniciales.

**Definición 4.21.** La transformada de Laplace de una función  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  se define como la función de variable compleja

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.31)$$

### Observaciones

- En la definición anterior  $s$  es una variable compleja. En lo que sigue escribiremos  $s = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- Hay una relación fácil de establecer entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace de una función  $f$ . Para cada valor fijo de  $x \in \mathbb{R}$  tenemos que:

$$\mathcal{L}f(x + iy) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(x+iy)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t)e^{-iyt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_x(t)e^{-iyt} dt = \mathcal{F}h_x(y/2\pi) \quad (4.32)$$

donde  $h_x$  es la función

$$h_x(t) = \begin{cases} e^{-xt} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- A diferencia de la transformada de Fourier  $\mathcal{F}f(s)$  de una función  $f(t)$ , que cuando existe está definida para todos los valores del parámetro real  $s$ , la transformada de Laplace de una función  $f$  solamente está definida para ciertos valores de  $s$  que constituyen lo que se llama el *dominio de convergencia de la integral* el cual depende en cada caso de la función  $f$ . Se demuestra que si la integral 4.31 existe para un valor  $s_0$  entonces también existe para todo  $s$  complejo con  $\text{Re}(s) > \text{Re}(s_0)$ . Esto implica que el dominio de convergencia es en un semiplano o bien todo el plano.
- Es importante notar que

$$|e^{-st}| = |e^{-xt-iyt}| = |e^{-xt} e^{-iyt}| = e^{-xt} |e^{-iyt}| = e^{-xt}$$

- Se dice que  $f$  es de *orden exponencial* si hay algún número  $a \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-at} = 0 \quad (4.33)$$

Teniendo en cuenta que si  $c > 0$  la integral  $\int_0^{\infty} e^{-ct} dt = 1/c < +\infty$  y la observación anterior, se deduce que si  $f$  es una función de orden exponencial que verifica 4.33, entonces la transformada de Laplace de  $f$  está definida para todo  $s$  con  $\text{Re}(s) > a$ .

- Algunos autores definen la transformada de Laplace mediante la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

que suele llamarse *transformada de Laplace bilátera* la cual coincide con la transformada de Laplace usual para funciones que se anulan en  $] -\infty, 0[$ . El dominio de convergencia de la transformada de Laplace bilátera es una banda vertical en el plano o un semiplano o todo el plano.



- Una condición suficiente para que la integral 4.31 exista para todo  $s$  con  $\operatorname{Re}(s) > 0$  es que  $f$  sea una función de cuadrado integrable, es decir,  $f \in L^2(0, \infty)$ .
- Suele emplearse la notación  $\mathcal{L}(f(t))(s)$  para representar la transformada de Laplace de la función  $f$  evaluada en un punto  $s$ . Esta notación se presta a veces a confusiones pero es inevitable usarla y así lo haremos en lo que sigue.

### 4.5.1. Propiedades de la transformada de Laplace

#### Linealidad

La transformada de Laplace es un operador lineal.

$$\mathcal{L}(\lambda f + \beta g) = \lambda \mathcal{L}f + \beta \mathcal{L}g$$

#### Teorema de derivación

La transformada de Laplace  $\mathcal{L}f(s)$  de una función  $f \in L^2(0, \infty)$  es una función derivable en sentido complejo (holomorfa) en su dominio de convergencia y su derivada viene dada por

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(f(t))(s) = -\mathcal{L}(t f(t))(s) \quad (4.34)$$

En particular,  $\mathcal{L}f(s)$  es una función continua y, además, se verifica que  $\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} \mathcal{L}f(s) = 0$ .

#### Teorema de integración

Sea  $f$  continua a trozos en  $[0, +\infty[$  y de orden exponencial verificando  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-at} = 0$ . Supongamos que  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)/t$  existe y sea  $F(s)$  la transformada de Laplace de  $f$ . Entonces se verifica que

$$\int_s^\infty F(u) du = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) \quad (s > a) \quad (4.35)$$

#### Transformada de Laplace de una derivada

**A)** Supongamos que  $f$  es continua en  $]0, +\infty[$ , de orden exponencial y tiene derivada  $f'$  que es continua a trozos en  $[0, +\infty[$ . Entonces se verifica la igualdad

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s \mathcal{L}(f(t))(s) - f(0^+) \quad (4.36)$$

donde  $f(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)$ .

**B)** En las mismas hipótesis anteriores, supongamos que  $f$  tiene discontinuidades de salto en los puntos  $t_1 < t_2 < \dots < t_q$ , entonces se verifica que

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s \mathcal{L}(f(t))(s) - f(0^+) - \sum_{j=1}^q e^{-s t_j} (f(t_j^+) - f(t_j^-)) \quad (4.37)$$

**C)** Supongamos que  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$  son continuas en  $]0, +\infty[$  y de orden exponencial y que  $f^{(n)}(t)$  es continua a trozos en  $[0, +\infty[$ , entonces se verifica que

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n \mathcal{L}(f(t))(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (4.38)$$

Estas propiedades son las responsables de la extraordinaria utilidad que tiene la transformada de Laplace para estudiar ecuaciones diferenciales.

### Propiedades de traslación y cambio de escala

Si  $\mathcal{L}f(s)$  está definida para  $\operatorname{Re}(s) > c$  y  $a \in \mathbb{C}$ , entonces se verifica que

$$\mathcal{L}(f(t))(s-a) = \mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) \quad (\operatorname{Re}(s-a) > c) \quad (4.39)$$

Dado un número  $b > 0$  se verifica que

$$\mathcal{L}(H(t-b)f(t-b))(s) = e^{-bs} \mathcal{L}(f(t))(s) \quad (4.40)$$

donde  $H$  es la función escalón unidad.

Dado un número real  $a \neq 0$  se verifica que

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{|a|} \mathcal{L}(f(t))\left(\frac{s}{a}\right) \quad (4.41)$$

**Teorema de convolución.** Sean  $f$  y  $g$  funciones de orden exponencial y definamos

$$f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

Entonces se verifica que

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f \mathcal{L}g \quad (4.42)$$

## 4.5.2. Inversión de la transformada de Laplace

Definimos la transformada de Laplace inversa como el operador  $\mathcal{L}^{-1}$  que a una función  $F(s) = \mathcal{L}f(s)$  hace corresponder la función  $f$ .

$$\mathcal{L}^{-1}F = f \iff \mathcal{L}f = F$$

Se usa la notación  $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t)$  para indicar la transformada de Laplace inversa de  $F$  evaluada en  $t$ .

La definición anterior está muy bien pero sirve de muy poco. Si tenemos que aplicar la definición dada para calcular transformadas inversas de Laplace, necesitamos tener alguna práctica para que cuando nos den una función seamos capaces de construir otra función cuya transformada de Laplace sea dicha función. Sin embargo, a pesar de que este procedimiento es muy rudimentario es el que suele seguirse.

Es fácil desarrollar una teoría sencilla para obtener transformadas de Laplace inversas de funciones racionales sin más que descomponerlas en fracciones simples. Esto, junto con el teorema de convolución y las propiedades de traslación, da lugar a unas técnicas que tienen éxito en los casos ordinarios (veremos unos pocos ejemplos en lo que sigue) pero que eluden el auténtico problema que no es otro que el de la inversión de una transformada de Laplace. Es decir, así como para la transformada de Fourier se dispone de un teorema de inversión que nos proporciona una expresión sencilla para la transformada de Fourier inversa, la situación en lo que se refiere a la transformada de Laplace no es tan cómoda. Ello se debe a que la transformada de Laplace convierte funciones complejas de una variable real en funciones complejas *de variable compleja*. Por eso, el teorema de inversión para la transformada de Laplace implica una integración en el campo complejo lo que queda fuera del alcance de estas notas.

### 4.5.3. Transformada de Laplace de una distribución

La transformada de Laplace de una distribución  $T$  es la distribución  $\mathcal{L}T$  definida para toda  $\varphi \in \mathcal{S}$  por la igualdad

$$\langle \mathcal{L}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{L}\varphi \rangle$$

La transformada de Laplace de la función  $\delta$  es la función escalón unidad  $H$ . Pues

$$\langle \mathcal{L}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{L}\varphi \rangle = \mathcal{L}\varphi(0) = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x) dx = \langle H, \varphi \rangle$$

Como en la teoría de la transformada de Laplace solamente se consideran funciones definidas en los reales positivos y como para todo  $t > 0$  es  $H(t) = 1$ , la igualdad  $\mathcal{L}\delta = H$  suele escribirse  $\mathcal{L}\delta = 1$ .

Es fácil comprobar que la transformada de Laplace de la derivada  $n$ -ésima de  $\delta$  viene dada por

$$\mathcal{L}(\delta^{(n)})(s) = s^n$$

## 4.6. Ejemplos y aplicaciones

**Ejemplo 4.22.** Transformada de Laplace de una exponencial, del seno y del coseno.

Sea  $f(t) = e^{at}$  donde  $a \in \mathbb{C}$ . Tenemos que para  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{at})(s) &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-(s-a)t} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_{t=0}^{t=u} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{e^{-(s-a)u}}{s-a} \right) = \frac{1}{s-a} \end{aligned} \quad (4.43)$$

pues para  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$

$$|e^{-(s-a)u}| = e^{-u\operatorname{Re}(s-a)} \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow +\infty)$$

Deducimos que para  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}(\omega t))(s) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (4.44)$$

Análogamente

$$\mathcal{L}(\operatorname{cos}(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (4.45)$$

♦

**Ejemplo 4.23.** Transformada de Laplace de una función polinómica.

Como caso particular del ejemplo anterior para  $a = 0$ , tenemos que la transformada de Laplace de la función escalón unidad  $H(t)$  viene dada por  $\mathcal{L}H(s) = \frac{1}{s}$ . Usando el teorema de derivación deducimos que

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.46)$$

Este resultado, junto con la linealidad, permite obtener enseguida la transformada de Laplace de una función polinómica.

Además, teniendo en cuenta la propiedad de traslación 4.39, deducimos que

$$\mathcal{L}(e^{at} t^n)(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \operatorname{Re}(s-a) > 0) \quad (4.47)$$

♦

**Ejemplo 4.24.** Teniendo en cuenta la igualdad 4.44 y el teorema de derivación y que

$$\frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = -\frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

obtenemos

$$\mathcal{L}(t \operatorname{sen}(\omega t))(s) = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (4.48)$$

Análogamente

$$\mathcal{L}(t \operatorname{cos}(\omega t))(s) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (4.49)$$

Si los resultados anteriores los combinas con las propiedades de desplazamiento y el teorema de convolución podrás calcular fácilmente transformadas de Laplace de productos de polinomios por funciones seno y coseno y exponenciales.

♦

**Ejemplo 4.25.** Vamos a calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right)$$

Descomponiendo en fracciones simples tenemos que

$$\frac{s+1}{s^2(s-1)} = -\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s-1}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-1}\right) = -2 - t + 2e^t$$

♦

**Ejemplo 4.26.** Vamos a calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right)$$

La descomposición en fracciones simples es

$$\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2} = -\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right) = -\cos t + e^t + te^t$$

♦

**Ejemplo 4.27.** Calculemos  $\mathcal{L}(\operatorname{sen}^2(\omega t))$ .

Sea  $f(t) = \operatorname{sen}^2(\omega t)$ . Tenemos que  $f'(t) = 2\omega \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{cos}(\omega t) = \omega \operatorname{sen}(2\omega t)$ . Teniendo en cuenta la igualdad 4.36, se verifica que

$$\mathcal{L}(\omega \operatorname{sen}(2\omega t)) = s \mathcal{L}(\operatorname{sen}^2(\omega t))$$

de donde

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}^2(\omega t)) = \frac{\omega}{s} \frac{2\omega}{s^2 + 4\omega^2} = \frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$$

♦

**Ejemplo 4.28.** Se trata de calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right)$$

Puede hacerse una descomposición en fracciones simples pero es más rápido si nos damos cuenta de que

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2}\mathcal{L}(t^2)\mathcal{L}(\text{sen } t)$$

y usamos el teorema de convolución (4.42) para deducir que

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)} = \frac{1}{2}\mathcal{L}(t^2 * \text{sen } t) \implies \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right) = \frac{1}{2}t^2 * \text{sen } t = \frac{1}{2}(t^2 + 2\cos t - 2)$$

♦

**Ejemplo 4.29.** Las ecuaciones en diferencias finitas lineales pueden resolverse con ayuda de la transformada de Laplace. Veamos un ejemplo.

Se trata de resolver la ecuación

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

Para ello definamos

$$y(t) = a_n \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Con lo cual la ecuación se convierte en

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0 \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (4.50)$$

Tomando transformadas de Laplace tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y(t+2)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} y(t+2) dt = [u = t+2] = \int_2^{\infty} e^{-s(u-2)} y(u) du = \\ &= e^{2s} \int_0^{\infty} e^{-su} y(u) du - e^{2s} \int_0^2 e^{-su} y(u) du \\ &= e^{2s} \mathcal{L}(y(t)) - e^{2s} \int_0^1 e^{-su} y(0) du - e^{2s} \int_1^2 e^{-su} y(1) du \\ &= e^{2s} \mathcal{L}(y(t)) - \frac{e^s}{s}(1 - e^{-s}) \end{aligned}$$

Análogamente

$$\mathcal{L}(y(t+1)) = e^s \mathcal{L}(y(t))$$

Con lo que la ecuación 5.43 se convierte en

$$e^{2s} \mathcal{L}(y(t)) - \frac{e^s}{s}(1 - e^{-s}) - 3e^s \mathcal{L}(y(t)) + 2\mathcal{L}(y(t)) = 0$$

de donde fácilmente se obtiene que

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 2e^{-s})} - \frac{1}{s}$$

Teniendo ahora en cuenta que para  $a > 0$  y notando  $E(t)$  la función *parte entera* se verifica que

$$\mathcal{L}(a^{E(t)}) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})} \quad (\text{Re}(s) > \text{máx}\{0, \log a\})$$

concluimos que

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(2^{E(t)}) - \mathcal{L}1 = \mathcal{L}(2^{E(t)} - 1)$$

de donde resulta finalmente

$$a_n = 2^n - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

♦

### 4.6.1. Ejercicios

1. Calcula, usando los ejemplos anteriores y las propiedades de la transformada de Laplace, sin necesidad de hacer integrales, las transformadas de Laplace de las funciones siguientes:

a)  $\cosh(\omega t)$ ,  $\sinh(\omega t)$  (seno hiperbólico y coseno hiperbólico).

b)  $e^{at} \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $e^{at} \cos(\omega t + \varphi)$ .

c)  $f(t) = 0$  si  $0 \leq t \leq 1$ ,  $f(t) = (t-1)^2$  si  $t > 1$ .

d)  $f(t) = \sin t$  si  $t \geq 3$ ,  $f(t) = 0$  si  $0 \leq t < 3$ .

e)  $\frac{1 - e^{-t}}{t}$

f)  $\frac{\sin t}{t}$

2. Justifica la igualdad

$$\mathcal{L}(a^{E(t)}) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})} \quad (\operatorname{Re}(s) > \max\{0, \log a\})$$

3. Calcula las transformadas de Laplace inversas de las siguientes funciones

a)  $\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{(b-a)s}$  donde  $0 \leq a < b$

b)  $\frac{e^{-2s}}{s^2 + 1}$

c)  $\frac{s}{s^2 + 4s + 1}$

d)  $\log\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$  donde  $a > 0, b > 0$ .

e)  $\frac{s-a}{s+a}$

4. Justifica la igualdad

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}f(s)}{s}\right)(t) = \int_0^t f(u) du$$

Aplicación: Calcula la transformada de Laplace de la función *seno integral*:

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

5. Supongamos que  $f$  es una función periódica con período  $T$ . Sea  $F(s)$  la transformada de Laplace de  $f$  y pongamos

$$F_1(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

Justifica que

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$$

Aplicación: Calcula la transformada de Laplace de la función  $f(t) = |\text{sen}(\omega t)|$ .

---

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

---

### 5.1. Generalidades

<sup>1</sup> Una ecuación diferencial es una ecuación en la que se relacionan derivadas de una función desconocida con otras funciones. Las ecuaciones siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales.

- 1)  $y' - x \operatorname{sen} x = 1$ ;
- 2)  $y'' + (x^2 - 1)y' + 3y \cos x - 4x = 2$ ;
- 3)  $(x'')^2 + 3x' + e^t + t^2 - 1 = 0$ ;
- 4)  $\sqrt{(y')^2 + \operatorname{sen}^2(x) + 1} + \log(1 + (y')^2) = 1 + \operatorname{sen}(yy') + e^{x^2+x+1}$ ;
- 5)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + 4xy$ .

En 1), 2) y 4) se entiende que  $y$  es la función incógnita y la variable independiente es  $x$ . En 3) se entiende que la función incógnita es  $x$  y la variable independiente es  $t$ . En 5) se entiende que la función incógnita es  $z$  y las variables dependientes son  $x$  e  $y$ .

Si en la ecuación hay derivadas respecto de una sola variable independiente se dice que es una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO); y si hay derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes se llama ecuación en derivadas parciales (EDP).

Es frecuente usar la notación de Leibniz  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ,  $\frac{d^3y}{dx^3}$  para representar, respectivamente, las derivadas primera, segunda, tercera y, en general,  $\frac{d^n y}{dx^n}$  para representar la derivada de orden  $n$  de  $y$  respecto a  $x$ . En Física, especialmente en Mecánica, suele usarse la notación de Newton en la que  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  representan las derivadas primera y segunda de  $x$  respecto a la variable independiente  $t$ , que suele ser el tiempo.

El *orden de una ecuación diferencial* es el orden de la derivada más alta que aparece en dicha ecuación.

---

<sup>1</sup>Soy consciente de las muchas carencias de estas notas que son una primera versión que debe ser mejorada y ampliada. En las siguientes versiones se incluirán nuevos ejemplos, se propondrán ejercicios interesantes y se ampliará la parte dedicada a los sistemas LTI y al empleo de "técnicas de Fourier" para el estudio de las ecuaciones diferenciales.



La forma más general de representar una EDO de orden  $n$  es

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (5.1)$$

donde  $F$  es una función de  $n + 2$  variables. Se dice que dicha ecuación está dada en forma implícita.

Una EDO de orden  $n$  de la forma

$$y^{(n)} = \Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (5.2)$$

donde  $\Phi$  es una función de  $n + 1$  variables, se dice que está dada en forma normal.

Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es solución de la ecuación diferencial (5.1) en el intervalo  $I$  cuando al sustituir  $y$  por  $f$  en dicha ecuación obtenemos una identidad:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

En general, la existencia de soluciones de una EDO no está garantizada y pueden darse gran diversidad de situaciones.

Suelen distinguirse tres tipos de soluciones de una ecuación diferencial.

- La *solución general* de una EDO de orden  $n$  es una solución en la que, además de la variable independiente, intervienen  $n$  parámetros o “constantes arbitrarias”.
- Las *soluciones particulares* son las que se obtienen a partir de la solución general dando valores específicos a los parámetros.
- Las *soluciones singulares* son soluciones que no se deducen de la solución general dando valores a los parámetros.

La ecuación  $(y')^2 = y$  tiene como solución general  $y = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2$ . Haciendo  $C = 0$  obtenemos la solución particular  $y = x^2/4$ ; mientras que  $y = 0$  es una solución singular.

Las soluciones de una EDO (o, más apropiadamente, sus gráficas) se llaman también *curvas integrales*.

### 5.1.1. Ecuación diferencial de una familia de curvas. Trayectorias

Consideremos una familia  $\mathcal{F}$  de curvas planas dada por una ecuación de la forma  $f(x, y, C) = 0$ , donde  $C$  es un parámetro real que toma valores en un intervalo  $I$  y para cada valor de  $C \in I$  tenemos una curva de dicha familia. Para obtener la ecuación diferencial de  $\mathcal{F}$  lo que se hace es eliminar  $C$  en las ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial f(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y, C)}{\partial y} y' = 0 \end{cases}$$

obtenemos de esta forma una ED  $\Phi(x, y, y') = 0$  que expresa una propiedad común a todas las curvas de  $\mathcal{F}$ . Naturalmente, la solución general de la ED  $\Phi(x, y, y') = 0$  es la familia dada  $f(x, y, C) = 0$ .

Se llaman  $\omega$ -trayectorias de  $\mathcal{F}$  a las curvas que cortan bajo un ángulo constante  $\omega$  a las curvas de  $\mathcal{F}$ . La tangente en un punto  $(x, y)$  a una curva  $y = y(x)$  de la familia  $\mathcal{F}$  forma un ángulo  $\alpha$  con el eje de abscisas cuya tangente viene dada por  $y' = \text{tg}(\alpha)$ . La pendiente en este punto de la  $\omega$ -trayectoria  $z = z(x)$  buscada será  $z' = \text{tg}(\alpha + \omega)$ . Deducimos que

$$y' = \text{tg}(\alpha) = \text{tg}(\alpha + \omega - \omega) = \frac{\text{tg}(\alpha + \omega) - \text{tg}(\omega)}{1 + \text{tg}(\alpha + \omega)\text{tg}(\omega)} = \frac{z' - \text{tg}(\omega)}{1 + z'\text{tg}(\omega)}$$

En consecuencia, si es  $\Phi(x, y, y') = 0$  la ED de la familia  $\mathcal{F}$ , la ED que verifican las  $\omega$ -trayectorias de dicha familia es

$$\Phi\left(x, z, \frac{z' - \operatorname{tg}(\omega)}{1 + z' \operatorname{tg}(\omega)}\right) = 0$$

Para el caso en que  $\omega = \pi/2$  se tiene que  $z' = -1/y'$  por lo que las trayectorias ortogonales de  $\mathcal{F}$  satisfacen la ED  $\Phi(x, y, -1/y') = 0$ .

### 5.1.2. Envoltente de una familia de curvas

Consideremos una familia  $\mathcal{F}$  de curvas planas dada por una ecuación de la forma  $f(x, y, C) = 0$ , donde  $C$  es un parámetro real que toma valores en un intervalo  $I$  y para cada valor de  $C \in I$  tenemos una curva de dicha familia. Supongamos que hay una curva  $\Gamma$  con la propiedad de que por cada punto de  $\Gamma$  pasa una curva  $\gamma_C$  de la familia  $\mathcal{F}$  de tal forma que en el punto de contacto las curvas  $\Gamma$  y  $\gamma_C$  tienen la misma tangente. En tal caso se dice que la curva  $\Gamma$  es la *envoltente* de la familia  $\mathcal{F}$ .

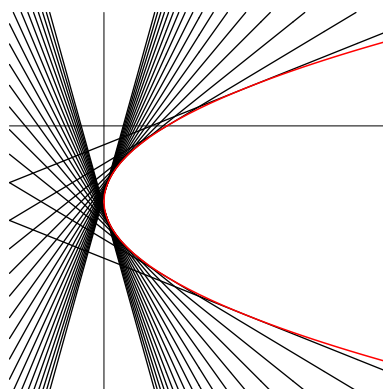
Para obtener la ecuación de la curva envoltente de  $\mathcal{F}$  lo que se hace es eliminar  $C$  en las ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial f(x, y, C)}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

**Ejemplo 5.1.** Sea  $\mathcal{F}$  la familia de rectas de ecuación  $f(x, y, C) = y - Cx - 3/C + 2 = 0$  donde  $C > 0$ . Tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, C) = 0 \implies y + 2 = Cx + \frac{3}{C} \implies (y + 2)^2 = C^2 x^2 + \frac{9}{C^2} + 6x \\ \frac{\partial f(x, y, C)}{\partial C} = 0 \implies -x + \frac{3}{C^2} = 0 \implies C^2 = \frac{3}{x} \end{array} \right\} \implies (y + 2)^2 = 12x$$

La envoltente es la parábola de ecuación  $(y + 2)^2 = 12x$ . Puedes ver algunas rectas de la familia junto a su envoltente en la siguiente figura.



La solución general de una ED  $F(x, y, y') = 0$  es una familia de curvas dependiente de un parámetro que se podrá representar por  $f(x, y, C) = 0$ . Es claro que la envoltente de dicha familia (cuando existe) es también solución de la ED; pues la pendiente de la envoltente en cada punto coincide con la de la curva integral que pasa por dicho punto. Se trata de una solución singular de la ED. ♦

Con frecuencia interesa obtener solamente una solución de una EDO que verifica unas determinadas condiciones. Esto da lugar a dos tipos de problemas. Cuando las condiciones que debe verificar la

solución buscada se especifican para un único valor de la variable independiente dichas condiciones reciben el nombre de “condiciones iniciales” y se dice que tenemos un *problema de valores iniciales* (PVI) para la EDO dada. Si las condiciones dadas se refieren a más de un valor de la variable independiente dichas condiciones reciben el nombre de “condiciones de contorno” y se dice que tenemos un *problema de contorno* para la EDO dada.

El caso más usual de problema de valores iniciales para una EDO de orden  $n$  es el llamado *problema de Cauchy* que consiste en obtener la solución de dicha ecuación cuyo valor y el de sus primeras  $n - 1$  derivadas en un punto  $x_0$  son dados.

**Ejemplo 5.2.** El problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \operatorname{sen} x \\ y'(0) = 1, y(0) = -1 \end{cases}$$

tiene como solución  $y(x) = \frac{1}{2}(-3e^{-x} + 5xe^{-x} + \cos x)$ .

El problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + y = \operatorname{sen} x \\ y'(0) = \pi, y(\pi) = 0 \end{cases}$$

tiene como solución

$$y(x) = \frac{1}{4} (2\pi \cos(x) - 2x \cos(x) + 2 \operatorname{sen}(x) + 4\pi \operatorname{sen}(x) - 2 \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \operatorname{sen}(2x)).$$

◆

A continuación vamos a estudiar algunos tipos sencillos de EDO cuyas soluciones pueden obtenerse con técnicas elementales. Usaremos indistintamente las siglas EDO y ED para referirnos a ecuaciones diferenciales ordinarias.

## 5.2. Métodos de resolución de EDOs de primer orden

Vamos a considerar EDOs de la forma  $y' = f(x, y)$  donde se supone que la función  $f$  está definida en un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y es todo lo buena que se precise para justificar en cada caso los cálculos que siguen. Las soluciones que encontraremos pueden venir dadas de tres formas.

- Explícitamente** cuando la solución obtenida es de la forma  $y = \varphi(x)$ .
- Implícitamente** cuando la solución obtenida viene dada por una igualdad  $H(x, y) = 0$  que define a  $y$  como función (implícita) de  $x$ .
- Paramétricamente** cuando las curvas integrales viene dadas en función de un parámetro.

No hay que pensar que la solución se podrá expresar por medio de funciones elementales. Esto no puede asegurarse ni aún en el caso más simple de la ecuación  $y' = f(x)$  porque puede ocurrir que la función  $f(x)$  no tenga primitivas que sean funciones elementales. Por ejemplo, la solución de la ecuación  $y' = \operatorname{sen}(x^2)$  que cumple la condición inicial  $y(x_0) = y_0$  es

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \operatorname{sen}(t^2) dt$$

que no puede expresarse por medio de funciones elementales. En general, una EDO se considera resuelta cuando se logra expresar su solución mediante la determinación de ciertas funciones primitivas las cuales, a su vez, podrán o no expresarse por medio de funciones elementales. En tales casos se dice que la ecuación se ha resuelto por medio de *cuadraturas*.

Las EDs del tipo  $y' = f(x, y)$  también suelen expresarse en la forma  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , que es otra manera de escribir la igualdad  $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ , o sea,  $y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ . La notación diferencial  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  tiene la ventaja de que permite elegir, según interese, la variable independiente igual a  $x$  o a  $y$ .

Vamos a estudiar tres tipos básicos de ecuaciones.

- Ecuaciones de variables separadas.
- Ecuaciones exactas.
- Ecuaciones lineales.

Veremos que usando las técnicas de cambio de variable o de factor integrante otros tipos de ecuaciones pueden ser convertidos en alguno de los anteriores.

### 5.2.1. Ecuaciones de variables separadas

Se llaman así las ecuaciones que pueden escribirse en la forma

$$P(x) + Q(y)y' = 0 \iff P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad (5.3)$$

Es decir, el coeficiente de  $dx$  es sólo función de  $x$ , el de  $dy$  es sólo función de  $y$ . Sean  $G(x)$  y  $H(y)$  primitivas de  $P(x)$  y  $Q(y)$  respectivamente. Definamos  $F(x, y) = G(x) + H(y)$ . La solución general de (5.3) es la familia de curvas definidas implícitamente por  $F(x, y) = C$  donde  $C$  es una constante. Pues si  $y = \varphi(x)$  es una curva de esta familia se tendrá que

$$\begin{aligned} F(x, \varphi(x)) = C \implies 0 &= \frac{d}{dx} F(x, \varphi(x)) = \frac{d}{dx} (G(x) + H(\varphi(x))) = G'(x) + H'(\varphi(x))\varphi'(x) = \\ &= P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) \end{aligned}$$

lo que prueba que  $y = \varphi(x)$  es solución de (5.3).

Recíprocamente, supongamos que  $y = \psi(x)$  es una solución de (5.3) definida en un intervalo  $I$ . Se tiene entonces que

$$0 = P(x) + Q(\psi(x))\psi'(x) = \frac{d}{dx} F(x, \psi(x)) \quad \forall x \in I \implies F(x, \psi(x)) = C \quad \forall x \in I$$

Si la función  $Q(y)$  no se anula en su intervalo de definición, entonces la función  $H(y)$  es inyectiva por lo que existe su inversa  $H^{-1}$  y (en teoría) podemos despejar  $y$  en la igualdad  $H(y) = C - G(x)$  obteniendo  $y = H^{-1}(C - G(x))$ .

En la práctica se sobreentiende todo lo anterior y la solución general de (5.3) se expresa simplemente por

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

que es otra forma de escribir  $F(x, y) = G(x) + H(y) = C$ .

**Ejemplo 5.3.** Calcular la velocidad crítica de escape de la Tierra de un objeto de masa  $m$  (en kilogramos) suponiendo que la única fuerza que actúa sobre dicho cuerpo es la atracción gravitatoria de la Tierra. Tomar como valor del radio de la Tierra  $R = 6371$  Km.

**Solución.** Se trata de calcular la velocidad  $v_0$  con la que hay disparar verticalmente dicho objeto para que permanezca alejándose de la Tierra indefinidamente.

Como el movimiento y la acción de la fuerza tienen lugar en una recta que pasa por el centro de la Tierra, elegimos un sistema de referencia con origen en el centro de la Tierra de manera que el movimiento tiene lugar en el eje  $OZ$  de dicho sistema. De esta forma podemos prescindir del carácter vectorial de las magnitudes implicadas y trabajar solamente con sus módulos (normas euclídeas).

Cuando el objeto se halla a una distancia  $h$  (en metros) del centro de la Tierra la fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el mismo es proporcional a su masa e inversamente proporcional a  $h^2$ , es decir, de la forma  $F(h) = km/h^2$ . Como  $F(R) = mg$  (el peso del cuerpo en la superficie de la Tierra), deducimos que  $k = gR^2$  y, por tanto,  $F(h) = mgR^2/h^2$ , donde suponemos  $R$  expresado en metros. Sean  $h(t)$  la distancia del objeto al centro de la Tierra y  $v(t) = h'(t)$  su velocidad en el momento  $t$ .

Teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo y que la fuerza ejercida se opone al movimiento, la segunda ley de Newton nos dice que

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(h(t))^2} \implies v \frac{dv}{dt} = -gR^2 \frac{h'(t)}{(h(t))^2} \implies v dv = -gR^2 \frac{h'(t)}{(h(t))^2} dt$$

que es una ecuación de variables separadas cuya solución viene dada por

$$\int v dv = -gR^2 \int \frac{h'(t)}{(h(t))^2} dt + C$$

y deducimos que

$$v^2 = 2gR^2 \frac{1}{h(t)} + C$$

Como para  $t = 0$  es  $h(0) = R$  y  $v(0) = v_0$ , se sigue que  $C = v_0^2 - 2gR$ . Luego

$$(v(t))^2 = 2gR^2 \frac{1}{h(t)} + v_0^2 - 2gR$$

Puesto que debe verificarse  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$ , deducimos que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (v(t))^2 = v_0^2 - 2gR$ , lo que implica que  $v_0^2 - 2gR \geq 0$ , es decir,  $v_0 \geq \sqrt{2gR} \approx 11180 \text{ m/s} = 11,18 \text{ Km/s}$ .

◆

## 5.2.2. Ecuaciones exactas

Supondremos en lo que sigue que  $P$  y  $Q$  son funciones con derivadas parciales continuas. La ecuación diferencial

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{5.4}$$

se dice que es exacta en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  cuando el campo vectorial  $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$  es conservativo en  $\Omega$ , es decir, existe un campo escalar  $U(x,y)$ , llamado el potencial del campo  $\mathbf{F}$ , determinado de manera única salvo una constante aditiva, cuyo gradiente

$$\nabla U(x,y) = \left( \frac{\partial U}{\partial x}(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) \right)$$

coincide en todo punto de  $\Omega$  con  $\mathbf{F}(x, y)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Es sabido que, en las hipótesis hechas sobre  $P$  y  $Q$ , una condición necesaria para que el campo  $\mathbf{F}$  sea conservativo en  $\Omega$  es que se verifiquen las igualdades

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (5.5)$$

Cuando estas condiciones necesarias se cumplen y, además,  $\Omega$  es un dominio simplemente conexo (sin agujeros), entonces el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  es conservativo en  $\Omega$ .

No hay que olvidar que esta última condición no es necesaria, es decir, si se cumplen las igualdades (5.5) y el dominio  $\Omega$  no es simplemente conexo puede ocurrir que el campo sea conservativo en  $\Omega$  o que no lo sea. Por ejemplo, el campo

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

verifica las igualdades (5.5) en  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (un dominio que no es simplemente conexo pues tiene un agujero: el punto  $(0, 0)$ ) y no es conservativo en  $\Omega$ . El campo

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

verifica las igualdades (5.5) en  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y es conservativo en  $\Omega$ .

Supuesto que el campo es conservativo, vamos a calcular la función potencial  $U$  que se anula en un punto  $(a, b) \in \Omega$ .

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \implies U(x, y) = \int_a^x P(t, y) dt + \varphi(y)$$

Derivando esta igualdad respecto de la segunda variable y usando las igualdades (5.5) y el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos

$$Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}(t, y) dt + \varphi'(y) = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}(t, y) dt + \varphi'(y) = Q(x, y) - Q(a, y) + \varphi'(y)$$

y deducimos que

$$\varphi'(y) = Q(a, y) \implies \varphi(y) = \int_b^y Q(a, t) dt \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

luego

$$U(x, y) = \int_a^x P(t, y) dx + \int_b^y Q(a, t) dt$$

Observa que para que este cálculo sea correcto los segmentos que van de  $(a, b)$  a  $(a, y)$  y de  $(a, y)$  a  $(x, y)$  deben estar contenidos en  $\Omega$ .

Una vez que tenemos la función potencial, las soluciones de la ecuación exacta (5.4) viene dadas implícitamente por

$$U(x, y) = C$$

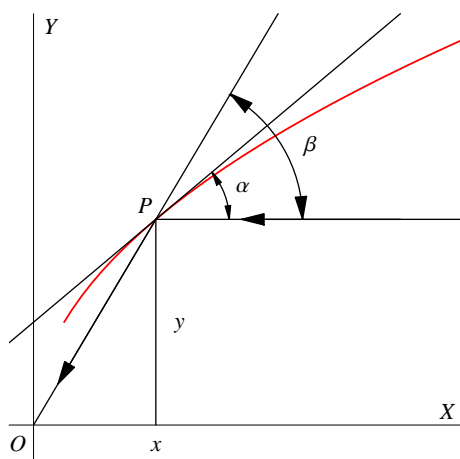
donde  $C$  es una constante arbitraria ( $C \in U(\Omega)$ ). Pues cualquier función derivable  $y = y(x)$  definida en un intervalo  $I$  y que verifique  $U(x, y(x)) = C$  para todo  $x \in I$  debe verificar también que

$$0 = \frac{d}{dx} U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)$$

lo que prueba que  $y(x)$  es solución de (5.4).

**Ejemplo 5.4.** Determinar las curvas planas que tienen la propiedad de concentrar en un punto un haz de rayos paralelos reflejados en ellas.

**Solución.**



En la gráfica de la izquierda se ha representado parte de la curva (en rojo) y de su tangente en un punto  $P$ . Se ha supuesto que los rayos incidentes son paralelos al eje  $X$  y que el punto en donde se concentran los rayos reflejados es el origen. El ángulo de incidencia (el que forma el rayo incidente con la tangente en el punto de incidencia),  $\alpha$ , debe ser igual al de reflexión (el que forma el rayo reflejado con la tangente) que es igual a  $\beta - \alpha$ .

Deberá cumplirse por tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) &= \frac{\operatorname{tg}(\beta) - \operatorname{tg}(\alpha)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)} \implies y' = \frac{y/x - y'}{1 + y'y/x} \implies y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{2y} \implies \\ y \, dy + x \, dx \mp \sqrt{x^2 + y^2} \, dx &= 0 \implies \left( \mp \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 \right) dx \mp \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = 0. \end{aligned}$$

Esta última ecuación es de la forma  $P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy$  con

$$P(x, y) = \mp \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1, \quad Q(x, y) = \mp \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \implies \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \pm \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Observa que  $P$  y  $Q$  están definidas en  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  que es un dominio no simplemente conexo por lo que, a priori, no es seguro que la ecuación sea exacta. Tratemos de calcular una función potencial  $U$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) &= 1 \mp \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \implies U(x, y) = x \mp \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi(y) \implies \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) &= \mp \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varphi'(y) = Q(x, y) \implies \varphi'(y) = 0 \implies \varphi(y) = C \end{aligned}$$

Hemos obtenido así  $U(x, y) = x \mp \sqrt{x^2 + y^2} + C$ . Es claro que  $\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$  y  $\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$  para todo  $(x, y) \in \Omega$ . Concluimos que las curvas solución buscadas vienen dadas implícitamente por

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x + c \implies x^2 + y^2 = (x + c)^2 \implies y^2 = 2c \left( x + \frac{c}{2} \right)$$

que es una familia de parábolas con su foco en el origen. Ya Arquímedes conocía esta propiedad de las parábolas pero ahora hemos probado que son las *únicas* curvas que la tienen.



### 5.2.3. Ecuaciones lineales

Son de la forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad (5.6)$$

donde  $a$  y  $b$  son funciones reales (o complejas) continuas definidas en un intervalo  $I$ . Vamos a probar que dados  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ , hay una única función derivable  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  que es solución de la ecuación (5.6) y verifica que  $y(x_0) = y_0$ .

Notemos  $A$  la primitiva de  $a$  que se anula en  $x_0$ :

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt \quad (x \in I)$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación (5.6) por  $e^{A(x)}$  obtenemos:

$$y'(x)e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}y(x) = e^{A(x)}b(x)$$

ecuación que poniendo  $\varphi(x) = y(x)e^{A(x)}$ , puede escribirse  $\varphi'(x) = e^{A(x)}b(x)$  y, como debe ser  $\varphi(x_0) = y(x_0)e^{A(x_0)} = y_0$ , se tiene que:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(t)}b(t) dt.$$

Concluimos que la función

$$y(x) = e^{-A(x)} \left( y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(t)}b(t) dt \right) \quad (5.7)$$

es una solución de la ecuación (5.6) que verifica la condición  $y(x_0) = y_0$ . La unicidad es consecuencia inmediata de la forma en que hemos obtenido dicha solución.

**Ejemplo 5.5.** Consideremos un depósito que inicialmente contiene un volumen igual a  $V_0$  litros de agua. A partir de ese instante, en el depósito entran  $L$  litros por minuto de agua contaminada con  $\rho$  miligramos de mercurio por litro y salen  $M$  litros por minuto. Se supone que en cada instante la concentración de mercurio en el depósito es uniforme. Calcula la cantidad de mercurio que hay en el depósito en cada momento.

**Solución.** En cada tiempo  $t$  (en minutos) sea  $V(t)$  el volumen de agua (en litros) e  $y(t)$  la cantidad de mercurio (en miligramos) que hay en el depósito. Tenemos que  $V(t) = V_0 + t(L - M)$ . Para calcular  $y(t)$  debemos tener en cuenta que la concentración de mercurio en la entrada es constante igual a  $\rho$  pero no así en la salida. La concentración de mercurio en el depósito en el tiempo  $t$  es igual a  $y(t)/V(t)$ ; por tanto, la cantidad de mercurio que ha salido del depósito en el tiempo  $t$  es igual a  $M \int_0^t \frac{y(s)}{V(s)} ds$ .

Deducimos que

$$y(t) = \rho Lt - M \int_0^t \frac{y(s)}{V(s)} ds$$

y derivando obtenemos

$$y'(t) + \frac{M}{V_0 + t(L - M)} y(t) = \rho L$$

Se trata de una ecuación lineal con  $a(t) = \frac{M}{V_0 + t(L - M)}$  y  $b(t) = \rho L$ . Supuesto que  $L \neq M$  se tiene

$$A(t) = \int_0^t \frac{M}{V_0 + t(L - M)} dt = \frac{M}{L - M} \left( \log(V_0 + t(L - M)) - \log(V_0) \right) = \log \left( 1 + t \frac{L - M}{V_0} \right)^{\frac{M}{L - M}}$$



y teniendo en cuenta (5.7) y haciendo unos sencillos cálculos, obtenemos que la solución que verifica  $y(0) = 0$  viene dada por

$$y(t) = \rho V_0 \left( 1 + t \frac{L-M}{V_0} \right) \left( 1 - \left( 1 + t \frac{L-M}{V_0} \right)^{\frac{L}{M-L}} \right)$$

Si es  $L = M$  se obtiene

$$y(t) = \rho V_0 (1 - e^{-Lt/V_0})$$

Estudiadas con cierto detalle los tres tipos básicos de EDO1 (EDO de orden 1), en lo que sigue vamos a estudiar algunos tipos de EDO1 que pueden convertirse en alguno de ellos usando las técnicas de cambio de variable o de función y de factor integrante.



### 5.2.4. Ecuaciones de variables separables

Se llaman así las EDO1 que pueden transformarse mediante operaciones sencillas en una EDO1 de variables separadas.

**Tipo  $y' = f(ax + by + c)$ .**

Se supone que  $a, b, c$  son números reales con  $b \neq 0$ . El cambio de función  $y(x)$  por  $z(x)$  dado por  $z = ax + by + c$  la transforma en una ecuación de variables separadas en  $z$  y  $x$ .

$$y(x) = \frac{z(x) - ax - c}{b} \implies y'(x) = \frac{z'(x) - a}{b} \implies z'(x) - a = bf(z(x)) \implies \frac{z'(x)}{bf(z(x)) + a} = 1$$

Hemos obtenido así la ecuación

$$\frac{1}{bf(z) + a} dz - dx = 0$$

cuya solución está dada implícitamente por

$$\int \frac{1}{bf(z) + a} dz - x = C$$

Deshaciendo el cambio de función realizado en esta igualdad obtenemos la relación entre  $x$  e  $y$  que define implícitamente las soluciones de la ecuación dada.

### 5.2.5. Ecuaciones homogéneas

Se llaman así las de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para resolverla, cambiamos la función  $y(x)$  por  $u(x)$  donde  $y(x) = u(x)x$ . De esta forma obtenemos la ecuación  $u'x + u = f(u)$  que podemos escribir

$$\frac{1}{f(u) - u} du - \frac{1}{x} dx = 0$$

que es de variables separadas.

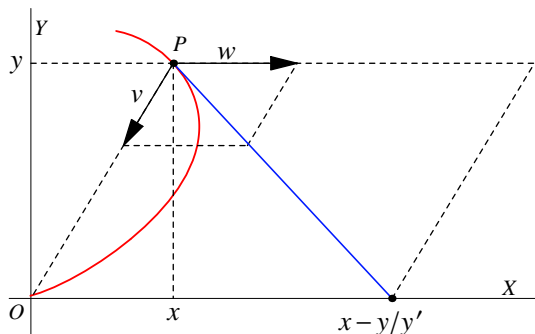
Las ecuaciones homogéneas pueden definirse también de otra manera equivalente. Una función  $h(x,y)$  se dice que es homogénea de grado  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  si para todo  $t > 0$  se verifica que  $h(tx, ty) = t^\alpha h(x,y)$ . Es inmediato comprobar que una EDO1 de la forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

en la que  $P(x,y)$  y  $Q(x,y)$  son funciones homogéneas del mismo grado, puede escribirse como una ecuación diferencial homogénea según la definición antes dada.

**Ejemplo 5.6.** Determinar la trayectoria que sigue un avión cuya velocidad tiene módulo constante  $v$  y siempre está dirigida hacia el origen de coordenadas, y que sufre el empuje de un viento lateral con dirección del semieje positivo de abscisas y velocidad constante  $w$ .

**Solución**



En la figura de la izquierda se ha representado parte de la trayectoria buscada (en rojo) y de su tangente (en azul) en un punto  $P$ . La tangente lleva la dirección de la resultante de las velocidades del avión y del viento lateral. La intersección de la tangente con el eje  $X$  es el punto de abscisa  $x - y/y'$  representado en la figura.

Teniendo en cuenta la semejanza de triángulos, se verifica que:

$$\frac{x - y/y'}{OP} = \frac{w}{v} = \lambda \implies x - y/y' = \lambda \sqrt{x^2 + y^2} \implies y dx + \lambda (\sqrt{x^2 + y^2} - x) dy = 0$$

Hemos obtenido una ecuación homogénea. Es preferible, debido a la forma que (intuitivamente) va a tener la curva solución, obtener  $x$  como función de  $y$ . Hacemos, pues,  $x = uy$  considerando  $y$  como la variable independiente y  $u = u(y)$  como función de  $y$ . De esta manera obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{\lambda \sqrt{1+u^2}} du$$

que puede integrarse elementalmente obteniendo

$$\log(Cy) = -\frac{1}{\lambda} \log(u + \sqrt{1+u^2}) \implies u + \sqrt{1+u^2} = (Cy)^{-\lambda}$$

Teniendo en cuenta que  $(u + \sqrt{1+u^2})(u - \sqrt{1+u^2}) = -1$  se sigue que  $u - \sqrt{1+u^2} = -(Cy)^\lambda$  y, finalmente, obtenemos que

$$u = \frac{(Cy)^{-\lambda} - (Cy)^\lambda}{2} \implies x = \frac{(Cy)^{1-\lambda} - (Cy)^{1+\lambda}}{2C}$$

◆

### 5.2.6. EDO del tipo $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

- Si  $c = \gamma = 0$  es una ecuación homogénea.

- Si las rectas  $ax + by + c = 0$  y  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  se cortan en un punto  $(x_0, y_0)$  podemos escribir

$$\begin{cases} ax + by + c = a(x - x_0) + b(y - y_0) \\ \alpha x + \beta y + \gamma = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \end{cases}$$

Los cambios de variable y de función dados por  $t = x - x_0$ ,  $z = y - y_0$  convierten la ecuación en una homogénea en  $z$ ,  $t$ .

- Si las rectas son paralelas, el cambio de función  $z = ax + by$  transforma la ecuación en una de variables separables en  $z$ ,  $x$ .

### 5.2.7. Ecuaciones reducibles a exactas. Factores integrantes

Decimos que  $\mu(x, y)$  es un factor integrante de la ecuación

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

cuando la ecuación que resulta al multiplicar dicha ecuación por  $\mu$

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad (5.8)$$

es una ecuación exacta.

Por ejemplo, la ecuación  $ydx + (x^2y - x)dy = 0$  no es exacta; pero si la multiplicamos por  $\mu(x, y) = 1/x^2$  obtenemos una ecuación exacta.

Se sabe que siempre existen factores integrantes aunque esto no es de tan gran ayuda como puede parecer en un primer momento porque, salvo en algunos casos típicos, el cálculo de un factor integrante es un problema mucho más difícil que la propia ecuación que queremos resolver. En general, las condiciones que debe verificar a función  $\mu$  para que la ecuación (5.8) sea exacta son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)P(x, y)) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)Q(x, y)) \implies \\ \mu(x, y)\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + P(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) &= \mu(x, y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) + Q(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pero en la práctica nos interesa obtener solamente una solución de esta ecuación en derivadas parciales. Lo que se hace es tratar de encontrar un factor integrante que sea de alguna forma especial. Suelen buscarse factores integrantes de los siguientes tipos:

- $\mu = \mu(x)$  (depende solamente de  $x$ )
- $\mu = \mu(y)$  (depende solamente de  $y$ )
- $\mu = \mu(x + y)$  (puede expresarse como función de  $x + y$ )
- $\mu = \mu(xy)$  (puede expresarse como función de  $xy$ )

Veamos bajo qué condiciones hay un factor integrante de la forma  $\mu(x)$ . Teniendo en cuenta la ecuación (5.9), debe cumplirse que

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)}{Q(x, y)}$$

Esta condición exige que la función de la derecha dependa solamente de  $x$ , esto es

$$h(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)}{Q(x, y)} \implies \mu(x) = e^{\int h(x)dx}$$

Por ejemplo, la ecuación lineal  $y' + a(x)y = b(x)$ , que puede escribirse  $(a(x)y - b(x))dx + dy = 0$ , admite un factor integrante que solamente depende de  $x$ . Pues tenemos  $P(x, y) = a(x)y - b(x)$ ,  $Q(x, y) = 1$ , por lo que

$$h(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)}{Q(x, y)} = a(x)$$

Deducimos que  $\mu(x) = e^{\int a(x)dx}$  es un factor integrante.

### 5.2.8. Ecuaciones de Bernoulli

Son de la forma

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0$$

donde  $\alpha$  es un número real. Si  $\alpha = 0$  se trata de una ecuación lineal y si  $\alpha = 1$  se trata de una ecuación de variables separadas. En otro caso, el cambio de función  $z = y^{1-\alpha}$  la convierte en la ecuación lineal  $z' + (1-\alpha)a(x)z = (\alpha-1)b(x)$ .

Otro método consiste en escribir  $y(x) = u(x)v(x)$ . Derivando,  $y' = u'v + uv'$  y, sustituyendo en la ecuación,  $u'v + uv' + a(x)uv + b(x)u^\alpha v^\alpha = 0$ , que puede escribirse  $u'v + (v' + a(x)v)u + b(x)u^\alpha v^\alpha = 0$ . Ahora igualamos a cero el coeficiente de  $u$ , con lo cual tenemos  $v' + a(x)v = 0$ , que es una ecuación de variables separadas en  $v$ ,  $x$ . Resolviéndola calculamos  $v(x)$ . De esta forma, la ecuación inicial ha quedado reducida a  $u'v + b(x)u^\alpha v^\alpha = 0$ , que es una ecuación de variables separadas que permite calcular  $u$ .

### 5.2.9. Ecuaciones de Ricatti

Son de la forma

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

No hay métodos generales para resolver este tipo de ecuaciones; pero si de alguna forma somos capaces de calcular una solución particular de dicha ecuación,  $y_p(x)$ , entonces el cambio de función  $y = y_p + z$  transforma la ecuación en  $z' + (a(x) + 2b(x)y_p(x))z + b(x)z^2 = 0$ , que es una de Bernoulli con  $\alpha = 2$ . El cambio  $z = u^{-1}$  reduce esta última ecuación a una lineal.

### 5.2.10. Otras formas de resolver la EDO1 lineal

Hemos visto ya dos formas de resolver la ecuación  $y' + a(x)y = b(x)$ . Directamente, como se hizo al estudiarla por primera vez y calculando un factor integrante para convertirla en una ecuación exacta. Otra forma es el método conocido como *variación de constantes*. Consiste en lo siguiente.

Primero se calcula la solución general de la ecuación  $y' + a(x)y = 0$ , que es  $C e^{-\int a(x)dx}$ , donde  $C$  es una constante arbitraria. Seguidamente se forma la función  $y(x) = C(x)e^{-\int a(x)dx}$  donde hemos sustituido la constante  $C$  por una función desconocida,  $C(x)$ , que se calcula imponiendo que  $y(x)$  sea solución de la ecuación dada. De esta forma se obtiene

$$C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C$$

lo que nos vuelve a dar como solución general de la ecuación lineal

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx} \left( \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C \right)$$

Otro método para resolver las ecuaciones lineales consiste en poner  $y(x) = u(x)v(x)$ . Con ello  $y' = u'v + uv'$  y, sustituyendo en la ecuación,  $u'v + uv' + a(x)uv = b(x)$ . Que puede escribirse

$u'v + (v' + a(x)v)u = b(x)$ . Imponiendo ahora que  $v' + a(x)v = 0$  podemos calcular  $v$  que viene dada por  $v(x) = e^{-\int a(x)dx}$ . La ecuación inicial ha quedado reducida a  $u'v = b(x)$ , de donde  $u'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}$ . Integrando,  $u(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C$ . Como  $y(x) = u(x)v(x)$ , volvemos a obtener la solución de la ecuación lineal ya conocida.

### 5.2.11. EDO en forma implícita

Consideraremos algunos tipos de EDs de la forma  $F(x, y, y') = 0$ .

#### Cuando $F$ es una función polinómica en $y'$

Son EDs de la forma

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0$$

Lo que se hace es considerar esta igualdad como un polinomio en  $y'$  y se calculan sus raíces  $f_i(x, y)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), con lo cual la ecuación dada se escribe en la forma

$$(y' - f_1(x, y))(y' - f_2(x, y)) \dots (y' - f_n(x, y)) = 0$$

y deberemos resolver las  $n$  ecuaciones  $y' - f_i(x, y) = 0$ .

#### Ecuaciones de la forma $y = f(x, y')$

Para resolver este tipo de ecuaciones, hacemos  $y' = p$  y derivamos  $y = f(x, p)$  respecto de  $x$ , con lo que tenemos

$$p = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} p'$$

que es una ED en la incógnita  $p$  que, con suerte, puede ser de alguno de los tipos ya estudiados. Supongamos que podemos expresar su solución en la forma  $x = \varphi(p, C)$ . Entonces, las curvas de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = f(\varphi(p, C), p) \end{cases}$$

donde  $p$  es el parámetro y  $C$  una constante, son soluciones de la ED  $y = f(x, y')$ . Los siguientes casos particulares son de especial interés.

#### EDs de la forma $y = f(y')$

En este caso, repitiendo el proceso anterior obtenemos

$$\begin{cases} x = \int \frac{f(p)}{p} dp = \varphi(p) + C \\ y = f(p) \end{cases}$$

Además, para  $p = 0$  se tiene la solución constante  $y = f(0)$  que representa una recta horizontal que es la envolvente de las curvas integrales.

#### Ecuaciones de Lagrange

Son de la forma

$$y + x\varphi(y') + \psi(y') = 0$$

Poniendo  $y' = p$  y derivando respecto de  $x$  obtenemos

$$(p + \varphi(p)) dx + x\varphi'(p) dp + \psi'(p) dp = 0$$

Dividiendo por  $p + \varphi(p)$  obtenemos una ecuación lineal

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{p + \varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p + \varphi(p)} = 0$$

en la que consideramos que  $x$  es función de la variable  $p$ . Sea  $x = \phi(p, C)$  la solución de esta ecuación. Entonces las soluciones de la ecuación de partida vienen dadas por

$$\begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = -\phi(p, C)\varphi(p) - \psi(p) \end{cases}$$

El razonamiento anterior excluye los puntos  $p$  en los que  $p + \varphi(p) = 0$ . Veamos lo que ocurre en tal caso. Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$ . Es inmediato comprobar que la función dada por  $y = \lambda x - \psi(\lambda)$  es solución de la ecuación de Lagrange. Estas rectas son soluciones singulares de la ecuación.

### Ecuaciones de Clairaut

Son de la forma

$$y - xy' + \psi(y') = 0$$

Poniendo  $y' = p$  y derivando respecto de  $x$  obtenemos  $(-x + \psi'(p))p' = 0$ . Si  $p' = 0$  entonces  $y' = p = \lambda$  por lo que la familia de rectas  $y = \lambda x - \psi(\lambda)$  es solución de la ED. Si  $-x + \psi'(p) = 0$  obtenemos la solución singular, envolvente del haz de rectas, dada por

$$\begin{cases} x = \psi'(p) \\ y = p\psi'(p) - \psi(p) \end{cases}$$

## 5.3. Ecuación diferencial lineal de orden $n$

La ecuación diferencial:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \quad (5.10)$$

donde  $a_j$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ) y  $b$  son funciones reales (o complejas) continuas definidas en un intervalo  $I$ , se llama ecuación diferencial lineal de orden  $n$ . A diferencia de lo visto para el caso  $n = 1$ , no hay ningún método general de resolución de la ecuación (5.10) cuando es  $n \geq 2$ . Adquiere así importancia el siguiente resultado. Notaremos  $C^n(I)$  las funciones reales (o complejas) que tienen derivada de orden  $n$  continua en el intervalo  $I$ .

**Teorema 5.7** (Teorema de existencia y unicidad). *Dados  $x_0 \in I$ ,  $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ , existe una única función  $y \in C^n(I)$  que es solución de la ecuación (5.10) en el intervalo  $I$  y verifica las condiciones  $y(x_0) = y_0$ ,  $y^{(k)}(x_0) = y_k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ .*

Los valores  $x_0 \in I$ ,  $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ , se suelen llamar *condiciones iniciales*. Así, pues, aunque para  $n \geq 2$  las soluciones de la ED (5.10), salvo en algunos casos particulares, no pueden obtenerse de forma explícita, sí sabemos que, fijadas unas condiciones iniciales, hay una única solución de dicha ecuación que las satisface; además dicha solución está definida en todo el intervalo  $I$ .

Estudiaremos a continuación algunas propiedades del conjunto de todas las soluciones de la ED (5.10). Aprovecharemos para ello la *linealidad* de la ecuación.

Es conveniente introducir una notación apropiada. Notaremos  $C(I)$  el espacio de las funciones reales (o complejas) continuas en  $I$ . Sea  $L : C^n(I) \rightarrow C(I)$  el operador que a cada función  $y \in C^n(I)$  hace corresponder la función continua  $L(y) : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida para todo  $x \in I$  por:

$$L(y)(x) = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x)$$

El operador así definido es evidentemente lineal. La ED (5.10) puede escribirse ahora en la forma  $L(y)(x) = b(x)$  o, simplemente,  $L(y) = b$ . La ED  $L(y) = 0$  se llama ED lineal *homogénea* de orden  $n$ . La ecuación  $L(y)(x) = b(x)$  se llama también ED lineal *completa* de orden  $n$ . Notaremos por  $\text{Ker}(L)$  el núcleo del operador  $L$ , es decir, el conjunto de todas las soluciones de la ED  $L(y) = 0$ .

Sea  $X$  el conjunto de todas las soluciones de la ED lineal completa, esto es,  $X = \{y \in C^n(I) : L(y) = b\}$ . Supongamos que conocemos una solución,  $\varphi$ , de dicha ED. Entonces podemos escribir:

$$X = \{y \in C^n(I) : L(y) = L(\varphi)\} = \{y \in C^n(I) : L(y - \varphi) = 0\} = \{y \in C^n(I) : y - \varphi \in \text{Ker}(L)\} = \varphi + \text{Ker}(L)$$

Naturalmente,  $\text{Ker}(L)$  es un subespacio vectorial de  $C^n(I)$ . Probaremos que tiene dimensión  $n$ . Para ello notemos  $u_j$  el vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  cuyas coordenadas son todas nulas excepto la  $j$ -ésima que es igual a 1, y notemos  $y_j$  la única solución de la ED homogénea que satisface las condiciones iniciales:

$$(y_j(x_0), y_j'(x_0), \dots, y_j^{(n-1)}(x_0)) = u_j.$$

Comprobemos que las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$  forman una base de  $\text{Ker}(L)$ . En efecto, si  $y \in \text{Ker}(L)$ , entonces la función

$$h = y(x_0)y_1 + y'(x_0)y_2 + \dots + y^{(n-1)}(x_0)y_n$$

es una solución de la ED homogénea que verifica

$$h(x_0) = y(x_0), h'(x_0) = y'(x_0), \dots, h^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0)$$

En virtud de la unicidad de la solución correspondiente a unas condiciones iniciales dadas, concluimos que  $h = y$ . Hemos probado así que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  es un sistema de generadores de  $\text{Ker}(L)$ ; además dichas funciones son linealmente independientes, pues si  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son números tales que  $\sum_{j=1}^n c_j y_j = 0$ , es decir:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$$

para todo  $x \in I$ , entonces, evaluando esta igualdad en  $x_0$  obtenemos que  $c_1 = 0$ ; derivando  $k$  veces ( $1 \leq k \leq n-1$ ) obtenemos  $\sum_{j=1}^n c_j y_j^{(k)}(x) = 0$ , igualdad que al evaluarla en  $x_0$  se convierte en  $c_k = 0$ . Resumimos los resultados obtenidos en el siguiente teorema.

**Teorema 5.8.** *Las soluciones de la ED lineal completa (5.10) son las funciones de la forma:*

$$y(x) = \varphi(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (x \in I)$$

donde  $\varphi$  es una solución particular de dicha ecuación,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son cualesquiera  $n$  soluciones linealmente independientes de la ED homogénea y  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias.

### 5.3.1. Ecuaciones Diferenciales lineales con coeficientes constantes

Consideremos la ED

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (5.11)$$

en la que  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  son números reales. Notando  $D$  el operador lineal que a cada función derivable en un intervalo hace corresponder su función derivada, y definiendo  $L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$ , podemos escribir la ED (5.11) en la forma  $L(y) = 0$ .

Busquemos soluciones de dicha ecuación de la forma  $y(x) = e^{\lambda x}$  donde  $\lambda$  es un número real o complejo. Un sencillo cálculo nos da:

$$L(e^{\lambda x}) = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x}$$

y deducimos que  $y(x) = e^{\lambda x}$  es solución de la ED (5.11) si, y sólo si, se verifica que

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

El polinomio  $\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ , se llama *polinomio característico* de la ED (5.11).

**Proposición 5.9.** Sea  $\mu$  una raíz (real o compleja) de multiplicidad  $k$  del polinomio característico  $\chi(\lambda)$ . Entonces las funciones  $e^{\mu x}$ ,  $x e^{\mu x}$ ,  $x^2 e^{\mu x}$ ,  $\dots$ ,  $x^{k-1} e^{\mu x}$  son soluciones de la ED (5.11).

**Demostración.** Sea  $j \in \mathbb{N}$ . Notando  $D_\lambda$  la derivación respecto a la variable  $\lambda$ ,  $D = D_x$  la derivación respecto a la variable  $x$ , y teniendo en cuenta que  $D_\lambda(D_x(e^{\lambda x})) = D_x(D_\lambda(e^{\lambda x}))$ , se deduce que:

$$L(x^j e^{\lambda x}) = L(D_\lambda^j(e^{\lambda x})) = D_\lambda^j(L(e^{\lambda x})) = D_\lambda^j(\chi(\lambda) e^{\lambda x}) = \sum_{q=0}^j \binom{j}{q} \chi^{(j-q)}(\lambda) x^q e^{\lambda x} \quad (5.12)$$

Igualdad que, con el convenio usual de que la derivada de orden cero de una función es la misma función, también es válida para  $j = 0$ .

Supongamos que  $\mu$  es una raíz de multiplicidad  $k$  de  $\chi(\lambda)$ . Se verifica entonces que las derivadas de  $\chi(\lambda)$  hasta la de orden  $k-1$  inclusive se anulan para  $\lambda = \mu$ . Deducimos así, teniendo en cuenta la igualdad (5.12), que para  $0 \leq j \leq k-1$  es:

$$L(x^j e^{\mu x}) = D_\lambda^j(\chi(\lambda) e^{\lambda x}) \Big|_{\lambda=\mu} = 0.$$

**Teorema 5.10.** Sean  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , las distintas raíces del polinomio característico  $\chi(\lambda)$ , con multiplicidades respectivas  $k_1, k_2, \dots, k_m$  ( $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ). A cada raíz  $\mu_j$  asociamos las  $k_j$  soluciones de la ED (5.11):

$$e^{\mu_j x}, x e^{\mu_j x}, x^2 e^{\mu_j x}, \dots, x^{k_j-1} e^{\mu_j x}$$

Obtenemos así  $n$  soluciones de la ED (5.11) que son linealmente independientes.

Nótese que si  $\mu_j$  es una raíz compleja de  $\chi(\lambda)$ , entonces las soluciones de la ED (5.11) asociadas a dicha raíz son funciones complejo-valuadas. Ahora bien, puesto que los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  de la ED (5.11) son números reales, hipótesis que hasta aquí no hemos usado para nada, se sigue que si  $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$  es una raíz compleja de  $\chi(\lambda)$  también lo es con igual multiplicidad  $\bar{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j$ . En consecuencia las  $2k_j$  funciones:

$$\begin{aligned} x^{j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x) &= x^{j-1} e^{\mu_j x} + x^{j-1} e^{\bar{\mu}_j x}; \\ x^{j-1} e^{\alpha_j x} \operatorname{sen}(\beta_j x) &= i(x^{j-1} e^{\bar{\mu}_j x} - x^{j-1} e^{\mu_j x}) \quad (1 \leq j \leq k_j) \end{aligned}$$

son soluciones de la ED (5.11). Finalmente, teniendo en cuenta que si dos vectores  $u, v$  son linealmente independientes también lo son los vectores  $u + v, u - v$ , deducimos el siguiente resultado.

**Teorema 5.11.** Sean  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , las distintas raíces del polinomio característico  $\chi(\lambda)$ , con multiplicidades respectivas  $k_1, k_2, \dots, k_m$  ( $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ). A cada raíz real  $\mu_j$  asociamos las  $k_j$  soluciones de la ED (5.11):

$$e^{\mu_j x}, x e^{\mu_j x}, x^2 e^{\mu_j x}, \dots, x^{k_j-1} e^{\mu_j x}$$

A cada raíz compleja  $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$  asociamos las  $2k_j$  soluciones de la ED (5.11):

$$x^{j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x); \quad x^{j-1} e^{\alpha_j x} \operatorname{sen}(\beta_j x) \quad (1 \leq j \leq k_j)$$

Obtenemos así  $n$  soluciones de la ED (5.11) que son linealmente independientes.

Una vez que sabemos calcular la solución general de la ED (5.11), para obtener la solución general de la ED lineal completa:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y_0(x) = b(x) \quad (5.13)$$

donde  $b$  es una función continua real (o compleja) definida en un intervalo  $I$  solamente necesitamos calcular una solución particular de dicha ecuación. Las soluciones ya no estarán definidas en todo  $\mathbb{R}$  como antes, sino en el intervalo  $I$  donde está definida la función  $b$ .



### 5.3.2. Cálculo de una solución particular de la ED lineal completa

Para ello suelen seguirse los siguientes procedimientos.

#### 5.3.2.1. Método de variación de constantes

Supongamos, pues, que conocemos  $n$  soluciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$  linealmente independientes de la ED homogénea (5.11), y veamos un método, conocido con el nombre de *método de Lagrange* o de *variación de constantes*, que se utiliza para obtener una solución particular de la ED completa. En este método se supone que la solución particular es de la forma:

$$\varphi = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (5.14)$$

donde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  son funciones derivables en el intervalo  $I$ , que se determinan imponiendo las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{cccccc} C_1'(x)y_1(x) & + & C_2'(x)y_2(x) & + & \dots & + & C_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) & + & C_2'(x)y_2'(x) & + & \dots & + & C_n'(x)y_n'(x) & = & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) & + & \dots & + & C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) & + & \dots & + & C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & b(x) \end{array}$$

Se comprueba fácilmente que si se satisfacen estas  $n$  condiciones entonces la función (5.14) es solución de la ED completa. Siempre es posible resolver dicho sistema para expresar las funciones  $C_1', C_2', \dots, C_n'$  por medio de funciones continuas conocidas lo que permite calcular las funciones  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

#### 5.3.2.2. Formas especiales del término independiente

Hay algunos casos especiales en que puede hallarse una solución particular de la ED (5.13) probando directamente cierto tipo de funciones. Concretamente, si la función  $b(x)$  es de la forma  $b(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \cos(\beta x)$ , o bien  $b(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \sin(\beta x)$  donde  $\alpha, \beta$  son números reales (pudieran ser uno o los dos iguales a cero) y  $P_m(x)$  es una función polinómica de grado  $m$ . Entonces lo que hacemos es hallar una solución particular de la ED:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y_0(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} P_m(x) \quad (5.15)$$

Se procede de la siguiente forma:

**a)** Si  $\alpha + i\beta$  no es raíz del polinomio característico  $\chi(\lambda)$ , entonces hay una solución particular de la ED (5.15) de la forma  $\varphi(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} Q_m(x)$ , donde  $Q_m(x)$  es una función polinómica de grado  $m$  con coeficientes indeterminados que se calculan imponiendo que la función  $\varphi(x)$  sea solución de la ED (5.15).

**b)** Si  $\alpha + i\beta$  es raíz del polinomio característico  $\chi(\lambda)$  con multiplicidad  $k$ , entonces hay una solución particular de la ED (5.15) de la forma  $\varphi(x) = x^k e^{(\alpha+i\beta)x} Q_m(x)$ , donde  $Q_m(x)$  es una función polinómica de grado  $m$  con coeficientes indeterminados que se calculan imponiendo que la función  $\varphi(x)$  sea solución de la ED (5.15).

Obtenida una solución particular de la ED (5.15), su parte real o su parte imaginaria, según sea  $b(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \cos(\beta x)$ , o  $b(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \sin(\beta x)$ , es una solución particular de la ED (5.13). Naturalmente, el método también puede aplicarse cuando la función  $b(x)$  es suma de funciones de los tipos considerados.

## 5.4. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \cdots + a_{1n}y_n(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \cdots + a_{2n}y_n(x) + b_2(x) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \cdots + a_{nn}y_n(x) + b_n(x) \end{cases}$$

Donde  $a_{ij}, b_j, 1 \leq i, j \leq n$ , son funciones reales (o complejas) conocidas, continuas en un intervalo  $I$ , se dice que constituyen un sistema diferencial lineal (SDL, en adelante) de  $n$  ecuaciones en las incógnitas  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Por analogía con los sistemas de ecuaciones lineales, es conveniente usar la notación matricial:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Lo que permite escribir el sistema en la forma:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x) \quad (5.16)$$

Cuando  $\mathbf{b}(x) = 0$  para todo  $x \in I$ , el sistema se llama homogéneo, y completo o no homogéneo en caso contrario.

**Teorema 5.12** (Teorema de existencia y unicidad.). *Dados  $x_0 \in I, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , existe una única función  $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que es solución del sistema diferencial lineal (5.16) y verifica que  $\mathbf{y}(x_0) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .*

Notaremos  $C^1(I, \mathbb{R}^n)$  el espacio vectorial de las funciones reales (o complejas) definidas en el intervalo  $I$  con valores en  $\mathbb{R}^n$  (o en  $\mathbb{C}^n$ ) que tienen derivada continua. Teniendo en cuenta la linealidad del operador  $\Lambda : C^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$  que a cada función  $\mathbf{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  hace corresponder la función  $\Lambda(\mathbf{y})$  definida para todo  $x \in I$  por  $\Lambda(\mathbf{y})(x) = \mathbf{y}'(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)$ , y razonando de forma análoga a como se hizo para la ED lineal de orden  $n$ , obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.13.** *El conjunto de todas las soluciones del sistema diferencial lineal homogéneo  $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)$  es un subespacio vectorial de dimensión  $n$  de  $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ . Las soluciones del SDL completo (5.16) son las funciones de la forma:*

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{h}(x) + c_1\mathbf{y}_1(x) + c_2\mathbf{y}_2(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x) \quad (x \in I)$$

donde  $\mathbf{h}$  es una solución particular del SDL completo,  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$  son  $n$  soluciones linealmente independientes del SDL homogéneo y  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias.

Un conjunto de  $n$  soluciones linealmente independientes del SDL homogéneo se dice que es un *sistema fundamental de soluciones*.

Notaremos  $\mathcal{M}_n$  el espacio de las matrices cuadradas de orden  $n$  reales (o complejas). Dadas  $n$  funciones  $\mathbf{y}_j \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , notaremos  $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_2 | \cdots | \mathbf{y}_n)$  la matriz o, más propiamente, la función matricial,  $\mathbf{Y} : I \rightarrow \mathcal{M}_n$ , cuyas columnas están formadas por las funciones  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ . Naturalmente,

por  $\mathbf{Y}'$  entendemos la función matricial cuyas columnas son las funciones  $\mathbf{y}_j'$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Con estos convenios, podemos considerar la *ecuación diferencial matricial* asociada al SDL:

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x), \quad \mathbf{Y} \in C(I, \mathcal{M}_n) \quad (5.17)$$

Es evidente que  $\mathbf{Y}$  es solución de la ecuación matricial (5.17) si, y sólo si, sus columnas son soluciones del SDL homogéneo. Una matriz cuyas columnas son un sistema fundamental de soluciones del SDL homogéneo, se llama una *matriz fundamental*.

El siguiente resultado permite reconocer cuándo  $n$  soluciones del sistema homogéneo son linealmente independientes.

**Teorema 5.14.** *El determinante de una solución,  $\mathbf{Y}$ , de la ED matricial (5.17) o bien es idénticamente cero o no se anula en ningún punto del intervalo  $I$ , lo que, a su vez, equivale a que  $\mathbf{Y}$  sea una matriz fundamental.*

Más adelante veremos cómo obtener una matriz fundamental de un SDL con coeficientes constantes. Concluiremos ahora viendo cómo puede obtenerse una solución particular del SDL completo, supuesto que conocemos una matriz fundamental  $\mathbf{Y}$ . Siguiendo la técnica de variación de constantes, se busca una solución particular de (5.16) de la forma:

$$\mathbf{h}(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{C}(x) \quad (5.18)$$

donde  $\mathbf{C} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función con derivada continua en  $I$ . Teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{h}'(x) = \mathbf{Y}'(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{Y}(x)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{Y}(x)\mathbf{C}'(x)$$

y sustituyendo (5.18) en (5.16), obtenemos  $\mathbf{Y}(x)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{b}(x)$ , lo que permite calcular  $\mathbf{C}'(x) = \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{b}(x)$ , y a su vez  $\mathbf{C}(x)$  por :

$$\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}(x_0) + \int_{x_0}^x \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{b}(t) dt$$

donde  $x_0$  es cualquier punto de  $I$ . Finalmente, la solución de (5.16) que verifica la condición inicial  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ , donde  $\mathbf{y}_0$  es un vector dado de  $\mathbb{R}^n$ , viene dada por:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{Y}(x) \left[ \mathbf{Y}^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{b}(t) dt \right].$$

Los resultados anteriores pueden usarse para estudiar la ED lineal de orden  $n$ . Ello se debe a que resolver una ED lineal de orden  $n$  equivale a resolver un SDL de  $n$  ecuaciones. En efecto, consideremos la ED lineal de orden  $n$ :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

Poniendo  $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ , podemos escribir de forma equivalente la ecuación en la forma:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= -a_0(x)y_1(x) - a_1(x)y_2(x) - a_2(x)y_3(x) \cdots - a_{n-1}(x)y_n(x) + b(x) \end{aligned}$$

que es un SDL de  $n$  ecuaciones con:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Nótese que, en particular, esto justifica que consideremos tan sólo sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de *primer orden*.

## 5.5. Sistemas de EDs lineales con coeficientes constantes

En lo que sigue consideraremos un SDL homogéneo:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) \quad (5.19)$$

cuya matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$ , es una matriz constante, esto es,  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ . Nuestro problema es obtener un sistema fundamental de soluciones de dicho sistema. Teniendo en cuenta que una ED lineal de orden  $n$  puede escribirse como un SDL de  $n$  ecuaciones, es razonable esperar que el sistema (5.19) tenga, por analogía con la EDL de orden  $n$  y coeficientes constantes, soluciones de la forma:

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x} \mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \neq \mathbf{0})$$

donde  $\lambda$  es un número real o complejo y  $\mathbf{u}$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$  o de  $\mathbb{C}^n$ . Sustituyendo  $\mathbf{y}(x)$  por  $e^{\lambda x} \mathbf{u}$  en (5.19), obtenemos:

$$\lambda e^{\lambda x} \mathbf{u} = \mathbf{A} e^{\lambda x} \mathbf{u} = e^{\lambda x} \mathbf{A} \mathbf{u}$$

que, cancelando el factor  $e^{\lambda x}$  y reordenando los términos, equivale a:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (5.20)$$

donde  $\mathbf{I}$  indica la matriz identidad de orden  $n$ . Deducimos así que  $\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x} \mathbf{u}$  es solución de (5.19) si, y sólo si,  $\lambda$  y  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  satisfacen (5.20), es decir,  $\lambda$  es un *valor propio* de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{u}$  es un *vector propio* de  $\mathbf{A}$  asociado con  $\lambda$ .

**Proposición 5.15.** *Supongamos que hay una base de  $\mathbb{C}^n$ ,  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ , formada por vectores propios de  $\mathbf{A}$ , y sea  $\lambda_j$  un valor propio<sup>2</sup> asociado con  $\mathbf{u}_j$ . Entonces*

$$\mathbf{y}_1 = e^{\lambda_1 x} \mathbf{u}_1, \mathbf{y}_2 = e^{\lambda_2 x} \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{y}_n = e^{\lambda_n x} \mathbf{u}_n$$

es un conjunto fundamental de soluciones del SDL  $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x)$ .

Recordemos que los valores propios de una matriz  $\mathbf{A}$  son las raíces de su polinomio característico:

$$\Delta(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$$

Nótese también que, por ser la matriz  $\mathbf{A}$  de números reales, si  $\mathbf{z}$  es un vector propio asociado a un valor propio complejo  $\lambda = \alpha + i\beta$ , ( $\beta \neq 0$ ), dicho vector tiene que tener alguna de sus coordenadas compleja, es decir será de la forma  $\mathbf{z} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$  donde  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . En este caso también  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  es un

<sup>2</sup>Los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , pueden ser reales o complejos y pueden repetirse.

valor propio de  $\mathbf{A}$  y  $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$  es un vector propio asociado con  $\bar{\lambda}$ . Las correspondientes soluciones del sistema:

$$\mathbf{z}(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}), \quad \bar{\mathbf{z}}(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}(\mathbf{u} - i\mathbf{v})$$

son funciones complejas. Para obtener soluciones reales lo que se hace es sustituirlas por:

$$\frac{\mathbf{z}(x) + \bar{\mathbf{z}}(x)}{2} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x)\mathbf{u} - \sin(\beta x)\mathbf{v}), \quad \frac{\mathbf{z}(x) - \bar{\mathbf{z}}(x)}{2i} = e^{\alpha x} (\sin(\beta x)\mathbf{u} + \cos(\beta x)\mathbf{v})$$

La hipótesis hecha en la proposición anterior equivale a que la matriz  $\mathbf{A}$  sea diagonalizable sobre  $\mathbb{C}$ , lo que no siempre es posible.

En el caso general se procede de la siguiente forma:

- 1) Se calculan los valores propios  $\lambda_j$ , con multiplicidades respectivas  $k_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ .
- 2) Para cada valor propio  $\lambda_j$  se hallan  $k_j$  vectores linealmente independientes que verifiquen que

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{k_j} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

El espacio  $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^{k_j}$  se llama *subespacio máximo* asociado al valor propio  $\lambda_j$ .

- 3) Los  $n$  vectores obtenidos en 2) forman una base,  $\mathbf{B}$ , de  $\mathbb{C}^n$ . Cada vector  $\mathbf{u} \in \mathbf{B}$  está en el espacio máximo de algún valor propio  $\lambda_{\mathbf{u}}$ , de multiplicidad  $k_{\mathbf{u}}$ , verificándose que la función:

$$\mathbf{y}_{\mathbf{u}}(x) = e^{\lambda_{\mathbf{u}} x} \left( \mathbf{u} + x(\mathbf{A} - \lambda_{\mathbf{u}} \mathbf{I})\mathbf{u} + \frac{x^2}{2}(\mathbf{A} - \lambda_{\mathbf{u}} \mathbf{I})^2 \mathbf{u} + \dots + \frac{x^{k_{\mathbf{u}}-1}}{(k_{\mathbf{u}}-1)!} (\mathbf{A} - \lambda_{\mathbf{u}} \mathbf{I})^{k_{\mathbf{u}}-1} \mathbf{u} \right)$$

es solución del SDL  $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x)$  y el conjunto de todas ellas constituye un sistema fundamental de soluciones.

Cuando hay valores propios complejos se procede a asociarlos por pares conjugados y se toma la parte real e imaginaria de las soluciones correspondientes.

La justificación del procedimiento indicado es más un problema de álgebra que de análisis y se apoya en la existencia de la forma canónica de Jordan de una matriz.

Finalmente, conocido un sistema fundamental de soluciones del SDL homogéneo, la técnica de variación de constantes, que en el caso que nos ocupa es especialmente sencilla de aplicar, permite obtener una solución particular del SDL completo  $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$ .

El procedimiento anterior es el más clásico para obtener la solución general de la ecuación (5.19) pero si hay raíces múltiples los cálculos pueden ser bastante tediosos. Vamos a considerar a continuación la ecuación (5.19) desde otro punto de vista.

## 5.6. Exponencial de una matriz

Volvamos a considerar el SDL homogéneo con coeficientes constantes dado por  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  donde  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ . Dado un vector  $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ , queremos calcular la solución de dicho sistema que verifica  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{z}_0$ . En el caso más elemental en el que la matriz  $\mathbf{A}$  es un número  $a$ , y  $\mathbf{z}_0$  es un número  $z_0$ , el sistema es  $y' = ay$  y la solución buscada es  $y(x) = e^{ax}z_0$ . Con algo de osadía podemos imaginar que en el caso general la solución será de la forma  $\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x}\mathbf{z}_0$ . Naturalmente, esto plantea dos problemas: definir la

exponencial de una matriz  $\mathbf{y}$ , una vez definida, comprobar que efectivamente la función  $\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}_0$  es solución del SDL  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  con  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{z}_0$ .

Para definir la exponencial de una matriz cuadrada usaremos la serie que define la exponencial:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Se trata de una serie de potencias que converge en todo  $\mathbb{R}$  (y en todo  $\mathbb{C}$  si interpretamos que  $x$  es un número complejo). Como las matrices cuadradas podemos multiplicarlas y sumarlas, dada una matriz  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ , podemos considerar la sucesión de matrices

$$\sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \quad (5.21)$$

Tiene perfecto sentido considerar la convergencia de esta sucesión en  $\mathcal{M}_n$ . A efectos de convergencia  $\mathcal{M}_n$  no es otra cosa que  $\mathbb{R}^q$  con  $q = n^2$ . Pues bien, se demuestra que la serie (5.21) converge en  $\mathcal{M}_n$ . Es natural definir el límite de dicha serie como la exponencial de la matriz  $\mathbf{A}$ . Seguimos el convenio de que  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$  la matriz identidad.

$$e^{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad (5.22)$$

Podemos considerar ahora la función  $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}_0 = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \mathbf{A}^k}{k!} \right) \mathbf{z}_0 = \left( \mathbf{I} + x\mathbf{A} + x^2 \frac{\mathbf{A}^2}{2} + x^3 \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots + x^n \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots \right) \mathbf{z}_0$$

Derivando respecto a  $x$  término a término y notando  $\mathbf{O} \in \mathcal{M}_n$  la matriz nula, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(x) &= \left( \mathbf{O} + \mathbf{A} + x\mathbf{A}^2 + x^2 \frac{\mathbf{A}^3}{2!} + \cdots + x^{n-1} \frac{\mathbf{A}^n}{(n-1)!} + \dots \right) \mathbf{z}_0 = \\ &= \mathbf{A} \left( \mathbf{I} + x\mathbf{A} + x^2 \frac{\mathbf{A}^2}{2} + x^3 \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots + x^{n-1} \frac{\mathbf{A}^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right) \mathbf{z}_0 = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}_0 = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) \end{aligned}$$

Lo que prueba que  $\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x} \mathbf{z}_0$  es la solución del SDL homogéneo que verifica que  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{z}_0$ .

Pensarás que no hemos ganado gran cosa porque el cálculo de la exponencial de una matriz no parece nada fácil. Pues de hecho hay una manera muy sencilla de hacerlo usando el siguiente resultado clave.

**Teorema 5.16** (Teorema de Cayley-Hamilton). *Toda matriz es anulada por su polinomio característico. Es decir, si*

$$\Delta(z) = |\mathbf{A} - z\mathbf{I}|$$

*es el polinomio característico de la matriz  $\mathbf{A}$ , se verifica que  $\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ .*

Supongamos ahora que  $P(z)$  es una función polinómica de grado mayor o igual que  $n$  y sea  $R(z)$  el resto de la división de  $P(z)$  por  $\Delta(z)$ . Como  $\Delta(z)$  tiene grado  $n$  se tendrá que el grado de  $R(z)$  es menor que  $n$ . Tenemos que

$$P(z) = Q(z)\Delta(z) + R(z) \implies P(\mathbf{A}) = Q(\mathbf{A})\Delta(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}) \quad (5.23)$$

Esto nos dice que cualquier función polinómica en  $\mathbf{A}$  puede ser expresada como una función polinómica en  $\mathbf{A}$  de grado menor o igual que  $n-1$ . Deducimos también que la serie (5.22) se reduce a un número finito de sumandos, en total no más de  $n-1$ .

Consideremos ahora una función que viene dada como la suma de una serie de potencias en una cierta región  $\Omega \subset \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (z \in \Omega)$$

Aunque una serie de potencias no es exactamente un polinomio, es posible escribir

$$f(z) = \Delta(z)Q(z) + R(z) \quad (5.24)$$

donde  $R(z)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n-1$  (en general,  $Q(z)$  será una serie de potencias pero eso no interesa para lo que sigue).

Naturalmente, como  $\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ , la igualdad (5.24) nos dice que debemos definir el valor de la función  $f$  en  $\mathbf{A}$  por

$$f(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$$

En particular, podemos tomar

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

y obtenemos que

$$e^{\mathbf{A}} = R(\mathbf{A})$$

Todo ha quedado reducido al cálculo del polinomio  $R(z)$ .

Vamos a ver que, en la hipótesis de que  $\Omega$  contiene a los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ , la igualdad (5.24) permite calcular fácilmente  $R(z)$ . En efecto, evaluando la igualdad (5.24) en los valores propios  $\lambda_i$  de  $\mathbf{A}$  (para eso se necesita que  $f$  esté definida en dichos valores, es decir, que  $\Omega$  contenga a los valores propios de  $\mathbf{A}$ ) tenemos

$$f(\lambda_i) = \Delta(\lambda_i)Q(\lambda_i) + R(\lambda_i)$$

y, como  $\Delta(\lambda_i) = 0$ , obtenemos que

$$R(\lambda_i) = f(\lambda_i) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (5.25)$$

Observa que para determinar  $R(z)$ , como es de grado menor o igual que  $n-1$ , necesitamos  $n$  condiciones.

♦ Si todos los valores propios  $\lambda_i$  son distintos, entonces (5.25) nos proporciona  $n$  ecuaciones que permiten calcular los coeficientes de  $R$ .

♦ Si, por ejemplo,  $\lambda$ , es un valor propio con multiplicidad  $k > 1$ , entonces podremos escribir  $\Delta(z) = (z - \lambda)^k S(z)$  y, teniendo en cuenta la igualdad (5.24), deducimos que se verifican las siguientes  $k$  igualdades

$$f(\lambda) = R(\lambda), \quad f'(\lambda) = R'(\lambda), \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(\lambda) = R^{(k-1)}(\lambda)$$

Por tanto, siempre tenemos en total  $n$  condiciones que permiten calcular el polinomio  $R$  y con ello  $f(\mathbf{A})$ . En particular, para  $f(z) = e^z$  obtenemos  $e^{\mathbf{A}}$ .

### 5.6.1. Cálculo de $e^{\mathbf{A}x}$

Para cada  $x \in \mathbb{R}$  notaremos  $\Delta_{\mathbf{A}x}(z)$  el polinomio característico de la matriz  $\mathbf{A}x$  y  $\Delta_{\mathbf{A}}$  el polinomio característico de  $\mathbf{A}$ . Supongamos que los valores propios de  $\mathbf{A}$  son  $\lambda_j$ , ( $1 \leq j \leq m$ ), con multiplicidades respectivas  $k_j$  donde  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . Es decir

$$\Delta_{\mathbf{A}}(z) = |\mathbf{A} - z\mathbf{I}| = \alpha \prod_{j=1}^m (z - \lambda_j)^{k_j}$$

donde  $\alpha$  es una constante. Observemos que

$$\Delta_{\mathbf{A}x}(zx) = |\mathbf{A}x - zx\mathbf{I}| = x^n |\mathbf{A} - z\mathbf{I}| = x^n \Delta_{\mathbf{A}}(z)$$

Pongamos  $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Como caso particular de la igualdad (5.24) para la matriz  $\mathbf{A}x$ , tenemos que

$$f(z) = \Delta_{\mathbf{A}x}(z)Q_x(z) + T_x(z)$$

donde  $Q_x(z)$  será una serie de potencias en  $z$  que no nos interesa y  $T_x(z)$  será un polinomio en  $z$  de grado menor que  $n$  cuyos coeficientes dependerán de  $x$ . En lo que sigue,  $x$  será un número real fijo y distinto de cero. Definamos ahora  $g(z) = f(zx)$  con lo que

$$\begin{aligned} g(z) &= \Delta_{\mathbf{A}x}(zx)Q_x(zx) + T_x(zx) \\ &= x^n \Delta_{\mathbf{A}}(z)Q_x(zx) + T_x(zx) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$= x^n \alpha \prod_{j=1}^m (z - \lambda_j)^{k_j} Q_x(zx) + T_x(zx) \quad (5.27)$$

si en la igualdad (5.26) sustituimos  $z$  por  $\mathbf{A}$  y tenemos en cuenta que  $\Delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ , obtenemos que

$$g(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}x) = e^{\mathbf{A}x} = T_x(\mathbf{A}x)$$

Pongamos  $R(z) = T_x(zx)$ . Con ello  $e^{\mathbf{A}x} = R(\mathbf{A})$ . Observemos que  $R(z)$  será de la forma  $R(z) = \sum_{q=0}^{n-1} c_q(x)z^q$ .

Teniendo en cuenta que

$$\left. \frac{d^k}{dz^k} \prod_{j=1}^m (z - \lambda_j)^{k_j} T_x(zx) \right|_{z=\lambda_j} = 0 \quad (0 \leq k \leq k_j - 1)$$

de la igualdad (5.27) se deduce que

$$\left. \frac{d^k}{dz^k} g(z) \right|_{z=\lambda_j} = \left. \frac{d^k}{dz^k} f(zx) \right|_{z=\lambda_j} = x^k e^{\lambda_j x} = R^{(k)}(\lambda_j) = \sum_{q=k}^{n-1} (q-k)! c_q(x) \lambda_j^{q-k} \quad (0 \leq k \leq k_j - 1)$$

En total tenemos  $n$  ecuaciones que permiten calcular las funciones  $c_q(x)$ ,  $0 \leq q \leq n-1$ . Finalmente

$$e^{\mathbf{A}x} = \sum_{q=0}^{n-1} c_q(x) \mathbf{A}^q.$$

## 5.6.2. Oscilaciones libres y forzadas

Consideremos un cuerpo de masa  $m$  suspendido del extremo inferior de un muelle vertical de masa despreciable. Partiendo de una posición de equilibrio, en el momento inicial  $t = 0$ , se aplica al cuerpo una fuerza  $f(t)$  en dirección hacia abajo que produce un desplazamiento inicial  $y_0$  y hace que el cuerpo se ponga en movimiento con una velocidad inicial  $v_0$ .

Para obtener la ecuación del movimiento fijamos un sistema de referencia cuyo origen situamos en el centro de gravedad del cuerpo en equilibrio. Llamaremos  $y(t)$  al desplazamiento vertical en el momento  $t$  medido respecto de la posición inicial de equilibrio y elegimos el sentido positivo del desplazamiento en la dirección hacia arriba. Debemos tener en cuenta la fuerza de recuperación,  $F_r$ , del muelle que viene dada por la ley de Hooke como  $F_r(t) = -ky(t)$  donde  $k > 0$  es una constante. Supondremos también que hay una fuerza de amortiguación,  $F_a$ , que es proporcional a la velocidad, es decir,



$F_a(t) = -cy'(t)$  donde  $c > 0$  es una constante de proporcionalidad (el *coeficiente de amortiguamiento*). Los signos negativos se deben a que la fuerza de recuperación  $F_r$  y la de amortiguación  $F_a$  se oponen siempre al movimiento.

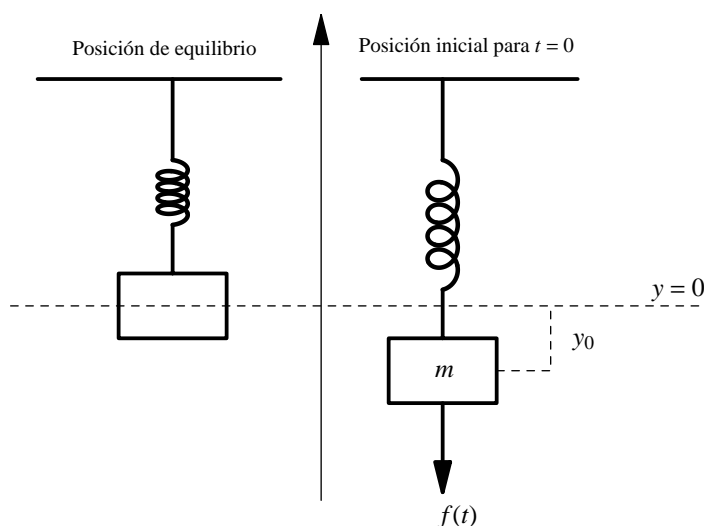
Si es  $h$  el alargamiento del muelle en la posición inicial de equilibrio, se tendrá que  $kh - mg = 0$ . Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, deducimos que

$$m y''(t) = mg + f(t) - k(y(t) + h) - cy'(t) = f(t) - ky(t) - cy'(t)$$

que suele escribirse con la notación de Newton en la forma

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + ky = f(t) \quad (5.28)$$

Observa que como todas las fuerzas actúan en una misma dirección podemos ignorar el carácter vectorial y trabajar solamente con sus módulos teniendo siempre en cuenta el sentido en el que actúa cada fuerza. Cuando la fuerza externa aplicada es nula,  $f = 0$ , se dice que se trata de oscilaciones libres que



pueden ser con amortiguamiento  $c > 0$  o sin amortiguamiento  $c = 0$ . Cuando la fuerza externa aplicada no es nula se trata de oscilaciones forzadas.

### 5.6.2.1. Oscilaciones libres no amortiguadas

En las oscilaciones libres se entiende que el cuerpo se somete a un desplazamiento inicial  $y_0$  y después se suelta dándole una cierta velocidad inicial  $v_0$  sin ejercer después sobre él ninguna fuerza externa. La ecuación del movimiento (5.28) queda en este caso reducida a

$$m \ddot{y} + ky = 0 \quad (5.29)$$

que se trata de una EDL homogénea de segundo orden. La ecuación característica es  $m\lambda^2 + k = 0$  cuyas raíces son

$$\lambda_1 = i \sqrt{k/m}, \quad \lambda_2 = -i \sqrt{k/m}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación (5.30) son las funciones

$$y(t) = C_1 \operatorname{sen}(\omega t) + C_2 \operatorname{cos}(\omega t) \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias que pueden calcularse cuando se conocen las condiciones iniciales  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = v_0$ .

Las soluciones anteriores suelen escribirse, poniendo  $C_1 + iC_2 = Ae^{i\varphi}$  donde  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  y  $\varphi = \text{Arg}(C_1 + iC_2)$ , en la forma siguiente.

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) = \text{Im}((C_1 + iC_2)(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))) = \text{Im}(Ae^{i\varphi} e^{i\omega t}) = \\ &= \text{Im}(Ae^{i(\omega t + \varphi)}) = A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Un movimiento de la forma  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  se dice que es un *movimiento armónico simple*. Dicho movimiento es periódico con periodo igual a  $T = 2\pi/\omega$ . El número  $\nu = 1/T$  es la frecuencia en ciclos por segundo (hercios). El número  $\omega$  es la *frecuencia angular o pulsación* que se mide en radianes por segundo,  $A$  es la *amplitud*,  $\omega t + \varphi$  es la *fase* y  $\varphi$  es la *fase inicial*.

Es interesante observar que la pulsación,  $\omega$ , es independiente de las condiciones iniciales y solamente depende de la masa  $m$  y de la constante elástica  $k$  del muelle.

### 5.6.2.2. Oscilaciones libres amortiguadas

En este caso la ecuación del movimiento (5.28) queda en la forma

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (5.30)$$

que se trata de una EDL homogénea de segundo orden. La ecuación característica es  $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$  cuyas raíces son

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}, \quad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

La naturaleza de estas raíces determina las características del movimiento.

#### Caso de raíces reales

Si la amortiguación es muy grande de forma que  $c^2 - 4km \geq 0$  las dos raíces son reales y negativas. En este caso no hay movimiento oscilatorio, se trata de un movimiento aperiódico de ecuación

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{o bien} \quad y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \quad (\text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$$

Si  $c^2 - 4km > 0$  se dice que el movimiento es *sobreamortiguado*. Cuando  $c^2 - 4km = 0$  se dice que hay *amortiguamiento crítico*.

#### Caso de raíces complejas

Cuando  $c^2 - 4km < 0$  las raíces son complejas

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = -\frac{c}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

y las soluciones son

$$y(t) = e^{-ct/2m} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

que, al igual que antes, puede escribirse de la forma

$$y(t) = e^{-ct/2m} A \sin(\omega t + \varphi) \quad (5.31)$$

Se trata de un movimiento oscilatorio cuya amplitud,  $Ae^{-ct/2m}$ , decrece exponencialmente. La pulsación  $\omega$  es ahora menor que en el caso anterior y el período será mayor, es decir, las oscilaciones amortiguadas son más lentas.

## 5.6.2.3. Oscilaciones forzadas

Acabamos de ver que en las oscilaciones libres con amortiguamiento la amplitud del movimiento decae exponencialmente. Por ello, en la práctica, el movimiento cesa al poco tiempo y se dice que se trata de un movimiento transitorio. A veces interesa que dicho movimiento sea permanente para lo que es preciso aportar energía exterior al sistema por medio de una fuerza capaz de sostener la oscilación. El caso más interesante corresponde a una fuerza del tipo  $f(t) = a \operatorname{sen}(bt)$ . La ecuación (5.28) del movimiento es ahora

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = a \operatorname{sen}(bt) \quad (5.32)$$

Se trata de una EDL completa cuya solución, como sabemos, se obtiene sumando a la solución general de la ED homogénea una solución particular de la ED completa. Teniendo en cuenta la forma del término independiente (ver (5.15)), buscaremos una solución particular de la ED

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = a e^{ibt} \quad (5.33)$$

que sea de la forma  $\varphi(t) = M e^{ibt}$  donde  $M$  es una constante que deberemos calcular y entonces  $y(t) = \operatorname{Im}\varphi(t)$  será una solución particular de (5.32). Sustituyendo en (5.33) obtenemos que

$$-mMb^2 + ibcM + kM = a \implies M = \frac{a}{k - mb^2 + ibc} = \frac{a(k - mb^2) - iabc}{(k - mb^2)^2 + b^2c^2}$$

Poniendo  $k - mb^2 - ibc = \rho e^{i\vartheta}$ , donde  $\rho = \sqrt{(k - mb^2)^2 + b^2c^2}$  y  $\vartheta = \operatorname{Arg}(k - mb^2 - ibc)$ , deducimos que

$$\begin{aligned} y(t) = \operatorname{Im}\varphi(t) &= \operatorname{Im} M e^{ibt} = \frac{a}{(k - mb^2)^2 + b^2c^2} \operatorname{Im}((k - mb^2 - ibc) e^{ibt}) = \\ &= \frac{a}{(k - mb^2)^2 + b^2c^2} \operatorname{Im}(\rho e^{i\vartheta} e^{ibt}) = \frac{a}{\sqrt{(k - mb^2)^2 + b^2c^2}} \operatorname{sen}(bt + \vartheta) \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación (5.32) se obtiene sumando esta solución particular a la solución general (5.31) de la homogénea antes calculada. Obtenemos así las soluciones

$$y(t) = e^{-ct/2m} A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \frac{a}{\sqrt{(k - mb^2)^2 + b^2c^2}} \operatorname{sen}(bt + \vartheta) \quad (5.34)$$

Vemos que el movimiento está formado por la superposición de un movimiento oscilatorio amortiguado, que se denomina *transitorio* porque cesa al cabo de un tiempo, y de un movimiento oscilatorio armónico simple que permanece y por ello se llama *permanente*. El sistema acaba oscilando con la misma frecuencia,  $b$ , que la fuerza exterior aplicada. Además la amplitud final del movimiento depende de dicha frecuencia.

Es fácil calcular el valor de la frecuencia de la fuerza aplicada que hace máxima la amplitud final del movimiento. Dicho valor viene dado por:

$$b_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} \quad (5.35)$$

Esta frecuencia se llama *frecuencia de resonancia* que para valores pequeños de  $c/m$  es próxima al valor  $\sqrt{k/m}$  que es la pulsación propia del sistema cuando oscila libremente sin amortiguamiento.

A la frecuencia de resonancia corresponde una amplitud máxima dada por

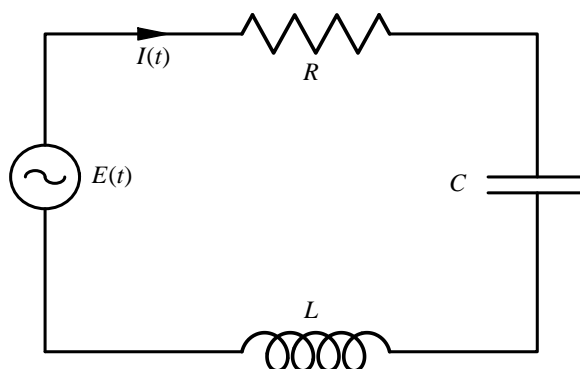
$$A_m = \frac{a}{c \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}} \quad (5.36)$$

Deducimos que, cuando el coeficiente de amortiguamiento,  $c$ , es muy pequeño, la amplitud de las oscilaciones forzadas en resonancia puede ser muy grande aunque la amplitud de la fuerza aplicada  $a$  sea pequeña.

Como veremos a continuación, los circuitos eléctricos son muy parecidos (*isomorfos*, diríamos en matemáticas) a los sistemas que estamos estudiando y en ellos se aprovecha el fenómeno de resonancia para amplificar señales; eso es lo que hacen esencialmente los sintonizadores de radio. Otras veces hay que evitar la resonancia como ocurre en las vibraciones de estructuras elásticas tales como puentes o en las vibraciones de partes de una máquina como un motor de automóvil donde el aumento de la amplitud de las vibraciones es peligroso o molesto.

#### 5.6.2.4. Circuitos eléctricos RLC

La intensidad  $I = I(t)$  de la corriente a través de un circuito eléctrico está caracterizada por los valores de la resistencia  $R$  (ohmios), capacidad  $C$  (faradios), autoinductancia  $L$  (henrios) y fuerza electromotriz (fem) aplicada  $E = E(t)$  (voltios). Los valores de  $R$ ,  $C$  y  $L$  se suponen constantes y son propios de cada circuito.



Recuerda que la intensidad  $I(t)$  de la corriente eléctrica mide el flujo de carga  $q(t)$  por unidad de tiempo a través de una sección del conductor:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

su unidad es el amperio (culombio/segundo).

La resistencia, la autoinducción y la capacidad están relacionadas con la intensidad de la corriente por las siguientes igualdades:

$$V(t) = RI(t), \quad V(t) = L \frac{dI(t)}{dt}, \quad V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

donde, en cada caso, hemos representado por  $V(t)$  la diferencia de potencial entre los extremos del elemento en cuestión (resistencia, autoinducción, condensador).

La fuerza electromotriz aplicada produce una diferencia de potencial  $E(t)$  en los extremos del circuito que, por el principio de conservación de la energía, debe ser igual a la suma de las diferencias de potencial entre los extremos de cada uno de los componentes del circuito. Como se trata de un circuito de una sola malla, a lo largo de él circulará la misma intensidad de corriente  $I = I(t)$ . Obtenemos así la siguiente ED:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{q(t)}{C} = E(t) \quad (5.37)$$

que puede escribirse de forma equivalente en función de la carga  $q(t)$ :

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t) \quad (5.38)$$

También podemos derivar la ED (5.37) para obtener en función de  $I(t)$  la ED:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t) \quad (5.39)$$

De esta forma hemos obtenido ED lineales de segundo orden con coeficientes constantes formalmente idénticas a la obtenida para el caso de oscilaciones forzadas (ecuación (5.28)). Los resultados que obtuvimos en el estudio del movimiento oscilatorio pueden ahora interpretarse en términos de circuitos eléctricos sin más que tener en cuenta las siguientes correspondencias:

oscilaciones	circuito RLC
$F(t) = my''(t)$ (masa)	$V(t) = Lq''(t)$ (autoinductancia)
$F(t) = cy'(t)$ (amortiguador)	$V(t) = Rq'(t)$ (resistencia)
$F(t) = ky(t)$ (muelle)	$V(t) = q(t)/C$ (condensador)

Desde un punto de vista matemático, ambos sistemas, el mecánico y el circuito RLC, son *el mismo* sistema o, dicho en la jerga matemática, son *sistemas isomorfos*.

## 5.7. EDOs y transformada de Laplace

**Ejemplo 5.17.** Consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$y'' + y = \sin t \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$$

Es decir, se trata de calcular una solución,  $y(t)$ , de la ecuación diferencial  $y'' + y = \sin t$  que verifique las condiciones iniciales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ . Notemos  $Y(s)$  la transformada de Laplace de la función (desconocida  $y$ ). Tomando transformadas de Laplace en la ecuación diferencial y teniendo en cuenta la fórmula 4.38 para la transformada de Laplace de una derivada, obtenemos

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

sustituyendo en esta igualdad las condiciones iniciales resulta

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Por una parte

$$\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}(\sin t) + \mathcal{L}(\cos t) = \mathcal{L}(\sin t + \cos t)$$

Y por otra

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} \frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2} \mathcal{L}1 \mathcal{L}(t \sin t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(1 * t \sin t)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \sin t + \cos t + \frac{1}{2} 1 * t \sin t = \sin t + \cos t + \frac{1}{2} \int_0^t u \sin u \, du \\ &= \sin t + \cos t + \frac{1}{2} (-t \cos t + \sin t) = \cos t - \frac{1}{2} t \cos t + \frac{3}{2} \sin t \end{aligned}$$

Puedes comprobar que, efectivamente, esa es la solución correcta. ♦

**Ejemplo 5.18.** Consideremos el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + y = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de la ecuación y poniendo  $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$ , tenemos

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \int_0^{\pi} e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

Por tanto

$$Y(s) = \frac{1 + e^{-\pi s}}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2 + 1)^2}$$

En el ejemplo anterior hemos visto que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2 + 1)^2}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t \operatorname{cos} t)$$

teniendo en cuenta también la igualdad 4.40, deducimos que

$$y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t \operatorname{cos} t) + H(t - \pi) \left( \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(t - \pi) - (t - \pi) \operatorname{cos}(t - \pi)) \right)$$

es decir

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t \operatorname{cos} t), & 0 \leq t \leq \pi \\ -\frac{1}{2}\pi \operatorname{cos} t, & t > \pi \end{cases}$$

♦

**Ejemplo 5.19.** Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y' + z' + y + z &= 1 \\ y' + z &= e^t \end{aligned} \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 2$$

Tomando transformadas de Laplace y poniendo  $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$ ,  $Z(s) = \mathcal{L}z(s)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} sY(s) + 1 + sZ(s) - 2 + Y(s) + Z(s) &= \frac{1}{s} \\ sY(s) + 1 + Z(s) &= \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones deducimos que

$$Y(s) = \frac{-s^2 + s + 1}{s(s-1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

y tomando transformadas inversas obtenemos que

$$y(t) = 1 - 2e^t + te^t, \quad z(t) = 2e^t - te^t$$

♦

**Ejemplo 5.20.** Consideremos la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden  $n$  con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(t) \quad (5.40)$$

y condiciones iniciales

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (5.41)$$

La solución de 5.40 que satisface 5.41 se llama la *solución de estado estacionario*. Tomando transformadas de Laplace en 5.40 obtenemos

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)\mathcal{L}(y(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$$

esto es

$$\mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{Q(s)}$$

donde  $Q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ .

Supongamos que  $g(t)$  es una función tal que

$$\frac{1}{Q(s)} = \mathcal{L}(g(t))$$

Entonces

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(f * g)(t)$$

por lo que

$$y(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du \quad (5.42)$$

Teniendo en cuenta que

$$Q(s)\mathcal{L}(g(t)) = 1$$

es decir

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(\delta(t))$$

podemos considerar que  $g(t)$  es la solución de estado estacionario de la ecuación

$$g^{(n)} + a_{n-1}g^{(n-1)} + \dots + a_1g' + a_0g = \delta(t)$$

La función  $g(t)$  se llama *respuesta impulso* del sistema y su conocimiento permite obtener la respuesta del sistema a cualquier señal  $f(t)$  por medio de la convolución dada por 5.42.

Un caso particularmente sencillo es cuando el polinomio  $Q(s)$  tiene todas sus raíces simples. Si éstas son  $\alpha_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ), entonces se prueba con facilidad que

$$y(t) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{Q'(\alpha_j)} \int_0^t f(u)e^{\alpha_j(t-u)} du$$

◆

**Ejemplo 5.21.** Las ecuaciones en diferencias finitas lineales pueden resolverse con ayuda de la transformada de Laplace. Veamos un ejemplo.

Se trata de resolver la ecuación

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

Para ello definamos

$$y(t) = a_n \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Con lo cual la ecuación se convierte en

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0 \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (5.43)$$

Tomando transformadas de Laplace tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y(t+2)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} y(t+2) dt = [u = t+2] = \int_2^{\infty} e^{-s(u-2)} y(u) du = \\ &= e^{2s} \int_0^{\infty} e^{-su} y(u) du - e^{2s} \int_0^2 e^{-su} y(u) du \\ &= e^{2s} \mathcal{L}(y(t)) - e^{2s} \int_0^1 e^{-su} y(0) du - e^{2s} \int_1^2 e^{-su} y(1) du \\ &= e^{2s} \mathcal{L}(y(t)) - \frac{e^s}{s} (1 - e^{-s})\end{aligned}$$

Análogamente

$$\mathcal{L}(y(t+1)) = e^s \mathcal{L}(y(t))$$

Con lo que la ecuación 5.43 se convierte en

$$e^{2s} \mathcal{L}(y(t)) - \frac{e^s}{s} (1 - e^{-s}) - 3e^s \mathcal{L}(y(t)) + 2\mathcal{L}(y(t)) = 0$$

de donde fácilmente se obtiene que

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 2e^{-s})} - \frac{1}{s}$$

Teniendo ahora en cuenta que para  $a > 0$  y notando  $E(t)$  la función *parte entera* se verifica que

$$\mathcal{L}(a^{E(t)}) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})} \quad (\operatorname{Re}(s) > \max\{0, \log a\})$$

concluimos que

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(2^{E(t)}) - \mathcal{L}1 = \mathcal{L}(2^{E(t)} - 1)$$

de donde resulta finalmente

$$a_n = 2^n - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

♦

### 5.7.1. Ejercicios

1. Calcula la solución de la ecuación diferencial

$$my''(t) + ky(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < t \end{cases}$$

donde  $y(0) = y'(0) = 0$  y  $\varepsilon, m, k$  son constantes positivas.

2. Calcula la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + \lambda^2 y = \cos(\lambda t)$$

que verifica  $y(0) = 1$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) = 1$ .



3. Supongamos que la corriente eléctrica  $I$  en un circuito verifica

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(u) du = E$$

donde  $L, C, E$  son constantes positivas e  $I(0) = 0$ . Calcula  $I(t)$ .

4. Una bala de masa  $m$  es disparada por un cañón con una velocidad  $v_0$  dentro de un medio viscoso. Se sabe que el desplazamiento  $y(t)$  en el tiempo  $t \geq 0$  de la bala satisface la ecuación diferencial

$$my'' + ky' = 0$$

donde  $y(0) = 0, y'(0) = v_0$ . Calcula  $y(t)$ .

5. Calcula primero la respuesta impulso y después la solución de estado estacionario del sistema dado por la ecuación diferencial

$$y'' + y' - 2y = 4e^{-t}$$

6. Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x'' + y' + 3x &= 15e^{-t} \\ y'' - 4x' + 3y &= 15 \operatorname{sen}(2t) \end{aligned}$$

donde  $x(0) = 35, x'(0) = -48, y(0) = 27, y'(0) = -55$ .

7. Resuelve, usando transformadas de Laplace, la ecuación en diferencias finitas

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

## 5.8. Sistemas LTI y sistemas de ED

Recuerda que un **sistema** es cualquier proceso que transforma señales de entrada en señales de salida. En términos matemáticos, podemos representar un sistema por un operador  $L$  que al actuar sobre una señal  $x$  produce una señal  $y$ , lo que se escribe  $y = Lx$ .

Como puedes ver el concepto de “sistema” es muy general. Para que un concepto tan general sea realmente útil hay que suponer que se cumplen ciertas propiedades.

### Propiedades de los sistemas

- **Linealidad.** Se dice que un sistema  $L$  es lineal cuando es aditivo y homogéneo, es decir, cualesquiera sean las señales de entrada  $x$  e  $y$  y los números  $\alpha, \beta$  se verifica que:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$$

Esta propiedad suele llamarse *principio de superposición*.

- **Invariancia en el tiempo.** Se dice que un sistema  $L$  es invariante en el tiempo si un adelanto o retraso de la señal de entrada produce el mismo efecto en la señal de salida.

Representando por  $\tau_a x$  la señal  $(\tau_a x)(t) = x(t - a)$ , la invariancia en el tiempo se expresa por la igualdad:

$$L(\tau_a x) = \tau_a Lx$$

De manera más explícita, si es  $y(t) = (Lx)(t)$  la señal transformada de  $x$  y es  $z(t) = (L(\tau_a x))(t)$  la señal transformada de  $\tau_a x$ , se verifica que  $z(t) = y(t - a)$ .

- Estabilidad.** Se dice que un sistema  $L$  es estable cuando es lineal y *continuo*. Matemáticamente esto se expresa por la igualdad (que en cada caso concreto debe dotarse de significado matemático preciso):

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Lx_n$$

También suele expresarse la estabilidad por la condición de que el sistema transforme señales acotadas (Bounded Inputs) en salidas acotadas (Bounded Outputs). A estos sistemas les llaman BIBO en los textos de procesamiento de señales.

- Causalidad.** Se dice que un sistema  $L$  es causal cuando se verifica que

$$u(t) = v(t) \quad \forall t < t_0 \implies (Lu)(t) = (Lv)(t) \quad \forall t < t_0$$

Dicho en términos familiares, un sistema es causal cuando su respuesta depende solamente del pasado.

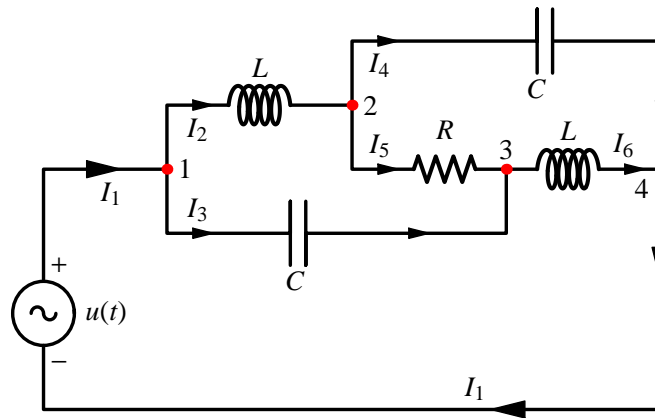
Un sistema LTI es un sistema lineal invariante en el tiempo. En lo que sigue solamente consideramos sistemas analógicos.

Una clase importante de sistemas LTI son aquellos en los que la relación entre la señal de entrada  $u$  y la de salida  $y$  viene dada por una ED lineal con coeficientes constantes del tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u \quad (5.44)$$

Estos sistemas aparecen, por ejemplo, en el estudio de circuitos eléctricos.

**Ejemplo 5.22.** Consideremos el circuito de la figura.



Suponemos conocidos los valores (constantes) de  $L$ ,  $R$  y  $C$ , así como la fem aplicada  $u(t)$  (input). El problema es obtener la caída de tensión a través de la resistencia, es decir la diferencia de potencial  $y(t)$  (output) entre los puntos 2 y 3. Notaremos  $V_{ij} = V_i - V_j$  la diferencia de potencial entre los puntos  $i, j$ . Naturalmente, las intensidades son funciones del tiempo  $I_j = I_j(t)$  así como las cargas respectivas  $q_j = q_j(t)$ .

Se sabe que la suma algebraica de las diferencias de potencial entre los extremos de los distintos elementos que forman un circuito cerrado o malla, tomadas todas en el mismo sentido, es igual a cero.

Malla 1341.

$V_{13} + V_{34} + V_{41} = 0$ . Esta igualdad proporciona la ecuación:

$$\frac{q_3}{C} + LI'_6 = u(t) \quad (5.45)$$

Malla 1231.

$V_{12} + V_{23} + V_{31} = 0$ . Esta igualdad proporciona la ecuación:

$$LI_2' + I_5R = \frac{q_3}{C} \quad (5.46)$$

Malla 2342.

$V_{23} + V_{34} + V_{42} = 0$ . Esta igualdad proporciona la ecuación:

$$I_5R + LI_6' = \frac{q_4}{C} \quad (5.47)$$

Derivando dos veces la ecuación (5.47) tenemos que

$$LI_6''' = \frac{I_4'}{C} - I_5''R \quad (5.48)$$

Derivando dos veces y sustituyendo el valor de  $u(t)$  dado por (5.45), tenemos que:

$$\frac{1}{LC}u(t) - u''(t) = \frac{q_3}{LC^2} + \frac{I_6'}{C} - \frac{I_3'}{C} - LI_6''' =$$

sustituyendo  $LI_6'''$  por su valor dado por (5.48)

$$= \frac{q_3}{LC^2} + \frac{I_6'}{C} - \frac{I_3'}{C} - \frac{I_4'}{C} + I_5''R =$$

sustituyendo  $I_6'$  por su valor dado por (5.47)

$$= \frac{q_3 + q_4}{LC^2} - \frac{I_5R}{LC} - \frac{I_3' + I_4'}{C} + I_5''R =$$

sustituyendo  $\frac{q_3 + q_4}{C}$  por su valor obtenido sumando (5.46) y (5.47)

$$= \frac{I_2' + I_6'}{C} - \frac{I_3' + I_4'}{C} + \frac{I_5R}{LC} + I_5''R =$$

usando que  $I_5 = I_2 - I_4 = I_6 - I_3 \Rightarrow 2I_5' = I_2' + I_6' - (I_3' + I_4')$

$$= \frac{2I_5'}{C} + \frac{I_5R}{LC} + I_5''R =$$

teniendo en cuenta que  $y(t) = I_5R$

$$= y'' + \frac{2}{RC}y' + \frac{1}{LC}y$$

Hemos obtenido que la relación entre la entrada (input)  $u(t)$  y la salida (output)  $y(t)$  viene dada por la ED:

$$y'' + \frac{2}{RC}y' + \frac{1}{LC}y = -u''(t) + \frac{1}{LC}u(t) \quad (5.49)$$

♦

### 5.8.1. Función de transferencia de un sistema LTI

Sea  $L$  un sistema LTI y supongamos que dicho sistema admite como entrada una señal de la forma  $e_\omega(t) = e^{i\omega t}$  donde  $\omega \in \mathbb{R}$ . Sea  $y_\omega = L(e_\omega)$  la respuesta del sistema a dicha señal. En virtud de la invariancia en el tiempo, se tendrá que

$$\tau_a y_\omega = \tau_a L(e_\omega) = L(\tau_a e_\omega)$$

Tenemos que

$$\tau_a e_\omega(t) = e_\omega(t-a) = e^{i\omega(t-a)} = e^{-i\omega a} e_\omega(t)$$

es decir,  $\tau_a e_\omega = e^{-i\omega a} e_\omega$ . Como  $L$  es lineal, se sigue que

$$\tau_a y_\omega = L(\tau_a e_\omega) = e^{-i\omega a} L(e_\omega) = e^{-i\omega a} y_\omega$$

Luego  $\tau_a y_\omega = e^{-i\omega a} y_\omega$ , es decir, para todo  $t \in \mathbb{R}$  se verifica que  $\tau_a y_\omega(t) = y_\omega(t-a) = e^{-i\omega a} y_\omega(t)$ . En esta igualdad  $a \in \mathbb{R}$  es arbitrario por lo que podemos sustituir  $t = 0$  y hacer  $a = -t$  con lo que resulta  $y_\omega(t) = y_\omega(0) e^{i\omega t}$ . Igualdad que podemos escribir en términos funcionales como  $y_\omega = y_\omega(0) e_\omega$ . Esto nos dice que la función  $e_\omega$  es un vector propio de  $L$  (piensa en  $L$  como un operador lineal definido en un espacio vectorial de funciones):

$$L(e_\omega) = y_\omega(0) e_\omega$$

con valor propio asociado el número (que, en general, será un número complejo)  $y_\omega(0)$ . Definamos  $H(\omega) = y_\omega(0)$ . La función así definida verifica la igualdad

$$L(e_\omega) = H(\omega) e_\omega$$

y se llama *función de transferencia* del sistema y también se llama *respuesta en frecuencia* del sistema.

**Ejemplo 5.23.** Consideremos el sistema que consiste en el circuito del ejemplo anterior que transforma una señal de entrada  $u(t)$  en la salida  $y(t)$  dada por la ED

$$y'' + \frac{2}{RC}y' + \frac{1}{LC}y = -u''(t) + \frac{1}{LC}u(t) \quad (5.50)$$

Puesto que la derivación es una operación lineal que conmuta con los operadores de desplazamiento  $\tau_a \frac{df}{dt} = \frac{d(\tau_a f)}{dt}$  (recuerda cómo se deriva una función compuesta), es claro que dicho sistema es un sistema LTI. Consideremos como entrada del mismo la función  $u(t) = e^{i\omega t}$ . La respuesta será de la forma  $y(t) = H(\omega) e^{i\omega t}$ . Sustituyendo en (5.50) tenemos que

$$\left( (i\omega)^2 + \frac{2}{RC}i\omega + \frac{1}{LC} \right) H(\omega) e^{i\omega t} = \left( -(i\omega)^2 + \frac{1}{LC} \right) e^{i\omega t}$$

de donde se sigue que

$$H(\omega) = \frac{-(i\omega)^2 + \frac{1}{LC}}{(i\omega)^2 + \frac{2}{RC}i\omega + \frac{1}{LC}}$$

Supongamos ahora que  $R = \sqrt{LC}$ . Poniendo  $\alpha = 1/RC$ , se tiene que  $\alpha^2 = 1/LC$ . Con ello resulta

$$H(\omega) = \frac{\alpha^2 - (i\omega)^2}{(i\omega)^2 + 2\alpha(i\omega) + \alpha^2} = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha + i\omega}$$

Por tanto, si representamos por  $L(u)$  la respuesta del sistema a la entrada  $u$ , hemos probado que

$$L(e_\omega)(t) = H(\omega) e^{i\omega t} = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha + i\omega} e^{i\omega t}$$

Supongamos ahora que la función de entrada,  $u(t)$ , tiene periodo  $T$  y admite un desarrollo en serie de Fourier

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad \text{donde } \omega_0 = 2\pi/T \quad (\text{frecuencia en radianes})$$

Puesto que nuestro sistema es estable, tenemos que

$$L(u)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(n\omega_0) e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\alpha - in\omega_0}{\alpha + in\omega_0} e^{in\omega_0 t}$$

Lo que acabamos de obtener es el desarrollo en serie de Fourier de la *respuesta periódica con periodo  $T$*  del sistema a la entrada  $u(t)$ . Observa que como  $|H(\omega)| = 1$  para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ , la energía de la señal de salida es la misma que la de entrada:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n H(n\omega_0)|^2$$

◆

### 5.8.2. Función de transferencia de sistemas LTI controlados por ED lineales

Es muy fácil comprobar que la función de transferencia de un sistema LTI representado por una ED lineal de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u \quad (5.51)$$

está dada por

$$H(\omega) = \frac{B(i\omega)}{A(i\omega)}$$

donde

$$\begin{aligned} A(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \\ B(s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, es fácil ver que si  $A(in\omega_0) \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces dado un input  $u(t)$  con periodo  $2\pi/\omega_0$ , se verifica que hay una solución periódica única de la ED (5.51). Es natural preguntarse por lo que pasa cuando  $A(i\omega) = 0$ . Observa que  $A(s)$  es el polinomio característico de la ED (5.51). Cuando dicho polinomio tiene raíces en el eje imaginario, es decir, hay algún  $\omega \in \mathbb{R}$  tal que  $A(i\omega) = 0$  entonces la ED lineal homogénea tiene la solución periódica, con periodo  $2\pi/\omega$ , dada por  $e^{i\omega t}$  (si  $\omega \neq 0$  si  $\omega = 0$  hay una solución constante).

Deducimos que si  $u(t)$  es un input con periodo  $T$  y, además,  $A(i2\pi/T) = 0$ , entonces una solución periódica de la ED (5.51) con periodo  $T$  no será única e incluso puede que no exista dicha solución.

#### 5.8.2.1. La convolución siempre

Sabemos que los sistemas LTI estables actúan por convolución con una función que se llama la *respuesta impulso* del sistema y que es la respuesta del sistema, en condiciones iniciales de reposo, a la función impulso unitario  $\delta$ . El caso es que hasta ahora no ha aparecido ninguna convolución por ninguna parte. Lo que pasa es que a veces tenemos una convolución delante y no la vemos. Recuerda, por ejemplo la expresión de la solución de un sistema  $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$  de  $n$  EDLs de orden 1 que vimos en su momento. Era la siguiente

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{Y}(x) \left[ \mathbf{Y}^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{b}(t) dt \right]$$

Aquí  $\mathbf{Y}$  es una matriz fundamental del sistema, es decir, una matriz cuyas columnas son soluciones del sistema homogéneo linealmente independientes.

Para el caso de que el sistema sea de coeficientes constantes sabemos que una tal matriz es  $e^{\mathbf{A}x}$ . Si, además, consideramos que el sistema está inicialmente en reposo, es decir, que las condiciones iniciales son  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$ . Entonces la solución del sistema es

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x} \int_0^x e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{b}(t) dt = \int_0^x e^{\mathbf{A}(x-t)} \mathbf{b}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-t) e^{\mathbf{A}(x-t)} \mathbf{b}(t) dt \quad (5.52)$$

donde  $H$  es la función escalón unidad. Naturalmente, esto es una convolución de la función matricial  $h(t) = H(t) e^{\mathbf{A}t}$  con la función vectorial  $\mathbf{b}(t)$ . Es decir, el sistema LTI que para un input  $\mathbf{b}$  proporciona como output la señal  $\mathbf{y}$  dada por  $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$  con  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$ , actúa por convolución. La solución del sistema dada por (5.52) se llama *solución de estado estacionario*.