TRATADO DE ESTADÍSTICA

POR

DON MANUEL MÍNGUEZ Y VICENTE

AUXILIAR 1.º DEL CUERPO DE ESTADÍSTICA

SEGUNDA PARTE

TEORÍA DE LA ESTADÍSTICA

TOMO I

ESTADÍSTICA ANALÍTICA

PRECIO: 4 PESETAS

PRIMERA EDICIÓN

CÓRDOBA

IMPRENTA Y LIBRERÍA DEL «DIARIO»

Letrados 18 y San Fernando 34

1899

TRATADO DE ESTADÍSTICA

POR

DON MANUEL MÍNGUEZ Y VICENTE

AUXILIAR 1.º DEL CUERPO DE ESTADÍSTICA

SEGUNDA PARTE

TEORÍA DE LA ESTADÍSTICA

TOMO I

ESTADÍSTICA ANALÍTICA

PRIMERA EDICIÓN

CÓRDOBA

IMPRENTA Y LIBRERÍA DEL «DIARIO»

Letrados 18 y San Fernando 34

1899

TRATADO DE ESTADÍSTICA

POR

DON MANUEL MÍNGUEZ Y VICENTE

AUXILIAR 1.º DEL CUERPO DE ESTADÍSTICA

SEGUNDA PARTE

TEORÍA DE LA ESTADÍSTICA

TOMO I

ESTADÌSTICA ANALÌTICA

PRIMERA EDICIÓN

CÓRDOBA

IMPRENTA Y LIBRERÍA DEL «DIARIO»

Letrados 18 y San Fernando 34

1899

SEGUNDA PARTE

TOMO I

ESTADÍSTICA ANALÍTICA

L' emploi du calcul es comparable à celui d' un instrument dent on cennait exactement la precision.

FOURIER.

On deit tendre avec efort à l' infaillibilité sans y pretandre.

MALEBRANCHE.

CAPÌTULO I

ESTÁTICA.—GENERALIDADES

SUMARIO.—Plan general de esta parte.—De la medida de las magnitudes.—De la medida de los hechos sociales.—Otras medidas inexactas de los hechos sociales.—Ejemplos.

112. Hemos definido la Estadística diciendo que es la ciencia que tiene por objeto aplicar las leyes de la cantidad á los hechos sociales para medir su intensidad, deducir las leyes que los rigen y hacer su predicción próxima; hemos establecido su división en Teórica y Aplicada y finalmente hemos considerado cada una de estas partes subdividida en otras dos que son: Estática y Dinámica; la primera, que nos enseña á medir las causas, considerando á los hechos invariables, y la segunda que se ocupa de medir las variaciones de los mismos en el transcurso del tiempo, del espacio y de la extensión; por lo tanto el primer punto que debemos tratar será el de la medida de las causas y el segundo el de la medida de las variaciones de los hechos: pero como la medida de los hechos es solo una aplicación de la teoría matemática que trata de la *medida de las magnitudes*, nos será conveniente recordar aquellos principios para aplicarlos, así como también nos será conveniente establecer los principios generales de los valores medios, puesto que el promedio de

varios valores es el valor más probable de la cantidad que se quiere medir.

Ahora bien, los hechos sociales son producidos por dos clases de fuerzas: directas y reflejas, cuya estática y dinámica son diferentes, por lo que debemos ocuparnos de ellas separadamente.

Por otra parte las fuerzas sociales ya hemos dicho que provienen de los tres elementos *Población, Territorio* y *Estado*, y por lo tanto no solo deberemos estudiarlas y medirlas en abstracto, sino también como formando parte de dichos elementos.

La Estadística, como todas las ciencias de observación, emplea para descubrir las leyes de los hechos de que se ocupa, las dos formas del raciocinio, análisis y síntesis, cuyo algorítono principal es el cálculo para el primero y la representación geométrica para el segundo.

113. Resumiendo, pues, cuanto llevamos dicho, se deduce que esta segunda parte la debemos subdividir en dos: una, en la que expondremos la Teoría Estadística en su forma algebráica, que llamaremos *Estadística Analítica,* y otra, que denominaremos *Estadística Gráfica*. La primera se subdividirá en cuatro teorías, que se titularán: *Teoría general*, *Teoría de la población, Teoría del territorio* y *Teoría del Estado*. En cada una de estas teorías estudiaremos la Estática y Dinámica de las fuerzas de que se ocupan, comprendiendo los puntos que se expresan en el siguiente estado:

- Teoría general.
  - Estática.
    - Medida de las magnitudes.
    - Valores medios.
    - Medida de las fuerzas directas.
    - Medida de las fuerzas reflejas.
  - Dinámica.
    - Variaciones de los hechos producidos por fuerzas directas en el
      - Tiempo.
      - Espacio.
      - Extensión.
    - Variaciones de los hechos producidos por fuerzas reflejas.
  - Investigación de las causas de los hechos.
- Población.
  - Estática.
    - Población en general
    - Natalidad.
    - Mortalidad.
    - Nupcialidad.
    - Migraciones.
  - Dinámica.
    - Población en general.
    - Natalidad.
    - Mortalidad.
      - Leyes.
      - Tablas.
      - Aplicaciones.
      - Refutación de la teoría de Malthus.
    - Nupcialidad.
    - Migraciones.
- Territorio.
  - Estática.
    - Extensión.
    - Divisiones.
    - Obras.
  - Dinámica. Las mismas agrupaciones.
- Estado.
  - Estática.
    - Medios de existencia.
      - Riqueza.
      - Rentas.
      - Crédito.
    - Medios de coexistencia.
      - Religión.
      - Instrucción.
      - Justicia.
      - Comunicaciones.
      - Comercio.
      - Transportes.
      - Consumo.
      - Bancos, Cajas y Montes de piedad.
    - Medios de defensa.
      - Terrestres.
      - Marítimos.
  - Dinámica. Las mismas agrupaciones.

114. Sabiendo que medir una magnitud es compararla con otra de la misma especie arbitraria, pero conocida, que se toma por *unidad* y que el resultado de dicha comparación se llama *medida*, cuya expresión es un número, vamos á ocuparnos de los procedimientos que pueden seguirse para medir las magnitudes.

Distinguiremos tres clases de magnitudes: 1.ª Magnitudes *discretas*, compuestas de partes iguales, independientes é indivisibles, como, por ejemplo, un ejército, en cuyo caso la unidad queda determinada porque no puede ser otra que uno de los objetos ó indivíduos ó una reunión de los mismos; denominándose la primera *unidad natural* ó simple y la segunda *colectiva ó compuesta*. La medida de las magnitudes de esta naturaleza no ofrece ninguna dificultad teórica, pues basta *contar* el número de indivíduos ó de grupos que la constituyen. 2.ª Magnitudes *contínuas sobre las cuales pueda ser aplicada la unidad elegida*, que en este caso es arbitraria. La medida de estas magnitudes se obtiene contando el número de veces que se ha aplicado sobre ellas la unidad y el número de partes alícuotas que contenga el resto si lo hay. 3.ª Magnitudes *contínuas sobre las cuales no es posible aplicar la unidad*. Su medida ofrece dificultades, que se salvan facilmente sustituyendo la magnitud considerada por otra que le sea proporcional y cuya medida directa pueda determinarse; así, por ejemplo, la medida del tiempo se halla por la del espacio recorrido por un movil con movimiento uniforme, puesto que, según sabemos, en dicho movimiento los espacios recorridos son proporcionales á los tiempos empleados en recorrerlos; la medida del calor se sustituye por la de la dilatación de un cuerpo, pues sabemos que dentro de ciertos límites la dilatación es proporcional al calor recibido. La medida hallada de esta manera se llama *indirecta*.

115. La medida de las fuerzas y por consiguiente de las causas que producen los hechos sociales está fundada en el siguiente

Teorema.—La intensidad de la causa ó fuerza que produce un hecho social es directamente proporcional á la magnitud de este hecho é inversamente proporcional á la magnitud sobre la cual se ejerce.—En efecto, no conociendo la magnitud de las fuerzas más que por sus efectos, decimos que una fuerza es doble de otra cuando sus efectos están en la relación de dos á uno; si dada la expresión del hecho en función de la causa, suponemos que aquel permanece invariable, para una causa 2A deberá corresponder una magnitud $\frac{C}{2}$.

$$\frac{C}{2}\cdot 2A=H.$$

Corolario.—La expresión de la constante de la causa será $A=\frac{H}{C}$. También puede deducirse dicha expresión directamente de la fórmula $CA=H$ de donde $A=\frac{H}{C}$. La consideración de que toda cantidad es igual á su medida multiplicada por su unidad, nos dice también que A debe ser la medida de H cuando C se tome por unidad. (1)

116. Las magnitudes H y C son discretas, en general, y por lo tanto su medida se reduce á contar el número de objetos ó indivíduos que las forman; cuando suceda lo contrario sus medidas se determinarán según la teoría general que hemos expuesto.

117. En muchos casos no es fácil determinar la magnitud C sobre la cual se ejerce la fuerza y suele medirse el hecho considerándolo proporcional á uno de sus tres elementos; espacio, extensión ó tiempo; obteniéndose así evaluaciones que no son verdaderas medidas; pero que á falta de otras

(1) La palabra unidad suele reservarse solo para la medición de las magnitudes discretas, designándose en los demás casos y en general la magnitud que sirve para medir otras por *módulo*.

nos dan una cierta idea más ó menos aproximada de la magnitud del mismo.

118. *Ejemplos.*—1.° La población de un país se mide con relación á su territorio denominándose esta medida *población por kilómetro cuadrado,* (ó en general por unidad superficial), su fórmula será $k = \frac{H}{a}$. 2.° La medida de la mortalidad por edades se hallaba en las primeras tablas construidas comparando los indivíduos fallecidos de cada edad con el número total de los fallecidos. 3.° El crecimiento de la población de un pais según los datos de dos censos suele determinarse, de una manera elemental, relacionando su diferencia con la población del primer censo y con el número de años transcurridos de uno á otro; su fórmula será $k = \frac{H}{bt}$.

Como veremos mas adelante estas medidas no son las verdaderas de los hechos considerados; la primera se acepta porque se carece de otro elemento mas directo con quien podamos relacionar la población de un pais; pero las otras dos son rechazadas por la ciencia por no cumplir con las condiciones debidas, pues la mortalidad en cualquier edad debe medirse relacionando el número de fallecidos con el número de indivíduos de la misma edad, que son los que han originado aquellas defunciones, y el crecimiento de una población no es proporcional al tiempo.

119. *Equivalencia mecánica de los hechos sociales.*—Los hechos sociales son los efectos de fuerzas que obran sobre la masa social; equivalen por lo tanto á lo que en mecánica se conoce por *cantidad de movimiento.* Siendo la cantidad de movimiento M igual á la masa m por la velocidad v quedará determinada esta última y por lo tanto la fuerza, dividiendo M por m. Esto mismo se hace en Estadística; se divide el valor H del hecho por la masa social sobre la cual obra la fuerza.

CAPÌTULO II

ESTÁTICA.—DE LOS VALORES MEDIOS.

SUMARIO.—Definición general.—De la media aritmética.—De la media aritmética general ó promedio estadístico.—Representación geométrica de los valores medios.—Curva de probabilidad.—Cálculo del valor de π.—Equivalencia mecánica de los promedios.

120. *Definición.*—Se denomina *promedio ó valor medio* de otros varios á un valor tal que sustituído en lugar de cada uno de los de los demás y ejecutadas las operaciones indicadas nos dé un resultado igual al de los números considerados. Como las operaciones fundamentales de composición son dos solamente, pues la elevación á potencias es solo un caso particular de la multiplicación, se comprende que solo existirán dos *valores medios*, que son: la *media aritmética* y la *media geométrica.*

121. Se llama *media aritmética* al valor medio de varios sumandos. Según esta definición su valor será

$$(1) \quad a+b+c+\ldots\ldots=m+m+\ldots\ldots$$

$$\text{de donde} \quad m=\frac{a+b+c+\ldots\ldots}{n}.$$

Así, pues, la *media aritmética se halla dividiendo la suma de las cantidades consideradas por su número.*

122. *Consecuencias.*—1.ª De la igualdad (1) se deduce $(m-a)+(m-b)+(m-c)+\ldots\ldots=0$ es decir, que si del

valor hallado restamos cada uno de los números considerados, la suma de las diferencias positivas es igual á la de las negativas.—2.ª Si *a*, *b*, *c*, ... nos representan valores de una misma magnitud, ya sabemos que su valor más probable será la media aritmética y, en virtud de las fórmulas expuestas, podremos calcular su grado de aproximacion y su peso.—3.ª Si suponemos iguales algunas de estas cantidades, por ejemplo, que m sean iguales á *a*, n á *b*, r á *c*, etc., tendremos:

$$\mathrm{ma}+\mathrm{nb}+\mathrm{rc}+\ldots\ldots=\mathrm{p}+\mathrm{p}+\mathrm{p}+\ldots\ldots=\mathrm{p}(\mathrm{m}+\mathrm{n}+\mathrm{r}+\ldots\ldots)$$

$$\text{de donde}\quad \mathrm{p}=\frac{\mathrm{ma}+\mathrm{nb}+\mathrm{rc}+\ldots\ldots}{\mathrm{m}+\mathrm{n}+\mathrm{r}+\ldots\ldots}.$$

4.ª Si consideramos á la cantidad a como el promedio de *m* cantidades a_1, a_2, a_3, ..., la b como el de las *n*, b_1, b_2, b_3, ..., etc., el valor hallado viene á ser el valor más probable de varias cantidades de distintos pesos, puesto que m, n, r, ... son los pesos de cada valor.

123. Vamos, ahora, á generalizar este valor para cantidades cualesquiera por medio del siguiente

Teorema.—Si se tienen varias magnitudes diferentes, medidas con unidades también diferentes, (aunque todas han de ser de la misma especie) el valor medio de la magnitud media se obtendrá dividiendo su suma por la de sus unidades. En efecto, recordando que toda magnitud es igual á su unidad, multiplicada por su medida, podemos establecer las siguientes igualdades, siendo K el número de dichas magnitudes.

$$\left.\begin{array}{l} M_1=\mathrm{m.a}\\ M_2=\mathrm{n.b}\\ M_3=\mathrm{r.c}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\begin{array}{l} \dfrac{M_1+M_2+M_3+\ldots\ldots}{K}=\dfrac{\mathrm{mp}+\mathrm{np}+\mathrm{rp}+\ldots\ldots}{K}\\ M_1+M_2+M_3+\ldots\ldots=\mathrm{mp}+\mathrm{np}+\mathrm{rp}+\ldots\ldots\\ \qquad=\mathrm{p}(\mathrm{m}+\mathrm{n}+\mathrm{r}+\ldots\ldots) \end{array}$$

$$\mathrm{p}=\frac{M_1+M_2+M_8+\ldots\ldots}{\mathrm{m}+\mathrm{n}+\mathrm{r}+\ldots\ldots}=\frac{\mathrm{ma}+\mathrm{nb}+\mathrm{rc}+\ldots\ldots}{\mathrm{m}+\mathrm{n}+\mathrm{r}+\ldots\ldots}.$$

124. *Consecuencia.*—La igualdad $M_1=m.a$ nos indica que *m* está contenida *a* veces en la magnitud M_1; si suponemos evaluada *m* con relación á una nueva unidad de órden inferior, estará entonces expresada por un número y podremos suponer inversamente á M_1 igual á *m* veces *a*, siendo entonces *m* el peso de la medida *a* y por lo tanto *p* será entonces el valor mas probable de una magnitud, deducido de otras de diferentes pesos. A este valor lo denominaremos *promedio general, media general* y tambien *media ó promedio estadístico,* pues siendo el carácter distintivo de los hechos sociales la *variabilidad* se adopta, en general, como valor mas probable de varios del mismo hecho. Damos el nombre de *media* ó *promedio general* al valor *p* porque es aplicable á todos los casos que pueden presentarse. En efecto, si suponemos $m=n=r=.\,...=1$.

$$p=\frac{a+b+c+.....}{K}.$$

125. Vamos ahora á examinar las alteraciones que pueda experimentar la media aritmética. Partamos del valor general *p* y consideremos una nueva magnitud $\frac{h}{1}$; siendo *p* una fraccion, el nuevo valor estará comprendido entre los de p y $\frac{h}{s}$ si $\frac{h}{s}>p$ el nuevo valor p_1 será mayor que p; y si $\frac{h}{s}<p$ $p_1<p$. En el caso particular de la media aritmética sucederá lo mismo; si $h>m$ será $m_1>m$ y si $h<m$, $m_1>m$.

126. Se llama media geométrica al valor medio de varios factores. Su expresión será

$$a.b.c.......=g.g.g....... \text{ de donde } a.b.c.......=g^n$$

$$\text{y} \quad g=\sqrt[n]{a.b.c.......}$$

Así, pues, la media geométrica de varias cantidades es igual á la raiz de índice igual al número de factores, del producto de dichas cantidades.

127. Veamos ahora la representación geométrica de estos valores. Empecemos por el caso más sencillo de la media aritmética. (1) Como en este caso todas las magnitudes se suponen evaluadas con relación á la misma unidad, cada sumando se representará por una variable independiente y su suma por diferentes ordenadas á distancias iguales, ó mejor dicho por el área descrita por las posiciones sucesivas de la ordenada. Suponiéndolas muy próximas y siendo la unidad el intérvalo entre cada dos abcisas, el área de la curva formada podemos reducirla á la de un rectángulo, uno de cuyos lados será *n* número de valores y el otro deberá ser *m*, puesto que $m.n=a+b+c+.....=$área.

En el caso general, como las unidades son diferentes, las ordenadas se encontrarán á distancias desiguales, proporcionales á dichas unidades y sustituyendo, en vez del área dada, la de un rectángulo, cuya base sea $m+n+r+....$ la otra dimensión será igual á p puesto que

$$(m+n+r+.....)\ p=M_1+M_2+.....=\text{área}.$$

128. Tomemos ahora por abcisas los valores de las cantidades a, b, c,..... y el valor m del promedio, las diferencias m-a, m-b, m-c,.... serán los errores. Supongamos ahora trazadas por los extremos de las abcisas a, b, c, ... ordenadas cuyos valores sean los productos de cada error por el número de veces que se presenta, uniendo sus extremos se formará una curva que se llama *curva de la probabilidad* y cuya área está representada por la integral

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\ S e^{-h^2x^2}.dx$$

haciéndola igual á la de un rectángulo cuya base sea la dis-

---

(1) Aunque estas representaciones geométricas corresponden á la Estadística Gráfica, la mejor exposición exige que sean hechas en esta parte.

tancia entre las dos ordenadas extremas, su altura será igual á la ordenada media que será el valor de la probabilidad media y el valor de la abcisa correspondiente, será el de xp.

Si tomamos como eje de las ordenadas el valor Y de la probabilidad máxima, la función

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2x^2}$$

estará representada por una curva simétrica con relación á dicho eje, y de la cual será asíntota el eje de las xx', pues se hace cero cuando $x=\pm\infty$. Cuando $x=0$ entonces toma la función su valor máximo. Anulándose su segunda derivada para el valor $x=\pm\frac{1}{h\sqrt{2}}$, su primera derivada será creciente para todos los valores de x desde $-\infty$ hasta $-\frac{1}{h\sqrt{2}}$ y desde $+\infty$ hasta $+\frac{1}{h\sqrt{2}}$ y decreciente para todos los valores de x comprendidos entre $-\frac{1}{h\sqrt{2}}$ ó $+\frac{1}{h\sqrt{2}}$ y cero, anulándose para x igual á cero ó á mas ó menos infinito.

129. Una de las mas notables aplicaciones que nos ofrece el cálculo de las separaciones medias es la determinación del valor de π. Si determinamos el valor mas probable de una magnitud deducido de otras varias en número suficiente, calculamos las separaciones de cada una de este valor medio y las agrupamós según la magnitud de dichas separaciones, podremos formar así la curva de probabilidad. Ahora, bien, para la probabilidad media,

$$S(e^{-h^2x^2} \cdot d\, x)=\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{1}{h}$$

y como el valor de la función es entonces la cuarta parte del área de la curva, se tiene, llamando M á dicha área, que

$$M = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{1}{h} \quad \text{de donde} \quad \sqrt{\pi} = 4M.h = \frac{4M}{\sqrt{2mpq}}$$

El valor de p es la probabilidad del promedio y el de m será el promedio del número total de hechos.

130. *Ejemplo.*—Según los datos publicados por el Instituto Geográfico y Estadístico el promedio del número de nacimientos por cada 100 habitantes durante los años 1886-92 fué de 3'62, hallando las diferencias entre dicho valor y el de cada una de las provincias, formamos los grupos siguientes:

Se diferencian de 0 á 9 céntimos 10.—De 10 á 19 céntimos 9.—De 20 á 29 céntimos 5.—De 30 á 39 céntimos 4.—De 40 á 49 céntimos 10.—De 50 á 59 céntimos 5.—De 60 á 69 céntimos 3.—De 70 á 79 céntimos 2.—De 80 á 90 céntimos 1. El valor de $p=0,036$, el de $q=0,964$, el de $m = \frac{4.451,543}{49}$ y por lo tanto $\sqrt{2mpq} = 33'4$, $M=14'5$ y $\pi=3'013$.

Si en vez de haber considerado las provincias hubiéramos tenido en cuenta los partidos judiciales, el cálculo hubiera sido mas penoso, pero el valor de π que obtuviéramos seria mas aproximado.

131. *Equivalencia mecánica de los promedios.*—Sabemos que la determinación de los centros de gravedad se funda en la teoría de la determinación de los centros de distancias proporcionales ó medias, pues la Mecánica nos demuestra que: *Si se tiene un sistema de fuerzas paralelas obrando cada una sobre un punto, el de aplicación de la resultante coincide con el centro de distancias proporcionales de los expresados puntos, afectados de coeficientes proporcionales á las intensidades de las respectivas fuerzas.*

Vamos ahora á determinar los centros de distancias proporcionales. Supongamos una recta A B, sea a b su proyección, Aa y Bb serán sus proyectantes, (la sencillez de la figura nos releva de hacer su dibujo) y sean m_1 y m_2 dos fuerzas que obran sobre los puntos A y B; queremos hallar un punto G tal que se verifique la relación

$$-\frac{GA}{GB}=\frac{m_2}{m_1}.$$

Sabemos que sobre la recta AB existe un punto y solo uno que la divida en la relación $\frac{m_2}{m_1}$. Sea G el punto buscado, trazando una paralela á ab y llamando z_1 y z_2 á las ordenadas de A y B, los triángulos AGA_1 y BGA_1 dan

$$\frac{z_1-z}{z-z_2}=-\frac{AG}{BG}=\frac{m_2}{m_1}$$

de donde $m_1 z_1 - m_1 z = m_2 z - m_2 z_2$ ó bien

$$z(m_1+m_2)=m_1 z_1+m_2 z_2 \quad y \quad z=\frac{m_1 z_1+m_2 z_2}{m_1+m_2}$$

Si en vez de ser dos los puntos fuesen varios, uniendo los dos primeros obtendriamos así el valor de Z_0; uniendo este G_0 con otro punto tal como C, obtendríamos el valor de Z_1 que será $Z_1(M_0+m_3)=Z_1M_0+z_3m_3$ y como

$$M_0=m_1+m_2 \quad y \quad Z_1M_0=m_1z_1+m_2z_2$$

se tendrá $Z_1(m_1+m_2+m_3)=m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3$ de donde

$$Z_1=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3}$$

Haciendo ahora $(m_1+m_2+m_3)=M_1$ y combinando el punto hallado G_1 con otro D obtendríamos asi el valor de Z_3; de modo que en general

$$Z_n=\frac{m_1 z_1+m_2 z_2+.....}{m_1+m_2+.....}$$

Representando la suma $m_1 z_1+m_2 z_2+......$ por $S.(m.z)$ y $m_1+m_2+.....$ por $S(m)$ la fórmula anterior se representa abreviadamente por

$$Z_n=\frac{S(m.z)}{S(m)}$$

132. Si las ordenadas z_1, z_2, ... nos representan la magnitud de las fuerzas aplicadas en los puntos A, B, C, ... los productos BG.z nos representan los momentos de dichas fuerzas, y si hacemos que se correspondan la unidad de representación de las líneas con la de las fuerzas, dicho momento podrá ser también representado por la cantidad $m_1 z_1$. En virtud de esta correlación resulta que Z_n.S(m) será el momento de la resultante y Z_n el valor de la misma. Podemos, pues, establecer que *el promedio es el valor de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas.*

Las cantidades $m_1 z_1$ nos miden el valor del esfuerzo de cada una de las fuerzas y representándolo por X *el valor de cada fuerza resulta igual á su esfuerzo medido con relación á la cantidad m.* Tambien podemos decir que *el valor de la resultante se mide con una unidad igual á la suma de las unidades de todas las fuerzas.*

Si suponemos $m_1 = m_2 = m_3 = ... = m_n$ entonces

$$S(m) = m.n \qquad S(m.z) = m\,(z_1 + z_2 + z_3 + ...)$$

$$\text{y}\quad Z_n = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + ...}{n}.$$

Así, pués, en el caso particular de que todas las fuerzas estén medidas con relación á la misma unidad *el valor de la resultante con relación á dicha unidad, será igual á la media aritmética de las componentes.*

133. Todo lo expuesto se aplica á la teoría mecánica de los centros de gravedad ó de inercia, en la cual se llama peso de un cuerpo al producto de su masa por la gravedad. La masa se representa por $M = m_1 + m_2 + ...$ y el peso por Mg. Suponiendo el cuerpo homogéneo $M = m.n$ y $Mg = mg.n$ cuya cantidad tiene por medida *n* tomando por unidad m. g. Así, pues, *el peso de un cuerpo estará representado por el número de sus moléculas tomando por unidad el peso de una de ellas.* En los hechos sociales el esfuerzo del promedio es Z.S(m) y si todas las cantidades m

son iguales $Z.S(m) = Z.m.n$ cuya medida es n si se toma á mz por unidad; por lo tanto el número de observaciones que dan origen á un promedio representa una cantidad análoga al peso de su cuerpo, de aquí el nombre de *peso del promedio* que se dá á dicha cantidad n.

CAPÌTULO III

ESTÁTICA.—MEDIDA DE LAS FUERZAS DIRECTAS.

SUMARIO.—Clasificación de las fuerzas que producen los hechos sociales.—Expresiones de los hechos en función de sus causas.—Hechos producidos por una sola causa.—Su medida.—Separaciones probables.—Tabla de las separaciones probables de centésima en centésima para los valores de p=0 á p=0'50.—Valor más probable de la causa deducido de otros varios.—Hechos homogéneos.—Hechos hemotéticos.—Hechos semejantes.—Hechos análogos.—Hechos heterogéneos.—Hechos producidos por varias causas.—Indeterminación de las medidas de las causas conociendo las de los hechos.—Su explicación y manera de hacerla desaparecer.

134. Según sabemos, las fuerzas que producen los hechos sociales se clasifican en exteriores é interiores y cada uno de estos grupos se subdivide en mecánicas y espirituales; pero para los fines de su evaluación nos es preciso hacer una nueva clasificación considerándolas en dos grupos principales: fuerzas que producen efectos directos, que abreviadamente denominaremos *fuerzas directas*, y fuerzas que solo producen efectos reflejos por su influencia sobre las directas y que denominaremos abreviadamente *fuerzas reflejas.*

135. Empezaremos por establecer la fórmula de un hecho en función de sus causas. Distinguiremos tres casos: que el hecho sea producido por una sola causa, que lo sea por dos y que lo sea por tres ó más. En el primer caso su expresión

será $H = f(A)$; en el segundo si las causas son A y B, $H = f_1(A) + f_2(B) + f_3(A, B)$, si la fuerza B es refleja entonces $f_2(B) = 0$ y $H = f_1(A) + f_3(A, B)$; en general el hecho producido por varias causas A, B, C, ... tendrá por expresión

$$H = Sf_1(A) + Sf_2(A, B) + ... + f_n(A, B, C, ...)$$

136. Nuestro primer trabajo será determinar la forma de cada una de estas funciones para poder deducir de ellas los valores de $A = F(a)$.

Si el hecho es producido solamente por una fuerza ó causa A su expresión matemática será (13.) $H = CA$ de donde $A = \frac{H}{C}$. El valor de H ya sabemos como debe medirse, y C será la magnitud sobre la cual obra la fuerza; por lo tanto la expresión de A será la medida de la probabilidad del hecho (51). Sustituyendo en vez de A su valor en el de H se tiene que $H = \frac{H}{C} . C$, y de aquí el nombre de *coeficiente* que se le dá al valor de A; debemos hacer observar que algunas veces suele darse el nombre de coeficiente á la fracción inversa, considerándola como un factor que multiplicado por H nos dé el valor de C, fácilmente se vé la falta de lógica al aplicar dicha denominación á este último valor.

137. Si las causas de los hechos sociales fueran necesarias, nada más tendríamos que decir y la relación hallada nos daría la ley del hecho; pero como sabemos que estas causas son contingentes existen casos en que ofrece dudas la realización y por lo tanto la cantidad H puede sufrir variaciones en su valor sin que la causa A las tenga, y nos conviene determinar el *valor probable* de dichas variaciones, para en los casos en que sea mayor examinar detenidamente si la causa ha sufrido ó nó variación en su intensidad ó si una nueva causa ha venido á perturbar la producción de los hechos que origina la primera.

Sea p la probabilidad de H que por definición estará ligada con A por la relación A=p, llamemos q á la probabilidad del hecho contrario, cuyo valor será

$$q=1-p=1-\frac{H}{C}=\frac{C-H}{C}.$$

Representando C la medida de la magnitud sobre la cual se ejerce la fuerza, se tiene que sobre C unidades la combinación más probable de los efectos de las dos fuerzas será (Cp, Cq), es decir que como sabemos que el número de hechos realizados H será igual á Cp el de no realizados será C—H=C—Cp=C(1—p)=Cq. La probabilidad de esta combinación estará dada por la expresión

$$P=\frac{1}{\sqrt{2\pi Cpq}}$$

y el valor de la separación más probable será

$$xp=0{,}47693\sqrt{2Cpq}$$

Así, pues, la expresión de un hecho producido por una sola causa consta de dos partes una dependiente solo de la causa A que lo produce y otra dependiente de dicha causa y de la del hecho contrario

$$H=f(A)=Cp\pm 0{,}47693\sqrt{2Cpq}$$

Consecuencia.—Si examinamos varios valores aislados de una misma causa puede considerarse á esta invariable, siempre que aquellos difieran en cantidades inferiores á xp.

138. Con el objeto de facilitar los cálculos, presentamos á continuación una tabla de los valores de xp para los de p de centésima en centésima desde p=0 á p=0'50, tomando por unidad á $\sqrt{C}$

Valores de		Valores de		Valores de		Volores de	
p	xp	p	xp	p	xp	p	xp
1	0,0648	16	0,2395	31	0,3024	46	0,3259
2	0,0916	17	0,2428	32	50	47	66
3	0,1113	18	0,2513	33	76	48	69
4	0,1244	19	66	34	0,3102	49	71
5	0,1440	20	0,2618	35	22	50	72
6	0,1551	21	64	36	42		
7	0,1669	22	0,2710	37	61		
8	0,1774	23	55	38	74		
9	0,1872	24	95	39	94		
10	0,1963	25	0,2834	40	0,3207		
11	0,2042	26	73	41	20		
12	0,2127	27	0,2906	42	33		
13	99	28	39	43	40		
14	0,2271	29	71	44	46		
15	0,2310	30	98	45	53		

139. Si en vez de hallar un solo valor para A, deducimos varios, estos, en general, no serán iguales y diferirán en cantidades inferiores á $\frac{xP}{C}$. ; para obtener el valor mas probable de A por medio del cálculo deberemos distinguir varios casos.

140. Si los hechos son homogéneos, fundándonos en lo dicho en la Teoría de probabilidades, el valor mas probable de A será la media aritmética de todos ellos.

141. Si los hechos se manifiestan en distintos tiempos pero todos están referidos á la misma unidad de este elemento, y las causas ó fuerzas se suponen invariables en el periodo considerado, distinguiremos dos casos; que la cantidad con relación á la cual se miden sea invariable y que no lo sea. En el primero el valor buscado será la media aritmética y en el segundo, como los valores se hallan medidos con

diferentes unidades, su valor mas probable será como sabemos

$$P=\frac{\frac{H_1}{C_1}\cdot C_1+\frac{H_2}{C_2}\cdot C_2+\ldots\ldots}{C_1+C_2+\ldots\ldots}=\frac{H_1+H_2+\ldots\ldots}{C_1+C_2+\ldots\ldots}$$

Tambien puede ponerse el valor de p bajo la forma generalmente usada de

$$P=\frac{S\,(H):n}{S\,(C):n}$$

Una vez hallado este valor, su precisión, sus errores medio y probable y su peso se determinarán por las fórmulas ya conocidas (76).

142. Si los hechos son semejantes, es decir, se verifican en diferentes lugares teniendo iguales las demás circunstancias de extensión y tiempo y queremos determinar el valor correspondiente al espacio total en que aquellos se verifican, el problema no es ya el mismo, pues lo que ahora se pide hallar es real y verdaderamente el valor de un hecho nuevo; pero según sabemos es tambien aplicable á este caso el *promedio general* puesto que lo que se trata de determinar es el *valor medio* de una *magnitud media*. Ejemplo: Si tratamos de hallar el valor de la mortalidad en España conociendo el que tiene en cada provincia no tomaremos la media aritmética de todos ellos sino que dividiremos el número total de defunciones por el de la población.

143. Si los hechos son análogos, es decir, si las medidas tomadas se refieren á diferente espacio y á diferente tiempo, no serán comparables sino cuando los tiempos sean tan próximos que no sea de temer una variación en la intensidad de las causas y entonces podemos sin error sensible considerar á los hechos como semejantes; pero siempre que se combinen datos de esta clase no solo deberá manifestarse sino que además será preciso poner de relieve las razones que á ello nos obliguen: Ejemplo: Si conocemos las cifras de las defun-

ciones y de la población de varias provincias de España con relación á los años de 1890 al 95 y los mismos datos de las restantes pero con referencia al periodo de 1892 al 97 podríamos, cometiendo un error muy pequeño, considerarlas como contemporáneas y hallar la cifra de la mortalidad de España.

144. Finalmente si los hechos son heterogéneos, es decir, tienen diferente extensión, para combinarlos, será preciso reducirlos á la misma unidad de este elemento, lo cual no siempre es fácil ni posible. Distinguiremos dos casos; que teniendo diferente extensión tengan el mismo espacio y el mismo tiempo, y que no tengan iguales estos elementos. En el primer caso su reducción á la misma unidad de extensión puede hacerse mediante una sencilla proporción

$$\frac{e_1}{e} = \frac{H_1}{x} \qquad x = H_1 \cdot \frac{e}{e_1}.$$

En el segundo caso, si el elemento variable fuese solo el tiempo, y puede suponerse que tal variación no influye sensiblemente en la intensidad de las fuerzas que producen el hecho, es aplicable la misma proporción. Si el elemento variable es el espacio, para hacer la reducción necesitaremos no solo hacer uso de la proporción anterior sino tambien modificar el valor de x según la ley de su variación, con relación al espacio, que debe ser conocida. En general, podemos decir que estas transformaciones, sobre ser pocas veces posibles, casi siempre son erróneas y solo deben practicarse cuando en absoluto se carezca de datos directos y los errores se hallen comprendidos en límites admisibles, debiendo ser precedidas de una razonada exposición, y no deduciendo de los datos así obtenidos consecuencias teóricas, sino prácticas. Ejemplos: 1.° El ejemplo de esta clase célebre en la histório de la Estadística, es la evaluación hecha por Lavoissier de la extensión de las tierras cultivadas en Francia, por medio del número de arados. Necesariamente debia resultar inexacta, pues aunque dentro de cada *comun* ó municipio fuese posible hacer dicha evaluación con una exactitud relativa, con solo conocer la extensión de ciertas fincas y el número de arados empleados en cada una y en todo el término, la generalización de este valor á Francia entera debia de dar un error grande, puesto que no se tenia en cuenta su variación. 2.° Para la formación de los amillaramientos se sigue el procedimiento expuesto con la mas rigurosa exactitud científica. Se eligen varias parcelas de la misma clase, que aunque situadas dentro de un mismo término, estén en circunstancias diferentes, se hallan directamente los rendimientos y los gastos de cada una, se deduce el rendimiento y gasto medio por hectárea y valiéndose de una fórmula se deduce el *producto líquido*; estos valores se generalizan á todas las fincas del término, que sean de la misma clase, y como es muy difícil hallar la variación del *producto líquido* de uno á otro término lo que se hace es repetir la operación para cada uno. 3.° Conocemos las cifras de defunciones de la provincia de Córdoba y de España durante el periodo de 1878-88, que son respectivamente 13,519 y 540,800, la del periodo de 1886-92 de la provincia de Córdoba y deseamos evaluar la de toda España. La proporción

$$\frac{540{,}800}{13{,}519}=\frac{x}{13{,}834}$$

nos dá para x el valor 553,238; como el verdadero es 550,787 el error cometido en la medida de la mortalidad será en absoluto menor que 0,005 ó sea que 0,5 por cada 100 habitantes, cuyo error es bastante grande para no ser admitido en una evaluación delicada.

145. Evidentemente la expresión general del hecho H producido por dos fuerzas A y B será

$$H = f_1 (A) + f_2 (B) + f_3 (A, B).$$

Determinemos la forma de cada una de estas funciones. Suponiendo que la fuerza A obre sola, la expresión de su efecto será $H_a = C_1 . A$; pero al obrar en combinación con la B su efecto estará modificado en una cierta cantidad *m* mayor que la unidad, pues aunque A sea la causa determinante, la magnitud C recibe el doble efecto de las fuerzas A y B; de modo que el número de hechos debidos á cada una debe ser mayor que si obrasen solas, por lo tanto

$$f_1 (A) = m\, C_1\, A$$

Lo mismo podemos decir de f_2 (B) cuya expresión será

$$f_2 (B) = n\, C\, A$$

Llamando, ahora, A_1 y B_1 á las causas contrarias á A y B y sabiendo que el aumento que experimentan los hechos debidos á la causa A deben provenir de todos aquellos en que la causa B se há ejercido sin dar mas que un resultado *latente*, que serán

$$C_2 - H_b = C_2 - C_2 . B = C_2 (1-B)$$

podemos suponer á *m* de la forma

$m = C_2 (1-B) = C_2\, B_1$ y de la misma manera $n = C_1\, A_1$ de donde $f_1 (A) = C_2\, B_1\, C_1\, A$ y $f_2 (B) = C_1\, A_1\, C_2\, B$.

Ahora, las fuerzas A y B reunidas así como las $A_1 . B$ y $B_1 . A$ ejercen sus esfuerzos sobre la cantidad C; de modo que

$$f_3 (A, B) = C. A. B \qquad C_2 . C_1 = C$$

$$\text{y} \quad H = C. A. B_1 + C. A_1 . B + C. A. B$$

de donde $\frac{H}{C} = A. B_1 + A_1 . B + A. B$

Esta fórmula traducida al lenguage vulgar nos dice *que la medida de un hecho producido por dos causas A y B tiene por expresión la suma de los productos de cada causa por la contraria de la otra y el de estas dos causas.*

Este teorema puede deducirse facilmente de lo explicado en la Teoría de probabilidades. En efecto, la media del hecho H que puede ser producido por dos causas A y B, ó sea su probabilidad, será igual á la suma de sus probabilidades en cada uno de los grupos que pueden formarse, es decir, en cada una de las diversas combinaciones que pueden establecerse entre las dos causas. Si las fuerzas son ambas directas, que es el caso mas general, las combinaciones pueden ser que el hecho sea debido á la fuerza A y no á la B, que sea á la B y no á la A y que sea debido á ambas; por lo tanto

$$\frac{H}{C} = A.\, B_1 + B.\, A_1 + A.\, B$$

Según sabemos (76) el error medio de $\frac{H}{C}$ será

$$e = \sqrt{e'^2 + e''^2} \quad \text{y su peso} \quad P = \frac{P'.\, P''}{P' + P''}$$

Si ahora suponemos el caso general de un hecho H producido por n causas A, B, C, ... L su expresión será

$$H = S\, f_1\, (A) + S.\, f_2\, (A, B) + \ldots\ldots + f_n\, (A, B, C, \ldots\, L)$$

y en virtud de las consideraciones ya expuestas la de su medida será

$$\frac{H}{C} = S\, (A,.\, B_1\, .\, C_1\, .\, \ldots\ldots\, L_1) + S\, (A.\, B.\, C_1\, \ldots\ldots\, L_1)$$
$$+ \ldots\ldots + A.\, B.\, C.\, \ldots\ldots\, L.$$

146. En el primer caso, cuando el hecho era producido por una sola causa, dado el valor del hecho se deducía el de su causa y, recíprocamente, dado el valor de la causa se conocía el del hecho; cuando las causas que producen el hecho son varias, las fórmulas halladas nos permiten, dados los valores de las causas, calcular los del hecho; pero no nos permiten calcular el problema inverso: dado el valor del hecho, hallar el de sus causas. En efecto, supongamos el caso mas sencillo de un hecho producido por dos causas A y B, conservando la misma notación anterior, será $H = C.\, A.\, B_1 + C.\, B.\, A_1 + C.\, A.\, B.$

Si solo conocemos un valor de H, los de A y B son indeterminados, y si conociéramos dos ó más, también resultaría el sistema indeterminado. Sean los valores

$$H_1 = C_1 . A . B_1 + C_1 . A_1 . B + C_1 . A . B$$
$$H_2 = C_2 . A . B_1 + C_2 . A_1 . B + C_2 . A . B$$

Eliminando A por el método de reducción se obtendrá la ecuación $C_2 H_1 - C_1 H_2 = 0$ y como hemos supuesto que los valores del hecho eran proporcionales á las magnitudes C en virtud de la proporción $\frac{H_1}{H_2} = \frac{C_1}{C_2}$ resulta que $C_2 H_1 - C_1 H_2 = 0$ y la ecuación hallada se convierte en $0 = 0$ símbolo de la indeterminación absoluta.

147. Vamos ahora á explicar el porqué de esta indeterminación; conocidas las causas, la naturaleza del hecho lo es tambien y sabiendo cómo obra cada una, el cálculo nos dá á conocer el valor del hecho y su medida; por el contrario conocido el hecho, sus causas resultan indeterminadas, no ya solo en su número, sino también en su medida, porque, aun conocido el número de las causas, una misma cantidad H puede provenir de un número infinito de combinaciones de valores de las causas. Así, pues, esta indeterminación lejos de falsear la teoría expuesta la comprueba y proviene de la misma generalidad del cálculo indicado, como siempre que no se han tenido en cuenta ciertas condiciones, que son las necesarias para determinar el problema, que en este caso debe ser la determinación del valor de todas las causas menos una. Por otra parte, en el análisis, este caso de indeterminación no es único; la Trigonometría rectilínea nos presenta uno análogo. Tres ecuaciones sirven para determinar los ángulos de un triángulo en función de sus lados; pero el sistema resulta indeterminado si, por el contrario, queremos determinar los lados en función de los ángulos, porque como nos demuestra la Geometría, es precisa otra condición más, bien sea el conocimiento de un lado ó el de la superficie del triángulo. Para hacer desaparecer esta indeterminación preciso será reducir este caso al primero en que solo obraba una causa, lo cual no es posible en algunas ocasiones, y en todas

lo es siempre por medio del *trabajoso* procedimiento de las *clasificaciones combinadas*, por el que se consigue. Se comprende facilmente la importancia de tales clasificaciones y la influencia decisiva que puede tener sobre una investigación cualquiera el plan y orden con que se dispongan y se ejecuten. Como en muchos casos no es fácil separar los resultados de cada causa, es, no solo conveniente, sino necesario el ejecutar clasificaciones combinadas que nos sirvan, bien para medir ciertas causas, bien para determinar la influencia recíproca de su reunión. En la práctica, los hechos no pueden ser clasificados por sus causas originarias, sino por sus causas determinantes; una unidad sobre la cual han ejercido sus esfuerzos las causas A y B se clasifica en el grupo de aquella que ha llevado á efecto el hecho, es decir, que los términos

$$A. B. C. \ldots\ldots L\,, \quad S\,(A. B. C._1 \ldots L_1)\,, \quad S\,(A. B. C. \ldots L_1) \ldots\ldots$$

no pueden ser evaluados directamente, sino que los valores de las funciones $f_1\,(A)$, $f_1\,(B) \ldots f_1\,(L)$ vienen aumentadas en ciertas cantidades, que son los valores de aquellos términos repartidos proporcionalmente á las intensidades de sus causas. Si llamamos f_2 al valor de $f_2\,(A, B)$, siendo los hechos proporcionales á sus causas, se verificará que

$$f_2 = x + y \qquad \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{f_2}{A+B}$$

de donde $x = \frac{f_2}{A+B}.A$ $\quad y = \frac{f_2}{A+B}.B$ y llamando m al valor de la fracción será $f_2\,(A, B) = m\,A + m\,B$ y en general $f_n\,(A, B, C, \ldots L) = K\,A + K\,B + . + K\,x$ y el valor total del hecho será

$$H = A.\,C + m\,A + n\,A + \ldots$$
$$+ K\,A + B\,C + m\,B + n\,B + \ldots + K\,B + \ldots + K\,L$$

148. Al clasificar los hechos no obtenemos el valor de A. C sino, llamando M á la suma $m + n + \ldots + K$, el de

$A.C + AM$ que podemos considerarlo dentro del primer caso sin más que observar, que las variaciones de A, si se hallan varios valores ya no podrán suponerse inferiores á xp. Dividiendo por C el valor anterior se tiene

$$A + A.\frac{M}{C} = A\left(1 + \frac{M}{C}\right)$$

cuya cantidad diferirá muy poco de A, puesto que $\frac{M}{C}$ será siempre muy pequeña.

En la práctica los valores hallados $A + \frac{M}{C}A$ no se corrigen, sino que se consideran valores aproximados de A y las clasificaciones combinadas nos sirven para darnos idea de la influencia recíproca de las causas; pero examinando dentro de cada grupo de A, por ejemplo, la influencia de otra tal como B.

CAPÍTULO IV

ESTÁTICA —MEDIDA DE LAS FUERZAS REFLEJAS.

SUMARIO.—Teoria general de la medida de las fuerzas reflejas.—Aplicación á la medida del coeficiente de la falta de higiene privada en España.—Aplicación á la medida del coeficiente de higiene pública de las capitales de las provincias de España.—Aplicación práctica.—Observaciones.

149. Cuando la fuerza ó causa que se considera es refleja, es decir, no produce ningun hecho como causa determinante, no podremos hallar su valor ni estudiar sus variaciones siguiendo el procedimiento expuesto de clasificar los hechos según sus causas ó fuerzas productoras; es preciso, por lo tanto, inventar otros teniendo siempre en cuenta la naturaleza especial de estas fuerzas. Sea H la medida del efecto total producido el cual puede considerarse descompuesto en dos partes, una dependiente de las causas directas que concurren á verificarlo y que llamaremos H_c y otra dependiente solo de la causa que se considera, cuyo valor será función de H. Así pues

$$H = H_c + K H$$

Suponiendo constantes las demás causas, durante un cierto periodo, la variación de H podemos suponerla debida á KH y considerando los valores máximo y mínimo de H, tendremos

$$(1)\ M = H_c + K\,M \qquad m = H_c + K\,m$$

Supongamos que en vez de ser K invariable lo sea H y las expresiones de los valores de $K\,M$ y $K\,m$ en función del hecho medio H_p serán

$$K\,M = K'\,H_p \quad \text{y}\ K\,m = K''\,H_p$$

Las igualdades (1) se convertirán en

$$M = H_c + K'\,H_p \qquad m = H_c + K''\,H_p$$

que restadas dan $M - m = H_p\,(K' - K'')$

Ahora como el valor de K" será muy pequeño y el de K' debe ser un poco superior al verdadero, podemos suponer que aproximadamente $K = K' - K''$ de donde $M - m = K\,H$ y

$$K = \frac{M - m}{H_p}$$

Luego *obtendremos un valor muy aproximado de la fuerza considerada dividiendo la diferencia entre el máximo y el mínimo en un período, por el promedio del valor del hecho durante el mismo.*

150. Este método, para la medida de las fuerzas reflejas, lo hemos expuesto por primera vez en el IX Congreso Internacional de Higiene y Demografía, aplicándolo á la evaluación de la falta de higiene, desarrollando el Tema 1.° de la Sección 4.ª que dice: *En el estado de la Higiene contemporánea, ¿qué cifra de mortalidad debe tenerse en cuenta para considerar á una ciudad como insalubre?* Como ejemplo de aplicación de este método y como comprobación práctica del mismo expondremos en resumen lo dicho en aquella *Memoria.*

«Las causas de la mortalidad son de dos clases; una la *ley general* y *necesaria* de la muerte á que están sometidos todos los organismos, otra que comprende todas aquellas que tienden á facilitar el cumplimiento de dicha ley.=Si la falta de higiene fuese una causa determinante de la muerte podríamos evaluarla directamente y obtener un valor muy aproximado de ella tomando el promedio de varios años: pero no siendo causa determinante no es posible evaluarla directamente y es preciso valerse de medios indirectos. El promedio de varios años referente á una nación podemos considerarlo descompuesto en tres partes: Primera A que comprende los fallecimientos ocasionados por todas las causas *constantes* y *directas*, que se ejercen sobre toda la población. Segunda a aumento medio debido á las circunstancias *especiales* que favorecen la mortalidad. Tercera h D. aumento medio debido á la falta de higiene privada cuyo coeficiente h puede con poco error suponerse como constante para un mismo pais. Para calcular su valor supondremos que en vez de ser invariable h y variable D, sea invariable D y variable h de modo que el máximo estará representado por $A + a + h' D = M$ y el mínimo por $A + a + h'' D = m$; restando estos dos valores se tiene que $(h' - h'') D = M - m$ y como h' será un poco superior á h y h'' será muy pequeño, puede suponerse sin error sensible $h' - h'' = h$ de donde

$$h = \frac{M - m}{D}$$

151. Para determinar ahora el coeficiente que corresponde á la falta de higiene pública consideraremos solamente los datos referentes á las poblaciones de cierta importancia, por ejemplo, los de las capitales de provincia y su promedio lo consideraremos descompuesto de la manera siguiente:

$$D\,p = A + a + h\,D + n\,D\,p$$

siendo $n\,D\,p$ el aumento correspondiente á las condiciones especiales de las poblaciones y n su coeficiente, el cual podremos calcular suponiendo análogamente

$$M p = A + a + h D + n' D p \qquad m p = A + a + h D + n'' D p$$

de donde $M\,p - m\,p = (n' - n'')\,D\,p = n\,D\,p$, suponiendo $n' - n'' = n$, y $n = \dfrac{M - m\,p}{Dp}$.

Conocido el valor de h podremos hallar el de $h \,.\, D\,p$ y determinar así la cantidad en que puede reducirse la mortalidad por medio de las reglas de la higiene y determinado n podemos calcular n. D p y todas las poblaciones cuya mortalidad sea superior á D p — n D p tendrán probablemente necesidad de medidas higiénicas.

152. *Aplicación práctica á España.*—Según los datos publicados por el Instituto Geográfico y Estadístico, la mortalidad de España en cada uno de los anos de 1878 á 1892 presenta un máximo de 378 por 10.000 en el año 1885 y un mínimo de 293 por 10.000 en el año 1886. La población probable la hemos calculado teniendo en cuenta solamente la de las provincias españolas con la de la plaza de Ceuta que como sabemos depende de la provincia de Cádiz y por medio de la fórmula

$$P_n = P_o\, q^n$$

Hé aquí el cuadro con dichas cifras:

Años	Población probable	Defunciones	Mortalidad por 10.000 habitantes
1878	16.631,869	508,335	306
1879	16.722,465	511,514	305
1880	16.813,554	507,398	301
1881	16.905,136	511,856	302
1882	16.997,219	534,857	314
1883	17.089,804	559,266	327
1884	17.182,893	525,536	306
1885	17.276,490	656,697	380
1886	17.370,600	509,629	293
1887	17.465,213	573,448	328
1888	17.560'352	529,543	301
1889	17.656,000	545,097	309
1890	17.752,171	577,525	327
1891	17.848,869	565,964	317
1892	17.946,090	554,274	309
Sumas. . . .	259.228,725	8.170,939	
Promedios. .	17.281,913	544,729	315

Aplicando la teoría expuesta encontramos

$$K=\frac{315}{87}=0,28$$

y para K Hp=87 de donde Hp—K Hp=315—87=228. Para comprobar este resultado hallaremos el promedio de las cifras de la mortalidad de las naciones mas adelantadas en higiene y obtendremos las siguientes:

Años	Paises	Coeficiente
1892	Gran Bretaña	191
1891	Bélgica	222
1891	Francia	240
1891	Alemania	248
	Promedio	225

153. Para calcular el coeficiente n relativo á las capitales de provincia nos valdremos de los datos del periodo de 1886 á 1892, puesto que la higiene pública hace frecuentes adelantos sobre todo en las capitales de provincia. Sirviéndonos de base la población dada por los censos de 187? y 1887 hemos calculado la razón de la progresión geométrica correspondiente á su crecimiento y hemos determinado así las cifras de cada año que comparadas con las correspondientes de defunciones que figuran en el «Movimiento de la población de España en el septenio de 1886-92» (obra publicada por el Instituto Geográfico y Estadístico) hemos obtenido las cifras siguientes por cada 10.000 habitantes:

Años	Coeficientes
1886	352
1887	376
1888	341
1889	350
1890	355
1891	336
1892	320
Promedio	346

Aplicando lo yá expuesto obtenemos para n el valor

$$n = \frac{376 - 320}{346} = 0', 16$$

Así, pues, por medio de reformas higiénicas puede obtenerse una disminución sobre el coeficiente de mortalidad de las capitales de provincia de 55'4; por lo tanto toda capital de provincia cuya mortalidad sea superior á 291 por 10.000 habitantes puede considerarse como insalubre. Si, además de tomar medidas de higiene pública, se extiende la higiene privada, la cifra de la mortalidad podrá reducirse á 196 defunciones por cada 10.000 habitantes. La posibilidad de esta reducción y la prueba práctica de la teoría expuesta nos la dan las cifras siguientes referentes al año 1892.

Poblaciones	Población	Defunciones	Coeficiente
Hamburgo	637,686	10,730	168
Roma	437,419	8,432	193
Londres	5.752,204	110,892	193
Berlín	1.662,237	32,436	195
Asterdan	426,914	8,517	200
Bruselas	476,254	9,820	206
París	2.424,705	54,086	223
Promedio			198

154. *Observaciones.*—1.ª Debemos observar que el procedimiento expuesto no será aplicable cuando existan dos ó mas fuerzas reflejas que obren reunidas pues no es posible algebráicamente separar sus efectos y sería necesario hacerlo directamente por medio de determinadas propiedades de las mismas, como acabamos de hacer en el caso de las poblaciones.

2.ª Los valores máximos que se tomen deben ser aquellos en que verdaderamente ejerció su máximo la fuerza que se considera.

3.ª Los valores de K y K Hp son los mas probables de dichas cantidades, pues si los valores de K H en cada unidad de tiempo son KH_1, KH_2, KH_3,..... KH_n su valor mas probable será como sabemos

$$\frac{K(H_1+H_2+.....+H_n)}{n} = K\frac{H_1+H_2+.....H_n}{n} = KHp$$

4.ª Para hallar el valor del error medio seguiremos en un todo el procedimiento del n.º 73. Tendremos que

$$e = H_p - H \quad y \quad E^m = \sqrt{\frac{(e^2)}{p-1}},$$

la precisión será $\sqrt{p}$ y su peso p.

El error medio del coeficiente $K = 0,28$ que hemos determinado será igual á $\pm 0,02$ y el de la cantidad $KH_p = 87$ será ± 6; su precisión será $\sqrt{15} = 4$ y su peso 15. Los errores probables de ambas serán respectivamente $\pm 0,01$ y ± 4.

Con relación al coeficiente *n* hallamos

$E_m = 0'01$ $E_p = 0'01$; $p=7$ y $\sqrt{p} = \sqrt{7} = 2$

Con relación á la cantidad

$$nDp=56 \; ; \; E_m = 3 \quad E_p = 2$$

Finalmente, el error probable de la cantidad 196 á que puede reducirse la cifra de la mortalidad será

$$e = \pm\sqrt{\frac{36.15+4.7}{22}} = \pm\sqrt{\frac{568}{22}} = \pm\sqrt{25,82} = \pm 5'1$$

Por lo tanto podemos establecer que toda capital cuya mortalidad sea superior á 200 defunciones por cada 10.000 habitantes podrá reducirse por medio de medidas higiénicas.

CAPÌTULO V

DINÁMICA.—VARIACIONES DE LAS FUERZAS DIRECTAS Y REFLEJAS.

SUMARIO.—Fuerzas directas.—Ley de las variaciones en el tiempo.—Ley de las variaciones en el espacio.—Variaciones en la extensión.—Fuerzas reflejas.—Escolio general.—Equivalencia mecánica de las variaciones de los hechos.

155. Todo lo dicho respecto á la medida de los hechos se aplica á la de sus variaciones. El valor absoluto de la variación es siempre la diferencia entre los valores que se consideran. Su expresión será $V_1 = H_1 - H_0$

Para la medida de las variaciones distinguiremos tres casos según que nos ocupemos de las variaciones en el tiempo, en el espacio ó en la extensión.

Variaciones en el tiempo.

156. Considerando á la variación como una nueva causa, hallaremos su medida, comparándola con la magnitud sobre la cual se ejerce; su expresion será

$\frac{V_1}{H_0} = r$ ó sea $\frac{H_1 - H_0}{H_0} = r$ de donde $H_1 = H_0 (1 + r)$ y haciendo $1 + r = q$ se tiene que $H_1 = H_0 . q$. De la misma manera suponiendo aproximadamente

$$q_1 = q;\ H_2 = H_1 . q_1 = H_0\, q^2$$

Así, pues, los valores del hecho en función del primero serán H_0, $H_0 q$, $H_0 q^2$, ... $H_0 q^n$ y podemos decir la siguiente regla: *La primera forma de la ley de la variación de los hechos sociales con relación al tiempo debe ser la progresión geométrica.*

Conociendo dos valores de H tales como H_0 y $H_n = H^o q^n$ se hallará el valor de q. por la fórmula

$$q = \sqrt[n]{\frac{H_n}{H_0}}$$

es decir, que *el valor de la razón de la progresión geométrica buscada se halla extrayendo la raiz de un grado igual al número de unidades de tiempo transcurridas, de la relación del último valor al primero que se considera.*

157. Para la deducción de las fórmulas anteriores hemos supuesto que los tiempos son iguales, de modo que á los tiempos o, t, 2 t, 3 t, ... nt corresponden los valores de H , H_0, $H_0 q$. $H_0 q^2$ ..... $H_0 q^n$ y como $H_0 = 1$ (puesto que se toma como unidad) las dos séries de valores pueden escribirse así

$$\begin{array}{cccccc} o, & t, & 2t, & 3t, & ..... & nt \\ 1, & q, & q^2, & q^3, & ..... & q^n \end{array}$$

Por lo tanto, $\log q^n = \log \frac{H_n}{H_0} = n\,t$ y pasando á los números $H_n = H_0 . 10^{nt}$; resultando que la ecuación que determina la ley de la variación de un hecho es una logarítmica.

158. Para deducir estas expresiones hemos supuesto que los valores de q, q_1, q_2, ... sean aproximadamente iguales. en el caso de que así no suceda, será preciso examinar la ley que cumple su variación para que sustituida en la ecuación del valor de H_n nos dé una expresión mas aproximada de la ley que se busca. Generalmente la variación considerada se supone proporcional á la del hecho, de modo que llamando x á dicha cantidad se determina por medio de una proporción.

159. Como las consideraciones en que nos hemos fundado son generales, exigiendo solamente que los valores de q sean, aproximadamente iguales, se deduce que la ley hallada será aplicable á toda clase de fenómenos cuyos valores cumplan con la condición dicha. Mathien dedujo esta misma ley (Connaissance destemps. 1826) para los decrecimientos de amplitud de la oscilación del péndulo, las consideraciones en que se fundaba eran análogas y deducía que la ley de la variación de x estaba expresada por una progresión geométrica decreciente.

Esta ley es debida al célebre matemático Enler como expresión de la del acrecentamiento de la población que le fué pedida por Susmilch (1740), pero Enler no tuvo en cuenta que la razón q no es constante y que disminuye progresivamente á medida que aumenta la población. Euler fué tambien el primero que introdujo en la Estadística la notación algebráica.

Variaciones en el espacio.

160. Como los valores que se examinan son todos contemporáneos, no podrá elegirse como unidad de medida el primero, y la razón y la lógica exigen que no se dé preferencia á ninguno sobre los demás, de modo que la unidad deberá ser necesariamente el valor mas probable ó sea el promedio de todos ellos; y no solamente debe tomarse como unidad de medida sino tambien como término de comparación. Así, pues, las variaciones serán medidas por la fórmula

$$V_e = \frac{d-m}{m}$$

en la cual m representa la media y d el valor que se considera. En este caso no puede darse la forma general de la ley que siga la variación y solo podemos decir que se debe establecer la proporcionalidad entre dicha variación y la de otros hechos que parezcan tener íntima relación.

161. Este procedimiento como es completamente general puede aplicarse también á las variaciones del hecho en el tiempo; pero solo nos servirá para determinar la tendencia del hecho al crecimiento ó al decrecimiento. Para hallar su ley será preciso suponer sus valores proporcionales á las variaciones del tiempo y volveríamos á encontrar la ley yá dada. En efecto, haciendo uso de las notaciones yá conocidas tenemos

$$\frac{H_{so} - H_m}{H_m} = r \qquad \left.\begin{array}{l} H_o = H_m (1 + r) \\ H_1 = H_m (1 + r') \end{array}\right\} \frac{H_1}{H_o} = \frac{2\,t - t}{T}$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{3\,t - 2\,t}{T} \qquad \frac{H_1}{H_o} = \frac{H_2}{H_1} = \ldots\ldots = q$$

$$H_1 = H_o\, q\ , \quad H_2 = H_1 \cdot q = H_o\, q_2\,,\ \ldots\ldots\ H_n = H_o\, q^n$$

Variaciones en la extensión.

162. Como ya hemos dicho los hechos que tienen diferente extensión son heterogéneos y no deben compararse; sin embargo, en ciertas ocasiones, bien para darnos una idea mas clara de los hechos examinados, bien porque no disponemos de otro medio para hacer su estudio comparativo, se suelen medir las variaciones en la extensión. La unidad adoptada suele ser la del hecho de extensión máxima ó sea la que comprende á todas las extensiones de los hechos del mismo género. Así, por ejemplo, al clasificar las defunciones según la edad de los fallecidos, se suelen comparar las cifras correspondientes á cada edad con la total de los fallecidos y así podrá decirse, que los fallecidos de 20 años son la *emésima* parte del total.

De las fuerzas reflejas.

163. Hasta aquí nos hemos ocupado solamente de las variaciones de las fuerzas directas, nos quedan, por lo tanto,

que estudiar las de las fuerzas reflejas. La índole especial de estas fuerzas hace que solo sea aplicable para las variaciones en el tiempo y en el espacio la forma general que hemos dado para estas últimas. Así una vez determinado el valor de K hallaremos los de $K\,H_0$, $K\,H_1$,.... $K\,H_n$ cuyas medidas serán respectivamente

$$\frac{K\,H_0}{H_p},\ \frac{K\,H_1}{H_p},\ \ldots\ \frac{K\,H_n}{H_p}$$

y las de sus variaciones

$$\frac{K\,H_0 - K\,H_p}{K\,H_p},\ \ldots\ \frac{K\,H_n - K\,H_p}{K\,H_p}$$

Este procedimiento equivale á la evaluación de las separaciones de cada valor del promedio.

164. *Escólio general.*—Perteneciendo la Estadística al grupo de las ciencias experimentales, sus leyes no son ni pueden ser nunca necesarias sino hipotéticas, sin que nunca podamos decir otra cosa sino que los hechos parecen cumplir con ellas; pero que nada impide que sean modificadas por nuevos hechos. Las fórmulas que hemos dado parecen cumplir con las condiciones de los hechos y amoldarse por completo á sus valores; pero en cada caso deben determinarse directamente por la experiencia los valores de las cantidades que entran en ellas. Las fórmulas nos sirven para representar los hechos sin las variaciones bruscas con que algunas veces, bien por la influencia de causas perturbatrices ó de los errores, nos los dá la experiencia; para interpolar con gran aproximación valores intermedios entre dos conocidos; y para la predicción próxima del valor del hecho.

165. *Equivalencia mecánica de las variaciones de los hechos.*—Fácilmente puede verse que el estudio de estas variaciones equivale al de las *cantidades de movimiento* de un cuerpo sugeto á un movimiento *uniformemente variado*; con la diferencia de que la mecánica supone constante la masa del cuerpo y aquí no podemos hacer dicha suposición porque el caso general es que suceda lo contrario.

CAPÌTULO VI

INVESTIGACIÓN DE LAS CAUSAS DE LOS HECHOS SOCIALES.

SUMARIO.—Clasificación de las causas.—Causas primordiales.—Causas secundarias.—Método general para la investigación de las causas.—Causas que influyen sobre la población.—Predicción próxima de los hechos sociales.

166. Para poder emprender con fruto la investigación de las causas de los hechos sociales, será preciso ante todo determinar la clase de las mismas y sus caracteres. Según sean constantes en sus tres elementos espacio, extensión y tiempo ó variables en alguno ó algunos de ellos, pueden ser clasificadas en la forma siguiente:

	Si no presentan variación.	Si tienen variación.
En el tiempo.	Constantes.	Accidentales.
En el espacio.	Comunes.	Diferenciales.
En la extensión.	Generales.	Particulares.

167. Tambien pueden clasificarse en *primordiales* y *secundarias*. Las primeras las determina nuestra razón y las comprueba la experiencia; nada puede hacer el cálculo sino evaluarlas, al cual no debemos darle otro carácter que el de medio ó instrumento para conseguirlo. Para la determinación de estas causas se consideran sin limitación alguna el

tiempo y el espacio, y la extensión se supone ser toda la del hecho. Debemos tener presente que las causas de los hechos sociales son siempre hipotéticas ó contingentes pero nunca necesarias. Las hipótesis son verdaderos empréstitos que contrae la ciencia fundándose en los conocimientos adquiridos y á cuenta de los que espera adquirir en lo sucesivo, de modo que la emisión de ellas debe ser precedida de un estudio profundo del verdadero estado de la ciencia para que no sean desproporcionadas, pues pequeñas poco fruto pueden dar y demasiado generales pueden muy bien caer enseguida en defecto, por no tener bastante fuerza para mantenerlas. Los adelantos contínuos de las ciencias van perfeccionando cada vez mas estas hipótesis no solo por ser probadas y mantenidas por mayor número de hechos, sino por ir poseyendo en mayor grado los caracteres científicos de la *generalidad* y *sencillez*. Poco podemos decir sobre la determinación de estas causas ó sea sobre el establecimiento de las hipótesis generales, pues son siempre debidas al génio, al cual no es posible someterlo á reglas; sin embargo podemos manifestar que al establecimiento de hipótesis sociales debe preceder no solo un estudio detenido del hombre y de la sociedad y un conocimiento exacto del estado actual de la ciencia Estadística, sino que en muchos casos es tambien necesario poseer conocimientos profundos de otras ciencias relacionadas directamente con los hechos sociales, como son la Fisiología, la Higiene, la Economía política, la Agricultura, etc.

168. Las causas *secundarias* son aquellas en que se consideran limitados alguno ó algunos de los tres elementos yá dichos; cuando solo se considera limitado uno de ellos se denominan de segunda categoría y si se consideran dos de tercera. Así, la ley de la población expresada por la fórmula

$$P_n = P_o q^n$$

es comun y general pero no es constante sino para un periodo de tiempo limitado; pues, como ya vemos, el valor de q decrece con el tiempo. Los frios del invierno y los calores del estío son causas tambien comunes y generales de la mortalidad, pero no constantes.

169. El estudio de estas causas accidentales, diferenciales y particulares tiene muchísima importancia por que son las que verdaderamente determinan el modo de ser de cada país, región ó provincia, y cuyo estudio nunca está exento de dificultades. A estas causas las denominaremos *perturbatrices* por que real y verdaderamente perturban la ley del hecho.

Ya hemos visto la impotencia del cálculo (146) para la determinación del número y medida de las causas de los hechos. El problema no es indeterminado en absoluto; pero no puede ser resuelto analíticamente, porque el cálculo solo es un instrumento exactísimo que cuando se usa en condiciones inadecuadas nos responde lealmente *no puedo*. Preciso será poner en tortura nuestra razón para que ella nos guie. Hemos dicho que si se obtiene el valor de un hecho debido á una sola causa que difiera del calculado en cantidad superior á x_p tendríamos un indicio de la existencia de una nueva causa, aunque cuando no difiriesen en cantidad mayor, no podríamos asegurar que no existiesen otras causas cuyos efectos podrían compensarse. A primera vista parece que generalizado este principio al caso de un hecho producido por varias causas tendríamos así un guía, en muchos casos, que nos descubriese la existencia de las causas perturbatrices; pero aunque el principio puede generalizarse, la doctrina es inaplicable en la mayoría de los casos, pues ni son conocidas todas las causas de los hechos sociales ni mucho menos sus medidas absolutas y relativas; por tanto este procedimiento teórico no es práctico. Busquemos otros; y para simplificar el problema consideremos separadamente las causas accidentales, diferenciales y particulares.

170. *Accidentales.*—Si conocemos la ley del hecho en el tiempo, todo valor que sea una negación de dicha ley, debe-

rá ser examinado con toda escrupulosidad pues es seguro que exista una causa perturbatriz. Respecto á su determinación y medida poco podemos decir, pues aquí entra por mucho la habilidad, el talento y los conocimientos del estadístico.

Ejemplo. Los nacimientos deben seguir una ley igual á la de la población, es decir, deben crecer en progresión geométrica. Si observamos las cifras relativas á España y correspondientes á los años 1886-92 nos encontramos que en los años 1887 y sobre todo en los 1890 y 91 se registraron números de nacimientos inferiores á la ley que debe cumplir el hecho que en estos años parece retroceder, y deducimos de aquí la probabilidad de la existencia de una causa. En efecto la mayoría de estos nacimientos son producidos por los indivíduos nacidos de 25 á 30 años antes, es decir, en los años de 1856 á 62 y de 1860 á 1867 y recordando los acontecimientos de aquellos años, vemos que se opusieron á la celebración de matrimonios y arrebataron muchas vidas á la nación española.

171. *Diferenciales.*—Como podemos considerar dos clases de causas diferenciales, unas constantes y otras accidentales, debemos tratar separadamente cada una de ellas. Las segundas se determinan según el procedimiento expuesto anteriormente y las primeras por medio de la comparación de las cifras relativas al pais, región ó provincia que se considere en la sucesión del tiempo, con las de otras regiones ó provincias y si se observan entre ellas discrepancias notables y en el mismo sentido, es muy probable, ó mejor dicho, es segura la existencia de dichas causas. Su determinación y evaluación no es posible someterlas á otras reglas que las generales ya dadas.

Ejemplo. Comparando la mortalidad de las provincias insulares, marítimas é interiores de España en los periodos de 1861-70 y de 1878 á 88 encontramos las cifras siguientes:

	Insulares.	Marítimas.	Interiores.
1861-70	227	276	336
1878-88	209	303	337

Sus diferencias son:

	1861-70	1878-88
Marítimas—Insulares. . . .	+49	+94
Interiores—Marítimas. . .	+60	+34
Interiores—Insulares. . . .	+109	+128

Estos datos nos manifiestan claramente que la situación geográfica de las provincias influye notablemente en su mortalidad.

172. *Particulares.*—La influencia de estas causas se manifiesta por que las diferencias entre los elementos comparados solo existen con relación á un grupo de hechos y no con relación á todos. Así clasificadas las defunciones por el lugar en que ocurrieron, encontramos que en las ciudades de Gerona y Santander la mortalidad en el periodo de 1886-92 es respectivamente 416 y 431 por 10.000 habitantes apareciendo ambas capitales con cifras poco diferentes; pero en la primera dieron las casas de Beneficencia el 43'29 por ciento de las defunciones ocurridas y en la segunda solo el 8'29 por 100, resultando de aquí que la mortalidad general de la primera es realmente muy inferior á la de la segunda.

173. La negación de la existencia de causa puede comprobarse porque los hechos deben diferir en cantidades inferiores x_p ; y decimos puede comprobarse por que antes es preciso que nuestra razón no encuentre causa determinante de dicho hecho. En cambio no encontrando nuestra razón una causa determinante del hecho el diferir sus valores en cantidad superior á x_p nos indica la existencia de una causa, sobre todo si se observa que dicha separación es aproximadamente igual en la sucesión del tiempo ó del espacio ó de ambos elementos.

174. El método que recomendamos como más conveniente para el estudio de las causas se halla expresado en el cuadro siguiente:

- Causas....
  - Particulares
  - Generales....
    - Diferenciales
    - Comunes......
      - Accidentales
      - Constantes

175. No es posible determinar una por una todas las causas que influyen sobre los hechos sociales pues contínuamente cambia la manera de ser de los indivíduos, de las sociedades y de las naciones; pero como ejemplo presentamos modificada según la anterior clasificación, la dada por M. En gel (Die Bewegung de Bevölkerug in K. Sachsen) de las que influyen sobre la población.

Particulares, individuales.—Sexo.—Edad.—Constitución.—Manera de vivir.

Particulares, colectivas.—Estado civil.—Culto.—Raza.—Posición social.—Profesión.—Sueldo ó salario.—Propiedad.—Cultura moral.—Sobriedad.—Amor á la economía.—Vida de familia.—Educación de los niños.—Amor al trabajo.—Tendencia al progreso.

Generales, diferenciales.—Configuración y naturaleza del suelo.—Clima.—Composición higiénica del aire, del agua, del terreno, del conjunto de la localidad.—Particularidades provinciales.—Distribución de los habitantes, de las familias, de los habitantes por localidad ó por circunscripción.—Cualidades de las localidades; pueblo, campo, aglomeración, casa aislada.—Paises industriales. Paises agrícolas ó comerciales.—Instituciones religiosas, generales ó locales.—Instituciones de enseñanza.—Instituciones para el cultivo de las artes y de las ciencias.—Instituciones de utilidad pública locales.—Instituciones de beneficencia.—Seguridad pública.—Moralidad y criminalidad.—Diversas clases sociales.

—Propietarios y no propietarios.—Hacienda municipal ó provincial.—Organización especial de las localidades.—Carácter político de las localidades.—Su importancia política.

Generales, comunes, accidentales.—Estaciones.—Acontecimientos anormales.—Fertilidad del año.—Situación sanitaria de los hombres.—Epizootias.—Enfermedades de los vegetales.—Acontecimientos y perturbaciones políticas.—Revoluciones y levantamientos.

Generales, comunes, constantes.—Influencias de las instituciones humanas: Tecnológicas, Religiosas, Morales, Sociales, Políticas, Administrativas.

A estas últimas agregamos nosotros: La situación geográfica del país.—Colonias.—La situación política ó sea la circunstancia de hallarse ó no próximo á paises grandes, ricos, fuertes ó que difieran en constitución política.

Cuadros análogos podemos formar respecto á las influencias que obran sobre el Territorio y sobre el Estado.

Teniendo por lo tanto en cuenta las causas que pueden influir sobre un hecho, por medio de las comparaciones, que hemos dicho, pueden determinarse muy bien los caractéres de la causa que se busca, de tal manera que si no la señalan por completo reducen mucho el campo de investigación de nuestra razón, siendo entonces facil por medio yá de analogías ó de caractéres diferenciales determinarle por completo.

176. Conocida la ley que sigue un hecho por la determinación y medida de sus causas puede predecirse su valor próximo, bien en la extensión, en el tiempo ó en el espacio con una incertidumbre igual á $\pm x_p$. Por ejemplo, si el promedio de defunciones en España durante los años 1886-89 es de 539.429 las del año 1890 deberían ser 542.126 $\pm$ 465 y habiéndose obtenido la cifra de 577.525 podemos asegurar la existencia de una causa perturbatriz como fué la gran epidemia de *gripe* que sufrió la población en dicho año. Las

del año siguiente 1891 deberían haber sido 544.836 mas ó menos una cantidad poco diferente de 465, y fueron 565,964; recordaremos que la citada epidemia siguió causando víctimas en dicho año y en el siguiente de 1892.

Debemos tener presente que en la mortalidad y en algunos otros hechos la existencia de un máximo es causa de un mínimo próximo y posterior á dicho máximo.

Fijándonos en que los nacimientos de un año son debidos principalmente á la población de 20 á 30 años, resulta que considerando la población nacida 25 años antes, podemos decir que los nacimientos sufrirán variaciones análogas á las de aquéllos años, cuyas variaciones se van poco á poco compensando en los periodos sucesivos.

Comparando la natalidad en los periodos de 1861-70 y 1886-92 observamos que los máximos y mínimos de una y otra coinciden con diferencias de 25 años; podemos por lo tanto predecir para 1893 un mínimo y que la natalidad ha de disminuir grandemente en los años de 1894 á 1.900.

1861....398	1886.....367
1862....388	1887.....362
1863....378	1888.....364
1864....382	1889.....367
1865....320	1890.....347
1866....378	1891.....354
1867....378	1892.....359
1868....348	1893.....Mínimo
1869....361	1894 Decrecimiento
1870....358	1895 Decrecimiento
	.... Decrecimiento
	.... Decrecimiento
	.... Decrecimiento

177. *Observación.*—Fijándonos, no yá solo en los cálculos que exige la práctica de la Estadística, sino hasta en sus procedimientos, no comprendemos cómo se há mantenido por hombres de gran prestigio que para ser buen estadístico y para dirigir un centro de Estadística no era preciso, si no

al contrario perjudicial, el ser buen matemático. No podemos menos de protestar aquí contra tal error y manifestar que las naciones que sobresalen por su amor á la Estadística, escogen los empleados de dicho Centro entre verdaderos matemáticos como sucede en Suecia, ó son objeto de una educación especial como ocurre en Prusia.

Resumiendo podemos decir que el método estadístico consta de tres partes: análisis, síntesis é hipótesis para el porvenir. Por el análisis se dividen y subdividen las cifras expresiones de los hechos, se examinan una á una y se hacen notar sus diferencias, sus accidentes, sus desemejanzas, llegando así al conocimiento de las causas variables; por la síntesis se agrupan aquellas partes, aquellos valores particulares de los hechos, buscando y haciendo resaltar sus analogías y semejanzas, eliminando directa ó indirectamente aquellos accidentes y diferencias y llegando así al descubrimiento de las causas invariables y al establecimiento de las leyes de los hechos. Muchos estadísticos no son partidarios del cálculo, lo creen un peligro y critican duramente su uso. Estos hombres no quieren permitir á la Estadística la sublimidad de la generalización, sin caer en la cuenta de que esto vale tanto como negarle los caractéres de ciencia. Pídase á la hormiga que nos dé idea del terreno, imposible; en cambio el águila que se eleva á grande altura, ante cuyos ojos desaparecen los pequeños detalles, los baches y las piedras de los caminos, nos puede dar una idea clara de cualquier terreno por accidentado que sea; y si unimos á la investigación de la hormiga la elevación del águila, el conocimiento adquirido será completo y exacto. Al topógrafo para representar un terreno le basta con unos cuantos perfiles, cuya nivelación no determina ni decímetro á decímetro, ni metro á metro, sino tomando las alturas de puntos cuyas distancias son bastante mayores; además, supone, al trazar las curvas de nivel, que la pendiente entre cada dos es constante, lo cual casi nunca es cierto; y sin embargo

¿quién dice que las curvas de nivel no representan al terreno? ¿quién puede creer que la representación piedra á piedra sería mejor? De un punto á otro, el perfil de nivelación, presenta generalmente una série de altos y bajos, una línea quebrada, cuyas pendientes son desiguales y rápidas, el camino así no sirve para el transporte, es decir, para las aplicaciones prácticas de la vida; pero la ciencia de la ingeniería, transforma aquel perfil en una línea de pendientes suaves y casi uniformes; esto mismo es lo que hace el cálculo en Estadística, generaliza, iguala, elimina los accidentes y solo deja lo constante, lo invariable, lo general, lo que verdaderamente ha de tener una aplicación práctica y nos puede servir en los usos comunes de la vida. ¿Qué, se vá á desechar como inexacta la fórmula de Gompertz por que difieran algo los valores calculados de los obtenidos directamente? Entonces sería preciso desechar todas las fórmulas de las ciencias experimentales. Porque, por ejemplo, ¿es cierta, en absoluto, la ley de la dilatación lineal? ¿En las operaciones delicadas de comparación de longitudes de reglas de metales diferentes se fia el geodesta de dicha ley? Y sin embargo porque sea preciso entonces tener en cuenta una porción de causas productoras de pequeños errores ¿dice nadie que tal ley no es cierta?

CAPÌTULO VII

DEMOLOGÍA ESTÁTICA.

SUMARIO.—-Preliminares.—Población.—Natalidad.—Mortalidad.—Nupcialidad.—Migración interior y exterior.

178. La estadística de la población es sin duda alguna la más importante de todas, por ser la que se ocupa del elemento fundamental de la sociedad, y puede considerarse dividida en dos partes, *Demología ó Teoría de la población* que es la que haciendo aplicación de los principios generales establecidos la mide y estudia sus variaciones y la *Demografía* que la consideramos como su parte práctica ó aplicada. Ahora solo nos ocuparemos de la primera dejando para la Estadística práctica el tratar de la segunda.

A primera vista parece que siendo la *Teoría de la población* una aplicación de los principios generales expuestos debía formar parte de la *Estadística aplicada*; pero debemos observar que dicha aplicación es puramente teórica, los principios generales son aplicables á cada uno de los elementos de la sociedad, constituyendo cada aplicación una teoría que es parte integrante y necesaria de la Teoría analítica de la Estadística.

La Teoría de la población como la Estadística teórica se divide en Estática y Dinámica; la primera se ocupa de su evaluación y la segunda de su movimiento. Los hechos referentes á la población son: población, nacimientos, matrimonios y migraciones. Estos hechos pueden ser evaluados, por su cifra absoluta, por su intensidad (que es su verdadera medida) y por su extensión. Vamos á examinar separadamente cada uno de ellos.

179. Población.—*Cifra absoluta.*—La cifra absoluta dá desde luego una idea aproximada de la población de un pais ó región; aunque como yá sabemos, no expresa la verdadera medida del hecho. Se determina directamente por medio del censo.

Intensidad.—Siendo la población uno de los elementos primordiales de todos los hechos referentes á la misma, no es posible considerarla como efecto de ningún otro y por lo tanto no puede determinarse su verdadera intensidad; pero considerando á dicha población como resultado de su intensidad y de los medios de existencia que le facilite el territorio, se tendrá, llamando p á la intensidad, P á la cifra absoluta y S á la extensión del territorio, que

$$p \, . \, S = P \quad \text{de donde} \quad p = \frac{P}{S}$$

Así, pues, la intensidad de la población se determina dividiendo su cifra absoluta por la extensión territorial que ocupa, viniendo á ser el número de habitantes por unidad superficial. Esta cifra determina mejor que la primera la importancia de una nación, pues la mayor intensidad indica mayor riqueza y mayores medios de vida y de defensa. Esta cifra es la que mide la importancia de un estado; la verdadera medida de la intensidad de la población debe hallarse relacionándola á la del mundo entero; pero como esta última no es fácil de determinar ni aun siquiera aproximadamente se prescinde de ella y se sustituye por la que acabamos de exponer.

Extensión.—Otra medida de la población es su extensión. es decir, la relación entre su cifra absoluta y la de la nación, región ó parte del mundo en que está comprendida.

180. Estas medidas generales no determinan por completo la población de un pais sino que además es preciso estudiar:

1.° Su distribución en regiones, provincias, ayuntamientos y poblaciones.

2.° Su distribución según los accidentes topográficos.

3.° Su clasificación por edades, sexo y estado civil.

4.° Su clasificación por profesiones.

5.° Su clasificación por instrucción.

6.° Su clasificación por naturaleza y residencia.

181. Natalidad.—*Cifra absoluta.*—Se determina directamente por medio de los datos del registro que de los mismos se llevan en todas las naciones civilizadas.

Intensidad.—Siendo los nacimientos el efecto de la fuerza productora de la humanidad y ejerciéndose solo sobre los indivíduos núviles, se representará dicha fuerza por la fórmula

$$n = \frac{N}{P'}$$

en la cual P' indica la población núvil. Sin embargo la fórmula generalmente usada no es esta sino

$n = \frac{N}{P}$, es decir, que se considera que los nacimientos son producto de toda la población, siendo así, que por lo menos los niños no pueden considerarse como factores de tal producto. Las razones que han hecho que esta fórmula sea mas usada que la anterior, deben ser solamente las ventajas y facilidades que ofrece para la comparación de la natalidad con la mortalidad.

Extensión.—Se determina lo mismo que la de la población por la relación entre su cifra absoluta y la de otra unidad de mayor extensión. Así los de España se relacionan bien á los de Europa, á los de las naciones latinas, etc., y los legítimos é ilegítimos á la cifra total.

182. En los nacimientos debe estudiarse además su distribución según:

1.° Las edades de los padres.
2.° Su legitimidad.
3.° Los grupos y poblaciones.
4.° Los accidentes topográficos.
5.° Las divisiones administrativas.

183. Mortalidad.—*Cifra absoluta.*—Es según sabemos el número de hechos registrados en la unidad de tiempo y se determina directamente por medio de los asientos que se hacen en libros al efecto.

Intensidad.—Se determina por la relación entre la cifra absoluta en la unidad de tiempo á la población correspondiente. En efecto, el número de defunciones es un hecho producido por la población entera sin excepción alguna, de modo que la medida de la mortalidad será

$$d = \frac{D}{P}$$

Extensión.—Se determina lo mismo que en los nacimientos.

184. En las defunciones debe estudiarse además su distribución según:

1.° Las edades.
2.° Las profesiones.
3.° El sexo.
4.° Los grupos ó poblaciones.
5.° La legitimidad.
6.° Los accidentes topográficos.
7.° Las divisiones administrativas.
8.° Las causas.
9.° El lugar en que ocurrieron.

185. Nupcialidad.—*Cifra absoluta.*—El número de

matrimonios verificados en un país en la unidad de tiempo se obtiene directamente de registros llevados al efecto.

Intensidad.—La nupcialidad ejerce su esfuerzo sobre la población cuyo desarrollo es completo, es decir, sobre la población núbil solamente. Así, pués, su representación será

$$m = \frac{M}{P'}$$

Extensión.—Cuando el número considerado forma parte de un total, su medida con relación á este es lo que determina su extensión.

186. En la nupcialidad debe estudiarse además:

La distribución de los matrimonios segun:
1.° Las profesiones.
2.° El estado civil.
3.° Las edades.
4.° Los grupos y poblaciones.
5.° Los accidentes topográficos.
6.° Las divisiones administrativas.

7.° Determinación de la fecundidad.

8.° Su clasificación según el número de nupcias.

187. Migración.—La migración es el movimiento de la población por sus cambios de residencia. Mecánicamente considerada equivale á cambiar el punto de aplicación de la fuerza que desarrolla la población. Con relación al territorio puede ser interior y exterior y cada una de ellas á su vez se divide en *Emigración*, movimiento de dentro á fuera, é *Inmigración*, movimiento de fuera á dentro.

188. Migración interior.—*Cifra absoluta.*--Este movimiento no altera en nada la cifra absoluta de la población total de un país, región, provincia, ayuntamiento ó población, sino su distribución en divisiones, grupos, poblaciones ó barrios. Su valor absoluto es difícil de precisar pues no es posible llevar cuenta exacta de los cambios de residencia á pesar de las disposiciones dictadas. Cinco elementos es preciso estudiar en la migración interior que son: la de provincia á provincia, de ayuntamiento á ayuntamiento dentro de

la misma provincia, del campo á las poblaciones y de uno á otro barrio ó distrito dentro de la misma población. Para la determinación absoluta de la migración, habrá que considerar como positiva la inmigración y como negativa la emigración y la diferencia positiva ó negativa nos determina el valor de la resultante de ambas.

Intensidad.—Se determina por la relación entre la cifra y la población que la origina.

Extensión.—Se determinará por la regla general.

189. Migración exterior.—*Cifra absoluta.*—Este movimiento se establece de nación á nación y por lo tanto altera la cifra de la población. No es posible tampoco determinarla con exactitud sobre todo en los paises unidos á un continente, pero se hallan valores muy aproximados de la misma por medio de los Censos, de los registros consulares y del movimiento de pasageros por mar y tierra. Para determinar su valor y su sentido se restará de la inmigración la emigración y el resto con su signo será el verdadero valor de la migración.

Intensidad y *Extensión.*—Se determinan por la regla general; la primera refiriéndola á la población y la segunda á otro valor de la misma clase pero que se refieran á una extensión mayor.

190. En la migración exterior deben distinguirse sus dos movimientos y en cada uno estudiar:

1.° Paises á donde se dirige la emigración ó de donde proviene la inmigración.

2.° Sexos y edades de los emigrantes ó inmigrantes.

3.° Profesiones de los mismos.

4.° Si constituyen ó no familia.

5.° Puntos de donde salen los emigrantes ó á donde se dirigen los inmigrantes.

6.° Naturaleza de los mismos.

CAPÌTULO VIII.

DEMOLOGÍA DINÁMICA.—POBLACIÓN.

SUMARIO.—Ley del acrecentamiento de la población.—Valores de la razón de acrecentamiento.—Otro valor aproximado de dicha razón.—Forma de la curva que representa la variación de la población.—Verdadera ley del acrecentamiento de la población.—Límite del crecimiento de la población.—Población normal.—Determinación de P y m.

191. Las leyes del movimiento de la población se deducen fácilmente sabiendo que la cifra total solo puede variar por dos causas: 1.ª por la diferencia entre los nacimientos y defunciones. 2.ª por la diferencia entre la inmigración y la emigración. La primera es debida, en general, á causas constantes ó por lo menos que pueden considerarse como tales, pues varian muy lentamente en el transcurso del tiempo; la segunda, por el contrario, depende, en general, de causas accidentales y transitorias ó por lo menos estas son las que tienen sobre ella mayor influencia, así es que prescindiremos de esta segunda para deducir las leyes de la población.

192. Llamando, P_0 á la cifra absoluta de la población de la cual partimos, P_1 á la que se tiene al fin de una unidad de tiempo, P_2, P_3, ... P_n á las obtenidas al cabo de 2, 3, ... n unidades de tiempo; podremos establecer las igualdades siguientes:

$$P_1 = P_o + (N_1 - D_1)$$

$$P_2 = P_1 + (N_2 - D_2) \;\ldots\ldots\; P_n = P_{n-1} + (N_n - D_n)$$

Ahora como $n = \frac{N}{P}$ y $d = \frac{D}{P}$ se tendrá $N = P.\,n$ y $D = P.\,d$ cuyos valores sustituidos en las igualdades anteriores nos dan

$$P_1 = P_o + (P_o\,n - P_o\,.\,d) = P_o\,[\,1 + (n-d)\,]$$

$$P_2 = P_1 + (P_1\,.\,n' - P_1\,.\,d') = P_1\,[\,1 + (n'-d')\,] \;\ldots\ldots$$

$$P_n = P_{n-1} + (P_{n-1}\,.\,n^{(n-1)} - P_{n-1}\,.\,d^{(n-1)}) = P_{n-1}$$

$$[\,1 + (n^{(n-1)} - d^{(n-1)})\,]$$

Siendo las cantidades n y d menores que la unidad sus diferencias tambien lo serán y siendo n, n', ... muy poco diferentes, así como d_1 d', d'', ..., podemos suponer sensiblemente iguales sus diferencias; haciendo por lo tanto $1 + (n-d)$ igual á q, tendremos que la cifra de la población al cabo de una, dos, tres, ... n unidades de tiempo estará dada por las fórmulas

$$P_1 = P_o\,q \;;\; P_2 = P_o\,q^2, \;\ldots\ldots\; P_n = P_o\,q^n \;(1)$$

193. Podemos por lo tanto establecer la ley siguiente:

1.ª *La población de un país prescindiendo de la migración crece ó decrece según una progresión geométrica.*

194. De la fórmula (1) se deduce que

$$q = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}} \qquad \text{y de aquí la ley}$$

2.ª *Si se conocen dos valores de la población de un país separados por un cierto número de unidades n de tiempo, el valor de la razón de la progresión geométrica se obtiene extrayendo la raíz enésima de la relación entre la segunda y la primera de dichas cifras.*

195. Como P_n también será igual á $P_o + S(N) - S(D)$ ó lo que es igual á $P_o + S\,(N-D)$ tendremos también que

$q = \sqrt[n]{1 + \frac{S(N-D)}{P_o}}$ de donde deducimos la ley

3.ª *El valor de la razón q del crecimiento de la población se obtiene extrayendo la raiz enésima de la unidad incrementada en una fracción cuyo numerador sea el exceso de los nacimientos sobre las defunciones, durante el periodo de n años y cuyo denominador sea la cifra de la población del primer año* P_o.

196. Siendo q, en general, mayor que la unidad, podemos hacerla igual á $1 + r$ y siendo poco diferente de uno supondremos r es inferior á la unidad. Si q fuese inferior á la unidad la forma adoptada sería aplicable sin más que suponer á r negativa. Por lo tanto podemos establecer que $q^n = (1 + r)^n = 1 + n\,r + ...$; despreciando las potencias de r desde la segunda tendremos que,

$P^n = P_o\,(1 + n\,r)$; de donde $r = \frac{P_n - P_o}{P_o} \cdot \frac{1}{n}$ y de aquí la ley

4.ª *Se obtendrá un valor muy aproximado de la razón q agregándole á la unidad la enésima parte de la fracción que nos exprese el crecimiento relativo de la población en el periodo considerado.*

197. Creciendo el tiempo en progresión aritmética y la población en progresión geométrica se vé que á los tiempos o, t, 2t, ... nt corresponden las poblaciones P_o, P_1, P_2, ... P_n y si tomamos á t como unidad de tiempo y á P_o como unidad de población, las dos progresiones se convierten en

$$o\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ .....\ n$$
$$1\ ,\ q,\ ,\ q,^2\ q^3\ .....\ q^n$$

de donde $n = \log.\,q^n$; y pasando al sistema decimal $\log.\,q^n = n \log.\,q$. Como $q^n = \frac{P_n}{P_o}$ y $n = \frac{nt}{t}$ sustituyendo se tiene $\log.\,\frac{P_n}{P_o} = \frac{nt}{t} \log.\,q$; haciendo

$$\frac{n \log. q}{t} = a \quad \text{y sustituyendo} \quad \log. \frac{P_n}{P_o} = at$$

$$\text{de donde} \quad P_n = P_o \, 10^{at} \ (2)$$

Cuya fórmula es la expresión de la ley

5.ª *La curva que representa el acrecentamiento de la población es una logarítmica cuyas abcisas son los tiempos y cuyas ordenadas son las poblaciones correspondientes á cada uno.*

198. Diferenciando la ecuación (2) se tiene

$\frac{dP}{dt} = a \,.\, P_o \,.\, 10^{at} \,.\, l.\, 10$ y siendo M el módulo por quien es preciso multiplicar los logaritmos neperianos para convertirlos en vulgares se tendrá que

$$\frac{dP}{dt} = \frac{a}{M} \times P_o \,.\, 10^{at} = \frac{a \,.\, P_n}{M} \ (3)$$

Diferenciando nuevamente se tiene que

$$\frac{d^2 P}{d t^2} = a \,.\, P_o \,.\, a \,.\, 10^{at} \,.\, l\,10 \,.\, l\,10 =$$

$$a^2 P_o \,.\, \frac{M^2}{1} \,.\, \ 10^{at} = \frac{a^2 P_n}{M^2}$$

Vemos que la segunda derivada es constantemente positiva, lo que nos dice que la curva vuelve su convexidad hacia el eje de las abcisas.

Sustituyendo en la primera derivada (3) los infinitamente pequeños dP y dt por las cantidades muy pequeñas DP y Dt y haciendo á Dt igual á la unidad de tiempo se tiene

$$M.\,DP = a.\,P \quad \text{de donde} \quad \frac{DP}{P} = \frac{a}{M}$$

Ahora bien, siendo DP muy pequeño, pero constante, y creciendo P conforme crece el tiempo, se vé que el coeficiente $\frac{a}{M}$ de crecimiento vá sin cesar disminuyendo; pero en este coeficiente, M es constante y solo a es variable y siendo $a = \frac{\log. q}{t}$ se vé que si a disminuye tambien debe hacerlo log q y por lo tanto q; de aquí se deduce la ley

6.ª *La razón q del crecimiento de la población vá sin cesar disminuyendo conforme aumenta el tiempo á partir de un cierto valor de la población.*

199. Esta disminución se considera proporcional á la relación entre la población llamada *superabundante* y la población existente. Se llama población superabundante á la diferencia entre la población existente y la *población normal*, que definiremos mas adelante. Según esta hipótesis la ecuación (3) puede escribirse

$\frac{M . dP}{P . dt} = a - n \frac{(P - P')}{P}$ (4) llamando P' á la población normal. Efectuando operaciones

$\frac{M}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{n P' - P (n - a)}{P}$; haciendo $n - a = m$ y $n P' = m p$ se tendrá $\frac{M}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{m p - m P}{P} = \frac{m (p - P)}{P}$

de donde $M . \frac{dP}{dt} = m (p - P)$ y $d t = - \frac{1}{m} \cdot \frac{M . dP}{P - p}$

Integrando se tiene

$$t + \text{constante} = - \frac{M}{m} \int \frac{dP}{P - p} = - \frac{M}{m} \, l (P - p)$$

ó bien $t + \text{constante} = - \frac{1}{m} \log (P - p)$; haciendo $t = o$ se tendrá $\text{constante} = - \frac{1}{m} \log. (P_o - p)$ y por

$$\text{tanto } t = \frac{1}{m} \Big(\log. (P_o - p) - \log. (P - p) ; \Big)$$

cuya igualdad puede ponerse bajo la forma

$$t = \log. \left(\frac{P_o - p}{P - p} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5)$$

Vemos, pués, que la ecuación que nos expresa el tiempo en función de la población es también una logarítmica.

Si en la ecuación (5) hacemos $P - p = \frac{n P_o}{n - a}$ se tiene para t el valor $+ \infty$ lo cual nos dice que esta logarítmica tiene una asíntota paralela al eje xx'. Así, pués, podemos deducir la ley

7.ª *Toda población tiene teóricamente un límite máximo al cual se aproxima indefinidamente. Este límite es variable según los valores que se tomen como punto de partida para calcularlo.*

200. Diferenciando nuevamente la ecuación (4) se tiene que $\frac{d^2P}{dt^2} = -n$ puesto que a es yá un valor constante. Lo cual nos dice, que la curva presenta su concavidad hacia el eje de las abcisas y que cambiará de sentido cuando $n = o$; pero para dicho valor la fracción

$\frac{P - P'}{P} = o$ de donde $P = P'$; así, pues, las ecuaciones (3) y (4) se convertirán ambas en la $\frac{dP}{dt} = \frac{a}{M} \cdot P'$ y por lo tanto las curvas expresadas por ellas serán una misma, cuyo punto de inflexión corresponde á la ordenada P'. A la población P' se le llama *población normal.*

201. Para determinar las cantidades m y P = población máxima se hallan experimentalmente tres valores de P; P_o, P_1 y P_2 correspondientes á los tiempos t_o, $t_1 = t_o + a$ y $t_2 = t_o + 2a$ entre los cuales podemos establecer las dos ecuaciones

$$t_1 = \frac{1}{m} \cdot \log. \left(\frac{P - P_o}{P - P_1}\right) \quad t_2 = \frac{1}{m} \cdot \log. \left(\frac{P - P_1}{P - P_2}\right)$$

de las cuales se deduce eliminando m que

$$\log.\,(P - P_o) = \log.\,\frac{(P - P_1)^2}{P - P_2}$$ y pasando á los números

$$P - P_o = \frac{(P - P_1)^2}{P - P_2}$$ ó bien

$$P^2 - P.P_o - P.P_2 + P_o\,.\,P_2 = P^2 + P_1{}^2 - 2\,P.\,P_1$$

de donde $P\,(2\,P_1 - P_o - P_2) = P_1{}^2 - P_o\,.\,P_2$

$$y\ P = \frac{P_1{}^2 - P_o\,.\,P_2}{2\,P_1 - (P_o + P_2)}$$

Hallado el valor de P el de m puede determinarse por una cualquiera de las dos ecuaciones establecidas.

CAPÍTULO IX.

DEMOLOGÍA DINÁMICA.—NATALIDAD.

SUMARIO.—Leyes generales de la natalidad.—Leyes de la reproducción.—Ley del sexo de los nacidos.

202. Las leyes de la natalidad son las mismas que las de la población deduciéndose fácilmente fórmulas análogas. De las igualdades $N = n. P$ y $P_n = P_{n-1} . q$ se deducen las siguientes:

$$N_1 = P_1 . n$$
$$N_2 = P_2 . n = P_1 . n . q = N_1 . q$$
$$N_3 = P_3 . n = P_1 . n . q^2 = N_1 . q^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$N_n = P_n . n = P_1 . n\, q^{n-1} = N_1 . q^{n-1}$$
$$N_{n+1} = N_1 . q^n$$

Es decir, que los nacimientos de un país crecen según una progresión geométrica cuya razón q es la misma del crecimiento de la población que podrá hallarse por la fórmula

$$q = \sqrt[n]{\frac{N_{n+1}}{N_1}} \quad (6)$$

203. Como en la práctica es imposible evaluar y separar en la población el valor exacto de la influencia de la migra-

ción, resulta que, en general, el valor de q hallado no concuerda con el deducido por medio de la fórmula (6). También debemos observar que sobre la cifra de los nacimientos obran ciertas influencias cuyo efecto desaparece ó se anula en la población.

204. Como los tiempos crecen en progresión aritmética, estamos en el mismo caso que cuando nos ocupábamos de la población y por lo tanto podrán deducirse aquí consecuencias análogas haciendo las mismas hipótesis. Así, vemos, que la curva de los nacimientos será una logarítmica, que el coeficiente del crecimiento $\frac{a}{M}$ se vá debilitando conforme crece el número N de los nacimientos, que la curva debe presentar una inflexión, y todas las demás consecuencias yá expuestas.

205. Estas leyes teóricas de la natalidad son modificadas por las *leyes de la reproducción*, que según el Dr. J. Gerard (1) son las siguientes:

1.ª *Cuanto mas bajo está un sér en la escala animal mas apto es para multiplicarse.*

2.ª *En una misma especie, cuanto mayor es la miséria mas se reproduce.*

3.ª *La cantidad de los productos está en razon inversa de su calidad.*

4.ª *Cuanto mas grande es la natalidad de un país, mas corta es su longevidad media.*

5.ª *Si en un indivíduo solo se consideran las células, cuanto mas nobles sean, menos se reproducirán.*

6.ª *Todo gasto cerebral quita diez veces su equivalente de gastos genitales.*

Las leyes 1.ª, 3.ª, 5.ª, y 6.ª son demostradas por la História natural y la Medicina experimental. Las 2.ª y 4.ª son

---

(1) Nuevas causas de esterilidad en ambos sexos por el Dr. J. Gerard traducción del Dr. Luis Marco.

comprobadas por la Estadística; en efecto, en una gran población como París se observa que en los barrios ricos la relación de los hijos con los matrimonios es de 11 por 100, en los que domina la clase media es de 120 por 100; y en los barrios pobres se eleva á la de 400 por 100.

206. Son notables los siguientes párrafos con que termina la demostración de dichas leyes el autor citado: Quizás se invoquen otras razones que la miséria; se dirá que si los ricos no tienen hijos, es porque no quieren tenerlos, y hacen todo lo posible para ello, al paso que el obrero vá derecho al fin y no hace trampas nunca.=Los médicos sabemos lo contrario; solo encontramos la esterilidad en las clases ricas, y nos constan todos los esfuerzos que hacen por su parte para tener hijos. También sabemos que el mayor número de los obreros casados son malthusianos y hacen todo cuanto pueden para no aumentar sus cargas; sin embargo tienen hijos á pesar de las precauciones mejor tomadas. De aquí debemos deducir que esto es cuestión de terreno. ¿No vemos en la jardinería cómo los horticultores hacen estériles á las flores mediante el abono? Transforman á voluntad los estambres y los pistilos en pétalos; verdad es que las flores se vuelven dobles, pero á expensas de su reproducción. ¿Se quiere devolverlas su fecundidad? Pues basta volverlas á poner en tierra no abonada: entregadas á sí mismas, desaparecen las corolas, y los estambres y pistilos recobran sus funciones. La vaca normanda se vuelve estéril en medio de los sabrosos pastos de Normandía, donde engorda; la vaca bretona, por el contrario, produce mucho sin tener mas que un alimento flojo en medio de las landas incultas de su Bretaña.

El autor citado explica este fenómeno como un caso de *saturación*: el organismo bien alimentado rechaza nueva materia y en cambio aquel que se halla falto de alimento absorve cuanto se pone en contacto con él.

207. Otra ley muy notable de la natalidad es la que se refiere al sexo de los nacidos. Si clasificamos por razón de su

sexo un número de nacimientos bastante grande, observamos que *siempre el número de varones excede al de hembras y la relación entre unos y otras es mayor que la unidad, siendo su valor por término medio igual á 1,055 y variando entre 1,066 y 1,040.*

En efecto, parece ser que el azar es solo el que determina el sexo del nacido; pero no es así, pues si no interviniera ninguna causa las separaciones en el valor de las probabilidades no deberían exceder de 0,0015 y sin embargo vemos que refiriéndonos á los datos de España relativos al periodo 1861 á 70 encontramos que la probabilidad de los varones es 0,5159 y la de las hembras 0,4841 que difieren en 0,0318. Considerando los datos de varias naciones que figuran en el *Movimiento de la población de España en el decenio de 1867-70*, hallamos para la primera 0,5129 y para la segunda 0,4871 que difieren en 0,0258; Block con referencia á Francia y al año 1825 obtiene los valores siguientes: varones 0,5157 = Hembras 0,4823 = Diferencia 0,0334. Queda ahora por determinar qué causa será esta. Vemos que por sus caractéres es comun, constante y general, por lo tanto debe depender solo de la constitución de los padres; pero todavía no se há podido establecer de un modo claro y evidente, si el nacimiento de varon depende de la mayor energía del padre sobre la madre ó bien del predominio de esta sobre aquel, ó de la mayor energía de ambos según la época de la concepción.

CAPÌTULO X.

DEMOLOGÍA DINÁMICA.—MORTALIDAD.

SUMARIO.—Leyes generales de la mortalidad.—Medida de la supervivencia, mortalidad, vida media y vida probable de cada edad.—Ley de la supervivencia según las edades.—Fórmula de Makeham.—Fórmula de Gompertz.—Aplicación á España.—Estudio de la fórmula de Gompertz.—Ley de la mortalidad.—Ley de la vida probable.—Ley de la vida media.

208. De las igualdades $D = n P$ y $P_n = P_{n-1} \cdot q$ se deducen las siguientes:

$$D_1 = P_1 \cdot n$$
$$D_2 = P_2 \cdot n = P_1 \cdot n \cdot q = D_1 \cdot q.$$
$$D_3 = P_3 \cdot n = P_1 \cdot n \cdot q^2 = D_1 \cdot q^2$$

. . . .

. . . .

$$D_n = D_1 \cdot q^{n-1}$$
$$D_{n+1} = D_1 \cdot q^n$$

De las cuales se deducen á su vez las mismas leyes que hemos establecido para la población y la natalidad: pero la mortalidad no solo varía en el tiempo y en el espacio sino tambien en la extensión. Las variaciones en el espacio se determinan según las reglas generales que hemos dado, pues dependen mas bien de causas particulares que no pueden.

teóricamente, someterse á fórmulas. Las variaciones en la extensión son por el contrario dependientes de causas generales y por lo tanto se ha tratado de someterlas al cálculo, para deducir su ley.

209. Sea N el número de los nacimientos de un año y D el de las defunciones, que suponemos descompuesto en sus diferentes edades, d_o (menores de un año), d_1 (de un año) d_2 (de dos años), ... d_n (de n años). Teniendo en cuenta la ley del crecimiento de la población y el número de los nacimientos de los años anteriores al que se considera, que serán $\frac{N}{q}$, $\frac{N}{q^2}$, $\frac{N}{q^n}$, obtendremos para la mortalidad en cada grupo de edades los valores

$$\frac{d_o}{N}, \frac{d_1}{\frac{N}{q}}, \frac{d_2}{\frac{N}{q^2}}, \ldots\ldots \frac{d_n}{\frac{N}{q^n}}$$ que se transforman en

$$\frac{d_o}{N}, \frac{d_1}{N} \cdot q, \frac{d_2}{N.} \cdot q^2, \ldots\ldots \frac{d^n}{N} \cdot q^n.$$

Los supervivientes de cada edad serán $V_1 = N - d_o$,

$$V_2 = V_1 - d_1 q, \quad V_3 = V_2 - d_2 \cdot q^2 \ldots..$$

$V_{n+1} = V_n - d_n \cdot q^n$; que sumadas ordenadamente nos dan $V_{n+1} = N - d_o - d_1 \cdot q - d_2 q^2 - d^3 q^2 \ldots.. d_n q^n$. Así, pues, *el número de supervivientes de una cierta edad* ($n + 1$) *años se obtiene restando del número de nacimientos de aquel año los de fallecidos de menos de un año, de un año, de dos, etc., multiplicados sucesivamente por las potencias de q á partir de la cero.*

Si en dicha fórmula hacemos $q = 1$, lo cual supone una población estacionaria, se tendrá,

$$V_{n+1} = N - d_e - d_1 - d_2 \ldots.. d_n \quad (1)$$

210. Esta manera de calcular la ley de la mortalidad mezcla en una misma fórmula elementos heterogéneos, pues es preciso comparar los fallecidos de cada edad con los números de nacimientos de los años anteriores; y si partimos

solo de un cierto número de nacimientos es preciso calcular los supervivientes por fórmulas puramente teóricas. Este método es conocido con el nombre de *método indirecto* ó *método de cálculo.*

211. El método llamado *directo* consiste en comparar los fallecidos de una cierta edad con los vivos de la misma, que nos facilita el censo de la población. Así llamando P_o, P_1, P_2, ... P_n á los indivíduos que según el censo tienen, menos de un año, un año, dos años, ... n años, el valor de la mortalidad en cada edad estará representado por

$$\frac{d_o}{P_o},\ \frac{d_1}{P_1},\ \frac{d_2}{P_2},\ .....\ \frac{d_n}{P_n}$$

El número de supervivientes de cada edad será

$$V_1 = P_o - d_o\ ,\ V_2 = P_1 - d_1\ ,\ V_3 = P_2 - d_2\ ,....$$
$$V_{n+1} = P_n - d_n$$

Si suponemos la población estacionaria

$$V_1 = P_1\ ,\ V_2 = P_2\ ,\ .....\ V_n = P_n$$

y sumando $V_{n+1} = P_o - d_o - d_1 - d_2 ..... d_n$ y como P_o, ó sea el número de indivíduos de menos de un año, será igual al número de nacidos del año mismo, se obtendrá la misma fórmula anterior (1).

212. Conocidos los supervivientes de cada edad puede calcularse la población del año siguiente, puesto que

$$P' = N + \frac{V_1}{q} + \frac{V_2}{q_2} + ...$$

ó bien $P' = N + V_1 + V_2 + ... + V_n$ (2) suponiendo á la población estacionaria.

213. Pero como el indivíduo que fallece este año (1898) de edad de 20, por ejemplo, lo mismo há podido nacer el año 1877 que el 78, es conveniente calcular el número de supervivientes de cada edad tomando la media aritmética entre cada dos cifras; así, los supervivientes de menos de un año serán

$\frac{N + V_1}{2}$, los de un año $\frac{V_1 + V_2}{2}$, ... y sumando

se tiene $P' = \frac{1}{2} (N + V_1 + V_1 + V_2 + V_2 + ...)$

$$= \frac{1}{2} N + V_1 + V_2 + ...$$

cuya fórmula solo se diferencia de la (2) en que se ha sustituido $\frac{1}{2}$ N en vez de N.

214. Ahora, como en la práctica no es posible valerse de los datos de defunciones referentes á un solo año, sino que si se toma el promedio de varios años, se tropiezan con otras dificultades, que yá expondremos en la parte práctica al mismo tiempo que la manera de resolverlas.

215. Una vez hallados los valores de la mortalidad en cada edad si se reunen en un cuadro de simple entrada en que al lado de la edad figure su mortalidad, dicho cuadro recibe el nombre de *tabla de mortalidad.* Pero como no solo nos es necesario conocer las probabilidades de muerte, sino que también nos es preciso saber las probabilidades de vida en cada edad, estas tablas se han llamado antes muy impropiamente tablas de mortalidad y hoy reciben el nombre de *tablas de supervivencia.* La forma general en que se presentan estas tablas es la siguiente: Se parte de un cierto número de nacimientos, por ejemplo, 10.000 y enfrente de cada edad se coloca el número de supervivientes de la misma; la probabilidad de llegar á una cierta edad está dada por la relación del número de supervivientes al número total de nacidos (10.000). La probabilidad $\frac{1}{2}$ nos indicará la combinación mas probable por cuya razón á la edad correspondiente se llama *vida probable de la generación.* Si determinamos la misma probabilidad á partir de los indivíduos de cada edad, el número de años que media entre la edad hallada y la que nos sirve de partida será la *vida probable* de los indivíduos

de dicha edad. El cuadro formado por las edades y la vida probable en cada una es lo que se llama *Tabla de vida probable*. Inmediatamente se nos ocurre pensar en el número de años que por término medio deben vivir los indivíduos, á cuya cantidad se denomina *vida media*. La vida media se determina sumando los años que viven todos los indivíduos de una edad y dividiendo dicha suma por el número de indivíduos; es, como su nombre lo indica, un término medio. Si suponemos que todos los que fallecen lo hacen á la edad que marca su vida media y á todos los indivíduos de la población de un país los consideramos agrupados según sus edades, la vida media será un número tal que multiplicado por la cifra de los fallecidos nos dé la población existente. Así, pues, $V_x . D = P$ de donde $V_m = \frac{P}{D}$. Aplicando esta fórmula á España, nos dá según los datos del Censo de 1887 y el de las defunciones del periodo 1878 á 88 que $V_m = 32$ años y 6 meses. Cuando solo se dice *vida media* sin referirse á ninguna edad, quiere expresarse la vida media de los reciennacidos. Tambien puede determinarse la vida media en función solamente de los vivos, suponiendo la población estacionaria, por medio de la fórmula

$$V_m = \frac{P}{N}$$

Así pues la vida media se calcula tambien dividiendo la cifra de un censo por el número de nacidos en el año anterior ó por el promedio de los que han tenido lugar en el periodo anterior. Aplicando esta teoría á España resulta que según los datos del censo de 1887 y los de nacimientos de 1878-88 que $V_m = 28$ años y 3 meses.

216. Hasta ahora hemos expuesto solamente la manera de determinar la *mortalidad*, la *supervivencia*, la *vida probable* y la *vida media* por edades, pero no hemos deducido la ley de la variación de cada una según dichas edades. Empezaremos por la determinación de la ley de supervivencia y

sucesivamente estableceremos las de mortalidad, vida probable y vida media.

217. Ley de supervivencia.—Para hallar la ley de supervivencia en función de la edad supondremos que existe siempre un grupo de indivíduos de una cierta edad *c* tal que su probabilidad de vivir x años más, es proporcional á la que tienen dos grupos, cuyas edades son *a* y *b*, de vivir esos x años. Las probabilidades de vivir x años, los indivíduos de las edades *a*, *b* y *c* estarán dadas por las fracciones $\frac{f(a+x)}{f(a)}$, $\frac{f(b+x)}{f(b)}$, $\frac{f(c+x)}{f(c)}$ representando por f(z) el número de indivíduos de la edad z. La probabilidad de llegar, los dos grupos, á las edades $a+x$ y $b+x$ será (56) $\frac{f(a+x)}{f(a)} \cdot \frac{f(b+x)}{f(b)}$ cuya cantidad deberá ser igual á $G\frac{f(c+x)}{f(c)}$, segun la hipótesis, siendo G una función de a y de b. Tomando logaritmos se tiene que

$$f(a+x) - l\,f(a) + l\,f(b+x) - \log. f(b) =$$
$$l\,G + l\,f(c+x) - l\,f(c) \text{ ó bien } F(a+x) + F(b+x) =$$
$$F(e+x) + H.$$

Tomando derivadas con relación á x y haciendo $F'(x) = F_1(x)$ se tiene $F_1(a+x) + F_1(b+x) = F_1(c+r)$ (1) haciendo ahora x=o resulta $F_1(a) + F_1(b) = F_1(c)$; por lo tanto tambien deberá verificarse que

$F^1(a+dx)\,F_1(b+dx) = F_1(c+dx)$ que restadas nos dan

$$F_1'(a) + F_1'(b) = F_1'(c) \quad (2)$$

Las funciones que entran en las igualdades (1) y (2) han sido cada una obtenida de la otra de la misma manera, de modo que entre ellas debe existir una relación constante, lo cual exige que sus derivadas crezcan ó decrezcan con la misma rapidez; es decir, que

$$\frac{F_1''(a)}{F'(a)} = \frac{F_1''(b)}{F_1'(b)} = \frac{F_1''(c)}{F_1'(c)}$$

Ahora bien, la función en que esto ocurre, es decir, que sus derivadas crecen ó decrecen con la misma rapidez es la función exponencial e^x y como x debe ser una función de la edad z, la haremos igual á kz y por lo tanto

$$F_1'(z) = G e^{kz} \quad . \quad F_1(z) = H_1 e^{kz} + C_1 \ ,$$

$$F(z) = H_1 e^{kz} + C_1 z + C_2$$

y finalmente $f(z) = e^{H_1 e^{kz} + C_1 z + C_2}$ (3)

Esta fórmula fué establecida por Makeham y recibe su nombre. Si en dicha fórmula hacemos $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ se tendrá

$$f(z) = G e^{He^{kz}} \quad (4)$$

que se llama fórmula de Gompertz, nombre de su inventor.

218. *Cálculo de la fórmula de Makeham.*—Hallados directamente por la experiencia cuatro valores de f(z) tales como $f(z) = A$, $f(z') = B$, $f(z'') = C$ y $f(z''') = D$, dividiendo cada uno por el siguiente hallaremos:

$$e^{H_1(e^{kz} - e^{kz'}) + C_1(z-z')} = \frac{A}{B} = Q_1$$

$$e^{H_1(e^{kz'} - e^{kz''}) + C_1(z'-z'')} = \frac{B}{C} = Q_2$$

$$e^{H_1(e^{kz''} - e^{kz'''})} + C_1(z''--z'') = \frac{C}{D} = Q_3 \quad (5)$$

Tomando logaritmos y restando se obtienen las (6)

$$H_1(e^{kz} - 2e^{kz'} + e^{kz''}) = l\,Q_1 - l\,Q^2 = L$$

$$H_1(e^{kz'} - 2e^{kz''} + e^{kz'''}) = l\,Q_2 - l\,Q_3 = L'$$

que pueden ponerse bajo la forma

$$H_1 e^{kz}[1 - 2e^{k(z'-z)} + e^{k(z''-z)}] = L$$

$$H_1 e^{kz'}[1 - 2e^{k(z''-z)} + e^{k(z'''-z)}] = L'$$

Tomando nuevamente logarítmos y restando se tiene

$$k(z-z') = l\,L - l\,L' \text{ de donde } k = \frac{lL - lL'}{z-z'} \quad (7)$$

Conocido el valor de k cualquiera de las ecuaciones (6) nos dará el de H_1 y conocidos ambos cualquiera de las (5) nos dará el de C_1, los cuales sustituidos en la (3) nos determinan á C_2.

219. *Cálculo de la fórmula de Gompertz.*=Una vez obtenida la fórmula que nos expresa la ley de supervivencia vamos á tratar de su aplicación. El problema consiste en la determinación de las tres constantes K, H y G que entran en ella. Desde luego la supervivencia de los primeros años no es conveniente obtenerla por el cálculo, pues la mortalidad de 0 á 5 años experimenta grandes y bruscas variaciones; suele en general aplicarse esta fórmula desde los 10 á los 90 años: pero no es conveniente servirse de los mismos valores de las constantes para toda ella, sino que se descompone en varios periodos. Para calcular las constantes de que nos ocupamos tomaremos directamente tres valores correspondientes á tres edades que difieran entre sí el mismo número de años, por ejemplo á los 30, 60 y 90 años ó bien á los 10, 20 y 30 años, designando por A, B y C dichos valores tendremos las tres ecuaciones

$$G e^{He^{kz}} = A \quad G e^{He^{kz'}} = B \quad G e^{He^{kz''}} = C \quad (8)$$

Tomando logaritmos neperianos el sistema se convierte en el

$$(9) \quad lG + He^{kz} = lA \quad lG + He^{kz'} = lB \quad lG + He^{kz''} = lC$$

que restadas dan (10) $H\left(e^{kz} - e^{kz'}\right) = l\,A - l\,B$

$$H\left(e^{kz'} - e^{kz''}\right) = l\,B - l\,C$$

Haciendo los segundos miembros iguales respectivamente á L y L' el sistema (10) puede representarse por el

$$(11) \quad He^{kz}\left(1 - e^{k(z'-z)}\right) = L \quad He^{kz'}\left(1 - e^{k(z''-z')}\right) = L'$$

Tomando nuevamente logaritmos neperianos y restando se tiene

$$k\,(z - z') = l\,L - l\,L' \text{ y } k = \frac{lL - lL'}{z - z'} \quad (12)$$

Este valor de k sustituido en una de las ecuaciones (10) nos dá para H el valor

$$H = \frac{lA - lB}{e^{kz} - e^{kz'}} \quad (13)$$

Conocidos ambos, cualquiera de las (9) nos dá el valor de G, pues de

$lG = lA - He^{kz}$ se deduce $G = \text{antilog.} (lA - He^{kz})$ (14)

220. Aplicando estas fórmulas á la tabla de supervivencia publicada por el Instituto Geográfico y Estadístico, con referencia á los años 1878-82, en la obra *Movimiento de la población de España en el septenio de 1886-92* encontramos, para las constantes que figuran en la de Gompertz, los valores

$$k = 0{,}07396\ 793 \qquad H = -0{,}0069901$$
$$\log. k = \bar{2}{,}869\ 0435 \qquad \log. (-H) = \bar{3}{,}8444830$$
$$G = 460{,}751$$
$$\log. G = 2{,}663\ 4663$$

habiendo partido de los valores de z=30 años,=60 años, =90 años y por lo tanto siendo aplicable á toda la tabla. Los valores obtenidos para algunas edades figuran á continuación

30 años...	.432'0	70 años.....	133'4
40 »	.....402'6	80 »	34'3
50 »	.....347'4	90 »	2'0
60 »	.....255'0		

221. Comparando estos valores, con los deducidos por dicho Centro, que figuran en el capítulo siguiente, notamos algunas diferencias, que aunque pequeñas, pudieran hacer creer que la tabla citada era errónea por haber sido calculada por un procedimiento gráfico; mas no es así, son debidas á que aunque estas fórmulas expresan la ley de supervivencia ó mejor dicho la forma de dicha ley, para que den todo el resultado que de ellas puede esperarse, es preciso irlas *apoyando* contínuamente en los resultados experimentales, es decir, que su verdadero papel es el de *fórmulas de interpolación*. Así, dividiendo en tres el intérvalo anterior de los

30 á los 90 años, obtendremos los valores siguientes para las constantes:

$$\text{De 30 á 50...}\left\{\begin{array}{l} K = 0,\ 027\ 157\ 794 \\ H = -\ 0,\ 163\ 437 \\ G = 624{,}88 \end{array}\right.$$

$$\text{De 50 á 70...}\left\{\begin{array}{l} K = 0,083\ 233\ 406 \\ H = -0,003\ 129\ 73 \\ G = 404'\ 63 \end{array}\right.$$

$$\text{De 70 á 90...}\left\{\begin{array}{l} K = 0,072\ 495\ 648 \\ H = -0,008\ 142\ 222 \\ G = 515'\ 35 \end{array}\right.$$

222. Los valores de la función son los que figuran en el cuadro inserto á continuación, cuya primera columna contiene las edades y la segunda los supervivientes.

Años	Supervivientes	Años	Supervivientes	Años	Supervivientes
30	432'00	50	331'00	70	140'00
31	427'64	51	325'28	71	127'08
32	423'19	52	319'17	72	114'38
33	418'68	53	312'67	73	102'14
34	414'08	54	305'65	74	90'43
35	409'35	55	298'40	75	79'34
36	404'68	56	290'62	76	68'93
37	399'78	57	282'39	77	59'25
38	394'98	58	273'70	78	50'37
39	390'03	59	264'57	79	42'28
40	385'00	60	255'00	80	35'03
41	379'90	61	244'98	81	28'62
42	374'73	62	234'54	82	23,03
43	369'49	63	223'70	83	18'24
44	364'19	64	212'48	84	14'18
45	358'82	65	200·93	85	10'82
46	353'27	66	189'08	86	8'10
47	347'88	67	177'00	87	5'93
48	342'31	68	164'74	88	4'23
49	336'68	69	152'38	89	2'95

223. *Estudio de la fórmula de Gompertz.*—La función (4) se traducirá gráficamente por una curva que se irá aproximando cada vez mas al eje x x' puesto que su primera derivada

$$f'(z) = G e^{He^{kz}} . He^{kz}$$

es siempre negativa. Dicha curva estará compuesta de dos ramas, una de ellas volverá su concavidad hacia las xx' negativas, y la otra su convexidad. En efecto, la segunda derivada

$$f''(z) = G e^{He^{kz}} . He^{kz} (1 + He^{kz})$$

se anula para el valor $1 = - He^{kz}$ ó lo que es lo mismo, tomando logarítmos neperianos $0 = l\,H + k\,z$ de donde

$$z = \frac{-l\,H}{k} = m.$$

Para todos los valores de z menores que *m*, He^{kz} será menor que uno y por lo tanto $f''(z) < 0$; para todos los valores de z mayores que m la cantidad entre paréntesis será negativa y $f''(z) > 0$

Cuando $z = +\infty$ entonces la función f(z) toma un valor muy pequeño que tiene por límite cero, por lo tanto la curva tendrá una asíntota que será el mismo eje xx'. Si $z = -\infty$ entonces $f(z) = \infty$, lo cual nos dice que para valores de z muy pequeños la función toma valores muy grandes de modo que la curva presentará un máximo en el eje y y'.

224. *Ley de la mortalidad.*—De la fórmula de Gompertz puede deducirse esta ley, pues siendo la medida de la mortalidad la relación del número de fallecidos al de supervivientes de cada edad, se tendrá llamando F (z) á dicha ley

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z')}{f(z)} = 1 - \frac{f(z')}{f(z)}$$

$$\text{ó bien } F(z) = 1 - \frac{f(z+1)}{f(z)}$$

Sustituyendo valores, y designando por m el valor de la constante $e^k - 1$ se tendrá

$$F(z) = 1 - e^{mHe^{kz}}$$

F (z) no podrá anularse, pues para cualquier valor de z nunca se verificará que

$$mHe^{kz} . \log. e = o$$

225. La curva que represente á F (z) tendrá un mínimo para el menor valor de z y un máximo para el mayor. Como la primera derivada es siempre positiva (puesto que m y H son menores que cero), la función irá aumentando para valores crecientes de z. La segunda derivada

$$F''(z) = mHe^{kz} . e^{He^{kz}} . He^{kz} + m\, e^{He^{kz}} . HKz\, e^{kz}$$

se anula para el valor $-He^{kz} = 1$ ó sea para el de

$$z = \frac{-l(-H)}{K} = n$$

Todos los valores de z inferiores á n hacen á $F''(z) > 0$ por lo tanto la curva volverá su concavidad hacia las x positivas y todos los valores de z superiores á n harán que $F''(z) < 0$; la curva se compondrá de dos ramas que tendrán su punto de inflexión para el valor de $z = n$. Haciendo aplicación á España y á los datos de 1878-82 encontramos, según los valores generales de las constantes (220), para n el de 67 años y 4 meses y dividiendo el intérvalo de 30 á 90 años en otros tres (221) hallamos para la mortalidad las cifras siguientes:

30 años	0,0102	50 años	0,0176
35 »	0,0117	55 »	0,0268
40 »	0,0134	60 »	0,0408
45 »	0,0154	65 »	0,0626
70 años	0,0955	90 años	0,3412
75 »	0,1312		
80 »	0,1831		
85 »	0,2521		

226. *Ley de la vida probable.*—Se observa que desde los 15 años la vida probable vá disminuyendo constantemente. Como las causas que obran sobre la mortalidad pueden suponerse constantes desde los 20 á los 60 años, es decir, mientras el organismo humano se halla en su completo desarrollo y en su perfecto estado de funcionamiento, podremos por lo tanto obtener la ley que regula la vida probable durante dicho periodo, la cual no podrá ser aplicada á edades anteriores ni posteriores, sino mediante ciertas correcciones ó modificaciones. Como, según hemos dicho, la vida probable disminuye con la edad, su ley debe ser función de dicha edad, cuya derivada será negativa; así, pues, $f'(z) < 0$ y como para $z = o$ la vida probable tiene un cierto valor determinado y constante en cada caso, resulta que la función será de la forma

$$f(z) = A - f_1(z)$$

Para valores crecientes de z, $f(z)$ debe ser decreciente, luego si $z = 0$ $f_1(z) = 0$ lo cual nos dice que dicha función debe carecer de término independiente y que por lo tanto podrá ser representada bajo la forma

$$f_1(z) = z \, . \, f_2(z)$$

Ahora, bien, como $f(z)$ solo puede tomar el valor cero en el límite de la vida, se deduce que no puede anularse mas que para un solo valor de z, debiendo ser por consiguiente, de primer grado con relación á dicha variable, por lo tanto $f_2(z) = B$ y la ley de la vida probable tendrá por expresión

$$f(z) = A - B z$$

227. Los valores de las constantes A y B los determinaremos tomando dos valores de $f(z)$, en lo posible los mas extremos y resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = A - B z \\ f(z') = A - B z' \end{array}\right\} \text{ que dá } \left\{\begin{array}{l} B = \dfrac{f(z) - f(z')}{z' - z} \\ A = f(z) + B z \end{array}\right.$$

228. Según los datos publicados por el Instituto Geográfico y Estadístico relativos al periodo de 1878-82 se tiene que para $z=20$ y $z'=60$ $f(z)=41\frac{7}{12}$ $f(z')=11\frac{1}{12}$; de donde $B=0{,}764$ y $A=56'83$. Calculando con estos datos los valores de la vida probable á los 30, 40 y 50 años obtenemos respectivamente 33 años y 10 meses, 26 años y 3 meses, y 18 años y 7 meses; los que comparados con los publicados por dicho Centro acusan diferencias inferiores á 1 año, por lo tanto podemos decir que su error no llega á 6 meses. Si calculamos los valores de A y B para intérvalos menores, por ejemplo, de 20 años, la aproximación será mucho mayor.

229. Así, pues, si esta fórmula se usa solo, como lo que debe ser, como una fórmula de interpolación, podemos considerarla como exacta. Para sus aplicaciones usuales y prácticas suele dársele, á la fórmula de que se trata, la forma $y = A - \frac{3}{4}x$. En efecto, el valor de B difiere muy poco de $\frac{3}{4}$ y el de A se debe determinar para cada país y para cada periodo; para España, en el periodo actual, podemos aceptar el de 57 años.

230. La representación gráfica de la vida probable será una línea recta, situada en el primer cuadrante, sirviendo de hipotenusa á un triángulo rectángulo cuyos catetos sean, el valor de $f(5)$ y el valor de z límite de la vida.

231. *Ley de la vida media.*—Valiéndonos de razonamientos análogos á los expuestos para la determinación de la ley de la vida probable, hallaremos para expresión de la ley de la vida media la fórmula

$$V_m = C - D.\,z$$

expresando z la edad y C y D las constantes.

232. Según los datos publicados por el Instituto Geo-

gráfico y Estadístico relativos al periodo de 1878-82 se tiene que para $z = 20$ y $z' = 60$ $f(z) = 38$ y $f(z') = 11\frac{7}{12}$; de donde $D = 0,660$ y $C = 51'2$. Calculando con estos valores la vida media á las edades de 15, 20, 30, 40 y 50 años se obtienen respectivamente los valores 41 años y 4 meses, 38 años, 31 años y 5 meses, 24 años y 9 meses, y 18 años y 2 meses, cuyos valores comparados con los publicados por dicho Centro difieren en cantidades inferiores á medio año.

233. La fórmula usada en las aplicaciones prácticas á las necesidades de la vida es $y = C - \frac{2}{3}x$. El valor de C aplicable á España es 51 años.

234. La representación gráfica es análoga á la de la vida probable.

CAPÌTULO XI.

DEMOLOGÍA DINÁMICA.—TABLAS DE MORTALIDAD.

SUMARIO.—História de las tablas de mortalidad.—Acuerdos del Congreso internacional de Budapest sobre las tablas de mortalidad.—Tablas de supervivencia.—Tablas de mortalidad.—Tablas de vida probable.—Tablas de vida media.

235. La primera tentativa para construir una tabla de mortalidad fué debida á Graunt que en 1661 publicó una obra titulada *Natural and political observations*, etc *upon the bill of mortality*, sirviéndole de base las listas mortuorias que se publicaban en Lóndres, desde 1592. En 1693 el astrónomo Halley construye una tabla de mortalidad, publicada en *Transactions philosophiques,* valiéndose de los datos del movimiento de la población de Breslau (Silesia), recogidos por Neuman, con referencia á los años 1686-91. Esta primera tabla de mortalidad tenía varios defectos, siendo los principales, el suponer la población estacionaria, y el no haber recogido directamente los datos referentes á la población existente, sino que la calculaba para cada uno de los años. En 1671 Juan de Witt presenta á los *Estados generales* de Holanda una tabla construida según los principios del cálculo de probabilidades y fundada en los datos recogidos de rentistas vitalicios. En 1742 otro holandés, Kersse-

boom publica una tabla de mortalidad, valiéndose de los registros de nacimientos y defunciones, y de las listas de seguros sobre la vida. En la misma época 1764, Deparcienx publica en su obra *Sur la probalité de la durée de la vie humaine*, una tabla de mortalidad deducida de noticias recogidas de las llamadas *tontinas*; así, pues, su tabla no se refiere á la población general sino á un grupo escogido, denominándose por lo tanto, *Tabla de mortalidad sobre cabezas escogidas*; por ella se calcularon en 1850 las tarifas de la *Caisse generale des retraites de France*. Sussmilch (1765) en su *Orden divino* publica una tabla de mortalidad formada con datos bastante homogéneos y referentes á un periodo de 30 años; comprendiendo la necesidad de evaluar el acrecentamiento de la población, pidió á Enler su fórmula, debiéndose á esta petición la teoría de la población de tan sábio matemático. Wargentin fué el primero que, resumiendo los excelentes materiales que le daba Suecia, forma sus tablas de mortalidad comparando directamente los fallecidos de sada edad con los vivientes de la misma y distinguiendo los dos sexos de la cifra total de la población (1783). Son también dignas de especial mención las tablas llamadas: de Carlisle (calculada por Miln), la de Northampton (calculada por Price) y la de Duvillard.

236. Todos estos trabajos y tentativas forman la primera parte de la história de las tablas de mortalidad, su periodo *constitutivo*, empezando en el siglo XIX el nuevo periodo *evolutivo*. Los trabajos de los matemáticos Laplace y Fourier (que es el primero que aplica con toda su extensión el análisis matemático á la Estadística (1816-1829), inauguran este periodo; y muy pronto (1839) son seguidos, por los de Moser, Quetelet, Baumhanerg, Heuschling y Farr. Este último en su notable trabajo presentado á la Sociedad Real de Lóndres en 1859, hace notar que no solo la población no es estacionaria sino que tampoco es constante la mortalidad en cada edad, y propone, fundándose en lo que exponemos

antes, que se tome la media entre los fallecidos de cada dos años consecutivos. Berg para Suecia (1865), Kiaer para Noruega, David para Dinamarca (1853), Gisí para Suiza (1867) y Bertillon para Francia (1866), han publicado tablas sirviéndose sólo del método directo y distinguiendo los varones y las hembras del total.

237. La notabilísima obra de Knapp *Ueber die Ermittlung der Sterblichkeit ausden Anfzeichmingen der Bevoel Kerimgz-Statistik* publicada en 1868 y las resoluciones adoptadas por el *Congreso internacional de Estadística* en su novena reunión de Budapest en 1876 fijan definitivamente el fin y los medios de esta teoría, habiéndose ejecutado, conforme á dichos principios y reglas ó aproximándose á ellos en lo posible, los trabajos posteriores entre los cuales nos limitaremos á reseñar las tablas de mortalidad, de vida probable, de vida media y de supervivencia publicadas por el Instituto Geográfico y Estadístico; unas calculadas por el Sr. Merino según los datos del periodo 1861-70, y otras por el personal de Estadística y referentes al de 1878-82.

238. Las resoluciones adoptadas por el Congreso internacional de Budapest respecto á las tablas de mortalidad, fueron las siguientes: (Reseña de la novena reunión del Congreso Internacional de Estadística por el Excmo. Sr. Mariscal de Campo D. Cárlos Ibañez=1877.)

1.ª La idea de mortalidad debe entenderse como relación de los fallecidos con la totalidad de los existentes de una misma edad.

2.ª La mortalidad debe determinarse por lo menos de año en año, procurando además que sea por meses en los que no han cumplido un año y por trimestres en los de dos años.

3.ª La influencia perturbadora de las emigraciones debe eliminarse.

4.ª Como consecuencia de estos principios resultan las adjuntas instrucciones para la reunión de datos relativos á la población.

I. Los datos relativos á nacimientos, defunciones, sobrevivientes, emigrados é inmigrados, deben ser homogéneos refiriéndose á una misma especie de población y tomando por base la población de hecho.

a) Contar en cada censo los indivíduos presentes en la localidad sin excepción.

b) Inscribir completa y exclusivamente los casos de nacimiento y de muerte en el lugar en que acaezcan.

II. Que se clasifiquen los nacimientos, defunciones, vivientes y emigrados por sexo, estado civil, religión y ocupación.

III. Respecto á los nacimientos:

a) Es menester inscribir cada año los nacidos vivos.

b) Recomendar la distinción de estos por los meses del año.

c) Procurar conocer el número anual de los nacidos muertos.

IV. Respecto á las defunciones:

a) Indicar cada año el número de muertos y su clasificación por edad de año en año.

b) Averiguar si el fallecido fué inscripto en el último censo como habitante de la misma localidad en que ha muerto.

c) Hacer la clasificación por meses y trimestres de los párvulos muertos.

V. Respecto al estado de la población:

a) Hacer un censo cada diez años y no perder la série de los censos.

b) Procurar que los censos se hagan al fin ó principio de año.

c) Averiguar en cada censo los que en el anterior fueron inscriptos en el mismo lugar.

VI. Respecto á las emigraciones:

Procurar llevar con iguales clasificaciones que los muertos el registro de inmigrados y emigrados.

239. Hasta aquí los acuerdos del Congreso á los cuales hemos de añadir un corto comentario. Fácilmente se desprende de tales resoluciones la manera de eliminar la influencia de las migraciones. Se deben considerar en el intérvalo entre cada dos censos los muertos que fuesen inscriptos en el censo anterior, así como respecto á los vivos deben tenerse en cuenta solo los que figuren en el censo siguiente, lo cual prueba que han permanecido en el país durante el tiempo considerado.

240. Cada nación ó país publica sus tablas de mortalidad y de supervivencia; pero establecido que la medida de la mortalidad, en cada edad, no solo es variable de uno á otro país, sino en el mismo país por el transcurso del tiempo, por variar continuamente las condiciones higiénicas en que vive la población, resulta de poca importancia la publicación de dichas tablas, algunas de las cuales datan de muchos años. Así, pues, nos limitaremos á reproducir algunas de las que han tenido mas importancia siquiera sea en extracto.

241. *Tablas de supervivencia.*—A continuación figuran las referentes á España y relativas á los periodos de 1858-62, 1861-72 y 1878-82 y dos extrangeras, una que es oficial en Italia y otra calculada para Inglaterra por Farr.

	España			Italia	Inglaterra
Años	1858-62	1861-72	1878-82	(Oficial)	(Farr)
0	1000	1000	1000	1000	1000
5	554	550	537	635	825
10	537	503	506	599	795
20	501	472	477	564	756
30	460	433	432	516	698
40	416	393	385	467	638
50	359	335	331	409	572
60	279	255	255	328	489
70	162	143	140	199	343
80	43	33	35	61	150
90	3	2	2	5	23

242. En el cuadro inserto á continuación figuran abreviadas las tablas de supervivencia; de 20 compañías inglesas de Seguros, calculada por el Instituto de actuarios (publicada en 1869), de la villa de Northampton (The principles and doctrine of assurances, anmites of lives, etc by W. Morgan. London 1821), de Deparcieux (Essai sur les probabilites de la vie humaine par Deparcieux. Paris 1746) y de Duvillard.

Años	C.as inglesas	Northampton	Deparcieux	Duvillard
0		11.655		1.000,000
5		6.249	943	583,151
10	1000	5.675	880	551,122
20	956	5 132	814	502,216
30	890	4.385	734	438,183
40	813	3.635	657	369,404
50	718	2.857	581	297.070
60	584	2.038	463	213,567
70	382	1.232	310	117,656
80	142	469	118	34,705
90	16	46	11	3,830
95	2	4	0	1,140
100	0	0	0	207

243. *Tablas de mortalidad.*—A continuación figuran abreviadas dos referentes á España y correspondientes á los periodos 1861-70 y 1878-82, extractadas de las dadas á luz por el Instituto Geográfico y Estadístico. En ambas el coeficiente de mortalidad se refiere á 10.000 habitantes.

Años	61-70	78-82	Años	61-70	78-82
0	245	256	50	21	19
5	29	20	55	27	26
10	8	6	60	37	39
15	6	6	65	55	59
20	7	9	70	95	89
25	9	10	75	143	132
30	9	10	80	197	191
35	10	11	85	258	270
40	12	13	90	326	324
45	16	15	95	383	372

244. *Tablas de vida probable.*—En el cuadro inserto á continuación aparecen abreviadas cuatro tablas referentes á España; las tres primeras son relativas al periodo de 1861-70 y han sido calculadas las dos primeras por el autor, y la tercera por el Instituto Geográfico y Estadístico; la cuarta se refiere al periodo 1878-82 y ha sido calculada también por dicho Centro. Las otras tres son debidas á Sussmilch (Memorial Technique universel.—L. Mazzocchi), á Deparcieux y á Morpurgo.

	1861-70			1878-82			
Años	Córdoba	Capitales de provincia	España	España	Sussmilch	Deparcieux	En Europa
0	16 años	15 años	10—9	12—	19 años	42—0	40
5	34 a.	29 a.	52—9	53—8	47 a.	54—10	54
10	42 a.	36 a.	50—4	50—2	45 a.	51—10	51
20	35 a.	30 a.	42—	41—7	38 a.	44—2	42
30	28 a.	25 a.	33—11	33—8	30 a.	36—10	35
40	22 a.	20 a.	25—9	25—8	24 a.	29—0	27
50	16 a.	15 a.	18—1	17—11	17 a.	21—0	19
60	9 a. 6 m.	11 a.	11—1	11—1	12 a.	14—0	13
70	6 a.	6 a.	5—7	6—	8 a.	7—11	7
80	4 a.	4 a.	2—10	2—11	5 a.	4—0	4
90	2 a. 6 m.	3 a.	1—9	1—11	3 a.	1—6	—

245. *Tablas de vida media.*—En el cuadro inserto á continuación, figuran abreviadas las tablas de vida media de España, relativas á los periodos de 1861-70 y 78-82 y otra referente á Bélgica.

	España		Bélgica
Años	1861-70	1878-82	
0	29 años — 1 m.	28 años—11 m.	31 años— 5 m.
5	46 a — 9 m.	47 a — 9 m.	44 a — 3 m.
10	45 a —11 m.	45 a — 7 m.	42 a — 6 m.
20	38 a — 8 m.	38 a —	36 a — 9 m.
30	31 a —11 m.	31 a — 6 m.	31 a — 7 m.
40	24 a — 5 m.	24 a — 8 m.	25 a — 9 m.
50	17 a — 5 m.	17 a —10 m.	19 a —10 m.
60	11 a — 7 m.	11 a — 7 m.	13 a — 7 m.
70	6 a — 7 m	6 a —11 m.	8 a — 6 m.
80	3 a — 9 m.	3 a — 9 m.	4 a —11 m
90	2 a —	2 a — 6 m.	3 a — 2 m.
95	0 — 0	1 a — 8 m.	2 a — 3 m.

CAPÌTULO XII.

DEMOLOGÍA DINÁMICA.—APLICACIONES DE LAS TABLAS DE MORTALIDAD

SUMARIO.—Preliminares.—História.—Compañías de seguros sobre la vida.—Seguro de vida entera.—Rentas vitalicias.—Cálculo de las reservas.—Porvenir de las Compañías de seguros.—Crítica de la ley vigente de clases pasivas.

246. PRELIMINARES.—Fundándose estas aplicaciones en las *reglas de interés*, en las *anualidades* y en la *esperanza matemática* creemos conveniente recordarlas.

247. *Reglas de interés.*—Interés es el beneficio que produce un capital al que lo presta. Se calcula suponiéndolo proporcional al capital prestado y al tiempo durante el cual se presta. Llamemos c y c' á dos capitales prestados durante la unidad de tiempo y f(c) y f(c') á sus intereses, tendremos que

$$\frac{c}{c'} = \frac{f(c)}{f(c')} \text{ ó bien } \frac{f(c)}{c} = \frac{f(c')}{c'}, \text{ de donde}$$

$$1 + \frac{f(c)}{c} = 1 + \frac{f(c')}{c'} \quad \frac{c + f(c)}{c} = \frac{c' + f(c')}{c'},$$

es decir, que la relación entre el capital incrementado en sus intereses y el capital primitivo es constante. Llamando m á dicha constante y C al capital total c + f(c), tendremos que

$$\frac{C}{c} = m$$

Designando por $C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$ los valores que vá tomando un cierto capital C_o al cabo de 1, 2, ... n años; podremos establecer las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{C_1}{C_o} = m \\ \frac{C_2}{C_1} = m \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \frac{C_n}{C_{n-1}} = m \end{array}\right\} \text{de las que se deduce} \left\{\begin{array}{l} C_1 = C_o \cdot m \\ C_2 = C_1 \cdot m = C_o \cdot m^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n = C_{n-1} \cdot m = C_o \, m^n \end{array}\right.$$

Veamos ahora la manera de hallar la constante m; supondremos, para ello, que C_o tiene el valor mas sencillo, la unidad, y llamando r al beneficio que produce en la unidad de tiempo adoptada, se tiene que $\frac{C_1}{C_o} = \frac{1+r}{1} = 1+r = m$; de donde $C_n = C_o\,(1+r)^n$ (1). Al interés calculado de esta manera se llama compuesto.

248. Inversamente $C_o = \frac{C_n}{(1+r)}$ (2) lo cual nos díce *que el valor efectivo de un capital que debe ser pagado dentro de n unidades de tiempo es igual al valor nominal dividido por el que toma la unidad de dinero á nn interés compuesto durante n años.*

249. Si en la fórmula (1) desarrollamos $(1+r)^n$ tendremos: $C_n = C_o\,(1 + n\,r + \ldots\ldots r^n)$ y como generalmente r es muy pequeño, ni despreciamos los términos en que entre elevado á potencias iguales ó superiores al cuadrado se tendrá $C_n = C_o\,(1+nr) = C_o + C_o \,.\, n \,.\, r$; y el interés será $C_n - C_o = C_o \,.\, n.\, r$ (3) á cuya fórmula se llama de interés simple.

250. *Anualidades.*—Ya sabemos que el capital C_o se convierte al cabo de n años en el $C_n = C_o\,(1+r)^n$; ahora bien, dicho capital C_o puede ser entregado de una sola vez ó

por plazos sucesivos, que generalmente son anuales. Si llamamos *a* á la cantidad que debemos entregar en cada uno, es evidente que deberá ser mayor que $\frac{C_o}{n}$ y que deberá pagarse al principio de cada año. Según la fórmula (2) los valores actuales de cada una de dichas cantidades serán

$$a\ ,\ \frac{a}{1+r}\ ,\ \frac{a}{(1+r)^2}\ ,\ \frac{a}{(1+r)^3}\ ,\ \ldots\ \frac{a}{(1+r)^{n-1}}$$

los cuales sumados nos darán el valor de C_o; por lo tanto

$$\frac{a(1+r)-\frac{a}{(1+r)^{n-1}}}{1+r-1}=C_o \text{ ó bien}$$

$$\frac{a\Big[(1+r)^n-1)\Big](1+r)}{(1+r)^n}=C_o\,.\,r\,,\text{ de donde}$$

$$a=\frac{C_o\,.\,r}{\Big[(1+r)^n-1\Big](1+r)}\qquad(4)$$

Como el objeto que se propone el que entrega la anualidad es, en este caso, reunir un capital C_n se le llama *anualidad de capitalización.*

251. Si un indivíduo debe en este instante un capital C_o y diflere su pago n años, deberá al cabo de ellos, abonar la cantidad $C_o\,(1+r)^n$, y si los pagos los hace á plazos el valor efectivo de cada uno, puesto que los hace al fiu de cada año será

$$\frac{a}{1+r}\ ,\ \frac{a}{(1+r)^2}\ \ldots\ \frac{a}{(1+r)^n} \text{ por lo tanto}$$

$$C_o=\frac{a-\frac{a}{(1+r)^n}}{1+r-1}=\frac{a\Big[(1+r)^n-1\Big]}{r(1+r)^n}$$

de donde $a = \frac{C_0 \cdot r\,(1+r)^n}{(1+r)_n\,1}$ y como $C_o = \frac{C_n}{(1+r)^n}$

$$a = \frac{C_n \cdot r}{(1+r)^n - 1} \quad (5)$$

Como el objeto que se propone el que entrega esta anualidad es amortizar un capital, recibe el nombre de *anualidad de amortización.*

252. *Esperanza matemática.*—Se llama *esperanza matemática* al valor efectivo de una cantidad probable. Designando por S y s los valores nominal y efectivo de una cantidad y p á la probabilidad se tendrá que $s = p.\ S$ (6) puesto que dichas cantidades deben ser inversamente proporcionales á sus probabilidades.

253. Para que pueda considerarse como equitativo un juego ó un negocio cualquiera es preciso que se verifique la igualdad anterior, de la cual se deduce $S = \frac{s}{p}$, es decir, *que la ganancia que pueda obtenerse debe ser igual á la cantidad efectiva que se arriesga dividida por la probabilidad de obtenerla.*

254. HISTÓRIA.=Las leyes de Solon nos demuestran que las *cajas de previsión* eran conocidas por los griegos, así como las *Doce Tablas* nos manifiestan que tambien existian entre los romanos. En la Edad media se multiplicaron las sociedades de previsión y de socorro mútuo en todas las naciones, y en España, en particular, los antíguos gremios eran á la vez sociedades de socorro mútuo; pero durante este tiempo ninguna ley presidía al repartimiento de cuotas, todos los agremiados pagaban lo mismo. Fué en Inglatrra donde nació la idea de los pagos proporcionales, siendo la primera sociedad fundada sobre tales bases la *Amicable society* establecida en 1706 por Thomas Allen, Obispo de Oxford. La idea de los *seguros sobre la vida* se debe al escocés Mác-Laurin, que en 1748 publicó los cálculos relativos á un proyecto de caja de

viudas y huérfanos. Finalmente en 1769 Price publica una teoría completa de los seguros sobre la vida. Hoy las obras de esta clase se han multiplicado y la teoría se ha hecho extensiva á toda clase de siniestros, principalmente al incendio y al naufragio, y las *sociedades de auxilios mútuos* y *compañías de seguros* son innumerables, rigiéndose todas ellas por los principios del cálculo de probabilidades.

255. COMPAÑÍAS DE SEGUROS SOBRE LA VIDA.—Las Compañías de seguros sobre la vida tienen un fin moral altamente provechoso á la sociedad, pues desarrollan el hábito del ahorro y de la economía y alivian en una medida justa la situación de sus clientes, en los casos previstos en el contrato, que se firma entre la compañía y el cliente, el cual recibe el nombre de *póliza*.

256. Las operaciones objeto de las compañías de seguros sobre la vida son innumerables pudiendo variar al infinito; pero todas están fundadas en principios de la mayor equidad, reservando siempre al capital social un pequeño beneficio para responder á los gastos necesarios, y por consiguiente á la vida de la sociedad. Por otra parte, no está lejano el dia en que el Estado comprendiendo la poca justicia que hoy preside á los retiros y pensiones que otorga modifique su concesión con arreglo á los principios en que están fundadas dichas sociedades.

Las operaciones objeto de las sociedades de seguros sobre la vida pueden ser clasificadas en dos grupos: 1.° Operaciones que dependen de la muerte. 2.° Operaciones fundadas sobre la vida. En las primeras la sociedad está interesada en la mayor longevidad de sus asegurados y en las segundas en su menor longevidad.

257. Como tipo de las primeras examinaremos la operación conocida bajo el nombre de *seguro de vida entera*, que es un contrato en virtud del cual la compañía se encarga de pagar una cierta cantidad determinada, despues de la

muerte de una persona designada. Evidentemente el valor de la cantidad que debe entregar cada asociado, llamada *prima única*, se hallará haciendo en la fórmula (4) n igual al número de años de vida probable. Esto sería equitativo si la mortalidad fuese constante; pero como su valor aumenta con la edad y además las sociedades ejercen la *selección* no admitiendo á los indivíduos enfermos, resultarían beneficiadas. Cuidando, pués, de sus intereses, que son los de los asegurados, calculan la prima única de la manera siguiente: Designando por C el capital que debe entregar por muerte de cada asegurado de la edad z por V_z el número de indivíduos de dicha edad que se han asegurado, y por D_z, D_{z+1}, ... D_{z+n} (1) el número de los V_z que fallecen el primer año, el segundo et.; se tendrá que la compañía deberá abonar cada año las cantidades

$$D_z \cdot C \quad D_{z+1} \cdot C\,(1+r)^{-1} \quad D_{z+2} \cdot C\,(1+r)^{-2} \quad ..... \quad D_{z+n}\, C\,(1+r)^{-n}$$

y las *esperanzas matemáticas* que tiene la persona á cuyo favor se hace el seguro, de percibir la cantidad C el 1.°, 2.°, 3.°, ... año serán respectivamente

$$\frac{D_z}{V_z} \cdot C \quad \frac{D_{z+1}}{V_z} \quad C.(1+r)^{-1} \; ..... \; \frac{D_{z+n}}{V_z} \cdot C\,(1+r)^{-n}$$

cuya suma será la esperanza matemática total, ó sea el valor actual de la cantidad C, que debe ser igual á la prima única que designaremos por P_z; podremos por lo tanto establecer que

$$P_z = \frac{D_z}{V_z}\, C + \frac{D_{z+1}}{V_z} \cdot C\,(1+r)^{-1} + ...$$

$$+ \frac{D_{n+z}}{V_z} \cdot C(1+r)^{-n} \text{ de donde } P_z = \frac{C}{V_z} \cdot S(D_{z+n} \cdot (1+r)^{-n})$$

---

(1) Ahora designa n el número de años que tardan en fallecer todos los indivíduos que actualmente tienen la edad z.

Las compañías calculan sus tarifas haciendo en esta fórmula $C=1$.

258. Si se quiere calcular la *prima anual* la podemos considerar como el valor de una anualidad vitalicia equivalente á la prima única P_z; llamándole p tendremos $P_z = p + p\, S\,(D_{z+n}\,(1+r)^{-n})$ de donde designando á $S\,(D_{z+n}\,(1+r)^{-n})$ por C_z se tendrá que $p = \frac{P_z}{1+C_z}$.

259. Si las primas fuesen semestrales ó trimestrales su cálculo no ofrecía dificultad pues no habría mas que representar la nueva unidad en incomplejo de año por las fracciones $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{4}$; pero en la práctica lo que suelen hacer las compañías es aumentar la prima anual en un 1 0[0 ó en 1'5 0[0 según sea pagada por semestres ó por trimestres.

260. Dentro de este grupo de operaciones están comprendidas muchas, entre las cuales citaremos, *los seguros temporales, mixtos, á capital diferido, temporal de anualidades, sobre varias cabezas, de supervivencia* etc., cuyas primas únicas y temporales se calculan de manera análoga, teniendo siempre presentes las reglas del cálculo de probabilidades. Así, por ejemplo, la prima única en el seguro temporal se calcula suponiendo que el sugeto en cuestión se asegura por vida y que al llegar el año x, al cabo del cual termina el contrato, la compañía le devuelve la prima del seguro desde dicha edad $z + x$ hasta el fin de su vida; por lo tanto su valor será $P_z - P_{z+x} \cdot X$ puesto que el valor actual de P_{z+x} será su producto por X probabilidad de que el indivíduo de edad z llegue á la $z + x$.

261. Vamos á ocuparnos ahora del segundo grupo de Operaciones, como tipo de las cuales estudiaremos las *rentas vitalicias*. Esta operación está fundada en la fórmula de amortización puesto que consiste en que la compañía se compromete á pagar á su cliente una cierta cantidad anual mediante la entrega por parte de este, de un cierto capital C.

El valor efectivo ó sea la esperanza matemática de cada una de las anualidades, esta representada por las fracciones

$$\frac{f(z+1)}{f(z)\,(1+r)} \cdot a\ ,\ \frac{f(z+2)}{f(z)\,(1+r)^2} \cdot a\ ,\ \ldots\ldots\ \frac{f(z+n)}{f(z)\,(1+r)^n} \cdot a$$

cuya suma debe ser igual á la prima única C_z. La anualidad puede ser *pagadera inmediatamente ó diferida*: en el primer caso su valor lo determina la fórmula hallada

$$C_z = S\ \frac{f(z+n)}{f(z)\,(1+r)^n} \cdot a$$

en el segundo pueden ocurrir otros dos; que el capital sea abonado de una sola vez ó por anualidades sucesivas. En el primero de estos dos casos designando por C_z^n el valor del capital que es preciso entregar para empezar á disfrutar una cierta anualidad, despues de transcurridos n años, quedará determinado por la fórmula

$$C_z^n = C_{z+n} \cdot X$$

puesto que será el valor actual del capital C_{z+n} que se necesita entregar, para disfrutar esa anualidad, cuando la persona tenga $z+n$ años. En el segundo caso determinaremos primero el valor de C_{z+n} y despues el valor de la anualidad *a* que es preciso entregar durante n años, para tener al cabo de ellos un capital igual á dicha cantidad. Dentro de este último caso están comprendidos los retiros y las viudedades, son un caso en que se combina el seguro con la renta vitalicia. Además existen una porción de operaciones referentes á este grupo y otras en que entran combinadas operaciones de ambos.

262. En todas estas operaciones, y sobre todo en las diferidas, es preciso siempre que la sociedad cuente con un fondo de reserva para no encontrarse en un apuro si se le acumulan los vencimientos. En los seguros pagaderos por primas periódicas la reserva se calcula de la manera siguiente: Sea P_z la prima única que se convertirá en P_{z+x+t} al

cabo del tiempo $x+t$ y p la suma de las primas entregadas, la reserva deberá ser igual á

$$R = P_{z+x+t} - p(t + C_{z+x+t})$$

si reunimos k operaciones análogas y de la misma época no habrá mas que multiplicar la fórmula anterior por k; en la práctica se reunen todas las referentes á un mismo año y se le dá á t el valor de $\frac{1}{2}$.

263. Para terminar diremos algunas palabras sobre el porvenir de estas sociedades y sobre la organización oficial que se les debe dar. El porvenir de estas compañías es seguro, cada día han de multiplicar sus operaciones, siempre que cuiden de no exagerar sus ganancias y siempre que hagan comprender á sus clientes, que el seguro no es un negocio ni puede serlo, sino la previsión de un acontecimiento. El Gobierna Español algo ha hecho en beneficio de las compañías haciéndoles depositar una cantidad proporcional á la importancia de sus operaciones; pero todavía debía hacerse algo mas que redundaría en beneficio de dichas sociedades, pues su gestión ofrecería mas confianza al público, y es su intervención por los empleados del Cuerpo de Estadística, inspeccionando sus tarifas, publicando en la Gaceta de Madrid sus estados de situación, y haciendo los demás trabajos que se les encomendasen. Para esto, solo sería preciso el aumento de unas cuantas plazas en el escalafón, y la creación en la Dirección General del Instituto Geográfico y Estadístico de un negociado que podría titularse de Seguros, en el cual podrían ser comprendidas, además, las operaciones y estadísticas relativas á siniestros, tormentas, pérdidas de cosechas, etc.

264. Por otra parte la ley que hoy rige las clases pasivas, es sumamente perjudicial para el Estado é injusta para el empleado. Es perjudicial para el Estado porque se compromete al cumplimiento de una obligación que nunca puede calcular ni aún aproximadamente, y es injusta para el

empleado porque no se regula con arreglo á las cantidades descontadas al mismo sino de una manera arbitraria y fuera de todo principio científico; el retiro ó jubilación de un empleado que lleve cuarenta años de servicios y solo alcance al sueldo de seis mil pesetas, es menor que la del que solo sirve treinta y cinco, pero ha tenido la suerte de disfrutar dos años el de siete mil quinientas pesetas, no influyendo para nada que el primero haya estado catorce ó diez y seis años en las categorías de 5.000 y 6.000 pesetas y que el segundo haya pasado casi toda su vida oficial en las categorías mas inferiores. Tampoco es justo ni debe ser legal el que unos empleados puedan dejar *viudedad*, y otros no, teniendo todos el mismo descuento. Se impone, pues, la necesidad de reformar la legislación existente y dar otra nueva fundada en la más rigurosa justicia y sobre bases racionales y científicas, de tal modo, que el Estado siempre pueda calcular la magnitud de su compromiso. Ahora bien, ¿qué convendrá mas al Estado, seguir él mismo, como ahora lo hace, encargado de tales asuntos ó declarar la libertad en esta materia, dejando al empleado el cuidado de hacer los contratos que estime conveniente con las sociedades establecidas? Cuestión es esta que no corresponde resolver á la Estadística sino á la Política.

APÈNDICE AL CAPÌTULO XII.

Seguros contra las enfermedades.—Seguros contra los siniestros.—Seguros sobre las cosas.—Contra-seguros.

I. La gran importancia y extensión que han adquirido los Seguros sobre las personas y cosas nos obliga á completar la teoría anterior, que es la fundada solamente sobre las tablas de mortalidad, con estas otras que se hallan fundadas en otras tablas formadas de un modo análogo y por lo tanto cuya aplicación es también análoga.

II. La teoría de los seguros contra las enfermedades tiene un grandísimo interés para la sociedad en general y en particular para la clase obrera. Aunque poco extendida en España y en otras muchas naciones, se comprende, sin embargo, su importancia y la necesidad de fomentar las Sociedades de esta clase. Reposa esta teoría en el conocimiento de la ley de *morbifidad.*

Se llama morbifidad de la edad a al promedio del número de dias de enfermedad que ha sufrido un indivíduo que tiene su edad comprendida entre a y $a+1$ años. Se determina sumando el número de dias de enfermedad que han padecido y_a indivíduos y dividiendo esa suma M por dicho número y_a.

Las tablas que determinan la morbifidad de cada edad se llaman tablas de morbifidad: en beneficio de las sociedades y de los obreros estas tablas deberían ser construidas diferentes según los oficios, pues ya sabemos que existen oficios y profesiones mas ó menos expuestos á los accidentes y á las enfermedades (1)

III. Propongámonos calcular la prima única capaz de asegurar una peseta por cada día de enfermedad á un individuo de edad *a*; durante un tiempo dx la compañía le pagará la suma F (a) . dx, que referida al tiempo de hacer el seguro valdrá

$$F(a+x)\, dx\, (1+r)^{-x}\, \frac{f(a+x)}{f(a)}$$

y si se asegura por toda su vida la compañía le abonará sumas cuyo valor actual será

$$\frac{1}{f(a)} \cdot S \left[F(a+x) \cdot dx \cdot f(a+x)\,(1+r)^{-x} \right]$$

y por lo tanto esta será la prima única que debe entregarse. Si el seguro se contrata pagadero por primas anuales, semestrales, trimestrales, etc., se emplearán para calcular las fórmulas análogas á las del número 259.

IV. Estas compañías ejercen también la selección no aceptando sus clientes sino despues de haber sufrido una visita médica, que evite las estafas. Pocas son las tablas de morbifidad que se han construido, siendo una de las más conocidas la de Hubbard que extractamos á continuación.

Edades.	Número de dias de enfermedad.	Edades.	Número de dias de enfermedad.
16	4.000	45	6.952
20	4.365	50	7.095
25	5.443	55	7.596
30	5.562	60	11.724
35	5.607	65	14.736
40	5.960	70	17.084

(1) Manual de Higiene y Fisiología, por el catedrático Pablo Lefort.—Los curtidores y peleteros sufren el cólera de los dedos; los tenderos la sarna; los cocineros, cocineras, herreros, horneros, etc., erupciones en la cara; en las sederías es comun el mal de los gusanos; los mineros de carbon padecen la tisis carbonosa, etc.

V. Los seguros sobre la vida se contratan generalmente prescindiendo de los accidentes y limitados solamente al territorio nacional; cuando el indivíduo desea asegurarse marchando á las colonias, contra los riesgos de naufragio, etc., es preciso entonces que pague una sobre-prima cuyo valor podemos decir que se calcula hoy empíricamente, en general, pues son pocos los accidentes cuya probabilidad se ha calculado.

VI. Los asegurados pueden, en algunos casos, querer asegurar el capital ó las primas entregadas, y esta operación aceptada por las compañías se llama contra-seguro. Se calcula por fórmulas fáciles de deducir. El contra-seguro es siempre una operación desventajosa á no ser que el crédito de la sociedad aseguradora sea poco firme, en cuyo caso tampoco habrá quien acepte el contra-seguro.

VII. Sean h y h' las probabilidades de un suceso feliz ó desgraciado; este último impone al asegurador el pago de una cantidad a. Designemos por n el número de objetos asegurados y por b la prima del seguro. Como los términos del desarrollo de $(h+h')^n$ desde el primero hasta el $q+1$ expresa la probabilidad de que el número de casos desgraciados no pase de q, llamaremos Q á dicha suma, y la cantidad probab'e que deberá abonar la compañía será Q.a la suma de las cuotas será nb y llamando c á la cantidad que debe reservarse para gastos y fondo de reserva se tendrá que

$$Q.\,a - n\,b = c \quad \text{de donde} \quad b = \frac{Q.a - c}{n}$$

CAPÌTULO XIII.

DEMOLOGÍA DINÁMICA.—REFUTACIÓN DE MALTHUS

SUMARIO.—Fundamento de la teoría de Malthus.—Inmoralidad de dicha teoría.—Refutación de las consecuencias deducidas de las proposiciones fundamentales.—Falsedad de las premisas sentadas. —Refutación práctica.

265. Mas aún que por su importancia científica por los males que ha ocasionado, ocasiona y puede ocasionar, ha preocupado esta doctrina á los hombres pensadores de todos los paises, que han tratado de refutar punto por punto los argumentos presentados por los *malthusistas* en defensa de la teoría expuesta por Malthus, y exagerada por algunos hasta hacerla traspasar los límites del salvagismo y del absurdo. Empezaremos por exponer, siquiera sea sumariamente, dicha teoría ya que uno de los principales argumentos que aduce M. Garnier, contra los impugnadores de la misma, es que la desconocen si no en absoluto á lo menos en muchas de sus partes.

266. En la obra *An Essay on the principle of population, as it affects the future imprevement of Society* (1826) sienta Malthus las proposiciones siguientes: 1.ª La población crece según una progresión geométrica, y si no se opusiese ningún obstáculo se duplicaría sucesivamente en un

periodo relativamente muy corto. 2.ª Los medios de subsistencia solo pueden aumentar según una progresión aritmética. De estas proposiciones deduce las siguientes consecuencias: 1.ª Que la población tiene una tendencia orgánica y virtual á acrecentarse mas rápidamente que los medios de existencia. 2.ª Que debe procurarse limitar *preventivamente* el crecimiento de la población para evitar la destrucción brutal de la especie por consecuencia de las privaciones que impone la naturaleza. 3.ª Que los obstáculos que se oponen al acrecentamiento de la población, son el *vicio* y la *miséria á posteriori*, y preventivamente la *continencia moral*. 4.ª Que debe hacerse desaparecer, en lo posible, la *caridad* de cualquier clase y forma, y todo aquello que directa ó indirectamente pueda tender al acrecentamiento de la población.

Respecto á lo que debe entenderse por *continencia moral* (contrainte morale) su defensor y comentarista Garnier se explica así: «Por la misma razón, el bienestar detiene los progresos de la población, dando á los que lo gozan el deseo de conservarlo, combatiendo por consecuencia la propensión al casamiento (y añadiremos, provocando la *prudencia en el matrimonio*)». Se vé desde luego que esta continencia moral, esta prudencia en el matrimonio, que preconiza la escuela malthusiana debe ser *algo vergonzoso* para la especie humana, puesto que no se han atrevido á aclarar el concepto ni Malthus ni ninguno de sus defensores, y es de creer que no han de haber sido obligados á ello por respetos á la religión católica. Hecha esta observación que tilda de inmoral á la doctrina dicha, pasemos á refutarla.

267. *A priori* podemos decir que es falsa; á la mente humana le es imposible comprender que habiendo dictado Dios ese espíritu *único creador*, leyes no solo á los mundos, que pueblan los espacios siderales para que cumplan sus destinos, sino á los más pequeños átomos de la materia, no las haya dado á los séres racionales dejando su acrecentamiento

limitado solamente por los vicios, la miseria y por una continencia contraria á la ley natural. Aun suponiendo completamente verdaderas, en el sentido que Malthus les ha dado, las proposiciones en que funda su doctrina, no por eso podrán deducirse en absoluto las consecuencias enunciadas. En efecto, las emigraciones, el llamado por Doubleday *obstáculo pletórico*, el bienestar material y el adelanto intelectual (véanse las leyes de la reproducción números 205 y 206) son causas cuya influencia se multiplica con el acrecentamiento oponiéndose á él.

268. Por otra parte, las proposiciones en que se funda esta doctrina son falsas en el sentido absoluto en que se toman. Es cierto, que, en general, el acrecentamiento de los hechos sociales se *amolda* perfectamente á la forma de la progresión geométrica y como bajo la denominación de sociales se comprende lo mismo á la población que á las subsistencias, podemos decir, que *la ley de las variaciones, en el tiempo, de la población y de las subsistencias es una progresión geométrica*. Lo que nos será preciso es determinar la razón de cada una ó por lo menos la relación que existe entre ambas. La falsedad principal, establecida por Malthus, es la de suponer que el acrecentamiento de la humanidad es constante, cuando ocurre todo lo contrario; la teoría (número 198) lo demuestra y los hechos lo comprueban. Las palabras de Ciceron *Nec número hispanos, nec rebore gallos, nec artibus graecos supera vimus*, las noticias que se tienen de la población de la antígua Germánia y de la Británia, las estadísticas árabes y otras varias que se han conservado, prueban que la población total del mundo se ha acrecentado con muy poca rapidéz. El periodo de 25 años establecido por Malthus para la duplicación de la población, está muy lejos de la realidad. Verdad es que lo establece bajo la hipótesis de que *la población no sea detenida por ningún obstáculo;* pero tal hipótesis es absurda y poco racional, apartándose por completo de la realidad, por-

que como dice el abate Corbiére en su *Crítica sobre el principio de población* que publicó en 185S en *L' ami de la Religión*: Cuando se razona sobre las leyes de la naturaleza, es preciso no limitarse á una sola, sino que es necesario examinar todas en particular y en conjunto: de otro modo se caerá en errores groseros. Como ejemplo de los errores á que puede conducir el partir de una hipótesis falsa ó fuera de la realidad, supone que se quiera determinar el movimiento de una bala de cañón, bajo la hipótesis de que nada se oponga á él, y se llega á la consecuencia de que una vez lanzada al espacio iría en línea recta y no se detendría nunca, lo cual es por completo contrario á la realidad; en la superficie terrestre no sucederá nunca esto.

269. Respecto á la segunda proposición, tampoco es cierta; ni en absoluto como ya hemos visto, ni de ninguna manera; pues examinando lo que há ocurrido con los medios de subsistencia, vemos que desde la antigüedad hasta nuestros dias, la producción del trigo se ha multiplicado, se ha dado una gran extensión al cultivo de otras plantas, antes desconocidas, como la patata oriunda de América; gran número de animales que antes se hallaban entregados á sí mismos, hoy se cuidan y se crian en lugares apropósito; como la ostra, el pavo, etc. El gran número de vías de comunicación no solo tiende á repartir por igüal los alimentos y todas las cosas más ó menos necesarias á nuestra vida, sino que excita la producción por la facilidad de salida que tienen los productos. Además la fecundidad de casi todos los animales y plantas es muy grande, la extensión y la profundidad de las tierras laborables aumenta de día en día, los rendimientos que se obtienen de la agricultura, de la caza y de la pesca se multiplican sin cesar, y finalmente la industria y el comercio son hoy muchos miles de veces mayores que en la antigüedad. Resulta por lo tanto que no existe razón ninguna que pruebe que los medios de existencia se desarrollan mas lentamente que la población.

270. Por último, la adaptación á las costumbres de la doctrina de Malthus ocasiona males reales inmediatos y mucho mayores que los imaginarios que trata de prevenir. Francia nos dá una prueba de ello; entre sus obreros y entre la mayoría de su clase media domina el malthusianismo, el número de sus nacimientos no solo no aumenta sino que ha disminuido y yá ha sido superado en varios años por el de las defunciones, su población tiende á disminuir; y por todos estos hechos, lejos de haber adquirido las ventajas que ofrece la escuela de Malthus, vé su riqueza disminuir, su comercio superado por el de su rival Alemania y su lugar en el concierto europeo amenazado, pues al paso que España, Alemania, Italia y las demás naciones ven aumentar anualmente el número de sus soldados, Francia los vé disminuir.

271. En lo que á España se refiere la teoría de Malthus queda desmentida por los hechos que conocemos. A continuación insertamos un estado en que figuran la fecha de los censos verificados, la cifra de la población que arroja cada uno, la razón de la progresión geométrica del acrecentamiento de la misma y el número de años que tardaría en duplicarse; vemos por él cuan lejos de la realidad se halla Malthus al suponer que como término medio una población puede duplicarse sucesivamente cada 25 años. Además valiéndonos de las cifras de los censos verificados en 1787 y 1887 encontramos que la razón del acrecentamiento de los individuos dedicados al Comercio, á la Industria, Artes y Oficios, y á la Agricultura, que en cierto modo pueden representarnos el acrecentamiento de los medios de existencia, ha sido 1,01038 cifra muy superior á la mayor razón obtenida durante dicho periodo para el crecimiento de la población. Respecto á la cultura intelectual, siendo el número de estudiantes en 1887 de 1.719,955 y de 50,994 en 1787 la razón de su acrecentamiento ha sido mucho mayor estando representada por la cifra 1.03581.

Años	Población	Razón de la progresión	Años para duplicarse la población.
1768	9.307,804		
1787	10.409,879	1,00611	112
1857	15.464,340	1,00566	122
1860	15.673,536	1,00431	161
1877	16.634,345	1,00349	199
1887	17.550,246	1,00537	129

CAPÌTULO XIV.

DEMOLOGÍA DINÁMICA.—NUPCIALIDAD Y MIGRACIONES.

SUMARIO.—Leyes de la nupcialidad.—Causas de las migraciones.

Nupcialidad.

272. Si llamamos M al número de matrimonios de un país y P' a, su población núbil, se tiene, como ya sabemos, la medida *m* de la nupcialidad por la fórmula:

$m = \frac{M}{P'}$; de donde $M = m. P'$ y como $P'_n = P'_{n-1} \cdot q$

se deducirán dando valores á M las siguientes igualdades:

$$M_1 = P' . m_1$$
$$M_2 = P'_2 . m_2 = P'_1 . m_2 . q$$
$$M_3 = P'_3 . m_3 = P'_1 . m_3 . q^2$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$M_{n+1} . = P'_1 . m_{n+1} . q^n$$

Suponiendo iguales estos valores de m_1, m_2 m_3 ..... m_n deduciríamos para la nupcialidad las mismas leyes que para la población; pero debemos observar que sobre la nupcialidad obran una porción de fuerzas cuyos efectos sobre ella son inmediatos y que por lo tanto los valores de m pueden variar en un corto intérvalo. También debemos hacer notar, que la razón q del crecimiento de la población núbil, aunque teóricamente sea la misma que la de la población total, prácticamente difiere algo de ella siendo un poco menor.

273. En resúmen, las variaciones de la nupcialidad deben compararse con las de la población núbil y si la relación resultante vá siendo mayor la nupcialidad crece y en el caso contrario decrece.

Migración.

274. *Migraciones exteriores.*—Emigracion.—Puede ser forzosa y voluntaria; la primera obedece á causas religiosas ó políticas, la segunda puede deber su orígen á estas dos especies de causas y también á las económicas. Las primeras solo duran un corto periodo de tiempo; pero son eminentemente perturbadoras pues en dicho corto periodo de tiempo emigra una gran masa de población y pueden ocasionar graves transtornos sociales, políticos y económicos. Como ejemplo de ellas podemos citar la expulsión de los moriscos de España decretada por Felipe III perdiéndose una gran masa de población activa y laboriosa (mas de un millón); desde entonces decayeron nuestra agricultura y nuestra industria. Las emigraciones voluntarias son mas lentas y constantes y, en algunos casos, suelen ser provechosas por que poco á poco se desembaraza la nación de una población sobrante ó que no se amolda bien á los usos, costumbres y creencias de la masa general. En general, las emigraciones al exterior pueden calificarse como una exportación de capital y de trabajo, y por lo tanto debe procurarse, en lo posible, que tales fuerzas no sean perdidas, sino que varíe únicamente su punto de aplicación; debe tenderse á transformarlas en interiores dirigiéndolas á las regiones ó paises que se hallen faltos de población. Se deduce de lo expuesto que las primeras no serán susceptibles de leyes que expresen las variaciones de su valor; pero las segundas sí, á lo menos en periodos considera-

bles de tiempo, pues la modificación de las condiciones religiosas, políticas y económicas de una nación es sumamente lenta.

Inmigración.—Las inmigraciones, en general, son provechosas porque tienden á aumentar la riqueza de la nación; pero las que obedecen á causas religiosas y políticas ó están formadas por gentes pobres, viciosas y miserables, pueden ser ó mejor dicho son casi siempre perjudiciales, por los graves trastornos que pueden acarrear. Toda nación puede oponerse á ellas en su perfecto derecho ó regularlas bien para prevenir conflictos ó para librar de la competencia á sus clases trabajadoras.

275. *Migración interior.*—Las emigraciones de la metrópoli á sus posesiones, son las mas convenientes de todas, porque tienden á repartir por igual el trabajo y aumentan la riqueza general de la nación, explotando los terrenos incultos; sin embargo es preciso que sea regulada por sábias leyes y mantenida por un estado creciente de prosperidad de la metrópoli, pues de lo contrario dejará á esta última falta de fuerzas y de brazos. Esto es lo que sucedió á España con sus inmensas posesiones; las guerras contínuas que sostuvo y que se vió precisada á sostener, dejaron al país tan falto de brazos que el comercio, la industria y la agricultura languidecieron de tal manera, que vinieron casi á desaparecer pasando á manos de los holandeses y de los ingleses. Nuestras leyes de Indias pueden servir de modelo á todas las naciones; pero nuestra política fué siempre contraria á nuestros intereses. Si España despues del descubrimiento de la América se hubiera dedicado, exclusivamente, á atender á sus dominios, limitando su política exterior á contemporizar y hasta ceder, en muchas ocasiones, su derecho antes que emprender aquellas largas guerras que si bien nos dieron mucho brillo nos costaron muchos hombres y mucho dinero, seguramente sería hoy el estado mas poderoso del mundo.

La emigración de los campos á las poblaciones puede decirse que cumple hoy con una ley constante, común y general aunque todavía no ha sido determinada por completo. La razón nos dice que dicha absorción de población debe estar en razón directa de la masa de población que la efectúa, de la facilidad de los medios de transporte y de la población de los paises ó regiones que la dan. Así, en España los dos grandes y principales centros de absorción que existen son Madrid y Barcelona y dentro de cada provincia la capital será un centro de absorción tanto mayor cuanto mayor sea su población y menor la de los pueblos que la forman.

Las emigraciones temporales á los paises ó regiones de gran producción son sumamente beneficiosas y por lo tanto deben ser protegidas por los gobiernos; su intensidad estará en razón directa de la producción de aquellas regiones y de la población de los paises de donde salen, pero también influyen la facilidad del transporte, la pobreza del pais, la no coincidencia de las cosechas, etc.

CAPÌTULO XV.

TEORÍA DEL TERRITORIO.

SUMARIO.—*Estática.*—Medidas del territorio.—Elementos que deben considerarse en el mismo y su medida.—*Dinámica.*—Variaciones del territorio.—Variaciones de sus elementos en el tiempo y en el espacio.

Estática

276. *Medida absoluta.*—Dejando para la *Estadística aplicada* la manera de hallar la medida absoluta (1) diremos ahora solamente que se halla expresada por la cifra de la extensión superficial; la unidad adoptada es, en general, el kilómetro cuadrado. La representaremos por la letra S.

Extensión relativa.—La extensión relativa del territorio se determina relacionándola con la extensión de la región, país ó parte del mundo dentro de la cual se halle el territorio considerado.

(1) Aunque las operaciones necesarias á la determinación de la extensión superficial de un país y de sus diversas divisiones no corresponden á la Estadística, creemos, sin embargo, que el estadístico no debe ignorarlas y por lo tanto cabe dentro de un tratado de dicha ciencia la indicación sumaria de tales operaciones, que pueden clasificarse en dos grupos: geodésicas y topográficas; pero una determinación completa del territorio debe comprender otro grupo las evaluatorias, que se refieren mas bien á la determinación de la riqueza que de la extensión, y cuyos datos son los que sirven para formar la Estadística de la riqueza territorial.

Intensidad.—Siendo el territorio uno de los elementos fundamentales del Estado, su medida no es posible determinarla con relación á otro elemento; así, pues, su intensidad solo podrá determinarse por su relación á otra magnitud de la misma especie que sea fija y determinada y esta no puede ser otra que la superficie terrestre. Si llamamos s á la intensidad, su fórmula será $s = \frac{S}{T}$, siendo T la superficie terrestre.

Aunque cualquiera que sean los datos que sirvan para la determinación de la superficie terrestre, el error, que pueda cometerse al comparar unas intensidades con otras ha de ser por completo despreciable, creemos sin embargo que debe evitarse fijando la magnitud que debe tomarse como medida de dicha superficie. Nosotros no podemos recomendar ni aceptar otros datos, que los que sirven para nuestros trabajos geodésicos, que son los del elipsoide hipotético de Struve ó bien para facilitar los cálculos tomar la cifra aproximada de 510.000,000 de kilómetros cuadrados.

277. Una estadística completa del territorio debe comprender tres grupos principales de hechos que se refieren: á su *Extensión*, á sus *Divisiones* y á las *Obras* que en él haya ejecutado el hombre. En el primer grupo debemos considerar comprendidos todos los datos referentes al territorio en general como son: su superficie, la longitud de sus costas, la longitud de los rios, la altura de sus montañas, etc. En el segundo todas cuantas divisiones se hagan del mismo; tanto naturales (como las regiones climatológicas, geológicas, etc.); como artificiales (como políticas, administrativas, judiciales, militares, etc.) Finalmente en el grupo *Obras* consideramos comprendidos: los ferro-carriles, puertos, faros, puentes, carreteras, edificios, (así en el campo como en las poblaciones), etc., es decir todas las obras de carácter permanente que el hombre haya ejecutado sobre el suelo.

278. La medida de la intensidad de todos los hechos

referentes al territorio se determina refiriéndolos á la superficie del mismo, expresada, generalmente, en kilómetros cuadrados, es decir, que lo que se determina es el número de kilómetros de ferrocarril, carretera, etc., por kilómetro cuadrado. El número de edificios de las poblaciones se refiere á su superficie expresada en áreas. También se exceptúan las construcciones que podemos denominar marítimas, como son, los puertos, faros, etc., que deben relacionarse á la longitud de las costas.

Dinámica.

279. Aunque el aumento ó disminución del territorio de un estado no parece sugeto á regla alguna sino á la voluntad y al poder de la nación, reflexionando, sin embargo, en las causas que lo motivan, que si bien pueden ser modificadas por la sociedad no le es dado por completo y en un momento determinado anularlas, se deduce que dichas variaciones deben estar sugetas á leyes. Las principales son:

1.ª *Cuando en una nación la población es superior á los medios de existencia que dá el territorio, tenderá á la emigración y á extender su comercio entre los demás paises.* Así vemos, que hoy en día, los ingleses, alemanes y holandeses son los que dominan en el mundo comercial y no es por que en ellos haya sido innata la afición al comercio, pues el germano nunca la tuvo, sino porque han sido obligados á ello por la pobreza de su territorio y por su gran población.

2.ª *Cuando una nación posée medios de defensa superiores á los necesarios, se transforman en medios ofensivos y tenderá al equilibrio aumentando su territorio.* La comprobación de esta ley nos la ofrece la antígua Roma, pueblo guerrero que no podía permanecer encerrado en las extrechuras del *Latium*; nos la ofrecen también la Francia de Napoleón I y la moderna Alemania. Los rusos, pueblo lleno de vida, se extiende por el Asia, en él se refunden todos esos paises cuya poca población los hace incapaces para defenderse. Nuestra España de los Reyes Católicos, de Carlos I y de Felipe II nos ofrece otro ejemplo en que se cumple la misma ley.

3.ª *Cuando en una nación la población es inferior á los medios de existencia que puede facilitar su territorio, tenderá al aumento por la inmigración y la nación estará expuesta á perder territorio por que despertará la codicia de las demás.*

4.ª *Cuando una nación posee medios de defensa inferiores á su territorio, perderá parte del mismo tendiendo al equilibrio.* Las circunstancias especiales por que atraviesa la nación española nos releva de insistir mucho en la demostración de estas dos últimas leyes; sin embargo, recordaremos al lector, la caida de Roma, la invasión de los árabes, la caida del imperio bizantino y cuantas pérdidas totales ó parciales de territorio han sufrido los distintos estados.

280. Consideraremos ahora las leyes á que obedecen las variaciones de las Divisiones y de las Obras.

Las variaciones en el tiempo de las Divisiones artificiales de un territorio deben ser directamente proporcionales á su población é inversamente á las comunicaciones. Esta ley es evidente por sí misma, su comprobación nos la dá la experiencia, puesto que las divisiones artificiales (administrativas, judiciales, militares, etc.), se hacen solo con el objeto de poder ejercer mejor sus funciones el Centro ú oficina encargado de ellas.

281. Las variaciones en el espacio ó sea de uno á otro territorio obedecen, en general, á la misma ley dada para las variaciones en el tiempo pero modificada por los accidentes topográficos y la constitución política de cada nación. En el cuadro inserto á continuación podemos ver la comprobación de esta ley en todas sus partes. Así, España, Francia, Italia, Bélgica y Holanda, naciones continentales cuya constitución política es casi idéntica (no nos fijamos en las instituciones

ó gobierno establecido sino en lo que pudiéramos llamar legislación política) la siguen sin mas que pequeñas diferencias debidas á su topografía. Dinamarca y Portugal son excepcionales por su topografía; Inglaterra y los Estados-Unidos lo son por sus constituciones políticas, la primera es el prototipo de la centralización administrativa, la segunda de la descentralización; y Suiza es una excepción determinada por su topografía y por su constitución.

ESTADOS	Población en millones de habitantes	Número de divisiones	Habitantes por cada división	N.° de m. de vias de comunicación por kilóms.
España.	17,5	49	357	18
Portugal. . . .	4,3	17	253	22
Italia.	27,5	69	398	27
Francia.	37,6	86	437	45
Inglaterra.. . .	35,0	118	297	88
Bélgica.	5,5	9	611	125
Holanda.. . . .	4,0	11	363	51
Rusia.	83.9	80	1.049	4
Suiza.	2.8	23	122	60
Dinamarca. . .	1,9	7	271	64
Noruega	1.9	17	112	»
Suecia	4,5	24	187	»
Estados Unidos	50,4	49	1.029	14

282. Las variaciones en el tiempo y en el espacio de las Obras dependen de la población y de la riqueza de la nación, siendo su número y extensión directamente proporcionales á dichos hechos.

CAPÌTULO XVI.

TEORÍA DEL ESTADO

SUMARIO.—Estática.—Definición del Estado.—Equivalencia mecánica del mismo.—Fórmula del valor del Estado.—Medios de existencia.—Medios de coexistencia.—Medios de defensa.—Dinámica.—Variaciones del valor del Estado.—Consecuencias.—Observación.

Estática

283. Se define el estado diciendo que es la reunión de una población y un territorio ó mas explícitamente, *es el conjunto armónico formado por la reunión de fuerzas originadas por una población y un territorio determinado, que obran sobre estos mismos elementos.* En efecto, una población salvaje en un territorio no se considera ni se ha considerado nunca como un Estado, sino que es preciso que existan esas fuerzas sociales y que su funcionamiento sea armónico. La equivalencia mecánica del Estado será el *cuerpo físico* sometido á diferentes fuerzas; es, el caso de un sistema de puntos íntimamente ligados entre sí.

284. Lo mismo que la Mecánica deduce que las fuerzas que actuan sobre un sistema de puntos unidos entre sí producen dos movimientos uno de traslación de su centro de inercia, como si todas estas fuerzas actuasen sobre este pun-

to, paralelamente á sí mismas y como si toda la masa estuviera concentrada en dicho punto, y otro de rotación alrededor del centro de inercia como si estuviera fijo, puede la Estadística decir del Estado. En efecto, supongamos que cada una de las fuerzas sociales obran sobre cada indivíduo independientemente, el promedio estadístico de todas ellas es el valor mas probable de dicha fuerza y, según sabemos, todos sus efectos pueden ser sustituidos por el efecto de esta última sobre el *hombre medio*. Hemos supuesto á los hombres que constituyen una sociedad independientes por completo entre sí y esto no es cierto, sino que, por el contrario, se hallan tan íntimamente ligados unos con otros que el esfuerzo ejercido sobre uno de ellos repercute necesariamente sobre los demás; pero la consecuencia deducida subsiste, pues suponiendo descompuesta cada fuerza en dos, una que ejerce su efecto inmediato y otra que se emplea en vencer la inercia de las demás personas componentes de la sociedad, vemos que la resultante de las primeras será la misma, que si cada elemento fuese independiente; es decir, que sobre el *hombre medio* se ejercerá también el promedio de aquellas fuerzas; las otras fuerzas empleadas en vencer la inercia de las partes pueden tener una resultante nula ó bien dar una resultante de un cierto valor que evidentemente no obrará sobre el *hombre medio*. En resúmen, todas las fuerzas que obran sobre una sociedad bien emanen de la misma población, del territorio ó de otros Estados, dan dos resultantes, una *activa* que se ejerce sobre el hombre medio y otra que podemos llamar *latente*, que lo único que hace es cambiar la posición relativa de aquellos elementos respecto al *hombre medio*.

285. Así como en Mecánica es preciso tener en cuenta la masa del cuerpo para poder juzgar del esfuerzo ejercido, pues las fuerzas que actúan sobre dos cuerpos que se mueven con la misma velocidad son directamente proporcionales á sus masas, también es evidente, *que en la sociedad, la can-*

tidad de movimiento ó sea la fuerza motriz, será igual á su masa por su velocidad ó sea por su fuerza activa. En los cuerpos para hacer comparables estas fuerzas motrices determinábamos la correspondiente á la masa de la unidad de volúmen, por medio de su densidad; aquí nos será preciso hacer lo mismo y la densidad de un Estado quedará determinada por la cantidad de población contenida en la unidad de superficie, es decir, será la población d por kilómetro cuadrado. Habiendo dividido todas las fuerzas que concurren en el Estado en tres grupos (medios de existencia, medios de coexistencia y medios de defensa) podrá determinarse aproximadamente la *fuerza vital* del mismo por la fórmula

$$V = d\,(E + C + F)$$

representando respectivamente por E, C y F los valores de las fuerzas de existencia, de coexistencia y de defensa que obran sobre el *hombre medio* del Estado que se considere.

286. Planteado así el problema su solución parece fácil; pero la dificultad consiste en la evaluación de cada una de las cantidades E, C y F, que son las resultantes de varias fuerzas cuyas relaciones mútuas no pueden ser determinadas en el estado actual de la ciencia y ha sido preciso evaluarlas como si existiesen solas cada una de ellas, es decir, independientemente de las demás y despues considerar como positivas todas aquellas que representan una energía, digámoslo así, por gastar, y como negativas las que representan una energía gastada. Las medidas E, C y F de estas resultantes, se determinan con relación á la población sobre que actúan; para tener una idea de las influencias mútuas de estas fuerzas se estudian también con relación á los demás elementos; así, por ejemplo, las fuerzas ó medios defensivos se estudian también con relación á los medios de existencia, bien con relación á la riqueza ó á las cantidades gastadas por el Estado en todos sus servicios; la influencia del comercio con relación á la producción y á la industria; la de los

transportes con relación al comercio y al ejército de tierra, etc. etc.: pero de todas estas investigaciones todavía no ha podido deducir la ciencia, no ya solo el coeficiente correspondiente á cada combinación, sino ni aun siquiera el *esquema* correspondiente á la misma. Examinemos ahora detenidamente cada uno de estos grupos principales de fuerzas para establecer la *forma* de sus primeras y mas importantes relaciones.

287. *Medios de existencia.*—El *esquema* de la influencia de estas fuerzas es el mas fácil de establecer, y sus coeficientes pueden determinarse con una cierta aproximación. La fórmula de la resultante será

$$E = \text{capital} \times \text{trabajo} + \text{producción} \pm \text{administración} - \text{crédito}.$$

La riqueza es el producto del capital por el trabajo; la producción es otra energía que debe sumarse porque tiende al aumento de los medios de existencia. El capital puede tener varias formas, puede ser territorial, industrial, pecuario etc., y su determinación en número absoluto es sumamente laboriosa y difícil por las ocultaciones frecuentes que sus poseedores cometen para sustraerse al pago de los impuestos que lo gravan. El trabajo puede también adoptar dos formas principales, intelectual y material ó mecánica y su determinación es aún más difícil que la del capital; así es, que su verdadero coeficiente se sustituye por la relación entre el número total de profesiones á la población del país.

El coeficiente relativo á la administración del país, ofrece también graves dificultades y se sustituye por la relación entre el *superabit ó déficit* de sus presupuestos á la cifra total del de ingresos.

El crédito, es decir, las deudas contraidas por el Estado, es verdaderamente un capital quitado á la circulación, por lo menos así debe considerarse, pues si se ha empleado en obras útiles ya se considerará en su lugar correspondiente. En el mismo caso se encuentran las deudas contraidas por las demás entidades (diputaciones y municipios), y sería conveniente que se sumasen á las deudas del Estado. Respecto á los cambios debemos hacer una observación y es que no deben considerarse los corrientes en cada nación porque su valor depende de circunstancias especiales y pasajeras; pero debe adoptarse un patrón lo más invariable posible para que las evaluaciones sean comparables, la de un país con las de todos los demás. Este patrón debe ser el oro.

288. *Medios de coexistencia.*—Los elementos que componen los medios de coexistencia son tantos, tan variados y están tan íntimamente ligados entre sí y con los demás medios de existencia, que su determinación y medida exacta ofrece sérias dificultades. Los pocos estúdios teóricos verificados no son bastantes para establecer sus relaciones recíprocas y se sustituyen sus verdaderas medidas por evaluaciones mas ó menos aproximadas.

La dirección de todas estas fuerzas corresponde á la política y el sentido que trata de imprimirles se determina por medio de la Estadística electoral.

En el Comercio deben considerarse no solo la cantidad y clase de las materias importadas y exportadas, sino tambien su valor. La intensidad del comercio se determina relacionando la suma de la importación y exportación con la población total.

Comprende el grupo Comunicaciones, no las líneas, ni canales construidos que deben figurar formando parte del territorio, sino el número de cartas, telegramas, paquetes postales, etc.; y su medida se determina relacionando su número á la población total.

En el grupo Transportes comprendemos todos los que el Estado posea, bien sean carros, material de ferrocarriles, transportes fluviales, marina mercante, etc., cuya medida se determinará relacionando el número de toneladas de peso que puedan transportar á la población.

Los Bancos, Cajas y Montes de piedad nos miden el ahorro de la nación y facilmente se comprende cómo debe hacerse su determinación.

Las medidas verdaderas de la Instrucción y de la Justicia son difíciles de determinar y se sustituyen por las relaciones entre el número de indivíduos que saben leer y escribir y la población y entre el número de delitos y la misma cifra de la población.

El valor del Consumo deberá restarse de las cifras anteriores y en su determinación deberemos establecer una completa separación entre el de granos, patatas, carne, etc., y el de alcohol, tabaco, ópio, etc., que embrutecen la población y la degeneran.

289. *Medios de defensa.*—Los medios de defensa de una nación se clasifican en terrestres y marítimos. Los medios terrestres son: el Ejército, el Armamento y las Defensas. La energía que representa el Ejército se mide relacionando el número de indivíduos que lo componen á la población; cuyo coeficiente debe ser multiplicado por otros dos que nos representen los valores del Armamento y de las Defensas: pero estos últimos son difíciles de evaluar por que en las nuevas armas y en las nuevas defensas es preciso atender á una porción de elementos para poder fijar su valor de una manera aproximada, además á todas las naciones conviene el tener ocultos estos datos. Tambien debe tenerse en cuenta al evaluar este coeficiente la composición del ejército, es decir, la manera de hacer el reclutamiento y la proporción de las diversas armas que lo componen. El reclutamiento puede hacerse voluntario, obligatorio, por sorteo, por compra de los hombres, (sistema desechado por todas las naciones cultas), etc.: la proporción de las distintas armas debe ser, según Napoleón I, la siguiente: Infantería 1, Caballería 1|5, Artillería, 1|8, Ingenieros 1|40, administración militar 1|30. Las guerras modernas han hecho variar algo estas proporciones aumentando las de la Artillería, Ingenieros y Administración militar, que son hoy elementos decisivos del combate.

290. Los medios marítimos de defensa son: el Ejército de mar, la Marina de guerra y el Armamento. Inglaterra, la nación práctica por excelencia, tiene clasificados los buques de guerra de todas las marinas valiéndose de fórmulas en las cuales se tiene en cuenta su tonelaje, su blindaje, su andar, su rádio de acción y su poder ofensivo, determinado por el número de cañones de diferentes calibres y de diferentes sistemas. Aunque estas fórmulas sean siempre empíricas, no por eso dejan de ser lo suficientemente aproximadas para no engañarse ni hacerse ilusiones acerca del valor de cualquier escuadra. En las guerras modernas el hombre no es mas que un factor muy importante, sin duda alguna; pero su efecto viene multiplicado por otros dos factores tan importantes como él, que son el poder ofensivo y defensivo de los buques de guerra.

Dinámica

291. Desde luego diremos, que las variaciones en el tiempo del valor de un Estado deben medirse suponiendo que siguen la forma de una progresión geométrica y las variaciones en el espacio, siguiendo la regla general del número 160.

Vamos ahora á examinar la manera de influir sobre el valor total las variaciones de cada uno de los factores que lo originan. Designemos por R la suma $E + C + F$ y distingamos cuatro casos principales:

1.º Que d sufra un aumento h, ó su correlativo que lo sufra R. El cálculo que sigue nos hace ver que si suponemos los valores de h y h' iguales, siendo, en general, d menor que R, el aumento será mayor en el primero de estos casos

$$(d + h)\,R = d\,R + h\,R \qquad d\,(R + h') = d\,R + d\,h'$$

Escolio.—Para que los aumentos sean iguales deberá verificarse que las cantidades h y h' sean directamente proporcionales á d y R.

2.º Que d sufra un aumento y R una disminución, ó bien su correlativo, que d sufra una disminución y R un aumento.

El valor total del Estado resultará aumentando en el primer caso siempre que R h exceda á d h' en una cantidad superior á h h' y en el segundo siempre que d h' exceda á R h en la misma cantidad; cuando suceda lo contrario el valor del Estado disminuye.

$$(d + h)\,(R - h') = d\,R + h\,R - d\,h' - h\,h'.$$
$$(d - h)\,(R + h') = d\,R - h\,R + d\,h' - h\,h'.$$

3.° Que d y R sufran ambos un aumento ó una disminución. En el primer caso el valor del Estado aumenta en una cantidad igual á la suma de los de cada uno mas el producto de los mismos. En el segundo caso el valor del Estado disminuye en una cantidad igual á su suma, menos el producto de los mismos.

$$(d + h)\,(R + h') = d\,R + h\,R + d\,h' + h\,h'$$
$$(d - h)\,(R - h') = d\,R - h\,R - d\,h' + h\,h'$$

4.° Que d sufra una disminución ó su correlativo que la experimente R. El valor del Estado disminuirá, pudiendo repetir todo lo que dijimos en el primer caso con respecto al aumento.

$$(d - h)\,R = d\,R - h\,R \qquad d\,(R - h') = d\,R - d\,h'.$$

292. *Consecuencias.*—1.° Cuando en un Estado disminuyen sus *medios* por haber tenido un aumento su población, el valor del Estado disminuye en una cantidad h h'; porque, en general, se verificará en este caso que h R=d h'.

2.ª Cuando en un Estado aumentan sus medios por haber tenido una dismiuución la población, el valor del Estado disminuye en la misma cantidad h h'.

3.ª Para que el valor de un Estado aumente, es preciso que aumenten proporcionalmente la población y sus *medios.*

293. Observación.—Todo gobierno celoso del porvenir de la nación y de su valor debe cuidar de fomentar todos las factores que concurren á él. Examinemos el modo como debe verificarse este aumento.

Población.—La cifra de la población no debe aumentarse favoreciendo las uniones prematuras; el hombre no adquiere todo su desarrollo físico hasta los 25 años y hasta la misma edad no completa su educación política y social. El medio mas racional y lógico para obtener el aumento de una población es el desarrollar la higiene pública y privada; porque la vida de los indivíduos puede dividirse en tres épocas; en la primera se consume y no se produce, en la segunda se produce mas que se consume, y en la tercera el producto ó el consumo, si lo hay es muy pequeño; por lo tanto todos los indivíduos que mueren en el primer periodo, representan para la nación una pérdida social y económica, real y verdadera; los que fallecen en el segundo representan, en general, una pérdida de beneficios, un decrecimiento de energías; y los que fallecen en el tercero, no producen perjuicio alguno á la sociedad ni al Estado, pues lo hacen despues de haber dado todo el producto que de ellos podía esperarse. Así, pues, el Estado debe tener un interés grandísimo en la mayor longevidad de los indivíduos que componen su población.

Medios de existencia y de coexistencia.—El desarrollo de la producción está íntimamente ligado al del comercio é industria; los indivíduos que creen hallar la solución á todos los problemas sociales y económicos solo con el fomento de la agricultura, por ejemplo, están en un grande error, porque ¿de qué nos serviría producir mucho trigo, algodón, aceite, vino, etc., si no existe un comercio que los exporte ni una industria que los transforme? El Comercio es el único elemento que puede tener un desarrollo excesivo con relación á los demás sin que sufra perturbación alguna la vida del Estado; el comercio excita y favorece la producción y desarrolla la industria; esta es la clave de la prosperidad de Inglaterra, del poder de los Estados-Unidos y de la preponderancia de Alemania.

Medios de defensa.—Los medios de defensa están constituidos por tres factores, el primero dependiente de la población, y los otros dos que son: el armamento, y las defensas y buques, cuestan excesivamente caros á las naciones pero en el estado actual del mundo no cabe otro recurso que aceptar tales gastos por ser necesarios, pues suele costar aún más caro el tener desatendidos tales elementos.

294. En resúmen, la complexidad del Estado exige que para el desarrollo de su valor se favorezca el desarrollo armónico de todos los elementos que lo componen. ¿Qué sería de un Estado en que al desarrollo comercial y de la producción, no acompañase el correspondiente desarrollo de la Moral, de la Instrucción y de la Justicia?

NOTA IMPORTANTE.

Por un error de cuartillas, al hacer la copia en limpio para remitirla á la imprenta, resulta erróneo é ininteligible el párrafo 225 que debe ser sustituido por el siguiente:

225. La curva que represente á $F(z)$ tendrá un mínimo para el menor valor de z que pueda ser sustituido y un máximo para el mayor. Como la primera derivada es siempre positiva (puesto que H es menor que cero), la función irá aumentando para valores crecientes de z. La segunda derivada

$$F''(z) = -mHe^{mHe^{kz}} . e^{kz} (mHe^{kz} + 1)$$

se anula para el valor $-mHe^{kz} = 1$ ó sea para el de

$$z = \frac{-l(-mH)}{K} = n$$

Todos los valores de z inferiores á n hacen á $F''(z) > 0$ por lo tanto la curva volverá su convexidad hacia las x positivas y todos los valores de z superiores á n harán que $F''(z) < 0$; la curva se compondrá de dos ramas que tendrán su punto de infl·xión para el valor de $z = n$. Haciendo aplicación á España y á los datos de 1878-82 encontramos según los valores generales de las constantes (220), para m (223) el de 67 años y 4 meses, y para n, 102 años; dividiendo el intérvalo de 30 á 90 años en otros tres (221) hallamos para la mortalidad las cifras siguientes: (Estos valores figuran al final de la pág. 82).

FÉ DE ERRATAS

Página	Línea	Dice	Debe decir
6	15	algoritono	algoritmo
13	20	$\frac{h}{1}$	$\frac{h}{s}$
63	15	$a^2 P_o \cdot \frac{M^2}{1} 10.^{at}$	$a^2 P_o \cdot \frac{1}{M^2} \cdot 10^{at}$
70	15	1867-70	1861-70

ÍNDICE

DE ESTA OBRA VAN PUBLICADOS LOS TOMOS SIGUIENTES

PRIMERA PARTE.—Introducción al Estudio de la ciencia Estadística, que comprende: Generalidades, Cálculo de probabilidades, é Historia de la Estadística.—**Precio, 1,50 pesetas**.

SEGUNDA PARTE.— **Tomo I.** —Estadística analítica, que comprende: Teoría general, Teoría de la población, Teoría del Territorio y Teoría del Estado.—**Precio, 4 pesetas.**

SEGUNDA PARTE.— **Tomo II.** —Estadística gráfica.—(En preparación.)