TRATADO DE ESTADÍSTICA

POR

DON MANUEL MINGUEZ Y VICENTE
AUXILIAR 1.º DEL CUERPO DE ESTADÍSTICA

SEGUNDA PARTE

TEORÍA DE LA ESTADÍSTICA

TOMO II

ESTADÍSTICA GRÁFICA

PRECIO: 1'50 PESETAS

PRIMERA EDICIÓN

IMPRENTA DEL «DIARIO DE CÓRDOBA»
Letrados 18
1899

TRATADO DE ESTADÍSTICA

POR

DON MANUEL MINGUEZ Y VICENTE

AUXILIAR 1.° DEL CUERPO DE ESTADÍSTICA

SEGUNDA PARTE

TEORÍA DE LA ESTADÍSTICA

TOMO II

ESTADÍSTICA GRÁFICA

PRIMERA EDICIÓN

IMPRENTA DEL «DIARIO DE CÓRDOBA»
Letrados 18.
1899

TRATADO DE ESTADÍSTICA

POR

DON MANUEL MINGUEZ Y VICENTE

AUXILIAR 1.º DEL CUERPO DE ESTADÍSTICA

SEGUNDA PARTE

TEORÍA DE LA ESTADÍSTICA

TOMO II

ESTADÍSTICA GRÁFICA

PRIMERA EDICIÓN

IMPRENTA DEL «DIARIO DE CÓRDOBA»

Letrados 18.

1899

SEGUNDA PARTE

TOMO II

ESTADÍSTICA GRÁFICA

Nous voynos par expérience qu' entre esprits egaux et toutes chosses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle.

PASCAL.

CAPÌTULO I

HISTORIA DE LOS MÉTODOS GRÁFICOS

SUMARIO.—Necesidad de los gráficos.—Primeros trabajos.—Historia del Cálculo estático.—Historia del Cálculo dinámico.—Historia de las representaciones gráficas.

295. Las construcciones gráficas tienen la ventaja de dar forma sensible á la magnitud de las cantidades, poniendo de manifiesto las relaciones que existen entre las de los datos y las de los resultados; por otra parte la resolución gráfica de los problemas presenta el inconveniente de no ser exacta, pues los errores que se cometen dependen de la apreciación de los instrumentos y de la vista del calculador. Por lo tanto desde tiempo inmemorial se ha comprendido la necesidad de resolver las dos cuestiones; representación gráfica de los problemas analíticos y resolución analítica de los problemas gráficos. En una palabra: un problema no puede considerarse completo si á su análisis no le acompa su síntesis ó si á su síntesis no le sigue su análisis, y como el algoritmo del análisis es el cálculo, y el de la síntesis la figura, de aquí se sigue la necesidad de poder pasar de uno á otro de estos algoritmos.

296. No puede precisarse la época de las primeras tentativas sobre la resolución de dichas cuestiones solo sabemos

que Euclides, Entocius, Diofanto, Arquímedes, Brahmegnta, Bhascara, Mohamed ben Muza, Abul-Vefa, Alkarkhi, Omar, etc. resolvieron algunos casos particulares, así como, posteriormente, Leonardo de Pisa, Tartaghia y Cardano. Galileo halla el área de la cicloide por el procedimiento del peso; pero esta aplicación de *planimetria mecánica* quedó en olvido hasta 1714 en que Marinoni la presentó como suya, habiéndolo usado también el inglés Young para evaluar la extensión de las divisiones territoriales de Francia. En 1537, Pedro Apian propone un procedimiento de multiplicación gráfica, el cual es corregido y modificado por Neper. Bassantin en 1557 es el primero que representa los desniveles por curvas de nivel y Descartes (1596-1650) establece los fundamentos de la nueva ciencia llamada Geometría Analítica, tomando estos trabajos una nueva fase y separándose definitivamente de la Geometría Analítica propiamente dicha, que entra en su estado definitivo ó perfecto, el *Cálculo gráfico* que debe al mismo Descartes, á Fermat y á Newton pasar al periodo evolutivo.

297. Al mismo tiempo que Descartes fundaba la Geometría Analítica, Neper (1550-1617) inventaba los logaritmos (cuyas tablas publicó en 1614) influyendo poderosamente en el desarrollo de las ciencias matemáticas por sus grandes aplicaciones prácticas. Desde este momento pueden distinguirse claramente en el Cálculo gráfico tres ramas principales que tienen por objeto: la *Representación gráfica de las funciones*, el *Cálculo estático* ó sea aquel en que los elementos carecen de movimiento independiente, y el *Cálculo dinámico* ó sea aquel en que cada uno de los elementos componentes tiene movimiento propio. Para su mejor comprensión haremos la historia de estas ramas en el orden siguiente: Cálculo estático, Cálculo dinámico y Representación gráfica.

298. Gunter (1581—1626) inventa la *Regla de cálculo*, modificada después por Vingate (1593—1656) que adopta

dos reglas móviles yustapuestas y por Seth Partridge que hizo construir á Haynes las escalas de tres reglas, tales que una de ellas se deslizaba entre las otras dos que estaban unidas por sus extremos. Oughtred (1574—1660) establece las graduaciones de las reglas de Vingate sobre dos círculos concéntricos con dos índices móviles, cuyo aparato es modificado en 1876 por Biler que suprime los índices y hace movible alrededor de su centro al círculo interior. Milburne, en 1650, traza las divisiones de la regla sobre una curva que parece ser la hélice, cuya idea dá orígen en 1878 á la *Spiral slide rule* de Fuller. Clairant, en 1727, inventa un disco de cartón que sirve para varios cálculos; Camús, en 1761, construye otro aparato para medir el tonelage de los navíos, llegando á tener tal importancia estos instrumentos de cálculo que la regla logarítmica es aceptada en Inglaterra desde fines del siglo pasado por el comercio y la industria, haciéndose su uso popular. En Francia la ley de 18 germinal del año III establece que en lugar de las tablas de equivalencias entre las antiguas y nuevas medidas que habían sido ordenadas por el decreto de 8 de Mayo de 1790, sean determinadas por escalas gráficas, para apreciar estas relaciones sin ningún cálculo. Esta disposición dá orígen á la *Aritmética lineal* de Pouchet (1795) y al *cuadrante logarítmico* de Leblon (1799); pero el uso de la regla de cálculo no se hizo general en Francia hasta que fué importada por M. Jomard en 1815; en Austria hasta 1840, merced á los trabajos de Adam-Burg y Schulz von Strassnieki; en Italia algunos años más tarde merced á los trabajos de Sella, y en España, aunque pedida en muchos programas oficiales y aunque al Sr. Ruiz Amado se le debe la construcción de un círculo logarítmico, su uso no es todavía general ni mucho menos. Las dependencias de la Administración pública, con pocas excepciones, han rechazado sistemáticamente todos los adelantos modernos que facilitan y simplifican los cálculos. La *Spiral slide rule* ó un aparato análogo, que nosotros designaremos bajo el nombre de *cilin-*

dro de cálculo, sería muy útil en casi todas las oficinas del Estado (1).

299. El establecimiento en Francia del Catastro, trájo consigo la necesidad del cálculo mecánico de las áreas. El procedimiento de Galileo no podía ser aceptado y se inventaron varios sistemas: el de transformación, el de la *cuadrícula ó red de calcular*, debido á d'Hogrefe, el de Rigaux, el *poligonómetro* de Hennon y las *ruedas sumatorias*; hasta que en 1824 Gonnella construye el primer planímetro octogonal. Pocos años después Coriolis (1829) construye su *dinamómetro registrador*, Poncelet inventa su *máquina de integrar* y Lalanne (1840) propone su *Aritmoplanímetro*. Finalmente, en 1856 Amsler construye su *planímetro polar* que con el de Starke (llamado también de Vetli y Starke) son hoy los más usados. El Instituto Geográfico y Estadístico fué en España uno de los primeros centros por quien fueron adoptados.

300. El cálculo dinámico no ha podido desarrollarse hasta la época presente en que el cálculo estático ha adquirido el suficiente desarrollo. Sus fundamentos corresponden á la Mecánica, y aquí nos limitaremos á decir que su teoría general consiste en una combinación de índices con reglas ó ruedas numeradas que se mueven automáticamente por medio de diversos engranajes.

301. Desde 1769 en que Francesco Luino indica el medio de representar gráficamente el estado científico de cada siglo, extendiendo así el uso de las curvas á la representación de los datos numéricos resultado de la observación, las representaciones gráficas de las funciones adquieren una gran importancia. Playfair publica en 1789 sus *Cuadros de Aritmética lineal*, del *comercio, de la hacienda y de la deuda nacional* de Inglaterra, en la cual presenta dos diágramas so-

(1) El cilindro de cálculo podría tener un rádio de 0,m0795, lo que dá para la circunferencia una longitud de 499, mm 5; siendo el paso de la hélice de 0,m01 y constando de 30 pasos, la longitud total de la línea sería de 15 m., la altura del cilindro de 0,m32 y la apreciación de 5 cifras.

bre la deuda y el balance de la importación y exportación. Cassini en 1791 publica un *Cuadro gráfico de la dirección de la aguja imanada* y Penchet en 1795 su *Aritmética lineal.* En el siglo actual se multiplican estos trabajos, siendo los principales los de Frissard, Layton Cooke, Playfair (Elementos de Estadística 1801), Pfeiffer (Tablas gráficas representando diversos resultados de la observación 1820), Tarbé (Curva del cólera de 1832), Minard (inventor del cartógrama á bandas), Klose, etc. Quetelet, á quien tanto debe la Estadística, extiende su uso en Bélgica, adoptando las coordenadas polares. La idea emitida por Penchet de representar las funciones de dos variables por curvas de igual elemento, es seguida por D' Obenheim (1814), Piobert (1825) que hace uso de las superficies topográficas para traducir gráficamente los resultados de las observaciones, Terquem (1830) que hace observar que la representación gráfica de las funciones de dos variables puede ser identificada á la representación plana de una superficie topográfica por las proyecciones de sus curvas de nivel y por Lalanne (1843) que inventa el principio de *anamorfismo* y lo generaliza á la Estadística *(Memoire sur la representation gráphique des Tableaux metereologiques et des lois naturelles en general).* En los últimos años Lallemand, ingeniero de minas, inventa los *abacos exagonales* y el uso del papel transparente; Mauricio d' Ocagne dá un procedimiento nuevo de cálculo gráfico (1884); Bertillon publica, acompañada de gráficos, su *Demografia figurada de Francia*; Reclus su *Geografía Universal*; el Ministerio de Trabajos públicos de Francia (1878) *L' Albun de Statistique graphique*; Ficker en 1860 inventa los *cartógramas de tintas graduadas*; Zumer los stereogramas; Mayr su *Método geográfico* y, finalmente, M. Cheysson, Presidente de la Sociedad de Estadística de París, publica en 1887 un nuevo método para hacer comparables diversos cartógramas de una misma série. Respecto á España, pocos trabajos de esta clase se han ejecutado; pero entre ellos podemos citar las *Tablas de mortalidad* referentes al periodo de 1861-70, calculadas gráficamente por el Sr. Merino y publicadas por el Instituto Geográfico y Estadístico y las *Curvas de mortalidad por edades referentes á España y á Madrid* que, como único gráfico, figura en la obra publicada por el mismo centro con el título de *Movimiento de la población de España en el septenio de 1886-92*. Entre los trabajos particulares son dignos de especial mención, los publicados por el indivíduo del Cuerpo de Estadística D. Isidoro Garrido en el «Almanaque Bailly-Baillière» y los que suelen aparecer en el periódico *Alrededor del Mundo.*

CAPÌTULO II

REPRESENTACION GRÁFICA DE LAS FUNCIONES

SUMARIO.—Determinación analítica del punto.—Idem del ángulo.—Idem de la línea.—Representación gráfica de las funciones de dos variables.—Determinación analítica de las superficies.—Representación gráfica de las funciones de tres variables.

302, Para la mejor comprensión de las representaciones gráficas, empezaremos por algunas nociones de Geometría Analítica, exponiendo la manera de expresar analíticamente las figuras y sus elementos, líneas, puntos y ángulos y recíprocamente de representar gráficamente las funciones.

303. PUNTO.—Todo punto puede considerarse formando parte de una línea, de un plano ó de una superficie.

Determinación de un punto sobre una línea.—Sea el M colocado sobre la línea xx', (*fig. 1.ª*) quedará determinado cuando conozcamos su distancia á un punto fijo O y la dirección en que deba tomarse. La distancia OM se representa por su medida, y la dirección, á derecha ó izquierda, por los signos + y — según nos enseña el Algebra. Se ha convenido en tomar como positivas las magnitudes contadas de izquierda á derecha y por lo tanto serán negativas las contadas en sentido opuesto. A la magnitud OM se le llama *abcisa* del punto M y al punto O *origen de las abcisas*. Un punto sobre una recta se representa por M ($x=\pm m$). Admitiendo el convenio de los signos, la distancia MM' puede siempre ser representada por $x'-x$ cualquiera que sean las posiciones relativas de los tres puntos M, M' y O. En efecto, suponiendo contadas las distancias desde otro orígen O' situado á la izquierda de O y bastante lejano para que todos los valores, con relación á él, sean positivos, se tiene que las distancias de O, M y M' á O' serán

$$O'O=+a \quad O'M=+X=+a+(x) \quad O'M'=+X'=+a+(x')$$

La distancia MM' estará siempre representada por $X'-X$, (teniendo en cuenta que $M'M=-MM$) y por lo tanto

$$MM'=+a+(ax')-a-(x)=x'-x$$

Determinación de un punto sobre un plano.—Sea el punto M; si trazamos un eje xx' y por medio de una recta MP, en dirección determinada, hallamos el punto P, (*fig. 2*) (que según sabemos podrá fijarse sobre el eje xx' por medio de su abcisa x) este no determinará el punto M del espacio sino solamente la recta PM; pero si por el punto O suponemos trazados dos ejes xx' e' yy', y por el punto M las paralelas á cada uno, hallaremos así dos puntos P y Q que determinan por completo el punto M; pues trazando por P una paralela a' yy' y por Q una a' xx' su punto de intersección será M. Para fijar los puntos Q sobre el eje yy' se considerarán como positivas las cantidades contadas de O hacia arriba y negativas las contadas en sentido contrario. A las magnitudes contadas sobre el eje yy' se les llama *ordenadas* y se representan por la letra y, asi como las contadas sobre xx' se representan por la letra x. A la *abcisa* y *ordenada* de un punto se le llaman sus *coordenadas*. Es fácil ver que por medio de los signos de las coordenadas queda determinado el ángulo en que está situado el punto dado. Un punto sobre un plano se representa analíticamente por la expresión

$$M(x=\pm m,\ y=\pm n).$$

A estas coordenadas se les llama *rectilíneas*. El ángulo de los ejes puede ser cualquiera; cuando es recto, las coordenadas se llaman *rectangulares*.

Determinación de un punto en el espacio.—Para determinar un punto M del espacio no son bastantes las dos coordenadas xe y que solo nos determinan el pie de la proyectante Mm, (*fig. 3*) y ha sido necesario hacer uso de un nuevo eje zz' que pase también por el orígen O y sobre el cual se cuentan las coordenadas z. Dadas las tres coordenadas OP, OQ y OR queda determinado el punto M, pues trazando por cada uno de los P, Q y R planos paralelos á los otros dos ejes se cortarán en un punto M que es el buscado. El ángulo en que se halla M se determinará por los signos de sus coordenadas. El algoritmo de un punto del espacio será

$$M(x=\pm m,\ y=\pm n,\ z=\pm p).$$

304. Angulo.—En Geometría el ángulo se determina por medio de su arco correspondiente, pero aquí no podemos determinarlo lo mismo; pues si tomamos para unidad el arco, introducimos en las fórmulas magnitudes heterogéneas con las coordenadas rectilíneas, y si tomamos por unidad la línea recta será preciso rectificar el arco, operación larga y nunca exacta. Asi, pues, se ha pensado en buscar ciertas líneas rectas que por sí ó por sus relaciones nos determinen el ángulo aunque no lo midan. Sea el ángulo MOX; trazando perpendiculares á OX *(fig. 4)* por varios puntos de OM, las rectas ab, a'b', a''b'',..... ob, ob', ob'',..... oa, oa', oa''..... cada una por sí no determina el ángulo MOX, pues para un mismo valor del ángulo corresponden infinitos de las líneas y para un valor de cualquiera de ellas corresponden infinitos del ángulo; pero observando que los triángulos oab. oa'b',.. son semejantes y que por lo tanto las relaciones $\frac{ob}{oa}$, $\frac{ob'}{oa'}$,....... son iguales, así como las $\frac{ab}{oa}$, $\frac{a'b'}{oa'}$,..... y $\frac{ab}{ob}$, $\frac{a'b'}{ob'}$,.....se comprende la posibilidad de que dichas relaciones determinen el án-

gulo, puesto que son constantes para el mismo y variables para otro cualquiera. Estas relaciones reciben los nombres de

$$\text{seno, la } \frac{ab}{oa}\text{; coseno, la } \frac{ob}{oa}\text{; tangente, la } \frac{ab}{ob}.$$

Las inversas de estas relaciones, que también serán constantes, se llaman

$$\text{cosecante, la } \frac{oa}{ab}\text{; secante, la } \frac{oa}{ob}\text{; cotangente, la } \frac{ob}{ab}.$$

Todas estas relaciones se denominan *líneas trigonométricas*, aunque mas propiamente debían denominarse *relaciones trigonométricas*.

Si suponemos trazado por o un eje perpendicular al OX, los tomamos como ejes coordenados y representamos abreviadamente las líneas trigonométricas del ángulo a por sen. a,, cos. a, tg. a. cosec. a, sec. a, cotg. a, podremos establecer que

$$\text{sen } a=\frac{y}{r}\text{; cos. } a=\frac{x}{r}\text{; tg. } a=\frac{y}{x}\text{; cosec. } a=\frac{r}{y}\text{; sec. } a=\frac{r}{x}\text{; cotg. } a=\frac{x}{y}.$$

Si suponemos que la recta OM gira alrededor del punto O, dando una ó varias vueltas completas, bien sea en el sentido de X á M ó de M á X, volverá á coincidir con OM, y por lo tanto sus líneas trigonométricas no variarán; podemos establecer que *las líneas trigonométricas de un ángulo no varían cuando á dicho ángulo se le suma ó se le resta un número entero cualquiera de circunferencias.*

305. Línea.—Las líneas de que se ocupa la Geometría son verdaderos *lugares geométricos* de puntos que cumplen con una ó varias condiciones, la expresión analítica de la ley que une su abcisa, y ordenada es la representación de la línea considerada. Sean, por ejemplo, las dos siguientes:

Línea recta.—Sabemos que la relación $\frac{y}{x}$ = constante, llamando á dicho valor *a* será $y=ax$. Si la recta ocupase una posición tal como la de la figura 4, que no pasa por o, trazando por dicho punto una paralela se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} Mp=Mm+mp \\ mp=ax;\ Mm=b \end{array}\right\} Mp=y=ax+b.$$

Así, pues, *la línea recta se representa por una ecuación de primer grado con dos incógnitas*. Si MM fuera paralela á ox, entónces $y=c$ y $ax+b=c$ ó lo que es lo mismo $ax=m$. Si MM es paralela á oy $ax=d$ y $y=n$.

Circunferencia.—Suponiendo que los ejes rectangulares pasen por el centro, un punto cualquiera está dado por las coordenadas OP y MP, entre las cuales y el rádio r existe la relación *(fig. 5)*

$$x^2+y^2=r^2.$$

Fácilmente se comprende que cuando inversamente nos encontremos en el cálculo con una ecuación tal como $y=ax+b$ ó $x^2+y^2=r^2$, la figura representada por ella será una línea recta ó una circunferencia. La manera de construirlas gráficamente se deduce con facilidad, pues no habrá mas que dar á x un cierto valor y hallar el correspondiente de y.

Elipse, parábola é hipérbola.—Estas curvas son también lugares geométricos, cuyas ecuaciones son casos particulares de la ecuación de segundo grado con dos variables

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o.$$

La *Geometría analítica* (Cortazar) nos demuestra que dichas ecuaciones son: la de la elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; la de la parábola $y^2=2px$, y la de la hipérbola $a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$. También nos enseña todas las propiedades particulares de estas curvas y de sus tangentes, diámetros, cuerdas y asíntotas; por lo tanto á ella y á la *Geometría de posición* de Favaro referimos al lector que desee hacer un estudio detenido de estas funciones.

Curva gráfica.—Cuando la curva no es geométrica es más difícil determinar su ecuación que se deduce de las condiciones que deba cumplir; generalmente se supone la curva del género parabólico, y se considera representada por la ecuación general

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ .....\ +a_n x^n$$

cuyos coeficientes se determinan por n, al menos, valores particulares de las variables (Laplace, Traité de Mecanique celeste, t. I.) (Michal, Methode d'interpolation au moyen des courbes du genre parabolique.)

306. Representación gráfica de las funciones de dos variables.—Recíprocamente cuando se tenga una función de dos variables su representación será una curva cuya construcción se hará tomando á partir del orígen magnitudes proporcionales á los valores de x, y trazando por su extremo ordenadas proporcionales á los valores de y, las cuales nos determinarán una serie de puntos que unidos por un trazo contínuo nos darán la curva representada por la ecuación.

Cuando no se conoce la ley que une á la función con su variable sino que se han hallado experimentalmente una serie de valores de y, correspondientes á otra serie de valores de x, puede representarse de la misma manera la función desconocida por medio de una curva en la cual las abcisas sean los valores de x y las ordenadas los de y, á cuyas curvas se denominan *gráficas*. Esta representación, además de darnos una idea bastante aproximada de la función, nos ofrece la ventaja de poder interpolar con gran facilidad y con una relativa exactitud.

307. Superficies.—Las superficies *geométricas* son verdaderos lugares geométricos, y por lo tanto su traducción analítica es sencilla y fácil.

Una superficie se considera definida cuando se conoce la *posición* y la *forma* de la *generatriz* para cualquier punto de ella. Según sabemos, para engendrar una superficie bastará conocer su generatriz y la ley de generación; siendo en general la generatriz una curva plana, estará representada por una ecuación de segundo grado y la ley de generación por una nueva ecuación, en la cual entrará otra incógnita; de modo que la traducción analítica de una superficie será una ecuación de segundo grado con tres variables. Considerando á la superficie como el lugar geométrico de las posiciones de un punto del espacio, se deduce también que su expresión será de la forma f (x, y, z)=o. El método general seguido para hallar la ecuación de una superficie es suponerla cortada por varios planos paralelos, hallar la ecuación de la curva resultante y la de las variaciones de la indeterminada que se elimina — por el método de sustitución, y la *ecuación final* será la de la superficie.

Superficie esférica.—Supongamos cortada su superficie por varios planos paralelos que nos darán circunferencias; tomemos el centro por orígen y por ejes, uno perpendicular á la dirección de dichos planos y otros dos perpendiculares entre sí y á este eje. La ecuación de una de estas secciones será $x^2+y^2=h^2$ y la ley de la variación de h estará dada por la $h^2+z^2=r^2$, de donde $x^2+y^2+z^2=r^2$.

Superficie cónica de revolución.—La ecuación de la sección será, tomando el centro de la base por orígen, $x^2+y^2=r^2$ y la de la variación de r siendo h la altura y a el coeficiente angular $r=az+h$, de donde $x^2+y^2-a^2z^2-2ahz=h^2$ *(fig. 6)*.

Superficie gráfica.—Se buscará su ecuación siguiendo el mismo procedimiento general que ya hemos expuesto, y para hallar la ecuación de las secciones se suponen estas proyectadas sobre un plano paralelo á la dirección común de los secantes, los cuales, para dar más regularidad á la figura, se suponen equidistantes.

308. Representación gráfica de las funciones de tres variables.—Estas funciones nos representan siempre líneas ó superficies en el espacio, y la manera de determinarlas es dar valores á una de las variables y formar la línea que representen las otras dos; esto equivale á ir trazando planos paralelos y hallar sus intersecciones con la superficie.

Sea f (x, y, z)=o, la ecuación $x^2+y^2+2^2=r^2$, dando á z el valor m se tiene $x^2+y^2=n^2$ que nos representa una circunferencia; haciendo $y=p$, $x^2+z^2=q^2$; lo cual nos dice que las secciones perpendiculares al eje y las que pasan por el son circunferencia, la superficie será una esfera. Si la ecuación fuese tal como la $x^2+y^2-a^2z^2-2ahz=h^2$; haciendo $z=o$ se tiene $x^2+y^2=h^2$, lo cual nos dice que las secciones perpendiculares al eje son circunferencias; haciendo $x=o; y^2=(az+h)^2$ de donde $y=az+h$, luego las secciones que pasan por el eje son líneas rectas.

No siempre es fácil deducir la curva por la ecuación obtenida, sino que es preciso construirla é ir haciendo lo mismo con cada sección. Si suponemos hechas todas estas construcciones sobre el plano x, y, y después, trasladada cada una de e las á la altura ó distancia z, á que se encuentra, quedará así determinada la superficie. Este procedimiento se conoce con el nombre de *Sistema de planos acotados.*

Al plano sobre el cual se hacen las construcciones se llama *plano de comparación*, *cota* á la medida de la proyectante de un punto, *desnivel ó diferencia de nivel* entre dos puntos á la diferencia de sus cotas y *pendiente de una recta* á la relación de su desnivel á la longitud de su proyección. La pendiente de un plano se mide, como ya sabemos, por la de su línea de *máxima pendiente.* Si una superficie la suponemos cortada por planos paralelos al de comparación y equidistantes entre sí, las proyecciones de las curvas intersecciones estarán formadas por puntos de igual cota y los desniveles de una á otra serán constantes. Generalmente las cotas se escriben al lado de las proyecciones y por medio de ellas pueden distinguirse las diversas curvas. Podemos, pues, establecer *que toda función de tres variables puede ser representada gráficamente por medio de curvas de nivel lo mismo que una superficie topográfica (fig. 7.)*

CAPÌTULO III

NOCIONES DE CÁLCULO GRÁFICO

SUMARIO.—Suma, resta, multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raices por medio de líneas.—Suma, resta, multiplicación y división de superficies.—Transformación de áreas limitadas por líneas curvas.

309. La gran importancia que hoy tienen los métodos gráficos de cálculo y el uso ventajosísimo que de ellos puede hacer la Estadística en determinados casos, nos obliga á exponer algunas nociones sobre los fundamentos del *Cálculo gráfico,* y á ocuparnos de la descripción y uso de los diferentes aparatos é instrumentos que pueden ser adoptados para los que ejecutan dicha ciencia.

Sabiendo ya por el Algebra que si una magnitud es susceptible de ser tomada en dos sentidos opuestos, debe de estar afectada de signos contrarios, según favorezca ó se oponga al resultado del problema, se deduce que si sobre una recta se toma un punto o como orígen *(fig. 1)* y se determina el sentido de las rectas positivas, las negativas deben ser tomadas en sentido contrario.

310. *Suma y resta.*—Tomando una longitud arbitraria por unidad y representando cada sumando por un segmento de recta, la suma de varias cantidades se hallará agregando á la

primera en el sentido que deba tomarse, cada una de las demás. Así, $a+b+(-c)+d+(-e)$ será *(fig. 8)* el segmento OA. Dos segmentos paralelos, iguales y dirigidos en el mismo sentido se llaman *equipolentes.* Si los segmentos no tienen todos la misma dirección, su suma será un contorno poligonal abierto. Uniendo el punto O con el F tendremos *(figura 9)* que

$$OA+AB+BC+CD+DE+EF+FO=O$$

de donde

$$OA+AB+BC+CD+DE+EF=-FO=OF$$

por lo tanto OF es la suma pedida.

Como restar no es otra cosa que, sumar al minuendo los términos del sustraendo con signo contrario, se deduce que la operación se verificará de una manera análoga á la suma.

311 *Multiplicación.*—Si prescindimos de la posición relativa de la recta producto y sólo queremos su valor absoluto, no habrá más que tomar una longitud arbitraria por unidad y los factores estarán representados por las rectas M y m y el producto será la cuarta proporcional á dichas magnitudes. En efecto, según la definición, el producto ha de ser con respecto al multiplicando lo que el multiplicador es con respecto á la unidad; por lo tanto, la fórmula de esta operación será

$$\frac{P}{M}=\frac{m}{n} \text{ de donde } P=M\frac{m}{n}.$$

La Geometría nos dá varios medios para construir cuartas proporcionales, siendo los principales el del ángulo *(figura 10)* y el de las rectas antiparalelas *(fig. 11).*

312. También puede resolverse esta operación más sencillamente, fundándose en otras consideraciones. Adoptemos una longitud cualquiera por unidad y tomemos sobre una recta, á partir del orígen, magnitudes iguales á los logaritmos de los números enteros y levantemos por dichos puntos ordenadas, que medidas con una unidad escogida, tengan una longi-

tud igual á dichos números. Toda operación ejecutada con las ordenadas, queda reducida en un grado, si se ejecuta con las abcisas. Así, el producto de dos ordenadas puede ser determinado también por la abcisa suma de las dos que nos dan. Ahora, como las ordenadas sólo nos sirven para representar los números, pueden suprimirse escribiendo su valor al final de su abcisa y suprimiendo el número que representa el valor de cada abcisa (puesto que conocida la unidad adoptada podremos hallar dichos valores siempre que se necesiten con solo medirlas); sumando las abcisas el número que figure en la suma será el producto de las cantidades consideradas. Si sobre dos rectas ejecutamos estas operaciones, podremos hallar fácilmente la suma de dichas abcisas por medio de una sencilla operación mecánica. Este es el fundamento de la *Regla de cálculo* y de los demás aparatos análogos, como el *Círculo de cálculo* y el *Cilindro calculador.*

313. Supongamos ahora que tenemos trazado un ángulo de 120° y su bisectriz *(fig. 12)*, la proyección de una recta cualquiera AB sobre dicha bisectriz es igual á la suma de sus proyecciones sobre los lados del ángulo. En efecto, llamando x al ángulo que forma la recta con la bisectriz y d á su longitud, su proyección a''b'' será igual á d cos. x; con los lados del ángulo formará la recta AB los ángulos x+60° y x—60°, y por lo tanto sus proyecciones serán ab=d cos. (60+x) y á b'=d cos. (x—60°), que sumadas dan d (cos. 60+cos. x—sen. 60 sen. x)+d(cos. x cos. 60+sen. x sen 60=d 2 cos. 60 cos. x=d 2 cos. x sen. 30°=d cos. x. Así, pues, si sobre los dos lados y la bisectriz del ángulo considerado, marcamos tablas gráficas de logarítmos, tomando sobre los lados los de los factores, la proyección de la recta que determinen sobre la bisectriz será el del producto. Sobre este principio están fundados los *abacos exagonales* de M. Lallemand que son los más sencillos y prácticos. La propiedad de que gozan las tangentes á la parábola es el fundamento de otros *abacos* muy importantes también por sus aplicaciones. como después ve-

remos. Esta propiedad se enuncia diciendo que *dos tangentes á la parábola son divididas por todas las otras en segmentos proporcionales,* cuyo principio demuestra fácilmente la Geometría de posición.

314. Si se quiere también atender á la posición de la recta producto, es preciso que se nos den las del multiplicando y multiplicador y entónces, según la definición, trazaríamos una recta que formase con el multiplicando un ángulo igual al que el multiplicador forma con la unidad positiva, llevaríamos el multiplicador sobre la recta producto y la unidad sobre el multiplicando, resolviéndose el problema por medio de una cuarta proporcional, según se vé fácilmente en la figura 13.

315. *División gráfica.*—Siendo una operación contraria á la multiplicación, fácilmente puede deducirse la manera de efectuarla.

316. *Elevación á potencias.*—No habrá más que repetir las construcciones hechas para la multiplicación tantas veces como unidades ménos una tenga el grado de la potencia. Para simplificar las construcciones, puede tomarse como multiplicador la potencia obtenida y el producto se tendrá sobre el otro lado del ángulo y se determinará así la potencia trazando tantas rectas paralelas y antiparalelas como unidades tiene el grado de la potencia que se pide *(fig. 14).*

$$o1=1 \quad oa=a \quad oa^2=a^2 \quad oa^3=a^3 \quad \frac{a^2}{a}=\frac{a}{1};\ a^2=a.a.$$

$$\frac{a^3}{a^2}=\frac{a^2}{a}=a \quad a^3=a^2.a.....$$

317. Si se quisiera tener también la posición relativa de la recta potencia no habría más que considerar desdoblada la figura construida anteriormente, es decir, colocados unos á continuación de otros los triángulos semejantes que se forman y obtendríamos así un contorno poligonal cuyo límite, haciendo decrecer el ángulo que forman las rectas consecutivas, sería una curva espiral llamada *logarítmica* porque sus

rádios crecen en progresión geométrica y sus arcos en progresión aritmética correspondiéndose 1 y o *(fig. 15)*.

318. *Extracción de raices.*—Trazada la espiral logarítmica la extracción de raices es sencillísima. Fijada la magnitud de la unidad, se toman ambas rectas sobre la espiral, el ángulo que forman se divide en *m* partes iguales, y trazando una recta que forme con la unidad un ángulo igual á dicha emésima parte esa será la raiz pedida. La división de un arco en *m* partes iguales es problema difícil que sólo puede resolverse por tanteos; para evitarlos se sigue el procedimiento siguiente: se construye la espiral llamada de Arquímedes, en la cual los rádios y los arcos crecen en progresión aritmética (que es la conocida generalmente) se toman sobre ella dos rádios que formen un ángulo igual al que comprenden la recta dada l' y la unidad 1 sobre la espiral logarítmica, y por medio de la relación $\frac{l'-1}{m}=a$ determinaremos la longitud *a* del rádio que forme con 1 un ángulo, cuyo arco sea igual á la emésima parte del que se considera, el cual tomado sobre dicha espiral logarítmica nos determinará la longitud de la raiz emésima de la recta dada. Sobre este principio está fundado el aparato conocido con el nombre de *Galibo ó plantilla de Steiner.*

319. Vamos ahora á ver la manera cómo se ejecutan las cuatro primeras operaciones con las superficies. La Geometría nos enseña á transformar un triángulo en otro de una altura dada, un polígono en un triángulo equivalente ó en un cuadrado; por lo tanto podemos suponer todas las superficies que se nos dan convertidas bien en triángulos equivalentes de la misma altura ó en cuadrados equivalentes.

320. *Suma y resta.*—Para hallar el lado del cuadrado, equivalente á la suma de otros varios, bastará ir construyendo triángulos rectángulos cuyos catetos sean los lados de los cuadrados considerados y la hipotenusa del último será el lado del que se busca. Sea, por ejemplo, $x^2=a^2+b^2+c^2+d^2$, tendremos *(fig. 16)* $y^2=a^2+b^2$; $z^2=y^2+c^2$; $x^2=z^2+d^2$.

Para determinar la diferencia $x^2=a^2-b^2-c^2$, construiremos *(fig. 17)* $y^2=a^2-b^2$; $x^2=y^2-c^2$.

Si las figuras son triángulos de la misma altura, se tendrá *(fig. 18)* $ABC=ABa+aBb+bBc+cBC$ sin más que tomar una base $AC=Aa+ab+bc+cC$ y construir un triángulo de la misma altura de los dados.

321. *Multiplicación.*— Propongámonos hallar el lado x de un cuadrado cuya área sea igual á n veces la de otro, a^2; según lo dicho, formaremos un triángulo rectángulo isósceles cuyo cateto sea a, la hipotenusa será el lado del cuadrado cuya área sea $2a^2$; sobre ella como cateto y siendo el otro igual á a, construyamos otro triángulo rectángulo cuya hipotenusa será el lado del cuadrado cuya área sea igual á $3a^2$, y así sucesivamente hasta llegar á uno en que se verifique la relación $x^2=na^2$ *(fig. 19)*.

Si la figura fuese un triángulo no habría más que construir uno con la misma altura y cuya base sea n veces la del dado *(fig. 20)*.

322. *División.*—Dividir un triángulo en n partes iguales; no habrá más que dividir su base en n partes y unir el vértice con cada una *(fig. 20)*.

323. *Transformación de áreas limitadas por líneas curvas.*—Esta transformación se hace siguiendo el procedimiento general de suponer la curva formada por elementos lineales infinitamente pequeños de modo que su perímetro se confunda sensiblemente con la curva; de aquí se deduce que esta transformación no será nunca exacta; pero será tanto más aproximada cuanto menores sean dichos elementos lineales. El polígono resultante puede reducirse á un triángulo ó rectángulo de base determinada. (A los lectores que deseen profundizar esta teoría recomendamos la obra de Favaro traducida por Terrier *Leçons de Statique Graphique.*— Deuxieme partie. Calcul Graphique. Gauthier.—Villars, Paris.)

CAPÌTULO IV

INSTRUMENTOS DE CÁLCULO GRÁFICO

SUMARIO.—Descripción y uso de la regla de Richer.—Descripción y uso del cilindro de Fuller.—Descripción y uso del abaco ó contador universal de Lalanne.—Abaco de M. de Lallemand.—Teoría general de los planímetros.—Descripción y teoría del planímetro de Amsler.—Descripción y teoría del planímetro de Wetli.—Aritmómetros.—Aritmógrafo de Troncet.—Clasificadores estadísticos de contadores automáticos.

324. Con el objeto de facilitar las operaciones gráficas se han construido aparatos más ó menos complicados que nos las resuelven, generalmente, dentro de un cierto límite de error. Examinaremos en este capítulo los principales, que son: La regla de cálculo de Richer; el cilindro de cálculo de Fuller; el abaco de Lalanne y el de Lallemand; los planímetros de Amsler y de Wetli; los aritmómetros de Thomas y de Edmodson; el aritmógrafo de Troncet, y los clasificadores estadísticos de contadores automáticos.

325. Regla de cálculo de Richer.—Es una regla de madera ó metal de 40 cm. de largo por 33 mm. de ancho y 10 mm. de grueso, en cuyo centro tiene un rebajo longitudinal donde se aloja otra regla, más estrecha y menos gruesa, llamada *reglilla*. La reglilla tiene grabada en el canto inferior de una de sus caras una tabla gráfica de logarítmos, idén-

tica á las dos que lleva la regla en los dos bordes del rebajo de que antes hemos hablado, y en el canto superior figuran los logarítmos de los senos de los arcos decimales de 0° á 100°. En la otra cara lleva tres escalas, una en el canto superior que es una tabla gráfica de los logarítmos de las tangentes de los arcos decimales de 0° á 50°, y dos en el canto inferior que son una escala de partes iguales y una tabla de los logarítmos de los sen.ˢ repetida en sentido contrario.

La escala de partes iguales es la que sirve para la construcción de las tablas gráficas de logarítmos grabadas en la regla y reglilla. Su longitud es de 200 mm., hallándose dividida en 500 partes iguales, cada una de las cuales vale 0,4 milímetros, y como siempre puede apreciarse la mitad del intérvalo, resulta que dicha escala puede considerarse dividida en 1.000 partes. Después y valiéndonos de una tabla de logarítmos se van tomando sobre la regla longitudes de tantas partes de la escala como milésimas tiene la mantisa del logarítmo de cada número y colocando dicho número en el lugar correspondiente. Como las diferencias de los logarítmos de dos números consecutivos disminuyen á medida que crecen dichos números, al llegar al de 200 (que en la regla está numerado 20) las señales se hallan demasiado próximas y para que puedan distinguirse sólo se marcan las mantisas de los logarítmos de los números pares y las divisiones de 200 á 400 corresponden á los números 202, 204,....; pero este intérvalo vuelve á resultar pequeño á partir del 400 y se vuelve por lo tanto á agrandar la diferencia marcando sólo los números 405, 410, 415..... hasta 1.000.

La longitud de la regla es de dos unidades para poder apreciar la mantisa del logarítmo de la suma de los de los factores, pues aunque la de cada uno sea menor que la unidad su suma puede valer más de una.

326. *Uso.*—Los dos problemas *dado un número hallar su logarítmo y recíprocamente* se resolverán con gran facilidad, teniendo en cuenta la construcción de la regla; pues

bastará hacer coincidir los orígenes de la regla y la escala y apreciar el número de partes de esta última que comprende la longitud dada ó bien el número que hay en la regla enfrente del número de milésimas de la mantisa del logarítmo, tomadas sobre la escala.

La multiplicación se resuelve tomando uno de los factores sobre la regla y el otro sobre la tabla de la reglilla, haciendo coincidir el primero con el orígen de la tabla de la reglilla y el número que en la regla esté enfrente de este factor será el producto. Lo que nos queda por determinar es el número de cifras del producto, y para ello supongamos que n y n' sean los números de cifras de los factores; se tendrá que log. N=(n—1), m; log. N'=(n'—1), m'; y log. NN'= n—1+n'—1+0,m+0,m'=(n+n'—2)+(0,m+0,m'). Si 0,m+0,m' es mayor que 1, (en cuyo caso los factores se hallan á diferente lado del 100) log. N.N'=(n+n'—1)+0,.... y si 0,m+o,m' es menor que 1, (en cuyo caso los dos factores se hallan al mismo lado del 100) log.N.N'=(n+n'—2)+0... Así, pues, en el primer caso el número de cifras del producto será n+n' y en el segundo n+n'—1.

La división se efectúa tomando el dividendo sobre la regla y el divisor sobre la reglilla, haciendo coincidir sus extremos y buscando sobre la regla el número que corresponde al 10 de la reglilla. El número de cifras del cociente será, llamando n_1 al número de cifras del dividendo, $n=n_1—n'+1$ cuando el dividendo y el divisor estén al mismo lado del 100 y $n=n_1—n'$ cuando estén á distinto lado.

La elevación á potencias y extracción de raices se ejecutan lo mismo que por medio de las tablas de logarítmos, ofreciendo en ellas la regla poca ventaja y un grande error.

También puede emplearse la regla con gran ventaja para hallar *cuartas proporcionales* y para la resolución de las ecuaciones de segundo grado. En el primer caso fácilmente se deduce la manera de operar sabiendo que es preciso resolver á la vez una multiplicación y una división; en el segundo basta poner la ecuación bajo la forma $x(x+p)=-q$ para saber que se buscan dos números que, dando $-q$ de producto, se diferencien en p unidades.

327. *Límite de aproximación.*—Por lo que acabamos de ver, el error cometido en el cálculo de un logarítmo es inferior á media milésima, y que en la determinación de un número por su logarítmo no se puede contar con más de tres cifras exactas. En un producto ó cociente sólo se puede contar también con tres cifras á lo más. Estos errores hacen que la regla no sea aplicable á muchos cálculos de los que se efectúan en las oficinas de Estadística y que en la generalidad de los casos pueda ser sustituida por los *abacos*.

La gran analogía que existe entre la regla de cálculo y el círculo de cálculo nos dispensa de ocuparnos de este último.

328. Cilindro de cálculo de Fuller.—(Spiral slide rule, equivalent to a straight slide rule 83 feet 4 inches long, or, a circular rule 13 feet 3 inches in diameter, George Fuller M. Inst, C. E. profesor of engineering in the Queen's University, Ireland. London, 1878) *(fig. 21)*. Se compone de un cilindro A con un mango B que entra á frotamiento suave en otro cilindro C de tal manera que este último puede tener con facilidad los dos movimientos de giro alrededor de su eje y de traslación. Unido al reborde a del cilindro A se halla un índice fijo b y un saliente c que se corresponde con otro c' del cilindro C. Dicho cilindro C lleva grabada una espiral de 12 m. 70 de longitud, equivaliendo por lo tanto á una regla de 25 m. 40 ó' ó un círculo de 4 m. 038 de diámetro. En el interior del cilindro A y por el extremo opuesto á su mango B enchufa otro cilindro D en cuyo reborde ó saliente d se hallan sujetos dos índices movibles con él que tiene los dos movimientos de rotación y longitudinal. La distancia entre los índices e y f es igual á la parte de generatriz del cilindro comprendida entre el orígen de la espiral y su extremidad. La varilla del índice e lleva una escala lineal m y el cilindro C otra circular n en su parte superior.

Siendo la espiral de 12 m. 70 y suponiéndola dividida en 10.000 partes, cada una valdrá 1 mm. 27, luego los logarítmos de los números podrán muy bien ser apreciados con un error menor que dos unidades del quinto orden decimal que valdrán 0 mm. 254, cantidad apreciable á la simple vista. Los números de cuatro cifras podrán figurar todos, pues la diferencia entre los logarítmos de 10.000 y 9.999 es de 0,434 diez milésimas que valen en la escala adoptada 0 mm. 6, cantidad muy apreciable á la simple vista; pero el autor citado sólo hace figurar los logarítmos de los números de unidad en unidad hasta 6.500 y desde este número en adelante sólo figuran los de los números pares. Como los intérvalos que existen entre cada dos divisiones son bastante grandes, en la mayor parte de la escala, para poder apreciar á ojo la quinta cifra con un error menor que dos unidades, se sigue que con dicho aparato se pueden ejecutar las operaciones contando siempre con cinco cifras, de las cuales cuatro son exactas y una probable. La numeración de la hélice en lugar de ser 1.000, 6.500, 10.000 es 100, 650, 1.000, lo cual, como sabemos, en nada influye respecto á su uso.

329. *Uso.*—Se coloca el índice fijo b sobre el 100 y uno de los índices móviles e ó f sobre el multiplicando, se hace mover el cilindro hasta que el multiplicador esté marcado por el índice fijo y el producto se lee bajo uno de los índices móviles f ó e. Si se trata de una división se coloca el índice fijo sobre el divisor y se lleva frente al dividendo al índice movil superior e ó al inferior f, según que la primera cifra del divisor sea superior ó inferior á la primera del dividendo, se mueve el cilindro hasta que b señale 100 y entónces se leerá el cociente enfrente de uno de los dos índices móviles. Para la elevación á potencias ó extracción de raices se coloca el índice móvil superior e enfrente del número dado; se determina por las escalas m y n la mantisa del logarítmo de este número al cual se agrega la característica y se multiplica ó se divide por el índice. Se mueve el cilindro C hasta que

marque sobre las escalas m y n la parte decimal del logarítmo obtenido y el número que señale e será la potencia ó raiz pedida.

330. Este aparato, tal y como está construido, es utilísimo; por medio de él se pueden efectuar casi todas las operaciones que comunmente hay que verificar en las oficinas de Estadística, con la exactitud necesaria. Su precio lo hace más recomendable que los *aritonómetros* ó *máquinas de calcular*. Las modificaciones que hemos indicado de dar á su hélice 15 m. y de marcar todos los números de cuatro cifras, le darían alguna más exactitud.

331. Abaco ó contador universal de Lalanne.—Es un cuadrado de 20 cm. de lado, en el cual y á partir del vértice inferior de la izquierda se han tomado partes proporcionales á los logaritmos de los números desde 10 hasta 100: esta graduación la llevan los dos lados que concurren en dicho vértice. Por los puntos de división se han trazado horizontales ó verticales y paralelas á las diagonales. La traducción gráfica de la función $x.y=z$ daría una série de hipérbolas equilateras $x.y=a$; $x.y=b$;....; pero sustituyendo en vez de los números sus logaritmos dichas hipérbolas son sustituidas por líneas rectas $\log. x+\log. y=\log. a$. Esta transformación ó sustitución recibe el nombre de *anamórfosis geométrica.*

332. *Uso.*—Para la multiplicación no habrá más que buscar cada uno de los factores sobre cada uno de los dos lados y siguiendo la vertical y horizontal correspondiente, su punto de encuentro se hallará sobre una diagonal cuya numeración nos dá el producto. La división se efectuará buscando el dividendo en una diagonal y el divisor sobre uno de los lados, y la graduación correspondiente, sobre el otro, al punto de intersección, será el cociente. Para la elevación á potencias y extracción de raices hay trazadas líneas especiales, aunque sólo para el cuadrado y el cubo. La línea correspondiente al cuadrado es la diagonal y á los cubos una que parte de orígen y vá al punto medio del lado superior y del punto medio del

lado inferior al vértice opuesto al orígen. Si se quisiera trazar la línea de las cuartas potencias iría desde el orígen á la tercera parte del lado superior; la de las potencias quintas desde el mismo punto á la cuarta parte de dicho lado, etc. Este abaco contiene también las líneas de los valores de otras varias funciones, como la longitud de la circunferencia, superficie del círculo, volúmen de la esfera, área del exágono, densidades de algunos cuerpos y reducción de pesas y medidas.

La figura 22 es una reducción simplificada del abaco de M. Lalanne.

333. Abaco de M. de Lallemand.—Es el abaco exagonal que ya hemos explicado antes; aquí sólo nos falta añadir que su uso se facilita por medio del papel transparente. El *indicador transparente* es un trozo de talco ó papel transparente en el cual se hallan marcados seis rádios que forman ángulos de 60°; para usarlo se coloca el indicador de modo que uno de dichos rádios pase por el valor tomado sobre el lado A, por ejemplo, del ángulo de 120° y el que forme con él 60° pase por el otro valor tomado sobre B y es evidente que el punto en que el rádio perpendicular á la bisectriz la corte será la suma que se busca.

334. Planímetros.—Se designan por este nombre unos instrumentos que tienen por objeto determinar gráficamente las áreas de las figuras planas. Aunque el número de planímetros que hoy se conocen es muy grande y se halian fundados en diferentes propiedades geométricas, los dos de que nos vamos á ocupar lo están en la teoría que exponemos á continuación.

Teorema general.—El área de toda figura plana puede reducirse á la suma algebráica de las áreas de rectángulos que tengan una dimensión constante. En efecto, el área de ABCD es igual á la de ABba menos la de CDdc *(figura 23)* la del triángulo *(fig. 24)* ABC=ABba—ACca, la de ABC *(fig. 25)* es igual á la suma de los ABD mas BCD, la del trapecio ABCD *(fig. 26)* es igual ABE+BECF+CFD, la del polígono *(fig. 27)* ABCDEF es igual á la suma de las áreas de los trapecios en que se divide por medio de una série de paralelas, y finalmente el área de una superficie limitada por una línea curva puede considerarse igual á la de un polígono de infinito número de lados infinitamente pequeños.

Consecuencias.

1.ª Siendo la representación analítica de este principio la fórmula

$$a.h+b.h+c.h+.....=h(a+b+c+.....)$$

puede sacarse á h de factor común que multiplica á la suma de las bases de todos los rectángulos.

2.ª El valor de la expresión y por consiguiente el área que buscamos quedarán determinados una vez que se conozca el factor

$$x=a+b+c+.....$$

3.ª La fórmula anterior queda la misma sin más que sustituir h' por $\frac{1}{2}h$, si las figuras en vez de ser rectángulos fuesen triángulos.

4.ª La descomposición y transformación de las figuras en rectángulos ó triángulos de altura constante puede efectuarse geométricamente ó mecánicamente por medio de distintos aparatos.

5.ª Las condiciones generales que debe llenar el aparato para la medida de las superficies deben ser las siguientes: 1.ª Tener un orígen fijo. 2.ª Tener un segundo centro susceptible de un movimiento longitudinal que no se registra. 3.ª Tener un tercer centro susceptible de un movimiento perpendicular al anterior, cuya magnitud debe ser registrada. 4.ª Estar relacionados estos centros de tal manera que el tercero sea susceptible de recorrer un perímetro de cualquier clase y forma.

335. Planímetro de Amsler.—Se compone de dos re-

glas A y B *(fig. 28)* unidas por una charnela, alrededor de la cual pueden girar, la regla B termina en una aguja que se clava en el plano de la figura, b es un tornillo de presión; la regla A puede correr dentro de la charnela D, (cuyo movimiento tiene por objeto poner el aparato en condiciones para apreciar las áreas en diferentes unidades, como son: centímetros, pulgadas inglesas, etc.) y termina en un estilo d. El contador se compone de una rueda graduada vertical E que gira alrededor de un eje F que se apoya sobre la armadura C y que trasmite su movimiento por medio de un tornillo sin fin á una rueda horizontal G también graduada; el nomius H correspondiente á la rueda E está fijo á la armadura. Un cilindro metálico que acompaña al instrumento sirve para disponerlo sobre la aguja en que termina la regla B. La rueda E se halla dividida en 100 partes numeradas de diez en diez y el nomius aprecia décimos de una de sus divisiones. La rueda G se halla dividida en diez partes cada una, de las cuales corresponde á una vuelta entera de la rueda E.

336. *Teoría.*—Reduciéndose en resúmen la medida del área de cualquier figura plana á la de rectángulos de altura constante sólo consideraremos aquí dicha figura y la manera como determina el área este aparato.

El punto fijo es el extremo de la regla B, el centro variable, según una dirección es la charnela D, y el punto movible en todos sentidos la punta del punzón d.

Supongamos que la regla A se mueva paralelamente á sí misma y llamemos r al rádio de la rueda E; el trasladarse de la posición AA' *(fig. 29)* á la $A_1A'_1$ equivale á los dos movimientos de AA' á aa' el cual no se registra, y de aa' á $A_1A'_1$ en el cual la rueda E recorre el camino $o_1o_2=2\pi r.n$; por lo tanto, el área $AA'A'_1A_1$ tendrá por expresión $AA'.\ 2\pi r.n = AA'.\ oo_2$ sen. $x=a.l(1)$. Si la posición final del eje no fuese la A_1A', sino la $A_1A'_2$ que forma un ángulo y con la anterior la expresión del área hallada excedería á la verdadera en la cantidad (a.c.y) por lo tanto $S=a(l-cy)$. Si la posición hubiera sido por la parte superior de $A_1A'_1$ el valor de S sería $S=a(l+cy)$.

337. Hemos supuesto que en todas sus posiciones el eje pasaba por el centro del disco; pero esta no es una condición necesaria. Supongamos dos discos E y E_1 invariablemente ligados y que todo el paralelógramo abcd pase de esta posición á la a'b'c'd' el disco E habrá recorrido el arco $EE'=rx$ y el E_1 el $E_1E'_1$ sen. y, pero $E_1E'_1=\frac{xr}{\text{sen. } y}$ de donde $E_1E'_1$ seno $y=rx=EE'$; por lo tanto los dos discos darán las mismas indicaciones *(fig. 30)*.

338. Supongamos ahora que el extremo del eje recorre un perímetro cerrado: el área descrita será $S=a(l\pm cy)$; pero como vuelve á su posición primitiva el valor de y es igual á cero y por lo tanto $S=a.l$ ó $S=al+2ca\pi$.

Por lo tanto las reglas articuladas del planímetro de Amsler, siempre que el punto fijo sea exterior, dan el área de la figura por la fórmula $S=a.l$. Señalando en el disco E en vez de los valores *l* de los arcos recorridos los de los productos a.l la graduación nos expresará el número de cm^2 y $m.m^2$ de la superficie que se considera, cuya superficie según la escala adoptada y por medio de una multiplicación nos expresará el área del terreno representado en el dibujo.

339. Si el centro o está dentro de la figura entónces el arco y vale 2π y el área contada es sólo $S-\pi r^2$ de modo que se tendrá que $S-\pi r^2=al+2\pi c.a$ de donde $S=al+\pi(r^2+2c.a)$.

En la figura 31 se tiene que $r_1^2=\overline{AC}^2-\overline{OC}^2$ y $\overline{OC}^2=r^2-\overline{DC}^2$. Según la construcción del aparato y siendo *a* la longitud de A se tiene que

$$r_1^2=(c+\frac{1}{2}a)^2+r^2-(c-\frac{1}{2}a)^2=r^2+2ac$$

y por lo tanto $S=al+\pi r_1^2$.

Se observa que la cantidad r_1 es constante.

340. Planímetro de Wetli—Se compone de un tablero T, al cual está invariablemente unido otro tablero C ele-

vado perpendicularmente al plano del primero, el cual contiene el contador del aparato, y una armadura metálica unida á él por los tornillos zz' que sostiene el eje de una rueda lenticular mm' que descansa por su peso sobre el disco D, siendo susceptible de girar dicha armadura alrededor de los tornillos zz'. Sobre el tablero T existen tres barras fijas al mismo con unas ranuras donde se alojan tres ruedas rr' que sostienen la parte móvil del instrumento, la cual se compone de una regla bb' con un estilo e, que se mueve en un plano horizontal y en sentido perpendicular á la longitud del tablero, entre cuatro ruedas ss'. Un hilo metálico de plata hh' está fijo por sus extremos á un clavo *y* y á un tornillo *a* y se arrolla en una vuelta á un cilindro *c* que gira alrededor de un eje vertical unido al disco de cristal pp' cubierto de papel de grano y dispuesto perpendicularmente al eje del cilindro *(figura 32)*.

El contador se compone de una rueda k dividida en 120 partes iguales numeradas de diez en diez y de la semicircunferencia l que lo está en tres partes y cada una de las cuales en cien partes, numeradas también de diez en diez. La aguja indicadora recorre la tercera parte de la semicircunferencia al mismo tiempo que pasa una división de la rueda k por debajo de la línea de fe' correspondiente. Cada una de estas últimas divisiones corresponde á un centímetro cuadrado y por consiguiente cada una de las del arco *l* á su centésima parte que es un milímetro cuadrado *(fig. 33)*.

341. *Teoría.*—El punto fijo en este aparato es el punto en que la rueda mm' toca al disco P, el punto móvil en una dirección y cuyo movimiento no se registra es el centro del dicho disco P y el punto móvil en todas direcciones es la punta del estilo *e* cuyo movimiento perpendicular al primero es el que registra el aparato. Supongamos que el estilo e recorre el perímetro de un rectángulo, uno de cuyos lados sea paralelo al canto del tablero y el aparato en su posición primitiva, es decir, que el punto de tangencia pase por el cen-

tro del disco; el movimiento de A á B no se registra, pues el disco girará pero no la rueda mm', el de B á C es paralelo al lado mayor del tablero y tampoco se registra, el de C a D se lee en el contador y el de D á A es paralelo á BC y tampoco se registra; así, pues, llamando R al rádio del disco, r al rádio del tambor, b á la cantidad de hilo que ha pasado de atrás á adelante ó de adelante á atrás y A el valor del arco de rádio R se tendrá

$$\frac{A}{R}=\frac{b}{r} \text{ de donde } A=\frac{b.R}{r}$$

y tomando á r por unidad $A=b.R$: pero R el igual al lado BC y b á CD por lo tanto $A=$área.

Si se partiera de una posición diferente entónces la rueda mm' ó bien pasaría al otro lado del centro del disco ó quedaría al mismo y el área buscada sería la suma ó la diferencia de las de dos rectángulos en que la posición inicial fuese la normal.

342. En las valuaciones delicadas debe, en lo posible, seguirse el procedimiento de *multiplicación*, es decir, hallar varias veces seguidas la misma área y dividir la cifra total obtenida por el número de determinaciones; de esta manera pueden ser apreciados ciertos errores que el instrumento no aprecia directamente.

343. Aritmómetros de Thomas y de Edmodson.—Estos aparatos son verdaderas máquinas, y su fundamento es puramente mecánico; así es que nos limitaremos á decir que del primero, llamado aritmómetro recto, existen tres modelos que dan productos con 12, 16 y 20 cifras, y del segundo sólo existe un modelo que dá los productos con cuantas cifras se quieran.

344. Aritmógrafo de Troncet.—Se compone esencialmente de varias piezas móviles cifradas y dentadas, cubiertas de una hoja fija en la cual hay practicados agujeros circulares y ranuras. Los huecos de los dientes de las piezas móviles corresponden exactamente á las diez cifras de la nu-

meración escritas varias veces en columnas verticales sobre la hoja fija. Cada pieza movible se numera de arriba hácia abajo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.

El uso del aparato es sencillísimo y se halla explicado con toda extensión en las instrucciones que lo acompañan. También acompañan al aparato unas tablas de los nueve primeros múltiplos de los números desde 0 á 999.

345. CLASIFICADORES ESTADÍSTICOS DE CONTADORES AUTOMÁTICOS.—La clasificación estadística consta de dos partes, la separación de los hechos y su recuento. La separación de los hechos exige necesariamente la intervención de la inteligencia humana, pero el recuento de los de cada clase no, y puede hacerse mecánicamente.

Siendo el *contar* efectuar una suma de unidades, podrán aplicarse procedimientos análogos á los de las máquinas de cálculo aunque simplificados, naciendo de aquí inmediatamente la idea del *Clasificador estadístico de contadores rectangulares* que es sólo una simplificación del aritmógrafo de Troncet. Como el aparato no tendrá más aplicación que á la suma, cabe el reducir á su mitad las reglillas móviles considerando su numeración de 0 á 9 y una vez aceptado esto cabe la sustitución de las reglillas por círculos numerados, obteniendo así el *Clasificador estadístico de contadores circulares*. Estos dos aparatos son de la invención del autor.

346. Ahora bien, el gran número de conceptos de que consta una clasificación, hace muy pesado el recuento, concepto por concepto, y se ha pensado en registrar de una vez todos los correspondientes á un mismo hecho, viniendo así á la idea de la *Máquina eléctrica de clasificación*, debida al señor Herman Hellerith.

CLASIFICADOR ESTADÍSTICO

DE CONTADORES RECTANGULARES

347. Se compone de un tablero rectangular de madera de 110 centímetros de base por 90 centímetros de altura, en el cual paralelamente á sus bases y á distancia de 5 cm. se hallan practicados unos rebajos, cuya sección es un trapecio, que se extienden desde el borde de la derecha hasta 5 cm. del borde de la izquierda. En estos rebajos encajan los salientes que llevan 30 barras rectangulares de la misma altura del tablero y de 3 cm. de base y los de otras barritas A que sirven para separar las primeras y que tienen 5 mm. de base. La última de dichas barritas tiene unos agujeros que coinciden con otros del tablero por donde pasa la espiga de un tornillo cuya tuerca asegura por completo el aparato; estos tornillos son dos situados á 20 cm. de los bordes superior é inferior respectivamente.

Los 5 cm. que quedan libres en el borde de la izquierda del tablero y la parte superior libre de cada barra, sirven para pegar los epígrafes de la clasificación que vaya á efectuarse.

Fácilmente se comprende que las columnas ó barras verticales pueden agruparse como se desee por medio de las barritas A que hemos dicho.

348. Cada barra se halla dividida en diez espacios de 9 cm., como el B, envuelto cada uno por una lámina delgada de latón que lleva en su parte central tres agujeros de 5 mm. de diámetro y por su parte inferior una ranura ondulada. Esta cubierta, con las tres láminas rectangulares de latón C, D, y F constituyen el aparato registrador. La lámina C que se coloca debajo del agujero de la derecha, es la que registra las

unidades y presenta un rebajo en su lado izquierdo para moverla con el punzón P; su longitud total es de 54 mm. dividida en 12 partes numeradas ó pintadas en negro ó blanco, según indica la figura; la lámina D que se coloca debajo del agujero de las decenas tiene dos dientes, viéndose en la figura su disposición y la de su numeración; finalmente la lámina de las centenas F presenta su numeración en el mismo orden que la C y difiere de ella en que por su lado izquierdo presenta dos dientes.

La figura B representa uno de estos contadores en el momento en que aparece la cifra 526.

349. El funcionamiento del aparato es sencillísimo; un indivíduo provisto del punzón P hace contar una unidad al aparato registrador que corresponde al concepto dictado por otro indivíduo. En el momento en que en el agujero de las unidades aparece la cifra cero, se deja correr el punzón por la ranura y vendrá á tropezar con el diente de la lámina D, haciendo aparecer el uno en el agujero de las decenas; para contar la unidad siguiente bastará bajar la barra C hasta que aparezca el uno.

El punzón P vá provisto, por el otro extremo, de un lápiz para tomar las anotaciones que sean necesarias.

CLASIFICADOR ESTADÍSTICO

DE CONTADORES CIRCULARES

350. Si en vez de barritas rectangulares usamos círculos numerados, bastará mover la rueda correspondiente á las unidades G, la cual presenta sólo un diente g que engrana con los diez de la H, la cual á su vez no presenta más que uno que engrana con los diez de la I; la disposición de las mismas, en conjunto, es la representada por la figura J. El aspecto exterior del contador será el que expresa la figura k.

351. Teniendo entónces cada aparato contador 5 cm. de base por 2 cm. y 5 mm. de altura las dimensiones del tablero para 300 contadores serán 80 cm. de altura por 60 de base ó bien 70 cm. de altura por 68 de base; el número de columnas será 10 ó 12 y el de contadores contenidos en cada una el de 30 ó 25, contando con dejar en la parte superior un claro de 50 ó 55 mm. para los encabezamientos.

Este sistema es superior al de contadores rectangulares:

1.° Porque es mayor el número de los contenidos en una misma superficie.

2.° Porque sólo es preciso mover el aparato que cuenta las unidades.

3.° Porque siendo el espacio que el punzón hace correr al círculo de las unidades limitado exactamente á que aparezca un nuevo número, nunca podrá ocurrir la equivocación de hacerle avanzar dos ó más espacios en vez de uno.

MÁQUINA ELÉCTRICA

DE CLASIFICACIÓN

352. Se compone de una plancha fija sobre la cual hay practicados 240 agujeros llenos hasta su mitad de mercurio y puesto cada uno en comunicación con su correspondiente contador por medio de un hilo de cobre. La parte móvil del aparato se halla formada por una plancha del mismo tamaño que la fija, la cual lleva, correspondiéndose con los agujeros, pequeños resortes terminados por barritas metálicas y puestos en comunicación con una pila eléctrica. Esta plancha se mantiene levantada por medio de un resorte.

Los contadores tienen un mecanismo análogo al del receptor Breguet.

353. El funcionamiento de la máquina exige la confec-

ción de hojas individuales del mismo tamaño que las planchas que hemos dicho, divididas en cuadrados, por líneas horizontales y verticales, cada uno de los cuales corresponde á un concepto, debiéndose taladrar los correspondientes al indivíduo de que se trate. Preparada así la tarjeta no hay más que colocarla sobre el plato fijo de modo que sus agujeros se correspondan y bajar el móvil; las agujas correspondientes á los taladros pasarán por ellos introduciéndose en el mercurio, cerrando así el circuito y haciendo mover una unidad á los contadores correspondientes, las agujas restantes al tropezar con la iarjeta obran sobre su resorte, no pudiendo tocar al mercurio. Los contadores son aparatos circulares fijos moviéndose sólo la aguja que vá señalando las unidades.

CAPÌTULO V

ESTÁTICA GRÁFICA

SUMARIO.—Representación gráfica del valor absoluto de un hecho.—Representación gráfica del valor relativo de un hecho en función de un elemento.—Idem idem en función de dos elementos.

354. Los valores de los hechos se representan gráficamente por medio de figuras que guarden una cierta relación constante con dichos valores. De aquí se deduce que la representación más sencilla será por medio de una línea cuya longitud sea proporcional al valor del hecho. También pueden ser representados por una superficie ó por un volúmen proporcional.

355. El génio de los publicistas y su deseo de poner de manifiesto ante los ojos de todas las clases sociales el valor aproximado del hecho, les ha conducido á adoptar varias formas que todas quedan reducidas á las tres ya expuestas. Así, puede representarse la población de un país por uno de sus habitantes, cuya altura sea proporcional á su número. Como ejemplo podemos citar el publicado sobre Religiones en el «Almanaque de Bailly-Bailliere» para 1897. También puede ser representado por una figura inscripta en un rectángulo cuyas dimensiones sean proporcionales á la raiz cuadrada del valor del hecho, y entónces su área resultará proporcional al

hecho. Como ejemplos podemos citar los gráficos publicados en el citado Almanaque para el año 1898, relativos al consumo de alcohol y de tabaco; cada figura se halla inscripta en un rectángulo, cuya área es proporcional á la población y cuyas dimensiones lo son á su raiz cuadrada, y el vaso ó pipa que tiene cada una se halla inscripto en un rectángulo de área proporcional al consumo de cada país. Las figuras así trazadas nos dan una idea bastante clara del hecho representado. Otro de los medios usados es representar el valor del hecho por el área de un círculo cuyo rádio sea proporcional á la raiz cuadrada de su valor ó por un triángulo isósceles, cuya base es costante y cuya altura es también proporcional á dicha raiz.

356. Cuando en vez del valor absoluto de un hecho lo que se quiere representar es su valor relativo en función de alguno de sus elementos, entónces ya no podrá ser representado por la línea recta, sino por una superficie producto de dos variables; una el elemento considerado, otra el valor del hecho con relación á él. Así, por ejemplo, si queremos representar el consumo de alcohol con relación á la población, podremos tomar como base del rectángulo una línea de longitud a proporcional á la población P y por altura b otra proporcional al consumo H por habitante; el producto a.b representa á la vez el área del rectángulo y el consumo total de alcohol P.H en el país considerado y en la escala 1:q.m, suponiendo $\frac{P}{p}=a$ y $\frac{H}{m}=b$. En vez del rectángulo puede tomarse el triángulo.

357. En general vemos que la representación del valor absoluto de un hecho equivale á la de una variable independiente que se hace por medio de su abcisa, y la de un hecho con relación á uno de sus elementos equivale á la de un valor particular de una función de dos variables que se representa siempre por su abcisa y ordenada.

358. Cuando el valor considerado se quiere representar con relación á dos elementos, lo haremos, en general, por me-

dio de un volúmen; decimos en general, porque ya sabemos que á vez los volúmenes pueden ser representados sobre un plano por medio del sistema de *acotaciones*. Así, por ejemplo, la cantidad de tabaco consumido en un país, con relación al tiempo y á la población, puede ser representado por un paralelepípedo rectángulo, una de cuyas aristas sea proporcional á la población, otra á la cantidad de tabaco consumido por cada indivíduo en la unidad de tiempo, y la tercera al tiempo; el producto a.b.c de las tres es igual al volúmen del paralelepípedo y á la cantidad total de tabaco consumido en la escala 1:m.n.p. En vez del paralelepípedo puede hacerse uso de pirámides triangulares ó cuadrangulares.

359. En general la representación de un hecho con relación á dos de sus elementos, equivale á la de una función de tres variables que se determina siempre por sus tres coordenadas.

CAPÌTULO VI

DINÁMICA GRÁFICA

SUMARIO —Preliminares.—Variaciones con relación al tiempo y á la extensión.—Variaciones en el espacio.—Cartógrama de matices graduados.—Cartógrama coloreado —Cartógrama sombreado.—Cartógrama de bandas.—Cartógrama de círculos.—Cartógrama stereográfico ó de relieve.—Cartógrama de focos diagráficos.—Cartógrama de focos circulares.—Série de cartógramas expresando hechos homogéneos.—Procedimiento especial de M. Mayr.

360. El gráfico no tiene más objeto que facilitar la comparación de las variaciones de los hechos: estas variaciones pueden estudiarse con relación á sus tres elementos: tiempo, extensión y espacio.

Las variaciones con relación al tiempo y á la extensión, se representan por medio de curvas, y las que se refieren al espacio por medio de signos particulares relacionados directamente con las magnitudes del hecho y ordenados artificial ó naturalmente. Los gráficos de la primera clase reciben el nombre de *diágramas* y los de la segunda simplemente gráficos ó *diágramas de columnas* si se hallan ordenados artificialmente y *cartógramas* si lo están naturalmente. Cuando en el gráfico se combina el espacio con cualquier otro valor se adopta generalmente el cartógrama, aunque también suele usarse, en ciertos casos, el *diágrama compuesto*, ó sea el formado por varias curvas que se distinguen por su color ó por su trazado.

VARIACIONES CON RELACIÓN AL TIEMPO Y Á LA EXTENSIÓN

361. Siendo los resultados estadísticos funciones de variables conocidas, su representación gráfica queda sujeta á las reglas generales dadas para esta clase de trabajos. El procedimiento consiste, pues, en considerar al valor del hecho como función de una variable, en cuyo caso los valores de ella serán las abcisas, los de la función las ordenadas y la variación del hecho estará representada por medio de una curva plana, recibiendo entónces el gráfico el nombre de *diágrama*. Si el valor del hecho se considera como función de dos variables, su variación estará representada, como sabemos, por una superficie curva que puede considerarse en relieve, en cuyo caso el gráfico recibe el nombre de *Stereógrama* (denominación propuesta por Massedaglia) ó proyectada sobre un plano por sus curvas de nivel.

362. Cuando las coordenadas que sirven para determinar la curva que representa los valores del hecho son rectangulares, recibe el diágrama el calificativo de *rectangular*, y si se hace uso de las coordenadas polares el de *polar;* el primero es aplicable á todos los casos y el segundo sólo lo es científicamente á aquellos en que los valores del hecho se repiten por ciclos ó periodos regulares de tiempo, como por ejemplo, las variaciones diurnas de presión y temperatura. Real y verdaderamente estos gráficos caen fuera del dominio de la Estadística, si por Estadística se entiende la ciencia de los hechos sociales, pues estos hechos presentan el carácter distintivo de la *variabilidad;* sin embargo suelen usarse con frecuencia para representar los valores de un hecho con relación á su extensión (puesto que esta es invariable), como por ejemplo, la mortalidad por edades ó la población con relación al mismo elemento.

363. Las coordenadas oblícuas son muy poco usadas en estos trabajos; sólo en ciertos casos particulares suelen usarse las exagonales.

364. Como ejemplos de *diágramas rectangulares* podemos citar: el construido por el Sr. Merino para deducir del movimiento de la población de 1861-70 una tabla de mortalidad, el cual figura en su obra *Reflexiones y conjeturas sobre la ley de mortalidad en España;* el formado por el Instituto Geográfico y Estadístico para representar y comparar la mortalidad por años en Madrid durante el periodo 1878-85 con la general de toda España durante el quinquenio de 1878 á 82. Este gráfico fué construido tomando por abcisa el tiempo (12 milímetros por año) y por ordenada una longitud proporcional al número de defunciones, figurando en la obra *Movimiento de la población de España en el septenio de 1886-92* una reducción del mismo á la mitad. El número de diágramas publicados en el extranjero es muy considerable; pero podemos citar como más importantes los que figuran en la obra de Reclus *Geographie universelle,* los que acompañan á la de Quetelet *Anthropometrie on mesure des differentes focultes de l' homme*, y el gran número de los presentados en la Exposición de 1878 en París.

VARIACIONES EN EL ESPACIO

365. Cuando las variaciones de un hecho se estudian con relación al espacio y se agrupan artificialmente, entónces el gráfico se denomina *de columnas*, si las magnitudes de los hechos están representadas por rectángulos ó no reciben ninguna denominación si dichas magnitudes se representan por líneas rectas, triángulos ó círculos; en todos estos casos el orden en que se colocan los hechos suele ser el lexicológico que no ofrece mas ventaja que hallar pronto el país que se desee. Como ejemplos podemos citar los trabajos de Reclus (Geographie universelle), Minard, Comoy, Bertillon, etc.

366. El método más racional y más lógico para representar las variaciones en el espacio, es considerar á los lugares en la posición relativa en que se hallan y después por medio de cualquier signo dar forma sensible á la magnitud del hecho. Estos signos suelen ser: diferentes matices de un mismo color *(de matices graduados)*, diferentes colores *(coloreado)*, diferentes sombras *(sombreado)*, bandas de anchura proporcional *(de bandas)*, círculos *(de círculos)* y relieves proporcionales *(de relieve)*. Cuando el hecho se considera función, además del espacio, de otro elemento que generalmente es el tiempo, según que esta variable tenga ó no representación así se forman el de *focos diagráficos* y el de *focos circulares*.

367. El cartógrama se construye ordenando los paises ó divisiones administrativas, según la magnitud del hecho que se examina y formando con ellas el número de grupos *necesarios y suficientes* para que se pueda conocer de una manera rápida y exacta la variación de dicho hecho. De ninguna manera creemos que deba fijarse el número de grupos, que dependerá sólo de la naturaleza del hecho; pero debe recomendarse que no sea muy grande porque entónces el cartógrama *pierde en claridad lo que no gana en exactitud.* El número de grupos no debe fijarse de antemano, ni tampoco formarse cada uno dividiendo la separación de los hechos extremos por el número de grupos, pues este procedimiento nos llevaría, en muchos casos, á la formación de grupos irregulares, de tal manera que en uno estarían comprendidas todas las entidades menos unas cuantas y en cambio en otros ó no estaría comprendida ninguna ó estas serían en muy pequeño número. Para obviar este inconveniente se ha propuesto separar los resultados extremos y formar con los restantes las agrupaciones dejando á los extremos, ó bien en grupos separados, ó formando parte de los grupos primero y último; pero este procedimiento es poco racional y sobre todo muy artificioso, lo cual es contrario al fin del gráfico, que debe ser *fotografiar* los valores del hecho. El procedimiento que cree-

mos más lógico y más conforme con la naturaleza y el fin de estas representaciones consiste en construir primeramente su diágrama rectangular ó un cuadro (el primer procedimiento ha sido propuesto por M. Cheysson y el segundo por M. Loua) en el cual se ordenen las *divisiones* por la magnitud del hecho y los grupos quedarán así naturalmente formados. Resuelta esta dificultad aparece otra, y es que en tales gráficos la *media* desaparece ó por lo menos no se determina; y como si importante es conocer la variación del de hecho, tanto ó más lo es el conocer la media, ó sea su medida general, se ha propuesto que el número de grupos sea impar y que el intermedio se forme con aquellos hechos cuyo valor difiera poco de la media (sistema Cheysson), ó bien puntear de la misma manera los grupos equidistantes de la media, haciendo desaparecer entónces el grupo intermedio (sistema Levasseur). Después, sobre un mapa del territorio, ó mejor dicho, sobre un croquis, pues en él sólo figuran, aparte de las divisiones administrativas ó políticas, muy contados accidentes, se vá representando en cada lugar la magnitud del hecho con el signo escogido.

368. *Cartógrama de matices graduados.*—La observación que sobre él hay que hacer se refiere á que es difícil formar una escala de matices que sea bastante bien determinada para que no dé lugar á dudas en quien la examina. El preconizador de este sistema ha sido Ficker, cuyas obras *Bevoelkerung der Oesterreichischen Monarchie y Frankreischs Bevoelkerung* no son otra cosa que colecciones de cartógramas de matices graduados. Respecto al número de grupos que deben formarse, aunque M. Streffleur en el Congreso de Viena opinaba que debían ser doce y M. Ficker en San Petersburgo que debían ser diez, creemos que para estos gráficos son demasiados por la dificultad de poder distinguir diez gradaciones diferentes de un mismo color; sin fijar número deben ser, en general, cuatro ó cinco á lo más.

369. *Cartógrama coloreado.*—Cuando en vez de diversos

matices de un mismo color se usan colores diferentes, ya no es fácil confundirlos; pero el número de grupos queda también limitado porque si no sería preciso acudir continuamente á la explicación. Su tirada exige mayores gastos, pues se necesita una piedra para cada color. Respecto á su inventor ó preconizador nada podemos decir sino que su uso ha debido ser muy antiguo y que necesariamente ha precedido al sistema anterior por ser más elemental y menos científico que él. Como caso particular de este sistema podemos considerar el propuesto por M. Loua *(Les Methodes de Statistique graphique)*, que consiste en usar dos ó tres colores diferentes, según que el grupo que comprende á la media quede en blanco ó se designe por un color, y los otros dos sirven para designar los grupos superiores ó inferiores á la media, usándose matices en gradación para designar la mayor ó menor separación de la media. Este método sobre ser el único racional de usar los colores diferentes, presenta dos grandes ventajas: 1.ª no oculta la media: 2.ª el número de grupos puede ser doble que en el anterior, pues se usan dos colores.

370. *Cartógrama sombreado.*—Presenta sobre los dos anteriores la ventaja de que los grupos se distinguen aún sin necesidad de explicación y de que los gastos de tirada son muy pequeños, pudiendo formar parte del texto de la obra si su tamaño lo permite. Este sistema es también muy antiguo, no pudiendo decir ni quién fué su inventor ni quién extendió su uso. Desde luego por sus grandes ventajas es el más usado, pudiendo citar como ejemplos los publicados en el «Almanaque de Bailly-Bailliere» de 1896 por el auxiliar de Estadística D. Isidoro Garrido. Como caso particular de este sistema podemos citar el de M. Levasseur ya descrito.

371. *Cartógrama de bandas.*—Cuando el hecho varía á lo largo de una cierta línea la otra ordenada se toma perpendicular á ella y entónces la anchura de la banda es la que nos dá idea de la variación del hecho relacionado así con los lugares geográficos. Los preconizadores de este método han si-

do Minard en Francia y Belpaire en Bélgica, cuyos trabajos pueden citarse como modelos de este sistema de representación.

372. *Cartógrama de círculos.*—En estos cartógramas se supone que la cabeza de la división administrativa es la que dá carácter á toda ella y es la que sirve de centro para trazar un círculo de rádio proporcional á la raiz cuadrada magnitud del hecho; pero los casos en que es más legítimo su uso son aquellos en que sólo se comparan las cifras correspondientes á dichas poblaciones cabezas de las divisiones administrativas. Todos los círculos trazados pueden ser del mismo color; pero el hecho queda mejor expresado adoptando tres, uno para aquellos lugares en que su magnitud sea inferior al promedio, otro para aquellos en que sea igual y otro para aquellos en que sea mayor.

373. *Cartógrama stereográfico ó de relieve.*—Se forma superponiendo recortes de papel ó cartulina de la misma forma que el terreno, pero cuyo tamaño sea cada vez más pequeño hasta una altura proporcional á la magnitud del hecho, debiendo cuidar de que sus vértices correspondan precisamente á los puntos en que el hecho presente su máximo en cada región; de esta manera el gráfico no necesita explicación alguna, pero tiene el inconveniente de lo difícil de su construcción que hace que las reproducciones sean excesivamente caras. Sirven más que para la venta para las exposiciones. Para obviar este inconveniente se ha inventado un nuevo sistema que sólo es un caso particular de este que es el llamado de curvas de nivel, que se construye uniendo los puntos de dos en dos, determinando los de igual cota (suponiendo los valores como alturas) y uniéndolos por medio de curvas que reciben el nombre de *curvas de igual elemento* ó *isopletas.*

374. *Cartógrama de focos diagráficos.*—Como su nombre lo indica, la cabeza de cada división administrativa ó política es el centro ó foco de un pequeño diágrama especial que bien se refiere á la variación de un mismo hecho ó bien á la

expresión de varios hechos diferentes. La manera de construirlos es muy sencilla: supongamos, por ejemplo, que quieren expresarse las cifras de la mortalidad en un periodo de diez años; cada Ayuntamiento ó capital de provincia lo haremos centro de un diágrama, que generalmente es polar, cuyos rádios expresen la mortalidad en cada año, es decir, cuyos rádios sean proporcionales á las raices cuadradas de la mortalidad. Cuando los hechos son diferentes, cada uno se representa por un sector del mismo ó de diferente ángulo, de rádio proporcional y de color diferente si todos tienen el mismo ángulo. Así, por ejemplo, los de color blanco expresarán la densidad de la población, el negro la mortalidad, el azul la natalidad, etc. El color puede ser sustituido por el orden, y se dirá entónces que contando de derecha á izquierda, pasando por la parte superior, indican los sectores sucesivamente los valores de la densidad, natalidad, mortalidad, etc. Como modelos de esta clase, podemos citar los que figuran en la publicación oficial francesa *Album de Statistique graphique de 1880*.

375. *Cartógrama de focos circulares.*—Cuando la magnitud de un hecho quiere representarse teniendo en cuenta el lugar y el tiempo, puede adoptarse este procedimiento: la magnitud del hecho en cada año se representa por un círculo cuyo rádio sea proporcional á la raiz cuadrada del valor del hecho. Si el hecho vá disminuyendo los rádios de los círculos irán también disminuyendo y en el caso contrario aumentando.

376. *Série de cartógramas expresando hechos homogéneos.*—Parece poco lógico que cuando se presenta una série de cartógramas que representan hechos homogéneos las mismas tintas expresen coeficientes diferentes; para evitar este inconveniente propone M. Cheysson, Presidente de la Sociedad de Estadística de París, que en lugar de ordenar los grupos por sus coeficientes se ordenen según sus separaciones de la media general, determinadas, según sabemos, por la fór-

mula $V_e = \frac{d-m}{m}$. De esta manera cada color ó cada matriz expresará siempre la misma separación de la media; lo único que puede suceder es que en algunos cartógramas no entren todas las tintas y que el número de grupos sea diferente en cada una, lo cual no será nunca un inconveniente para su construcción ni para su comprensión.

377. *Procedimiento especial de M. Mayr.*—Considerados con relación á cualquier hecho los Ayuntamientos de una misma provincia, suelen no tener sus afines en ella misma sino en la adyacente, y si dichas divisiones administrativas se reunen según sus valores con relación al hecho considerado, prescindiendo de si corresponden ó no á la misma provincia, se formarán grupos que M. Mayr, á quien se debe este método, llama *naturales.* Este procedimiento recibe el nombre de *Método geográfico.* Si el gráfico en vez de referirse á un país, región ó provincia se refiere á una población, debe dividirse y subdividirse en distritos, barrios, parroquias, cuarteles, etc. para poder aplicar con fruto este método.

APÉNDICE AL CAPÌTULO VI

EJEMPLOS DE GRÁFICOS

SUMARIO.—Stercógrama de la población.—Cartógrama coloreado según el método de Loua.—Cartógrama coloreado.—Série de cartógramas expresando hechos homogéneos.—Cartógramas de focos diagráficos del *Album de Statistique de 1880.*

Vamos á explicar y á describir en este apéndice algunos ejemplos de los gráficos más notables.

378. *Stércógrama de la población.*—Supongamos tres ejes rectangulares ox, oy, oz *(fig. L)*; sobre el primero tomaremos magnitudes proporcionales á los tiempos 1, 2, 3...... n años; sobre el segundo á las edades que queramos considerar por ejemplo 1, 5, 10, 15..... años, y sobre el tercero oz al número de individuos. Así la ordenada m_2A representa al número de indivíduos de la edad on_2 años contados en el año m; m'_2A' el número de indivíduos de la misma edad contados el año m'.

En la superficie formada debemos distinguir cuatro clases de secciones planas. Las perpendiculares al eje ox que dan curvas MBAQ; M'B'A'Q'..... que son las de supervivencia de una generación que por diferencia de valores pueden representar también la mortalidad y que reciben el nombre de *líneas de los supervivientes*. Las perpendiculares al eje oy que dan las curvas AA'..... que nos representan la variación en la unidad de tiempo del número de los indivíduos de la misma edad; entre ellas es de notar la MM' que nos representa la variación de los nacimientos. Las perpendiculares al eje oz que dan curvas BB' que son el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma ordenada vertical, es decir, que nos manifiestan cuáles son las edades en cada año que tienen el mismo número de indivíduos y se llaman líneas *isodémicas*. Las perpendiculares á la bisectriz del ángulo xoy que dan curvas QB,"M"' que nos representan el censo por edades del país en el año m"'. En efecto, la ordenada B_1"m"$_3$ representa al número de indivíduos nacidos el año m" que llegan á la edad n_3 y que por lo tanto serán contados en el Censo verificado el año m"$+n_3$, pero como el triángulo m'.m"$_3$m"' es isósceles m"m"$_3$=m"m"'. A estas líneas se les dá el nombre de *líneas de los recuentos*.

379. Berg ha construido un gráfico de esta especie relativo á Suecia y valiéndose de los censos quinquenales verificados en dicha nación desde 1750 á 1875. Perozzo ha construido otro relativo á los matrimonios verificados en Italia desde 1872 á 1876, y á él se debe también la construcción de un stercógrama polar.

380. El stercógrama polar, debido á Perozzo, está construido de modo que cada censo figura en un sector de 180 grados, tomando sobre cada rádio una longitud igual al número de indivíduos de cada edad. Este procedimiento resulta de explicación y lectura más fácil, reduciendo el sector á 90° y entónces la línea de los indivíduos de 0 á 1 año es vertical y la de 95 á 100 horizontal. La construcción de este gráfico es muy sencilla: trazado el ángulo de 90° se dividirá, por ejemplo, en 20 partes iguales, cada una de las cuales comprenderá 4°30', se trazarán los rádios correspondientes y se irán tomando sobre cada uno longitudes proporcionales al número de indivíduos de cada edad; así, sobre el rádio 05 se marcará una longitud proporcional al número de indivíduos

de 0 á 5 años, sobre el 010 al de indivíduos de 5 á 10 años, y finalmente, sobre el de 0 100 la representativa del número de indivíduos de 95 á 100 años. El mismo gráfico se construirá para cada uno de los demás censos que se conozcan y después se colocarán sobre una circunferencia de modo que los polos 0 coincidan con el centro y que las líneas 0 100 formen entre sí ángulos iguales.

381. *Cartógrama coloreado según el método Loua.*—Supongamos que queremos formar un cartógrama que nos exprese la densidad de población de los partidos judiciales de la provincia de Córdoba. Según los datos del Censo de 1887 la densidad media de la provincia es de 30,65 habitantes por k°; formaremos por lo tanto un grupo que se teñirá de amarillo formado por los partidos de Fuente Obejuna (17,47), Hinojosa del Duque (18,02), Montoro (17,89), Posadas (18,41) y Pozoblanco (19,87); otro de verde con Baena (32,60) y Córdoba (31,57), y tres de azul de diferentes matices formados por Bujalance (59,62), Priego (57,35), Rambla (46,66), Aguilar (64,13), Cabra (76,55), Castro (61,67), Lucena (61,93), Rute (71,06) y Montilla (82,34).

382. *Cartógrama coloreado.*—Uno de los casos en que es más lógico el uso de diferentes colores es aquel en que se compara la densidad de la población con la constitución geológica del suelo. Así, para formar el relativo á la provincia de Córdoba, adoptaremos para cada terreno un color diferente y la densidad de población quedará determinada por el sombreado de cada uno, según se expresa en el cuadro siguiente:

	Punteado.	Rayado.	Rayado doble.	Color completo.
Carmin.		Igneos 23		
Amarillo.	Cámbricos 4			
Anaranjado.	Silúricos 4			
Negro.		Carboníferos 28		
Verde claro.				Jurásicos 76
Verde obscuro..				Numulíticos 72
Violeta.				Cretáceos
Azul claro.			Mioceno 47	
Azul obscuro.		Posplioceno 30		

El número que figura al lado de cada terreno es el de habitantes por kilómetro cuadrado en el mismo. En el terreno cretáceo no figura cifra ninguna porque en esta provincia de Córdoba sólo existe un pequeño manchón en donde se halla edificada la ciudad de Cabra.

383. *Série de cartógramas expresando hechos homogéneos.*—Supongamos que queremos formar tres gráficos referentes al *Movimiento de la población de la provincia de Córdoba durante los años 1886-92*. Empezaremos por determinar el valor de la relación entre la diferencia del valor hallado y la media y esta misma media y formaremos el cuadro siguiente, tomando por unidad el partido judicial:

Partidos.	Nacimientos.	Matrimonios.	Defunciones.
1 Aguilar.	16	—29	36
2 Baena.	51	—118	185
3 Bujalance.	—54	—147	—12
4 Cabra.	75	45	94
5 Castro del Río. . . .	—80	—206	—18
6 Córdoba..	—128	—135	6
7 Fuente Obejuna. . . .	35	—29	—122
8 Hinojosa del Duque. . .	16	118	55
9 Lucena.	32	368	146
10 Montilla.	77	191	168
11 Montoro.	—37	—103	—109
12 Posadas..	—19	—29	—197
13 Pozoblanco.	75	29	—60
14 Priego de Córdoba. . .	—24	191	—9
15 Rambla (La).	—69	—103	36
16 Rute..	—45	15	21

Considerando tres grupos superiores á la media, tres inferiores y uno intermedio y designando cada partido por su número de órden formaremos el cuadro siguiente:

Grupos.	Nacimientos.	Matrimonios.	Defunciones.
De 100 en adelante	6—	5—3—6—2—15—11	12—7--11--13
De 51 á 100	5—15—3		
De 11 á 50	16—11—14—12	1—7—12—	5—3
De—10 á+10			14—6
De—11 á—50	8—1—9—7—	16—13—4	16—1—15
De—50 á—100	2—4—13—10		8—4
De--100 en adelante		8—10—14—9	9—10—2

De este cuadro se deduce enseguida el color ó el matiz que debe tener cada partido judicial en cada uno de los tres cartógramas que se han de construir.

Nota.—El no estar todavia publicados los resultados del último Censo ni estar aún ejecutadas las clasificaciones referentes al mismo, son la causa principal de que los gráficos, que como modelos debían acompañar á esta parte, los dejemos para el último de los tomos de esta obra.

384. *Cartógramas de focos diagráficos del Album de Statistique de 1880.*—En dicho Album figuran varios de estos cartógramas, de los cuales vamos á describir tres.

El que figura en la lámina I se refiere á las vias de comunicación de cada departamento. Cada capital de departamento es el foco de un diágrama polar compuesto de tres partes. El semicírculo superior cuya superficie se halla dividida en varios sectores que representan la longitud de las carreteras del Estado, de las departamentales, de las vías navegables, de los caminos de hierro y de las tres clases de caminos vecinales. El cuadrante inferior de la izquierda tiene una superficie proporcional á la relación total entre las vías de comunicación y la superficie del departamento. Y el área del cuadrante inferior de la derecha es proporcional á la relación entre dichas vías de comunicación y la población. Cada uno de estos sectores está señalado con su tinta característica.

El que figura en la lámina XV se refiere al entretenimiento y conservación de las carreteras. La parte superior se compone de seis sectores concéntricos de una abertura constante de 30° y cuyas superficies expresan de izquierda á derecha: la cualidad media de los materiales, el tránsito, el consumo de materiales, el precio de los mismos por metro cúbico, el precio de empleo y el precio total. El semicírculo inferior representa la relación entre los acaparamientos de materiales y el del consumo.

El de la lámina XVI expresa el desarrollo de los caminos de hierro en los principales Estados desde 1830 á 1878. La capital de cada Estado es el foco ó centro de una circunferencia dividida en seis arcos iguales, siendo la terminación de cada rádio el centro de una circunferencia iluminada, cuya superficie es proporcional al desarrollo absoluto de las vías férreas en cada uno de los años 1830, 1840, 1850, 1860, 1870 y 1878. Por debajo de la horizontal, que pasa por la capital de cada Estado, figuran dos sectores de 90°, cuyas áreas expresan las relaciones de las líneas férreas en 1878 á la población y á la superficie del territorio.

CAPÌTULO VII

VENTAJAS É INCONVENIENTES DE LOS GRÁFICOS

SUMARIO.—Principales ventajas de los gráficos.—Sus inconvenientes.—Partes de que debe constar toda obra estadística.

385. La principal ventaja que tienen los gráficos es que tienden á vulgarizar los resultados estadísticos, poniéndolos al alcance no sólo de las personas menos ilustradas, sino también de aquellas que, teniendo una gran ilustración, no disponen del tiempo necesario para estudiar la marcha de cualquier hecho examinando los cuadros numéricos, resultado de la investigación. ¿Quién puede dudar que en un Consejo de Ministros será siempre más útil un gráfico ó una colección de gráficos que una publicación estadística cuya exámen exige varios días de un trabajo asíduo y pesado? ¿Quién puede dudar que al militar, al ingeniero, al abogado, que sólo tienen que ocuparse de la Estadística como accidente para determinado asunto, les sea más útil un gráfico que un cuadro numérico? ¿Cómo hacer que el obrero ó el niño fijen su atención y deduzcan consecuencias de un cuadro estadístico por claro y ordenado que sea? Y ¿cómo, aunque sólo sea por la impresión que causa su vista, no han de fijar su atención en un gráfico? Y una vez despertada y avivada por sí misma ¿no ha de ser lógico suponer que lleve al indivíduo, no sólo al

exámen atento y detenido del gráfico, sino hasta al del cuadro numérico de donde se ha deducido?

386. Para el estadístico tienen también la ventaja de enseñarle y facilitarle la sintésis del análisis del hecho, de todo aquel trabajo de clasificación, sumas, promedios, comparaciones, etc., y por medio de ellos puede llegar con más facilidad á descubrir la misteriosa ley de los hechos. Los diágramas, en particular, facilitan las interpolaciones (1) y se prestan á la predicción próxima de los hechos (2).

387. Otra ventaja es que el gráfico no es alemán, ni francés, ni inglés, ni español, pues habla en el lenguaje universal de los signos, y si se adoptase por un convenio internacional que sus encabezamientos fuesen escritos en latín y en el lenguaje nacional, tendrían de hecho y de derecho la universalidad que todos los estadísticos les reconocen.

388. Los inconvenientes que presentan son dos: uno científico y otro económico. El primero es que en el gráfico se pierde el detalle y aparece sólo el conjunto; es un modelo de *síntesis* y no puede sustituir nunca al cuadro numérico que es el *análisis*, sino que debe acompañarlo y completarlo. El segundo consiste en que su tirada exije mayores gastos que los cuadros numéricos.

389. Para terminar diremos que en toda obra estadística deben distinguirse cuatro secciones:

1.ª *Introducción* donde se exponga el orígen de los datos fundamentales del trabajo, confianza que merecen, dificultades vencidas, plan y método seguido.

---

(1) La tabla de mortalidad de España, relativa al periodo de 1861 á 1870, fué construida por el Sr. Merino sirviéndose de un gráfico, y como sólo se conocían directamente los valores por grupos de edades, dedujo los intermedios por interpolación. Así también ha sido construida la publicada por el Instituto Geográfico y Estadístico con referencia al periodo de 1878-82.

(2) El caso más notable que puede citarse de esta predicción, es el que se refiere á la cesación de la crísis económica del Banco de Francia, anunciada por Juglar y Siegfried con muchos años de anticipación. Las predicciones metereológicas son deducidas casi siempre de los gráficos.

2.ª *Exposición* ó análisis en donde figuren todos los cuadros estadísticos.

3.ª *Deducción* ó síntesis en la que se expongan las reflexiones que sugieran las cifras, se comparen con otras análogas, se deduzcan consecuencias y se haga la predicción próxima del valor del hecho.

4.ª *Traducción gráfica* de la variación del hecho ó de los hechos de que se trate.

CAPÍTULO VIII

SÍNTESIS DE LA ESTADÍSTICA TEÓRICA

SUMARIO.—Estado actual de la Teoría de la Estadística y medios de favorecer su adelanto.—Lugar que le corresponde entre los diversos organismos del Estado.—Teoría filosófica del método estadístico comparado con el de las demás ciencias experimentales.—Principios de Taxonomía Estadística.—Aplicación del método de comprobación *á posteriori* á los hechos sociales.

390. De la exposición hecha se deduce que no todas las teorías cuyo conjunto forma la Ciencia estadística se hallan en el mismo grado de adelanto. Así, la Teoría del Territorio que es el elemento menos variable, es la más próxima á su estado definitivo y en orden de perfección siguen la Teoría de la Población y la del Estado. Esta última puede decirse que sólo se halla esbozada; son precisos todavía grandes trabajos para conseguir que adquiera todo el desarrollo de que es susceptible, y desde luego se comprende que no podrá adelantarse un paso en el establecimiento de sus principios mientras no exista *unidad* entre las múltiples y variadas estadísticas que tienen por objeto la apreciación de las fuerzas que lo componen y de sus diversas relaciones. Aunque más adelante hemos de desarrollar este punto, no queremos dejar de hacer aquí algunas ligeras observaciones sobre la *unificación* de las diversas estadísticas y sobre la necesidad de que sea

un Centro único el encargado de coordinar y comparar los resultados que arrojen. Entendemos por *unificación* de las estadísticas la sujeción de todas ellas á un plan único y á una idea común; no debe confundirse con la *centralización* que es la realización por un centro ó corporación única de todas las estadísticas. La primera la creemos ventajosa y necesaria para el adelanto de la ciencia; la segunda no es necesaria y aunque pueda favorecer á determinada corporación es contraria al interés de la ciencia; nadie mejor que el empleado de Aduanas puede formar sus estadísticas, nadie mejor que los empleados de Correos y Telégrafos pueden formar las suyas, nadie mejor que el militar nos puede dar las relativas á la milicia.

391. Aunque esta unidad es importantísima no constituye ella sola el *desideratum* de la ciencia, sino que es precisa otra todavía más elevada, la *unidad internacional*. Del mismo modo que la *Asociación Geodésica internacional* produce grandes beneficios á la ciencia, podría producirlos aún mayores á la ciencia y á la humanidad la *Asociación Estadística internacional*, cuya organización debería ser análoga y componerse por lo tanto de Asamblea, Comisión y Oficina internacionales. ¿Si á España cupo el honor, por medio de su representante el general Ibañez, de establecer aquella, se ha de mostrar rehacia ú opuesta á ejecutar cuantos trabajos sean necesarios para formar esta?

392. Ocurre preguntar ¿se dá á la Estadística la importancia que se merece? ¿Cuál debe ser el lugar que le corresponde entre los diversos organismos del Estado? Así como es principio axiomático que el indivíduo no se resuelva á emprender ningún negocio sin el conocimiento prévio de todas las circunstancias que puedan influir sobre el mismo, así la Política y la Administración deben consultar, antes de decidirse á ejecutar ningún acto, los datos y noticias que recoje la Estadística; *las ciencias sociales marchan con los ojos vendados sin el auxilio de la Estadística.* De aquí se dedu-

ce el grave y necesario papel que dicha ciencia debe desempeñar en el desarrollo de las fuerzas del Estado; ella *mide* y estudia aquellas fuerzas, aconseja las disposiciones que deben tomarse y prevee los resultados; la Política y la Administración ejecutan aquellos consejos. La primera es sólo una ciencia consultiva, las segundas son ejecutivas: aquella no dará nunca *ingresos directos* á la Hacienda, pero puede por medio de sus principios y deducciones aumentar los que faciliten los demás organismos administrativos, señalará las deficiencias é injusticias, determinará la justa cuantía de los diversos gastos, en una palabra, nos servirá de faro para llegar al ideal del *perfecto equilibrio.* Pero si importantes y necesarios son estos fines materiales é inmediatos de la Estadística, más importante y trascendental es su fin moral, el enseñar á las sociedades de dónde vienen y á dónde van, cuáles son sus defectos, cuáles sus virtudes, cuáles sus aptitudes, cuál su destino y qué lugar están llamadas á ocupar en la historia de la humanidad.

393. El método ó procedimiento de que se vale la ciencia para conseguir la verdad consta de dos partes:

1.ª Descubrimiento de una verdad ó propiedad nueva.

2.ª Demostración de la verdad del descubrimiento efectuado.

En las ciencias racionales el descubrimiento vá unido á la demostración, cualquiera que sea el procedimiento (análisis ó síntesis) por el que hemos llegado al descubrimiento de la verdad de que se trata. En las ciencias experimentales, á parte de que las demostraciones no pueden ser nunca necesarias, no existen realmente y son sustituidas por la *prueba* ó *comprobación*, es decir, por una nueva operación que nos multiplica las probabilidades de certeza pero que nunca nos la asegura. El procedimiento es por demás sencillísimo (aunque haya costado á la humanidad mucho tiempo y grandes trabajos para descubrirlo) consiste sólo en emplear el razonamiento *complementario* de aquel que nos ha servido para llegar al descubrimiento de la verdad de que nos ocupamos. Así, si nos hemos servido del *análisis* del hecho después partiendo de las verdades halladas reconstruiremos dicho hecho valiéndonos de la *síntesis*.

394. Se llama, en general, hecho, *á lo que ha sido, á lo que es ó á lo que será*. Ahora bien, nosotros no podemos conocer al *sustantivo propio, físico ó metafísico* (1) más que por sus *atributos*, los cuales no son otra cosa que abstracciones, luego nosotros no podemos considerar á los segundos más que como *un conjunto de abstracciones que forman una abstracción*. La inteligencia humana es tan limitada que no puede estudiar el atributo en un solo sustantivo sino que lo hace comparativamente en una serie de ellos que lo posean. De aquí la necesidad que tienen todas las ciencias experimentales de clasificar los hechos de que se ocupan. *En las ciencias experimentales una buena clasificación es toda la ciencia* porque facilita al limitado entendimiento humano llegar al conocimiento de la verdad que se busca. La *Morfología* ó estudio de la forma del ser, fué, en los principios de la ciencia, el fundamento de las clasificaciones llamadas *artificiales* ó *sistemas*, pero después, penetrando el hombre más en la esencia de las cosas, empezó á establecer las clasificaciones *naturales* ó *métodos* que están fundadas en el conjunto de caractéres que presentan los hechos ordenados según su importancia, atendiendo primero á los *dominantes* y después á los *subordinados*. Mientras el hombre sólo clasificó por la forma era imposible la aplicación del método á las ciencias sociales y políticas; pero aceptado y establecido el método natural puede extenderse la clasificación á dichas ciencias y puede seguirse para el descubrimiento de las causas de los hechos el sencillísimo pero poderoso y seguro método *dicotómico* (párrafo 174.)

---

(1) Etudes des procedes de l'esprit humain dans la recherche de l'inconnu a l'aide de l'observatíón et de l'experience etc por M. E. Chevreul.

395. El trabajo que tendremos que tomarnos para hacer la clasificación de los hechos estadísticos será solo el de la apreciación de la importancia de los caractéres. Tres clases de elementos hay que considerar en todo hecho que se refieren á la extensión, al espacio y al tiempo. Los caractéres referentes á la extensión son los principales, por que la extensión es el elemento que mejor determina el hecho. Entre los caracteres referentes al espacio y al tiempo, los más importantes son los primeros por que las variaciones en el tiempo son condición inherente á los hechos sociales; por lo tanto *la constancia en el tiempo podemos decir que no existe y que solo puede suponerse para periodos más ó menos grandes.*

396. La *especie* se define que es la reunión de individuos (hechos) que se parecen más entre sí que á los de cualquiera otro grupo y cuyos caracteres no tienen variación en el tiempo.

397. Así, pues, estableceremos los fundamentos de la *Taxonomia estadística*, distinguiendo los tipos, clases, órdenes, familias, tríbus, géneros y especies por medio de los caractéres, cuyas propiedades sean las que figuran en el cuadro inserto á continuación:

Categorias.	Extensión.	Espacio.	Tiempo.
Tipo	Generales	Comunes	Constantes
Clase	Idem	Idem	Variables
Orden	Idem	Diferenciales	Constantes
Familia	Particulares	Comunes	Idem
Tribu	Generales	Diferenciales	Variables
Género	Particulares	Comunes	Idem
Especie	Idem	Diferenciales	Constantes
Indivíduo	Idem	Idem	Variables

La *cifra absoluta* es la representación del indivíduo, la cifra relativa *medida de la intensidad* representa la especie, el *promedio en el espacio* nos representa al género, la medida de la *extensión* á la tribu, el *promedio referente al tiempo y al espacio* parece representar la familia, las leyes que son aplicables á un mismo país ó región y son diferentes en los demás, son representación del orden, las aplicables á todos los paises pero variables en el tiempo, representan la clase y finalmente el tipo se halla representado por las leyes de la primera categoría.

398. La diferencia principal que existe entre las ciencias físicas y naturales y las sociales y políticas consiste en que aunque los caractéres en unas y otras son abstracciones, en las primeras su reunión constituye un ser ó un *fenómeno* real, es decir, apreciable por nuestros sentidos y en las segundas constituye un *sustantivo abstracto*; el empleo del método de comprobación *á posteriori* es en las primeras facil y sencillo porque la imperfección de nuestros sentidos nos hace siempre ver que un hombre es igual á otro, una hoja igual á otra y un planeta igual á otro; en las segundas, por el contrario, como el espíritu es un instrumento más fino y delicado que nuestros sentidos cualquier diferencia por pequeña que sea la nota y no encuentra nada constante. Para poder distinguir ambas clases de caractéres ha buscado y usa un instrumento *en el cual no existe nada extraño á él mismo*, es, pudiéramos decir, su representación material, el cual no es otro que el cálculo matemático. Ha sido por lo tanto preciso para clasificar los hechos sociales, aplicarles las leyes matemáticas, evaluándolos numéricamente y para la eliminación de las variaciones, es decir, de sus accidentes, establecer una *hipótesis* traducida por el postulado del párrafo 15, que es el fundamental del método de la Estadística.

399. El método de comprobación *á posteriori*, que exige la síntesis, cuyo objeto es ver que efectivamente la reunión de los caracteres del hecho constituyen ó forman el sustantivo abstracto de que partimos, no puede ser aplicado aquí del mismo modo que en las ciencias físicas y naturales principalmente porque los errores que pueden ser admitidos por su

pequeñez en la determinación de dichos caracteres al reunirse se multiplican y hacen que el sustantivo así encontrado sea sólo *subjetivo* y no *objetivo*, es decir, que difiera de todos y cada uno de los que nos han servido para formarlo; pero como la determinación de este *tipo* que en Estadística recibe en general el calificativo de *medio* nos ha hecho conocer el grado de importancia de cada carácter, podemos comprobar su existencia por el análisis directo de varios hechos convenientemente escogidos dentro de cada grupo. Así, pues, la Estadística actúa por medio del análisis sobre la *investigación*, determina por medio de la síntesis las leyes ó las causas de los hechos y comprueba los resultados obtenidos, aplicando el análisis á las *monografías*.

APÈNDICE À LA PRIMERA PARTE

DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DE STIRLING

I. Vamos á demostrar el célebre teorema de Stirling establecido en el número 62 (primera parte).

Si multiplicamos y dividimos $\underline{|n}$ por n^n se tendrá

$$\underline{|n}=n^n f(n); \text{ como } \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|n}}=n+1$$

$$\text{será } f(n+1)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.f(n) \text{ y cuando } n=\infty$$

$$f(n+1)=\frac{1}{e}.\ f(n) \text{ y por consiguiente } f(n)=e^{-n}f_1(n).$$

Sustituyendo en vez de n el valor $n+1$ y dividiendo $f(n+1)$ por $f(n)$ se tiene

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{1}{e}\cdot\frac{f_1(n+1)}{f_1(n)} \text{ de donde } f_1(n+1)=f_1(n)\cdot\frac{f(n+1)}{f(n)}\cdot e$$

cuya igualdad nos dice que para el valor $(n+1)$ se multiplica $f_1(n)$ por un factor que difiere muy poco de la unidad, apesar de lo cual $f_1(n)$ no es una cantidad constante ni tiende á serlo. En efecto, haciendo

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$. $e=z$ estableceremos que $lz=1-nl\left(1+\frac{1}{n}\right)$ y reemplazando $l\left(1+\frac{1}{n}\right)$ por los dos primeros términos de su desarrollo $lz=1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2n}$ de donde $z=e^{\frac{1}{2n}}$

Si sustituimos en vez de $e^{\frac{1}{2n}}$ los dos primeros términos de su desarrollo se tiene

$$z=1+\frac{1}{2n} \text{ y } \frac{f_1(n+1)}{f_1(n)}=1+\frac{1}{2n}$$

II. Ahora, como

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2n}$$

con el mismo grado de aproximación que la igualdad anterior, deducimos de aquí que $f_1(n)$ varía según la misma ley que $\sqrt{n}$ y por consiguiente que

$$f_1(n)=\sqrt{n}\ F(n) \text{ y } \underline{|n}=n^n e^{-n}\sqrt{n}\ F(n).$$

III. Vamos ahora á demostrar que $F(n)$ tiende á un valor constante cuando n aumenta indefinidamente. En efecto, habiendo establecido la igualdad

$$\frac{f_1(n+1)}{f_1(n)}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{F(n+1)}{F(n)}$$

despreciando los términos inferiores á $\frac{1}{n^2}$ se deberá verificar para cualquier valor de n que

$$\frac{F(n+1)}{F(n)}=1+\frac{k_1}{n^2}$$

siendo k_1 una cantidad que no crece indefinidamente con n.

De las igualdades

$$\frac{F(n+1)}{F(n)}=1+\frac{k_1}{n^2}$$

$$\frac{F(n+2)}{F(n+1)}=1+\frac{k_2}{(n+1)^2}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{F(n+p)}{F(n+p-1)}=1+\frac{kp}{(n+p-1)^2}$$

se deduce que

$$\frac{F(n+p)}{F(n)}=\left(1+\frac{k_1}{n^2}\right)\left(1+\frac{k_2}{(n+1)^2}\right)\dots\dots\left(1+\frac{kp}{(n+p-1)^2}\right)$$

y como

$$l\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{k}{n^2}(1+t)$$

el logaritmo de la expresión anterior será

$$\frac{k_1}{n^2}(1+t_1)+\frac{k_2}{(n+1)^2}(1+t_2)+\dots\dots+\frac{kp}{(n+p-1)^2}(1+tp)$$

cuya série es convergente por serlo la formada por los términos $\frac{1}{n^2}$ y por lo tanto $\frac{F(n+p)}{F(n)}=$ constante. Haciendo en esta fórmula $p=n$ y $n=o$ se tiene que $F(n=$ constante.

Si llamamos G á dicha constante $\underline{|n}=Gn^n e^{-n}\sqrt{n}$.

IV. Según el teorema de Vallis (Traité de Trigonométrie par J. A. Serret, párrafo 188)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=$$

$$=\frac{2.4\dots 2n.2.4\dots 2n}{(1.3.5\dots 2n-1)(1.3.5\dots 2n-1)(2n+1)}=\frac{2^{4n}\underline{|n}}{(\underline{|2n})^2(2n+1)}$$

sustituyendo en vez de $\underline{|n}$ y $\underline{|2n}$ sus valores, esta fórmula se convierte en

$\frac{\pi}{2}=G^2\frac{n}{4n+2}$ de donde $G^2=2\pi+\frac{\pi}{n}$ y cuando $n=\infty$ $G^2=2\pi$ y $G=\sqrt{2\pi}$.

Así, pues, para cualquier valor de n se verificará la igualdad aproximada

$$\underline{|n}=n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}.$$

V. Prescindiendo de otra especie de consideraciones nos limitaremos á consignar que la aplicación de esta fórmula al cálculo del término de valor máximo cuando

$$m=20 \text{ y } p=q=\frac{1}{2}$$

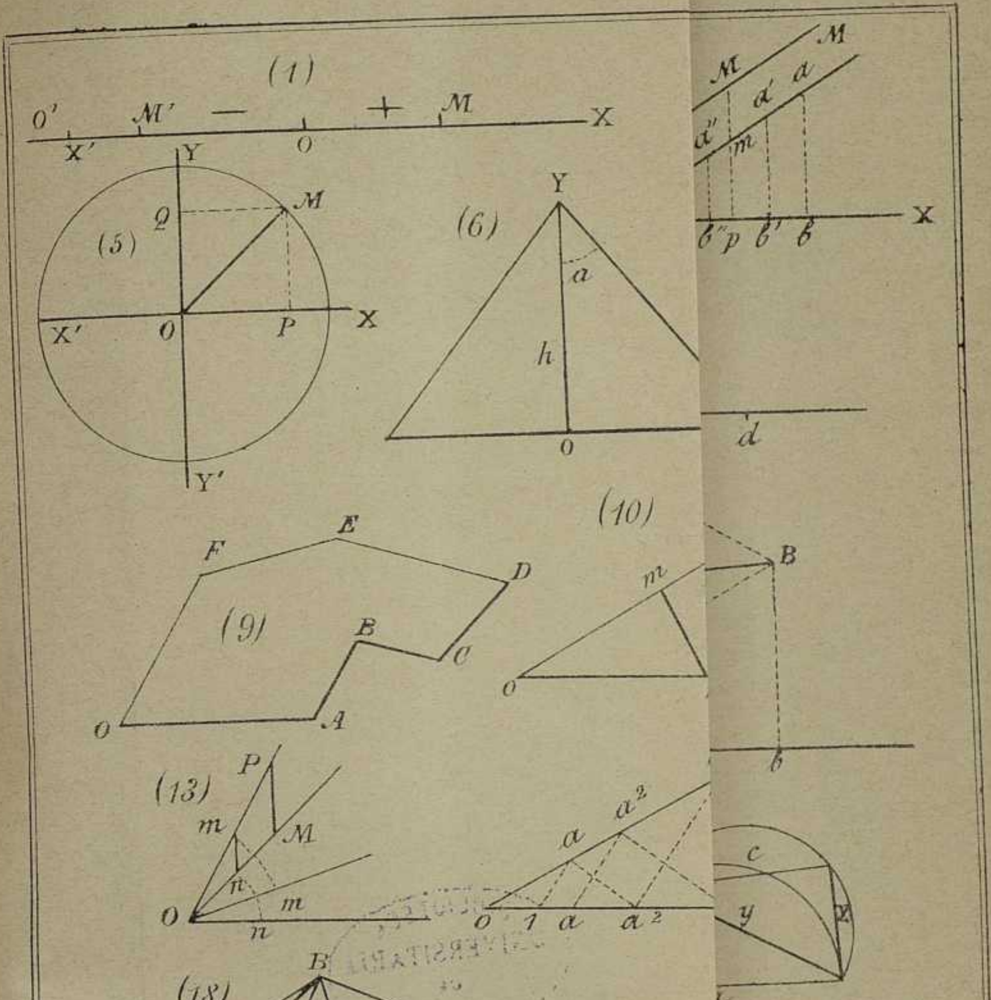
dá un error menor que 0,0005, y como generalmente sólo se aprecian los valores de las probabilidades con dos cifras, podemos considerarlo despreciable.

NOTA

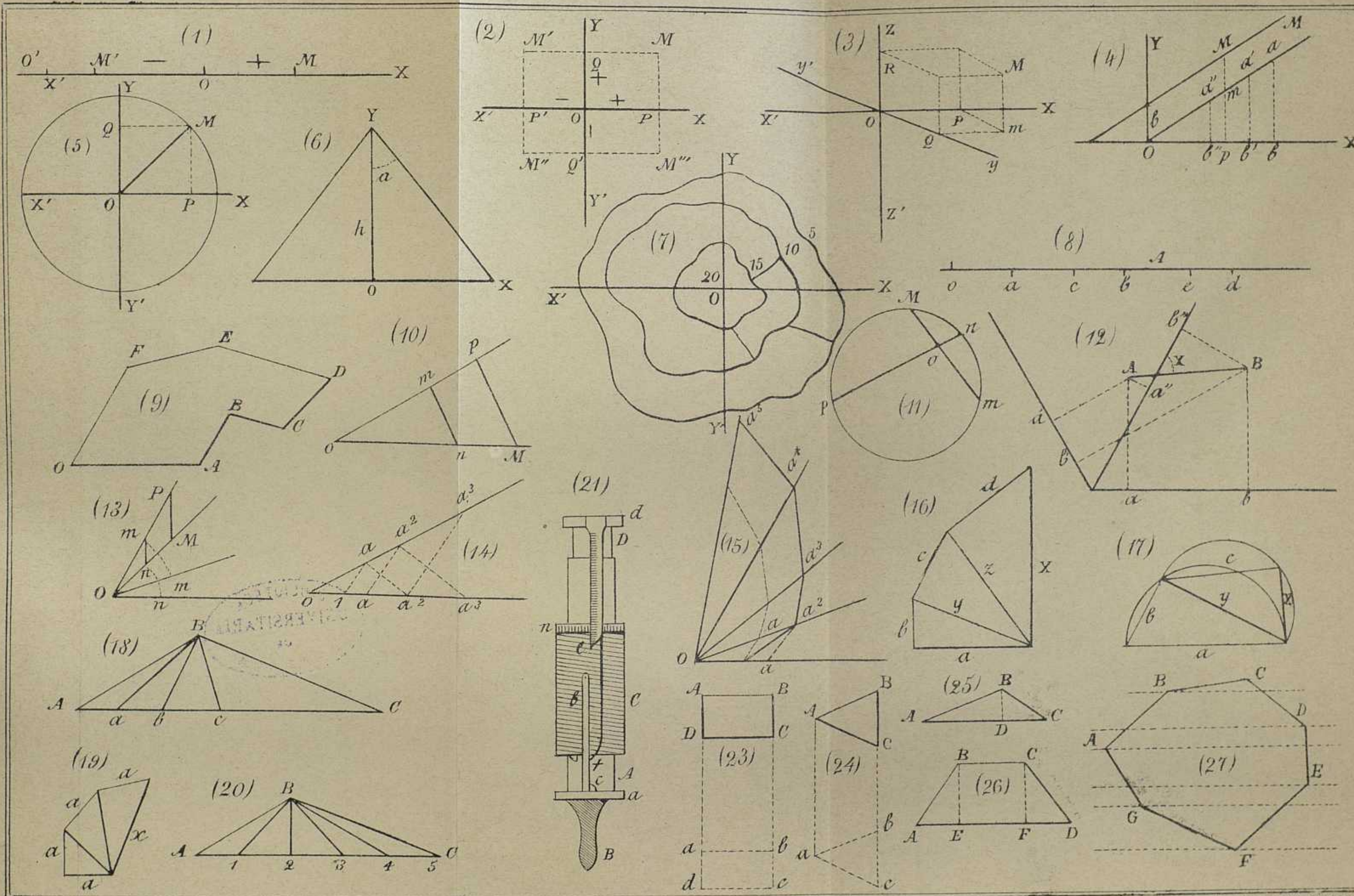
Nuestro deseo de que la publicación de la primera parte de esta obra coincidiera con la reunión en Madrid del IX Congreso internacional de Higiene y Demografía, fué causa de que no pudiéramos corregir algunos defectos de que adolece. El párrafo número 109 debe ser sustituido por el siguiente:

109. Fué por Decreto de 19 de Junio de 1873 por el que se creó, sólo nominalmente, el Cuerpo de Estadística, y se encargaron los trabajos Estadísticos al Instituto Geográfico que cambió dicho nombre por el de *Instituto Geográfico y Estadístico*. Por Real decreto de 15 de Diciembre de 1876, se crea definitivamente dicho Cuerpo con la organización que hoy tiene. En el Reglamento dictado en 27 de Abril de 1877, se establece que dicha Dirección general es la encargada de ejecutar todos los trabajos geodésicos, topográficos, metrológicos y estadísticos de España por medio del personal que menciona su artículo 2.° que, copiado á la letra, dice así: (Continúa en la página 106 de la primera parte).

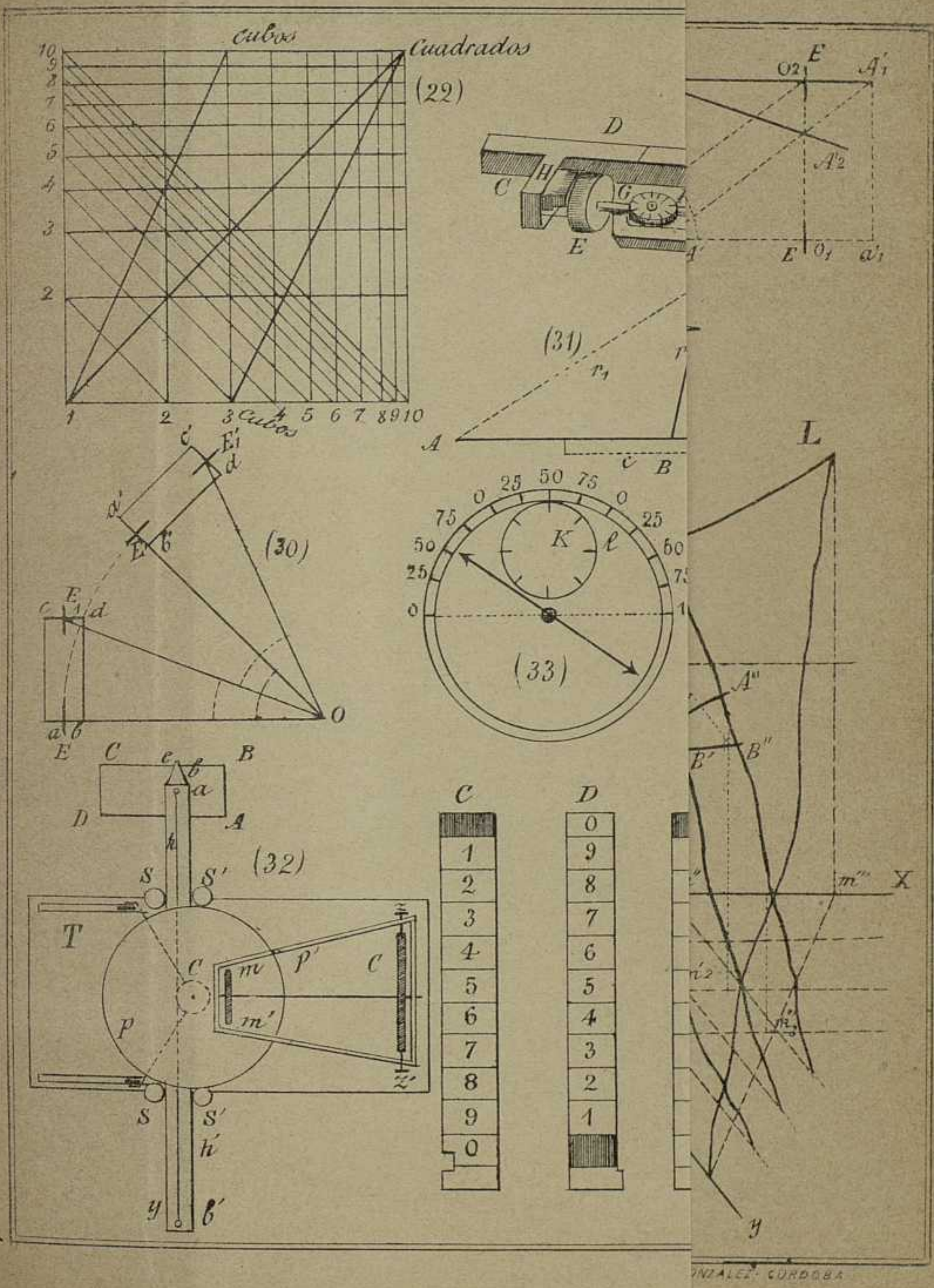
ÍNDICE

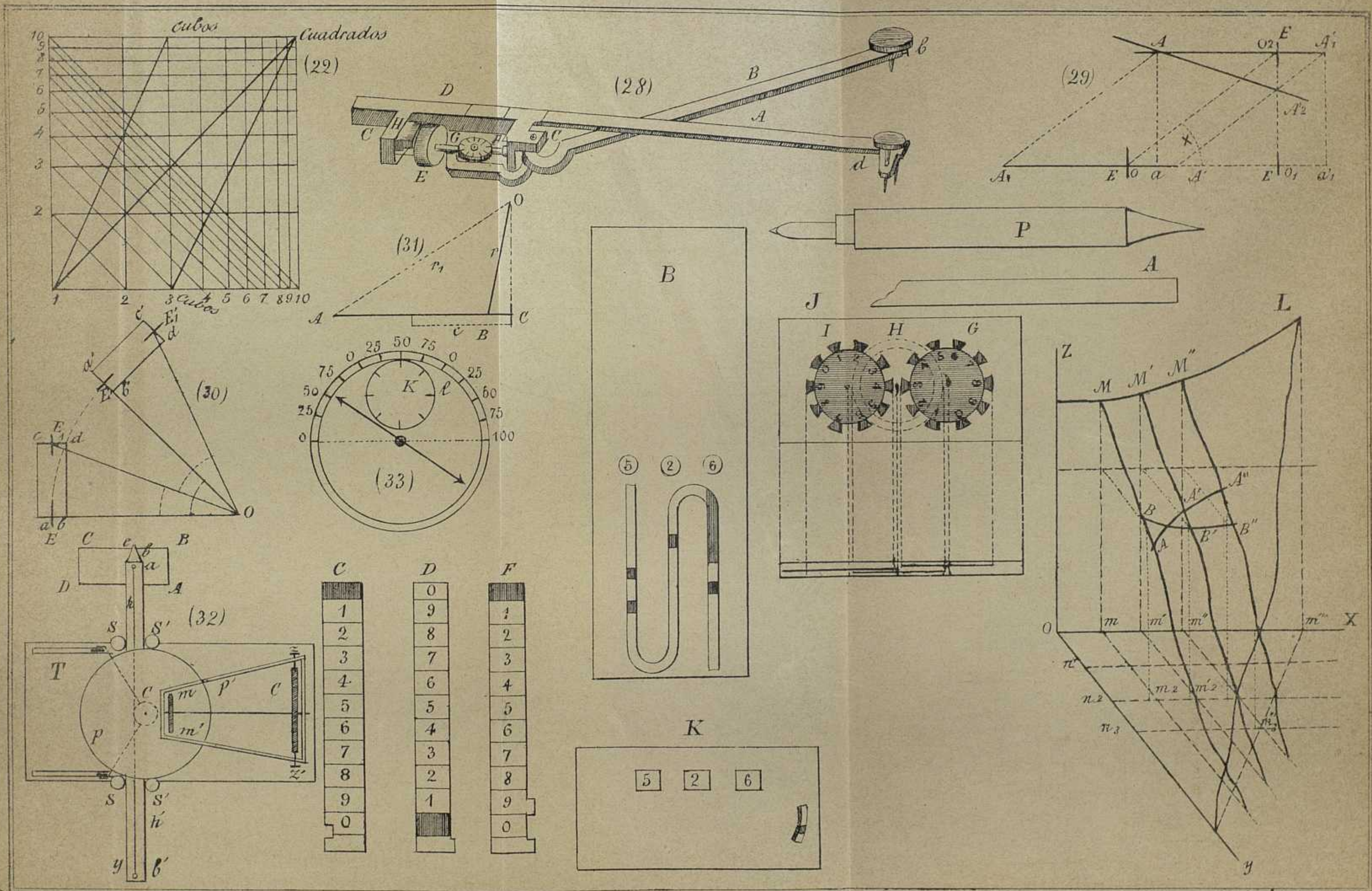


LIT. DE GONZALEZ - CORDOBA



LIT. DE GONZALEZ - CORDOBA


Cubos
Cuadrados
(22)
(31)
(30)
(33)
(32)
L
X



LIT. DE GONZALEZ - CORDOBA

DE ESTA OBRA VAN PUBLICADOS LOS TOMOS SIGUIENTES

PRIMERA PARTE.—Introducción al Estudio de la ciencia Estadística, que comprende: Generalidades, Cálculo de probabilidades é Historia de la Estadística.—**Precio, 1'50 pesetas.**

SEGUNDA PARTE.—**Tomo I.**—Estadística analítica, que comprende: Teoría general, Teoría de la población, Teoría del territorio y Teoría del Estado.—**Precio, 4 pesetas.**

SEGUNDA PARTE.—**Tomo II.**—Estadística gráfica, que comprende: Teoría general de los gráficos, Su aplicación al cálculo y á la representación de los valores de los hechos sociales, Síntesis de la Estadística teórica y Apéndice.—**Precio 1'50 pesetas.**

TERCERA PARTE.—Estadística aplicada.—(En prensa).