

Mecanismos formales para la representación y
extracción de expresiones de referencia en
sistemas data-to-text
Programa de Doctorado en Tecnologías de la
Información y la Comunicación

Tesis presentada por:
Gustavo Rivas Gervilla

Tesis dirigida por:
Nicolás Marín Ruiz Daniel Sánchez Fernández



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Gustavo Rivas Gervilla
ISBN: 978-84-1117-294-3
URI: <http://hdl.handle.net/10481/74613>

Esta tesis doctoral ha sido realizada como beneficiario de una beca de Formación de Profesorado Universitario 2016 concedida por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte con código FPU16/05199.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis tutores la enorme dedicación que han puesto en mi formación como investigador desde hace ya siete años. Así, me gustaría empezar agradeciéndoles la oportunidad que me dieron de iniciarme en esta carrera investigadora que tanto me ha llenado.

Desde aquel correo en el que Nicolás me invitaba a una reunión informativa sobre las Becas de Iniciación a la Investigación para Estudiantes de Grado y aquella primera reunión con Daniel en la cafetería donde me entregó un taquito de folios, que serían los primeros artículos que leyese, no he dejado de aprender de ellos. No solo me han enseñado las buenas prácticas de investigación, también me han inculcado valores muy importantes tanto en el mundo laboral como en el personal. Me han enseñado a disfrutar el mundo investigador y me han ayudado a crear lo que creo que puedo llamar una vocación. Se han esforzado para que desarrolle una carrera investigadora impecable, poniendo a mi disposición cuantas oportunidades estaban de su mano. Y también me han enseñado algo tan básico como la diferencia entre dos preposiciones, ya que no es lo mismo trabajar para alguien que trabajar con alguien. Gracias por la comprensión, la paciencia y el compromiso.

Ahora quiero agradecer a mi familia todo el apoyo que me han brindado durante estos años, alegrándose por mis logros como si fueran suyos. En particular, me gustaría agradecer a mis padres la oportunidad que me han dado de poder formarme hasta llegar al último nivel de la vía académica. Gracias por los esfuerzos que habéis realizado, y sobre todo gracias por los que estabais dispuestos a realizar. No ha sido fácil aguantarme estos años y tener vuestro apoyo ha sido indispensable. Esto es tan vuestro como mío.

Me gustaría hacer una mención especial a mis abuelos, quienes han sido unos segundos padres para mí. Y aunque mi abuelo hubiese querido que estudiase medicina y formase parte de la tuna, mi aprensión y mi escaso oído me han desviado por otros caminos, por los cuales siempre me han llevado de la mano. Gracias por tanto.

También quiero dedicar unas líneas a aquellas personas que me han acompañado en estos años. A aquellos amigos que me conocen desde la infancia y que desean verme convertido en doctor; espero que sigáis aquí. A mis compañeros de carrera que han pasado a ser compañeros de vida. Y a mis compañeros de despacho en el CITIC, que me han aportado el mejor ambiente laboral que se pueda tener; el DB-4 siempre será el mejor despacho.

Por último, me gustaría reservar unas palabras para aquellas personas para las que, pese a lo vasto que es el lenguaje, como se pone en esta memoria de manifiesto, no existe un término para referirlas. Gracias por darme un rincón al que volver, un abrazo al que acudir y una carcajada de la que agarrarme. Muchos de vosotros ya habéis aparecido en estas líneas.

Summary

In the area of Natural Language Generation, data-to-text systems aim to produce textual descriptions of aspects of interest of a dataset. One of the key problems in this setting is the generation of referring expressions, which are noun phrases intended to identify and distinguish an object or set of objects, called target, from other objects present in a context, in which case the expressions is said to achieve referential success, and the target is said to be referable. Referring expressions allow data-to-text systems to generate descriptions by referring to and characterizing structures in data like, for instance, regions in digital images.

A first step in the generation of referring expressions in natural language is to obtain a computational representation of the semantics of the expression using some knowledge representation formalism. A usual approach is to represent a referring expression as a set of basic properties of objects, which will refer to the set of objects in the context that satisfy all the properties, if any. From a logical point of view, the referring expression has the semantics of a conjunction of properties.

In the literature it is possible to find different ad-hoc proposals for determining a referring expression for a given object or set. In addition, several formal frameworks like Graph Theory, Conceptual Graphs, Constraint Satisfaction, and Description Logics have been employed for solving the referring expression generation (REG) problem. The use of formal frameworks contribute to the solution of the problem in several respects. For instance, allowing in some cases an expressive power beyond simple conjunctions of properties. Also, the formulation of REG in terms of these formal frameworks allow us to take benefit of the existing algorithms and results in the frameworks for solving the REG problem.

One of the main contributions of this Ph.D. Thesis is the proposal of a new framework for REG based on the use of Formal Concept Analysis (FCA), a mathematical theory that formalize concepts in a context as those pairs (A, B) such that A is the set of objects that share all properties in B and, at the same time, B is the set of properties that are satisfied by all objects in A . We show that a set of objects A is referable in a context if and only if a formal concept of the form (A, B) exists in the context, so we can determine the referable sets by computing all the formal concepts in a context, which is one of the main problems in FCA, and for which different algorithms are available. More specifically, these algorithms compute the lattice associated to the partial order between formal concepts that can be defined in terms of set inclusion of the sets of objects. We have also been able to use this

lattice in order to provide characterizations of the whole set of referring expressions for every referable set, a crucial resource for choosing the most appropriate expression for a certain target set in terms of user's satisfaction. These capabilities provided by the use of FCA for REG are not simultaneously provided by any other formal framework.

The other main contribution of our work concerns the generalization of REG to the case of gradual properties like "tall" for which it is not possible to define a clear boundary between the fulfillment and the unfulfillment of the property. A usual way to represent such properties is by means of fuzzy sets defined by membership functions assigning a membership degree in $[0, 1]$ to every element in the domain of the property. In this setting we have provided advances in two directions:

1. When properties are gradual, referential success becomes gradual as well. Hence, it is necessary to provide measures of the referential success of referring expressions involving gradual properties. In this setting, we have provided axioms that any such measure should satisfy. We have also shown that it is possible to define measures of referential success from specificity measures of fuzzy sets, which measure the degree to which a fuzzy set is a crisp singleton. This led us to deepen into the study of specificity, with several novel results: first, a characterization of specificity measures into three families with different behaviours, each family being appropriate for different purposes during the construction and final evaluation of referring expressions. Second, a methodology for building specificity measures on the basis of measures of distances between fuzzy sets. Finally, the proposal of possibility and necessity measures of referential success for those cases in which the degrees attached to properties represent possibilistic uncertainty. In order to measure referential success when the target is a set of objects, some of these results have been generalized to the case of k -specificity measures, which measure the degree to which a fuzzy set is a crisp set with k elements.
2. We have provided an extension of FCA to the gradual case based on the Theory of Representation by Levels, which is an alternative to Fuzzy Set Theory for representing graduality. Our extension benefits from the main features of the Theory of Representation by Levels: first, a finite set of levels in $(0, 1]$ is employed in order to represent different degrees of "relaxation" of the membership criteria; second, gradual sets are represented as assignments of crisp sets to levels; finally, operations between gradual sets are performed as the corresponding crisp operations applied to the crisp sets in the same levels independently. Beyond sets, representations by levels can be employed for any other mathematical object and notion, such as elements (as assignments of individual elements to levels), predicates, algorithms, etc. As a consequence, the extension of any crisp formal system to the gradual case is unique and direct. In addition, contrary to fuzzy sets, the extensions keep all the properties of the crisp case. Using these features we have been able to extend our crisp results about using FCA for REG to the case of gradual properties.

In order to test our proposals, we have developed a proof of concept prototype,

called Refer4Learning, that implements a referential game, a well-known type of image-to-text system. The prototype is oriented to teaching basic visual concepts like color, shape, size, etc. to students in the earlier stages of education. Using this prototype, we have performed experiments with adult subjects in order to analyze the correspondence between some of our quality measures and the performance of the system in terms of user's preferences. Additionally, by means of an interdisciplinary collaboration with researchers in Computer Vision, we have shown that our techniques can be integrated with the extraction of objects and gradual properties from images using Deep Learning based techniques, allowing to automatically generate referring expressions for objects and sets of objects from images. These results are potentially useful in several applications like image-to-text systems, visual information retrieval, and interactive dialogue systems about visual information.

Resumen

En el ámbito de la Generación de Lenguaje Natural, los sistemas data-to-text tienen como objetivo producir descripciones textuales de aspectos de interés de un conjunto de datos. Uno de los problemas clave en este ámbito es la generación de expresiones de referencia, que son frases nominales destinadas a identificar unívocamente un objeto o conjunto de objetos, denominado objetivo, de otros objetos presentes en un contexto, en cuyo caso se dice que las expresiones tienen éxito referencial, y se dice que el objetivo es referible. Las expresiones de referencia permiten a los sistemas data-to-text generar descripciones mediante la referencia y la caracterización de estructuras en los datos como, por ejemplo, las regiones en las imágenes digitales.

Un primer paso en la generación de expresiones de referencia en lenguaje natural es obtener una representación computacional de la semántica de la expresión utilizando algún formalismo de representación del conocimiento. Un enfoque habitual es representar una expresión de referencia como un conjunto de propiedades básicas de los objetos, que se referirá al conjunto de objetos del contexto que satisfacen todas las propiedades, si las hay. Desde un punto de vista lógico, la expresión de referencia tiene la semántica de una conjunción de propiedades.

En la literatura es posible encontrar diferentes propuestas ad-hoc para determinar una expresión de referencia para un objeto o conjunto dado. Además, se han empleado varios marcos formales como la Teoría de Grafos, los Grafos Conceptuales, la Satisfacción de Restricciones y las Lógicas Descriptivas para resolver el problema de la generación de expresiones de referencia (GER). El uso de marcos formales contribuye a la solución del problema en varios aspectos. Por ejemplo, permitiendo en algunos casos un poder expresivo más allá de las simples conjunciones de propiedades. Además, la formulación de GER en términos de estos marcos formales nos permite aprovechar los algoritmos y resultados existentes en el ámbito de estos marcos para resolver el problema GER.

Una de las principales contribuciones de esta Tesis Doctoral es la propuesta de un nuevo marco para GER basado en el uso del Análisis de Conceptos Formales (ACF), una teoría matemática que formaliza los conceptos en un contexto como aquellos pares (A, B) tales que A es el conjunto de objetos que comparten todas las propiedades en B y, al mismo tiempo, B es el conjunto de propiedades que son satisfechas por todos los objetos en A . Demostramos que un conjunto de objetos A es referible en un contexto si, y sólo si, existe un concepto formal de la forma (A, B) en el contexto, por lo que podemos determinar los conjuntos referibles obteniendo to-

dos los conceptos formales de un contexto, que es uno de los principales problemas en ACF, y para el que existen diferentes algoritmos. Más concretamente, estos algoritmos calculan el retículo asociado al orden parcial entre conceptos formales que puede definirse en términos de inclusión de conjuntos de los conjuntos de objetos. También hemos podido utilizar este retículo para proporcionar caracterizaciones del conjunto de expresiones de referencia para cada conjunto referible, un recurso crucial para elegir la expresión más adecuada para un determinado conjunto objetivo en términos de preferencias del usuario. Estas capacidades proporcionadas por el uso de ACF para GER no son proporcionadas simultáneamente por ningún otro marco formal.

La otra contribución principal de nuestro trabajo se refiere a la generalización de GER al caso de propiedades graduales como «alto» para las que no es posible definir una frontera clara entre el cumplimiento y el incumplimiento de la propiedad. Una forma habitual de representar tales propiedades es mediante conjuntos difusos definidos por funciones de pertenencia que asignan un grado de pertenencia en $[0, 1]$ a cada elemento del dominio de la propiedad. En este ámbito hemos aportado avances en dos direcciones:

1. Cuando las propiedades son graduales, el éxito referencial también lo es. Por lo tanto, es necesario proporcionar medidas del éxito referencial de las expresiones de referencia que implican propiedades graduales. En este contexto, hemos proporcionado los axiomas que debe satisfacer cualquier medida de este tipo. También hemos mostrado que es posible definir medidas de éxito referencial a partir de medidas de especificidad de conjuntos difusos, que miden el grado en que un conjunto difuso es un singleton crisp. Esto nos ha llevado a profundizar en el estudio de la especificidad, con varios resultados novedosos: primero, una caracterización de las medidas de especificidad en tres familias con comportamientos diferentes, siendo cada familia apropiada para diferentes propósitos durante la construcción y evaluación final de las expresiones de referencia. En segundo lugar, una metodología para construir medidas de especificidad a partir de medidas de distancia entre conjuntos difusos. Por último, la propuesta de medidas de posibilidad y necesidad de éxito referencial para aquellos casos en los que los grados asociados a las propiedades representan incertidumbre posibilista. Para medir el éxito referencial cuando el objetivo es un conjunto de objetos, algunos de estos resultados se han generalizado al caso de las medidas de k -especificidad, que miden el grado en que un conjunto difuso es un conjunto clásico con k elementos.
2. Hemos proporcionado una extensión de ACF al caso gradual basada en la Teoría de Representación por Niveles, que es una alternativa a la Teoría de Conjuntos Difusos para representar la gradualidad. Nuestra extensión se beneficia de las principales características de la Teoría de Representación por Niveles: en primer lugar, se emplea un conjunto finito de niveles en $(0, 1]$ para representar diferentes grados de «relajación» de los criterios de pertenencia; en segundo lugar, los conjuntos graduales se representan como asignaciones de conjuntos clásicos a niveles; finalmente, las operaciones entre conjuntos

graduales se realizan como las correspondientes operaciones clásicas aplicadas a los conjuntos clásicos en los mismos niveles de forma independiente. Más allá de los conjuntos, las representaciones por niveles pueden emplearse para cualquier otro objeto y noción matemática, como elementos (como asignaciones de elementos individuales a niveles), predicados, algoritmos, etc. En consecuencia, la extensión de cualquier sistema formal crisp al caso gradual es única y directa. Además, a diferencia de los conjuntos difusos, las extensiones mantienen todas las propiedades del caso crisp. Utilizando estas características hemos podido extender nuestros resultados crisp sobre el uso de ACF para GER al caso de las propiedades graduales.

Para poner a prueba nuestras propuestas, hemos desarrollado un prototipo de prueba de concepto, denominado Refer4Learning, que implementa un juego referencial, un tipo muy conocido de sistema de image-to-text. El prototipo está orientado a la enseñanza de conceptos visuales básicos como el color, la forma, el tamaño, etc. a estudiantes de las primeras etapas educativas. Utilizando este prototipo, hemos realizado experimentos con sujetos adultos para analizar la correspondencia entre algunas de nuestras medidas de calidad y el rendimiento del sistema en función de las preferencias de los usuarios. Adicionalmente, mediante una colaboración interdisciplinar con investigadores en Visión por Computador, hemos demostrado que nuestras técnicas pueden integrarse con la extracción de objetos y propiedades graduales a partir de imágenes utilizando técnicas basadas en Aprendizaje Profundo, permitiendo generar automáticamente expresiones referenciales para objetos y conjuntos de objetos a partir de imágenes. Estos resultados son potencialmente útiles en varias aplicaciones como sistemas de imagen a texto, recuperación de información visual y sistemas de diálogo interactivo sobre información visual.

Índice general

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos de esta tesis doctoral	6
1.2. Organización de la memoria	7
2. Preliminares	9
2.1. El problema de la generación de expresiones de referencia	10
2.1.1. Marcos formales para GER	17
Teoría de Grafos	18
Grafos conceptuales	21
Lógicas descriptivas	24
Satisfacción de Restricciones	26
2.1.2. Medidas de calidad en el GER	27
2.2. Extensiones del problema clásico de Generación de Expresiones de Referencia y referibilidad	31
2.2.1. Negación de propiedades	32
2.2.2. Disyunción de propiedades	32
2.2.3. Propiedades relacionales	33
2.2.4. Propiedades contextuales	34
2.2.5. Propiedades colectivas	35
2.2.6. El problema de la referibilidad	36
2.3. Gradualidad y el problema del anclaje de símbolos	37
2.3.1. El manejo de la gradualidad: Teoría de Conjuntos Difusos	40
2.3.2. Fundamentos de la Representación por Niveles	44
3. Vaguedad en el Problema de la Generación de Expresiones de Referencia	53
3.1. El rol de la gradualidad en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia	53
3.2. Éxito referencial como un concepto gradual	59
3.2.1. Una medida de éxito referencial basada en α -cortes	61
3.3. Medidas de éxito referencial basadas en especificidad	65
3.3.1. El concepto de especificidad	65

3.3.2.	Un método para la construcción de medidas de éxito referencial	68
3.4.	Otras medidas de especificidad propuestas	70
3.4.1.	Medidas de especificidad acotadas	70
3.4.2.	Medidas de k -especificidad	74
3.4.3.	Medidas de especificidad basadas en medidas de éxito referencial	77
3.4.4.	Medidas de especificidad basadas en medidas de similitud	78
3.5.	Incertidumbre dentro de la Generación de Expresiones de Referencia	84
3.6.	Difusión de resultados	89
4.	Análisis de Conceptos Formales para el problema de Generación de Expresiones de Referencia	91
4.1.	Fundamentos del Análisis de Conceptos Formales	91
4.1.1.	Algoritmos para obtener el retículo de conceptos formales	98
4.1.2.	Simplificación de contextos formales	102
4.2.	Análisis de Conceptos Formales como un marco formal para la Generación de Expresiones de Referencia	104
4.3.	Estudio del Análisis de Conceptos Formales para la Generación de Expresiones de Referencia	107
4.3.1.	El problema clásico de Generación de Expresiones de Referencia	108
4.3.2.	El problema de la referibilidad	110
4.3.3.	Exploración del espacio de posibles expresiones de referencia Obteniendo las fronteras	111 115
4.3.4.	Generalizaciones del problema de Generación de Expresiones de Referencia	117
Propiedades relacionales	118	
Otros operadores lógicos	119	
Propiedades graduales	122	
Propiedades contextuales	122	
Propiedades colectivas	123	
4.3.5.	Idoneidad del Análisis de Conceptos Formales como marco formal para la Generación de Expresiones de Referencia	123
4.4.	Difusión de resultados	126
5.	Análisis de Conceptos Formales para la Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales	127
5.1.	L -Análisis de Conceptos Formales: Estado del arte	129
5.2.	L -Análisis de Conceptos Formales basado en la Representación por Niveles	142
5.3.	RN-ACF para la Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales	152
5.4.	Análisis del ACF-RN para el problema de la Generación de Expresiones de Referencia con propiedades difusas	156

6. Desarrollos prácticos	163
6.1. Un caso de uso: aplicación para la enseñanza	164
6.2. Experimentación a través de un juego referencial	168
6.2.1. Resultados de la experimentación	172
6.3. Modelado de propiedades contextuales	179
6.4. Un ejemplo de aplicación en visión por computador	182
6.5. Difusión de resultados	188
7. Conclusiones y trabajo futuro	191
Bibliografía	199

Capítulo 1

Introducción

Comenzamos esta memoria con los versos que Miguel Hernández dedicó a Ramón Sijé:

*Tanto dolor se agrupa en mi costado,
que por doler me duele hasta el aliento.*

Estos versos son una muestra de lo complejo que puede llegar a ser el lenguaje. Por medio del lenguaje podemos trasladar o expresar la misma información de innumerables formas distintas. El lenguaje que empleamos día a día, al cual nos referiremos como lenguaje natural, es vasto, lleno de matices y de interpretaciones. Y ya no solo nos encontramos estos matices en las figuras literarias como la hipérbole o la metáfora. El lenguaje natural es complejo en su uso diario. En el día a día empleamos la comparación, la metáfora, el doble sentido, y el lenguaje se ve afectado por el contexto; entre otras muchas aristas que tiene este prisma.

No explicamos del mismo modo un concepto a un niño que a un adulto. No empleamos el mismo vocabulario en un contexto profesional que en una charla distendida. Por ejemplo, nos referiríamos a un perro como «el perro» sin especificar su raza cuando estamos hablando con un niño o cuando no se necesita más precisión en la conversación. Pero en otro contexto, en otra conversación, nos podríamos referir al mismo perro como «el dálmata». Otro ejemplo de esta jerarquía u ontología de términos en base a su precisión lo podemos encontrar en la Figura 1.1.

Por lo tanto, el problema de hacer que un computador «hable» como un humano es extremadamente complejo. Sin embargo, cualquiera puede imaginar la innumerable cantidad de aplicaciones que tendría un sistema capaz de comunicarse con un usuario de una forma natural al mismo. Podemos pensar en sistemas de asistencia a personas de avanzada edad que puedan, no solo ayudar a la persona, sino también hacer que se sienta, en la medida de lo posible, atendida con la calidez que estas personas requieren. También podemos idear un sistema capaz de, combinando otras tecnologías como el reconocimiento visual de objetos, describir un entorno, como pudiera ser una sala de museo, a una persona invidente. Por lo que no es de extrañar la atención que ha recibido este problema en los últimos años.

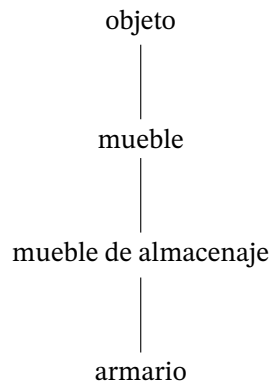


Figura 1.1: Ejemplo de términos que podemos emplear para referirnos a un mismo objeto con mayor o menor especificidad.

En torno a él giran dos grandes campos de relevante actualidad dentro de las Ciencias de la Computación: el Procesamiento de Lenguaje Natural (PLN) y la Generación de Lenguaje Natural (GLN). Mientras que el primero se encarga de interpretar mediante algoritmos y otros modelos computacionales el mensaje emitido por un humano [36, 204, 214], el segundo estudia los procesos mentales mediante los que generamos el lenguaje y la comunicación, para así traducirlos en modelos formales que puedan ser representados en un computador y que este los emplee para generar un mensaje similar al que generaría un humano, dentro de un contexto determinado [91, 94, 127].

Esta tesis doctoral se enmarca dentro del campo de la Generación de Lenguaje Natural. Como hemos indicado anteriormente, el lenguaje natural es amplio y muy complejo, por lo que en esta tesis nos centraremos en uno de los problemas más relevantes dentro de la Generación de Lenguaje Natural: el problema de la Generación de Expresiones de Referencia (GER). Este problema consiste, de un modo general, en generar una descripción que identifique o señale a un objeto dentro de un universo de discurso de forma unívoca.

En el universo que presentamos en la Figura 1.2, si empleamos la expresión «el círculo», el usuario no sabría a qué elemento de los seis nos estamos refiriendo. Sin embargo, si nos referimos al objeto como «el círculo negro más pequeño» o «el círculo más a la derecha», entonces sí que identificaríamos inequívocamente dicho objeto dentro del universo de discurso.

Formalizaremos este problema más adelante, pero es claro que la generación de expresiones de referencia es una tarea que llevamos a cabo a diario en muchas ocasiones: cuando queremos pedir algo, llamar la atención sobre algo o, por ejemplo, explicar alguna idea. Con lo cual, abordar y resolver el problema de Generación de Expresiones de Referencia es de gran importancia en sistemas que pretendan comunicarse con los humanos de una forma que sea natural y resulte amigable al usuario. Un ejemplo de los sistemas que se benefician de los desarrollos en el área de GER son los sistemas *data-to-text* [94, 172, 174, 175, 178]. Sistemas cuyo propósi-

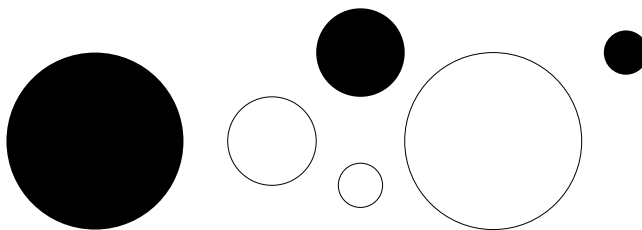


Figura 1.2: Un contexto en el que encontramos diferentes figuras geométricas blancas y negras de distintos tamaños.

to es expresar la información contenida en un conjunto de datos mediante un texto similar al que produciría un humano.

Como sabemos, para trabajar con cualquier tipo de información en un computador, como puede ser la información contenida en un universo de discurso, necesitamos un modo de representarla en el computador, de forma que la hagamos tratable y accesible para el mismo. Necesitamos así lo que denominaremos un mecanismo formal para manejar y tratar la información contenida en un universo de discurso de manera apropiada.

Como veremos, en la literatura podemos encontrar distintos mecanismos de representación de conocimiento que han sido empleados en el campo de la Generación de Expresiones de Referencia. Desde los grafos con etiquetas a las lógicas descriptivas, que poseen una gran capacidad semántica. Cada uno de estos mecanismos, que podemos encontrar en la literatura, presenta una serie de características que lo hacen interesante, sobre otros, para abordar distintos problemas dentro de la tarea de Generación de Expresiones de Referencia.

En esta tesis doctoral proponemos una nueva idea para representar la información y tratar los distintos aspectos que atañen al problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Así, presentamos el Análisis de Conceptos Formales (ACF) como una herramienta para tratar de un modo efectivo el problema de la GER. Más adelante mostraremos que el Análisis de Conceptos Formales posee una serie de características distintas a otros mecanismos de representación de conocimiento. Estas características nos permitirán tratar problemas dentro de la Generación de Expresiones de Referencia que otros mecanismos de la literatura no permiten tratar, o no lo hacen de un modo tan eficiente.

Uno de los propósitos primeros en el desarrollo del Análisis de Conceptos Formales fue formalizar matemáticamente cómo los humanos representamos los conceptos que aprendemos a lo largo de nuestra vida en nuestra mente [212]. Así, por ejemplo, podríamos pensar en el concepto de «camión» representado por dos componentes. Por un lado el conjunto de características que nos hacen identificar a un objeto como un camión, como pueden ser tener ruedas, ser un vehículo a motor, el tener un tamaño mayor al resto de vehículos... Y, por otro, tenemos al conjunto de los objetos que se engloban en la categoría «camión» dentro de nuestro imaginario. Se puede ver aquí la relación estrecha entre los orígenes de este formalismo y el problema que nos ocupa.

Como veremos en la memoria, este formalismo aporta nuevas características al estado del arte en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Así, por ejemplo, nos permitirá abordar el problema de la referenciación a conjuntos de objetos de un modo muy natural.

De este modo estudiaremos el problema de encontrar un mecanismo formal de representación de conocimiento adecuado para tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Como hemos indicado anteriormente, encontrar un mecanismo formal es de gran importancia a la hora de abordar cualquier problema de un modo computacional.

Pero no es este el único problema al que nos enfrentamos al estudiar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia, ya que estamos dentro del campo de la Generación de Lenguaje Natural. Por lo tanto, no solo tenemos que encontrar un mecanismo formal para enfrentarnos a este problema, sino que además este ha de permitirnos manejar los distintos tipos de información que manejamos en el lenguaje natural día a día.

Como hemos dicho, el lenguaje natural es altamente complejo por diversas características de la comunicación por este medio. Una de estas características es el manejo de información vaga. Los conceptos o etiquetas lingüísticas que manejamos hacen referencia a conceptos imprecisos o, mejor dicho, graduales. Podemos pensar en la etiqueta lingüística «alto» o «alta». A una persona con una altura muy por encima de la media la etiquetaríamos como alta sin ninguna duda; pensemos por ejemplo en una persona con una altura de 1.90 metros. En cambio, una persona con una altura mucho menor de la media no sería considerada alta. Ahora bien, una persona con una altura como por ejemplo 1.85 metros, seguiría siendo considerada alta aunque lo sea algo menos que la primera persona que hemos considerado. Por lo tanto, el cambio de considerar una persona alta a considerarla como baja, se produce de manera gradual. Es decir, una pequeña diferencia en la altura no supone una gran diferencia en la etiqueta lingüística que asociamos a la persona.

Por otro lado, el lenguaje natural también viene modificado por el contexto. Podemos pensar en una jugadora de baloncesto. Es claro que, en un contexto general, esta persona sería considerada alta, ya que tendrá una altura muy por encima de la media. Sin embargo, si nos restringimos al universo compuesto por sus compañeras de equipo, quizás esta jugadora sea la más baja de todas, por ejemplo si es la base del equipo. Entonces, si queremos hacer referencia a esa jugadora dentro de su equipo lo podríamos hacer como «la jugadora baja». Por lo tanto, aquí se ve cómo las etiquetas lingüísticas que empleamos para describir un objeto son dependientes del contexto.

Atendiendo al ejemplo anterior, podemos ver cómo en el lenguaje natural se manejan conceptos graduales. Precisamente, este concepto de elementos que pertenecen a un cierto conjunto en un grado determinado, es el concepto central de la Teoría de Conjuntos Difusos [63]. Como veremos más adelante, esta teoría constituye una excelente herramienta con la que manejar la vaguedad propia del lenguaje. En capítulos posteriores daremos las nociones teóricas base de esta teoría de un modo formal.

Esta idea de tratar de un modo computacional las etiquetas lingüísticas que manejamos en el día a día nos lleva al paradigma de la Computación con Palabras [224,

225] (CP, *Computing with Words* en inglés). En el paradigma de la Computación con Palabras se parte de la premisa de que, al contrario que en la computación clásica en la que se emplean cifras y símbolos para realizar una serie de cálculos, los humanos empleamos las palabras como las unidades con las que razonar y por tanto llevar a cabo nuestros procesos mentales [226]. Dado que, como hemos dicho antes, el principal objetivo del campo de la Generación de Lenguaje Natural es trasladar los procesos mediante los cuales los humanos generamos los mensajes que empleamos en la comunicación natural a un computador, parece lógico que el paradigma de la Computación con Palabras sea un buen enfoque con el que abordar los problemas de este campo de las Ciencias de la Computación [113].

También hemos mencionado anteriormente que el lenguaje natural es impreciso o, dicho de otra manera, emplea información vaga de forma intrínseca a la naturaleza del propio lenguaje. En [226] Lofti A. Zadeh pone de manifiesto cómo la Teoría de Conjuntos Difusos y la Lógica Difusa están íntimamente ligadas a la Computación con Palabras. Además, se indica que uno de los aspectos principales de la Computación con Palabras es la combinación del lenguaje natural con la computación empleando variables difusas. Por ejemplo, podemos considerar el siguiente caso de uso de la Computación con Palabras:

Ejemplo 1.1: [226]

En la Computación con Palabras las unidades de información que se manejan reciben el nombre de gránulos (*granule*) y, como se indica en [226], un gránulo es un conjunto difuso de elementos que se agrupan por su similitud. Por ejemplo, en la proposición «María es joven», «joven» es la etiqueta lingüística que se le asigna al gránulo *joven*.

En este caso, *joven* sería un conjunto difuso que actuaría como una restricción difusa sobre la edad de María. Del mismo modo, en la proposición «Pablo vive cerca de María», el gránulo *vive cerca* actúa como una restricción sobre la distancia entre los hogares de Pablo y María.

Y así podríamos encontrar el valor de verdad (difuso) de dichas proposiciones a partir de la definición de dichos gránulos.

Por lo tanto, es claro el uso que se da a la Teoría de Conjuntos Difusos en el campo de la Generación de Lenguaje Natural. La extensión del Análisis de Conceptos Formales para el manejo de la gradualidad ya se ha abordado en la literatura desde el enfoque de la Teoría de Conjuntos Difusos. Dichas extensiones dan lugar a la aparición de nuevas formulaciones de especial complejidad en el ámbito del ACF que luego hay que trasladar a implementaciones concretas. En esta tesis, extenderemos el Análisis de Conceptos Formales mediante la Teoría de Representaciones por Niveles con la idea de obtener un modelo más natural, fácilmente implementable, y consistente con la estructura de Álgebra de Boole.

Nosotros vamos a aprovechar los desarrollos teóricos en el campo del Análisis de Conceptos Formales en el ámbito del problema de la Generación de Expresiones de Referencia gracias al empleo de la Representación por Niveles (RN). Esta herramienta [188] plantea un modo de representar conceptos graduales de un modo que preserve todas las propiedades de las álgebras booleanas, algo que resulta

interesante para muchas aplicaciones. Esta característica de conservar las propiedades de las álgebras booleanas no es tan común, y de hecho no está presente en las extensiones más comunes de conceptos graduales, particularmente propios de la Teoría de Conjuntos Difusos [64].

Con esta extensión del Análisis de Conceptos Formales al ámbito gradual completaremos una propuesta con la que abordar el problema de Generación de Expresiones de Referencia con información vaga, fundamental, como hemos dicho, en el campo de la Generación de Lenguaje Natural, y en los sistema *data-to-text* en particular. Serán estos sistemas los que nos sirvan de plataforma para verificar la validez de nuestras propuestas en un ambiente real, realizando pruebas con usuarios reales.

En concreto, una de las aplicaciones que hacemos de nuestros desarrollos teóricos es en el campo de los juegos referenciales [77, 221] (*referential games*). Así, desarrollaremos una aplicación que implementa un juego referencial, un juego en el que, dada una imagen y una descripción de un objeto, el usuario ha de identificar a qué objeto se refiere la descripción, como pudiese ser la expresión «el círculo más a la derecha» en el ejemplo de la Figura 1.2.

A través de este tipo de aplicaciones, que presentaremos más adelante, alcanzamos distintos objetivos. Por un lado, con estas aplicaciones podemos generar pruebas de concepto de nuestros desarrollos teóricos en un entorno con usuarios reales. Por otro, a través de este tipo de juegos se pueden realizar distintas experimentaciones para obtener información sobre cómo los humanos realizamos el proceso de generación de expresiones de referencia. Experimentos similares han sido ampliamente utilizados en el campo de la lingüística [89, 205]. Veremos así las distintas experimentaciones que hemos realizado y los resultados que hemos obtenido con ellas. Con estas experimentaciones finalizaremos la exposición del trabajo de investigación realizado en esta tesis doctoral.

A continuación se describen los objetivos establecidos para esta tesis doctoral y presentamos la estructuración del resto de la memoria.

1.1 OBJETIVOS DE ESTA TESIS DOCTORAL

Una vez expuesta la introducción de la tesis, estos son los objetivos que se plantean para la misma:

1. Elaboración de un estado del arte de la cuestión en el ámbito de la generación de expresiones de referencia dentro del campo de la Generación de Lenguaje Natural, prestando especial atención al tratamiento de la incertidumbre.
2. Propuesta de un modelo formal que sirva para dar soporte a la representación de conocimiento en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia.
3. Propuesta de medidas de calidad, tanto para la guía de los procesos de extracción de conocimiento como para la evaluación de los resultados obtenidos.

4. Diseño y desarrollo de algoritmos para la extracción de expresiones de referencia, basados en el modelo formal y las medidas de calidad propuestas.
5. Validación de las propuestas en el dominio de aplicación de los sistemas *image-to-text*: elaboración de un prototipo de juego referencial y análisis experimental.

1.2 ORGANIZACIÓN DE LA MEMORIA

La presente memoria se estructura como sigue. En el siguiente capítulo, Capítulo 2, presentaremos algunas nociones previas sobre las que sustentaremos los desarrollos teóricos que constituyen las aportaciones novedosas de la tesis doctoral al campo de la Generación de Expresiones de Referencia. En este capítulo formalizaremos el problema de la Generación de Expresiones de Referencia, en torno al cual se construye esta tesis. Se presentarán entonces, los marcos formales utilizados en la literatura para abordar este problema, a fin de establecer el contexto en el cual se enmarcarán nuestras propuestas y poner de relieve las aportaciones que realizamos a este campo. Del mismo modo, haremos una revisión sobre las medidas de calidad que se pueden encontrar en la literatura a fin de dirigir y evaluar los procesos desarrollados para su tratamiento.

Por otro lado, presentaremos el concepto de gradualidad que, como se ha puesto de manifiesto en esta introducción, permea todo el campo de la Generación de Lenguaje Natural. En este capítulo también presentaremos la teoría de la Representación por Niveles, mecanismo mediante el cual se puede tratar esta gradualidad y que ofrece unas propiedades muy interesantes. Introduciremos así la herramienta que emplearemos para trasladar nuestra propuesta de marco formal de un ámbito clásico a un ámbito gradual.

Tras este capítulo preliminar, en el Capítulo 3, trasladaremos el problema básico de la Generación de Expresiones de Referencia presentado en el Capítulo 2 al ámbito gradual. Aquí veremos cómo se trasladan los conceptos presentados en el caso clásico a un problema en el que manejamos información vaga.

Se presentará el éxito referencial, concepto central del problema de la Generación de Expresiones de Referencia, como un concepto gradual y veremos medidas de éxito referencial graduales, fundamentales para tratar el problema de la GER con propiedades graduales. Examinaremos distintas propuestas que hemos presentado para construir dichas medidas, mostrando otra de las aportaciones de esta tesis al campo de la Generación de Expresiones de Referencia.

A continuación, en los Capítulos 4 y 5 presentamos el principal desarrollo teórico de esta tesis doctoral. Así, en el Capítulo 4 se introduce el Análisis de Conceptos Formales como un mecanismo formal de representación de conocimiento con el que tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. En primer lugar presentaremos los fundamentos teóricos del Análisis de Conceptos Formales y luego veremos cómo trasladar estas ideas al contexto del problema de GER. Hecho esto, pasaremos a, en el Capítulo 5, extender este marco formal a un ámbito gradual empleando la teoría de la Representación por Niveles para este propósito. Compararemos el Análisis de Conceptos Formales gradual definido a través de la

Representación por Niveles con otras propuestas que podemos encontrar en la literatura para extender el ACF al ámbito gradual. Finalmente, veremos cómo aplicar nuestra propuesta al problema de la Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales.

Ya en el Capítulo 6 presentaremos algunas aplicaciones y experimentos que hemos desarrollado para analizar nuestras propuestas en ámbitos de aplicación reales. Así, presentaremos una aplicación en la que se emplea un juego referencial como un medio para ayudar a niños y niñas en edad escolar a adquirir conceptos visuales como el color o el tamaño. Y también presentaremos distintas experimentaciones que hemos realizado a fin de obtener información sobre la tarea de la Generación de Expresiones de Referencia por usuarios reales, que nos permitan mejorar nuestros algoritmos incorporando dicha información en su diseño.

Finalizamos esta memoria con un Capítulo 7 de conclusiones y trabajos futuros.

Capítulo 2

Preliminares

Todos recordamos aquellas fichas escolares en las que, en una imagen como la que se muestra en la Figura 2.1, se nos pedía que, de un modo u otro, identificásemos a un objeto determinado: «colorea el círculo de naranja» o, en el ejemplo que mostramos, «marca el círculo más pequeño». De este modo, a través de este tipo de ejercicios, se aprenden conceptos como la forma y el tamaño, entre otros.

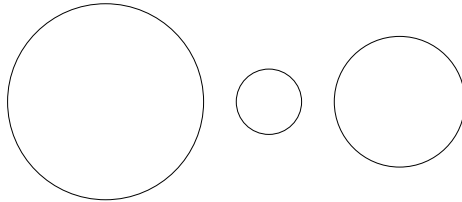


Figura 2.1: Ejemplo de ficha escolar en la que nos pedían que, por ejemplo, marcásemos el círculo más pequeño.

Este tipo de fichas escolares constituyen un ejemplo de juego referencial como los que hemos mencionado en el Capítulo 1. Siguiendo la formalización que se da en [59] podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.1: Juego referencial

Consideremos un emisor y un receptor que comparten un universo de discurso compuesto por un conjunto no vacío de objetos \mathcal{O} . Un juego referencial consiste en un proceso comunicativo en el cual el emisor conoce el objeto $o \in \mathcal{O}$ que debe señalar, desconocido por el receptor. Así, el emisor generará una descripción de o para señalar a dicho objeto. Si el receptor identifica correctamente el objeto entonces la comunicación tendrá éxito; en otro caso el acto comunicativo habrá fallado; no habrá cumplido su propósito.

Hacemos referencia a este tipo de juegos puesto que aquí podemos ver un ejemplo de aplicación de la generación de expresiones de referencia. En el campo de la Generación de Lenguaje Natural una de las tareas que ha recibido mayor atención

es precisamente el problema de la Generación de Expresiones de Referencia, al que nos referimos como GER. Así, dedicamos la primera parte de este capítulo a estudiar dicho problema.

Además, como hemos indicado en el Capítulo 1, en el lenguaje natural manejamos constantemente información vaga o imprecisa, y una de las formas en las que se puede representar y manejar este tipo de información es a través de la Teoría de Conjuntos Difusos. En la segunda parte de este capítulo profundizaremos en esta idea de gradualidad. Presentaremos el tratamiento que se hace de la gradualidad en la Teoría de Conjuntos Difusos. También veremos cómo la Teoría de Representación por Niveles se emplea para manejar información vaga, por ejemplo la presente en los conjuntos difusos, y las propiedades que esta teoría presenta.

2.1 EL PROBLEMA DE LA GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA

Como ya hemos dicho en diversas ocasiones, la tarea de generar expresiones de referencia en un universo de discurso determinado, es una de las tareas o problemas principales dentro del campo de la Generación de Lenguaje Natural [48, 50, 177]. Para tener una definición, y así saber a qué nos referimos cuando hablamos de expresiones de referencia, podemos considerar el siguiente fragmento traducido de [190]:

Definición 2.2: Expresión de referencia desde la perspectiva de [190]

Una expresión de referencia es cualquier expresión que permite identificar alguna cosa, proceso, evento, acción o cualquier otro tipo de elemento. Así, las expresiones de referencia señalan a elementos particulares, respondiendo a preguntas como quién, qué o cuál.

A la luz de la anterior definición, podemos ver que una expresión de referencia puede ser desde una descripción elaborada de un objeto, a un pronombre en el texto (podemos ver algunos estudios al respecto del uso de pronombres como expresiones de referencia en [30, 116, 167]).

Aunque en la anterior descripción se define una expresión de referencia basándonos en su resultado, es decir, cualquier expresión que identifica un objeto unívocamente, existe otro enfoque para definir qué es una expresión de referencia y es centrándonos en su intención. Una expresión será una expresión de referencia si se genera con el propósito de referenciar a un elemento determinado en un universo de discurso, aunque después este propósito comunicativo no se vea satisfecho y el receptor no sea capaz de identificar correctamente el objeto señalado.

En este segundo enfoque surge el concepto de éxito referencial que, como veremos en el Capítulo 3, presenta complejidad para ser medido o verificado cuando trabajamos con información vaga o imprecisa. Así, se considerará que una expresión de referencia en un universo de discurso determinado tiene éxito referencial para un determinado objeto, si esta expresión identifica inequívocamente ese objeto dentro de dicho universo.

En este capítulo nos vamos a centrar en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia a partir de los trabajos de Robert Dale y Ehud Reiter. Podemos

consultar el trabajo [50] y ver el cambio que, como se recoge en [54], se da en la filosofía que tuvo el estudio de esta materia a partir de los trabajos de estos dos autores. Concretamente, como se indica en [54], se pasó de una visión más ambiciosa y holística de la tarea de generación de expresiones de referencia, a una simplificación o una concreción del problema o problemas a abordar. Como hemos comentado en el Capítulo 1, el lenguaje natural resulta muy vasto y complejo; por tanto, el descomponerlo en distintos problemas permite hacer un estudio abordable y con la profundidad requerida. Podemos definir el problema de Generación de Expresiones de Referencia del que partiremos como sigue:

Problema 2.1: Problema clásico de GER [54]

Consideremos un cierto universo de discurso compuesto por un conjunto finito y no vacío de objetos \mathcal{O} , y un conjunto no vacío de propiedades atómicas \mathcal{P} (es decir, propiedades simples que no tienen ningún tipo de estructura lógica), que cada uno de los objetos del universo puede poseer o no. El problema de la Generación de Expresiones de Referencia se formaliza como:

Dado un cierto objeto $o \in \mathcal{O}$, que llamaremos el objetivo¹, se ha de encontrar un subconjunto de propiedades $re \subseteq \mathcal{P}$ tal que

$$\llbracket re \rrbracket := \bigcap_{p \in re} \llbracket p \rrbracket = \{o\}, \quad (2.1)$$

donde para cada $p \in \mathcal{P}$, $\llbracket p \rrbracket$ denota el conjunto de objetos en \mathcal{O} que poseen la propiedad p , es decir, aquellos objetos para los que la propiedad p es cierta.

Notaremos como $\llbracket re \rrbracket$ el conjunto de objetos al que hace referencia la expresión re . En este caso, este conjunto de objetos es el resultado de realizar la intersección que aparece en la Ecuación 2.1, puesto que estamos considerando que una expresión de referencia es un conjunto de propiedades que se combinan de forma conjuntiva. Sin embargo, en la Sección 2.2, veremos extensiones del problema que acabamos de definir. En estas extensiones se emplearán otro tipo de expresiones de referencia, y el conjunto $\llbracket re \rrbracket$ tendrá que calcularse según la información contenida en estas nuevas expresiones.

En la Ecuación 2.1 tenemos una formalización matemática del concepto de éxito referencial que hemos mencionado anteriormente. Diremos que la expresión de referencia tiene éxito referencial para ese objeto en el universo de discurso en el que nos encontremos. Es decir, cuando el conjunto de objetos a los que señala la expresión de referencia esté compuesto por un único objeto y sea ese el objeto que queremos señalar. De aquí en adelante, cuando nos refiramos a una cierta expresión de referencia para un cierto objeto, estaremos usando la primera definición de expresión de referencia que hemos dado, es decir, implícitamente estaremos diciendo que tiene éxito referencial para dicho objeto, a no ser que explicitemos que no lo tiene.

Hemos de tener en cuenta que habrá ocasiones en las cuales no podamos encontrar una expresión de referencia válida para un objeto determinado. Y en ese

¹En la literatura internacional se denomina a este objeto “target”, que hemos traducido como objetivo.

caso los algoritmos que se construyan para buscar expresiones de referencia tendrán que detener su ejecución. En ese caso diremos que el objeto no es referible. Aquí nos encontramos una de las cuestiones a abordar en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia: determinar la referibilidad de un objeto, es decir, comprobar si existe al menos una expresión de referencia válida para dicho objeto. Veremos esta cuestión en más detalle en la Sección 2.2.

Tenemos que señalar que, como se indica en [54], en el problema de Generación de Expresiones de Referencia hemos de intentar que las propiedades seleccionadas para la expresión de referencia conformen un conjunto de propiedades lo más similar posible al que escogería un humano al querer describir el objeto en el mismo universo de discurso. Al fin y al cabo, el objetivo del campo de la Generación de Lenguaje Natural es generar un texto similar al que produciría un humano y por tanto, es lógico plantear este objetivo como parte del problema a resolver.

Por ejemplo, algunos estudios muestran cómo los humanos preferimos usar el color antes que el tamaño [51] para describir un objeto; incluso incluyendo esta propiedad cuando no aporta ningún tipo de poder discriminatorio. Aquí podemos ver un fenómeno que se da en el lenguaje natural y que se conoce como sobre-especificación: los humanos tendemos a incluir más información de la necesaria en nuestras descripciones. Por tanto, si es posible identificar un objeto mediante su color, un algoritmo para resolver el problema de la Generación de Expresiones de Referencia debería emplear esta propiedad en lugar del tamaño del objeto. Evidentemente, esta elección está sujeta a diversos aspectos que tienen que ver con el universo de discurso en el que nos encontremos, así como de otros aspectos de la comunicación, como puede ser la capacidad del receptor o del emisor para identificar correctamente el color de los objetos.

En el Problema 2.1 estamos presentando la versión más simple del problema de Generación de Expresiones de Referencia. Hay diversas premisas que se establecen para simplificar en una primera instancia este problema. En concreto, en [54] se indican siete premisas que se están haciendo al definir el problema de la manera en la que lo hemos presentado. Veremos más adelante algunas generalizaciones o extensiones del Problema 2.1, como la presencia de gradualidad o el uso de distintos tipos de propiedades en las expresiones construidas. En este caso estamos considerando únicamente propiedades *crisp*².

Además, estas propiedades se combinan por medio de la conjunción sin ningún otro tipo de operador lógico para conectarlas, de ahí la intersección de conjuntos en la Ecuación 2.1. Pero aunque resulte una simplificación de los problemas que engloba la Generación de Expresiones de Referencia, el Problema 2.1 constituye un buen punto de partida para estudiar el problema de GER. Y distintos algoritmos han sido propuestos para abordarlo.

Hemos de señalar que los algoritmos que veremos a continuación, al igual que las propuestas que presentaremos en los Capítulos 4 y 5, se centran en encontrar el conjunto de propiedades que aparece en la formulación del Problema 2.1 para identificar al objeto, y no se encargan de trasladar este conjunto de propiedades a

²Propiedades que los objetos presentan o no, sin ninguna gradualidad. Una propiedad *crisp* estará o presente o ausente en un elemento. Por ejemplo, podemos considerar la propiedad de ser primo para los números naturales; un número es primo o no lo es.

un texto o una expresión lingüística bien construida. Aquí estamos haciendo una distinción entre las fases de extracción de conocimiento, en la que obtenemos el conjunto de propiedades que identifican al objeto, y la fase de expresión lingüística en la que, a partir de dicho conjunto, se construye un texto que contiene la información del conjunto [147].

Esta distinción en las fases del proceso de generación de expresiones de referencia nos permite combinar distintas propuestas para distintas fases del proceso. Por lo tanto, los algoritmos que vamos a presentar a continuación y las propuestas de los Capítulos 4 y 5 se pueden beneficiar de motores de generación de texto a partir de conjuntos de propiedades, como los basados en protoformas lingüísticas [112, 222], desarrollados de forma independiente, para obtener un texto bien formado a partir de los resultados generados por estos algoritmos.

Uno de los primeros algoritmos que podemos considerar es el algoritmo *Full Brevity* [48] que busca generar una expresión de referencia lo más corta posible y que puede describirse por medio del siguiente pseudo-código:

```

1  para  $n \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{P}|\}$ 
2    para cada conjunto,  $A \subseteq \mathcal{P}$ , de tamaño  $n$ 
3      si  $\llbracket A \rrbracket = \{o\}$ 
4        devolver  $A$ 
5  devolver «No se ha encontrado una expresión de referencia válida»

```

Algoritmo 2.1: Pseudo-código para el algoritmo *Full Brevity* [54].

Aunque este algoritmo nos permite encontrar una expresión de referencia minimal, en términos de la longitud medida en el número de propiedades empleadas, como hemos mencionado anteriormente, el resultado obtenido podría no resultar natural para un humano, ya que en el lenguaje natural se produce el fenómeno de la sobreespecificación [76, 163]. Pensemos por ejemplo en el contexto de la siguiente Figura 2.2. Nosotros podríamos señalar el objeto deseado con la expresión de referencia «el blanco» y no habría duda de a qué objeto nos estamos refiriendo. Sin embargo, nos resultaría más natural, y es la expresión de referencia que usaríamos, «el círculo blanco», ya que tendemos a incluir siempre la categoría del objeto en su descripción, tenga poder discriminatorio o no.

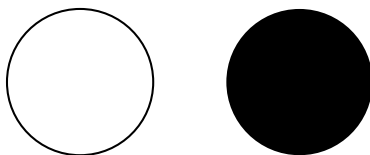


Figura 2.2: Ejemplo de contexto donde en el lenguaje natural, dentro de la tarea de GER, se produce el fenómeno de sobreespecificación.

El hecho de que, al menos en inglés, se añada siempre el tipo del objeto a describir en la expresión de referencia se indica por ejemplo en [54] y se puede extraer del estudio realizado en [51], donde en todos los tipos de expresiones de referencia empleadas por los usuarios aparece el tipo del objeto como parte del patrón.

Otro algoritmo clásico que podemos considerar es el que se conoce como *Greedy Algorithm* [48]. En esta ocasión se va construyendo la expresión de referencia de forma iterativa, añadiendo en cada momento aquella propiedad, de las no consideradas previamente, que tenga mayor poder discriminatorio. Es decir, se añade en cada paso aquella propiedad que descarte el mayor número de distractores posible.

```

1   sea  $re = \emptyset$ 
2   sea  $D = \mathcal{O} \setminus \{o\}$ 
3   sea  $P = \mathcal{P}$ 
4   mientras  $D \neq \emptyset \wedge P \neq \emptyset$ 
5       escoger  $p \in \mathcal{P}$  con el mayor poder discriminatorio
6        $re = re \cup \{p\}$ 
7        $P = P \setminus \{p\}$ 
8        $D = D \setminus \{o \in D \mid o \notin \llbracket p \rrbracket\}$ 
9
10  si  $D = \emptyset$ 
11      devolver  $re$ 
12
13  devolver «No se ha encontrado una expresión de referencia válida»

```

Algoritmo 2.2: Pseudo-código para el *Greedy Algorithm* [54].

Por último, presentaremos uno de los algoritmos con mayor relevancia para la tarea de la Generación de Expresiones de Referencia. Este algoritmo se conoce con el nombre de Algoritmo Incremental [50] (*Incremental Algorithm*) y se describe en el Algoritmo 2.3. Como hemos indicado anteriormente, los humanos tenemos preferencia de unas propiedades sobre otras, por ejemplo del color sobre el tamaño. Es precisamente esta idea la que incorpora el Algoritmo Incremental, el cual parte de una lista ordenada de propiedades. Así, se van añadiendo las propiedades a la expresión de referencia que se está construyendo hasta que dicha expresión permita identificar el objetivo, siguiendo el mencionado orden predefinido en las propiedades.

Una vez hemos presentado tres de los algoritmos clásicos para el problema clásico de Generación de Expresiones de Referencia, podemos ver un ejemplo de aplicación de estos algoritmos.

Ejemplo 2.1: Ejemplo de aplicación de los algoritmos clásicos de GER

Consideremos el universo de la Figura 2.3 compuesto por 6 objetos. Consideremos también como atributos la forma, el tamaño y si el objeto es blanco o negro. Y supongamos que queremos referenciar el elemento c .

Atendiendo al pseudocódigo que hemos dado de los algoritmos propuestos, tendríamos que, para cada uno de los algoritmos que hemos visto, la expresión de referencia obtenida sería la siguiente, donde consideramos, atendiendo a lo que hemos comentado anteriormente, que el orden de preferencia considerado por el Algoritmo Incremental sería *forma* > *blanco/negro* > *tamaño*.

```

1  sea  $re = \emptyset$ 
2  sea  $D = \mathcal{O} \setminus \{o\}$ 
3  sea  $L = \{p_1, \dots, p_n\}$  la lista ordenada de propiedades
4  sea  $i = 1$ 
5
6  mientras  $D \neq \emptyset \wedge i \leq n$ 
7      sea  $p = L[i]$ 
8      si  $o \in \llbracket p \rrbracket \wedge \exists c \in D \text{ t.q. } c \notin \llbracket p \rrbracket$ 
9           $re = re \cup \{p\}$ 
10          $D = D \setminus \{o \in D \mid o \notin \llbracket p \rrbracket\}$ 
11          $i = i + 1$ 
12
13 si  $D = \emptyset$ 
14     devolver  $re$ 
15
16 devolver «No se ha encontrado una expresión de referencia válida»

```

Algoritmo 2.3: Pseudo-código para el Algoritmo Incremental [54].

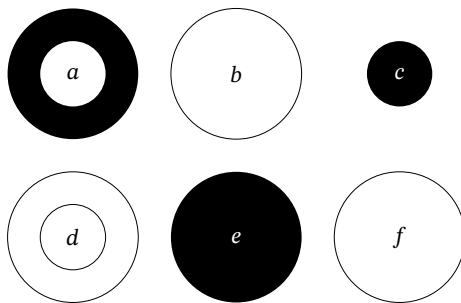


Figura 2.3: Universo de discurso compuesto por círculos y discos sobre el que aplicamos los algoritmos que hemos visto.

- *Full Brevity*: {pequeño}.
- *Greedy Algorithm*: {pequeño}.
- Algoritmo Incremental: {círculo, negro, pequeño}.

Como podemos ver en este ejemplo, si nuestro objetivo es producir una descripción lo más similar posible a la que produciría un humano, el Algoritmo Incremental es el que produce la mejor. Como vemos, en el resultado de este algoritmo se incluye la categoría del objeto y se usa el color. Además, se da la sobre-especificación que tanto encontramos en el lenguaje natural.

Hemos presentado algunos algoritmos básicos para resolver el problema de Generación de Expresiones de Referencia en su versión más simplificada y clásica. Sin embargo, existen diversas extensiones de este problema, relacionadas con distintos aspectos de la tarea de referenciar objetos que realizamos los humanos en el día a día. Por ejemplo, en el lenguaje natural no solo hacemos referencia a objetos individuales dentro de un universo de discurso, sino que también podemos hacer referencia a un conjunto de objetos. En el universo de la Figura 2.3, podríamos hacer referencia al conjunto de objetos $\{c, e\}$ como «los círculos negros». Este sería el Problema de Generación de Expresiones de Referencia Plurales [56, 58, 83, 90, 107] que podemos formalizar como sigue en su versión más simple.

Problema 2.2: Problema clásico de Generación de Expresiones de Referencia Plurales [54]

Consideremos un cierto universo de discurso compuesto por un conjunto finito y no vacío de objetos \mathcal{O} , y un conjunto no vacío de propiedades atómicas \mathcal{P} (es decir, propiedades simples que no tienen ningún tipo de estructura lógica), que cada uno de los objetos del universo puede poseer o no. El problema de la Generación de Expresiones de Referencia Plurales, GERP, se formaliza como:

Dado un cierto conjunto de objetos $O \subseteq \mathcal{O}$, que llamaremos el objetivo, se ha de encontrar un subconjunto de propiedades $re \subseteq \mathcal{P}$ tal que

$$\llbracket re \rrbracket = \bigcap_{p \in re} \llbracket p \rrbracket = O. \quad (2.2)$$

Como se indica en [54], este problema es más complejo que el caso particular de referenciar a un solo objeto, y en esta tesis prestamos especial atención a su resolución. En el Capítulo 4 planteamos una nueva propuesta para resolverlo por medio de un mecanismo formal de representación de conocimiento, el cual no se ha aplicado anteriormente al problema de Generación de Expresiones de Referencia. Así, empleamos el Análisis de Conceptos Formales para abordar este problema. Como veremos en la Sección 4.3, este formalismo proporciona nuevas características y ventajas sobre las propuestas de la literatura.

Además de esta primera generalización del problema clásico, en la literatura podemos encontrar diversas extensiones del problema de Generación de Expresiones de Referencia, las cuales presentaremos en la Sección 2.2. Por ejemplo, podemos considerar el uso de otros conectores lógicos, tales como la disyunción, o incluir otro tipo de propiedades como las propiedades relacionales, es decir, aquellas que

se basan en distintas relaciones del objeto con otros objetos en el universo de discurso. Estas extensiones aumentan la capacidad semántica de nuestros sistemas, pero también la complejidad computacional del problema a tratar, como veremos.

Como podemos ver, hay distintos tipos de información que puede estar contenida en un universo de discurso, y que podemos utilizar en nuestro proceso para encontrar una expresión de referencia para un objeto o conjunto de objetos determinado. Por tanto, necesitamos un modo de representar esta información, de modo que sea tratable por una computadora.

Las propuestas que hemos visto anteriormente se basan en algoritmos ad hoc. Sin embargo, hay un segundo enfoque que podemos tomar para abordar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Este enfoque consiste en emplear algún mecanismo formal de representación de conocimiento existente para abordar el problema de GER. Así, emplearemos alguno de estos mecanismos para representar y manejar la información de un universo de discurso, y nos podremos beneficiar de los desarrollos teóricos y prácticos generados para el formalismo elegido, como pueden ser estrategias de búsqueda o algoritmos eficientes para resolver alguna cuestión relacionada con el mecanismo en cuestión. Además, cuando queramos elaborar expresiones de referencia más complejas, empleando información o estructuras más avanzadas, como se pone de manifiesto en [180], necesitaremos de los mecanismos de representación y desarrollos teóricos que nos permitan abordar esta tarea, y hacerlo además de un modo eficiente. Es por ello que, a lo largo de los años, distintos mecanismos formales de representación de conocimiento han sido propuestos para abordar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. A continuación realizamos un repaso a las distintas propuestas que podemos encontrar en la literatura.

2.1.1 MARCOS FORMALES PARA GER

En la literatura podemos encontrar distintos mecanismos formales de representación de conocimiento que se han empleado para resolver el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Vamos a seguir el enfoque de [118] donde, para cada uno de los formalismos, se analiza cómo se representa la información del universo de discurso a tratar y cómo se representa lo que es una expresión de referencia. Así, en los ejemplos que hemos visto al principio de este capítulo, una expresión de referencia era representada como una conjunción de propiedades, como *círculo* \wedge *grande* \wedge *blanco*, pero ya hemos visto que podíamos elaborar otro tipo de descripciones más elaboradas, por ejemplo, desde el punto de vista de los conectores lógicos empleados. Por ejemplo, podríamos considerar la expresión de referencia $(\textit{círculo} \wedge \textit{blanco}) \vee (\textit{disco} \wedge \textit{negro})$ ³.

Además, en los análisis subsiguientes vamos a ver cómo se puede tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia Plurales a través de estos formalismos. Como hemos dicho, esta tarea está presente en nuestro día a día, y

³A lo largo de esta memoria nos serviremos de esta representación para hacer referencia a distintas expresiones de referencia, expresando por medio de la Lógica de Primer Orden la información contenida en la expresión de referencia. En otros casos emplearemos la realización lingüística de dicha expresión de referencia.

la referencia a conjuntos de objetos constituye un problema más complejo que el problema clásico de Generación de Expresiones de Referencia. Por lo tanto, para poder comparar nuestra propuesta para tratar este problema en los Capítulos 4 y 5 con los mecanismos formales propuestos en la literatura, hemos de conocer cómo se aborda este problema a través de ellos.

TEORÍA DE GRAFOS

En primer lugar vamos a analizar el uso de la Teoría de Grafos en el problema de Generación de Expresiones de Referencia. Como sabemos, los grafos son una estructura de datos ampliamente utilizada en diversos problemas de las Ciencias de la Computación. El área de la Lingüística Computacional, dentro de la cual podemos enmarcar al campo de la Generación de Lenguaje Natural, y en concreto el problema de GER, no es una excepción a esto [119, 120].

Como hemos comentado anteriormente, en una expresión de referencia podemos incluir diversos tipos de información, como pueden ser las relaciones entre objetos. «La madre de Pablo» o «el objeto a la derecha de un círculo que está a la izquierda de un cuadrado negro» serían ejemplos de expresiones de referencia que incluyen relaciones entre objetos de un universo de discurso. Y los grafos nos permiten representar de un modo natural este tipo de información. Basta pensar en los árboles genealógicos o los grafos que modelan las conexiones que existen entre distintos usuarios de una red social. Además, desde el punto de vista de las Ciencias de la Computación, son bien conocidos la multitud de algoritmos de búsqueda que pueden emplearse y definirse sobre un grafo. Algoritmos de los que se han beneficiado multitud de áreas y aplicaciones para resolver distintos problemas.

En particular, los grafos dirigidos con etiquetas son el tipo de grafos que resultan más convenientes para representar el tipo de información que aparece en las expresiones de referencia que hemos indicado a modo de ejemplo.

Definición 2.3: Grafo dirigido con etiquetas [120]

Un grafo dirigido con etiquetas es una tripleta $\langle V, E, L \rangle$, donde:

- L es el conjunto de etiquetas.
- V es el conjunto de vértices o nodos.
- $E \subseteq V \times L \times V$ es el conjunto de aristas etiquetadas del grafo. Así, una arista $e \in E$ será de la forma (v, w, l) , siendo (v, w) un par ordenado de vértices y $l \in L$ la etiqueta asociada a esta arista.

Estos grafos permiten representar los objetos del universo de discurso en el que nos encontramos mediante los nodos del grafo, mientras que las propiedades individuales, como puede ser el color y la categoría de los objetos, y las propiedades relacionales, las relaciones entre objetos, pueden ser representadas por medio de aristas con etiquetas o etiquetadas. En [120] se distinguen, dentro del conjunto de etiquetas, aquellas que representan propiedades relacionales y aquellas que se refieren a propiedades individuales que pueden presentar los objetos del universo de discurso. Veamos el universo de la Figura 2.4.

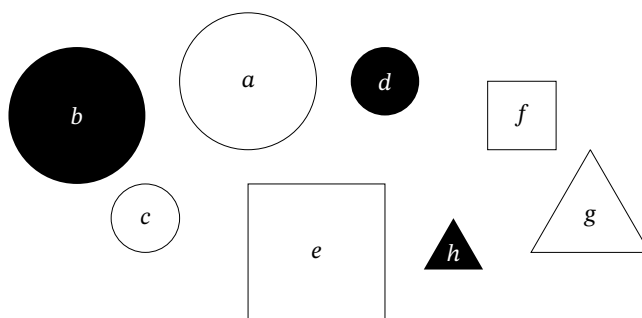


Figura 2.4: Universo de discurso, con diversas figuras geométricas, que empleamos para mostrar cómo se emplean distintos mecanismos formales para tratar el problema de GER.

En este caso, podríamos representar parte de la información contenida en este universo de la Figura 2.4 como se muestra en la Figura 2.5. Como puede verse, cada propiedad se representa mediante una arista etiquetada. En esta representación, las propiedades individuales de los objetos son lazos sobre el nodo que representa dicho objeto, mientras que las propiedades relacionales entre objetos son aristas entre dichos objetos, donde la dirección de la arista tiene también una carga semántica: indica en qué sentido se da la relación. Cabe señalar que en este marco formal se representan únicamente relaciones binarias. Para representar relaciones de mayor aridad necesitaríamos un mecanismo formal más complejo.

A través de este marco formal no solo podemos representar la información contenida en un universo de discurso. También tenemos una representación para una expresión de referencia en un universo determinado. Así, una expresión de referencia se modela como un grafo (conectado) dirigido con etiquetas, con un nodo marcado como central. Además, se ha de cumplir que todo subgrafo del grafo que representa el universo de discurso isomorfo a esta expresión de referencia, incluya al nodo que representa el objetivo asumiendo el rol del nodo marcado como central en el grafo de la expresión de referencia. Es decir, esta es la condición que se establece para indicar que la expresión de referencia tiene éxito referencial para el elemento deseado. Podemos encontrar la formalización y desarrollo de esta idea en [120].

En la Figura 2.6 podemos ver el grafo etiquetado que representa la expresión de referencia «el círculo blanco justo a la izquierda de un círculo». Se puede verificar que el único subgrafo que es isomorfo al que representa la expresión de referencia es el que se obtiene al superponer el nodo α (marcado en negro) con el nodo a ; por lo tanto este grafo representa una expresión de referencia para el objeto a en el universo de la Figura 2.4. En el grafo hemos marcado las aristas que forman parte de este isomorfismo con aristas continuas.

Es clara la extensión de este mecanismo al caso de la Generación de Expresiones de Referencia Plurales, teniendo en cuenta ahora más nodos como nodos centrales, todos los que representan los elementos del conjunto de objetos a referenciar. Y

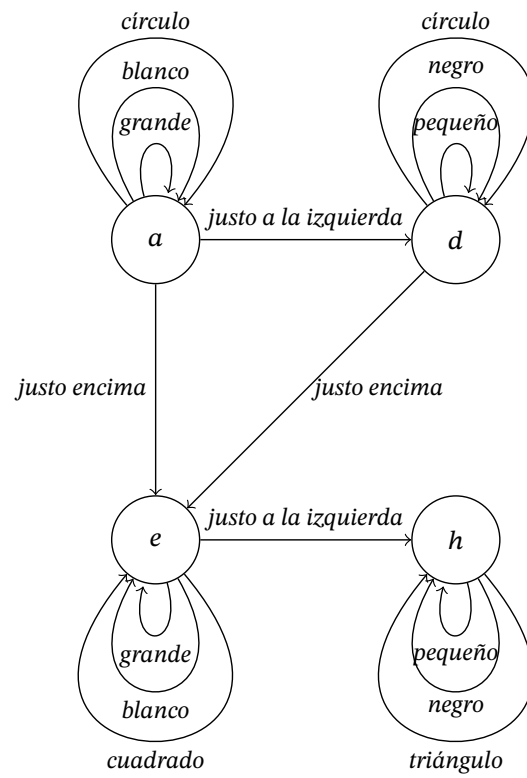


Figura 2.5: Grafo dirigido con etiquetas representando parte de la información del universo de la Figura 2.4.

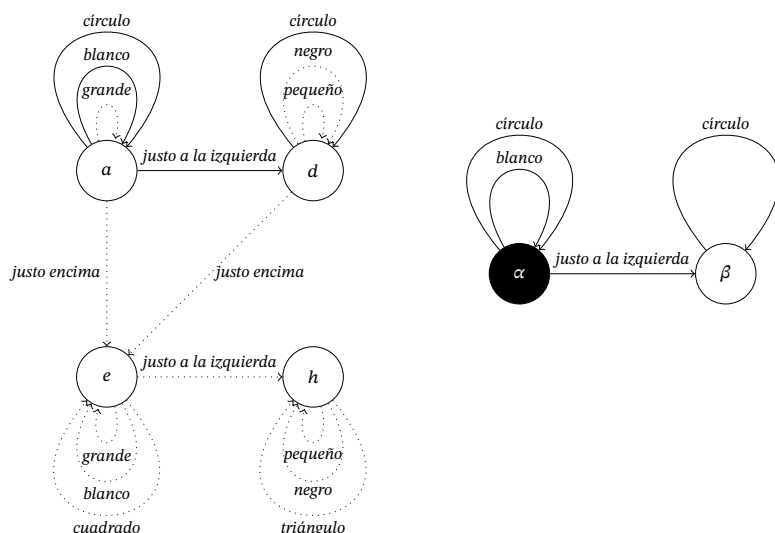


Figura 2.6: Expresión de referencia para el objeto *a* de la Figura 2.4. A la izquierda tenemos el grafo dirigido con etiquetas que representa parte de la información del universo de la Figura 2.4. A la derecha tenemos el grafo dirigido con etiquetas que representa una expresión de referencia para el objeto *a*.

como hemos podido ver, el problema de Generación de Expresiones de Referencia se traduce en un problema de isomorfismo de grafos. Además, emplear distintas funciones de coste en estos algoritmos de exploración permite emular el comportamiento de distintos algoritmos de GER, como los que hemos presentado al comienzo de esta sección [120].

GRAFOS CONCEPTUALES

La Teoría de Grafos, como acabamos de ver, es un formalismo que resulta muy natural para tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Sin embargo, este mecanismo formal solo nos permite generar expresiones de referencia empleando la información que esté representada de manera explícita en el mismo. En la literatura podemos encontrar estudios que señalan las limitaciones de este formalismo [54]. Es por ello que se hace patente la necesidad de analizar y desarrollar otros mecanismos formales de representación de conocimiento, los cuales permitan construir expresiones de referencia empleando, no solo la información explícita del universo de discurso en el que se está trabajando, sino también conocimiento a priori acerca del ámbito en el que se enmarca el problema, a través de mecanismos de inferencia lógica.

Los grafos conceptuales [196] están en esta dirección. Constituyen un mecanismo formal basado en grafos que permite trabajar tanto con información explícita del universo, como con conocimiento a priori. Vamos a utilizar la versión simpli-

ficada de los grafos conceptuales que encontramos en [45] que está basada en la formalización que se presenta en [38]. Así, un grafo conceptual se define como sigue.

Definición 2.4: Grafo conceptual [38, 45]

Un grafo conceptual es una tripleta $\langle S, G, \lambda \rangle$, donde:

- El soporte $S := (T_C, T_R, I)$ es un tripleta, en la que T_C es un conjunto parcialmente ordenado de tipos de conceptos, T_R es un conjunto parcialmente ordenador de tipos de relaciones e I es un conjunto de identificadores atómicos.
- $G := (V_C, V_R, E)$ es un grafo bipartido ordenado que representa la información explícita del universo de discurso. Donde el conjunto de nodos V se divide en un conjunto de nodos que representa conceptos, V_C , y un conjunto de nodos que representa relaciones de cualquier aridad entre conceptos, V_R . El conjunto de aristas E conecta nodos de los dos conjuntos, asignándole propiedades a los conceptos y estableciendo relaciones entre ellos. Además, cuando se necesite, las aristas pueden numerarse para indicar algún tipo de orden en las relaciones entre conceptos.
- Por último, $\lambda : V \rightarrow S$ es una función de etiquetado que conecta cada concepto en V_C con su tipo correspondiente de T_C y un identificador de I , y cada relación de V_R con su tipo de relación correspondiente de T_R .

Para el universo de discurso de la Figura 2.4, podemos representar la información contenida en él mediante el grafo conceptual compuesto por el soporte de la Figura 2.7 y el grafo bipartido de la Figura 2.8.

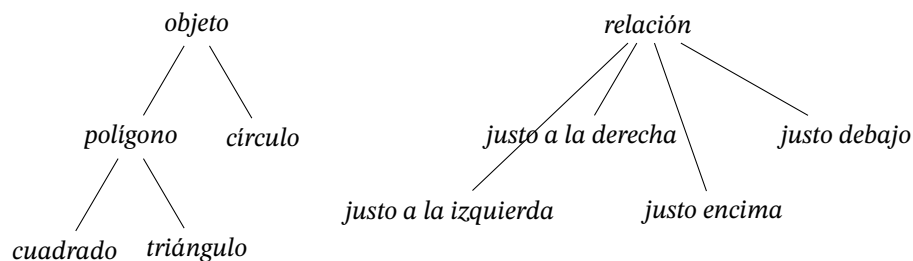


Figura 2.7: Soporte del grafo conceptual que representa el conocimiento a priori del universo de discurso de la Figura 2.4.

Cada grafo conceptual tiene una semántica asociada en forma de una expresión de la Lógica de Primer Orden, la cual se obtiene mediante reglas de derivación simples [197]. Esta semántica combina la información explícita del universo de discurso con el conocimiento a priori representado en el soporte.

De un modo similar a lo que ocurría con los grafos con etiquetas, una expresión de referencia en este mecanismo formal se representa mediante un grafo bipartido

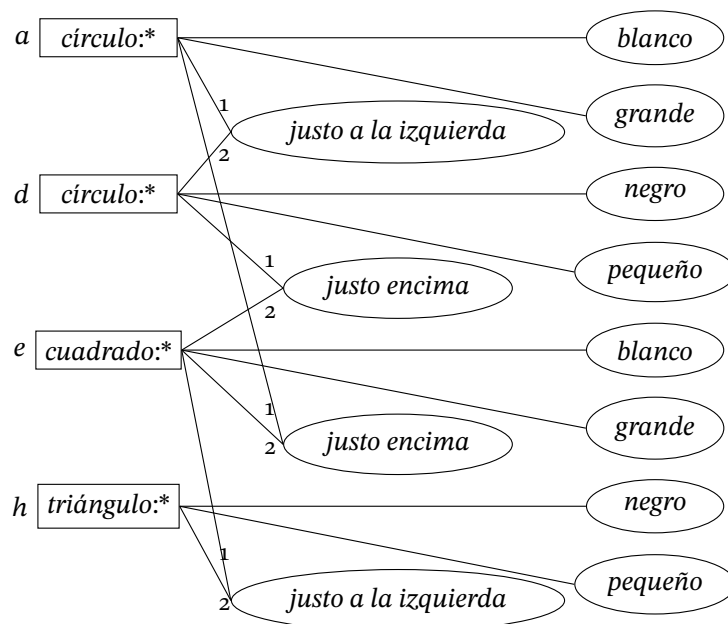


Figura 2.8: Grafo bipartido del grafo conceptual que representa la información del universo de discurso de la Figura 2.4.

con un nodo concepto marcado. Y esta expresión de referencia tendrá éxito referencial cuando se den las siguientes condiciones:

- Existe una proyección que establece una correspondencia entre nodos del grafo que representa la expresión de referencia y el grafo bipartido del grafo conceptual.
- La proyección asigna el nodo que representa al objetivo con el nodo marcado del grafo de la expresión de referencia.
- No existe una proyección que asigne un nodo representando uno de los distractores al nodo marcado.

En la Figura 2.9 se muestra cómo se representa una expresión de referencia para el objeto *a* de la Figura 2.4 en el mecanismo basado en grafos conceptuales y la correspondiente proyección en el grafo bipartido de la Figura 2.8. Nuevamente, las aristas implicadas en esta proyección se representan por medio de aristas continuas.

Del mismo modo que lo hemos planteado para los grafos con etiquetas, este mecanismo formal puede emplearse también para generar expresiones de referencia que señalen a conjuntos de objetos. En este caso, consideramos un grafo bipartido en el que aparecerán diversos nodos representando los elementos del conjunto a referenciar, y buscaremos una proyección de estos nodos a nodos del grafo bipartido

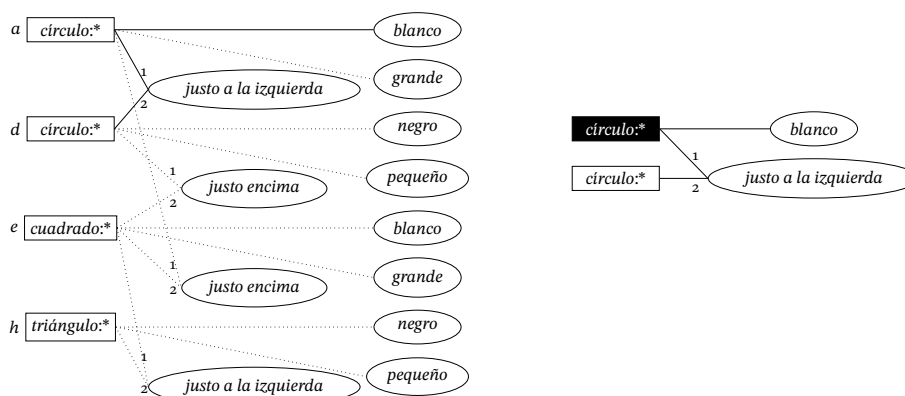


Figura 2.9: Expresión de referencia para el objeto *a* de la Figura 2.4. A la izquierda encontramos el grafo conceptual relativo a este universo de discurso y a la derecha el grafo conceptual que representa una expresión de referencia para el objeto *a*.

correspondiente al universo de discurso, cumpliendo unas condiciones análogas a las que hemos descrito para el problema clásico.

Hay algoritmos para la construcción de expresiones de referencia empleando grafos conceptuales [45]. Estos algoritmos funcionan de un modo similar a los algoritmos de Generación de Expresiones de Referencia clásicos. Además, el grafo bipartido que representa la información explícita del universo de discurso puede ser extendido con la información contenida en el soporte, y así se pueden construir expresiones de referencia con propiedades y relaciones que no estén explícitamente representadas en el grafo bipartido. Podemos pensar por ejemplo en conocimiento a priori como que «la hermana de mi madre es mi tía». Incluso podemos considerar el uso de reglas de inferencia [46].

LÓGICAS DESCRIPTIVAS

Como hemos visto en algunos ejemplos que hemos mostrado en la introducción de esta sección, la semántica de una expresión de referencia puede ser representada como una proposición de la Lógica de Predicados de Primer Orden (LPO), como en $(\text{círculo} \wedge \text{blanco}) \vee (\text{disco} \wedge \text{negro})$. Y existen distintos subconjuntos de la Lógica de Primer Orden para los que se han desarrollado sistemas de razonamiento eficientes y decidibles, al contrario de lo que pasa cuando consideramos la LPO completa. Entre estos subconjuntos podemos encontrar diversas lógicas descriptivas con distinta capacidad semántica [7], las cuales se diferencian en el conjunto de conectores lógicos y operadores que permiten usar. Por ejemplo, todas las lógicas descriptivas incluyen la intersección de conceptos, pero no toda lógica descriptiva permite emplear la unión de conceptos.

Las lógicas descriptivas han sido también propuestas como mecanismos formales de representación de conocimiento para el problema de la Generación de Expresiones de Referencia, como por ejemplo la lógica descriptiva \mathcal{EL} o la \mathcal{ALC} , que

tiene mayor potencia semántica, en [3, 4]. También debemos considerar la lógica descriptiva $\mathcal{SR}\mathcal{O}\mathcal{I}\mathcal{Q}$ que tiene una gran capacidad semántica [108] en [180].

La terminología y notación de las lógicas descriptivas es diferente de la que solemos emplear en la Lógica de Primer Orden: las constantes son llamadas individuos, los predicarios unarios se denominan conceptos y los binarios son roles. El conocimiento se expresa por medio de axiomas, que son expresiones lógicas que involucran conceptos y/o roles. Podemos considerar dos tipos de axiomas para describir una base de conocimiento:

- Axiomas que describen información sobre individuos, como por ejemplo $a : C$, indicando que a es un individuo del concepto C . O por ejemplo, $(a, b) : R$ que representa que a está relacionado con b por medio del rol R , y por lo tanto $(b, a) : R^-$, donde R^- es el rol inverso de R . El conjunto de estos axiomas se denomina *ABox*.
- Axiomas describiendo propiedades generales de conceptos y relaciones. Por ejemplo, $C \sqsubseteq D$ indica que todo individuo de C es también un individuo del concepto D . Otro ejemplo es $R \equiv R^-$, indicando que R es simétrica. Al conjunto de estos axiomas se le llama *TBox*.

Cuando empleamos las lógicas descriptivas para tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia, la información del universo de discurso se representa por medio de una base de conocimiento como la que acabamos de describir. Mientras que en la propuesta en [3, 4] se usa solo la *ABox*, en el trabajo de [180] se emplean también una *TBox*. Hemos de señalar que cuando se emplea una *TBox* podemos dar una representación más condensada del conocimiento del universo de discurso que estemos representando. Pensemos nuevamente en la relación «la hermana de mi madre es mi tía». Si tenemos este axioma en la *TBox*, en la *ABox* solo necesitaremos incluir los axiomas $madre(a, b)$ y $hermanas(b, c)$ para poder también considerar o inferir el axioma $tía(a, c)$.

Como hemos visto, la *ABox* permite representar no solo propiedades de objetos en forma de conceptos sobre ciertos individuos, sino también relaciones a través de roles. Para el ejemplo de la Figura 2.4 que venimos considerando en esta sección, podemos representar la información de ese universo de discurso empleando conceptos relacionados con las propiedades *círculo*, *triángulo*, *cuadrado*, *negro*, *blanco*, *pequeño*, *grande*; y los roles correspondientes a las relaciones *justo a la izquierda*, *justo a la derecha*, *justo encima* o *justo debajo*. Así, la *ABox* contendría axiomas como $a : círculo$, $a : grande$, $h : triángulo$ o $(a, d) : justo\ a\ la\ izquierda$. Además, también podríamos usar una *TBox* para expresar axiomas que resultan naturales como $justo\ a\ la\ derecha \equiv justo\ a\ la\ izquierda^-$, con lo que podríamos no especificar los axiomas relacionados con el rol *justo a la derecha* en la *ABox*.

Como es usual, la semántica de una base de conocimiento vendrá dada por una interpretación $\mathcal{M} := \langle \Delta, \|\cdot\| \rangle$, donde Δ es un conjunto finito y $\|\cdot\|$ es una función de interpretación que asocia un subconjunto de Δ a cada concepto, y un subconjunto de $\Delta \times \Delta$ a cada rol de la base de conocimiento. Y la semántica (que también podemos denominar extensión) de una fórmula lógica en un cierta lógica descriptiva \mathcal{L} se obtiene de forma recursiva para las distintas operaciones permitidas en \mathcal{L} . Por

ejemplo, $\|C \sqcap D\| := \|C\| \cap \|D\|$. Podemos considerar la interpretación de la Tabla 2.1 con la extensión de algunos conceptos y roles relativos al universo de discurso de la Figura 2.4.

$\Delta = \{a, d, e, h\}$	$\ \text{círculo}\ = \{a, d\}$
$\ \text{cuadrado}\ = \{e\}$	$\ \text{triángulo}\ = \{h\}$
$\ \text{blanco}\ = \{a, e\}$	$\ \text{negro}\ = \{d, h\}$
$\ \text{grande}\ = \{a, e\}$	$\ \text{pequeño}\ = \{d, h\}$
$\ \text{justo a la izquierda}\ = \{(a, d), (e, h)\}$	$\ \text{justo encima}\ = \{(a, e), (d, e)\}$

Tabla 2.1: Extensiones de conceptos y roles relativos al universo de la Figura 2.4.

En el marco formal de las lógicas descriptivas representamos una expresión de referencia en la forma de una fórmula ϕ de la lógica descriptiva \mathcal{L} que estemos empleando. Y dada una interpretación $\mathcal{M} := \langle \Delta, \|\cdot\| \rangle$, decimos que ϕ es una expresión de referencia para el conjunto $O \subseteq \Delta$ si, y solamente si, $\|\phi\| = O$. Con lo cual, el problema de la Generación de Expresiones de Referencia se traduce en encontrar una fórmula lógica dentro de la lógica descriptiva elegida cuya extensión sea el objeto o conjunto de objetos que queremos referenciar.

Además, la elección de una lógica descriptiva u otra afecta a la capacidad expresiva [3] y, por tanto, a la referibilidad que tenemos. Por ejemplo, si una lógica descriptiva no posee la unión de conceptos no podremos hacer referencia al conjunto de objetos formado por los discos negros y los círculos blancos, si no hay otro modo de hacer referencia a dicho conjunto.

SATISFACCIÓN DE RESTRICCIONES

Por último, vamos a repasar el formalismo de Satisfacción de Restricciones como otra propuesta para abordar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia [49, 199]. Esta propuesta viene motivada por distintas razones.

En primer lugar, la Satisfacción de Restricciones permite la búsqueda de expresiones de referencia que optimicen un determinado criterio, como por ejemplo, si recordamos el algoritmo *Full Brevity* que presentamos anteriormente, minimizar la longitud de la expresión de referencia, lo cual añade más complejidad computacional a la resolución del problema de Generación de Expresiones de Referencia. El problema de encontrar una expresión de referencia minimal es un problema NP-duro [50]. Y la Satisfacción de Restricciones trata con problemas NP de un modo eficiente [83].

En segundo lugar, y pensando en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia Plurales, este formalismo permite expresar de una forma natural propiedades colectivas relativas a un conjunto de objetos, como puede ser *estar alineados* [54].

Veamos ahora cómo se traduce el problema de la Generación de Expresiones de Referencia en términos de la Satisfacción de Restricciones. Una expresión de referencia viene dada por un par $\langle P^+, P^- \rangle$, con P^+ y P^- conjuntos disjuntos de pro-

propiedades. Diremos que la expresión de referencia $\langle P^+, P^- \rangle$ tiene éxito referencial para un cierto conjunto de objetos $O \subseteq \mathcal{O}$ si se dan las siguientes condiciones:

- P^+ es un conjunto de propiedades individuales compartidas por todos los objetos de O , o bien propiedades colectivas aplicables a O .
- P^- es un conjunto de propiedades que no posee ninguno de los objetos de O , o bien propiedades colectivas que no son aplicables al conjunto de objetos O .
- Y para cada distractor $d \notin O$ se da al menos una de las siguientes situaciones:
 - Hay alguna propiedad individual de P^+ que no posee d .
 - Hay alguna propiedad colectiva de P^+ que no se puede aplicar al conjunto $O \cup \{d\}$.
 - Hay alguna propiedad individual de P^- que posee d .
 - Hay alguna propiedad colectiva de P^- que puede aplicarse al conjunto $O \cup \{d\}$.

Por lo tanto, el problema de la Generación de Expresiones de Referencia desde la perspectiva de este mecanismo formal se traduce en encontrar, para un cierto conjunto de objetos $O \subseteq \mathcal{O}$, un par $\langle P^+, P^- \rangle$ cumpliendo las tres condiciones anteriores. En el ejemplo que estamos viendo, para hacer referencia al objeto a en el universo de discurso de la Figura 2.4 podemos emplear el par $\langle \{\text{círculo}, \text{blanco}, \text{grande}\}, \emptyset \rangle$, o bien, si queremos emplear propiedades en un sentido negativo, el par $\langle \{\text{círculo}\}, \{\text{negro}, \text{pequeño}\} \rangle$.

Como se indica en [118], una propiedad interesante de este formalismo es que permite separar la especificación de la propuesta para abordar el problema de Generación de Expresiones de Referencia de su implementación algorítmica, esto hace que distintas estrategias de optimización y búsqueda pueden aplicarse para encontrar una expresión de referencia que satisfaga ciertas restricciones.

Así concluimos nuestro repaso a distintos mecanismos formales de representación de conocimiento para tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. En la siguiente sección abordamos otro asunto relevante para el GER y es la evaluación de los resultados obtenidos.

2.1.2 MEDIDAS DE CALIDAD EN EL GER

Ya en la sección anterior hemos visto algunos ejemplos de objetos o grupos de objetos que podrían ser referidos mediante distintas expresiones de referencia, más si tenemos en cuenta el fenómeno de la sobre especificación al que ya hemos hecho referencia anteriormente. Y esto es algo común en la Generación de Expresiones de Referencia. Para verlo podemos considerar el universo de discurso de la Figura 2.10.

Aunque nos encontramos ante un universo de discurso muy simple, para hacer referencia al objeto a , y dependiendo del conjunto de propiedades que consideremos, podemos emplear un gran número de expresiones de referencia para dicho

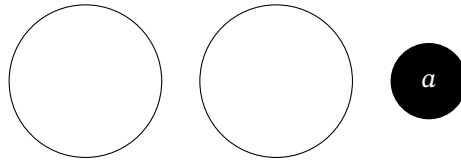


Figura 2.10: Ejemplo de un universo de discurso en el que podemos hacer referencia al objeto a mediante diversas expresiones de referencia.

objeto. Por ejemplo, entre otras muchas, podríamos señalar el objeto a mediante las siguientes expresiones de referencia:

- «El círculo negro».
- «El círculo pequeño».
- «El círculo negro pequeño».
- «El círculo que está más a la derecha».
- «El círculo negro que está más a la derecha».
- «El círculo a la derecha de un círculo que está a la derecha de un círculo».
- «El círculo a la derecha de un círculo blanco que está a la derecha de un círculo grande».
- «El círculo negro a la derecha de un círculo que está a la derecha de un círculo blanco y grande».

Por tanto, aquí se muestra que en el proceso de generación de expresiones de referencia necesitamos, no solo un mecanismo de representación de conocimiento para manejar la información del universo de discurso en el que nos encontremos y una serie de algoritmos contruidos sobre dicho formalismo para generar una expresión de referencia, sino también una serie de criterios para guiar este proceso de generación y, dado el caso, evaluar los distintos resultados generados para escoger el que mejor se adecue a nuestro problema. A estos criterios los denominamos medidas de calidad.

El problema de evaluar los resultados de un sistema que genere descripciones de un conjunto de datos o de cualquier otro sistema dentro del campo de la Generación de Lenguaje Natural ha recibido mucha atención en la literatura [15, 72, 176, 209]. Como se indica en [20], la tarea de evaluar el resultado de un sistema de estas características es compleja, ya que la calidad del resultado depende de un gran número de factores distintos, empezando por las preferencias del usuario que ya se comenzaban a tener en cuenta en el Algoritmo Incremental que presentamos anteriormente.

Y es que no basta con que la expresión de referencia tenga éxito referencial (Ecuación 2.1), aunque es el principal objetivo a abordar en el problema de Generación de Expresiones de Referencia. Incluso el mismo factor del éxito referencial,

como veremos en el Capítulo 3, al introducir información vaga también se transforma en un concepto vago y, por tanto, su medición no es trivial como sí que lo es en la Ecuación 2.1. Además, otros muchos factores influirán en la calidad de la expresión de referencia.

Por ejemplo, una expresión de referencia debe tener una longitud adecuada, no contener ambigüedades y debe transmitir información al receptor que sea útil para el mismo [20, 79]. También podemos considerar que no tiene sentido emplear el color en una expresión de referencia, por muy saliente que sea esta propiedad, si el receptor tiene dificultad para reconocer ciertos colores. Por lo tanto, tal y como se propone en [20], para evaluar la calidad del resultado de un sistema de generación de lenguaje natural se ha de emplear un modelo multidimensional que integre todos estos aspectos.

Como hemos dicho, distintas preferencias de los usuarios deben tenerse en cuenta para medir la calidad de una expresión de referencia, y en la literatura podemos encontrar distintos estudios que intentan extraer estas preferencias de los usuarios en el proceso comunicativo de la generación de expresiones de referencia [53, 79, 115]. En [50] se da una interpretación computacional de las máximas de Grice [100], enmarcadas dentro del problema de la Generación de Expresiones de Referencia:

- Calidad: Como hemos indicado anteriormente, la expresión de referencia ha de contener solo información que sea verdadera sobre el objetivo.
- Cantidad: La expresión de referencia debe contener suficiente información para que el receptor identifique correctamente el objetivo, pero no ha de contener más información de la necesaria.
- Relevancia: La expresión de referencia solo debe contener información que tenga algún tipo de poder discriminatorio.
- Forma: La expresión ha de ser clara y sin ambigüedades.

Estos principios son interesantes y han sido analizados en la literatura sobre el problema de Generación de Expresiones de Referencia como hemos visto. Por ejemplo, el algoritmo *Full Brevity* aplica estos principios. Sin embargo, también se ha mencionado anteriormente que en la comunicación natural se produce el fenómeno de la sobre especificación [163], por lo que en un sistema que pretende emular el comportamiento humano en la generación de expresiones de referencia, estos principios pueden ser discutibles o mejorables. Así, no pueden ser los únicos que se consideren y en ocasiones tendrán que dejar de cumplirse en beneficio de la calidad del texto producido por el sistema. Entre otros factores, tendremos que tener en cuenta las preferencias del usuario final del sistema que estemos construyendo. Pensemos en un sistema orientado a generar descripciones de animales. Entonces, si nos estamos dirigiendo a un usuario experto en biología tiene sentido emplear la nomenclatura científica para cada especie de animal. Sin embargo, si el destinatario de nuestra descripción es un niño emplearemos términos más generales para hacer referencia a esos animales.

Otro factor que podemos tener en cuenta en el proceso de Generación de Expresiones de Referencia es la saliencia [114, 166], es decir, en qué medida un objeto o propiedad destaca visualmente para el usuario. Así, aunque hemos dicho anteriormente que el color tiene preferencia sobre el tamaño en la construcción de expresiones de referencia, puede haber casos en los que sea preferible usar el tamaño, por ejemplo si la diferencia de tamaño entre el objetivo y los distractores es muy grande. Entonces, es claro que esta propiedad será notoria para el usuario; tendrá mucha saliencia. Por lo tanto, incluir esta propiedad en la expresión de referencia ayudará al usuario a localizar el objeto.

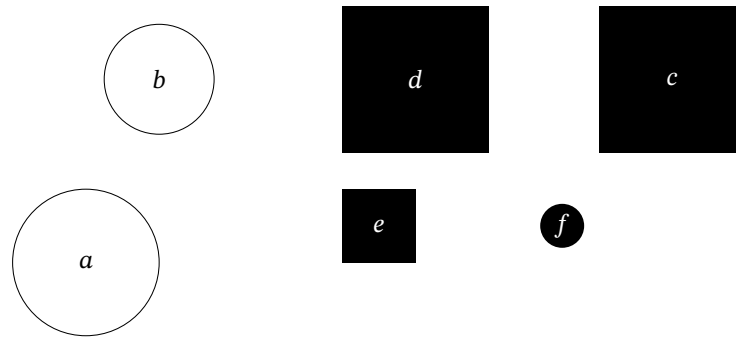


Figura 2.11: Ejemplo de una escena donde puede ser preferible usar el tamaño del objeto f , debido a su saliencia, en lugar de usar el color.

Para la escena de la Figura 2.11, si queremos hacer referencia al objeto f podríamos hacerlo empleando la expresión de referencia «el círculo negro». Pero, como podemos ver, este objeto es también el más pequeño de todos los objetos de la escena. Por tanto, puede ser interesante hacer referencia a este objeto como «el círculo pequeño», ya que es probable que la atención visual del usuario haya ido en un primer momento hacia aquel objeto que destaca en la imagen por su reducido tamaño. Mientras que el color negro está presente en otros objetos de la escena.

Además de estas dimensiones o factores, podemos considerar otros factores más concretos para el problema que nos ocupa. En [20] se presentan una serie de medidas que pueden aplicarse al resultado de un sistema encargado de generar una descripción de un conjunto de datos. Entre estas medidas aparece el concepto de la granularidad, un concepto que ya introdujimos en el Capítulo 1, cuando hablamos de las ontologías de conceptos o términos que se podían incluir en una expresión de referencia. Por ejemplo, podemos describir un conjunto de perros como «los perros» o podemos aumentar la granularidad de la descripción e indicar que el conjunto se compone de «dos rottweiler y tres galgos». Según las preferencias del usuario emplearemos un nivel mayor o menor de granularidad.

Sin embargo, como se señala en [20], hay ocasiones en las que las dimensiones a medir representan conceptos muy complejos para los que resulta difícil, si no imposible, definir una métrica para medirlos. Y en estos casos se necesita realizar una experimentación con usuarios, o bien emplear métodos de aprendizaje automático para obtener un criterio de preferencia entre distintas expresiones de

referencia [164]. Como muestra, podemos pensar en cómo evaluar lo «amigable» que resulta al usuario el sistema generado, dimensión que podría medirse según la similitud que presenta el diálogo producido por el sistema al que construiría el propio usuario. Esta dimensión no puede ser medida de forma externa al usuario. Y por lo tanto, necesitaremos de la participación del mismo para medirla. O bien, necesitaremos un corpus de expresiones generadas por el usuario para así comparar estas con las generadas por el sistema.

Así las cosas, además de estas medidas, que pueden guiar el proceso de Generación de Expresiones de Referencia teniendo en cuenta distintas dimensiones o distintas métricas basándose en estudios externos al problema para el que se está desarrollando el sistema, también se ha de realizar una evaluación de los resultados finales generados por el sistema en el contexto de la tarea que este ha de abordar [20]. En [20] se enumeran tres posibles métodos de validación final de los resultados producidos por un sistema:

1. Validar si realmente los resultados del sistema producen el efecto deseado en los usuarios finales del mismo.
2. Validar los textos producidos de una forma más general pidiéndole a distintos sujetos que valoren el texto en un contexto genérico. Podemos encontrar una propuesta de metodología para realizar este tipo de validaciones en [72].
3. Validar de una forma automática los textos generados comparándolos con un corpus de textos producidos por expertos [78, 173].

Evidentemente, cada uno de estos tipos de validación presenta ventajas e inconvenientes. Mientras que las primeras propuestas implican el reunir una cantidad adecuada de usuarios y plantear una experimentación ad hoc para nuestra aplicación, la tercera tiene el inconveniente de que construir un corpus con el que comparar nuestros resultados es también una tarea que requiere mucho tiempo. Aunque en ocasiones es posible validar nuestras propuestas empleando conjuntos de datos ya generados para otras tareas, como puede ser el conjunto de datos TUNA [14]. Podemos encontrar una revisión actual de las mejores prácticas para realizar validaciones con usuarios en [127].

2.2 EXTENSIONES DEL PROBLEMA CLÁSICO DE GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA Y REFERIBILIDAD

El problema clásico de Generación de Expresiones de Referencia que hemos presentado en el Problema 2.1 considera que las expresiones de referencia son conjunciones de propiedades, de ahí la intersección que empleamos en la Ecuación 2.1. Sin embargo, existen múltiples extensiones al problema clásico, las cuales afectan tanto a los operadores lógicos utilizados como al tipo de propiedades que se incluyen en las expresiones de referencia. Estas extensiones son interesantes para el problema que nos ocupa principalmente por dos razones: por un lado, enriquecen el poder expresivo de las expresiones de referencia incluyendo expresiones que solemos usar en nuestro día a día, lo que mejora el resultado de nuestro sistema al

resultar más natural y que permite hacer referencia a objetos que quizás no serían referibles si empleásemos solo propiedades básicas o solo conjunciones de propiedades; por otro lado, estas extensiones son la principal motivación para emplear mecanismos formales de representación de conocimiento en lugar de simplemente emplear algoritmos ad hoc.

A continuación, vamos a hablar de las principales extensiones al problema de la Generación de Expresiones de Referencia que podemos encontrar en la literatura. Aunque podemos considerar extensiones más complejas que se deriven de combinar las extensiones de las que vamos a hablar.

2.2.1 NEGACIÓN DE PROPIEDADES

El conjunto $\{e, f, g\}$ no es referible en el universo de la Figura 2.4 empleando conjunción de propiedades sin emplear la negación. Sin embargo, sí que es referible si podemos emplear propiedades en un sentido negativo empleando la negación, es decir, si podemos indicar que un objeto no posee una propiedad determinada. Por ejemplo, podríamos usar la expresión de referencia «los objetos blancos que no son círculos», que se corresponde con la expresión lógica $\text{blanco} \wedge \neg \text{círculo}$. Como otro ejemplo, la expresión $\neg \text{círculo}$ es una expresión de referencia para el conjunto $\{e, f, g, h\}$.

2.2.2 DISYUNCIÓN DE PROPIEDADES

El conjunto $\{a, b, h\}$ no es referible en el universo de la Figura 2.4 usando únicamente la conjunción de propiedades, pero sí que podemos hacer referencia a él con la expresión de referencia «los objetos que son o bien círculos grandes o bien triángulos pequeños», es decir, la expresión de referencia $(\text{grande} \wedge \text{círculo}) \vee (\text{pequeño} \wedge \text{triángulo})$. Sin embargo, esta disyunción no tiene por qué aparecer explícitamente en la expresión lingüística de la expresión de referencia construida. Por ejemplo, una expresión lingüística conjuntiva puede emplearse para trasladar esa información a lenguaje natural, haciendo referencia a los objetos mediante una enumeración de subconjuntos de objetos cuya unión forma el conjunto a referenciar. Siendo cada uno de estos conjuntos de objetos referible mediante conjunciones de propiedades.

Así, para el ejemplo anterior, podríamos usar la expresión de referencia «los círculos grandes y el triángulo pequeño», indicando que el conjunto $\{a, b, h\}$ se puede obtener mediante la unión de $\{a, b\}$, «los círculos grandes», y $\{h\}$, «el triángulo pequeño». En este caso la disyunción está implícita dado que estamos describiendo una unión de conjuntos.

Este tipo de expresiones de referencia en las que empleamos conjunciones, disyunciones y negaciones se denominan booleanas en [118]. Podemos encontrar una extensión del Algoritmo Incremental para tratar con expresiones de referencia booleanas en [56], generando expresiones lógicas en forma normal conjuntiva. Por otro lado, el uso de expresiones lógicas en forma normal disyuntiva para el problema de la Generación de Expresiones de Referencia Plurales se ha propuesto en [87, 107].

2.2.3 PROPIEDADES RELACIONALES

Hasta ahora hemos considerado únicamente propiedades simples de objetos individuales. Sin embargo, es también usual considerar propiedades relacionales, definidas como relaciones n -arias entre los objetos del universo de discurso en el que nos encontremos. Desde un punto de vista lógico, podemos representar estas relaciones mediante predicados n -arios. Un ejemplo básico de este tipo de propiedades relacionales son las relaciones espaciales entre los objetos de una escena. Por ejemplo, para el universo de la Figura 2.12, las relaciones espaciales *justo a la izquierda*, *justo a la derecha*, *justo encima* y *justo debajo* se representan mediante líneas discontinuas (notemos que cada línea representa las dos relaciones espaciales simétricas correspondientes). La Tabla 2.2 muestra distintas expresiones de referencia construidas empleando tanto propiedades individuales de los objetos como propiedades relacionales.

Cabe señalar que el uso de propiedades relacionales nos permite crear cadenas de referencias como la última expresión que mostramos en la Tabla 2.2. Por lo tanto, tendremos que tratar dos problemas adicionales: en primer lugar evitar referencias circulares como «el cuadrado negro que está justo a la izquierda de un círculo grande blanco que está justo a la derecha de un cuadrado negro». En segundo lugar, tenemos que tener en cuenta la potencial explosión combinatoria en el número de expresiones de referencia que podemos construir para un objetivo determinado.

También tenemos que tener en cuenta lo que se señala en [118], y es que a la hora de hacer referencia a objetos mediante relaciones con otros objetos, estos últimos no tienen que ser necesariamente referibles. E incluso cuando lo sean, no necesitamos emplear una expresión de referencia con éxito referencial para ellos. Esta observación, entre otras discusiones interesantes sobre propiedades relacionales en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia, es analizada en [49]. Como muestra, en la tercera expresión de referencia que encontramos en la Tabla 2.2, el objeto o es referido mediante su relación con un círculo que no se identifica previamente.

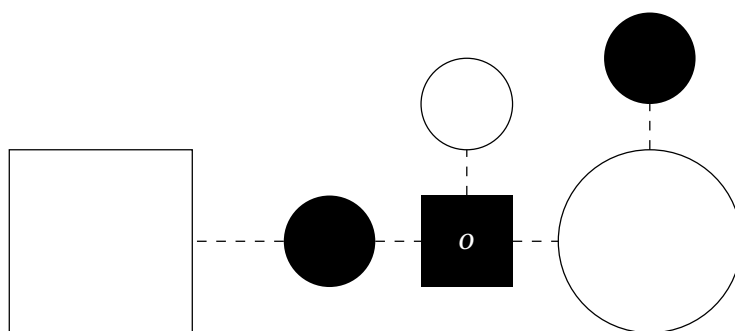


Figura 2.12: Universo en el que mostramos distintas relaciones espaciales entre los objetos. Así, podemos encontrar varias expresiones de referencia posibles para el objeto o empleando o no relaciones espaciales con otros objetos de la escena, como las que encontramos en la Tabla 2.2.

«El cuadrado negro»
«El cuadrado pequeño»
«El cuadrado que está justo debajo de un círculo»
«El cuadrado negro que está justo debajo de un círculo blanco pequeño»
«El cuadrado que está justo a la izquierda de un círculo blanco grande»
«El cuadrado negro pequeño que está justo a la derecha de un círculo negro que está justo a la derecha de un cuadrado grande blanco»

Tabla 2.2: Expresiones de referencia válidas para el objeto *o* de la Figura 2.12, algunas empleando relaciones espaciales entre los objetos de la escena.

2.2.4 PROPIEDADES CONTEXTUALES

Este tipo de propiedades son aquellas que los objetos cumplen o no dependiendo del resto de objetos en su universo de discurso o del *subuniverso* donde el objeto es considerado. Para ver esto, supongamos que eliminamos el objeto *b* del contexto de la Figura 2.13⁴. En ese caso, en este subuniverso la expresión de referencia «el objeto a la izquierda» se referiría unívocamente al objeto *c*, ya que en ese subuniverso este es el único objeto que satisfaría esa propiedad. Sin embargo, si consideramos el universo al completo de la Figura 2.13, esta expresión haría referencia al objeto *b*, ya que sería el objeto más a la izquierda. Así, ejemplos típicos de propiedades contextuales son aquellas que se asignan al objeto que mejor cumple dicha propiedad dentro del universo o subuniverso que estemos considerando.

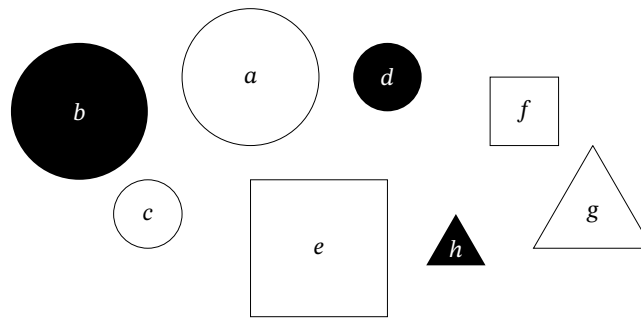


Figura 2.13: Universo de discurso con diversas figuras geométricas blancas o negras de distintos tamaños.

Cabe señalar que este tipo de propiedades requieren estrategias específicas para resolver el Problema de Anclaje de Símbolos [103] del que hablaremos en la Sección 2.3, el cual intenta resolver el problema de determinar la semántica de los términos del lenguaje natural que empleamos para construir las expresiones de referencia (ver la sección 9.3 de [54]).

⁴Reutilizamos aquí el universo que ya empleamos para ilustrar el funcionamiento de los mecanismos formales representados en la Sección 2.1.1.

El uso de propiedades contextuales aumenta la complejidad del problema de Generación de Expresiones de Referencia. Esto se debe a que el orden en el cual consideramos las propiedades tiene importancia, ya que el subuniverso donde una propiedad va a ser considerada o evaluada puede venir determinado por las propiedades anteriormente empleadas. Podemos considerar la propiedad *ser el segundo objeto por la izquierda* en la Figura 2.13. En este caso, la expresión «el segundo objeto por la izquierda de entre los objetos blancos» hace referencia al objeto *a*, ya que en primer lugar consideramos la propiedad *blanco*, y dentro del subuniverso de objetos blancos consideramos la propiedad *ser el segundo objeto por la izquierda*. Por el contrario, la expresión «el objeto blanco que es el segundo por la izquierda» hace referencia al objeto *c*, puesto que primero consideramos la propiedad *ser el segundo objeto por la izquierda* en el universo completo de la Figura 2.13, y luego consideramos la propiedad *blanco*. Aquí se pone de manifiesto que la simetría de los operadores lógicos que empleamos en las expresiones de referencia desaparecerá en general. Por ejemplo, como acabamos de ver, la fórmula $\text{blanco} \vec{\wedge} \text{izquierda}$ puede no ser equivalente a la $\text{izquierda} \vec{\wedge} \text{blanco}$, donde $\vec{\wedge}$ representa una conjunción no conmutativa.

Además, la complejidad computacional del problema aumenta. Para ver esto podemos notar que si solo se emplean conjunciones no conmutativas el espacio de búsqueda de posibles expresiones de referencia estaría formado por todas las ordenaciones posibles de propiedades en cada posible subconjunto de propiedades, con tamaño $\sum_{i=1}^n [n!/(n-i)!]$, donde n es el número de propiedades. Esta complejidad es mucho mayor que en el caso en el que no se emplean propiedades contextuales y se emplea una conjunción conmutativa. En este caso el tamaño del espacio de búsqueda sería $\sum_{i=1}^n [n!/(i! \times (n-i)!)] = 2^n$.

Una fuente usual de propiedades contextuales es la existencia de ordenaciones entre objetos del universo de discurso. Hemos visto el caso en el que los objetos se ordenan en base a su posición en la imagen. En general, dado un orden entre los objetos, como por ejemplo *ser más/menos/o tan p que/como n objetos en el universo*, donde p es una propiedad y n es un número natural, este orden puede verse como una propiedad contextual, ya que un cambio en el conjunto de objetos considerado puede producir un cambio en el cumplimiento de la propiedad para un objeto determinado. Notemos además que las propiedades contextuales pueden ser individuales o relacionales.

2.2.5 PROPIEDADES COLECTIVAS

En lugar de propiedades de un objeto individual, las propiedades colectivas son aquellas que verifica un conjunto de objetos como un todo. Por ejemplo, si nos referimos a un conjunto de líneas en una imagen, podríamos considerar la propiedad colectiva *ser paralelas* [118], siendo la propiedad *paralela* una propiedad propia de un conjunto de líneas y no de una línea individual.

Para resolver el problema de la Generación de Expresiones de Referencia con propiedades colectivas empleando los algoritmos existentes, podríamos resolver un problema clásico en un universo artificial en el que consideremos como objetos

cada uno de los elementos de $2^{\mathcal{O}}$. En este caso, además de considerar las propiedades colectivas, \mathcal{P}_C , podemos considerar las propiedades individuales presentes en el universo original, asignando a un conjunto de objetos una determinada propiedad individual si todos los elementos de ese conjunto la verifican [56].

Por otro lado, el problema también puede resolverse considerando cada propiedad colectiva como un conjunto de propiedades individuales artificiales: un objeto verificará la propiedad $p \in \mathcal{P}_C$ en el subuniverso $S \in 2^{\mathcal{O}}$ si ese objeto pertenece a S y S verifica la propiedad colectiva p [198].

Notemos que aunque en ambas estrategias estamos manejando de manera indistinguible propiedades individuales y colectivas, en la fase de realización lingüística tendremos que tener en cuenta qué tipo de propiedad es realmente la propiedad que estemos considerando, para dar lugar a un texto adecuado.

En la literatura podemos encontrar distintos algoritmos para resolver las extensiones del problema de Generación de Expresiones de Referencia que acabamos de introducir [118]. Además, en [118] se señala que el problema de GER bajo distintas combinaciones de estas extensiones resulta una tarea muy compleja.

2.2.6 EL PROBLEMA DE LA REFERIBILIDAD

Dentro de la tarea de Generación de Expresiones de Referencia podemos encontrar distintos problemas a resolver. Aunque nos hemos centrado en la generación de expresiones de referencia para un conjunto de objetos, hay otro problema que hemos de tener en cuenta: determinar qué objetos son *referibles*, término que ya hemos empleado anteriormente. A continuación formalizamos este término mediante una definición.

Definición 2.5: Conjunto de objetos referible

Consideremos un universo de discurso compuesto por un conjunto de objetos \mathcal{O} y un conjunto de propiedades \mathcal{P} . Diremos que un subconjunto de objetos $O \subseteq \mathcal{O}$ es referible si existe al menos una expresión de referencia $re \subseteq \mathcal{P}$ tal que $\llbracket re \rrbracket = O$.

Así, un conjunto será referible si al menos existe una expresión de referencia con éxito referencial para él. Evidentemente esto dependerá del universo de discurso en el que nos encontremos, del tipo de propiedades que consideremos, así como de los operadores lógicos que empleemos. En las secciones anteriores hemos visto, para distintas extensiones del problema de Generación de Expresiones de Referencia, cómo el considerar un tipo de propiedades o un determinado operador lógico nos permitía hacer referencia a conjuntos de objetos que, sin considerar estas propiedades u operadores, no serían referibles.

Determinar si un conjunto de objetos es referible puede resultar muy importante, y podría ser una fase previa a la de búsqueda y generación de una expresión de referencia para dicho conjunto. Como hemos puesto de manifiesto anteriormente, para un mismo conjunto de objetos podemos encontrar diversas expresiones de referencia válidas para el mismo, pudiendo llegar a presentar un problema de explosión combinatoria. Además, en la Sección 2.1.2 hemos presentado diversos criterios de calidad con los que evaluar y escoger la expresión de referencia que mejor se adecua a nuestros propósitos. Por lo tanto, este proceso de encontrar la mejor expresión

de referencia puede requerir mucho tiempo computacional. Y habrá ocasiones en las que, tras haber explorado todo el espacio de posibles expresiones de referencia para un conjunto de objetos, ninguna de estas expresiones tenga éxito referencial. Con lo que el conjunto no sería referible. Así, saber antes de este proceso de búsqueda si el objeto es referible o no puede mejorar el rendimiento de nuestro sistema.

Por ejemplo, en el área de la descripción de imágenes, conocer qué subconjunto o qué áreas de la imagen son referibles, puede resultar interesante. Conociendo qué conjuntos de objetos son referibles dentro de un universo de discurso o de una escena, podremos encontrar una partición de dicho universo a través de la cual describir el universo al completo, describiendo de forma individual cada uno de los subconjuntos de objetos referibles escogidos.

Esto da lugar al siguiente problema a resolver.

Problema 2.3: Problema de referibilidad

Dado un universo de discurso compuesto por un conjunto de objetos \mathcal{O} y un conjunto de propiedades \mathcal{P} , se ha de determinar qué conjuntos de objetos en $2^{\mathcal{O}}$ son referibles. Es decir, se ha de obtener el conjunto

$$\{O \subseteq \mathcal{O} \mid \exists re \text{ tal que } \llbracket re \rrbracket = O\}. \quad (2.3)$$

Observemos que en la Ecuación 2.3 no hemos impuesto que $re \subseteq \mathcal{P}$. Hemos optado por dar esta definición del conjunto de conjuntos de objetos referibles para expresar la dependencia del problema del tipo de propiedades consideradas, así como de los operadores lógicos disponibles; entre otros aspectos que podríamos tener en cuenta relacionados con la referibilidad. Por lo tanto, fuera de la versión clásica del problema de Generación de Expresiones de Referencia, no podemos considerar una expresión de referencia simplemente como un subconjunto de propiedades que se combinarán por medio de una conjunción conmutativa, sino que será algo más complejo como hemos visto en esta sección.

Como hemos visto, el problema de la referibilidad constituye una tarea muy importante a abordar dentro del problema de Generación de Expresiones de Referencia. Por lo tanto, el desarrollo de mecanismos y algoritmos para resolverlo de manera eficiente resulta de gran interés y relevancia.

2.3 GRADUALIDAD Y EL PROBLEMA DEL ANCLAJE DE SÍMBOLOS

Ya hemos visto anteriormente cómo la mayoría de conceptos o términos lingüísticos que empleamos en nuestro día a día no presentan fronteras bien definidas. Es decir, no se corresponden con términos crisp, sino que presentan cierta vaguedad o gradualidad en su definición. Así, en el Capítulo 1 vimos como ejemplo el adjetivo «alto» o «alta».

Y es que no está clara la frontera entre aquellas personas que serían etiquetadas como «altas» y aquellas que no lo serían. Una pequeña variación entre las alturas de dos personas distintas no hace que pasemos de considerar a una de ellas como alta, mientras que a la otra le asignamos sin ninguna duda la etiqueta «no alta». Hay una gradualidad en este cambio de etiquetas lingüísticas. Mientras que a una

persona le asignaríamos la etiqueta «alta» con total seguridad, a una cuya altura sea ligeramente menor, le seguiríamos asignando dicha etiqueta, pero quizás con un menor grado de seguridad. Pero lo que es claro, en cualquier caso, es que esta asignación se da con un cierto grado.

De ahí que digamos que la información que manejamos en el lenguaje natural es vaga o gradual, puesto que no se corresponde en lo general con conceptos con una definición clara y una interpretación fija, con unas fronteras bien definidas. Por ejemplo, en el campo de las matemáticas, está claro qué números son primos, {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...}, y cuáles no, {4, 10, 16, 9, ...}. Pero la mayoría de conceptos que manejamos no se corresponden con este tipo de conceptos bien definidos.

De hecho, en el lenguaje natural encontramos vaguedad en distintas formas [57]. En [57], donde Kees van Deemter explora el concepto de la vaguedad en distintos ámbitos y con distintos enfoques, hay un capítulo dedicado exclusivamente al ejemplo que hemos puesto al principio: a la vaguedad en la medida de distintas dimensiones.

En el capítulo 6 del mismo libro [57] encontramos una sección dedicada a la vaguedad de los adjetivos. Y como el autor pone de manifiesto, en nuestro día a día, cuando escuchamos a alguien dar una descripción, esperamos o damos por sentada cierta vaguedad en los adjetivos que emplea. Así, el autor pone como ejemplo que cuando una persona habla de la longitud de la barba de alguien, suponemos que en lo expresado hay un cierto margen de error. En palabras del propio autor, la vaguedad es universal al lenguaje natural.

Los humanos hemos aprendido a manejar esta vaguedad desde pequeños y tenemos en nuestra mente los modelos necesarios para manejar dicha vaguedad. Así por ejemplo, podemos pensar en el uso de la frase hecha «tan grande como un camión». Aquí implícitamente estamos estableciendo una correspondencia entre que un camión es grande dentro de la categoría de los vehículos, mientras que el objeto que estamos describiendo es grande si lo comparamos con el resto de objetos que forman parte de su categoría. Y, como hemos dicho en el Capítulo 1, el tamaño es una propiedad contextual, es decir, un objeto puede ser etiquetado como «grande» o «pequeño» dependiendo de con qué otros objetos lo comparemos; recordemos el ejemplo de la jugadora de baloncesto.

Ahora bien, el propósito de esta tesis es contribuir al campo de la Generación de Lenguaje Natural, donde se busca desarrollar sistemas capaces de «hablar» como lo haría un humano, y por tanto se han de trasladar a dicho sistema los procesos mentales mediante los cuales los humanos generamos el lenguaje. En particular, y teniendo en cuenta la importancia que hemos puesto de manifiesto que tiene, tenemos que desarrollar modelos capaces de representar y manejar la vaguedad que permea todo el lenguaje natural. En concreto, en esta tesis nos centraremos en la vaguedad que se encuentra en las palabras y conceptos que manejamos en nuestro lenguaje natural, como puede ser la que hay presente en los adjetivos que usamos día a día. Ya hemos visto un ejemplo de esta gradualidad con el uso del adjetivo «alta» para una persona determinada.

De este modo, habrá que escoger un mecanismo de representación para esta vaguedad, y elegir cómo traducir cada uno de los conceptos vagos que manejamos los humanos en términos de ese mecanismo. ¿Cómo podemos representar ese con-

tinuo que nos lleva desde el concepto *alto* al concepto *bajo*? ¿Cómo trasladamos a un ordenador esa escala que los humanos establecemos para describir una persona como alta o baja?

Este problema se conoce en la literatura como Problema de Anclaje de Símbolos [103]. En este problema podemos partir de una corriente psicológica en la que se entiende la mente como un sistema simbólico. Un sistema simbólico que se define como sigue.

Definición 2.6: Sistema simbólico [103]

Un sistema simbólico consiste en un conjunto de símbolos que se manipulan por medio de una serie de reglas explícitas que se formulan mediante, también, símbolos y cadenas de símbolos.

Esta manipulación de símbolos a partir de reglas es puramente sintáctica, teniendo únicamente en cuenta la «forma» de los símbolos, y de un modo completamente independiente de su semántica asociada. Se puede distinguir entre símbolos atómicos y símbolos compuestos, que se obtienen aplicando el conjunto de reglas del sistema partiendo de los símbolos atómicos.

Por último, el sistema simbólico al completo (símbolos y reglas) ha de tener una interpretación semántica.

La corriente psicológica del «lenguaje del pensamiento» [75] entiende la mente como un sistema simbólico y, por tanto, la cognición consiste en la manipulación de esos símbolos para generar algún comportamiento como, por ejemplo, la generación automática de textos que es la actividad cognitiva central en el campo de la Generación de Lenguaje Natural.

Como hemos indicado en la Definición 2.6 y siguiendo esta corriente psicológica, cada uno de los conceptos que manejamos en el lenguaje natural tiene una semántica asociada. Si queremos manejar estos conceptos en un sistema de generación de lenguaje natural que se comporte de un modo similar a como lo haría un humano, tendremos que ver cómo trasladar esta semántica a una computadora en forma de algún tipo de representación formal. Esto es precisamente en lo que consiste el Problema de Anclaje de Símbolos [103].

Para entenderlo mejor podemos recordar el ejemplo que da Stevan Harnad en su trabajo [103]. Así, podemos pensar en cómo sería intentar aprender chino utilizando como material únicamente un diccionario de chino escrito en chino. Si no tenemos ningún tipo de conocimiento sobre la lengua china, un carácter desconocido, un símbolo, nos llevaría a otro para el que tampoco tendríamos ninguna semántica asociada. Para poder obtener algún tipo de información a partir de este diccionario necesitaríamos, al igual que los criptógrafos, tener una base de conocimiento previa para poder conectar esos símbolos, inicialmente sin significado, a una representación semántica en esa base de conocimiento, que nos permita entender y manipular esos símbolos con un significado.

A continuación, vamos a ver cómo representar la semántica de los conceptos que manejamos en el lenguaje natural, como *azul* o *alto*, empleando la Teoría de Conjuntos Difusos. Para ello, vamos a introducir los fundamentos de esta teoría en la siguiente sección.

2.3.1 EL MANEJO DE LA GRADUALIDAD: TEORÍA DE CONJUNTOS DIFUSOS

La Lógica Difusa y la Teoría de Conjuntos Difusos han sido aplicadas ampliamente para representar la semántica de conceptos o etiquetas lingüísticas como *grande* o *rápido*. Para comenzar a hablar de la Teoría de Conjuntos Difusos, desde la perspectiva que en esta tesis nos ocupa, conviene empezar hablando del paradigma de la Computación con Palabras (CP). Este paradigma fue introducido por Lofti A. Zadeh [224, 225]. En él se establece que, en lugar de realizar computaciones con números y símbolos, como estamos acostumbrados a realizar en una computadora, los humanos hacemos este tipo de cálculos empleando palabras. Por lo tanto, si la única forma que tenemos los humanos de comunicarnos es el lenguaje, parece lógico intentar generar sistemas que empleen el lenguaje como medio para realizar cómputos [113]. Ya hemos presentado un ejemplo en el Capítulo 1, además de presentar el concepto de gránulo como el concepto atómico de este paradigma.

Si nos centramos en el campo de la Generación de Lenguaje Natural, donde tenemos que realizar cómputos en los que precisamente se maneja y genera información expresada en términos de lenguaje natural, es clara la relación entre este campo y el paradigma de la Computación con Palabras. El propio Zadeh en su trabajo [226] indica cómo la Teoría de Conjuntos Difusos es el mecanismo formal natural para tratar este paradigma.

Uno de los conceptos principales que se encontramos en la Teoría de Conjuntos Difusos, y que emplearemos ampliamente en el desarrollo de esta tesis, es el concepto de conjunto difuso.

Definición 2.7: Conjunto difuso [68, 223]

Un conjunto difuso F definido sobre un cierto dominio O viene dado por una función $\mu_F : O \rightarrow [0, 1]$ que denominaremos función de pertenencia. De modo que a cada elemento de O le asigna un valor en el intervalo $[0, 1]$, que representa en qué medida ese elemento pertenece al conjunto difuso F . Así, para aquellos elementos cuyo grado de membresía sea máximo, 1, diremos que pertenecen al conjunto con total seguridad, mientras que aquellos con grado mínimo, 0, sabemos que no pertenecen al conjunto sin ninguna duda. El resto de grados intermedios expresan un mayor o menor grado de pertenencia al conjunto.

Dado un cierto elemento $o \in O$ notamos al grado de pertenencia de o a F por $F(o) = \mu_F(o)$. Se tiene que distintas funciones de membresía dan lugar a distintos conjuntos difusos. Dado un dominio O , notaremos por $\mathcal{F}(O)$ al conjunto de todos los posibles conjuntos difusos que pueden definirse sobre él.

Volviendo al ejemplo del Capítulo 1 sobre la etiqueta lingüística «alto» o «alta» o, dicho de otro modo, del concepto *alta*, este concepto se comporta de un modo gradual, como dijimos en el Capítulo 1. Si consideramos a una persona alta, una persona con una altura un poco menor será considerada también alta aunque lo sea en «menor grado». Podemos modelar, como hemos indicado anteriormente, este concepto como un conjunto difuso. En este caso el dominio será un continuo representando la altura de cada persona en centímetros, y para cada altura el valor de pertenencia indicará en qué grado una persona es considerada alta. Entonces, podríamos tener la función de membresía que mostramos en la Figura 2.14.

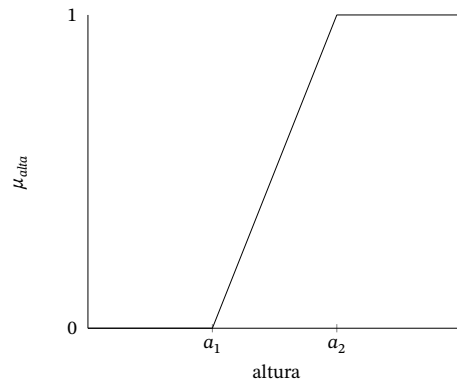


Figura 2.14: Función de membresía del conjunto difuso representando el concepto *alta*.

Como podemos ver, para el conjunto *alta*, las personas a partir de una cierta altura, a_2 , son consideradas altas sin ningún tipo de duda, y aquellas personas cuya altura está por debajo de un cierto valor, a_1 , se considera que no son altas sin ninguna duda o, dicho de otro modo, que su altura no pertenece en ningún grado al conjunto difuso de «alturas propias de personas altas». Sin embargo, para aquellas personas cuya altura está en el intervalo $[a_1, a_2]$, se produce un descenso progresivo del grado en el que la persona es considerada alta, o dicho de otra forma, del grado en el que la altura de la persona pertenece al conjunto de alturas consideradas propias de personas altas.

Es claro que un conjunto clásico $A \in 2^O$ puede verse como un conjunto difuso en $\mathcal{F}(O)$ que cumple que $A(o) \in \{0, 1\}$. Por lo tanto, podemos trabajar con conjuntos clásicos en combinación con conjuntos difusos, simplemente viendo los primeros también como conjuntos difusos con la función de membresía que definimos en la Ecuación 2.4.

$$A(o) := \begin{cases} 0 & o \notin A, \\ 1 & o \in A. \end{cases} \quad (2.4)$$

Otro modo de ver los conjuntos difusos es como una familia de conjuntos clásicos anidados [68]. Con esta visión en mente aparece el concepto de α -corte. A través de esta familia de conjuntos clásicos, representamos un conjunto difuso mediante una descomposición en niveles, de modo que en un nivel más alto estarán aquellos objetos que pertenecen al conjunto difuso con un grado mayor, mientras que a medida que descendemos en los niveles, más elementos del dominio se irán añadiendo al nivel correspondiente, puesto que es un nivel «menos estricto». Formalmente, dado un conjunto difuso, su α -corte se define como sigue.

Definición 2.8: α -corte de un conjunto difuso [68]

Dado un conjunto difuso $F \in \mathcal{F}(O)$ y un cierto $\alpha \in (0, 1]$, definimos su α -corte como

$$F_\alpha := \{o \in O \mid F(o) \geq \alpha\}. \quad (2.5)$$

A partir de esta definición se desprende que existe un anidamiento entre los distintos α -cortes de un conjunto difuso,

$$\alpha \leq \beta \implies F_\alpha \supseteq F_\beta, \forall \alpha, \beta \in (0, 1]. \quad (2.6)$$

Como hemos presentado en algunos ejemplos previos, cuando estamos construyendo expresiones de referencia solemos combinar distintos tipos de información. Por ejemplo, podemos pensar en el conjunto de objetos designado por la expresión de referencia *alta* \wedge *morena* para referirnos al conjunto de personas que son consideradas altas y morenas. Los dos conceptos que aparecen en esta expresión de referencia presentan gradualidad y, en consecuencia, el conjunto que aquí designamos será un conjunto difuso. Podemos pensar en que el conjunto de personas que son altas y morenas será la intersección de aquellas personas que son consideradas altas y aquellas que son consideradas morenas.

Pues bien, al contrario de lo que sucede en la Teoría de Conjuntos clásica, para los conjuntos difusos las operaciones conjuntistas clásicas pueden ser definidas de distintas formas.

En un primer momento, la unión y la intersección de conjuntos difusos, que da como resultado otro conjunto difuso, se definió en [223] como sigue, dados dos conjuntos difusos F y G :

$$(F \cap G)(o) := \min(F(o), G(o)), \quad (2.7)$$

$$(F \cup G)(o) := \max(F(o), G(o)). \quad (2.8)$$

Como puede comprobarse, estas definiciones extienden a la definición de intersección y unión de conjuntos clásicos. Pero, al contrario de lo que sucede para los conjuntos clásicos, podemos encontrar distintos pares de operaciones con los que definir la unión e intersección de conjuntos difusos, de modo que se reduzcan a las operaciones originales cuando las aplicamos sobre conjuntos clásicos. Estas operaciones son las t-normas y las t-conormas [1, 63, 64].

Definición 2.9: t-norma

Una t-norma es una función $\otimes : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $a, b, c, d \in [0, 1]$:

1. $\otimes(a, b) = \otimes(b, a)$,
2. $\otimes(a, b) \leq \otimes(c, d)$ si $a \leq c \wedge b \leq d$,
3. $\otimes(a, \otimes(b, c)) = \otimes(\otimes(a, b), c)$,
4. $\otimes(a, 1) = a$.

Algunos ejemplos de t-normas bien conocidas son:

- $\otimes(a, b) = \min(a, b)$,
- $\otimes(a, b) = ab$,
- $\otimes(a, b) = \max(0, a + b - 1)$.

Por ejemplo, podríamos definir la intersección de dos conjuntos difusos G y F empleando la t-norma producto, con lo que tendríamos el conjunto difuso $(F \cap G)(o) = F(o)G(o)$.

Lo mismo ocurre con la unión de conjuntos difusos empleando una t-conorma cualquiera.

Definición 2.10: t-conorma

Una t-conorma es una función $\oplus : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $a, b, c, d \in [0, 1]$:

1. $\oplus(a, b) = \oplus(b, a)$,
2. $\oplus(a, b) \leq \oplus(c, d)$ si $a \leq c \wedge b \leq d$,
3. $\oplus(a, \oplus(b, c)) = \oplus(\oplus(a, b), c)$,
4. $\oplus(a, 0) = a$.

Y algunos ejemplos de t-conormas son:

- $\oplus(a, b) = \max(a, b)$,
- $\oplus(a, b) = a + b - ab$,
- $\oplus(a, b) = \min(a + b, 1)$.

Al igual que definimos la intersección y la unión de conjuntos difusos, podemos definir su complemento. Así, la forma más usual para definir el complemento de un conjunto difuso $F \in \mathcal{F}(O)$ es

$$\overline{F}(o) := 1 - F(o), \forall o \in O. \quad (2.9)$$

Y se demuestra que la complementación de conjuntos difusos, de modo que extienda a la complementación clásica, se puede definir por medio de cualquier función que sea de la forma de la función de la Ecuación 2.9 combinada con un isomorfismo [202].

También podemos definir la inclusión de conjuntos de un modo que resulta muy natural [223], otro concepto básico de la Teoría de Conjuntos que es necesario extender al caso difuso. En la forma más básica o clásica, la inclusión entre conjuntos difusos se define como sigue:

$$F \subseteq G \stackrel{\text{def}}{\iff} F(o) \leq G(o), \forall o \in O, F, G \in \mathcal{F}(O). \quad (2.10)$$

La Teoría de Conjuntos Difusos es muy amplia y podemos encontrar una gran cantidad de conceptos y resultados en la literatura. Sin embargo, el objetivo de esta sección es presentar los fundamentos de esta materia que serán necesarios en el subsiguiente desarrollo de esta tesis.

A continuación, vamos a presentar una forma alternativa de representar los conjuntos difusos y manejar los conceptos difusos, la cual presenta interesantes propiedades algebraicas.

2.3.2 FUNDAMENTOS DE LA REPRESENTACIÓN POR NIVELES

Ya hemos puesto anteriormente de manifiesto cómo, dependiendo de qué t -norma, t -conorma y negación empleemos ((\otimes, \oplus, \neg)), obtenemos distintas definiciones para las operaciones entre conjuntos difusos. Así, como se indica en [188], dependiendo de qué operaciones empleemos tendremos distintas operaciones conjuntistas y, consecuentemente, distintas operaciones lógicas. Por lo tanto, las operaciones lógicas del caso clásico pueden extenderse de infinitas formas distintas al caso difuso, dependiendo de los operadores que escojamos para ello [171]. El conjunto de operaciones que se derivan de la tripleta de operadores seleccionados se denomina *una* teoría de conjuntos difusos.

Sin embargo, no hay una tripleta de operadores y, por tanto, no hay una teoría de conjuntos difusos, que permita extender la lógica al caso difuso cumpliendo todas las propiedades que poseen las álgebras booleanas. A saber, para cualesquiera $a, b, c \in [0, 1]$:

1. Leyes de idempotencia: $a \otimes a = a, a \oplus a = a$.
2. Leyes de identidad: $a \otimes 1 = a, a \oplus 0 = a$.
3. Leyes de conmutatividad: $a \otimes b = b \otimes a, a \oplus b = b \oplus a$.
4. Leyes de asociatividad: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c, a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.
5. Leyes de distributividad: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c), a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$.
6. Leyes de absorción: $a \otimes 0 = 0, a \oplus 1 = 1$.
7. Ley de no contradicción: $\neg(a \otimes \neg a) = 1$.
8. Ley del tercero excluido: $a \oplus \neg a = 1$.
9. Ley de involución: $\neg(\neg a) = a$.
10. Leyes de De Morgan: $\neg(a \otimes b) = \neg a \oplus \neg b, \neg(a \oplus b) = \neg a \otimes \neg b$.

Podemos encontrar estudios que demuestran que no hay una teoría de conjuntos difusos que pueda satisfacer la idempotencia y a la vez satisfacer las leyes de no contradicción y del tercero excluido [64, 67]. Por lo tanto, no hay una teoría de conjuntos difusos capaz de extender el álgebra booleana clásica al ámbito difuso completamente [43].

Sin embargo, el hecho de poder definir las operaciones de intersección, unión y complemento a través de funciones, en este caso t-normas, t-conormas y negaciones, puede ser interesante desde diversos puntos de vista. Como se indica en [188], este tipo de extensiones permiten reducir la complejidad de las operaciones, ya hemos visto cómo las t-normas y t-conormas requieren de cálculos sencillos, y además reducen el almacenaje requerido por dichas operaciones.

También, el hecho de poder definir las operaciones conjuntistas mediante distintas funciones nos proporciona mayor flexibilidad, pudiendo escoger en cada caso aquella tripleta de operadores que mejor se ajuste a nuestros propósitos. Sin embargo, distintos autores argumentan que estas ventajas pueden no ser interesantes en algunos casos, teniendo en cuenta la interpretación semántica de los conjuntos difusos [126]. Y que por lo tanto, el hecho de imponer que se expresen las operaciones conjuntistas de este modo puede no resultar beneficioso. Sobre todo si consideramos que esto supone que no se cumplan algunas propiedades básicas de las álgebras booleanas.

En consecuencia, el estudio de otros modelos de representación u otras teorías que se alejen de este tipo de extensiones de las álgebras booleanas, y que presenten otro tipo de propiedades interesantes, tiene especial interés [171]. Como se indica en [188], en algunas aplicaciones puede resultar interesante dar una representación de los conjuntos difusos que cumpla un cierto conjunto de propiedades como las que hemos enumerado anteriormente, aunque ello conlleve perder la propiedad de expresar las operaciones conjuntistas en término de distintas funciones.

En esta sección presentamos los fundamentos teóricos de la Representación por Niveles (RN) [69, 70, 186, 187]. Esta teoría presenta interesantes propiedades desde el punto de vista algebraico y computacional, como ya veremos. Por lo tanto, constituye una propuesta de gran relevancia en la extensión de las álgebras booleanas al ámbito difuso, entre otras aplicaciones.

En esta propuesta se modelan los conceptos difusos mediante una asignación de elementos a distintos niveles, lo que permite no solo representar conjuntos difusos, sino que nos da una estructura más general. Esta representación tiene la particularidad de que cumple todas las propiedades de las álgebras booleanas que hemos citado anteriormente. A continuación, vamos a introducir los conceptos fundamentales de esta teoría que emplearemos en el desarrollo de la tesis.

Así, dado un cierto universo X , se tiene la siguiente definición de representación por niveles:

Definición 2.11: Representación por niveles [188]

Dado un universo X , una representación por niveles es un par (Λ, ρ) , donde Λ es un conjunto finito de niveles y $\rho : \Lambda \rightarrow 2^X$ es una función, que a cada nivel le asigna un determinado subconjunto de elementos del universo X .

Si pensamos en el caso particular de los conjuntos difusos, podemos ver su representación mediante α -cortes, que dábamos en la Definición 2.8, como un primer ejemplo de representación por niveles. El conjunto difuso $F \in \mathcal{F}(O)$ podría verse como una representación por niveles $F := (\Lambda_F, \rho_F)$, donde

$$\Lambda_F := \{\alpha \in (0, 1] \mid \exists o \in O : F(o) = \alpha\}$$

y $\rho_F(\alpha) := F_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda_F$.

Pero la Representación por Niveles es mucho más flexible y tiene un gran poder semántico, permitiéndonos representar una amplia multitud de estructuras. Para ilustrar esto, podemos dar una representación por niveles en la cual los niveles asociados no estén anidados.

Ejemplo 2.2:

Podemos considerar un conjunto de niveles $\Lambda_E := \{1, 0.75, 0.5, 0.1\}$, y un universo $X := \{a, b, c, d, e\}$. Entonces, podríamos definir la representación por niveles $E := (\Lambda_E, \rho_E)$, dada por la Tabla 2.3.

α	$\rho_E(\alpha)$
1	$\{a, b, c, d\}$
0.75	$\{c, d\}$
0.5	$\{a\}$
0.1	$\{a, b\}$

Tabla 2.3: Ejemplo de representación por niveles en la que los distintos niveles no están anidados, como sí que ocurre con los α -cortes de un conjunto difuso.

Aquí podemos ver la capacidad expresiva de la Representación por Niveles, poniendo de manifiesto que su uso no ha de limitarse a la representación de conjuntos o conceptos difusos.

Dado un cierto concepto representado por niveles, podemos distinguir el conjunto de niveles correspondiente y la función ρ asociada a él empleando como subíndice el nombre del propio concepto. Y, además, notaremos del mismo modo el concepto y su correspondiente representación por niveles. Así, tendríamos que $A = (\Lambda_A, \rho_A)$.

Definición 2.12: Conjunto de representantes crisp de una RN [188]

Dada una representación por niveles $A := (\Lambda_A, \rho_A)$, definimos el conjunto de sus representantes crisp como

$$\Omega_A := \{\rho_A(\alpha) \mid \alpha \in \Lambda_A\} \quad (2.11)$$

Por ejemplo, para la representación por niveles de la Tabla 2.3, el conjunto de sus representantes crisp sería el conjunto

$$\Omega_E = \{\{a, b, c, d\}, \{c, d\}, \{a\}, \{a, b\}\}.$$

En muchas ocasiones tendremos que combinar la información de dos representaciones por niveles distintas A y B , en las que sus conjuntos de niveles no coinciden ($\Lambda_A \neq \Lambda_B$). En este caso habrá que extender ambas representaciones al conjunto de niveles $\Lambda_A \cup \Lambda_B$. Para ello la siguiente definición es fundamental.

Definición 2.13: Extensión de una RN [188]

Consideremos una representación por niveles (Λ, ρ) , donde $\Lambda := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ con $1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m > \alpha_{m+1} = 0$. Sea $\alpha \in (0, 1]$ tal que $\alpha_i \geq \alpha > \alpha_{i+1}$. Se define

$$\rho(\alpha) := \rho(\alpha_i).$$

Si consideramos la representación por niveles de la Tabla 2.3 y un $\alpha = 0.6$, por ejemplo, entonces tendríamos que $\rho_E(\alpha) = \{c, d\}$.

Teniendo en cuenta que podemos tener representaciones por niveles definidas sobre un mismo universo, pero con conjuntos de niveles distintos, es interesante saber cuándo dos representaciones contienen la misma información. Esto nos permitiría, entre otras cosas, reducir la cantidad de información almacenada en una base de conocimiento en la que se emplean representaciones por niveles para manejar la información.

Definición 2.14: Representaciones por niveles equivalentes [188]

Consideremos dos representaciones por niveles (Λ, ρ) y (Λ', ρ') sobre un cierto universo X . Se dice que ambas representaciones son equivalentes, $(\Lambda, \rho) \equiv (\Lambda', \rho')$, cuando

$$\rho(\alpha) = \rho'(\alpha), \forall \alpha \in (0, 1].$$

También podemos notar esto como $(\Lambda, \rho) = (\Lambda', \rho')$ cuando consideremos ambas representaciones extendidas a la unión de los niveles sobre los que se definen cada una de ellas.

Como hemos indicado anteriormente, uno de los muchos usos que tienen las representaciones por niveles es representar conjuntos difusos. Así, resulta interesante ver cómo se definen o extienden las operaciones conjuntistas usuales sobre conjuntos difusos a la Representación por Niveles:

Definición 2.15: Intersección y unión de representaciones por niveles [188]

Dadas dos representaciones por niveles $A := (\Lambda_A, \rho_A)$ y $B := (\Lambda_B, \rho_B)$ podemos definir las siguientes:

$$A \wedge B := (\Lambda_{A \wedge B}, \rho_{A \wedge B}) \text{ con } \rho_{A \wedge B}(\alpha) := \rho_A(\alpha) \cap \rho_B(\alpha), \quad (2.12)$$

$$A \vee B := (\Lambda_{A \vee B}, \rho_{A \vee B}) \text{ con } \rho_{A \vee B}(\alpha) := \rho_A(\alpha) \cup \rho_B(\alpha), \quad (2.13)$$

donde $\Lambda_{A \wedge B} = \Lambda_{A \vee B} := \Lambda_A \cup \Lambda_B$.

Como podemos ver, al contrario que sucedía en la Teoría de Conjuntos Difusos que hemos presentado en la sección anterior, la forma en la que se extienden estas operaciones conjuntistas al ámbito difuso es única. Además de la unión e intersección entre representaciones por niveles, otra operación conjuntista básica es la de complemento.

Definición 2.16: Complemento de una representación por niveles [188]

Dada una representación por niveles $A := (\Lambda_A, \rho_A)$, se define su complemento como la representación $\bar{A} := (\Lambda_A, \rho_{\bar{A}})$, donde

$$\rho_{\bar{A}}(\alpha) := \overline{\rho_A(\alpha)}. \quad (2.14)$$

En esta definición, entendemos que la operación de complemento se da en el universo sobre el que se define la representación por niveles.

Para ver cómo se extienden estas operaciones conjuntistas al caso de la Representación por Niveles vamos a considerar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3:

En la Tabla 2.4 definimos dos representaciones por niveles A y B , y presentamos el resultado de las operaciones conjuntistas que hemos visto anteriormente.

α	A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \cup B$	$A \cap B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A \cap B}$
1	{a, b}	{c, d}	{c, d, e}	{a, b, e}	{a, b, c, d}	\emptyset	{a, b, c, d, e}	{a, b, c, d, e}
0.5	{a, b, e}	{c, d, e}	{c, d}	{a, b}	{a, b, c, d, e}	{e}	{a, b, c, d}	{a, b, c, d}
0.25	{b, e}	{c, d, e}	{a, c, d}	{a, b}	{b, c, d, e}	{e}	{a, b, c, d}	{a, b, c, d}

Tabla 2.4: Resultado de aplicar las operaciones conjuntistas sobre dos representaciones por niveles definidas en el universo $X := \{a, b, c, d, e\}$. Para simplificar la notación hemos representado por el nombre de la representación por niveles a la correspondiente función ρ . Por ejemplo, $\overline{A \cap B}$ nota a la función $\rho_{\overline{A \cap B}}$.

Como podemos ver en las dos últimas columnas de la Tabla 2.4, se conservan las leyes de De Morgan. Además, también volvemos a ver que los distintos niveles de una representación por niveles no han de estar necesariamente anidados. Y que podemos operar una RN anidada con una que no lo esté.

Como hemos dicho, en la Representación por Niveles las operaciones que se definen tienen una única forma de hacerlo, con lo que perdemos esa flexibilidad que comentábamos de las teorías de conjuntos difusos. Sin embargo, se demuestra además en [188] que todas las operaciones que se realizan sobre representaciones por niveles cumplen todas las propiedades de las álgebras booleanas que hemos visto anteriormente. Por lo tanto, este tipo de mecanismos proporcionan una serie de propiedades que pueden ser muy interesantes desde el punto de vista práctico.

Además, podemos extender esta idea de la Representación por Niveles que acabamos de presentar para manejar otro tipo de conceptos que nos puedan resultar interesantes. Podemos extender así dos conceptos propios de la Teoría de Conjuntos, como son el concepto de conjunto potencia y de producto cartesiano de un RN-conjunto, que serán necesarios en los subsiguientes desarrollos teóricos. Veamos cómo extendemos estas nociones.

Definición 2.17: Conjunto potencia de un RN-conjunto

Dado un RN-conjunto $A := (\Lambda_A, \rho_A)$, se define su conjunto potencia, 2^A , como un RN-conjunto $2^A := (\Lambda_{2^A}, \rho_{2^A})$ con

$$\rho_{2^A}(\alpha) := 2^{\rho_A(\alpha)}. \quad (2.15)$$

Definición 2.18: Producto cartesiano entre RN-conjuntos

Dados dos RN-conjuntos A y B se define su producto cartesiano como un RN-conjunto $A \times B := (\Lambda_{A \times B}, \rho_{A \times B})$, donde $\Lambda_{A \times B} := \Lambda_A \cup \Lambda_B$ y

$$\rho_{A \times B}(\alpha) := \rho_A(\alpha) \times \rho_B(\alpha). \quad (2.16)$$

Para ver estos conceptos podemos considerar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4:

En la Tabla 2.5 vemos un ejemplo de cómo se calcula el conjunto potencia y el producto cartesiano de RN-conjuntos.

α	A	B	2^A	$A \times B$
0.25	{a, b, c}	{d, e}	{ \emptyset , {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}	{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)}
0.5	{a, b}	{d, e}	{ \emptyset , {a}, {b}, {a, b}}	{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e)}
1	{a, b}	{e}	{ \emptyset , {a}, {b}, {a, b}}	{(a, e), (b, e)}

Tabla 2.5: Ejemplo del cálculo del conjunto potencia y el producto cartesiano de RN-conjuntos definido en el universo $X := \{a, b, c, d, e\}$.

Otro concepto que puede resultar interesante extender a la Representación por Niveles puede ser el concepto de predicado n -ario, que nos será útil en el desarrollo de esta tesis. Para poder tener un predicado lógico necesitamos una serie de variables sobre las cuales definir ese predicado. Así, en primer lugar hemos de presentar el concepto de variable definida sobre un RN-dominio.

Definición 2.19: Variable definida sobre un RN-dominio

Una variable definida sobre un RN-dominio x es una variable que toma valores en un RN-conjunto, que podemos denominar su RN-dominio. Notaremos al RN-dominio de una variable x como la representación por niveles $D_x := (\Lambda_x, \rho_x)$.

De aquí en adelante, por cuestiones de simplicidad, nos referiremos a las variables definidas sobre RN-dominios como RN-variables.

Una vez hemos definido lo que es una RN-variable podemos construir los predicados sobre RN-variables.

Definición 2.20: Predicado n -ario sobre RN-variables

Un predicado n -ario sobre RN-variables es un predicado n -ario en el sentido de la Lógica de Primer Orden, que está definido sobre RN-variables. Es decir, un predicado n -ario $P(x_1, \dots, x_n)$, donde x_i es un RN-variable, para todo $i = 1, \dots, n$. Así, una evaluación de un predicado n -ario sobre RN-variables será una representación por niveles $\|P\| := (\Lambda_{\|P\|}, \rho_{\|P\|})$, para la que

$$\Lambda_{\|P\|} := \bigcup_i \Lambda_{x_i}, \text{ y}$$

$$\rho_{\|P\|} : \Lambda_{\|P\|} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\},$$

donde en cada nivel, $\rho_{\|P\|}(\alpha)$ evaluará a verdadero o falso según la interpretación del predicado, entendiéndolo como un predicado n -ario usual de la Lógica de Primer Orden definido sobre variables clásicas, cada una de las cuales tomará valores en el correspondiente dominio $\rho_{x_i}(\alpha)$.

Diremos que un RN-predicado es cierto, viéndolo como una fórmula bien formada, si como fórmula evalúa a verdadero en todos los niveles en los que está definido. En otro caso, daremos una medida gradual de la veracidad de dicho RN-predicado, como veremos más adelante.

En el siguiente ejemplo, mostramos la evaluación de un predicado⁵ ternario.

Ejemplo 2.5:

En la Tabla 2.6, presentamos la evaluación del predicado ternario $\forall x, y(x \geq y \rightarrow \exists z, y > z)$.

α	D_x	D_y	D_z	$\forall x, y(x \geq y \rightarrow \exists z, y > z)$
1	{2, 5, 6}	{3, 4, 11}	{2, 8, 9, 10}	V
0.7	{5, 6}	{3, 4}	{2, 8, 9, 10}	V
0.1	{5, 6}	{3, 4}	{8, 9, 10}	F

Tabla 2.6: Evaluación del predicado ternario $\forall x, y(x \geq y \rightarrow \exists z, y > z)$ definido sobre sendas RN-variables. Para cada RN-variable, en la columna correspondiente mostramos el RN-dominio donde toma valores.

Como hemos indicado en la Definición 2.20, cuando no tenemos que un predicado es cierto en todos los niveles, entonces podemos dar una medida que de algún modo resuma la información del valor de verdad del predicado en cada uno de los niveles. Para comenzar podemos definir la siguiente distribución de probabilidad relacionada con una representación por niveles determinada.

⁵En lo que sigue nos referiremos a los predicados definidos sobre RN-variables simplemente como predicados, por cuestiones de brevedad.

Definición 2.21: Distribución de probabilidad asociada a una representación por niveles [186]

Consideremos una representación por niveles (Λ, ρ) con el conjunto de representantes crisp Ω . Entonces, definimos la distribución de probabilidad asociada a esta representación por niveles $m : \Omega \rightarrow [0, 1]$, dada por

$$m(Y) := \sum_{\alpha_i | Y = \rho(\alpha_i)} (\alpha_i - \alpha_{i+1}). \quad (2.17)$$

Más en general, si consideramos una cierta condición que podamos aplicar a los subconjuntos del universo sobre el que se define la representación por niveles, podemos definir la siguiente medida asociada a dicha condición para una representación por niveles.

Definición 2.22: Medida de una representación por niveles asociada a una propiedad lógica

Consideremos una representación por niveles (Λ, ρ) definida sobre un universo X . Entonces, si P es una condición lógica que puede aplicarse a los subconjuntos de X , definimos la siguiente medida de (Λ, ρ) asociada a P como sigue

$$\nu^P((\Lambda, \rho)) := \sum_{\alpha_i | P(\rho(\alpha_i))} (\alpha_i - \alpha_{i+1}). \quad (2.18)$$

Veamos un ejemplo de esto. Si consideramos la condición P_i definida como « x_i pertenece al conjunto», entonces, $\nu^{P_i}((\Lambda, \rho))$ mide la pertenencia del elemento x_i a la representación por niveles. Y así, podemos traducir la información de esta RN al conjunto difuso

$$\nu^{P_1}((\Lambda, \rho))/x_1 + \dots + \nu^{P_n}((\Lambda, \rho))/x_n.$$

Ejemplo 2.6:

Veamos para el RN-conjunto de la Tabla 2.3 el conjunto difuso, resumen de la información representada en él, que obtenemos. Para ello, veamos en primer lugar en qué niveles aparece cada uno de los elementos del universo $X = \{a, b, c, d, e\}$:

elemento	niveles en los que aparece
a	$\{1, 0.5, 0.1\}$
b	$\{1, 0.1\}$
c	$\{1, 0.75\}$
d	$\{1, 0.75\}$
e	\emptyset

Entonces, consideramos las propiedades P_i y la medida que hemos definido en la Ecuación 2.18, tenemos el siguiente conjunto difuso:

$$0.75/a + 0.35/b + 0.5/c + 0.5/d + 0/e.$$

También podemos, usando este mismo tipo de medidas, dar una medida del grado de verdad de un predicado definido sobre RN-variables, empleando una condición P_V que sea verdadera en aquellos niveles en los que el predicado lo es.

Ejemplo 2.7:

Para el predicado del Ejemplo 2.5 tenemos que los niveles que consideramos son $\{1, 0.7, 0.1\}$. Como el predicado es cierto en los niveles 1 y 0.7, tendríamos que su medida gradual de verdad sería

$$(1 - 0.7) + (0.7 - 0.1) = 0.9.$$

Una vez hemos definido lo que es un predicado sobre RN-variables, podemos definir algunos casos particulares que nos serán útiles en los subsiguientes desarrollos teóricos. Así por ejemplo, nos será útil definir la inclusión entre RN-conjuntos. Dado que cada RN-conjunto está definido en una serie de niveles, tiene sentido estudiar esta inclusión también por niveles, dando lugar al siguiente concepto.

Definición 2.23: RN-inclusión entre RN-conjuntos

Definimos la relación de RN-inclusión entre RN-conjuntos como un predicado $\subseteq (A, B)$, donde A y B son dos RN-variables que representan RN-conjuntos y que toman valores en el conjunto potencia de un cierto RN-dominio. La evaluación de este predicado será una representación por niveles $(\Lambda_{A \subseteq B}, \rho_{A \subseteq B})$, donde $\Lambda_{A \subseteq B} := \Lambda_A \cup \Lambda_B$ y

$$\rho_{A \subseteq B}(\alpha) := \begin{cases} V & \rho_A(\alpha) \subseteq \rho_B(\alpha), \\ F & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Si el RN-predicado $\subseteq (A, B)$ es cierto lo notaremos por $A \subseteq B$. En caso contrario, daremos una medida gradual de la validez de este predicado como hemos indicado anteriormente.

También podemos definir el predicado de igualdad entre RN-conjuntos. Su definición resulta trivial si nos valemos de la definición del predicado $\subseteq (A, B)$, puesto que bastará con combinar los valores de verdad en cada uno de los niveles mediante una conjunción lógica clásica.

Con estas definiciones, que como podemos ver resultan muy naturales, finalizamos el repaso a los fundamentos de la Representación por Niveles que nos serán necesarios en el desarrollo de esta tesis en los siguientes capítulos. Así, en este capítulo hemos presentado las herramientas teóricas que serán necesarias en los siguientes capítulos.

En el Capítulo 3 veremos con más profundidad cómo se emplea la Teoría de Conjuntos Difusos en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia cuando se maneja información vaga o imprecisa.

Capítulo 3

Vaguedad en el Problema de la Generación de Expresiones de Referencia

Como hemos visto en los capítulos anteriores, la vaguedad es uno de los principales asuntos a abordar a la hora de tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Sobre todo en aquellos sistemas que pretendan comunicarse de un modo natural con el usuario. En este capítulo profundizamos en la presencia de la vaguedad en el problema de Generación de Expresiones de Referencia. Así, estudiaremos una de las principales cuestiones a tratar cuando introducimos vaguedad en las expresiones de referencia que generamos: el problema de cómo medir el éxito referencial. Algo que, como veremos, se convierte también en una cuestión gradual.

3.1 EL ROL DE LA GRADUALIDAD EN EL PROBLEMA DE GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA

Llegados a este punto, es claro cómo la vaguedad está presente en nuestro día a día. La información vaga o gradual puede encontrarse con facilidad en múltiples situaciones cotidianas. La vaguedad está presente en atributos tan básicos y de tan frecuente uso como el color o el tamaño de los objetos. También la encontramos en los cuantificadores que incluimos para aportar mayor información en nuestras descripciones [60, 96], como cuando indicamos que «*la mayoría* de franceses son altos» o «*aproximadamente la mitad* de pelotas son azules». Así, la vaguedad está presente en la mayoría de conceptos mentales que manejamos a diario en nuestra comunicación [183].

Son multitud las muestras que podemos encontrar de la presencia de la vaguedad en el lenguaje natural. En concreto, el libro de Kees van Deemter [57] dedica su primera parte a mostrar cómo la vaguedad está presente en la comunicación humana permanentemente.

Aunque podemos encontrar, como se pone de manifiesto en el mismo libro [57], distintos tipos de vaguedad en el lenguaje natural, en esta tesis nos centramos, al igual que en [52], en la vaguedad presente en los adjetivos. En el día a día, los adjetivos son piezas fundamentales de las descripciones que producimos en nuestra comunicación natural. Sin ir más lejos, en [52] se indica que, entre las primeras palabras que aprendemos a utilizar, podemos encontrar multitud de adjetivos [162]. Y, por lo tanto, se hace patente la necesidad de prestar especial atención al manejo de estos adjetivos vagos o, como se denominan en [52], graduales, en los sistemas que desarrollamos para tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia.

Dentro de la tarea de Generación de Expresiones de Referencia distinguimos dos problemas que se han de resolver: Por un lado, tenemos que prestar atención al manejo de estos conceptos o adjetivos graduales, empleando una buena representación de la semántica de los mismos. Por otro, deberemos medir el grado de verdad de las expresiones de referencia generadas. Debido a que estamos trabajando con propiedades graduales, determinar si una expresión de referencia puede aplicarse a un objeto determinado será también una cuestión gradual. Lo mismo ocurrirá con otra medida central en el problema de Generación de Expresiones de Referencia como es el éxito referencial. Veremos más adelante cómo el éxito referencial se convierte, en un ámbito difuso, en un concepto gradual que necesita de medidas adecuadas.

Manejar los adjetivos graduales que encontramos en el lenguaje natural implica una correcta representación de los mismos en la computadora. Es decir, para poder construir un sistema capaz de utilizar correctamente estos adjetivos, se ha de representar correctamente la semántica de estos. Con lo que, en primer lugar, hemos de abordar el Problema de Anclaje de Símbolos que hemos introducido en la Sección 2.3.

En la literatura podemos encontrar distintos modos de enfocar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia empleando propiedades graduales. Algo que puede diferenciar unas propuestas de otras es el modo en el que manejan o representan la semántica de los adjetivos vagos. En [52] se presentan los adjetivos vagos como adjetivos asociados con un valor numérico, que luego será traducido a una etiqueta o expresión lingüística determinada. Y en esta línea repasan tres propuestas de la literatura que realizan, de un modo u otro, este proceso de «sustitución».

En primer lugar, se puede partir de una asociación de etiquetas a valores de forma fija, como sucede por ejemplo en el sistema FOG [98]. Este sistema genera descripciones de datos meteorológicos. Como muestra de esta estrategia, podemos considerar la siguiente asignación para el atributo relativo a la fuerza del viento, el cual se puede relacionar con el dato numérico dado por la velocidad del viento, que a continuación notamos por v .

$$fuerza\ del\ viento := \begin{cases} fuerte & v \geq 62^{km/h}, \\ moderado & 12^{km/h} \leq v < 62^{km/h}, \\ flojo & 12^{km/h} \geq v. \end{cases}$$

En este caso se ha utilizado la escala de Beaufort para la fuerza de los vientos para definir, a modo de ejemplo, una asociación de etiquetas lingüísticas a distintas velocidades del viento. Pero esta asignación de etiquetas lingüísticas a datos numéricos podría venir fijada por otro criterio, como puede ser el producido por un experto. Sin embargo, esta opción es muy rígida, ya que se asignan las etiquetas de una forma externa y ajena al usuario final del sistema que estamos construyendo. Así, otra aproximación más flexible, en la que sea el usuario el que fije estos intervalos para asignar una etiqueta lingüística u otra a un atributo [52], sería más recomendable, como se propone en [179]. Aun así, hemos de puntualizar que estas primeras aproximaciones no hacen más que una discretización de un continuo de valores que, aunque proporciona una forma lingüística de expresar una información numérica, no llega a tener la potencia de la Teoría de Conjuntos Difusos que hemos presentado en la Sección 2.3.1.

Por último, en [52] se cita la propuesta de [55] en la cual se determina qué etiqueta lingüística asociar a un dato dependiendo del contexto. En [52] se explica cómo decidir si asociar a una determinada pieza musical la etiqueta «famosa», según el número de veces que esa obra ha sido escuchada en comparación con la media del resto de obras que se consideran. Pero nuevamente no se establece en qué grado dicho adjetivo puede ser aplicado al objeto; simplemente se determina, según el contexto, si el adjetivo puede aplicarse al objeto o no. Por tanto, este tipo de aproximaciones no presentan la misma complejidad y flexibilidad que el lenguaje natural. La Teoría de Conjuntos Difusos sí que ofrece un marco en el cual plasmar y manejar esta gradualidad propia del lenguaje natural.

Por ejemplo, la Teoría de Conjuntos Difusos se ha usado profusamente [2] para dar mayor flexibilidad y capacidad semántica a las consultas sobre una base de datos. Y en [130] se presenta una propuesta para construir prototipos difusos para describir conjuntos de datos. Así, se construye un prototipo para cada grupo de datos que se haya encontrado mediante un proceso de agrupamiento. En la misma línea tenemos el trabajo de [157].

En [130] se explica cómo los prototipos difusos pueden ser más precisos y adecuados en muchas situaciones. En el trabajo se da como ejemplo el caso de generar un prototipo de una persona de origen francés. En lugar de usar, por ejemplo, la media numérica de la altura de los franceses, que sería un enfoque clásico como en el algoritmo de k -medias, se propone dar el prototipo «las personas francesas son bastante altas», expresando así la información de una forma lingüística y natural.

Además, las tres propuestas que hemos presentado anteriormente, y según la revisión de [52], se centran en adjetivos que se ven afectados por el contexto, como puede ser el tamaño de los objetos. Pero hay ocasiones en las cuales los adjetivos presentan vaguedad y son graduales pese a no tener una dependencia del contexto. Pensemos por ejemplo en una propiedad tan básica como es el color.

Podemos ver un color representado en el modelo de color HSV en el cual los colores se definen sobre tres dimensiones: el matiz, la saturación y el brillo. En este modelo, el matiz determinaría de qué gama de color estamos hablando; si es un color rojo o uno azulado. Luego, el color base dado por el matiz se ve modificado según la saturación y el brillo escogidos. Partiendo de este modelo, podríamos asignar a cada color tres etiquetas lingüísticas distintas, una por cada dimensión, y así

combinarlas para formar el nombre o etiqueta lingüística de ese color, como por ejemplo «rojo oscuro grisáceo».

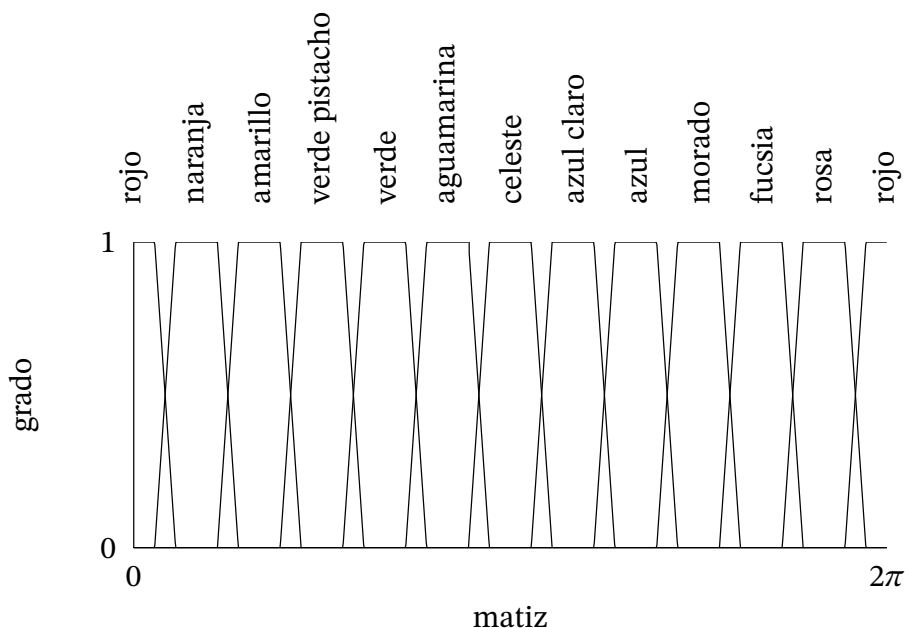


Figura 3.1: Partición difusa del rango $[0, 2\pi]$ del matiz en el modelo HSV y etiquetas lingüísticas asociadas.

En la Figura 3.1 hemos presentado una posible partición difusa para la dimensión del matiz en el modelo HSV. Entonces podemos asignar a cada uno de los conjuntos difusos que en ella se definen, cada una de las funciones de membresía trapezoidales que aparecen, una etiqueta lingüística determinada como las que mostramos en la misma figura. Hemos de señalar que esta es solo una posible representación del color, y que podríamos haber modelado este concepto de otro modo. Así, podríamos haber elegido otro número de conjuntos para la partición, otro tipo de función de membresía para los mismos u otras etiquetas lingüísticas. Si estuviéramos construyendo una aplicación para trabajar con niños y niñas en edad escolar, entonces quizás no tendría sentido emplear una granularidad tan alta o unas etiquetas lingüísticas tan específicas para describir los colores, puesto que no sabrían identificarlos; podríamos limitarnos a un conjunto de etiquetas lingüísticas más básico.

También podríamos definir estas funciones de membresía de otro modo. En [195] encontramos una propuesta para definir estas funciones empleando diagramas de Voronoi y un conjunto de colores prototípicos. Por ejemplo, aquellos colores que sabemos que conoce el usuario. Una vez establecidos estos prototipos, midiendo la distancia de un color dado a cada uno de esos colores prototípicos, establecemos en qué medida, en qué grado, ese color puede ser referenciado con la etiqueta lingüis-

tica asociada a cada uno de los colores prototípicos.

Como hemos mencionado con anterioridad, y hemos visto en el ejemplo del color, la Teoría de Conjuntos Difusos es una de las herramientas que mejor se adecuan para modelar propiedades graduales [113, 183]. Como se indica en [143], podemos representar la semántica de un concepto gradual «atómico» o simple por medio de un cierto conjunto difuso, como hemos hecho en el caso del color con la representación de la Figura 3.1. Cada propiedad, *rojo* o *azul* por ejemplo, se modela mediante un cierto conjunto difuso definido sobre el universo que corresponda, en este caso el valor del matiz en el modelo HSV. Todos estos conjuntos forman una partición difusa que nos permite modelar el atributo o el concepto gradual del color de un modo más natural y similar al sistema que empleamos los humanos para modelar este tipo de conceptos, como se pone de manifiesto en los estudios de [183].

Entonces, podemos combinar la semántica de conceptos simples para modelar conceptos derivados. Así, en el ejemplo anterior hemos combinado las etiquetas lingüísticas correspondientes a las tres dimensiones del modelo HSV para obtener el nombre preciso del color correspondiente. Esto lo hacemos por medio de t-normas y t-conormas que, como hemos comentado en la Sección 2.3.1, es el modo usual con el que se define la unión e intersección de conjuntos difusos.

Como se indica en [10], dos usuarios distintos pueden referirse al mismo color con etiquetas lingüísticas distintas. Mientras que un usuario puede referirse a un color como «rosa claro», otro puede identificar ese color como «salmón». Por lo que la semántica de un determinado concepto gradual puede variar de un usuario a otro. Por ello es importante emplear una herramienta flexible en la que el usuario pueda establecer esta semántica o estas particiones difusas, para adaptar así el sistema al usuario final del mismo. Como vemos, modelar la semántica de una cierta propiedad vaga no resulta trivial, ya que la semántica de un cierto término lingüístico depende de múltiples factores.

Sin embargo, la comunicación humana es tan rica y compleja que, aunque dos usuarios manejen dos representaciones semánticas distintas de una misma propiedad, la tarea comunicativa de referirse a un objeto en un universo de discurso por medio de esa propiedad puede resultar efectiva. Como se analiza en [10], el receptor puede, a pesar de la representación propia que tenga de los colores, asociar con la descripción proporcionada por el emisor aquel objeto que mejor encaje con la misma. Identificando así el objeto que para él es color salmón como el objeto rosa claro que ha indicado su interlocutor.

Del mismo modo, en [74] se pone de manifiesto cómo el contexto puede afectar a la semántica de los adjetivos que empleamos. En este trabajo se indica cómo los adjetivos en su forma básica, sin usar comparativos o superlativos, son más sensibles al contexto. Y cómo podemos emplear, por ejemplo, la expresión de referencia «la carretera larga» para una carretera que en comparación con otra tenga más kilómetros, aunque esta carretera, en general, no fuese considerada una carretera de gran longitud.

Por tanto, con las ideas que acabamos de presentar en esta sección, hemos puesto de manifiesto que el modelado de conceptos graduales es una tarea que, no solo es fundamental para construir un sistema de comunicación natural adecuado, sino que además es una tarea compleja y a la que hay que prestar especial atención a fin

de obtener los resultados deseados.

Un ejemplo de sistemas para los que es importante realizar este modelado de la forma adecuada son los sistemas que generan resúmenes lingüísticos (*linguistic summaries*). Estos resúmenes tienen la intención de describir la información contenida en un conjunto de datos mediante un texto que resulte natural para el usuario. Esto es de gran utilidad si tenemos en cuenta la ingente cantidad de datos que se recogen día a día, por ejemplo, a partir de la multitud de sensores de distintos tipos que encontramos en diversos lugares. Por lo que generar una descripción lingüística de esos datos, que describa de un modo natural al usuario la información contenida en ellos será de mucha más utilidad [208]. A modo de aplicación, podemos generar informes a partir de los datos recogidos por distintos sensores que asistan en la detección temprana del deterioro físico o cognitivo de personas en edad avanzada [111, 182].

Dentro de los resúmenes lingüísticos podemos considerar los resúmenes lingüísticos graduales, los cuales son textos compuestos por un conjunto de protoformas lingüísticas [210]. Estas protoformas, en su forma más básica pueden seguir los esquemas

$$\begin{aligned} Q \text{ y son } P, \\ QR \text{ y son } P, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde Q es un cuantificador lingüístico, como por ejemplo *la mayoría*, P es un resumen o una descripción como *costosos de reparar*, R es un cualificador como *alto impacto* e y representa los objetos o elementos que se están describiendo, como los problemas a describir detectados por un sistema de detección de fallos [210]. Así tendríamos como ejemplo la expresión «la mayoría de los fallos de alto impacto son costosos de reparar».

Las protoformas que podemos emplear en estos resúmenes son muy variadas. Así, los autores en [8] realizan un estudio sobre el uso de este tipo de expresiones, para ver en qué situaciones los usuarios usan un tipo de sentencias u otro. De este modo podremos adaptarnos a la forma de expresarse del usuario y generar un sistema que se comunique con él del modo más natural posible. De hecho, como ya comentamos en el Capítulo 1, la comunicación, y en particular las expresiones de referencia que generamos, se ve afectada por el contexto en el que se produce. Por todo ello, podemos ver que la generación de resúmenes lingüísticos no es una tarea trivial. En [194] encontramos una metodología para diseñar este tipo de sistemas de modo que la generación de resúmenes lingüísticos sea eficiente.

Además, también es necesario medir la calidad del resumen lingüístico generado, empezando por la veracidad del mismo. En particular, habrá que calcular el grado de verdad de las protoformas que conforman el resumen. Esto no es algo trivial, puesto que al estar trabajando con propiedades graduales, esta veracidad será también gradual. En la literatura podemos encontrar diversos métodos para calcular el grado de verdad de una sentencia cuantificada [60] como las que hemos introducido en la Ecuación 3.1.

Asimismo, y tal como vimos en la Sección 2.1.2, otras muchas medidas de calidad pueden ser tenidas en cuenta en el proceso de generación de resúmenes lin-

güísticos [131].

A continuación, vamos a centrarnos en la medida de un concepto de gran relevancia para el problema de Generación de Expresiones de Referencia: el éxito referencial. Este concepto, al igual que otras medidas que acabamos de ver, será un concepto gradual, con lo que veremos cómo interpretar y medir dicha gradualidad.

3.2 ÉXITO REFERENCIAL COMO UN CONCEPTO GRADUAL

En el Capítulo 2 presentamos la noción de éxito referencial. Una expresión de referencia tiene éxito referencial cuando identifica unívocamente al objeto para el que se generó. En la Ecuación 2.1 dimos una formalización de éxito referencial cuando consideramos expresiones de referencia formadas por una conjunción de propiedades crisp. Una expresión de referencia re , entendida como una conjunción de propiedades, tiene éxito referencial para el objeto o si se cumple que

$$\bigcap_{p \in re} \llbracket p \rrbracket = \{o\}.$$

Dicho de otro modo, la expresión de referencia tiene éxito referencial para el objeto si este es el único objeto que presenta todas y cada una de las propiedades que conforman la expresión. Y, por lo tanto, no hay ningún distractor que presente todas las propiedades.

Pensemos ahora en lo que ocurre cuando estamos trabajando en un ámbito gradual en el que las propiedades son vagas y, por lo tanto, los objetos presentan dichas propiedades en un cierto grado. Entonces, para una propiedad gradual, como por ejemplo *rojo*, el conjunto $\llbracket rojo \rrbracket$ será un conjunto difuso, donde μ_{rojo} vendrá dada por el grado en el que cada uno de los objetos del universo de discurso presenta dicha propiedad. Con lo cual, el conjunto de objetos referidos por una cierta expresión de referencia será un conjunto difuso, por lo que medir el éxito referencial de la misma será una cuestión gradual.

Veamos en primer lugar cómo podemos medir el grado de verdad de una expresión de referencia para un cierto objeto. Es decir, en qué grado la expresión de referencia puede aplicarse a dicho objeto. El grado de verdad de la expresión de referencia vendrá dado por el grado en el cual el objeto presenta cada una de las propiedades que aparecen en ella. Para combinar el grado en el que se da cada una de las propiedades o , dicho de otro modo, el grado de verdad de la proposición «el objeto o es p », que viene dado por $\mu_p(o) := p(o)$, podemos usar, como ya indicamos anteriormente, una t-norma. Así, el grado de verdad de una expresión de referencia $re := \{p_1, \dots, p_n\}$, formada por una conjunción de propiedades, para un objeto o vendrá dado por la siguiente expresión [92]:

$$acc_{re}(o) := \bigotimes_{i=1}^n p_i(o). \quad (3.2)$$

Partiendo de esta idea, definimos el siguiente conjunto difuso que emplearemos para proveer a las medidas de éxito referencial de una axiomática, a partir de la cual

podremos realizar nuevas aportaciones en el campo de las medidas de éxito referencial, construyendo nuevas medidas que cumplan dichos axiomas. Para definir este conjunto difuso en $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ medimos el grado de verdad de una cierta expresión de referencia para cada uno de los universos de discurso.

$$O_{re}(o) := acc_{re}(o), \forall o \in \mathcal{O}. \quad (3.3)$$

Podemos interpretar este conjunto como la información que aporta la expresión de referencia sobre a qué objeto se refiere. Consideremos una cierta expresión de referencia re para la que se cumpla que

$$O_{re}(o) = \alpha, \forall o \in \mathcal{O}, \alpha \in [0, 1].$$

Esta expresión de referencia no aportará ninguna información, ya que todos los objetos son referidos por ella en la misma medida, con lo que el usuario no sabría a qué objeto nos estamos refiriendo.

Del mismo modo, si para un cierto objeto se tiene que $acc_{re}(o) = 0$, entonces la expresión de referencia no sería válida para referirlo. Y también es probable que ocurra esto si $O_{re}(o) = \epsilon$, siendo $\epsilon \in [0, 1]$ un grado muy bajo.

En esta línea, podemos establecer la siguiente axiomática, o conjunto de propiedades deseables, para toda medida de éxito referencial para expresiones de referencia con propiedades graduales, dando lugar a una definición axiomática de este tipo de medidas. En la literatura no hemos encontrado una propuesta para axiomatizar la familia de medidas de éxito referencial. Establecer un conjunto de propiedades que, atendiendo a la semántica del concepto de éxito referencial, toda medida debería cumplir, nos permite construir medidas teniendo en cuenta estas propiedades y que, por tanto, serán adecuadas para tal propósito.

Definición 3.1: Medida de éxito referencial

Consideremos un universo de discurso compuesto por un conjunto de objetos \mathcal{O} y un conjunto de propiedades \mathcal{P} , que cada objeto puede presentar en un cierto grado. Entonces, una medida de éxito referencial es una función $rs : 2^{\mathcal{P}} \times \mathcal{O} \rightarrow [0, 1]$ que cumple:

1. $rs(re, o) = 1 \iff O_{re} = \{o\}$.
2. Si $O_{re}(o) = 0$ entonces $rs(re, o) = 0$.
3. Si $O_{re}(o_i) \leq O_{re'}(o_i), \forall o_i \in \mathcal{O} \setminus \{o\}$ y además $O_{re}(o) \geq O_{re'}(o)$, entonces $rs(re, o) \geq rs(re', o)$.

La tercera propiedad viene a decir que, cuanto mayor sea el grado en el que se puede aplicar la expresión de referencia al objeto o , y menor sea este grado para los distractores, mayor es el éxito referencial de la expresión de referencia para este objeto.

Entonces, el problema de Generación de Expresiones de Referencia en un ámbito gradual puede formalizarse como sigue.

Problema 3.1: Problema de Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales

En un universo de discurso con propiedades graduales, dado un objeto $o \in \mathcal{O}$, se ha de encontrar una expresión de referencia $re \subseteq \mathcal{P}$, tal que

$$(rs(re, o) > 0) \wedge (rs(re, o) > rs(re, o_i), \forall o_i \in \mathcal{O} \setminus \{o\}),$$

y que maximice el éxito referencial para el objetivo. Es decir, que se de que

$$rs(re, o) \geq rs(re', o), \forall re' \subseteq \mathcal{P}.$$

Por lo tanto, como ya hemos puesto de manifiesto con anterioridad, medir el éxito referencial es una tarea central para resolver el problema de Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales. A continuación, vamos a ver cómo podemos construir medidas de éxito referencial siguiendo la Definición 3.1 en un ámbito gradual.

3.2.1 UNA MEDIDA DE ÉXITO REFERENCIAL BASADA EN α -CORTES

Como ya hemos visto en la Sección 2.1, en la literatura podemos encontrar muchas propuestas y algoritmos para abordar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia en el caso clásico. Un modo de aprovechar todos estos desarrollos teóricos y técnicos en un ámbito gradual es emplear un mecanismo que traslade el problema de un ámbito gradual a un problema o problemas en un ámbito clásico.

Esto lo podemos hacer fijando un cierto nivel de confianza a partir del cual consideremos que el grado de verdad es suficiente para considerar que es cierto en el sentido crisp. Evidentemente, distintos niveles de confianza darán lugar a distintos escenarios. Y en cada uno de estos escenarios crisp podremos tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia desde una perspectiva clásica.

Siguiendo esta idea, a continuación vamos a presentar una medida de éxito referencial en un ámbito gradual basada en α -cortes. Para ello consideraremos el conjunto de α -cortes con el que podemos representar un conjunto difuso. En cada uno de estos niveles, que nos llevarán a distintos escenarios crisp, mediremos el éxito referencial de la forma usual que hemos presentado en la Ecuación 2.1, donde consideramos que las expresiones de referencia son conjunciones de propiedades.

Antes de introducir esta medida tenemos que presentar algunas definiciones previas.

Definición 3.2: α -corte de una propiedad difusa

En un cierto universo de discurso, consideremos una propiedad difusa¹ p . Entonces, dado un $\alpha \in [0, 1]$, definimos su α -corte, $\llbracket p \rrbracket_\alpha$, como el conjunto clásico que viene dado por el α -corte del conjunto difuso $O_{\{p\}}$.

¹ Cuando hablamos de propiedades difusas, estamos haciendo referencia a propiedades graduales que se están representando por medio de conjuntos difusos, y que se manejan a través de elementos propios de la Teoría de Conjuntos Difusos. Estos es solo un modo de representar y manejar esta gradualidad propia del lenguaje, y podemos encontrar otras estrategias para manejar esta gradualidad en la literatura.

A partir de los α -cortes de una propiedad difusas, podemos introducir la siguiente definición en la que vemos el éxito referencial por niveles.

Definición 3.3: Éxito referencial en un nivel α

Consideremos una expresión de referencia $re := \{p_1, \dots, p_n\}$, un $\alpha \in [0, 1]$ y $o \in \mathcal{O}$. Entonces, decimos que re tiene éxito referencial para o en el nivel α si, y solamente si,

$$\bigcap_{p \in re} \llbracket p \rrbracket_\alpha = \{o\}. \quad (3.4)$$

Por lo tanto, tenemos que una determinada expresión de referencia en un ámbito gradual puede tener éxito referencial para un objeto en unos niveles determinados, y no tenerlo en otros. Podemos introducir el siguiente conjunto de valores, que contiene los niveles en los que la expresión de referencia tiene éxito referencial para un cierto objeto en un universo de discurso.

Definición 3.4: Conjunto de validez de una expresión de referencia para un cierto objeto

En un cierto universo de discurso, dada una expresión de referencia re y un objeto $o \in \mathcal{O}$, definimos el siguiente conjunto:

$$V_{re}^o := \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid \bigcap_{p \in re} \llbracket p \rrbracket_\alpha = \{o\} \right\}. \quad (3.5)$$

Proposición 3.1:

En un cierto universo de discurso, dada una expresión de referencia re y un objeto $o \in \mathcal{O}$, si el conjunto $V_{re}^o \neq \emptyset$, entonces es un intervalo contenido en el $[0, 1]$.

Demostración: Para cada nivel, estamos considerando la intersección de los α -cortes de las propiedades de re en dicho nivel. Por lo tanto, tenemos que

$$\bigcap_{p \in re} \llbracket p \rrbracket_\alpha = (O_{re})_\alpha,$$

donde definimos el conjunto O_{re} considerando como t-norma el mínimo, como es usual.

Como hemos indicado en la Ecuación 2.6, existe un anidamiento entre los α -cortes de un conjunto difuso. Por lo tanto, tenemos que si $\alpha > \beta$, entonces $(O_{re})_\alpha \subseteq (O_{re})_\beta$. En consecuencia, no existe $\delta \in [0, 1]$, con $1 \geq \alpha > \delta > \beta > 0$, tal que $(O_{re})_\alpha = (O_{re})_\beta = \{o\}$ y $(O_{re})_\delta \neq \{o\}$. Con lo que el conjunto V_{re}^o es un intervalo en $[0, 1]$, como queríamos demostrar. \square

A partir de este conjunto de validez proponemos la siguiente medida de éxito referencial.

Definición 3.5: Medida de éxito referencial basada en α -cortes

$$rs(re, o) := \begin{cases} \alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2), & V_{re}^o \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Donde $\alpha_1 = \sup(V_{re}^o)$ y $\alpha_2 = \inf(V_{re}^o)$.

Vamos a ver que esta medida cumple las propiedades de la Definición 3.1. Para ello hemos de considerar el siguiente resultado intermedio.

Proposición 3.2:

Consideremos una expresión de referencia re en un universo de discurso. Tomamos entonces la permutación de elementos en $\mathcal{O} \{o_1, \dots, o_m\}$, con $m \geq 2$, tal que $O_{re}(o_i) \geq O_{re}(o_{i+1}), \forall 1 \leq i < m$. Sea $o \in \mathcal{O}$ con $V_{re}^o \neq \emptyset$. Entonces se da que:

1. $o = o_1$.
2. $\alpha_1 = O_{re}(o) > O_{re}(o_2) = \alpha_2$.

Demostración:

1. Si $o \neq o_1$ o $O_{re}(o_1) = O_{re}(o_2)$, entonces no existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $(O_{re})_\alpha = \{o\}$, y por tanto tenemos que $V_{re}^o = \emptyset$, lo que es una contradicción. Con lo que $o = o_1$ y $O_{re}(o_1) > O_{re}(o_2)$.
2. Para cualquier $\alpha > O_{re}(o)$, tenemos que $(O_{re})_\alpha = \emptyset$. Por otro lado, para aquellos α tales que $O_{re}(o) \geq \alpha > O_{re}(o_2)$, $(O_{re})_\alpha = \{o\}$. Y por último, para aquellos α con $O_{re}(o_2) \geq \alpha$, se tiene que $\{o, o_2\} \subseteq (O_{re})_\alpha$, con lo que $(O_{re})_\alpha \neq \{o\}$. Con este análisis observamos que $V_{re}^o = \{\alpha \in [0, 1] \mid O_{re}(o) \geq \alpha > O_{re}(o_2)\}$, es decir, $\alpha_1 = O_{re}(o) > O_{re}(o_2) = \alpha_2$.

□

Proposición 3.3:

La medida definida en la Ecuación 3.6 verifica los axiomas de la Definición 3.1.

Demostración:

1. $rs(re, o) = 1$ si, y solo si, $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 0$. Y como $V_{re}^o \neq \emptyset$, esto equivale a que $(O_{re})_\alpha = \{o\}, \forall \alpha \in (0, 1]$ o, equivalentemente, $O_{re} = \{o\}$.
2. Si $O_{re}(o) = 0$, entonces $o \notin (O_{re})_\alpha, \forall \alpha \in (0, 1]$. En este caso, se pueden dar dos opciones:
 - Si $\mathcal{O} = \{o\}$, entonces $V_{re}^o = \{0\}$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, por lo tanto $rs(re, o) = 0$.
 - Si $\{o\} \not\subseteq \mathcal{O}$, entonces $V_{re}^o = \emptyset$ y por definición $rs(re, o) = 0$.
3. Tenemos que $O_{re}(o_i) \leq O_{re'}(o_i), \forall i \in \mathcal{O} \setminus \{o\}$ y $O_{re}(o) \geq O_{re'}(o)$. Consideramos entonces la siguiente permutación de los objetos de $\mathcal{O} \{o_1, \dots, o_m\}$, tal que $O_{re}(o_i) \geq O_{re}(o_{i+1}), \forall 1 \leq i < m$, y sea $\{o'_1, \dots, o'_m\}$, la correspondiente permutación para $O_{re'}$. Entonces, podemos considerar dos casos:
 - Si $V_{re'}^o = \emptyset$ o $V_{re'}^o = \{0\}$, entonces tenemos que $rs(re', o) = 0$, y por lo tanto $rs(re, o) \geq rs(re', o)$.

- Si $\{0\} \neq V_{re'}^0 \neq \emptyset$, entonces por la Proposición 3.2, tenemos que $o = o_1'$ y $\alpha_1' = O_{re'}(o) > O_{re'}(o_2') = \alpha_2'$. Entonces, por las condiciones del tercer axioma tenemos que $o = o_1 = o_1'$ y

$$O_{re}(o) = \alpha_1 \geq \alpha_1' = O_{re'}(o) > O_{re'}(o_2') = \alpha_2' \geq \alpha_2 = O_{re}(o_2)$$

y, por lo tanto,

$$rs(re, o) = \alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2) > \alpha_1'(\alpha_1' - \alpha_2') = rs(re', o).$$

□

Veamos un ejemplo de aplicación de esta medida de éxito referencial en un universo de discurso con propiedades graduales.

Ejemplo 3.1:

Consideramos el universo de discurso que está representado por la Tabla 3.1.

objeto	<i>círculo</i>	<i>triángulo</i>	<i>rojo</i>	<i>azul</i>
<i>a</i>	1.0	0.0	1.0	0.0
<i>b</i>	0.0	1.0	0.0	0.5
<i>c</i>	1.0	0.0	0.0	0.75
<i>d</i>	1.0	0.0	0.0	0.25

Tabla 3.1: Universo de discurso con $\mathcal{O} := \{a, b, c, d\}$ y $P := \{\textit{círculo}, \textit{triángulo}, \textit{rojo}, \textit{azul}\}$. Los valores en cada celda representan en qué grado el objeto correspondiente presenta la propiedad de esa columna.

Veamos el conjunto de validez y la medida de éxito referencial de distintas expresiones de referencia para distintos objetos en este universo de discurso. Estos resultados los encontramos en la Tabla 3.2.

Como hemos visto, el éxito referencial mide en qué grado el conjunto difuso de objetos referidos por una expresión es un conjunto crisp formado por un solo elemento, el elemento al que se quiere hacer referencia. En general, la tarea de determinar en qué medida un conjunto difuso se corresponde con un conjunto crisp formado por un solo elemento ha recibido especial atención en el campo de la Teoría

expresión de referencia	objeto	V_{re}^o	$rs(re, o)$
«El círculo rojo»	<i>a</i>	[0, 1]	1.0
«El círculo azul»	<i>a</i>	[0, 0]	0.0
«El triángulo azul»	<i>b</i>	[0.5, 0]	0.25
«El círculo azul»	<i>c</i>	[0.75, 0.25]	0.38

Tabla 3.2: Conjunto de validez y éxito referencial para distintas expresiones de referencia y objetos en el universo de discurso de la Tabla 3.1.

de Conjuntos Difusos. Los estudios al respecto dieron origen al concepto de especificidad: el grado de especificidad de un conjunto difuso indica cuán parecido es este conjunto a un conjunto crisp con un solo elemento. Así, en la literatura podemos encontrar distintos trabajos en los que se proponen medidas para la especificidad de un conjunto difuso.

Como se puede observar, existe una clara relación entre el concepto de especificidad y el de éxito referencial. Ambos conceptos miden en qué grado un conjunto difuso está compuesto por un solo elemento en grado máximo. Por tanto, podemos plantearnos el derivar medidas de éxito referencial a partir de medidas de especificidad.

Ya hemos definido una medida de éxito referencial en la Ecuación 3.6, y hemos comprobado que cumple las propiedades que consideramos deseables para este tipo de medidas. Nos podemos preguntar entonces por qué estudiar nuevos métodos para construir nuevas medidas de éxito referencial.

Pues bien, como veremos en las siguientes secciones, la existencia de distintas medidas de especificidad nos permite ajustar la semántica del concepto de especificidad a nuestros propósitos. Por ejemplo, podemos considerar medidas de especificidad drásticas, que devuelvan el valor mínimo en cuanto el conjunto difuso sea ligeramente distinto a un conjunto crisp con un solo elemento, o emplear medidas más graduales, dependiendo de los objetivos del sistema donde las vayamos a emplear.

Del mismo modo, veremos en la Sección 3.4.2 el concepto de k -especificidad, el cual mide en qué grado un conjunto difuso es un conjunto crisp de cardinalidad k . Teniendo en cuenta la relación que acabamos de ver entre el éxito referencial y la especificidad, podemos pensar en el uso de medidas de k -especificidad para derivar medidas de éxito referencial en el problema de Generación de Expresiones de Referencia Plurales.

En consecuencia, resulta interesante estudiar la construcción de nuevas medidas de éxito referencial a partir de medidas de especificidad. Por un lado, contar con distintas medidas de éxito referencial nos permitirá emplear aquella que mejor se ajuste, desde el punto de vista semántico, al sistema que estemos desarrollando. Por otro lado, nos permitirá derivar medidas de éxito referencial con propiedades interesantes para otras extensiones del problema de Generación de Expresiones de Referencia.

A continuación, vamos a presentar un método para construir medidas de éxito referencial a partir de medidas de especificidad. Como veremos, este método nos da la posibilidad de generar una familia muy rica de medidas de éxito referencial que nos permite adaptarnos a distintas situaciones y aplicaciones.

3.3 MEDIDAS DE ÉXITO REFERENCIAL BASADAS EN ESPECIFICIDAD

3.3.1 EL CONCEPTO DE ESPECIFICIDAD

Un conjunto difuso puede interpretarse como una distribución de posibilidad para modelar la información disponible sobre el valor real de una determinada variable. Así, cuando el conjunto difuso es un conjunto clásico compuesto por un solo

elemento, un *singleton*, no hay ninguna duda sobre el valor de esa variable; es justamente el único elemento del conjunto. En otro caso, habrá más incertidumbre sobre este valor cuanto menos se parezca el conjunto difuso a un *singleton* y esto es precisamente lo que miden las medidas de especificidad [65, 84, 86, 105, 215-217]. En nuestro caso, un conjunto difuso, relativo a una determinada expresión de referencia, puede interpretarse como una representación de la certidumbre que hay sobre a qué objeto hace referencia la expresión. Cuando el conjunto es un *singleton* no hay duda de a qué elemento se está haciendo referencia, el único elemento de dicho conjunto. Y cuanto más se aleja este conjunto de un *singleton*, más dudas habrá sobre a qué objeto señala.

En esta sección presentamos una propuesta con la que construir medidas de éxito referencial a partir de medidas de especificidad. Como hemos visto en las Ecuaciones 2.1 y 3.4, y como expresa la primera propiedad de la Definición 3.1, una expresión de referencia tiene éxito referencial absoluto o total si el conjunto difuso de objetos a los que hace referencia, O_{re} , es un conjunto clásico compuesto por un único elemento. Además, si consideramos la definición de expresión de referencia según su intención, podemos ver una expresión de referencia como una expresión que busca, en el caso clásico de Generación de Expresiones de Referencia, hacer referencia a un único objeto. Por lo tanto, medir la especificidad del conjunto difuso de objetos referidos por la expresión es equivalente a esta definición desde un punto de vista semántico. Así, en la siguiente propuesta medimos el éxito referencial en términos de cuánto se parece el conjunto O_{re} al conjunto $\{o\}$, siendo o el objeto al que queremos hacer referencia. Esto lo haremos a través de medidas de especificidad.

Veamos entonces cómo se define qué es una medida de especificidad, ya que, como hemos dicho, es la pieza con la que construiremos nuevas medidas de éxito referencial.

A lo largo de la literatura podemos encontrar distintas definiciones del concepto de medida de especificidad, las cuales varían en cómo de estrictas son en las propiedades de monotonía que imponen. Vamos a mostrar tres definiciones distintas que podemos encontrar en la literatura, cada una más estricta que la anterior.

Definición 3.6: Medida de especificidad [215, 217]

Dado un conjunto \mathcal{O} una medida de especificidad es una función $Sp : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow [0, 1]$ que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$:

1. $Sp(A) = 1$ si, y solamente si, $A = \{o\}$ para algún $o \in \mathcal{O}$.
2. $Sp(\emptyset) = 0$.
3. Dados $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ conjuntos normales tales que $A \subseteq B$, entonces $Sp(A) \geq Sp(B)$.

En esta primera definición se imponen condiciones de monotonía solo al trabajar con conjuntos difusos normalizados, es decir, conjuntos en los que al menos un elemento pertenece al conjunto con grado 1. En concreto, esta condición de monotonía indica que, cuanto más pequeño sea el conjunto difuso normalizado, mayor

será su especificidad. Esto es lógico, ya que ambos conjuntos poseen al menos un elemento con grado 1, por lo tanto, cuanto menor sea el grado de pertenencia del resto de elementos al conjunto, más se parecerá dicho conjunto a un singleton.

Ahora bien, en la práctica no trabajaremos siempre con conjuntos normalizados, con lo que la definición anterior puede ser poco general. Así, la siguiente definición presenta una condición de monotonía para la que no se exige que los conjuntos comparados estén normalizados.

Definición 3.7: Medida de especificidad [219]

Dado un conjunto \mathcal{O} , una medida de especificidad es una función $Sp : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow [0, 1]$ que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$:

1. $Sp(A) = 1$ si, y solamente si, $A = \{o\}$ para algún $o \in \mathcal{O}$.
2. $Sp(\emptyset) = 0$.
3. Dados $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ tales que $a_1 \geq b_1$ y $a_i \leq b_i, \forall i \geq 2$, donde a_i y b_i se corresponden con los grados de membresía de A y B en orden decreciente. Entonces $Sp(A) \geq Sp(B)$.

La condición de monotonía que aquí se impone tiene una clara interpretación si pensamos en la semántica del concepto de especificidad. Es decir, la especificidad será mayor cuando aumente la pertenencia de un elemento determinado al conjunto, el que sería el único elemento del conjunto si fuese un singleton, y disminuye la pertenencia del resto de elementos al conjunto.

La siguiente definición impone unas condiciones de monotonía similares, aunque algo más estrictas. En la siguiente definición se indica que una pequeña variación en la membresía del elemento que pertenece con mayor grado al conjunto, supone una variación también en la medida de especificidad del conjunto. Es decir, en esta propuesta se le da algo de más importancia al grado de pertenencia del elemento con mayor grado de membresía.

Definición 3.8: Medida de especificidad [189, 218]

Dado un conjunto \mathcal{O} , una medida de especificidad es una función $Sp : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow [0, 1]$ que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$:

1. $Sp(A) = 1$ si, y solamente si, $A = \{o\}$ para algún $o \in \mathcal{O}$.
2. $Sp(\emptyset) = 0$.
3. $Sp(A)$ es estrictamente creciente con respecto a a_1 .
4. $Sp(A)$ es decreciente con respecto a $a_i, \forall i \geq 2$.

Se puede ver fácilmente que cada definición es más estricta que la anterior en las condiciones de monotonía. Por lo tanto, si una medida cumple la axiomática de la Definición 3.8, entonces también cumplirá la de la Definición 3.7, puesto que aquí se exige solo monotonía en todas las componentes, sin importar que sea estricta para la componente a_1 . Del mismo modo, si una medida cumple las propiedades

de la Definición 3.7, también cumplirá el conjunto de propiedades en la Definición 3.6; cuando los conjuntos están normalizados ambos tienen el mismo valor en la componente a_1 , y en consecuencia la especificidad será mayor cuanto menor sea el grado de membresía del resto de elementos, con lo que solo importa la condición de monotonía decreciente en los a_i .

En la literatura podemos encontrar diversas propuestas para medir la especificidad de conjuntos difusos. Entre estas propuestas encontramos familias paramétricas de medidas de especificidad como la familia lineal [216] (Ecuación 3.7) o la familia producto [218] (Ecuación 3.8). También tenemos medidas basadas en la combinación de operadores difusos [84] o integrales difusas [85].

$$Sp_{\vec{w}}(A) := a_1 - \sum_{i=2}^n w_i a_i. \quad (3.7)$$

$$Sp_k(A) := a_1 \prod_{i=2}^n (ka_i + (1 - a_i)). \quad (3.8)$$

En las ecuaciones anteriores, $k \in [0, 1]$ y $w_i \in [0, 1]$, tales que $\sum_{i=2}^n w_i = 1$, son parámetros que nos dan distintas medidas de especificidad, ajustando el comportamiento de la medida a través de ellos.

Como hemos indicado anteriormente, distintas medidas de especificidad tendrán distintas propiedades, y podrán aportar distintas interpretaciones semánticas del concepto de especificidad a nuestro sistema. Estas propiedades y semánticas podrían trasladarse a la medida de éxito referencial correspondiente, derivada a partir de la medida de especificidad que mejor se adecue a nuestros propósitos o a las preferencias del usuario.

A continuación veremos cómo construir medidas de éxito referencial en base a medidas de especificidad como las que acabamos de presentar.

3.3.2 UN MÉTODO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE MEDIDAS DE ÉXITO REFERENCIAL

A continuación, presentamos un nuevo método para obtener nuevas medidas de éxito referencial a partir de medidas de especificidad. A través de este método, podremos construir distintas medidas de éxito referencial que se adecuen mejor a los requisitos del sistema que estemos construyendo, a la semántica de éxito referencial que mejor se ajuste a nuestros propósitos. De este modo, aportamos al campo de las medidas de éxito referencial una forma de incrementar la familia de medidas disponibles, algo que es de gran importancia por lo que acabamos de exponer.

Definición 3.9: Medidas de éxito referencial basadas en medidas de especificidad
Dada una medida de especificidad Sp según la Definición 3.6, se define la siguiente función, donde \otimes es un t-norma:

$$rs_{Sp}(re, o_i) := \begin{cases} O_{re}(o_i) \otimes Sp(O_{re}^*) & \text{si } \max_{o \in \mathcal{O}} O_{re}(o) = O_{re}(o_i) > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.9)$$

A la condición del primer caso de la ecuación anterior la llamaremos de manera abreviada *condmax*. Además, O_{re}^* es el conjunto O_{re} normalizado, es decir,

$$O_{re}^*(o_i) := \frac{O_{re}(o_i)}{\max_{o \in \mathcal{O}} O_{re}(o)}.$$

Proposición 3.4:

Dada una medida de especificidad Sp , la función rs_{Sp} (Ec. 3.9) es una medida de éxito referencial según la Definición 3.1.

Demostración: Veamos que rs_{Sp} cumple las tres propiedades que introdujimos en la Definición 3.1:

1. $rs_{Sp}(re, o_i) = 1$ sii $O_{re}(o_i) \otimes Sp(O_{re}^*) = 1$. Por las propiedades de las t-normas tenemos que esto último equivale a que $O_{re}(o_i) = 1$ y que $Sp(O_{re}^*) = 1$. Y por tanto, teniendo en cuenta las propiedades de cualquier medida de especificidad, esto equivale a que $O_{re} = \{o_i\}$, ya que la especificidad de un conjunto es 1 si, y solamente si, el conjunto es un singleton.
2. La demostración de la segunda propiedad resulta trivial, ya que la tenemos por definición de rs_{Sp} .
3. Consideremos dos expresiones de referencia re y re' tales que $O_{re}(o) \leq O_{re'}(o)$, $\forall o \in \mathcal{O} \setminus \{o_i\}$ y $O_{re}(o_i) \geq O_{re'}(o_i)$. Entonces podemos distinguir dos casos:
 - Si $O_{re'}(o_i) = 0$, o bien $\max_{o \in \mathcal{O}} O_{re'}(o) > O_{re'}(o_i) > 0$, entonces por definición tenemos que $rs_{Sp}(re', o_i) = 0 \leq rs_{Sp}(re, o_i)$.
 - Si por el contrario $\max_{o \in \mathcal{O}} O_{re'}(o) = O_{re'}(o_i) > 0$, entonces por las condiciones de la tercera propiedad tenemos que $\max_{o \in \mathcal{O}} O_{re}(o) = O_{re}(o_i) > 0$. Y ahora, por la definición de rs_{Sp} tenemos que $rs_{Sp}(re, o_i) = O_{re}(o_i) \otimes Sp(O_{re}^*)$ y $rs_{Sp}(re', o_i) = O_{re'}(o_i) \otimes Sp(O_{re'}^*)$.
Como $O_{re}^* = \frac{O_{re}(o)}{O_{re}(o_i)}$ y $O_{re'}^* = \frac{O_{re'}(o)}{O_{re'}(o_i)}$ (en particular, $O_{re}^*(o_i) = 1 = O_{re'}^*(o_i)$), entonces $O_{re}^* \subseteq O_{re'}^*$. Y como ambos conjuntos están normalizados, para cualquier medida de especificidad se tiene que $Sp(O_{re}^*) \geq Sp(O_{re'}^*)$, y como $O_{re}(o_i) \geq O_{re'}(o_i)$, por las propiedades de las t-normas tenemos que $rs_{Sp}(re, o_i) \geq rs_{Sp}(re', o_i)$.

□

A modo de ejemplo, veamos la medida de éxito referencial que obtenemos para cada uno de los miembros de la familia lineal de medidas de especificidad, así como para la familia producto, respectivamente.

$$rs_{Sp_{\bar{w}}}(re, o_i) := \begin{cases} O_{re}(o_i) \otimes (a_1 - \sum_{i=2}^n w_i a_i) & \text{si condmax,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$rs_{Sp_k}(re, o_i) := \begin{cases} O_{re}(o_i) \otimes (a_1 \prod_{i=2}^n (ka_i + (1 - a_i))) & \text{si condmax,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estos son solo dos ejemplos de las medidas de éxito referencial que podemos derivar a partir de medidas de especificidad. Es claro, y por ello en la literatura encontramos tantas propuestas alternativas de medidas de especificidad, que distintas medidas de especificidad pueden ser más o menos adecuadas para distintas aplicaciones y distintas semánticas. Así podremos tener, por ejemplo, medidas de especificidad más estrictas o menos. Como ilustración, la siguiente medida de especificidad (según la Definición 3.6) es muy estricta, ya que solo vale 1 si el conjunto es un singleton y 0 en cualquier otro caso.

$$Sp(re, o) := \begin{cases} 1 & O_{re} = \{o\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En cambio, medidas como las de la familia lineal sí que permiten mayor flexibilidad y gradualidad en la medición.

Por lo tanto, contar con un abanico amplio de medidas de especificidad es de gran utilidad para poder encontrar la más adecuada para nuestros propósitos. Además de que nos permite derivar medidas de éxito referencial con distinto comportamiento que se adapten a nuestros propósitos.

A continuación presentamos distintas aportaciones que hemos hecho al área de las medidas de especificidad, ampliando el catálogo disponible. Así como la lista de métodos o técnicas para su construcción.

3.4 OTRAS MEDIDAS DE ESPECIFICIDAD PROPUESTAS

En la literatura existen distintas propuestas de medidas de especificidad, con distintas características y semánticas. Y como hemos apuntado anteriormente, el método propuesto en la Definición 3.9 para construir medidas de éxito referencial a partir de medidas de especificidad nos puede permitir llevar estas características de la medida de especificidad correspondiente a la medida de éxito referencial derivada.

3.4.1 MEDIDAS DE ESPECIFICIDAD ACOTADAS

En esta sección vamos a estudiar condiciones de acotamiento para medidas de especificidad. Así, definiremos unos tipos particulares de medidas de especificidad que están acotadas de algún modo. Propiedad que podemos trasladar a la medida de éxito referencial que se derive a partir de una de ellas. Estas condiciones de acotamiento pueden tener importancia desde el punto de vista práctico, que como

hemos dicho es por lo que no interesa considerar un amplio catálogo de medidas de especificidad, para poder emplear la que mejor se adecue a nuestros propósitos. En concreto, estas condiciones que aquí vamos a introducir surgen pensando en los dos problemas que definimos a continuación, relacionados con el área de la Recuperación de Información.

Problema 3.2:

Consideramos un conjunto de imágenes $\{I_1, \dots, I_l\}$, cada una de las cuales contiene un conjunto de objetos $\mathcal{O}_i := \{o_1^i, \dots, o_{n_i}^i\}$. También consideramos un conjunto de propiedades graduales $\mathcal{P} := \{p_1, \dots, p_m\}$ que pueden aplicarse a los objetos de $\mathcal{O}_i, \forall i \in \{1, \dots, l\}$. Así como una expresión de referencia $re \subseteq \mathcal{P}$.

El problema consiste en encontrar el subconjunto difuso de imágenes en las que re tiene éxito referencial para algún objeto dentro de cada una de las imágenes de ese subconjunto.

Problema 3.3:

Consideramos una imagen I comprendida por un conjunto de objetos $\mathcal{O} := \{o_1, \dots, o_n\}$ con propiedades graduales $\mathcal{P} := \{p_1, \dots, p_m\}$.

El problema consiste en encontrar una expresión de referencia $re \subseteq \mathcal{P}$ que tenga éxito referencial alto para algún objeto en \mathcal{O} .

Teniendo en cuenta estos problemas, podemos definir los siguientes tipos de medidas de especificidad, las cuales son medidas de especificidad que presentan ciertas condiciones de acotamiento. Más adelante veremos cómo se relacionan estas condiciones y estas familias de medidas con los problemas que acabamos de describir.

Definición 3.10: Medida de especificidad ∞ -acotada

Una medida de especificidad Sp se dice que está ∞ -acotada si se cumple que

$$Sp(A) \leq a_1, \forall A \in \mathcal{F}(\mathcal{O}).$$

Al conjunto de todas las medidas de especificidad ∞ -acotadas lo notamos por $\mathbb{S}\mathbb{P}^\infty$.

Esta condición de acotación, aunque veremos más adelante que no se da para toda medida de especificidad, resulta natural. La especificidad mide en qué grado un conjunto difuso es un singleton. En particular, para que un conjunto sea un singleton ha de contener un elemento; por tanto, un conjunto difuso será un singleton en un grado que como mucho será el grado de pertenencia del elemento que con mayor seguridad pertenece al conjunto.

Definición 3.11: Medida de especificidad z -acotada

Dado un cierto $z \in \mathbb{N}, z > 1$, una medida de especificidad Sp se dice que está z -acotada si se cumple que

$$Sp(A) \leq a_1 - a_z, \forall A \in \mathcal{F}(\mathcal{O}).$$

Al conjunto de todas las medidas de especificidad z -acotadas lo notamos por $\mathbb{S}\mathbb{P}^z$.

En este caso la semántica que se le da a la especificidad varía con respecto a las ∞ -acotadas. Una medida de especificidad z -acotada considera que el grado en el que un conjunto es un singleton no puede ser mayor que el grado en el que el conjunto contiene al menos un elemento, y no contiene más de z . Por tanto, esta semántica es más restrictiva que la anterior. Las medidas ∞ -acotadas solo tienen en cuenta que en el conjunto haya al menos un elemento, sin importar si hay alguno más.

Se puede demostrar que

$$\mathbb{S}\mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{S}\mathbb{P}^3 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{S}\mathbb{P}^\infty.$$

En concreto podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 3.5:

Dada una función de especificidad Sp z -acotada, se tiene que

- Sp está z' -acotada, $\forall z' \geq z > 1$.
- Sp está ∞ -acotada.

Demostración: Si Sp está z -acotada con $z > 1$, entonces para cualquier $z' \geq z$ se tiene que $Sp(A) \leq a_1 - a_z \leq a_1 - a_{z'} \leq a_1$. Por lo tanto, atendiendo a la definición que hemos dado, tenemos que Sp está z' -acotada y ∞ -acotada. \square

Hemos de señalar que existen medidas de especificidad que no están siquiera ∞ -acotadas. Como un ejemplo de ello, podemos considerar la medida dada por $Sp(A) = +\sqrt{a_1} - a_2^2$. Si consideramos un conjunto difuso tal que $0 < a_1 < 1$ y con $a_2 = 0$, entonces tenemos que $Sp(A) = +\sqrt{a_1} > a_1$, con lo que la medida no cumple la condición para estar ∞ -acotada.

Ahora podemos definir el siguiente valor para una medida de especificidad acotada.

$$cota(Sp) := \begin{cases} \min\{z \mid Sp \in \mathbb{S}\mathbb{P}^z\} & \exists z \text{ t.q. } Sp \in \mathbb{S}\mathbb{P}^z, \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Así por ejemplo, tenemos que para la medida de especificidad $Sp(A) = a_1 - a_2$, $cota(Sp) = 2$, ya que justo el valor que toma es la cota correspondiente a la familia de medidas 2-acotadas. Por otro lado tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.6:

La medida de especificidad fraccional

$$Sp^f(A) := \begin{cases} \frac{a_1^2}{\sum_{i=1}^n a_i} & A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es una medida de especificidad acotada, con $cota(Sp^f) = \infty$.

Demostración: Veamos en primer lugar que esta función está ∞ -acotada: Si $A \neq \emptyset$, entonces tenemos que $a_1 \leq \sum_{i=1}^n a_i$, y por tanto tenemos que

$$a_1 / \sum_{i=1}^n a_i \leq 1,$$

con lo que

$$Sp^f(A) = a_1 \frac{a_1}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq a_1,$$

como queríamos.

Por otro lado, consideremos un conjunto difuso A tal que $A(o_i) = 0.5, \forall 1 \leq i \leq n$. Entonces, se tiene que $a_1 - a_n = 0$ y

$$Sp^f(A) = \frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i} > 0 = a_1 - a_n.$$

Por lo tanto, Sp^f no está n -acotada, y en consecuencia tampoco estará z -acotada para ningún z , con $n \geq z > 1$. \square

Una vez hemos introducido estas nuevas familias de medidas de especificidad, veamos qué aplicaciones prácticas tienen las condiciones de acotamiento que imponemos.

El Problema 3.2 puede surgir por ejemplo cuando, dentro de un repositorio de imágenes, queremos encontrar imágenes adecuadas para aprender un determinado concepto visual, como el color. En este caso, podríamos buscar imágenes en las que haya un solo objeto rojo. Entonces, pidiéndole al usuario que localice el objeto rojo en esas imágenes, podemos ayudarle a que aprenda a identificar el color rojo.

Pues bien, para el Problema 3.2 las medidas de especificidad más adecuadas son aquellas en la familia $\mathbb{S}\mathbb{P}^2$, a las cuales llamamos medidas tipo predicado. Estas medidas son las más restrictivas, puesto que cuando en una imagen hay dos objetos para los que una determinada expresión de referencia tiene el mismo grado de compatibilidad, entonces estas medidas nos dan 0.

Por otro lado, el Problema 3.3 puede surgir cuando estemos abordando una tarea muy relacionada con la anterior, como es encontrar una expresión de referencia con la que poder aprender un concepto determinado con una imagen determinada. Por ejemplo, si encontramos, para el Problema 3.3, que la expresión de referencia «el objeto grande» tiene un elevado éxito referencial para algún objeto en la imagen I , entonces podemos emplear dicha imagen para, con el mismo tipo de ejercicios que acabamos de describir, ayudar a la persona a asimilar la propiedad *grande*.

En este caso, las medidas de especificidad acotadas para las que $cota(Sp) = \infty$ son las adecuadas para abordar este problema. Estas medidas, que llamamos tipo índice, son las apropiadas, puesto que el objetivo es encontrar conjuntos de propiedades capaces de hacer referencia a algún objeto de la imagen, sin importar que el éxito referencial sea absoluto.

Atendiendo a la discusión que hemos hecho anteriormente sobre la semántica que presentan estas dos familias de medidas, vemos cómo, a partir de medidas de

especificidad de alguna de las familias que acabamos de definir, podemos obtener medidas de éxito referencial más o menos estrictas. Y por tanto, podremos escoger el nivel de rigidez para medir el éxito referencial que mejor se ajuste al objetivo de nuestro sistema.

Pero no solo es interesante analizar las medidas de especificidad por las propiedades que pueden aportar a las medidas de éxito referencial, sino que también nos van a permitir extender el concepto de éxito referencial al problema de Generación de Expresiones de Referencia Plurales, donde buscamos que el conjunto de objetos referenciado por la expresión de referencia sea un conjunto clásico de una determinada cardinalidad.

3.4.2 MEDIDAS DE k -ESPECIFICIDAD

En la sección anterior hemos presentado la definición clásica de medida de especificidad, como medidas que indican en qué grado un conjunto difuso se parece a un conjunto clásico formado exactamente por un único objeto. Sin embargo, en el problema de Generación de Expresiones Referencia Plurales buscamos una expresión de referencia que haga referencia a un cierto conjunto de objetos, el cual presentará una cardinalidad determinada.

Asimismo, hay ocasiones en las que estamos interesados en conjuntos de objetos con un cierto número de elementos. Podemos encontrar aplicaciones en las que el usuario está interesado en obtener, de una base de datos u otro repositorio de conocimiento, colecciones de objetos que cumplan una determinada restricción difusa y que tengan una determinada cardinalidad. Con esta idea en mente y teniendo en cuenta que la cardinalidad, en un ámbito difuso, no es una dimensión que podamos medir o definir de forma trivial, surge el concepto de k -especificidad [99].

A continuación, presentamos la definición de medida de k -especificidad. Esta definición modifica la que encontramos en [99], de modo que esté en mayor consonancia con la definición original de medida de especificidad, la cual es un caso particular de k -especificidad.

Definición 3.12: Medida de k -especificidad

Consideremos un $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y un cierto conjunto de objetos \mathcal{O} . Una medida de k -especificidad es una función $Sp_k : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow [0, 1]$ que cumple las siguientes condiciones, donde, para un cierto $A \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$, a_i denota al i -ésimo mayor valor de membresía de A :

1. $Sp_k(A) = 1$ si, y solamente si, $a_k = 1$ y $a_{k+1} = 0$.
2. Si $a_k = 0$ entonces $Sp_k(A) = 0$.
3. Sean dos conjuntos $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ tales que $a_i \geq b_i, \forall i \leq k$ y $a_i \leq b_i, \forall i > k$. Entonces se tiene que $Sp_k(A) \geq Sp_k(B)$.

A modo de ejemplo, se puede definir la medida fraccional de k -especificidad como sigue.

$$Sp_k^f(A) := \begin{cases} \frac{\prod_{i=0}^k a_i^2}{\prod_{i=0}^k a_i + \sum_{i=k+1}^n a_i} & a_k > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, podemos extender las nociones de medidas acotadas presentadas en la sección anterior al caso de las medidas de k -especificidad, teniendo en cuenta las mismas cuestiones semánticas que para el caso anterior.

Definición 3.13: Medida de k -especificidad ∞ -acotada

Una medida de k -especificidad Sp_k se dice que está ∞ -acotada si se cumple que

$$Sp_k(A) \leq a_k.$$

Definición 3.14: Medida de k -especificidad z -acotada

Una medida de k -especificidad Sp_k se dice que está z -acotada para un $z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $z > k$, si se cumple que

$$Sp_k(A) \leq a_k - a_z.$$

Como hemos dicho al comenzar esta sección, este tipo de medidas nos permitirán definir medidas de éxito referencial para el problema de Generación de Expresiones de Referencia Plurales. En primer lugar, al igual que hemos hecho en el caso clásico, vamos a introducir una axiomatización de las medidas de éxito referencial plural.

Definición 3.15: Medida de éxito referencial plural

Consideremos un universo de discurso compuesto por un conjunto de objetos \mathcal{O} y un conjunto de propiedades \mathcal{P} , que cada objeto puede presentar en un cierto grado. Entonces, una medida de éxito referencial plural es una función $rs : 2^{\mathcal{P}} \times 2^{\mathcal{O}} \rightarrow [0, 1]$ que cumple:

1. $rs(re, O) = 1 \iff O_{re} = O$.
2. Si $O_{re}(o) = 0$ para algún $o \in O$, entonces $rs(re, O) = 0$.
3. Si $O_{re}(o) \leq O_{re'}(o), \forall o \in \mathcal{O} \setminus O$ y además $O_{re}(o) \geq O_{re'}(o), \forall o \in O$, entonces $rs(re, O) \geq rs(re', O)$.

Entonces, de forma análoga a la idea presentada en la Definición 3.9, proponemos el siguiente mecanismo para obtener medidas de k -éxito referencial a partir de medidas de k -especificidad.

Definición 3.16: Medidas de éxito referencial plural basadas en medidas de k -especificidad

Consideremos una familia de medidas $SP := \{Sp_k\}$, donde Sp_k es una medida de k -especificidad, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, siendo $n = |\mathcal{O}|$. Entonces, se define la siguiente función $rs_{SP} : 2^{\mathcal{P}} \times 2^{\mathcal{O}} \rightarrow [0, 1]$, donde \otimes es una t-norma y $k = |\mathcal{O}|$.

$$rs_{SP}(re, O) := \begin{cases} (\bigotimes_{o \in O} O_{re}(o)) \otimes Sp_k(O_{re}^*) & \text{si } condmax, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.11)$$

donde O_{re}^* , en este caso, se define como

$$O_{re}^*(o) := \min\left(\frac{O_{re}(o)}{O_{re}(o_k)}, 1\right),$$

siendo o_k es el objeto con el k -ésimo mayor valor de membresía.

Por otro lado, en este caso, la condición *condmax* vendría definida como: los k grados de membresía más grandes de O_{re} coinciden con los correspondientes a los objetos de O , y además $O_{re}(o_i) > 0, \forall o_i \in O$.

Queremos notar que, aunque en la definición anterior hemos empleado la misma t-norma \otimes en ambos casos, la propuesta puede flexibilizarse sin más que permitir emplear una t-norma distinta en cada uno de los casos en los que se aplica \otimes .

Proposición 3.7:

Dada una familia de medidas $SP := \{Sp_k\}$, donde Sp_k es una medida de k -especificidad, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, siendo $n = |\mathcal{O}|$, la función rs_{SP} (Ec. 3.11) es una medida de éxito referencial plural según la Definición 3.15.

Demostración: Veamos que rs_{SP} cumple las tres propiedades que introdujimos en la Definición 3.15:

1. $rs_{SP}(re, O) = 1$ sii $\bigotimes (\bigotimes_{o \in O} O_{re}(o), Sp_k(O_{re}^*)) = 1$. Por las propiedades de las t-normas tenemos que esto último equivale a que $\bigotimes_{o \in O} O_{re}(o) = 1$ y que $Sp_k(O_{re}^*) = 1$. Y por tanto, teniendo en cuenta las propiedades de cualquier medida de k -especificidad, esto equivale a que $O_{re} = O$, ya que la k -especificidad de un conjunto es 1 si, y solamente si, el conjunto es un conjunto clásico con k elementos.
2. La demostración de la segunda propiedad resulta trivial, ya que la tenemos por definición de rs_{SP} .
3. Consideremos dos expresiones de referencia re y re' tales que $O_{re}(o) \leq O_{re'}(o)$, $\forall o \in \mathcal{O} \setminus O$ y $O_{re}(o) \geq O_{re'}(o)$, $\forall o \in O$. Entonces podemos distinguir dos casos:
 - Si $O_{re'}(o) = 0$ para algún $o \in O$, o bien $\exists o_i \in \mathcal{O}, o_j \in O$ tales que $O_{re'}(o_i) > O_{re'}(o_j) > 0$, entonces por definición tenemos que $rs_{Sp}(re', o_i) = 0 \leq rs_{Sp}(re, o_i)$.
 - Si por el contrario se da *condmax* para $O_{re'}$, entonces por las condiciones de la tercera propiedad tenemos que también se da para O_{re} . Y ahora, por la definición de rs_{SP} tenemos que $rs_{SP}(re, O) = \bigotimes (\bigotimes_{o \in O} O_{re}(o), Sp_k(O_{re}^*))$ y $rs_{SP}(re', O) = \bigotimes (\bigotimes_{o \in O} O_{re'}(o), Sp_k(O_{re'}^*))$.

Como $O_{re}^* = \frac{O_{re}(o)}{O_{re}(o_k)}$ y $O_{re'}^* = \frac{O_{re'}(o)}{O_{re'}(o_k)}$, para algún $o_k \in O$ (en particular, $O_{re}^*(o) = 1 = O_{re'}^*(o), \forall o \in O$), entonces $O_{re}^* \subseteq O_{re'}^*$. Y como ambos conjuntos están normalizados, para cualquier medida de k -especificidad se tiene que $Sp_k(O_{re}^*) \geq Sp_k(O_{re'}^*)$, y como $\bigotimes_{o \in O} O_{re}(o) \geq \bigotimes_{o \in O} O_{re'}(o)$, por las propiedades de las t-normas tenemos que $rs_{SP}(re, O) \geq rs_{SP}(re', O)$.

□

Con lo que, como podemos ver, a partir de medidas de k -especificidad podemos derivar medidas de éxito referencial plural. Ponemos así de manifiesto, nuevamente, la importancia que tiene estudiar distintos tipos de medidas de especificidad y ampliar el catálogo de medidas disponibles.

A continuación, para completar el estudio de la relación entre el éxito referencial y la especificidad, vamos a presentar el camino inverso al que presentamos en la Sección 3.3, definiendo medidas de especificidad a partir de medidas de éxito referencial.

3.4.3 MEDIDAS DE ESPECIFICIDAD BASADAS EN MEDIDAS DE ÉXITO REFERENCIAL

Del mismo modo que en la Definición 3.9 hemos visto cómo podemos construir medidas de éxito referencial a partir de medidas de especificidad, en esta sección proponemos un método para construir medidas de especificidad a partir de medidas de éxito referencial.

El éxito referencial mide, en cierta forma, en qué grado el conjunto de objetos O_{re} al que hace referencia una expresión de referencia determinada está compuesto por un solo objeto, aquel para el que se mide el éxito referencial de la expresión. Por lo tanto, de algún modo, estamos midiendo en qué grado el conjunto O_{re} es un *singleton*. Con esta idea podemos dar la siguiente definición.

Definición 3.17: Medidas de especificidad basadas en medidas de éxito referencial

Sea rs una medida de éxito referencial. Para un cierto $A \in \mathcal{F}(O)$, si $\max_{o \in O} A(o) = A(o_i)$, podemos definir la siguiente medida de especificidad

$$SP(rs)(A) := \max_{o \in O} rs(\{A\}, o) = rs(\{A\}, o_i). \quad (3.12)$$

Donde en $\{A\}$ estamos entendiendo A como la propiedad difusa que se define con la función de membresía μ_A , y, por tanto, estamos considerando la expresión de referencia formada únicamente por esa propiedad difusa A .

Como muestra de este procedimiento, podemos considerar la medida de éxito referencial propuesta en [92]

$$rs_{(\otimes, \neg)}(re, o_i) := O_{re}(o_i) \otimes \left(\bigotimes_{o_j \in O \wedge j \neq i} \neg(O_{re}(o_j)) \right),$$

donde \otimes es una t-norma y \neg es una negación difusa. Entonces, a partir de esta familia de medidas de éxito referencial obtenemos la siguiente familia de medidas de especificidad.

$$Sp_{(\otimes, \neg)}(A) = SP(rs_{(\otimes, \neg)})(A) := \max_{o \in \mathcal{O}} \left(A(o) \otimes \left(\bigotimes_{o \neq o_j \in \mathcal{O}} \neg(A(o_j)) \right) \right).$$

Y podemos ver que si consideramos \otimes siendo la t-norma producto y \neg la negación estándar, obtenemos la medida de especificidad producto Sp_k con $k = 0$. Pero teniendo en cuenta que existen infinitas t-normas, al igual que infinitas negaciones difusas, con este ejemplo ponemos de manifiesto cómo este método nos permite ampliar el conjunto de medidas de especificidad disponibles.

Por último, para finalizar esta exploración sobre el conjunto de medidas de especificidad disponibles, vamos a presentar un segundo método para construir nuevas medidas de especificidad. En este caso, emplearemos medidas de similitud entre conjuntos difusos para derivar nuevas medidas de especificidad. Esto nos permitirá ampliar el catálogo de medidas de especificidad disponibles, que pueden ser utilizadas en diversas aplicaciones, no solo en el campo de las medidas de éxito referencial que aquí nos ocupa, sino también en otros campos como por ejemplo la Recuperación de Información.

3.4.4 MEDIDAS DE ESPECIFICIDAD BASADAS EN MEDIDAS DE SIMILITUD

Ya hemos visto que las medidas de especificidad miden en qué grado un conjunto difuso se parece a un conjunto clásico compuesto por un solo elemento, un singleton. Por tanto, tiene sentido medir la especificidad en términos de cuán parecido es el conjunto difuso al singleton más cercano, en la misma línea que [218], donde se propone una medida de especificidad como el complemento de una distancia normalizada entre el conjunto difuso y su singleton más cercano.

La propuesta que presentamos en esta sección es más general, puesto que empleamos para ello una medida de similitud entre conjuntos difusos cualesquiera. Así, en primer lugar, vamos a introducir el concepto de medida de similitud.

Al igual que ocurre para las medidas de especificidad, en la literatura podemos encontrar diversas definiciones del concepto de medida de similitud.

Definición 3.18: Medida de similitud [132]

Una función $\mathfrak{S} : \mathcal{F}(\mathcal{O})^2 \rightarrow [0, 1]$ es una medida de similitud si verifica los siguientes axiomas $\forall A, B, C \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$:

1. $0 \leq \mathfrak{S}(A, B) \leq 1$.
2. $\mathfrak{S}(A, B) = \mathfrak{S}(B, A)$.
3. Si $A = B$ entonces $\mathfrak{S}(A, B) = 1$.
4. Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $\mathfrak{S}(A, C) \leq \mathfrak{S}(A, B)$ y $\mathfrak{S}(A, C) \leq \mathfrak{S}(B, C)$.

Si particularizamos la definición de medida de similitud que se da en [22] para conjuntos difusos intervalo-valuados obtenemos la siguiente definición.

Definición 3.19: Medida de similitud

Una función $\mathfrak{S} : \mathcal{F}(\mathcal{O})^2 \rightarrow [0, 1]$ es una medida de similitud si verifica los siguientes axiomas $\forall A, B, C \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$:

1. $0 \leq \mathfrak{S}(A, B) \leq 1$.
2. $\mathfrak{S}(A, B) = \mathfrak{S}(B, A)$.
3. $\mathfrak{S}(A, \bar{A}) = 0, \forall A \in 2^{\mathcal{O}}$.
4. $\mathfrak{S}(A, A) = 1$.
5. Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $\mathfrak{S}(A, C) \leq \mathfrak{S}(A, B)$ y $\mathfrak{S}(A, C) \leq \mathfrak{S}(B, C)$.

Definición 3.20: Medida de similitud [155]

Una función $\mathfrak{S} : \mathcal{F}(\mathcal{O})^2 \rightarrow [0, 1]$ es una medida de similitud si verifica los siguientes axiomas $\forall A, B, C \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$:

1. $0 \leq \mathfrak{S}(A, B) \leq 1$.
2. $\mathfrak{S}(A, B) = \mathfrak{S}(B, A)$.
3. Dados $A \neq \emptyset \neq B$, si $\mathfrak{S}(A, B) = 0$ entonces $A \cap B = \emptyset$.
4. $\mathfrak{S}(A, B) = 1 \iff A = B$.
5. Si se da que $A \supseteq B \supseteq C$ o $A \subseteq B \subseteq C$ entonces $\mathfrak{S}(A, C) \leq \min(\mathfrak{S}(A, B), \mathfrak{S}(B, C))$.

Definición 3.21: Medida de similitud [227, 228]

Una función $\mathfrak{S} : \mathcal{F}(\mathcal{O})^2 \rightarrow [0, 1]$ es una medida de similitud si verifica los siguientes axiomas $\forall A, B, C \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$:

1. $0 \leq \mathfrak{S}(A, B) \leq 1$.
2. $\mathfrak{S}(A, B) = \mathfrak{S}(B, A)$.
3. $\mathfrak{S}(A, \bar{A}) = 0, \forall A \in 2^{\mathcal{O}}$.
4. $\mathfrak{S}(A, B) = 1 \iff A = B$.
5. Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $\mathfrak{S}(A, C) \leq \mathfrak{S}(A, B)$ y $\mathfrak{S}(A, C) \leq \mathfrak{S}(B, C)$.

Como vemos, distintas definiciones del concepto de medida de similitud se corresponden con distintas axiomáticas. Como veremos, dependiendo de la axiomática que cumpla la medida de similitud empleada, la medida de especificidad derivada siguiendo el proceso que vamos a presentar a continuación presentará unas propiedades u otras.

Definición 3.22: Medidas de especificidad basadas en medidas de similitud

Dado un cierto $A \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ con $\|\mathcal{O}\| = n$, definimos $A^\downarrow \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ tal que $A^\downarrow(o_i) := a_i$, donde $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ son los grados de membresía de A en orden decreciente.

Entonces, dada una medida de similitud, \mathfrak{S} , definimos la siguiente medida de especificidad $Sp_{\mathfrak{S}} : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \rightarrow [0, 1]$ como:

$$Sp_{\mathfrak{S}}(A) := \begin{cases} 0 & A = \emptyset, \\ \mathfrak{S}(A^\downarrow, \{o_1\}) & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.13)$$

A continuación vamos a introducir unos resultados en los cuáles mostramos cómo, dependiendo del conjunto de propiedades que verifique la medida de similitud escogida, siguiendo el mecanismo propuesto en la Ecuación 3.13, obtenemos una medida de especificidad siguiendo una de las tres Definiciones 3.6, 3.7 o 3.8.

Para ello vamos a introducir unos conjuntos de axiomas que se recogen en [44], donde se realiza un estudio formal comparativo de distintas definiciones axiomáticas de medidas de similitud. En este trabajo se recopilan axiomas como los que encontramos en las Tablas 3.3 y 3.4, que pueden ser deseables para medidas de comparación generales entre conjuntos difusos y para medidas de similitud en particular, respectivamente. En estas tablas, si un axioma tiene un asterisco en su identificador, significa que es más estricto que su homónimo.

G1	$0 \leq m(A, B) \leq 1, \forall A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O}).$
G1*	$0 \leq m(A, B) \leq 1, \forall A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ y existe un par de conjuntos difusos $C, D \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ tales que $m(C, D) = 1.$
G2	$m(A, B) = m(B, A), \forall A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O}).$

Tabla 3.3: Algunos axiomas que pueden ser deseables para cualquier medida de comparación entre conjuntos difusos m [44].

A la luz de estos conjuntos de axiomas, aunque podemos encontrar más en [44], podemos resumir las propiedades o la axiomática de cada una de las definiciones de medida de similitud que hemos visto anteriormente en la Tabla 3.5.

Entonces, vamos a ver bajo qué condiciones, una medida de similitud, según alguna de las cuatro definiciones que hemos introducido anteriormente, nos permite derivar una medida de especificidad según alguna de las tres definiciones que hemos visto en la Sección 3.3.1. Para ello vamos a considerar la notación de la Tabla 3.6 para referirnos a los distintos axiomas que encontramos en las Definiciones 3.6, 3.7 y 3.8.

Entonces, vamos a establecer una correspondencia entre estos axiomas propios de medidas de especificidad y algunos axiomas propios de medidas de similitud o de comparación entre conjuntos difusos. Para ello, vamos a ver distintos resultados, que luego nos permitirán establecer unos conjuntos de condiciones suficientes para obtener, a partir de una medida de similitud, nuevas medidas de especificidad.

Proposición 3.8:

Si \mathfrak{S} cumple G1* y S4*, entonces $Sp_{\mathfrak{S}}$ cumple \mathbb{A} .

S1	$\forall A, B, C \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$, si $A \subseteq B \subseteq C$ y $\max_{o \in \mathcal{O}} A(o) = \max_{o \in \mathcal{O}} B(o)$, entonces $\mathfrak{S}(A, C) \leq \mathfrak{S}(A, B)$.
S1*	$\forall A, B, C \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$, si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $\mathfrak{S}(A, C) \leq \mathfrak{S}(A, B)$.
S2	$\forall A, B, C \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$, si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $\mathfrak{S}(A, C) \leq \mathfrak{S}(B, C)$.
S2*	Si $A, B, C \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ se cumple que <ul style="list-style-type: none"> · $A(o_0) < B(o_0) \leq C(o_0)$, para algún $o_0 \in \mathcal{O}$, y · $B(o) = A(o), \forall o \in \mathcal{O}, o \neq o_0$, entonces $\mathfrak{S}(A, C) < \mathfrak{S}(B, C)$.
S3	$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{O}), \mathfrak{S}(A, \bar{A}) = 0$.
S4	$\mathfrak{S}(C, C) = \max_{A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})} \mathfrak{S}(A, B), \forall C \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$.
S4*	$C = D \iff \mathfrak{S}(C, D) = \max_{A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})} \mathfrak{S}(A, B)$.
S5	$\mathfrak{S}(A, B) = 0 \implies A \cap B = \emptyset$.
S7	Para $A, B, C, D \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ tales que $A \cap B \subseteq C \cap D, A \setminus B \supseteq C \setminus D$, y $B \setminus A \supseteq D \setminus C$ se tiene que $\mathfrak{S}(A, B) \leq \mathfrak{S}(C, D)$.

Tabla 3.4: Algunos axiomas que pueden ser deseables para cualquier medida de similitud entre conjuntos difusos \mathfrak{S} [44].

Def. 3.18	$G1^*, G2, S1^*, S2$ y $S4$
Def. 3.19	$G1^*, G2, S1^*, S2, S3$ y $S4$
Def. 3.20	$G1^*, G2, S1^*, S2, S4^*$ y $S5$
Def. 3.21	$G1^*, G2, S1^*, S2, S3$ y $S4^*$

Tabla 3.5: Axiomática que se da en cada una de las definiciones de medida de similitud que hemos introducido antes, vista según los conjuntos de axiomas de [44].

A	$Sp(A) = 1$ si, y solamente si, $A = \{o\}$ para algún $o \in \mathcal{O}$.
B	$Sp(\emptyset) = 0$.
c	Dados $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ conjuntos normales tales que $A \subseteq B$, entonces $Sp(A) \geq Sp(B)$.
C	Dados $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ tales que $a_1 \geq b_1$ y $a_i \leq b_i, \forall i \geq 2$, donde a_i y b_i se corresponden con los grados de membresía de A y B en orden decreciente. Entonces $Sp(A) \geq Sp(B)$.
C^\uparrow	$Sp(A)$ es estrictamente creciente con respecto a a_1 .
C^\downarrow	$Sp(A)$ es decreciente con respecto a $a_i, \forall i \geq 2$.

Tabla 3.6: Axiomas que podemos exigir a una medida de especificidad. Los dos primeros axiomas son comunes a las tres definiciones de especificidad que hemos visto. Y el resto de axiomas se corresponden, en orden, a los axiomas de monotonía presentes en cada una de las tres definiciones que hemos visto, de menos a más estrictas.

Demostración:

$$\begin{aligned} \Rightarrow A = \{o\} \subseteq \mathcal{O} &\implies a_1 = 1, a_i = 0, \forall i \geq 2 \xRightarrow{\text{Def. 3.22}} A^\downarrow = \{o_1\} = S \xRightarrow{\text{Ec. 3.13}} \\ Sp_{\mathfrak{E}}(A) = \mathfrak{E}(S, S) &= \max_{S_4^*} \max_{A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})} \mathfrak{E}(A, B) \stackrel{G_1^*}{=} 1. \\ \Leftarrow Sp_{\mathfrak{E}}(A) = 1 &\xRightarrow{\text{Ec. 3.13}} \mathfrak{E}(A^\downarrow, S) = 1 \stackrel{G_1^*}{=} \max_{S_4^*} \max_{A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})} \mathfrak{E}(A, B) \xRightarrow{S_4^*} A^\downarrow = S \\ &\xRightarrow{\text{Def. 3.22}} A = \{o\} \subseteq \mathcal{O}. \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado se tiene de forma trivial por cómo definimos las medidas de especificidad derivadas a partir de medidas de similitud.

Proposición 3.9:

$Sp_{\mathfrak{E}}$ cumple \mathbb{B} para cualquier medida de similitud \mathfrak{E} .

Proposición 3.10:

Si \mathfrak{E} cumple G_2 y S_1 , entonces $Sp_{\mathfrak{E}}$ cumple c .

Demostración: Si $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ son dos conjuntos normales, tales que $A \subseteq B$, entonces se tiene que $a_i \leq b_i \forall i$, con $a_1 = b_1 = 1$. Por lo tanto, $S = \{o_1\} \subseteq A^\downarrow \subseteq B^\downarrow$. Y además, $\max_{o \in \mathcal{O}} S(o) = \max_{o \in \mathcal{O}} A^\downarrow(o) = 1 \xRightarrow{S_1} \mathfrak{E}(S, B^\downarrow) \leq \mathfrak{E}(S, A^\downarrow) \xRightarrow{G_2} \mathfrak{E}(B^\downarrow, S) \leq \mathfrak{E}(A^\downarrow, S) \xRightarrow{\text{Ec. 3.13}} Sp_{\mathfrak{E}}(B) \leq Sp_{\mathfrak{E}}(A)$. □

En las siguientes demostraciones vamos a utilizar unos conjuntos difusos que se introducen en [18], y que se definen como siguen, dado un cierto $A \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ cualquiera y $\varepsilon > 0$:

$$A_i^\varepsilon(o_j) := \begin{cases} A(o_j) & j \neq i, \\ \min(1, A(o_j) + \varepsilon) & j = i. \end{cases} \quad (3.14)$$

Proposición 3.11:

Si \mathfrak{E} cumple S_2^* , entonces $Sp_{\mathfrak{E}}$ cumple C^\uparrow .

Demostración: Sea $A \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$, con $A(o_i) = a_1 < 1$ y A_i^ε para algún $\varepsilon > 0$. Entonces, $a_j = A^\downarrow(o_j) = A_i^{\varepsilon \downarrow}(o_j) = a_j^\varepsilon, \forall j \geq 2$ y $a_1 = A^\downarrow(o_1) < A_i^{\varepsilon \downarrow}(o_1) = a_1^\varepsilon = \min(1, a_1 + \varepsilon) \leq 1 = S(o_1) \xRightarrow{S_2^*} \mathfrak{E}(A^\downarrow, S) < \mathfrak{E}(A_i^{\varepsilon \downarrow}, S) \xRightarrow{\text{Ec. 3.13}} Sp_{\mathfrak{E}}(A) < Sp_{\mathfrak{E}}(A_i^\varepsilon)$, con lo que $Sp_{\mathfrak{E}}$ es estrictamente creciente con respecto a a_1 . □

Proposición 3.12:

Si \mathfrak{E} cumple S_7 , entonces $Sp_{\mathfrak{E}}$ cumple C^\downarrow .

Demostración: Sea $\emptyset \neq A \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$, con $|\mathcal{O}| > 1$, y tal que $A(o_i) = a_j < a_1$, para algún $j \geq 2$, y sea A_i^ε para algún $0 < \varepsilon \leq a_1 - a_j$, es decir, $a_j < a_j + \varepsilon \leq a_1$ (para cumplir la precondición del axioma C^\downarrow). Entonces, tenemos que $A_i^{\varepsilon \downarrow}(o_k) = A^\downarrow(o_k)$,

$\forall k > j$ y también para $k = 1$, y $A_i^{\varepsilon \downarrow}(o_k) \geq A^\downarrow(o_k)$, $\forall 1 < k \leq j$. Por lo tanto, considerando cualesquiera operaciones de intersección y diferencia de conjuntos difusos, se tiene que $A_i^{\varepsilon \downarrow} \cap \{o_1\} = A^\downarrow \cap \{o_1\}$, $A_i^{\varepsilon \downarrow} \setminus \{o_1\} \supseteq A^\downarrow \setminus \{o_1\}$ y $\{o_1\} \setminus A_i^{\varepsilon \downarrow} = \{o_1\} \setminus A^\downarrow \xRightarrow{S_7} \mathfrak{C}(A_i^{\varepsilon \downarrow}, \{o_1\}) \leq \mathfrak{C}(A^\downarrow, \{o_1\}) \xRightarrow{\text{Ec. 3.13}} Sp_{\mathfrak{C}}(A_i^{\varepsilon}) \leq Sp_{\mathfrak{C}}(A)$, por lo tanto $Sp_{\mathfrak{C}}$ es decreciente con respecto a $a_j = A(o_j)$. \square

A partir de estos resultados, podemos obtener distintos conjuntos de axiomas, que serán condiciones suficientes para que a partir del método propuesto en la Ecuación 3.13 obtengamos una medida de especificidad según alguna de las axiomáticas que hemos definido previamente. En concreto:

Teorema 3.1:

Si \mathfrak{C} cumple $G1^*$, $G2$, $S4^*$ y $S1$, entonces $Sp_{\mathfrak{C}}$ es una medida de especificidad según la Definición 3.6.

Corolario 3.1:

Las medidas de similitud que cumplen la axiomática de la Definición 3.20 o de la Definición 3.21 nos permiten derivar medidas de especificidad según la Definición 3.6 empleando el método definido en la Definición 3.22.

Teorema 3.2:

Si \mathfrak{C} cumple $G1^*$, $S4^*$, $S2^*$ y $S7$, entonces $Sp_{\mathfrak{C}}$ es una medida de especificidad según la Definición 3.8 y, por lo tanto, también según las Definiciones 3.7 y 3.6.

A modo de ejemplo, podemos considerar la siguiente medida de similitud que podemos obtener a partir de la propuesta en [203].

$$\mathfrak{C}_{Tversky}(A, B) := \theta \|A \cap B\| - \alpha \|A \setminus B\| - \beta \|B \setminus A\|, \alpha, \beta, \theta > 0.$$

Entonces, obtenemos la siguiente medida de especificidad que pertenece a la familia de medidas de especificidad lineales.

$$Sp_{\mathfrak{C}_{Tversky}}(A) := a_1 - \frac{1}{n-1} \sum_{i \geq 2} a_i.$$

Por otro lado, en [227] se presentan diversas medidas de similitud basadas en medidas de entropía. Así, si consideramos la medida de entropía

$$E_1(A) := 1 - \frac{1}{n} \sum_{o \in \mathcal{O}} \|2A(o) - 1\|,$$

y consideramos el conjunto difuso que se define como sigue para dos $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$

$$f(A, B)(o) := \frac{1 + \|A(o) - B(o)\|}{2},$$

entonces, se define la medida de similitud $\mathfrak{C}_{E_1}^f(A, B) := E_1(f(A, B))$. Siguiendo el método anteriormente presentado, construimos la siguiente medida de especificidad que, hasta donde nosotros sabemos, no se ha presentado anteriormente en la literatura.

$$Sp_{\mathcal{E}_{E_1}}^f(A) := \mathcal{E}_{E_1}^f(A^\downarrow, \{o_1\}) = \frac{a_1 + \sum_{i \geq 2} (1 - a_i)}{n}.$$

Con lo que, como podemos ver, este método nos permite encontrar nuevas medidas de especificidad que puedan ser más adecuadas para nuestros propósitos.

Con esto finalizamos el repaso a distintos resultados novedosos en el campo de las medidas de especificidad que nos permiten ampliar, tanto el catálogo de medidas de especificidad disponibles, como la familia de medidas de éxito referencial que podemos emplear en nuestros sistemas de Generación de Expresiones de Referencia, lo que, como ya hemos mencionado, es de especial relevancia dentro del campo de GER.

A continuación vamos a ver cómo tratar otro tipo de información en el problema de Generación de Expresiones de Referencia. Esta información proviene de la incertidumbre que tenemos acerca del conocimiento que poseemos sobre el universo de discurso. Y es que hasta ahora, la gradualidad que hemos manejado provenía de la vaguedad propia de las propiedades o términos lingüísticos que empleamos en el lenguaje natural. En la siguiente sección vamos a ver cómo manejar otro tipo de gradualidad, la cual procede de la incertidumbre que poseemos sobre un universo determinado.

3.5 INCERTIDUMBRE DENTRO DE LA GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA

En la comunicación natural podemos encontrar distintos tipos de vaguedad o de información gradual. Así, en las secciones anteriores hemos tratado un tipo particular de vaguedad, la inherente a las propiedades que presentan los objetos.

Pero en nuestra comunicación diaria a menudo tenemos que manejar otro tipo de vaguedad, y es la que proviene de nuestra falta de conocimiento o información acerca del objeto que estamos describiendo. En esta sección proponemos una forma de tratar este tipo de incertidumbre a través de la Teoría de Conjuntos Difusos.

Supongamos entonces que un emisor quiere hacer referencia a un estudiante. De este estudiante solo conoce el color de su jersey y su nacionalidad, la cual ha inferido a través del idioma que este estudiante habla. Así, podríamos tener un problema de Generación de Expresiones de Referencia clásico como planteamos en el Problema 2.1, donde $\mathcal{P} := \{\text{rojo, azul, verde, británico, chino, alemán, neerlandés}\}$.

En este caso, la información que conoce el emisor sobre cada uno de estos estudiantes vendría dada por la Tabla 3.7, donde los estudiantes a describir vienen representados por el conjunto $\mathcal{O} := \{a, b, c, d, e\}$.

Con este tipo de información resolveríamos el problema de Generación de Expresiones de Referencia como hemos visto en las secciones anteriores. Sin embargo, hay ocasiones en las que se presenta incertidumbre debida a la falta de conocimiento de los integrantes de la conversación o dudas de los mismos. Así por ejemplo, para este caso que acabamos de presentar, podemos pensar que el emisor sabe que el receptor, al cual le está describiendo el estudiante, tiene dificultades para distinguir los colores azul y morado. Por tanto, desde la perspectiva del receptor, el jersey

estudiante	propiedades
<i>a</i>	{verde, británico}
<i>b</i>	{azul, chino}
<i>c</i>	{verde, alemán}
<i>d</i>	{rojo, neerlandés}
<i>e</i>	{rojo, alemán}

Tabla 3.7: Información para el problema de GER clásico en el ejemplo de los estudiantes.

del estudiante *b* puede ser morado o azul. Del mismo modo, quizás el emisor no sea capaz de dilucidar si una persona es americana o británica por su acento, o si un estudiante es alemán o neerlandés, pues no conoce suficientemente bien los dos idiomas.

En estos casos, además de tener, para cada estudiante, el conjunto de propiedades que sabemos que cumple, podemos tener representadas estas dudas dentro de dicho conjunto. Así, representaremos estas dudas u opciones posibles como conjuntos de propiedades entendidas en un sentido disyuntivo; sabemos que el objeto presenta alguna de las propiedades de ese conjunto, pero no estamos seguros de cuál. Pasaríamos entonces a tener la información de la Tabla 3.8.

estudiante	propiedades
<i>a</i>	{{verde}, {británico, americano}}
<i>b</i>	{{azul, morado}, {chino}}
<i>c</i>	{{verde}, {neerlandés, alemán}}
<i>d</i>	{{rojo}, {neerlandés}}
<i>e</i>	{{rojo}, {alemán}}

Tabla 3.8: Información para el problema de GER en el que introducimos incertidumbre.

Por lo tanto, en este caso la información que tenemos de un objeto, en lugar de ser simplemente un subconjunto de propiedades de \mathcal{P} , es un conjunto compuesto de subconjuntos de propiedades. Y cada uno de estos subconjuntos está formado por aquellas propiedades entre las cuales tenemos algún tipo de duda; sabemos que el objeto presenta una de las propiedades de ese conjunto, pero no sabemos cuál. Así, para un cierto $o \in \mathcal{O}$ tenemos que la información que tenemos sobre sus propiedades tiene la siguiente forma.

$$P(o) = \{S_1, \dots, S_k\} \subset 2^{\mathcal{P}} \setminus \emptyset$$

Además, para evitar redundancias en la representación del conocimiento disponible para un determinado objeto, al conjunto anterior le imponemos que $S_i \not\subseteq S_j$ para cualesquiera $i \neq j$.

Veamos, entonces, cómo podemos tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia cuando tenemos este tipo de incertidumbre sobre las propiedades que poseen los objetos del universo de discurso en el que nos encontramos.

Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que, cuando tenemos incertidumbre sobre las propiedades que presentan cada uno de los objetos en el universo en el que nos encontramos, entonces, dada una expresión de referencia, también tendremos incertidumbre sobre a qué objetos hace referencia esa expresión.

Por lo tanto, dado un cierto conjunto de propiedades $S \subseteq \mathcal{P}$ definimos los siguientes conjuntos de objetos:

$$\llbracket S \rrbracket^{\Pi} := \{o \in \mathcal{O} \mid \exists S' \in P(o) : S' \cap S \neq \emptyset\} \quad (3.15)$$

$$\llbracket S \rrbracket^N := \{o \in \mathcal{O} \mid \exists S' \in P(o) : S' \subset S\} \quad (3.16)$$

El conjunto $\llbracket S \rrbracket^{\Pi}$ es el conjunto de aquellos objetos que posiblemente presenten alguna de las propiedades contenidas en S . Aunque podría ser que no, puesto que, según la información que tenemos sobre dichos objetos, podrían presentar realmente una propiedad del conjunto S' que no estuviese en el conjunto de propiedades S .

Por otro lado, el conjunto $\llbracket S \rrbracket^N$ está compuesto por los objetos que necesariamente presentan alguna de las propiedades contenidas en S , puesto que tenemos un cierto conjunto de propiedades de entre las cuales sabemos que el objeto presenta una de ellas y todas estas propiedades están contenidas en S . Por lo tanto, es claro que $\llbracket S \rrbracket^N \subseteq \llbracket S \rrbracket^{\Pi}$.

Por ejemplo, para el caso presentado en la Tabla 3.8, tenemos que si $S = \{\text{neerlandés}\}$, entonces $\llbracket S \rrbracket^{\Pi} = \{c, d\}$, mientras que $\llbracket S \rrbracket^N = \{d\}$.

Entonces, cuando consideramos una cierta expresión de referencia en la cual incluimos incertidumbre, podemos definir, como hicimos en el caso clásico, el conjunto O_{re} . Aunque en este caso tendremos dos subconjuntos: el conjunto de objetos que la expresión refiere posiblemente y los que refiere necesariamente.

Definición 3.23: Referentes posibles y necesarios para una expresión de referencia con incertidumbre

Consideremos un cierto universo de discurso compuesto por un conjunto de objetos \mathcal{O} y un conjunto de propiedades \mathcal{P} , que los objetos pueden presentar o no. Entonces, dada una cierta expresión de referencia $re \subset 2^{\mathcal{P}} \setminus \emptyset$, se definen los siguientes conjuntos de objetos.

$$O_{re}^{\Pi} := \bigcap_{S \in re} \llbracket S \rrbracket^{\Pi}, \quad (3.17)$$

$$O_{re}^N := \bigcap_{S \in re} \llbracket S \rrbracket^N. \quad (3.18)$$

Diremos entonces que una expresión de referencia tiene éxito referencial para un cierto objeto, $o \in \mathcal{O}$, si se da que $O_{re}^{\Pi} = O_{re}^N = \{o\}$. La expresión de referencia

tendrá éxito referencial para el objeto cuando este objeto necesariamente cumpla la descripción dada, es decir, no pueda presentar alguna propiedad que no hemos contemplado en la expresión de referencia. Y además, se ha de dar que no haya algún distractor que pueda encajar con dicha descripción.

Así, para el ejemplo que hemos visto tenemos los conjuntos de referentes necesarios y posibles para diferentes expresiones de referencia que recogemos en la Tabla 3.9.

<i>re</i>	O_{re}^{Π}	O_{re}^N
{{neerlandés}}	{c, d}	{d}
{{alemán}}	{c, e}	{e}
{{neerlandés, alemán}}	{c, d, e}	{c, d, e}
{{verde}, {neerlandés}}	{c}	\emptyset
{{verde}, {alemán}}	{c}	\emptyset
{{verde}, {neerlandés, alemán}}	{c}	{c}
{{azul}}	{b}	\emptyset
{{morado}}	{b}	\emptyset
{{azul, morado}}	{b}	{b}

Tabla 3.9: Referentes posibles y necesarios para distintas expresiones de referencia en el escenario de la Tabla 3.8.

Los términos «posible» y «necesario» que estamos empleando en este trabajo provienen de la Teoría de la Posibilidad [62, 66]. En lo que hemos presentado anteriormente estábamos manejando incertidumbre sobre propiedades crisp. Pero como hemos visto en el desarrollo previo, para abordar el problema de Generación de Expresiones de Referencia en un contexto real, necesitamos manejar propiedades graduales. Por lo tanto, hemos de extender los desarrollos anteriores sobre manejo de incertidumbre en el GER al manejo de la incertidumbre sobre propiedades graduales.

Así las cosas, la información que manejamos para cada uno de los objetos del universo de discurso en el que estamos trabajando tendrá la forma

$$P(o) = \{\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_k\} \subset \mathcal{F}(\mathcal{P}) \setminus \emptyset.$$

Aquí, cada uno de los conjuntos difusos, \tilde{S}_i , que manejamos puede verse como la distribución de posibilidad que representa una parte de la incertidumbre que manejamos para el objeto. Por ejemplo, podemos considerar la información de la Tabla 3.10 en la que representamos la información del estudiante acerca de los estudiantes que componen el universo de discurso que hemos descrito. Así podemos representar en qué grado el estudiante cree que otro estudiante es americano y en qué grado cree que es británico.

Entonces, dado un cierto conjunto difuso de propiedades, \tilde{S} , podemos extender los conjuntos de objetos que hemos presentado en las Ecuaciones 3.15 y 3.16 a conjuntos difusos definidos sobre \mathcal{O} como sigue.

estudiante	$P(o)$
a	$\{1.0/\text{verde}, 0.6/\text{americano} + 1.0/\text{británico}\}$
b	$\{1.0/\text{azul} + 1.0/\text{morado}, 1.0/\text{chino}\}$
c	$\{1.0/\text{verde}, 0.7/\text{neerlandés} + 1.0/\text{alemán}\}$
d	$\{1.0/\text{rojo}, 1.0/\text{neerlandés}\}$
e	$\{1.0/\text{rojo}, 1.0/\text{alemán}\}$

Tabla 3.10: Incertidumbre con gradualidad para el ejemplo que estamos presentando.

$$\llbracket \tilde{S} \rrbracket^\Pi(o) := \max_{\tilde{S}' \in P(o)} \max_{p \in \mathcal{P}} \min(\tilde{S}'(p), \tilde{S}(p)), \quad (3.19)$$

$$\llbracket \tilde{S} \rrbracket^N(o) := \max_{\tilde{S}' \in P(o)} \min \max(1 - \tilde{S}'(p), \tilde{S}(p)). \quad (3.20)$$

Y ahora podemos definir los conjuntos difusos de referentes posibles y necesarios para una expresión de referencia compuesta por propiedades difusas con incertidumbre.

Definición 3.24: Conjuntos difusos de referentes posibles y necesarios para una expresión de referencia compuesta por propiedades difusas con incertidumbre
Dada un cierta expresión de referencia $re \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{P}) \setminus \emptyset$, definimos los siguientes conjuntos de referentes posibles y necesarios para re :

$$O_{re}^\Pi(o) := \min_{\tilde{S} \in re} \llbracket \tilde{S} \rrbracket^\Pi(o), \quad (3.21)$$

$$O_{re}^N(o) := \min_{\tilde{S} \in re} \llbracket \tilde{S} \rrbracket^N(o), \quad (3.22)$$

Entonces, si consideramos estos conjuntos difusos y tomamos una medida de éxito referencial como las que hemos presentado en las Secciones 3.2 y 3.3, podemos definir la siguiente medida de éxito referencial en una situación con incertidumbre con propiedades graduales.

Definición 3.25: Medida de éxito referencial para una expresión de referencia con propiedades graduales e incertidumbre

$$rs^{\Pi N}(re, o) := \min(rs^\Pi(re, o), rs^N(re, o)). \quad (3.23)$$

Aquí, rs^Π y rs^N son dos medidas de éxito referencial como las que hemos visto en la Sección 3.2. Y para cada una de ellas realizamos la medición del éxito referencial considerando, como conjunto de objetos a los que hace referencia la expresión de referencia, los conjuntos O_{re}^Π y O_{re}^N respectivamente.

Con lo que hemos extendido las nociones principales del problema de Generación de Expresiones de Referencia a un ámbito en el que manejamos incertidumbre con propiedades difusas, otro tipo de información que es usual en el lenguaje natural. Ya en el siguiente capítulo presentaremos nuestra propuesta para tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia a través del Análisis de Conceptos Formales, empezando por la versión crisp del mismo que presentamos en la Sección 2.1.

3.6 DIFUSIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo hemos presentado diversas aportaciones al campo de las medidas de éxito referencial y las medidas de especificidad. Ampliando así el conjunto de estas familias de medidas y estudiando las relaciones entre ellas. Además, también hemos presentado un modo de manejar otro tipo de gradualidad en el problema de Generación de Expresiones de Referencia, la incertidumbre.

Las propuestas que se han presentado en este capítulo, han sido difundidas internacionalmente a través de publicaciones en revistas de reconocido prestigio y congresos internacional de gran relevancia. En concreto, las propuestas que se han presentado en este capítulo han dado lugar a las siguientes publicaciones:

1. Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «A Measure of Referential Success Based on Alpha-Cuts». en. En: *Scalable Uncertainty Management*. Ed. por Steven Schockaert y Pierre Senellart. Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer International Publishing, 2016, págs. 345-351.
2. Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Using specificity to measure referential success in referring expressions with fuzzy properties». En: *2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. 2016, págs. 563-570
3. Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla, Daniel Sánchez y Ronald R. Yager. «Specificity Measures and Referential Success». En: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 26.2 (2018), págs. 859-868
4. Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla, Daniel Sánchez y Ronald R. Yager. «On families of bounded specificity measures». En: *2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. ISSN: 1558-4739. 2017, págs. 1-6
5. Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Using k-Specificity for the Management of Count Restrictions in Flexible Querying». en. En: *Scalable Uncertainty Management*. Ed. por Serafin Moral, Olivier Pivert, Daniel Sánchez y Nicolás Marín. Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer International Publishing, 2017, págs. 49-63
6. Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla, Daniel Sánchez y Ronald R. Yager. «Specificity measures based on fuzzy set similarity». en. En: *Fuzzy Sets and Systems. Fuzzy Measures, Integrals and Quantification in Artificial Intelligence Problems – An Homage to Prof. Miguel Delgado* 401 (2020), págs. 189-199

7. Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Referring under Uncertainty». En: *2019 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE 2019, New Orleans, LA, USA, June 23-26, 2019*. IEEE, 2019, págs. 1-6

Entrando con algo más de detalle en cada una de estas publicaciones, tenemos que:

- En [138] se propone la medida de éxito referencia basada en α -cortes que hemos presentado en la Sección 3.2. Este trabajo fue presentado en el congreso internacional SUM 2016.
- En los trabajos [139] y [145] estudiamos la relación entre la especificidad y el éxito referencial. En concreto, el trabajo realizado en [139] fue presentado en el congreso FUZZ-IEEE 2016, un congreso internacional de reconocido prestigio. Y por otro lado, el artículo [145], que cuenta con la colaboración del Prof. Ronald R. Yager, autoridad y pionero en el campo de las medidas de especificidad para conjuntos difusos, fue publicado en la revista IEEE Transactions on Fuzzy Systems (JIF: 2018 6/134 Q1 95.90).
- En [144] presentamos nuestro trabajo sobre medidas de especificidad acotadas, también contando con la colaboración del Prof. Ronald R. Yager, quien además forma parte del grupo de trabajo de la beca de Formación de Profesorado Universitario que ha disfrutado el doctorando. Este trabajo fue presentado en el congreso FUZZ-IEEE 2017.
- En [141] presentamos algunas de las ideas sobre medidas de k -especificidad que hemos visto en la Sección 3.4.2. Este trabajo se presentó en el congreso internacional SUM 2017.
- Y, nuevamente con la colaboración del Prof. Ronald R. Yager, exploramos la derivación de medidas de especificidad a partir de medidas de similitud entre conjuntos difusos en el trabajo de revista [146]. Este trabajo fue publicado en Fuzzy Sets and Systems (JIF: 2020 23/110 Q1 79.55)
- Así, en [136] presentamos nuestra primera propuesta para tratar con la incertidumbre en el problema de Generación de Expresiones de Referencia, como hemos visto en la Sección 3.5. Este trabajo presentado en el congreso FUZZ-IEEE 2019 fue galardonado con el premio “FUZZ-IEEE 2019 Outstanding Conference Paper Award”.

Capítulo 4

Análisis de Conceptos Formales para el problema de Generación de Expresiones de Referencia

En este capítulo presentamos la principal aportación de esta tesis al campo de la Generación de Expresiones de Referencia. Veremos cómo aplicar el Análisis de Conceptos Formales al problema de Generación de Expresiones de Referencia Plurales.

Así, en un primer lugar, veremos los fundamentos teóricos de este mecanismo formal de representación de conocimiento. A continuación, veremos cómo trasladar y aplicar estas herramientas al problema que abordamos en esta tesis. Y analizaremos las ventajas que aporta este mecanismo formal de representación de conocimiento al problema de Generación de Expresiones de Referencia.

4.1 FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS DE CONCEPTOS FORMALES

Como ya comentamos en el Capítulo 1, el Análisis de Conceptos Formales puede ser visto como una formalización de los conceptos mentales que manejamos los humanos [212]. Así, el ACF permite representar distintos conceptos, al igual que jerarquías entre conceptos; el concepto *perro* es un subconcepto de *animal*, y a su vez puede tener *chihuahua* como un subconcepto, como se representa en la Figura 4.1.

Podemos pensar, por ejemplo, en el concepto *número primo*. Al ser un concepto matemático es fácilmente caracterizable como un conjunto de elementos que comparten unas características en común

{ser un número, sus únicos divisores son el uno y él mismo}.

Y además, este concepto estará acompañado en nuestra mente por un conjunto de elementos que son los números primos que conocemos, {2, 3, 5, 7, ...}, aunque

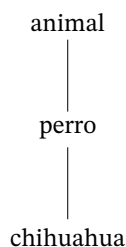


Figura 4.1: Jerarquía de conceptos mentales que podemos manejar y representar gracias al Análisis de Conceptos Formales.

realmente el conjunto de los números primos es infinito. Pero este pequeño subconjunto es el que tenemos en nuestro imaginario asociado al concepto *número primo*.

Y no nos tenemos que limitar a pensar en conceptos matemáticos que son fácilmente definibles. Podemos pensar en el concepto *camión*. Este concepto podemos verlo como un subconjunto del concepto *vehículo a motor* y puede venir caracterizado por el siguiente conjunto de características:

{gran tamaño, seis ruedas, cajón de almacenaje, ... }.

Al igual que antes, este concepto vendrá acompañado por aquellos camiones que tengamos en nuestro imaginario, individual o colectivo.

El Análisis de Conceptos Formales surge con la idea de reestructurar la Teoría de Retículos teniendo en cuenta el concepto matemático de orden [211]. Así su entidad principal es la de contexto formal que presentamos a continuación. Aquí aparecen las piezas fundamentales del Análisis de Conceptos Formales: como son los *objetos*, los *atributos* y la *relación* entre estos objetos y atributos.

Se hace patente cómo conecta esto con los ejemplos que acabamos de presentar. Hemos presentado conceptos que se representaban por un conjunto de propiedades, de *atributos*¹, que tenían en común los elementos de un determinado conjunto de *objetos*.

Definición 4.1: Contexto formal [212]

Sean G y M dos conjuntos e $I \subset G \times M$ una relación binaria entre ellos. Entonces, la tripleta $\mathbb{K} := (G, M, I)$ se denomina contexto formal.

Además, a los conjuntos G y M se les denomina, respectivamente, el conjunto de objetos (formales) y el conjunto de atributos (formales) del contexto formal. Así, si para un cierto objeto $g \in G$ y un cierto atributo $m \in M$, se tiene que $(g, m) \in I$, esto significa que el objeto g presenta o posee el atributo m , y lo denotamos por gIm .

Dado un contexto formal que, como hemos visto, puede entenderse como un conjunto de objetos, cada uno de los cuales presenta una serie de atributos que vie-

¹En este caso, estamos empleando la nomenclatura propia del Análisis de Conceptos Formales. De modo que lo que en capítulos anteriores hemos considerado como propiedades, como podría ser *alta* o *blanco*, aquí se denominarán atributos.

nen dados por una relación binaria, podemos definir los operadores de derivación, los cuales juegan un papel central en el Análisis de Conceptos Formales.

Definición 4.2: Operadores de derivación [212]

Consideremos, dado un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, sendos subconjuntos de objetos y atributos $A \subseteq G$ y $B \subseteq M$. Entonces definimos los siguientes operadores de derivación, los cuales notamos por ':

$$A' := \{m \in M \mid aIm, \forall a \in A\}, \quad (4.1)$$

$$B' := \{g \in G \mid gIb, \forall b \in B\}. \quad (4.2)$$

Así, dado un conjunto de objetos A , el conjunto A' es el conjunto de atributos que tienen en común los objetos en A . Del mismo modo, dado un conjunto de atributos B , B' es el conjunto de objetos que presentan todos y cada uno de los atributos del conjunto B . Además, se puede comprobar que los operadores de derivación que acabamos de definir cumplen las siguientes propiedades [212], donde S , S_1 y S_2 representan conjuntos de atributos o de propiedades indistintamente.

$$S_1 \subseteq S_2 \implies S'_1 \supseteq S'_2, \quad (4.3)$$

$$S \subseteq S'', \quad (4.4)$$

$$S''' = S'. \quad (4.5)$$

A partir de estas propiedades, tenemos que el par de operadores de derivación que hemos definido son un caso particular de conexión de Galois.

Definición 4.3: Conexión de Galois [13]

Consideremos dos familias de conjuntos ordenadas $\langle U, \subseteq \rangle$ y $\langle V, \subseteq \rangle$. Dos operadores o funciones $\uparrow : U \rightarrow V$ y $\downarrow : V \rightarrow U$ se dice que forman una conexión de Galois entre U y V si cumplen las siguientes propiedades:

1. $A_1 \subseteq A_2 \implies A_1^\uparrow \supseteq A_2^\uparrow$,
2. $B_1 \subseteq B_2 \implies B_1^\downarrow \supseteq B_2^\downarrow$,
3. $A \subseteq A^{\uparrow\downarrow}$ y $B \subseteq B^{\downarrow\uparrow}$,

para cualesquiera $A_1, A_2, A \subseteq U$ y $B_1, B_2, B \subseteq V$.

A partir de estos operadores de derivación podemos definir la pieza fundamental del Análisis de Conceptos Formales, los conceptos formales. Estos conceptos formales serán la representación formal de los conceptos mentales que manejamos y que hemos ejemplificado a comienzo de esta sección.

Definición 4.4: Concepto formal [212]

Consideremos un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$. Entonces, dados dos conjuntos $A \subseteq G$ y $B \subseteq M$, el par (A, B) se denomina concepto formal si se cumple que

$$A = B' \wedge B = A'. \quad (4.6)$$

En este caso, A se denomina la extensión del concepto formal, y B la intensión del concepto formal. Y podemos definir los siguientes conjuntos:

$$Ext(\mathbb{K}) := \{A \subseteq G \mid \exists B \subseteq M, (A, B) \text{ es un concepto formal}\}. \quad (4.7)$$

$$Int(\mathbb{K}) := \{B \subseteq M \mid \exists A \subseteq G, (A, B) \text{ es un concepto formal}\}. \quad (4.8)$$

Por tanto, a la luz de la definición anterior, un concepto formal es un par compuesto por un conjunto de objetos, su extensión, y un conjunto de atributos, su intensión. De modo que tenemos un conjunto de objetos que tienen en común precisamente los atributos del conjunto de atributos, y no hay ningún otro objeto en el contexto formal que posea todos y cada uno de los atributos en dicho conjunto. Estos conceptos formales pueden verse como los puntos fijos de la conexión de Galois dada por los operadores de derivación que hemos definido [27].

Al igual que hemos mostrado en la Figura 4.1, podemos establecer una jerarquía de conceptos formales según la relación de orden siguiente. Esta relación nos permite hablar de subconceptos y superconceptos, al igual que hemos hecho anteriormente.

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} A_1 \subseteq A_2 (\iff B_1 \supseteq B_2). \quad (4.9)$$

Pues bien, en base a esta relación de orden entre conceptos podemos construir lo que denominamos el retículo de conceptos formales. Esta estructura, como veremos, es muy útil de cara a explorar la información contenida en un contexto. Antes de continuar, nos gustaría recordar las siguientes definiciones, para distintos tipos de estructuras de retículo.

Definición 4.5: Retículo, retículo acotado y retículo completo

Un retículo es una estructura $\langle L, \wedge, \vee \rangle$, donde L es un conjunto y \wedge y \vee son dos operaciones binarias en L , las cuales son conmutativas y asociativas y presentan las siguientes propiedades $\forall a, b \in L$:

- $a \vee (a \wedge b) = a$,
- $a \wedge (a \vee b) = a$.

Si además existen dos elementos 0 y 1 tales que para cualquier $a \in L$ se tiene que

- $a \vee 0 = a$,
- $a \wedge 1 = a$.

Entonces la estructura $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ se dice que es un retículo acotado.

Si en un retículo todo subconjunto de elementos, $K \subset L$ tiene supremo e ínfimo, notados respectivamente por $\bigvee K$ y $\bigwedge K$ entonces se dice que el retículo es un retículo completo.

Definición 4.6: Conjunto de conceptos formales [211]

Dado un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, notamos por $FC(\mathbb{K})$ al conjunto de conceptos formales del contexto, es decir,

$$FC(\mathbb{K}) := \{(A, B) \mid A \subseteq G, B \subseteq M, A = B', B = A'\}. \quad (4.10)$$

Teorema 4.1: Teorema Fundamental de los Retículos de Conceptos [211]

Dado un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, el conjunto $FC(\mathbb{K})$ con la relación de orden definida en la Ecuación 4.9 es un retículo completo, que denominamos el retículo de conceptos formales. En este retículo, el ínfimo y el supremo se definen respectivamente como sigue:

$$\bigwedge_i (A_i, B_i) := \left(\bigcap_i A_i, \left(\bigcap_i A_i \right)' \right), \quad (4.11)$$

$$\bigvee_i (A_i, B_i) := \left(\left(\bigcap_i B_i \right)', \bigcap_i B_i \right). \quad (4.12)$$

Para ver los conceptos que acabamos de presentar vamos a considerar el ejemplo que presentamos la Figura 4.2, que es el mismo que empleamos en la Sección 2.1.1.

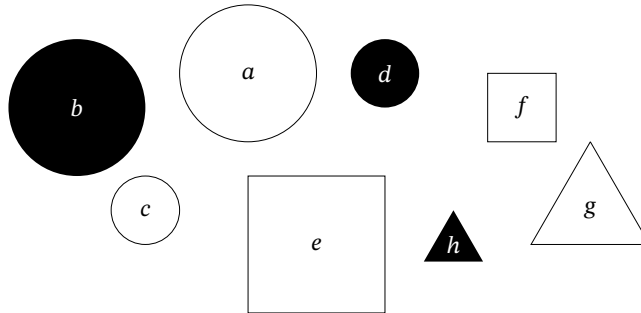


Figura 4.2: Escena compuesta por figuras geométricas blancas o negras de distinto tamaño.

Podemos representar la información contenida en esta escena en forma de una tabla binaria. En esta tabla las filas se corresponden con los objetos y las columnas con los atributos. Y encontraremos un cero o un uno dependiendo de si el objeto correspondiente posee el atributo de la columna o no. Así, para la Figura 4.2 construimos la Tabla 4.1.

Para el contexto representado en la Tabla 4.1 tenemos el conjunto de conceptos formales que se recoge en la Tabla 4.2.

objeto	<i>círculo</i>	<i>cuadrado</i>	<i>triángulo</i>	<i>blanco</i>	<i>negro</i>	<i>grande</i>	<i>pequeño</i>
<i>a</i>	1	0	0	1	0	1	0
<i>b</i>	1	0	0	0	1	1	0
<i>c</i>	1	0	0	1	0	0	1
<i>d</i>	1	0	0	0	1	0	1
<i>e</i>	0	1	0	1	0	1	0
<i>f</i>	0	1	0	1	0	0	1
<i>g</i>	0	0	1	1	0	1	0
<i>h</i>	0	0	1	0	1	0	1

Tabla 4.1: Tabla binaria para representar la información de la Figura 4.2. En esta tabla marcamos con • los atributos que posee cada uno de los objetos de la escena.

(\emptyset, M)	$(\{c, d\}, \{\text{círculo, pequeño}\})$
$(\{a\}, \{\text{círculo, blanco, grande}\})$	$(\{c, f\}, \{\text{blanco, pequeño}\})$
$(\{b\}, \{\text{círculo, negro, grande}\})$	$(\{d, h\}, \{\text{negro, pequeño}\})$
$(\{c\}, \{\text{círculo, blanco, pequeño}\})$	$(\{e, f\}, \{\text{cuadrado, blanco}\})$
$(\{d\}, \{\text{círculo, negro, pequeño}\})$	$(\{g, h\}, \{\text{triángulo}\})$
$(\{e\}, \{\text{cuadrado, blanco, grande}\})$	$(\{a, e, g\}, \{\text{blanco, grande}\})$
$(\{f\}, \{\text{cuadrado, blanco, pequeño}\})$	$(\{b, d, h\}, \{\text{negro}\})$
$(\{g\}, \{\text{triángulo, blanco, grande}\})$	$(\{a, b, c, d\}, \{\text{círculo}\})$
$(\{h\}, \{\text{triángulo, negro, pequeño}\})$	$(\{a, b, e, g\}, \{\text{grande}\})$
$(\{a, b\}, \{\text{círculo, grande}\})$	$(\{c, d, f, h\}, \{\text{pequeño}\})$
$(\{a, c\}, \{\text{círculo, blanco}\})$	$(\{a, c, e, f, g\}, \{\text{blanco}\})$
$(\{b, d\}, \{\text{círculo, negro}\})$	(G, \emptyset)

Tabla 4.2: Lista de conceptos formales para el contexto formal representado en la Tabla 4.1.

Además, uno de los objetivos que debería perseguir cualquier sistema de representación de conocimiento es el de hacer que este conocimiento pueda ser fácilmente explorado y visualizado. Así, para un contexto formal determinado, podemos dar una representación gráfica de su conjunto de conceptos formales. Esta representación son los bien conocidos diagramas de Hasse.

En estos diagramas, que tienen forma de un grafo con vértices y aristas, cada vértice representa uno de los conceptos formales del contexto. De modo que dos nodos están relacionados con una arista según la relación de orden que hemos definido en la Ecuación 4.9. Además, algunos de estos vértices aparecen etiquetados mostrando, o bien la intensión del concepto, o bien su extensión. De modo que, para un vértice determinado, su extensión se calcula de forma recursiva por medio de la unión de la extensión de los subconceptos que aparecen como vértices «hijo» en el diagrama. Por otro lado, la intensión de un concepto se calculará recursivamente por medio de la intersección de la intensión de los superconceptos que aparecen como vértices «padre» del nodo correspondiente.

En la Figura 4.3 mostramos el diagrama de Hasse que representa el conjunto de conceptos formales que presentamos en la Tabla 4.2 para el contexto de la Figura 4.2.

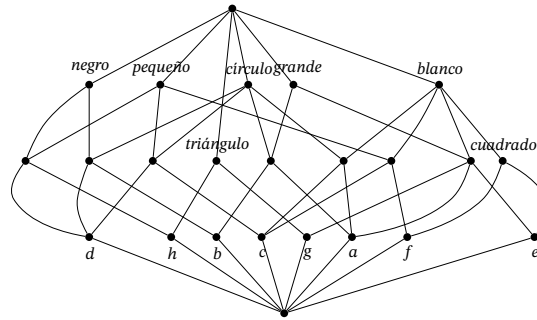


Figura 4.3: Diagrama de Hasse para los conceptos de la Tabla 4.2.

Vamos a ver ahora las definiciones de \sqcap -semiconcepto y \sqcup -semiconcepto que, como veremos, tendrán especial relevancia en el rol del Análisis de Conceptos Formales para el problema de Generación de Expresiones de Referencia.

Definición 4.7: \sqcap -semiconcepto y \sqcup -semiconcepto [207]

Consideremos un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$. Entonces un par (A, B) , con $A \subseteq G, B \subseteq M$, se dice que es un \sqcap -semiconcepto si $A' = B$. Del mismo modo, se dirá que es un \sqcup -semiconcepto si $B' = A$.

Otro importante concepto dentro del Análisis de Conceptos Formales es el de las relaciones flecha [82] que introducimos a continuación.

Definición 4.8: Relaciones flecha [82]

Consideremos un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$ y sendos $g \in G$ y $m \in M$. Entonces definimos las siguientes relaciones como subconjuntos de $G \times M$:

- $g \not\prec m \stackrel{\text{def}}{\iff} (g, m) \notin I \text{ y } \{g\}' \subset \{h\}' \implies (h, m) \in I, \forall h \in G.$
- $g \nearrow m \stackrel{\text{def}}{\iff} (g, m) \notin I \text{ y } \{m\}' \subset \{n\}' \implies (g, n) \in I, \forall n \in M.$
- Por último diremos que $g \nearrow m \stackrel{\text{def}}{\iff} g \not\prec m \text{ y } g \nearrow m.$

Así, cuando tenemos un objeto g y un atributo m tales que $g \nearrow m$, entonces lo que tenemos es que g no presenta el atributo m , pero que cualquier otro atributo que sea aplicable a aquellos objetos que sí que presentan m es también aplicable a g .

A modo de ejemplo, supongamos que en un aparcamiento hay 10 coches, uno de los cuales es azul y el resto son rojos. En ese caso, sin entrar en más detalles sobre el modelo de coche, tendríamos que para ese coche, que podemos llamar c , se tiene que $c \nearrow \text{rojo}$. Es decir, es el único objeto que no es rojo, pero los objetos que son rojos son coches, con lo que, cualquier otro atributo que posean lo presentará también c .

Del mismo modo, si $g \not\prec m$, entonces se tiene que cualquier otro objeto que posea todos los atributos que posea g presentará también m . Visto de otro modo, de entre todos los objetos que poseen las propiedades que posee g (entre otras posiblemente), g es el único que no posee el atributo m .

Para ilustrar esto podemos pensar en un lapicero donde hay varios bolígrafos, uno de los cuales no tiene caperuza, lo llamaremos b . Entonces se tiene que $b \not\prec \text{caperuza}$, puesto que el resto de bolígrafos, que presentarán el resto de atributos que como bolígrafo tiene b , sí que tienen caperuza.

Con esto acabamos el repaso a los fundamentos del Análisis de Conceptos Formales que nos permitirán realizar los desarrollos teóricos centrales de esta tesis doctoral y que presentaremos en la Sección 4.2.

4.1.1 ALGORITMOS PARA OBTENER EL RETÍCULO DE CONCEPTOS FORMALES

El retículo de conceptos formales de un contexto resulta de gran interés. En él está contenida gran parte de la información que podemos extraer del contexto. Además, como veremos en la Sección 4.2, este retículo tendrá un papel central en los desarrollos teóricos más relevantes de nuestra tesis. Así veremos como, a través del retículo de conceptos formales, podemos desarrollar distintos algoritmos que marcarán el carácter diferenciador del Análisis de Conceptos Formales con respecto a otros mecanismos formales de representación de conocimiento empleados para el problema de Generación de Expresiones de Referencia, que hemos visto en la Sección 2.1.1.

Por la definición de concepto formal que hemos dado (Def. 4.4) tenemos la siguiente proposición cuya demostración resulta trivial.

Proposición 4.1:

Consideremos un cierto contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$. Entonces, para cualesquiera conceptos formales $(A, B), (C, D) \in FC(\mathbb{K})$, se tiene que:

$$\cdot A \neq C \implies B \neq D.$$

$$\cdot B \neq D \implies A \neq C.$$

Demostración: Supongamos que existen dos conceptos formales de la forma $(A_1, B), (A_2, B) \in FC(\mathbb{K})$. Entonces, por definición de concepto formal tenemos que

$$A_1 = B' = A_2.$$

Y de forma simétrica tenemos el mismo resultado para dos conceptos formales $(A, B_1), (A, B_2) \in FC(\mathbb{K})$. Con lo que tenemos lo que queríamos. \square

Teniendo esto en cuenta, es claro que, dado un cierto contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, el número de conceptos formales que podemos tener es, como máximo,

$$2^{\min(|G|, |M|)}. \quad (4.13)$$

Esta es una cota superior del número de conceptos formales que pueden existir en un contexto formal, pero podemos ver casos en los que se alcanza dicha cantidad, como demostramos a continuación.

Proposición 4.2:

Consideremos sendos conjuntos de objetos y atributos G y M . Entonces, existe $I \subseteq G \times M$ tal que el contexto formal $K := (G, M, I)$ cumple que $|FC(\mathbb{K})| = 2^{\min(|G|, |M|)}$.

Demostración: Consideremos un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, con $G := \{g_1, \dots, g_p\}$ y $M := \{m_1, \dots, m_q\}$. Entonces, definimos la siguiente relación binaria entre objetos y atributos:

$$I(g_i, m_j) := \begin{cases} 1 & i \neq j, \\ 0 & i = j. \end{cases}$$

Consideremos el caso en el que $p \geq q$, en caso contrario bastará con intercambiar el papel de objetos y atributos (ver Def. 4.9). Para cada objeto g_i , tenemos que existe un atributo que no posee, el m_i , y que sí que presentan el resto de objetos en el contexto. Por otro lado, tenemos que g_i posee el resto de atributos en M , y para cada $g_j \in G \setminus \{g_i\}$ tenemos que g_i posee el atributo m_j , que no lo posee g_j . Con lo cual, tenemos que $\{g_i\}' = M \setminus \{m_i\}$. Pero además, g_i es el único objeto que posee todos los atributos m_j con $i \neq j$, ergo $(\{g_i\}, M \setminus \{m_i\}) \in FC(\mathbb{K})$, teniendo en cuenta la definición de los operadores de derivación.

Ahora vamos a ver, razonando por inducción, que existe un concepto formal para cada $A \in 2^G$ de la forma (A, A') . Para ello, consideramos como caso base el análisis que acabamos de hacer para el caso de objetos individuales.

Supongamos, para un cierto $n \in \mathbb{N}$, con $n < q$, que para todo conjunto $C \in 2^G$ tal que $|C| = n$ se tiene que $(C, C') \in FC(\mathbb{K})$. Tomemos ahora un conjunto cualquiera $A \in 2^G$, con $|A| = n$. Y sea k , con $1 \leq k \leq q$, un índice tal que $g_k \notin A$; con lo que $|A \cup \{g_k\}| = n + 1$.

Por lo que acabamos de ver, tenemos que $(\{g_k\}, \{g_k\}')$ y (A, A') son conceptos formales. Teniendo en cuenta el Teorema 4.1, tenemos que el siguiente par es también un concepto formal:

$$((A \cup \{g_k\})'', A' \cap \{g_k\}')$$

Ahora bien, tenemos que

$$(A \cup \{g_k\})' = M \setminus (A' \cup \{m_k\}),$$

Y por como hemos definido I , se tiene que no hay ningún objeto que esté fuera de $A \cup \{g_k\}$ que tenga todos y cada uno de los atributos que hay en $M \setminus (A' \cup \{m_k\})$, con lo que $(A \cup \{g_k\})'' = A \cup \{g_k\}$, como queríamos. \square

Como hemos dicho, el retículo de conceptos formales es de gran importancia en un contexto formal. Por lo tanto, la tarea de obtener el retículo de conceptos de un contexto ha recibido especial atención en la literatura. Y en ella podemos encontrar distintos algoritmos para obtener el retículo de conceptos formales.

En primer lugar, partiendo de las propiedades de los operadores de derivación tenemos lo siguiente.

Proposición 4.3:

Dado un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, se tiene que:

- Si $A \subseteq G$ entonces (A'', A') es un concepto formal.
- Si $B \subseteq M$ entonces (B', B'') es un concepto formal.

Con lo cual sería sencillo, teniendo en cuenta además la Proposición 4.1, diseñar un algoritmo de fuerza bruta que obtenga todo el retículo de conceptos formales, comprobando el concepto obtenido para cada conjunto $A \in 2^G$. Sin embargo, como hemos visto en la Ecuación 4.13, esto daría lugar a un algoritmo exponencial en todos los casos, con lo que soluciones más eficientes han sido propuestas en la literatura. Aunque es claro que, en el peor de los casos, todos los algoritmos serán de orden exponencial, $O(2^n)$, ya que este es el número máximo de conceptos que podemos encontrar en un contexto formal.

En [125] podemos encontrar un estudio comparativo de la eficiencia de distintos algoritmos propuestos en la literatura. Además se analizan distintas características de los algoritmos. Lo primero que vamos a tener en cuenta es que el papel de los objetos y atributos de un contexto formal es intercambiable o simétrico. De modo que podemos considerar los atributos como objetos y viceversa. Esto es interesante desde el punto de vista práctico, puesto que hay algoritmos como el de Bordat [17] cuya complejidad algorítmica es $O(|G||M|^2|FC(\mathbb{K})|)$. Por lo tanto, la dimensión que añade mayor complejidad al algoritmo es el número de atributos.

Entonces, en un contexto donde se tenga que el número de atributos es mayor que el número de objetos, si se va a calcular el retículo empleando el algoritmo de Bordat, será interesante considerar el contexto «traspuesto».

Definición 4.9: Contexto formal traspuesto

Dado un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, definimos su contexto formal traspuesto, que lo notamos por \mathbb{K}^T , como el contexto $\mathbb{K}^T := (M, G, I^T)$, donde $I^T \in M \times G$ se define como

$$I^T := \{(m, g) \in M \times G \mid (g, m) \in I\}. \quad (4.14)$$

De este modo, ahora los atributos pasarán a jugar el papel de los objetos y viceversa. Y así, de forma teórica, la complejidad computacional del cálculo del retículo disminuiría en el caso que acabamos de exponer.

En [125] se estudian distintas características de los algoritmos y estos se clasifican según estas características. Los algoritmos de Norris [158] o de Godin [97], por ejemplo, pertenecen a la familia de algoritmos incrementales. Un algoritmo incremental procesa los objetos en el contexto de forma iterativa, de modo que en cada iteración calcula el retículo de conceptos correspondiente al contexto formal teniendo en cuenta únicamente los primeros n objetos. Uno de estos algoritmos obtendría un retículo intermedio $FC(\mathbb{K}_n)$ que en la siguiente iteración se verá modificado al tener en cuenta un objeto más, y obtener así el retículo $FC(\mathbb{K}_{n+1})$. Finalizando el algoritmo cuando todos los objetos han sido introducidos en el contexto.

Este tipo de algoritmos son interesantes cuando se esté empleando el Análisis de Conceptos Formales en un entorno cambiante. De modo que se pueden reutilizar los cálculos realizados en una ejecución previa para obtener el nuevo retículo correspondiente al estado actual del sistema.

Entre los algoritmos incrementales encontramos diferencias en su eficiencia. El algoritmo de Godin tiene la peor complejidad algorítmica, puesto que es cuadrática en el número de conceptos formales del retículo, que como ya hemos dicho es exponencial (Ecuación 4.13). Sin embargo, el algoritmo de Norris que, como indican los autores en [125], puede verse como una versión incremental del algoritmo Close by One [124], tiene una complejidad de $O(|G|^2|M||FC(\mathbb{K})|)$.

Otra característica que se tiene en cuenta en el análisis de [125] son los mecanismos que emplean los algoritmos para evitar generar conceptos que ya han sido obtenidos en iteraciones previas del algoritmo. Así por ejemplo, el algoritmo de Nourine [159] emplea una estructura de árbol con la que comprobar si un concepto determinado ha sido previamente generado.

Por otro lado, tenemos aquellos algoritmos que no son incrementales. Como puede ser el algoritmo de Chein [37] cuya complejidad es $O(|G|^3|M||FC(\mathbb{K})|)$ o el algoritmo Close by One anteriormente mencionado.

Además, como sucede en cualquier otra área, no solo es importante analizar la complejidad teórica de un algoritmo. Este análisis nos sirve para conocer una aproximación del tiempo que empleará el algoritmo para obtener un retículo de conceptos en el peor caso posible. Pero a menudo en nuestras aplicaciones nos encontramos con que los casos que manejamos no se ajustan al peor caso. Así, un algoritmo que en un análisis asintótico de la complejidad resulte el menos eficiente, puede ser que sea el que mejor se comporte para los problemas que nosotros queramos resolver en la práctica. En [125] encontramos un análisis comparativo en el que se mide el tiempo de ejecución de diversos algoritmos en base al tamaño del contexto formal. Del mismo modo [117] es un estudio más reciente de la eficiencia de varios algoritmos para el cálculo de conceptos formales. En él se analiza un factor tan importante como es la densidad del contexto; el número medio de atributos que presenta cada uno de los objetos del contexto.

En este estudio se demuestra cómo el algoritmo Add Intent [152] es un algoritmo incremental cuyo rendimiento es mayor que el de otros algoritmos incrementales propuestos anteriormente.

En la actualidad, aprovechando la existencia de ordenadores y arquitecturas más potentes, encontramos algoritmos paralelizables que permiten realizar cálculos aprovechando los múltiples núcleos de un computador. Así, dentro del área del Análisis de Conceptos Formales, podemos encontrar algoritmos que paralelizan el cálculo del retículo de conceptos formales. Por ejemplo, el algoritmo propuesto en [121] es capaz de obtener el retículo de conceptos formales de un contexto de dimensiones 295×32710 con una densidad de 3 atributos por objeto en 11 segundos empleando 8 núcleos de un procesador, mientras que la ejecución monolítica del mismo cálculo se extendería hasta los 65 segundos. Con lo que aquí se muestra la potencia de este tipo de propuestas en contextos de gran dimensión. También podemos encontrar la propuesta de [40] que emplea Spark para implementar una versión distribuida de un algoritmo para el cálculo del retículo de conceptos formales.

Como podemos ver, en la literatura existe una gran cantidad de propuestas para el cómputo del retículo de conceptos formales. La propuesta que hacemos en esta tesis para resolver el problema de Generación de Expresiones de Referencia a través del Análisis de Conceptos Formales puede beneficiarse de todas ellas.

4.1.2 SIMPLIFICACIÓN DE CONTEXTOS FORMALES

Como acabamos de ver, la complejidad algorítmica de obtener el retículo de conceptos formales depende del número de conceptos formales del retículo. Y esta cantidad viene acotada por la Ecuación 4.13, la cual depende del número de objetos y de atributos del contexto. Por lo tanto, disminuir el número de objetos o atributos de un contexto formal nos permitiría obtener el retículo asociado en menor tiempo. Podemos realizar un proceso de clarificación y reducción [82] en el contexto original para obtener un contexto de menor dimensión, pero en el que la información contenida es equivalente a la presente en el contexto original.

Veamos cuándo se dice que un contexto formal está clarificado.

Definición 4.10: Contexto formal clarificado [82]

Un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, se dice que está o que es clarificado cuando cumple las siguientes condiciones:

- Para cualesquiera $g, h \in G$, se tiene que si $\{g\}' = \{h\}' \implies g = h$.
- Para cualesquiera $m, n \in M$, se tiene que si $\{m\}' = \{n\}' \implies m = n$.

Es decir, un contexto formal está clarificado cuando la matriz binaria correspondiente a la relación entre atributos y propiedades no presenta filas ni columnas iguales. Si nos centramos en los atributos, es claro que si las columnas correspondientes a ambos atributos son iguales, entonces ambos atributos aportan la misma información. Aquellos objetos que presentan uno de estos atributos son los mismos

que presentarán el otro atributo. Por tanto, las dos columnas se pueden reducir a una que represente la presencia de ambos atributos.

Por otro lado, podemos hablar de atributos y objetos reducibles.

Definición 4.11: Atributos y objetos reducibles [82]

Dado un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, decimos que un atributo $m \in M$ es reducible si existe un subconjunto de atributos $Y \subseteq M \setminus \{m\}$, tal que $\{m\}' = Y'$.

Del mismo modo, diremos que un objeto $g \in G$ es reducible si existe un subconjunto de objetos $X \subseteq G \setminus \{g\}$ tal que $\{g\}' = X'$.

Aquí, al igual que para el caso de atributos equivalentes y que se pueden eliminar para clarificar el contexto, tenemos que las columnas relativas al conjunto de atributos Y de la anterior definición proporcionan la misma información que la columna correspondiente al atributo reducible. Es decir, aquellos objetos que tenga todos los atributos presentes en Y poseerán también el atributo m , con lo que podemos eliminar la columna relativa a este último. No al revés, puesto que puede haber objetos que presenten alguno de los atributos en Y que no presenten todos.

El mismo razonamiento podemos hacer para los objetos reducibles en el contexto. Entonces, podemos definir lo que es un contexto reducido como sigue.

Definición 4.12: Contexto formal reducido [82]

Un contexto formal clarificado se dice que está reducido en las filas, si todo objeto en el contexto es irreducible, y se dirá que está reducido en las columnas si todo atributo presente en él es irreducible.

Diremos entonces que un contexto está reducido cuando lo está en las filas y en las columnas.

En [82] podemos encontrar un método para realizar este proceso de clarificación y reducción que se basa en las relaciones flecha de la Definición 4.8. Aunque podemos encontrar otras propuestas en la literatura [213].

Relacionado con el concepto de atributos reducibles podemos introducir el concepto de implicación entre conjuntos de atributos, aunque en este caso estas implicaciones no nos permitirán simplificar el contexto original, pero sí que aportarán una información útil. De hecho, como se pone de manifiesto en [82], a partir del conjunto de implicaciones entre atributos que se den en un contexto formal podemos reconstruir el retículo de conceptos del mismo y viceversa.

Definición 4.13: Implicación entre atributos [82]

Consideremos un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, y dos subconjuntos de atributos $B_1, B_2 \subseteq M$. Entonces decimos que el conjunto B_1 implica al conjunto B_2 , y lo notamos por $B_1 \rightarrow B_2$, si se da que $B_1' \subseteq B_2'$.

Pero como se indica en [82], en el conjunto de todas las implicaciones que pueden darse dentro de un contexto formal, habrá muchas que resulten redundantes o que no aporten información nueva. Así surgen los siguientes conceptos.

Definición 4.14: Base de implicaciones [42]

Dada un contexto formal, una base de implicaciones es un conjunto de implicaciones de ese contexto a partir del cual se pueden deducir todas las que se dan en el contexto empleando las reglas de Armstrong [5].

Y se tiene que en un contexto formal podemos encontrar diversas bases de implicaciones. Por ejemplo, podemos construir bases de implicaciones como las propuestas en [101] que son minimales en el número de implicaciones que contienen. De este modo, habrá casos en los que el retículo de conceptos sea muy grande y sea más interesante representar la información de una forma más condensada, a través de estas bases de implicaciones minimales.

Por último vamos a introducir el concepto de generador minimal.

Definición 4.15: Generador minimal [42]

Consideremos $\mathbb{K} := (G, M, I)$ un contexto formal, y sea $(A, C) \in FC(\mathbb{K})$. Entonces, un subconjunto de atributos $B \subseteq M$ diremos que es un generador minimal de C si, y solamente si, $B \rightarrow C$, y además no existe ningún otro conjunto $D \subset B$ tal que $D \rightarrow C$.

Este concepto es interesante dentro del campo del Análisis de Conceptos Formales y en la literatura podemos encontrar diversos algoritmos para obtenerlos [42, 165]. También podemos encontrar una propuesta en la sección 2.2.3 de [80].

4.2 ANÁLISIS DE CONCEPTOS FORMALES COMO UN MARCO FORMAL PARA GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA

En la sección anterior hemos presentado los fundamentos teóricos del Análisis de Conceptos Formales. A continuación vamos a ver cómo podemos emplear este mecanismo formal de representación de conocimiento para abordar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Así, mostraremos cómo el Análisis de Conceptos Formales nos permite tratar el Problema de Generación de Expresiones de Referencia Plurales de un modo natural.

En esta primera propuesta, presentamos el Análisis de Conceptos Formales como un mecanismo para tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia Plurales en su versión crisp, es decir, en un entorno en el cual los objetos presentan las propiedades o no, sin ningún tipo de gradualidad como la que presentamos en la Sección 3.1. Además, consideraremos, como hicimos en el Problema 2.2, que las expresiones de referencia están formadas por conjunciones de propiedades.

En primer lugar, como hemos visto en la Sección 2.1, el problema de la Generación de Expresiones de Referencia se enmarca en un universo de discurso determinado; el escenario en el cual se quiere identificar unívocamente a un objeto o conjunto de objetos determinado. Así, lo primero que vamos a ver es cómo representar la información de este universo a través del Análisis de Conceptos Formales.

Definición 4.16: Contexto formal asociado a un problema GER

Consideremos un problema de GER en un universo de discurso compuesto por un conjunto de objetos \mathcal{O} y un conjunto de propiedades \mathcal{P} , que cada objeto puede presentar o no.

Podemos definir entonces el contexto formal $C := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_C)$, que representa la información contenida en dicho universo de discurso. Donde para cualesquiera $o \in \mathcal{O}$ y $p \in \mathcal{P}$, se tiene que

$$(o, p) \in I_C \stackrel{\text{def}}{\iff} o \text{ presenta la propiedad } p.$$

A modo de ilustración, para el universo que hemos presentado en la Figura 4.2 podemos definir el contexto formal, $\mathbb{C} := (G, M, I_C)$ donde

$$G := \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

$$M := \{\text{círculo, cuadrado, triángulo, blanco, negro, pequeño, grande}\}$$

e I_C vendría dada por la relación binaria que hemos representado en la Tabla 4.1. Vemos entonces cómo podemos traducir de una forma natural la información contenida en un universo de discurso para un problema de Generación de Expresiones de Referencia en términos del Análisis de Conceptos Formales.

Ahora vamos a ver cómo representamos una expresión de referencia en este formalismo, al igual que en la Sección 2.1.1 vimos cómo se representa una expresión de referencia en cada uno de los mecanismos formales que encontramos en la literatura para abordar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Y cómo determinar si una determinada expresión tiene éxito referencial para el objetivo del problema.

Definición 4.17: Expresión de referencia en el Análisis de Conceptos Formales
Consideremos un contexto formal asociado a un universo de discurso $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_C)$ y un conjunto de objetos objetivo $O \subseteq \mathcal{O}$. Entonces, una expresión de referencia para O es un conjunto $re \subseteq \mathcal{P}$ tal que $re' = O$.

Recordemos nuevamente, que en esta sección estamos considerando que las expresiones de referencia son conjunciones de propiedades, de ahí que la semántica propia de los operadores de derivación de la Definición 4.2 sea adecuada para definir lo que es una expresión de referencia.

Dentro de un contexto formal, podemos definir el siguiente caso particular de \sqcup -semiconceptos.

Definición 4.18: Semiconcepto referencial

Sea $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_C)$ un contexto formal y sean $A \subseteq \mathcal{O}$, $B \subseteq \mathcal{P}$ tales que $A \neq \emptyset \neq B^2$. Entonces decimos que el par (A, B) es un semiconcepto referencial si, y solamente si, $B' = A$.

Podemos ver, teniendo en cuenta la definición de expresión de referencia que acabamos de introducir, por qué hemos denominado estos pares semiconceptos

²En nuestro caso vamos a considerar siempre que tanto el referente como la expresión de referencia son conjuntos no vacíos. Sin embargo, nos gustaría señalar que estudiar casos en los que se tenga un referente definido como un conjunto vacío, o una expresión de referencia vacía, tiene interés desde el punto de vista teórico. Por ejemplo, si buscamos una expresión que haga referencia al conjunto vacío, entonces podemos obtener, dentro del contexto en el que nos encontramos, un conjunto de propiedades que no señalen a ningún conjunto de objetos. Por otro lado, si consideramos una expresión de referencia vacía, esto puede representar que no estamos imponiendo ninguna restricciones sobre los objetos que queremos seleccionar, en una base de datos por ejemplo, con lo que estaríamos haciendo referencia al conjunto \mathcal{O} al completo.

referenciales. Y es que en este caso el conjunto B es una expresión de referencia para el conjunto de objetos A . Teniendo en cuenta la definición de concepto formal (Def. 4.4), obtenemos el siguiente resultado de forma trivial.

Proposición 4.4:

Sea $(A, C) \in FC(\mathbb{C})$ en un cierto contexto formal \mathbb{C} con $A \neq \emptyset \neq C$. Entonces (A, C) es un semiconcepto referencial.

Como hemos indicado en la Sección 2.2, uno de los principales problemas dentro del campo de la Generación de Expresiones de Referencia es determinar si un conjunto de objetos es referible o no. Es decir, determinar si para un objetivo determinado podemos encontrar al menos una expresión de referencia para dicho conjunto de objetos. Teniendo en cuenta la definición de semiconcepto referencial, el siguiente resultado es trivial aunque, como veremos, resultará de gran relevancia.

Proposición 4.5:

Consideremos un contexto formal $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ y un conjunto de objetos no vacío $O \subseteq \mathcal{O}$. Entonces diremos que O es referible en \mathbb{C} si, y solamente si, existe un cierto $re \subseteq \mathcal{P}$ tal que (O, re) es un semiconcepto referencial de \mathbb{C} .

Veamos cómo el Análisis de Conceptos Formales nos permite caracterizar aquellos conjuntos de objetos que son referibles dentro de un universo de discurso determinado. Este resultado es relevante, ya que muestra cómo el Análisis de Conceptos Formales es un mecanismo que aporta herramientas muy interesantes para la resolución del problema de Generación de Expresiones de Referencia.

Teorema 4.2: Caracterización de conjuntos referibles a través del Análisis de Conceptos Formales

Sea $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ un contexto formal. Entonces, para un cierto $A \subseteq \mathcal{O}$, $A \neq \emptyset$, A es un conjunto de objetos referible si, y solamente si, existe un concepto formal, $(A, C) \in FC(\mathbb{C})$, con $C \neq \emptyset$.

Demostración: \Rightarrow) Según la Proposición 4.5, si A es un conjunto referible, entonces existe un semiconcepto referencial (A, B) tal que $B' = A$. Entonces por la Proposición 4.3 tenemos que $(A, B'') = (B', B'')$ es un concepto formal de \mathbb{C} . Además, por las propiedades de los operadores de derivación tenemos que $B \subseteq B''$. Por lo tanto, basta con definir $C = B''$ para tener la demostración en uno de los sentidos de la doble implicación.

\Leftarrow) Por otro lado, si (A, C) es un concepto formal, entonces por definición $C' = A$, con lo que C es una expresión de referencia para A , con lo que A es referible. \square

Por lo tanto, a la luz de este teorema, podemos deducir que para obtener todos los conjuntos referibles dentro de un determinado universo de discurso, a través del Análisis de Conceptos Formales, nos bastará con obtener las extensiones de los conceptos formales del contexto formal con el que representamos dicho universo, es decir, el conjunto $Ext(\mathbb{C})$. Por lo tanto, bastará con obtener el conjunto $FC(\mathbb{C})$ para lo que, como hemos visto en la Sección 4.1.1, encontramos muchas propuestas en la literatura de las cuales beneficiarnos.

Como hemos indicado en la Sección 2.1.2, para un mismo conjunto de objetos pueden existir diversas expresiones de referencia válidas. El siguiente corolario nos da una primera caracterización del conjunto de expresiones de referencia para un determinado conjunto de objetos referible.

Corolario 4.1:

Sea un concepto formal (A, C) , con $A \neq \emptyset \neq C$. Entonces, todo semiconcepto referencial de la forma (A, B) cumple que $B \subseteq C = A'$.

Por lo tanto, para un cierto conjunto referible, la intensión del concepto formal asociado, es la expresión de referencia maximal para ese conjunto. Es decir, cualquier otra expresión de referencia, entendida como una conjunción de propiedades como venimos haciendo, para ese conjunto de objetos será un subconjunto de esta expresión de referencia maximal.

Este corolario nos da una cota superior para explorar el espacio de posibles expresiones de referencia para un determinado conjunto referible. Veremos esto en más profundidad en la Sección 4.3.3. Ahora vamos a ver un ejemplo a modo ilustrativo.

Teniendo en cuenta los resultados que acabamos de ver, para el universo de discurso de la Figura 4.2 que hemos traducido en un contexto formal determinado por la Tabla 4.1, encontramos 22 subconjuntos de objetos referibles. Estos conjuntos se corresponden con la extensión de cada uno de los conceptos formales listados en la Tabla 4.2 que tienen extensión e intensión no vacías.

Así por ejemplo, para el conjunto $\{h\}$ tenemos que la expresión de referencia $\{\text{triángulo, negro, pequeño}\}$ es la expresión maximal para este objeto. Del mismo modo, los subconjuntos $\{\text{triángulo, negro}\}$ y $\{\text{triángulo, pequeño}\}$ son también expresiones de referencia válidas para $\{h\}$.

Sin embargo, podemos ver que no todo subconjunto de la expresión maximal para un conjunto de objetos es también una expresión de referencia válida. Como muestra, el subconjunto $\{\text{negro}\}$ no es una expresión de referencia con éxito referencial para $\{h\}$, ya que $\{\text{negro}\}' = \{b, d, h\}$. Por tanto, *negro*, atendiendo a la Definición 4.17, es una expresión de referencia para el conjunto de objetos $\{b, d, h\}$, el conjunto de objetos negros de la Figura 4.2.

Con lo cual, como podemos ver, el Análisis de Conceptos Formales nos permite tratar de forma natural el problema de la Generación de Expresiones de Referencia Plurales en un ámbito crisp. A continuación, vamos a comparar nuestra propuesta con los formalismos de representación de conocimiento que hemos presentado en la Sección 2.1.1.

4.3 ESTUDIO DEL ANÁLISIS DE CONCEPTOS FORMALES PARA LA GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA

Una vez hemos presentado cómo podemos tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia Plurales a través del Análisis de Conceptos Formales, vamos a analizar esta propuesta a la luz de los otros mecanismos formales de representación de conocimiento que hemos introducido en la Sección 2.1.1. En este

análisis vamos a mostrar nuevas aportaciones que podemos hacer al campo de la Generación de Expresiones de Referencia a través del Análisis de Conceptos Formales. Veremos que, aunque hay aspectos en los que otros mecanismos formales destacan, el Análisis de Conceptos Formales aporta nuevas herramientas para tratar problemas que, en algunos casos, no habrían podido ser tratados con otros mecanismos, o al menos no de un modo eficiente.

En lo siguiente, vamos a analizar estos mecanismos junto con el Análisis de Conceptos Formales para los distintos problemas que hemos planteado en la Sección 2.2.

4.3.1 EL PROBLEMA CLÁSICO DE GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA

En primer lugar vamos a analizar el problema de Generación de Expresiones de Referencia Plurales en su versión clásica, es decir, el Problema 2.2. Para este problema consideramos únicamente conjunción de propiedades simples para conformar las expresiones de referencia.

ANÁLISIS DE CONCEPTOS FORMALES

En el caso del Análisis de Conceptos Formales, dado un cierto conjunto $O \neq \emptyset$, teniendo en cuenta los resultados que hemos visto en la Sección 4.2, tenemos que O' es una expresión de referencia para O si, y solamente si, $O' \neq \emptyset$ y $O'' = O$. En cuyo caso (O, O') es un concepto formal y, en particular, es un semiconcepto referencial. En caso contrario, por lo que hemos visto en el Teorema 4.2, T no sería referible. Podemos formular entonces el siguiente algoritmo.

- 1 sea O el conjunto a referenciar
- 2 si $O'' = O$
- 3 devolver O'
- 4
- 5 devolver «No se ha encontrado una expresión de referencia válida.»

Algoritmo 4.1: Algoritmo para el problema de Generación de Expresiones de Referencia Plurales empleando los operadores de derivación propios del Análisis de Conceptos Formales.

La complejidad computacional de este algoritmo depende de la complejidad del cómputo de los operadores de derivación, la cual en el peor caso es $O(|\mathcal{C}| \times |\mathcal{P}|)$. Esta complejidad es la misma que la de los algoritmos voraces que hemos visto en la Sección 2.1. En este caso, a diferencia de, por ejemplo, el algoritmo Full Brevity, estamos devolviendo, en caso de que el conjunto sea referible, la expresión de referencia de máxima longitud posible.

TEORÍA DE GRAFOS

Como vimos en la Sección 2.1.1, el uso de la Teoría de Grafos para resolver el problema de Generación de Expresiones de Referencia implica la búsqueda de un isomorfismo de grafos para determinar si una expresión de referencia es válida para un conjunto determinado. Este problema es NP-completo en general. Sin embargo, nosotros trabajamos con un grafo fijo, el que representa la expresión de referencia. Y además, al considerar únicamente conjunciones de propiedades, determinar si una expresión de referencia es válida tendrá una complejidad lineal $O(|\mathcal{O}| + |\mathcal{P}|)$.

Sin embargo, este es únicamente el proceso para determinar si una expresión de referencia es válida, pero no estamos teniendo en cuenta el tiempo necesario para construir dicha expresión, que en el mejor de los casos tendrá una complejidad $O(|\mathcal{O}| \times |\mathcal{P}|)$.

GRAFOS CONCEPTUALES

En este caso, este problema tiene una complejidad similar a la que tenemos al emplear la Teoría de Grafos, ya que se emplean procedimientos similares. Sin embargo, este proceso puede ser algo más complejo al tener en cuenta también la información que se representa en el soporte del grafo conceptual [45].

LÓGICAS DESCRIPTIVAS

En el caso de las lógicas descriptivas, existen razonadores lógicos capaces de determinar si una determinada expresión de referencia, definida por medio de una fórmula lógica bien formada, hace referencia al conjunto de objetos que queremos referenciar. Es decir, determinar si la extensión de la fórmula que representa la expresión de referencia es el conjunto de objetos a referenciar.

Sin embargo, al igual que ocurre en los casos anteriores, en las lógicas descriptivas necesitamos de un procedimiento adicional de búsqueda y construcción de la expresión de referencia. Así, necesitaremos de algoritmos externos como los voraces que hemos visto. Aunque estos algoritmos se pueden beneficiar de razonadores sobre lógicas descriptivas como HerMiT [192].

En cualquier caso, el proceso de generación de una expresión de referencia y comprobar si es válida tiene una complejidad $O(|\mathcal{O}| \times |\mathcal{P}|)$. Además, las propuestas actuales para tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia a través de lógicas descriptivas se centran en el problema de la referibilidad, es decir, determinar qué subconjuntos de un universo son referibles y encontrar una expresión de referencia para cada uno de ellos. Analizaremos este problema más adelante.

SATISFACCIÓN DE RESTRICCIONES

Como hemos dicho en la Sección 2.1.1, dentro del mecanismo de la satisfacción de restricciones existen diversas estrategias de optimización y búsqueda disponibles para encontrar una expresión de referencia para el conjunto a referenciar. Con

lo que podemos emplear distintas estrategias algorítmicas para resolver este problema. Además, una ventaja de esta aproximación con respecto a otras es que nos permite introducir restricciones adicionales que ha de verificar la expresión de referencia. Aunque tener en cuenta alguna de estas restricciones adicionales puede resultar en una elevada complejidad computacional, como por ejemplo intentar encontrar una expresión de referencia minimal, donde la complejidad es exponencial.

4.3.2 EL PROBLEMA DE LA REFERIBILIDAD

En el problema de la referibilidad se quiere determinar qué conjuntos de objetos del universo de discurso son referibles. Es decir, determinar para qué subconjuntos de objetos existe al menos una expresión de referencia válida, empleando las propiedades y el tipo de información que estemos considerando en ese momento.

Evidentemente para determinar esto basta con intentar resolver el problema de Generación de Expresiones de Referencia clásico para cada subconjunto de objetos posible en el universo. Y esta estrategia la podemos emplear en cualquiera de los mecanismos formales de representación de conocimiento que hemos visto. Sin embargo, esto supondría una complejidad exponencial en el número de objetos del universo. Además, esto habría que multiplicarlo por la complejidad que tiene determinar si existe una expresión de referencia válida para un conjunto determinado y construirla. Por lo tanto es una estrategia poco eficiente e inviable.

En cambio, el Análisis de Conceptos Formales nos ofrece, gracias al Teorema 4.2, un modo más eficiente de determinar qué subconjuntos de objetos son referibles. En términos del Análisis de Conceptos Formales, los conjuntos de objetos referibles se corresponden con las extensiones de los conceptos formales del contexto formal asociado al universo de discurso en el que nos encontramos. Y como hemos visto, existen diversas propuestas algorítmicas para obtener el retículo de conceptos formales de un contexto formal de un forma eficiente. Con lo que podemos beneficiarnos de estas estrategias para resolver el problema de la referibilidad empleando el Algoritmo 4.2.

```

1  sea conjuntosReferibles =  $\emptyset$ 
2  sea C el contexto formal asociado al universo de discurso
3
4  para cada  $(A, C) \in FC(C) \mid A \neq \emptyset \neq C$ 
5      conjuntosReferibles = conjuntosReferibles  $\cup$  {A}
6
7  devolver conjuntosReferibles

```

Algoritmo 4.2: Algoritmo para obtener los conjuntos referibles en un universo de discurso a través del Análisis de Conceptos Formales.

Como podemos ver, el Análisis de Conceptos Formales proporciona herramientas para abordar de un modo natural el problema de la referibilidad. Aunque otros mecanismos formales no disponen de estas herramientas que resultan tan naturales, sí que encontramos propuestas en la literatura para resolver el problema de la

referibilidad empleando lógicas descriptivas. Así, en [3, 4] encontramos un algoritmo para, a través de las lógicas descriptivas, encontrar todos los conjuntos referibles de un universo de discurso junto con una expresión de referencia válida para cada uno de ellos.

4.3.3 EXPLORACIÓN DEL ESPACIO DE POSIBLES EXPRESIONES DE REFERENCIA

Como hemos dicho, también encontramos propuestas en la literatura para resolver el problema de la referibilidad a través de las lógicas descriptivas. Y con estas propuestas podemos encontrar una expresión de referencia para cada uno de los conjuntos referibles en el universo. Sin embargo, como ya pusimos de manifiesto en la Sección 2.1.2, para un mismo conjunto de objetos podemos encontrar diversas expresiones de referencia posibles. Y como vimos en la Sección 2.1.2, elegir la mejor expresión de referencia de entre las disponibles es también una tarea crucial dentro del problema de la Generación de Expresiones de Referencia. En esta sección vamos a presentar un modo de explorar este conjunto de expresiones de referencia para un determinado conjunto de objetos a través del Análisis de Conceptos Formales.

Para comenzar podemos definir el siguiente conjunto de expresiones de referencia.

Definición 4.19: Conjunto de expresiones de referencia para un conjunto de objetos

Consideremos el contexto formal $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ asociado a un universo de discurso determinado. Para un cierto conjunto de objetos $O \subseteq \mathcal{O}$, definimos el conjunto

$$RE_O := \{B \subseteq \mathcal{P} \mid B' = O\}. \quad (4.15)$$

Es decir, RE_O es el conjunto de expresiones de referencia válidas para el conjunto de objetos O .

Pues bien, para un determinado conjunto de objetos, el conjunto de expresiones de referencia que podemos considerar para intentar referenciar a un conjunto de objetos tiene un tamaño exponencial en el número de propiedades compartidas por todos los objetos de ese conjunto. Por lo tanto, su exploración no resulta trivial y mecanismos eficientes de exploración para dicho espacio de expresiones de referencia se hacen necesarios. Esto nos permitiría escoger la expresión de referencia más adecuada para los propósitos del sistema que estemos construyendo, al poder explorar este espacio de búsqueda de un modo eficiente. Además de conocer, dentro del vasto espacio de posibles expresiones de referencia que podemos considerar, qué expresiones son válidas para el conjunto a referenciar, sin tener que invertir mucho tiempo de cómputo en descartar aquellas expresiones que no son válidas. Veamos cómo a través del Análisis de Conceptos Formales podemos dar una representación condensada de este conjunto.

Como ya vimos por el Teorema 4.2, la intensidad asociada a un concepto formal es la expresión de referencia maximal para el conjunto que se corresponde con la extensión de ese concepto. Es decir, tenemos una cota superior para las expresiones de referencia válidas para un determinado conjunto de objetos, como pusimos de manifiesto en el Corolario 4.1.

Proposición 4.6: Cota superior para la expresiones de referencia de una conjunto referible

Consideremos un contexto $\mathbb{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ asociado a un universo de discurso, y sea A un conjunto referible. Entonces, para cualquier expresión de referencia re para A se tiene que

$$re \subseteq A'$$

Si volvemos al ejemplo de la Figura 4.2, recordamos que el conjunto $\{h\}$ era referible, con expresión de referencia maximal $triángulo \wedge negro \wedge pequeño$. Y además se tenía que las expresiones de referencia $\{triángulo, negro\}$ y $\{triángulo, pequeño\}$ eran también expresiones de referencia válidas. Sin embargo, como mostramos, el subconjunto $\{negro\}$ no es una expresión de referencia válida para el objeto h , ya que hace referencia a varios objetos negros en la escena.

Por lo tanto, tenemos una única cota superior para las posibles expresiones de referencia de un determinado conjunto de objetos. Sin embargo, existen diversas cotas inferiores para este conjunto y no solo una. Definimos por ello el siguiente concepto.

Definición 4.20: Frontera inferior interna

Consideremos un contexto formal $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ y un concepto formal $(A, C) \in FC(\mathbb{C})$, con $A \neq \emptyset \neq C$. Se define la frontera inferior interna para el conjunto de expresiones de referencia para A como

$$ILB_A := \{B \subseteq C \mid B' = A, B \neq \emptyset \wedge \nexists D \subset B, D' = A\}. \quad (4.16)$$

Es decir, esta frontera contiene aquellas expresiones de referencia para el conjunto de objetos que son minimales con respecto a la inclusión de conjuntos. Por ejemplo, en el caso que acabamos de presentar

$$ILB_{\{h\}} = \{\{triángulo, negro\}, \{triángulo, pequeño\}\}.$$

Notemos además que hay casos en los que $ILB_A = C$, lo que significa que sólo hay una expresión de referencia posible para el conjunto A .

Por lo tanto, con esta frontera y la cota superior que hemos dado para las expresiones de referencia posibles, podemos dar una representación condensada del conjunto de expresiones de referencia válidas para un conjunto de objetos. Cualquier expresión de referencia para un determinado conjunto estará comprendida entre la cota superior, dada por la expresión maximal para ese conjunto, y la frontera de expresiones válidas que acabamos de definir. En concreto:

Teorema 4.3: Representación compacta del conjunto RE_A a través de ILB_A

Consideremos un contexto formal $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ y un concepto formal $(A, C) \in FC(\mathbb{C})$, con $A \neq \emptyset \neq C$. Entonces, (A, B) es un semiconcepto referencial si, y solamente si, $\exists D \in ILB_A$ tal que $D \subseteq B \subseteq C$.

Demostración: \Rightarrow) Sea (A, B) un semiconcepto referencial. Por el Corolario 4.1 tenemos que $B \subseteq C$. Ahora bien, al ser un semiconcepto referencial tenemos por

definición que $B' = A$. Supongamos entonces que no existe un $D \in ILB_A$ tal que $D \subseteq B$. Por lo tanto, en particular tampoco existirá un $D \in ILB_A$ tal que $D \subset B$ y por definición tendríamos que entonces $B \in ILB_A$, en contradicción con nuestra suposición.

\Leftarrow) Supongamos que existe un $D \in ILB_A$ tal que $D \subseteq B \subseteq C$. Por definición tenemos que D y C son expresiones de referencia para A , con lo que, teniendo en cuenta las propiedades de los operadores de derivación, tenemos que $A = C' \subseteq B' \subseteq D' = A$. Por lo tanto $B' = A$ y (A, B) es un semiconcepto referencial. \square

Podemos definir otra frontera inferior para el conjunto de expresiones de referencia válidas, la cual, como veremos, presenta interesantes propiedades desde el punto de vista computacional.

Definición 4.21: Frontera inferior externa

Consideremos un contexto formal $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ y un concepto formal $(A, C) \in FC(\mathbb{C})$, con $A \neq \emptyset \neq C$. Se define la frontera inferior externa para el conjunto de expresiones de referencia para A como

$$OLB_A := \{B \subset C \mid B' \neq A \wedge \nexists D \supset B, D' \neq A\}. \quad (4.17)$$

Por lo tanto, este conjunto está formado por aquellos subconjuntos de propiedades maximales contenidos en C que no constituyen expresiones de referencia válidas para A . Así, para el ejemplo que estamos considerando,

$$OLB_{\{h\}} = \{\{\text{negro, pequeño}\}, \{\text{triángulo}\}\}.$$

Se tiene también que este conjunto nunca es vacío puesto que el conjunto vacío nunca es una expresión de referencia válida para ningún conjunto de objetos, con lo que siempre estará contenido en la frontera. Pero si el conjunto $OLB_A = \{\emptyset\}$, entonces todas las posibles expresiones de referencia por encima de él serán expresiones de referencia válidas. Por lo tanto, en particular se tendrá que $\{p\} \in RE_A, \forall p \in C$.

En la Figura 4.4 representamos gráficamente las fronteras que acabamos de definir para el conjunto $\{h\}$. Asimismo, la Tabla 4.3 recoge estas fronteras para cada uno de los conjuntos referibles que podemos encontrar en el universo de la Figura 4.2.

Al igual que hemos visto para la frontera inferior interna, podemos dar una representación compacta del conjunto de expresiones de referencia válida para un conjunto de objetos.

Teorema 4.4: Representación compacta del conjunto RE_A a través de OLB_A

Consideremos un contexto formal $\mathbb{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ y un concepto formal $(A, C) \in FC(\mathbb{C})$, con $A \neq \emptyset \neq C$. Entonces, (A, B) es un semiconcepto referencial si, y solamente si, $\nexists D \in OLB_A$ tal que $B \subseteq D$.

Demostración: \Rightarrow) Al ser (A, B) un semiconcepto referencial tenemos por definición que $B' = A$. Supongamos que existe $D \in OLB_A$ con $B \subseteq D$. Entonces, $D \subset C$ y tenemos que $D' \neq A = C$, es decir, $A = C' \subset D'$. Por las propiedades de los operadores de derivación tenemos que $A \subset D' \subseteq B'$. Por lo tanto $A \neq B'$, lo que es una contradicción.

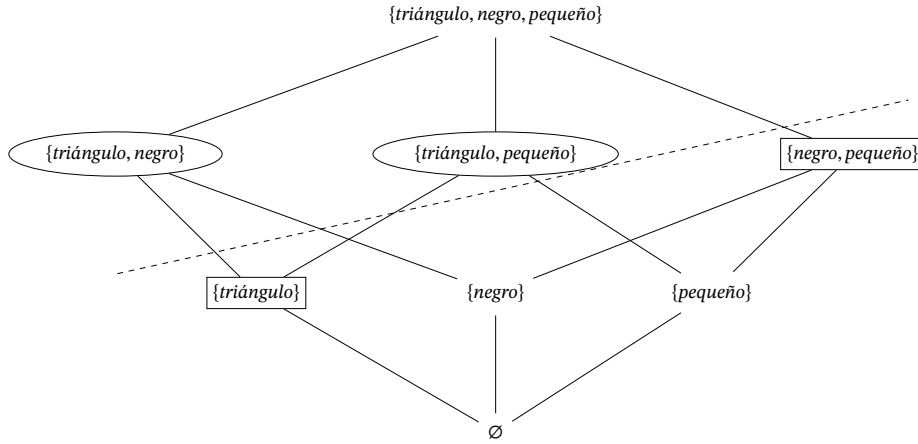


Figura 4.4: Fronteras para el conjunto de posibles expresiones de referencia del conjunto $\{h\}$ de la Figura 4.2. Así, el conjunto $RE_{\{h\}}$ estará compuesto por todos los conjuntos de propiedades por encima de la línea discontinua. Por otro lado, los elementos de $ILB_{\{h\}}$ se marcan con elipses, mientras que los de $OLB_{\{h\}}$ se marcan con rectángulos.

A	C	ILB_A	OLB_A
{a}	{círculo, blanco, grande}	{{círculo, blanco, grande}}	{{círculo, grande}, {círculo, blanco}, {blanco, grande}}
{b}	{círculo, negro, grande}	{{negro, grande}}	{{círculo, grande}, {círculo, negro}}
{c}	{círculo, blanco, pequeño}	{{círculo, blanco, pequeño}}	{{círculo, blanco}, {círculo, pequeño}, {blanco, pequeño}}
{d}	{círculo, negro, pequeño}	{{círculo, negro, pequeño}}	{{círculo, negro}, {círculo, pequeño}, {negro, pequeño}}
{e}	{cuadrado, blanco, grande}	{{cuadrado, grande}}	{{cuadrado, blanco}, {blanco, grande}}
{f}	{cuadrado, blanco, pequeño}	{{cuadrado, pequeño}}	{{blanco, pequeño}, {cuadrado, blanco}}
{g}	{triángulo, blanco, grande}	{{triángulo, blanco}, {triángulo, grande}}	{{triángulo}, {blanco, grande}}
{h}	{triángulo, negro, pequeño}	{{triángulo, negro}, {triángulo, pequeño}}	{{negro, pequeño}, {triángulo}}
{a, b}	{círculo, grande}	{{círculo, grande}}	{{círculo}, {grande}}
{a, c}	{círculo, blanco}	{{círculo, blanco}}	{{círculo}, {blanco}}
{b, d}	{círculo, negro}	{{círculo, negro}}	{{círculo}, {negro}}
{c, d}	{círculo, pequeño}	{{círculo, pequeño}}	{{círculo}, {pequeño}}
{c, f}	{blanco, pequeño}	{{blanco, pequeño}}	{{blanco}, {pequeño}}
{d, h}	{negro, pequeño}	{{negro, pequeño}}	{{negro}, {pequeño}}
{e, f}	{cuadrado, blanco}	{{cuadrado}}	{{blanco}}
{g, h}	{triángulo}	{{triángulo}}	{∅}
{a, e, g}	{blanco, grande}	{{blanco, grande}}	{{blanco}, {grande}}
{b, d, h}	{negro}	{{negro}}	{∅}
{a, b, c, d}	{círculo}	{{círculo}}	{∅}
{a, b, e, g}	{grande}	{{grande}}	{∅}
{c, d, f, h}	{pequeño}	{{pequeño}}	{∅}
{a, c, e, f, g}	{blanco}	{{blanco}}	{∅}

Tabla 4.3: Expresión de referencia maximal (C) y las fronteras OLB_A y ILB_A para cada conjunto de objetos referible de la Figura 4.2.

⇐) Supongamos que no existe $D \in OLB_A$ tal que $B \subseteq D$ para un cierto $B \subseteq C$. Por definición, es claro que $B \notin OLB_A$. Supongamos ahora que (A, B) no es un semiconcepto referencial, es decir, que $B' \neq A$. Entonces, como $B \notin OLB_A$, $\exists D_1$ con $B \subseteq D_1$ tal que $D_1' \neq A$. Si $D_1 \notin OLB_A$ podemos repetir este razonamiento de forma iterativa, obteniendo así la cadena de inclusiones

$$B = D_1 \subset \dots \subset D_k \subset C,$$

con $D_i' \neq A$ para todo $1 \leq i \leq k$ y $D_k \in OLB_A$. Y por lo tanto, existe $D = D_k$ tal que $D \in OLB_A$ y $B \subseteq D$, lo que es una contradicción. \square

Ahora, teniendo en cuenta el Corolario 4.1 y el Teorema 4.4, podemos dar una caracterización del conjunto de expresiones de referencia válidas para un conjunto de objetos.

Proposición 4.7:

Consideremos un contexto formal $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ y un concepto formal $(A, C) \in FC(\mathbb{C})$, con $A \neq \emptyset \neq C$. Entonces

$$RE_A = 2^C \setminus \left(\bigcup_{B \in OLB_A} 2^B \right). \quad (4.18)$$

Definición 4.22: Potencial referencial

Consideremos un contexto formal $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ y un concepto formal $(A, C) \in FC(\mathbb{C})$, con $A \neq \emptyset \neq C$. Definimos el potencial referencial de A como

$$\frac{|RE_A|}{|2^C|}. \quad (4.19)$$

Este concepto de potencial referencial tiene relevancia en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. El potencial referencial nos indica la probabilidad de que, escogida una expresión de referencia al azar contenida en C , esta expresión de referencia tenga éxito referencial para A .

Por lo tanto, se pone de manifiesto que las fronteras que acabamos de definir tienen gran utilidad cuando queremos explorar el conjunto de posibles expresiones de referencia para un conjunto de objetos de una forma eficiente. A continuación vamos a ver cómo podemos obtener estas fronteras.

OBTENIENDO LAS FRONTERAS

En la Proposición 4.7 hemos visto cómo podemos obtener el conjunto de expresiones de referencia válidas para un determinado conjunto de objetos a partir de la frontera inferior externa. Pues bien, como hemos indicado anteriormente, esta frontera tiene interesantes propiedades desde el punto de vista computacional.

Podemos obtener esta frontera de forma inmediata gracias al retículo de conceptos formales asociado al universo de discurso con el que estemos trabajando. Esto resulta muy interesante, ya que el cómputo del retículo de conceptos tiene

otras muchas aplicaciones, como por ejemplo resolver el problema de la referibilidad en el universo en el que nos encontremos. Por tanto, con solo realizar este cómputo podemos obtener mucha información relevante para el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. El siguiente resultado formaliza esto. En este resultado, dados dos conceptos formales $(A, B), (C, D) \in FC(\mathbb{C})$, decimos que $(A, B) < (C, D)$ si $(A, B) < (C, D)$ y no existe otro concepto formal, (E, F) , tal que $(A, B) < (E, F) < (C, D)$.

Teorema 4.5: Caracterización de la frontera inferior externa

Consideremos un contexto formal $\mathbb{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I_{\mathbb{C}})$ y un concepto formal $(A, C) \in FC(\mathbb{C})$, con $A \neq \emptyset \neq C$. Entonces

$$OLB_A = \{B \subset C \mid (B', B) \in FC(\mathbb{C}) \wedge (A, C) < (B', B)\}. \quad (4.20)$$

Demostración: \Rightarrow) Sea B un elemento de OLB_A , es decir, $B \subset C$ con $B' \neq A$ y tal que $\nexists D \supset B$ con $D' \neq A$. Supongamos que $(B', B) \notin FC(\mathbb{C})$, o lo que es lo mismo, $B'' \neq B$. Por lo tanto, por las propiedades de los operadores de derivación, $B \subset B''$. Además, tenemos que $B''' = B' \neq A$. Con lo cual, $\exists D = B'' \supset B$ tal que $D' = A$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $(B', B) \in FC(\mathbb{C})$.

Veamos ahora que se da que $(A, C) < (B', B)$. Por las propiedades de los operadores de derivación tenemos que $A = C' \subset B'$ y, por lo tanto, $(A, C) < (B', B)$. Supongamos que existe $(A_1, C_1) \in FC(\mathbb{C})$ tal que $(A, C) < (A_1, C_1) < (B', B)$. Entonces, como $C'_1 = A_1 \subset A$ tenemos que $\exists D = C_1 \supset B$ tal que $D' \neq A$, con lo que llegamos de nuevo a una contradicción. Con lo que que efectivamente $(A, C) < (B', B)$.

\Leftarrow) Sea $B \subset C$ tal que $(B', B) \in FC(\mathbb{C})$ con $(A, C) < (B', B)$. Entonces, tenemos que $B \subset C$ y $B' \supset A$. Además, tenemos que $\nexists (D', D) \in FC(\mathbb{C})$ tal que $(A, C) < (D', D) < (B', B)$. Con lo cual $B' \neq A$ y $\nexists D \supset B$ tal que $D' \neq A$. \square

Este resultado nos dice que para obtener OLB_A basta considerar, en el retículo de conceptos asociado al universo de discurso, los superconceptos inmediatamente superiores al concepto formal (A, C) . Con lo que, una vez hemos calculado el retículo de conceptos, no requiere de más cómputos. Por ejemplo, para el conjunto $\{h\}$, tenemos que el concepto formal asociado es el $(\{h\}, \{\text{triángulo, negro, pequeño}\})$. Los conceptos formales inmediatamente superiores a este son $(\{g, h\}, \{\text{triángulo}\})$ y $(\{d, h\}, \{\text{negro, pequeño}\})$. Por lo tanto tenemos que $OLB_{\{h\}} = \{\{\text{triángulo}\}, \{\text{negro, pequeño}\}\}$, como habíamos indicado anteriormente.

Ahora vamos a ver cómo obtener la frontera inferior interna. Es claro, por definición, que los elementos de ILB coinciden con los generadores minimales (Def. 4.15) de C , al ser esta la expresión de referencia maximal para el conjunto correspondiente. Por lo tanto, podríamos emplear cualquiera de los algoritmos disponibles en la literatura [11] para obtener los generadores minimales de un conjunto de atributos. En este caso nosotros presentamos un algoritmo alternativo para obtener el conjunto ILB_A .

El Algoritmo 4.3 parte de los resultados presentados en la Proposición 4.7 y en el Teorema 4.5. Con estos resultados en mente, deducimos que una expresión de referencia válida para A será un subconjunto de C que no esté contenido en la intensidad de ningún superconcepto de (A, C) . Esto nos da un criterio de poda en la

exploración del conjunto 2^C , lo que ahorra cálculos.

```

1  sea  $ILB = \emptyset$ 
2  sea  $Candidatos_1 = \{\{p\} \subseteq C \mid \nexists D \in OLB_A, \{p\} \subseteq D\}$ 
3  sea  $j = 1$ 
4
5  mientras  $Candidatos_j \neq \emptyset \wedge j \leq |C|$ 
6       $ILB_A = ILB_A \cup Candidatos_j$ 
7       $Candidatos_{j+1} = \text{NuevosCandidatos}(Candidatos_j, ILB_A, OLB_A, (A, C))$ 
8       $j = j + 1$ 
9
10 devolver  $ILB_A$ 

```

Algoritmo 4.3: Algoritmo para obtener el conjunto ILB_A empleando el retículo de conceptos formales asociado al universo de discurso en el que estamos trabajando.

Como podemos ver en el Algoritmo 4.3 se exploran los subconjuntos de propiedades de menor a mayor cardinalidad. De modo que en cada iteración del algoritmo consideramos, como posibles candidatos a formar parte de la frontera inferior interna, conjuntos con un mayor número de propiedades. Con lo cual, en la función `NuevosCandidatos` formamos los candidatos añadiéndoles a los candidatos del nivel anterior una nueva propiedad. Y de entre los nuevos candidatos generados no tenemos en cuenta aquellos que incumplan alguna de las dos condiciones de poda siguientes:

- No ser un superconjunto de ningún elemento ya añadido al conjunto ILB_A , ya que como sabemos estos elementos son minimales.
- No ser un subconjunto de ningún elemento en la OLB_A .

Aunque la complejidad en el peor caso para este algoritmo es exponencial, estas estrategias de poda pueden reducir el tiempo de cómputo necesario.

Pasemos ahora a ver cómo funciona nuestra propuesta para las distintas generalizaciones del problema de Generación de Expresiones de Referencia que hemos presentado en la Sección 2.2.

4.3.4 GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA

Ahora vamos a analizar el Análisis de Conceptos Formales para tratar distintas generalizaciones del problema de la Generación de Expresiones de Referencia, comparándolo con el resto de propuestas que hemos presentado en la Sección 2.1.1.

En particular, en la propuesta anterior, hemos visto el Análisis de Conceptos Formales como una herramienta para abordar el problema de Generación de Expresiones de Referencia Plurales clásico, en el que consideramos expresiones de referencia limitadas a la conjunción de propiedades básicas. A continuación vamos a ver cómo podemos extender esta propuesta para considerar otro tipo de información u otro tipo de expresiones de referencia.

PROPIEDADES RELACIONALES

En general, el hecho de considerar propiedades relacionales para construir una expresión de referencia para un conjunto de objetos aumenta la complejidad computacional de este problema. Esta complejidad variará dependiendo de cuántas relaciones entre objetos estemos considerando [45, 119, 120].

Las relaciones que más empleamos para construir descripciones son las relaciones binarias, como «el círculo a la derecha del triángulo» o «el cuadrado cerca de un círculo negro». Aunque considerar relaciones n -arias puede resultar interesante, en general son las relaciones binarias las que resultan más comunes. Como hemos podido ver en la Sección 2.1.1, tanto en los formalismos basados en grafos como en las lógicas descriptivas podemos representar este tipo de relaciones de una forma natural. Ya sea mediante el uso de aristas dirigidas, en el caso de los grafos o mediante los roles propios de las lógicas descriptivas. Así, por ejemplo, en [206] se emplean grafos en los que las aristas se emplean para representar relaciones espaciales entre objetos, como las que acabamos de usar como ejemplo.

También existen lógicas descriptivas capaces de representar relaciones n -arias, como es el caso de la lógica descriptiva \mathcal{DLR} [31]. Y del mismo modo podemos representar este tipo de relaciones en los formalismos basados en grafos. En particular, los grafos conceptuales nos permiten representarlas de un modo natural gracias a que emplean un grafo bipartido para representar la información. Así, tendríamos un nodo relación que representa la relación y n aristas que asocian esta relación con los n objetos implicados en ella, pudiendo, como ya apuntamos en la Sección 2.1.1, etiquetar estos nodos para indicar el orden en el que cada uno de los objetos interviene en la relación.

Aunque el formalismo de la satisfacción de restricciones está centrado en propiedades individuales, podemos representar propiedades relacionales viéndolas como propiedades individuales [83]. Para representar una relación binaria, $R \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ la podemos representar por medio de un nuevo conjunto de propiedades individuales $R_{o_i}^1$ and $R_{o_i}^2$ para cada $o_i \in \mathcal{O}$. De modo que un objeto o presentará la propiedad $R_{o_i}^1$ si tenemos que $(o_i, o) \in R$ y de forma simétrica presentará la propiedad $R_{o_i}^2$ si $(o, o_i) \in R$. Es claro cómo podemos extender este mecanismo al caso de relaciones n -arias.

Del mismo modo, para representar propiedades relacionales en el marco del Análisis de Conceptos Formales, podemos traducir estas propiedades en forma de atributos individuales para los objetos del contexto. Así, dada una propiedad relacional R podemos considerar los atributos de la forma «estar relacionado por R a un objeto que verifica un conjunto de propiedades Q », con $Q \subseteq \mathcal{P}$. Entonces, al igual que hemos visto antes, definiríamos los dos atributos simétricos R_1^Q y R_2^Q . En particular podemos considerar el caso en el que $Q = \emptyset$.

En general, para cada relación binaria R el número de atributos añadidos para R_1 y R_2 es N , con

$$N = \left| \bigcup_{o \in \mathcal{O}} 2^{\{o\}'} \right| \leq \left| 2^{\bigcup_{o \in \mathcal{O}} \{o\}'} \right| \leq |2^{\mathcal{P}}| = 2^{|\mathcal{P}|}, \quad (4.21)$$

donde únicamente consideramos propiedades individuales para los operadores de derivación. Hemos de señalar que N es en general mucho menor que $2^{|P|}$. Por ejemplo, para el universo de la Figura 4.2 que hemos venido empleando en este capítulo, tenemos que $N = 31$, mientras que el número de propiedades 7 y $2^7 = 128$. Esto se debe a dos razones: en primer lugar, algunas propiedades son contradictorias, por ejemplo un objeto no puede ser a la vez blanco y negro; en segundo lugar, aunque algunas propiedades no son contradictorias, no todas las posibles combinaciones de propiedades se pueden encontrar en el contexto. Por ejemplo, en la Figura 4.2 no hay ningún cuadrado negro.

Aquí, estamos considerando únicamente relaciones entre los objetos y aquellos objetos que están inmediatamente junto a ellos. Podemos extender esta idea recursivamente para considerar relaciones más complejas como «el círculo que está a la derecha de un cuadrado blanco que está debajo de un triángulo». Aunque esto requerirá tratar una explosión combinatoria aún mayor, con lo que habrá que analizar en profundidad el manejo de la misma. Podríamos considerar el uso de algoritmos propios del Análisis de Conceptos Formales con una naturaleza incremental y paralelizable, así como realizar un proceso de clarificación y reducción para reducir el número de propiedades consideradas, evitando también contradicciones entre propiedades. Además, tenemos que tener en cuenta que el uso de este tipo de relaciones daría como resultado expresiones de referencia muy complejas que no resultarían, en la mayoría de los casos, naturales ni útiles para el usuario, con lo que el tratamiento de este tipo de propiedades relacionales de mayor complejidad resulta menos interesante en el problema que nos ocupa.

En cualquier caso, hemos de señalar que gran parte de la carga computacional que supone emplear el Análisis de Conceptos Formales para el problema de Generación de Expresiones de Referencia nos permite encontrar todos los conjuntos de objetos referibles en un universo de discurso determinado. Una tarea que es mucho más compleja que simplemente encontrar una expresión de referencia válida para un conjunto de objetos determinado. En el caso de los formalismos basados en grafos, esta tarea requeriría, en principio, abordar la tarea de encontrar una expresión de referencia válida para cada uno de los posibles subconjuntos de objetos del universo. Mientras que con el Análisis de Conceptos Formales, a través del retículo de conceptos formales, podemos conocer para qué conjuntos sí existirá al menos una expresión de referencia válida; cuáles son referibles.

Por último, nos gustaría señalar que existe una extensión del Análisis de Conceptos Formales llamada Análisis de Conceptos Relacionales, la cual se ha propuesto para tratar tanto con propiedades individuales como relacionales [102, 109]. Aunque el análisis de esta extensión para el manejo de este tipo de información en el problema de Generación de Expresiones de Referencia requiere de un estudio futuro.

OTROS OPERADORES LÓGICOS

A lo largo de este capítulo hemos considerado que las expresiones de referencia generadas estaban compuestas únicamente por una conjunción de propiedades atómicas. Sin embargo, como ya vimos en la Sección 2.2, se puede usar otro tipo de

información para construir estas expresiones de referencia. En particular, podemos usar otro tipo de conectores lógicos para combinar la información, como pueden ser la negación o la disyunción.

Vimos en la Sección 2.1.1 que las lógicas descriptivas incorporan este tipo de conectores de manera natural. Así vimos que hay lógicas descriptivas con mayor o menor capacidad semántica, dependiendo del conjunto de operadores lógicos que empleen. Por ejemplo, la lógica \mathcal{EL} solo emplea conjunciones, mientras que \mathcal{ALC} y sus extensiones como \mathcal{SROJQ} incluyen la negación de cualquier concepto, incluyendo aquellos derivados a partir de la intersección de otros conceptos.

Los mecanismos formales basados en grafos que hemos visto están orientados a obtener expresiones compuestas por conjunción de propiedades. Sin embargo, en la literatura podemos encontrar propuestas basadas en grafos en las que se incluyen otro tipo de operadores lógicos [119]. Una de estas propuestas considera la inclusión de nuevas aristas representando negaciones de propiedades, relaciones y disyunciones de propiedades. Podemos ver [45] en el caso de grafos conceptuales. En este caso, las expresiones de referencia podrían obtenerse considerando únicamente conjunciones de propiedades, obteniendo fórmulas lógicas en la forma normal conjuntiva.

El principal problema de esta propuesta, como se indica en [119], es que representar la disyunción entre una propiedad individual y una relación implica definir un tipo especial de arista. Esto añadiría complejidad computacional al problema, haciéndolo intratable en algunos casos. Otra propuesta que podemos encontrar en [119] es la de obtener expresiones de referencia en forma normal disyuntiva. De este modo, se busca una partición del conjunto de objetos a referenciar, de modo que cada una de las particiones sea referible mediante una conjunción de propiedades. Una técnica similar se emplea en el marco de la satisfacción de restricciones en [83].

En el caso del Análisis de Conceptos Formales tenemos que por definición trabaja inherentemente con conjunciones de propiedades, podemos pensar en la definición de concepto formal. Sin embargo, para representar propiedades negadas, al igual que hemos visto en el caso de las propiedades relacionales, podemos incluir un nuevo conjunto de atributos \mathcal{P}^\neg y considerar entonces el contexto formal extendido $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^\neg, I_{\mathbb{C}})$ donde $(o, \neg p) \in I_{\mathbb{C}}$ si, y solamente si, $(o, p) \notin I_{\mathbb{C}}$ [153, 181]. Así, el retículo de conceptos formales puede obtenerse empleando algoritmos clásicos [153], aunque podemos elaborar algoritmos más eficientes teniendo en cuenta la relación entre una propiedad y su negada [181].

Del mismo modo, podemos introducir nuevos atributos que representen negaciones, conjunciones y disyunciones de propiedades, cuya extensión correspondiente puede ser calculada a partir de operaciones de intersección, unión y complemento de conjuntos [81]. Con lo que en esta propuesta cada fórmula lógica aparece como un nuevo atributo en el contexto.

Siguiendo la idea propuesta en [56, 119] de buscar expresiones de referencia en forma normal conjuntiva, tenemos una solución alternativa a este problema. Esta idea se basa en añadir al contexto un conjunto de atributos $\mathcal{P}^\vee = \{[q_1 \vee \dots \vee q_k] \mid q_i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^\neg, \forall 1 \leq i \leq k, 2 \leq k \leq |\mathcal{P}|\}$, que se corresponden con la disyunción de propiedades en sentido positivo o negativo. En este caso consideramos el contexto

$\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^\neg \cup \mathcal{P}^\vee, I_{\mathbb{C}})$, donde para cada $[q_1 \vee \dots \vee q_k] \in \mathcal{P}^\vee$ se tiene que $(o, [q_1 \vee \dots \vee q_k]) \in I_{\mathbb{C}}$ si, y solamente si, $(o, q_i) \in I_{\mathbb{C}}$ para algún $1 \leq i \leq k$. Entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.6:

Consideramos un contexto formal $\mathbb{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^\neg \cup \mathcal{P}^\vee, I_{\mathbb{C}})$ y un conjunto de objetos $\emptyset \neq O \subseteq \mathcal{O}$. Entonces, O es referible mediante una fórmula booleana con propiedades en \mathcal{P} si, y solamente si, $\exists(O, O') \in FC(\mathbb{C})$ con $O' \neq \emptyset$.

Demostración: Notemos que existe una biyección f entre el conjunto de propiedades del contexto \mathbb{C} y las fórmulas booleanas en forma normal conjuntiva con propiedades en \mathcal{P} , la cual asocia cada $B := \{r_1, \dots, r_l\} \subseteq \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^\neg \cup \mathcal{P}^\vee$ con la fórmula $f(B) := (r_1 \wedge \dots \wedge r_l)$, y viceversa³. Además, notamos por $\llbracket f(B) \rrbracket = B' \subset \mathcal{O}$. Entonces:

\Rightarrow) Sea $O \subseteq \mathcal{O}$, $O \neq \emptyset$, un conjunto referible mediante una fórmula booleana γ con propiedades en \mathcal{P} . Es decir, $\llbracket \gamma \rrbracket = O$. Por las propiedades de la lógica booleana tenemos que existe al menos una fórmula γ_{cnf} con propiedades en \mathcal{P} en forma conjuntiva normal que es lógicamente equivalente a γ . Entonces $\llbracket \gamma_{cnf} \rrbracket = \llbracket \gamma \rrbracket = O$. Por lo tanto, como hemos visto, esto implica que existe un conjunto de propiedades $f^{-1}(\gamma_{cnf}) \subseteq \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^\neg \cup \mathcal{P}^\vee$ tal que $(f^{-1}(\gamma_{cnf}))' = O$. Con lo cual, $(O, f^{-1}(\gamma_{cnf}))$ es un semiconcepto referencial. Entonces, por el Teorema 4.2 y el Corolario 4.1, existe un concepto formal $(O, O') \in FC(\mathbb{C})$, con $f^{-1}(\gamma_{cnf}) \subseteq O' \neq \emptyset$.

\Leftarrow) Sea $(O, O') \in FC(\mathbb{C})$ con $O, O' \neq \emptyset$. Entonces $f(O')$ es una fórmula booleana con propiedades \mathcal{P} tal que $\llbracket f(O') \rrbracket = O$. Por lo tanto, O es referible mediante $f(O')$.

□

En el campo del Análisis de Conceptos Formales, podemos encontrar propuestas para tratar información disyuntiva. Así, aunque en nuestra propuesta añadimos de forma explícita estas disyunciones al contexto, en la literatura podemos encontrar otras propuestas alternativas [149].

Aunque el Teorema 4.6 nos da un modo de determinar si un conjunto es referible mediante una fórmula booleana y un modo de construir dicha fórmula, esta aproximación supone un aumento en la complejidad computacional del problema con respecto a la versión en la cual únicamente consideramos conjunciones de propiedades. Sin embargo, podemos reducir esta complejidad empleando estrategias que tengan en cuenta las complejas relaciones que pueden existir entre los elementos en \mathcal{P} , \mathcal{P}^\neg , y \mathcal{P}^\vee para calcular el retículo de conceptos. Estrategias de este tipo han sido empleadas con anterioridad en el campo del Análisis de Conceptos Formales, por ejemplo considerando implicaciones entre atributos [12].

³Por motivos de simplicidad, estamos considerando como la misma fórmula todas aquellas que son lógicamente equivalentes realizando todas las permutaciones de propiedades posibles en cada conjunción y disyunción.

PROPIEDADES GRADUALES

Ya hemos visto en el Capítulo 3 distintas formas de tratar con información vaga en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Así, una primera aproximación sería transformar cada propiedad gradual en propiedades crisp mediante umbrales. Pudiendo calcular estos umbrales dependiendo del contexto cuando se trabaja con propiedades contextuales como el tamaño. Por otro lado, también vimos cómo manejar esta información a través de la Teoría de Conjuntos Difusos y la Representación por Niveles.

La estrategia de emplear umbrales ha sido empleada para manejar información imprecisa dentro de la Teoría de Grafos [119]. Esto se basa en la propuesta de [52] en la que se representan las propiedades graduales por medio de un conjunto de desigualdades como *alta* > 179*cms*. Podemos ver que esta estrategia puede emplearse para manejar información imprecisa en cualquiera de los marcos formales que hemos presentado.

En cuanto a la segunda estrategia, podemos encontrar extensiones difusas de los distintos mecanismos formales de representación de conocimiento que hemos presentado. Entre ellos encontramos grafos difusos [156, 184], grafos conceptuales difusos [32], satisfacción de restricciones difusas [41, 134, 185], lógicas descriptivas difusas [16, 47, 200] y Análisis de Conceptos Formales difuso, en el que profundizaremos en el siguiente capítulo. Por lo tanto, nos podemos beneficiar de estas extensiones para trabajar con información vaga en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia.

En el siguiente capítulo veremos cómo tratar con información imprecisa en el Análisis de Conceptos Formales empleando la Representación por Niveles como el mecanismo con el que representar y manejar este tipo de información en un contexto formal.

PROPIEDADES CONTEXTUALES

Como hemos visto anteriormente, las propiedades contextuales pueden tratarse como un tipo de propiedad gradual [52]. Sin embargo, desde nuestro punto de vista, la dependencia del contexto va más allá de la gradualidad. A modo de ejemplo cabe señalar que habrá casos en los que la expresión «los objetos grises de entre los grandes» se refiera a un conjunto distinto que «los objetos grandes de entre los grises». Además, los humanos no somos tan precisos en nuestras descripciones, generando expresiones como «los objetos grises grandes» o «los objetos grandes grises», expresiones que presentan una mayor ambigüedad sobre en qué orden considerar las propiedades, algo que dependerá del receptor del mensaje.

En la literatura no hemos encontrado mecanismos para tratar este tipo de propiedades en los marcos formales presentados en la Sección 2.1.1. En el caso del Análisis de Conceptos Formales encontramos una extensión que resulta interesante para tratar con propiedades contextuales: el Análisis de Conceptos Triádicos [128].

Un contexto triádico se define como un cuarteto (G, M, Co, Y) donde G y M son los conjuntos usuales de objetos y atributos, Co es un conjunto de condiciones y Y es una relación ternaria $Y \subseteq G \times M \times Co$, donde $(g, m, c) \in Y$ representa que el

objeto g presenta la propiedad m bajo la condición c . Esta extensión nos permite representar propiedades contextuales de un modo muy general.

En particular, en los ejemplos que hemos presentado anteriormente, podemos emplear condiciones que indiquen conjuntos de objetos dentro de los cuales el objeto tiene una determinada propiedad, como ser el más grande de los objetos negros, considerando $Co \subseteq 2^G$. En este caso, $(g, m, A) \in Y$, con $A \subseteq G$, significa que g cumple la propiedad m en el subcontexto A . La definición de semiconceptos referenciales abre una interesante línea de investigación tanto en el campo del Análisis de Conceptos Formales, como en el campo de la Generación de Expresiones de Referencia.

PROPIEDADES COLECTIVAS

Hay dos modos de trabajar con propiedades colectivas: viendo todas las propiedades como colectivas [56] o viéndolas como propiedades contextuales individuales [198]. Así, por ejemplo, la primera alternativa se ha empleado en la Teoría de Grafos para tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia [119]. La segunda propuesta la podemos encontrar en el marco de la satisfacción de restricciones [198].

Ambas estrategias pueden emplearse en el marco de las lógicas descriptivas y del Análisis de Conceptos Formales, aunque el uso de estas estrategias ha de analizarse con mayor profundidad.

Para el Análisis de Conceptos Formales veamos la diferencia en el contexto formal que empleamos en cada una de las dos estrategias posibles.

Por un lado, si consideramos que todas las propiedades son colectivas, incluyendo las individuales, entonces consideraremos como objetos en nuestro contexto cada uno de los posibles conjuntos de objetos en el contexto original. En este caso el contexto formal considerado sería de la forma $C := (2^O, \mathcal{P}, I_C)$, de modo que, a través de I_C , asignaremos a cada posible conjunto de objetos aquellas propiedades colectivas que cumpla como conjunto, y aquellas propiedades individuales que sean comunes a todos los elementos del conjunto.

Por otro lado, si vemos a las propiedades colectivas como propiedades contextuales individuales entonces tendremos que emplear un contexto formal triádico $(\mathcal{O}, \mathcal{P}, 2^O, Y)$, como hemos visto antes. De modo que cada objeto tendrá las propiedades colectivas que tengan aquellos conjuntos de objetos de los que forma parte como propiedades contextuales asociadas a cada uno de esos conjuntos de objetos.

4.3.5 IDONEIDAD DEL ANÁLISIS DE CONCEPTOS FORMALES COMO MARCO FORMAL PARA LA GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA

El análisis que acabamos de realizar muestra que el Análisis de Conceptos Formales constituye un nuevo marco formal con el que abordar satisfactoriamente el problema de la Generación de Expresiones de Referencia. Así, tanto el problema clásico de Generación de Expresiones de Referencia como distintas extensiones de este pueden beneficiarse de emplear las herramientas disponibles en el marco del Análisis de Conceptos Formales. Más en concreto:

- El Análisis de Conceptos Formales es un marco natural para la Generación de Lenguaje Natural como ya pusimos de manifiesto. Un concepto formal puede verse como la interpretación filosófica tradicional de concepto. Es decir, algo determinado por su extensión e intensión [211]. En concreto, la extensión y la intensión se corresponden con las nociones de denotación y connotación de expresiones introducidas por John Stuart Mill, como se puede ver en la sección 2.3 de [54].
- Podemos resolver el problema clásico de Generación de Expresiones de Referencia empleando únicamente las herramientas propias del Análisis de Conceptos Formales. Sin embargo, como veremos más adelante en esta sección, la combinación del ACF con otros marcos formales nos puede permitir obtener mejores resultados en la resolución de los problemas que hemos presentado.
- Además, el Análisis de Conceptos Formales nos da, para el problema clásico de Generación de Expresiones de Referencia, un modo inmediato de comprobar si un concepto es referible y encontrar una expresión de referencia para él, basta con comprobar si $O = O''$. En cambio, las propuestas clásicas como los algoritmos voraces que hemos visto, en caso de que un objeto no sea referible, han de explorar todo el espacio de posibles expresiones de referencia hasta comprobar que no hay ninguna válida. Con lo que el Análisis de Conceptos Formales resulta interesante también desde el punto de vista computacional.
- El Análisis de Conceptos formales es, junto con las lógicas descriptivas, el único mecanismo de representación de conocimiento que proporciona herramientas adecuadas para resolver de forma eficiente el problema de la referibilidad. Y además, nos proporciona una representación compacta del conjunto de todas las expresiones de referencia válidas para un determinado conjunto de objetos. Mientras que las lógicas descriptivas únicamente nos proporcionan una expresión de referencia para cada uno de los conjuntos referibles en el universo de discurso. Esto hace que el Análisis de Conceptos Formales sea interesante para aplicaciones como la descripción de escenas donde podemos tener diversas expresiones de referencia válidas para cada uno de los conjuntos referibles en la escena [110].

Esta lista de aspectos relevantes del Análisis de Conceptos Formales no pretende ser exhaustiva. Los avances y desarrollos teóricos en el campo del Análisis de Conceptos Formales abren un nuevo campo de investigación en relación al problema de la Generación de Expresiones de Referencia. En nuestro análisis no hemos encontrado un mecanismo formal de representación de conocimiento que resulte mejor que el resto para todos los problemas relacionados con la Generación de Expresiones de Referencia, al igual que se señala en [118] sin considerar el Análisis de Conceptos Formales.

Además de ver el Análisis de Conceptos Formales como una herramienta que nos permite tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia de un modo eficiente, es interesante ver cómo la combinación de las herramientas del

ACF con otros mecanismos de representación de conocimiento y técnicas puede beneficiar el área de la Generación de Expresiones de Referencia. Así, en la literatura podemos encontrar distintas combinaciones propuestas para tratar otros problemas.

- Como hemos visto, las estrategias basadas en grafos son especialmente adecuadas para representar la información de un contexto en el que se consideran propiedades relacionales. Esta capacidad expresiva ha sido empleada junto con el Análisis de Conceptos Formales en [169]. En este trabajo se presentan los grafos relacionales para representar fórmulas y operaciones lógicas de la Lógica Contextual de Relaciones, una lógica basada en la combinación del Análisis de Conceptos Formales y una lógica algebraica de Peirce [19]. Otra sinergia entre el ACF y la Teoría de Grafos puede encontrarse en [148] donde algoritmos propios de la Teoría de Grafos y técnicas como el orden topológico son empleadas para analizar el retículo de conceptos formales.
- Podemos encontrar varias aplicaciones del Análisis de Conceptos Formales en combinación con las lógicas descriptivas, algunas muy tempranas como [201]. En [191] podemos encontrar una revisión de la combinación del Análisis de Conceptos formales con las lógicas descriptivas. Estas aplicaciones se deben a la estrecha relación entre ambos formalismos, como se indica en [61]: «conjuntos de atributos en el ACF y conjunciones de conceptos en las lógicas descriptivas comparten en esencia la misma semántica». En [6] se generan explicaciones de hipótesis formuladas sobre imágenes médicas, combinando lógicas descriptivas y operadores morfológicos en un retículo de conceptos. Finalmente, en [61] podemos ver un estudio sobre cómo combinar el Análisis de Conceptos Formales con las lógicas descriptivas para tratar con propiedades graduales a través de conjuntos difusos.

Finalmente, vamos a ver algunas combinaciones del Análisis de Conceptos Formales con otros mecanismos que pueden resultar interesantes para abordar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia:

- A excepción del mecanismo de satisfacción de restricciones, no hay ningún formalismo que permita optimizar la expresión de referencia generada en base a preferencias definidas previamente. Sin embargo, el Análisis de Conceptos Formales y la satisfacción de restricciones pueden combinarse para mejorar la búsqueda de una expresión de referencia óptima, especialmente cuando dicha búsqueda ha de realizarse para varios conjuntos de objetos. En ese caso, la satisfacción de restricciones puede emplearse para buscar la mejor expresión de referencia dentro de las fronteras que define el Análisis de Conceptos Formales para este espacio de búsqueda, acelerando así el proceso.
- Así, un problema común de los mecanismos formales que hemos presentado está relacionado con la eficiencia de los procesos de búsqueda cuando el número de propiedades en el contexto aumenta. De hecho, aunque el número de propiedades sea pequeño, emplear generalizaciones como considerar negaciones o disyunciones de propiedades para aumentar la potencia expresiva

del sistema puede llevar al mismo problema. En ese caso, encontrar un equilibrio entre la eficiencia y la expresividad de nuestro sistema es necesario; se ha de encontrar un balance entre las capacidades funcionales y no funcionales del sistema. En el caso del Análisis de Conceptos Formales, un modo de encontrar ese equilibrio es combinar los algoritmos incrementales para obtener el retículo de conceptos con heurísticas voraces como las empleadas por el Algoritmo Incremental [50]. La idea es obtener un primer retículo de conceptos empleando un primer subconjunto de propiedades e incorporar, según sea necesario, nuevos conjuntos de propiedades en distintas iteraciones, según los recursos computacionales y el tiempo de respuesta requerido lo permitan. Esta prometedora idea será objeto de trabajo futuro.

Así, concluimos nuestro análisis sobre el Análisis de Conceptos Formales como una herramienta para tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia. Como hemos podido ver resulta una herramienta muy prometedora que abre una interesante vía de investigación en este campo.

4.4 DIFUSIÓN DE RESULTADOS

La propuesta para tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia a través del Análisis de Conceptos formales ha sido presentada en el siguiente artículo:

- Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla, M. Dolores Ruiz y Daniel Sánchez. «Formal concept analysis for the generation of plural referring expressions». en. En: *Information Sciences* 579 (2021), págs. 717-731

Este artículo ha sido elaborado en colaboración con la Doctora María Dolores Ruiz, licenciada en matemáticas y doctora en informática, quien forma parte del grupo de trabajo de la beca de Formación de Profesorado Universitario que ha disfrutado el doctorando. Así, el trabajo ha sido publicado en *Information Sciences* revista internacional de reconocido prestigio (JIF: 2020 9/223 Q1 96.19).

Capítulo 5

Análisis de Conceptos Formales para la Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales

En el capítulo anterior hemos presentado el Análisis de Conceptos Formales como un mecanismo formal de representación de conocimiento con el que tratar el problema de la Generación de Expresiones de Referencia en un ámbito crisp, es decir, en un ámbito en el cual los objetos presentan propiedades binarias. Sin embargo, en el día a día nos encontramos situaciones y dominios donde hemos de manejar información imprecisa o vaga, como ya hemos puesto de manifiesto en los Capítulos 2 y 3. Para ejemplificar esta situación podemos considerar el universo de discurso de la Figura 5.1 compuesto por varias figuras con distintas formas y colores.

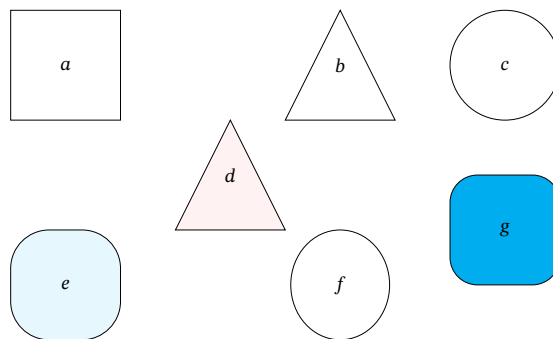


Figura 5.1: Ejemplo de universo de discurso en el que encontramos diversas figuras con distintas formas y colores de relleno.

Como vemos, algunos objetos en la Figura 5.1 no se corresponden con las figuras geométricas básicas que conocemos. Podemos fijarnos en el objeto g que, pese a ser similar a un cuadrado, presenta unas esquinas redondeadas. Por lo tanto, no diríamos que este objeto cumple la propiedad *cuadrado*, que se corresponde con tener una forma cuadrada, completamente, mientras que sí se da en máximo grado para el objeto a .

Al igual que hemos hecho en el Capítulo 4, podemos representar la información vaga de este universo de discurso mediante una tabla. En este caso no se trata de una tabla binaria sino de una tabla cuyas celdas toman valores en el intervalo $[0, 1]$. El valor en cada una de las celdas representa en qué grado el objeto de la fila en cuestión presenta la propiedad de la columna correspondiente.

objeto	<i>cuadrado</i>	<i>círculo</i>	<i>triángulo</i>	<i>rojo</i>	<i>azul</i>	<i>blanco</i>
a	1	0	0	0	0	1
b	0	0	1	0	0	1
c	0	1	0	0	0	1
d	0	0	1	0.5	0	0.5
e	0.5	0.5	0	0	0.75	0.25
f	0	0.75	0	0	0	1
g	0.75	0.25	0	0	1	0

Tabla 5.1: Tabla que contiene la información del universo de la Figura 5.1. Los valores en cada celda indican en qué grado el objeto presenta la propiedad correspondiente.

En la Tabla 5.1 vemos que consideramos tres propiedades relativas a la forma de un objeto: un objeto puede presentar una forma cuadrada, circular o triangular. En el caso en el que un objeto presente esquinas redondeadas entonces tendrá una forma que será ligeramente circular y que no tendrá grado máximo para la propiedad *cuadrado*, como sucede con el objeto e . Del mismo modo encontramos elipses, como el objeto f , que no presentan la propiedad *círculo* con grado uno. También consideramos propiedades relativas al color de relleno de cada figura. Existen objetos que son totalmente blancos, como el a o el b , y objetos que pueden tener un color azul o rojo. Estos colores podrán estar más o menos saturados, lo que se corresponde con un mayor o menor grado para la propiedad relativa al color y para la propiedad *blanco*, como vemos para los objetos d y e .

En este ejemplo vemos cómo podemos representar la información de un universo de discurso con información vaga en forma de tabla. Es precisamente este tipo de información y este tipo de representación las que maneja el *L-Análisis de Conceptos Formales*¹. Como se indica en [151], hoy en día manejamos una gran

¹ En la literatura podemos encontrar distintas denominaciones para la extensión del Análisis de Conceptos Formales a un ámbito gradual. Por ejemplo en [168] se denomina *Fuzzy Formal Concept Analysis*, mientras que en [9] emplean el término *L-Concept Analysis*. En nuestro caso nos hemos decantado por el término *L-Análisis de Conceptos Formales*, ya que consideramos que se ha de diferenciar la gradualidad propia de muchos tipos de información vaga o imprecisa, que puede venir representada mediante

cantidad de información, mucha de ella imprecisa. Podemos pensar, por ejemplo, en el campo del Procesamiento de Lenguaje Natural del que hablamos en el Capítulo 1. Por lo tanto, como indican los autores, elaborar sistemas de razonamiento capaces de manejar este tipo de información se hace relevante, siendo el *L*-Análisis de Conceptos Formales la herramienta que vamos a analizar en este capítulo.

En este capítulo presentamos una nueva propuesta para extender el Análisis de Conceptos Formales para el manejo de información vaga o imprecisa a través de la Teoría de Representación por Niveles. Como veremos, esta nueva propuesta cuenta con diversas ventajas con respecto a otras que podemos encontrar en la literatura y que presentamos en la Sección 5.1. Introducimos esta nueva extensión en la Sección 5.2 y vemos su aplicación al problema central de esta tesis, el problema de la Generación de Expresiones de Referencia, en la Sección 5.3. Finalmente, analizamos nuestra propuesta en comparación con las existentes en la Sección 5.4.

A continuación presentamos un estudio del estado del arte de las propuestas que encontramos en la literatura para formalizar el *L*-Análisis de Conceptos Formales, dando así un contexto en el que enmarcar nuestra propuesta.

5.1 *L*-ANÁLISIS DE CONCEPTOS FORMALES: ESTADO DEL ARTE

En la literatura existen diversas extensiones o adaptaciones del Análisis de Conceptos Formales para el manejo de información imprecisa o vaga. A este formalismo en el que manejamos información vaga a través del ACF lo denominamos *L*-Análisis de Conceptos Formales, y lo abreviaremos como *L*-ACF. Podemos encontrar distintos trabajos que realizan un estudio del estado del arte de estas extensiones [23, 168]. A continuación vamos a ver las propuestas más relevantes que hallamos en la literatura.

En primer lugar vamos a revisar el trabajo de Ana Burusco y Ramón Fuentes-González [21] que es considerado el primer trabajo a este respecto [23].

En este trabajo se parte de una estructura algebraica $L := (L, \leq, \neg, \oplus)$, donde (L, \leq) es un retículo completo, \neg es una operación de complemento en L y \oplus es una *t*-conorma en L . Aquí vemos algo fundamental del *L*-Análisis de Conceptos Formales y es que, al manejar información vaga o imprecisa, se considera un conjunto de grados L que representa en qué grado cada elemento presenta una determinada propiedad. Por lo tanto, no nos tenemos que restringir a grados en el intervalo $[0, 1]$ como es usual en la Teoría de Conjuntos Difusos, sino que podemos emplear el conjunto de grados que mejor se adecue a la semántica de nuestro problema. Además, es usual que dicho conjunto de grados venga acompañado de una estructura algebraica, que aquí hemos notado como L , con un conjunto de operaciones y propiedades adecuadas para manejar y combinar la información representada por los distintos grados en L .

una serie de grados en un cierto conjunto L , de la herramienta que se emplee para modelar y manejar esta información, que usualmente es la Teoría de Conjuntos Difusos. Es por ello que reservamos el término «difuso» para los casos en los que hablamos de conceptos propios de dicha teoría, y hablaremos de «gradual» o añadiremos el prefijo *L* cuando estemos hablando de gradualidad de la forma más general, independientemente de la herramienta que empleemos para ello. En concreto, nosotros emplearemos en este capítulo la Teoría de Representación por Niveles para manejar esta información vaga.

Si consideramos, al igual que en el marco clásico analizado en la Sección 4.1, sendos conjuntos de objetos y atributos G y M , en un marco gradual se puede considerar una L -relación entre estos conjuntos de objetos y atributos, es decir, una L -relación $I \in L^{G \times M}$, con $I : G \times M \rightarrow L$. Partiendo de esta L -relación se define un L -contexto formal² como sigue.

Definición 5.1: L -contexto formal de Burusco et al. [21]

Un L -contexto formal es una tupla $\mathbb{K} := (L, G, M, I)$, donde G y M son los objetos y atributos del contexto e $I \in L^{G \times M}$ es una L -relación.

Como podemos ver, esta definición de L -contexto formal tiene una traducción directa en forma de una tabla como la Tabla 5.1. En el caso del ejemplo de la Figura 5.1 tenemos que $L := [0, 1]$, $G := \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $M := \{\text{cuadrado, círculo, triángulo, rojo, azul, blanco}\}$ e I viene dada por los valores de la Tabla 5.1.

Se indica en [21] que cuando consideramos $L = \{0, 1\}$ nos encontramos ante un contexto formal clásico, con lo que este trabajo constituye una extensión del Análisis de Conceptos Formales clásico.

Dado un L -contexto formal, los autores en [21] definen los siguientes operadores de derivación para seguir con su extensión del marco formal del Análisis de Conceptos Formales clásico a un ámbito gradual.

Definición 5.2: Operadores de derivación de Burusco et al. [21]

Consideremos un L -contexto $\mathbb{K} := (L, G, M, I)$. Dados dos L -conjuntos de objetos y propiedades $A \in L^G$ y $B \in L^M$, se definen los siguientes operadores de derivación $\uparrow : L^G \rightarrow L^M$ y $\downarrow : L^M \rightarrow L^G$:

$$A^\uparrow(m) := \bigwedge_{g \in G} (\neg A(g) \oplus I(g, m)),$$

$$B^\downarrow(g) := \bigwedge_{m \in M} (\neg B(m) \oplus I(g, m)).$$

Podemos ver un ejemplo de aplicación de estos operadores en el L -contexto de la Tabla 5.1, relativo al universo de discurso de la Figura 5.1.

Ejemplo 5.1:

Consideremos el conjunto de objetos $A := 1.0/a + 1.0/b + 1.0/c + 1.0/f$. Si consideramos que $\oplus = \text{máx}$ y como operación de complemento \neg consideramos la usual tenemos que

$$A^\uparrow = 1.0/\text{blanco} = B.$$

Y podemos aplicar ahora el correspondiente operador de derivación sobre este conjunto de atributos.

²En el trabajo original en [21] se denomina a este concepto *L-Fuzzy context*, en nuestro caso, y siguiendo con la nomenclatura que venimos empleando, dado que estamos añadiendo el prefijo L , que como hemos dicho implica el uso de grados en L , omitiremos el atributo difuso. Además, añadimos el adjetivo «formal» para hacer patente la relación con el ACF clásico, aunque en otras ocasiones por brevedad lo omitiremos.

$$B^\downarrow = 1.0/a + 1.0/b + 1.0/c + 0.5/d + 0.25/e + 1.0/f.$$

En este caso tenemos que el conjunto B^\downarrow se corresponde con el conjunto difuso de objetos definido por la propiedad *blanco* entendida como una función de membresía difusa.

En este ejemplo podemos observar una particularidad de las propuestas que vamos a analizar y que supondrá una diferencia con respecto a la propuesta que presentamos en la Sección 5.2. Como vemos, el resultado de aplicar los operadores de derivación anteriormente definidos dependerá de qué t-conorma y qué operación de complementación empleemos. Por tanto, este tipo de propuestas tienen la flexibilidad de la que hablábamos en la Sección 2.3.2; podemos elegir una t-conorma u otra dependiendo de la semántica que queramos emplear.

Una vez se han definido los operadores de derivación podemos pasar a ver cómo se define el retículo de conceptos formales en un ámbito gradual. Esta definición resulta natural teniendo en cuenta las definiciones vistas en la Sección 4.1.

Definición 5.3: Retículo de L -conceptos formales de Burusco et al. [21]

Dado un L -contexto $\mathbb{K} := (L, G, M, I)$, definimos el siguiente conjunto:

$$FC(\mathbb{K}) := \{(A, B) \in L^G \times L^M \mid A^\uparrow = B, B^\downarrow = A\}.$$

A cada par (A, B) del conjunto anterior se le denomina L -concepto formal de \mathbb{K} .

En [21] se define la siguiente relación de orden \leq entre los L -conceptos de $FC(\mathbb{K})$:

$$(A, B) \leq (C, D) \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subseteq C \stackrel{[21]}{\iff} B \supseteq D \quad (5.1)$$

Y se demuestra que el par $(FC(\mathbb{K}), \leq)$ es un retículo completo [21] que se denomina el retículo de L -conceptos formales de \mathbb{K} , aunque normalmente, al igual que hemos hecho en el Capítulo 4, lo notaremos simplemente como $FC(\mathbb{K})$.

Sin embargo este trabajo presenta algunos problemas, tal y como se señala en [23], y es que los operadores de derivación propuestos (Def. 5.2) no verifican una propiedad muy útil de los operadores de derivación clásicos. Hay casos en los que, dado un cierto $A \in L^G$, $A \not\subseteq A^{\uparrow\downarrow}$. Para verlo basta con considerar el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo 5.1:

Consideremos un L -contexto con $L = [0, 1]$, $G = \{g\}$, $M = \{m\}$ e $I(g, m) = 0.5$. Entonces, dado el L -conjunto de objetos $A := 1/g$, siendo $\oplus = \text{máx}$ y como \neg la operación de complementación usual, se da que:

$$\begin{aligned} A^\uparrow(m) &= \text{máx}(\neg A(g), I(g, m)) = \text{máx}(0, 0.5) = 0.5 \implies A^\uparrow = 0.5/m. \\ A^{\uparrow\downarrow}(g) &= \text{máx}(\neg A^\uparrow(m), I(g, m)) = \text{máx}(0.5, 0.5) = 0.5 \implies A^{\uparrow\downarrow} = 0.5/g. \end{aligned}$$

Con lo que tenemos que $A^{\uparrow\downarrow} \not\subseteq A$, como queríamos demostrar.

Por otro lado, se indica en [151] que uno de los motivos por los que Burusco y Fuentes-González no continuaron trabajando en esta propuesta fue el hecho de no emplear implicaciones residuadas en sus operadores de derivación, lo que les impidió seguir adelante en los desarrollos teóricos de su propuesta.

Podemos encontrar otras propuestas en literatura que siguieron al pionero trabajo desarrollado en [21]. A continuación, vamos a ver una extensión presentada por dos autores de forma independiente: Polland [170] y Bělohlávek [13, 26]. En estos trabajos, para evitar los problemas que presentala propuesta anterior, se emplea una estructura de retículo residuado acotado.

Definición 5.4: Retículo residuado [13]

Un retículo residuado es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ que verifica que

- $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ es un retículo acotado.
- $\langle L, \otimes, 1 \rangle$ es un semigrupo conmutativo con 1 como el elemento unidad. Es decir, \otimes es asociativa, conmutativa y se verifica la identidad $x \otimes 1 = x, \forall x \in L$.
- \otimes y \rightarrow verifican

$$x \leq y \rightarrow z \iff x \otimes y \leq z, \text{ para cada } x, y, z \in L.$$

Entonces, partiendo de un retículo residuado y acotado $L := \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$, se definen los siguientes operadores de derivación.

Definición 5.5: Operadores de derivación de Polland [170] y Bělohlávek [13, 26]

Consideremos sendos L -conjuntos de objetos y propiedades $A \in L^G$ y $B \in L^M$. Entonces se definen los siguientes operadores de derivación $\uparrow : L^G \rightarrow L^M$ y $\downarrow : L^M \rightarrow L^G$:

$$A^\uparrow(m) := \bigwedge_{g \in G} (A(g) \rightarrow I(g, m)),$$

$$B^\downarrow(g) := \bigwedge_{m \in M} (B(m) \rightarrow I(g, m)).$$

Veamos un ejemplo de aplicación de estos operadores de derivación para el universo de discurso de la Figura 5.1.

Ejemplo 5.2:

Vamos a considerar como t-norma el mínimo como es usual. Por lo tanto, tomamos como \rightarrow su residuo, la implicación estándar de Gödel que se define como sigue

$$x \rightarrow y := \begin{cases} y & x > y, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este caso, volviendo al ejemplo que hemos visto para la propuesta anterior, tenemos que si $A = 1.0/a + 1.0/b + 1.0/c + 1.0/f$ entonces

$$A^\uparrow = 1.0/\text{blanco},$$

$$A^{\uparrow\downarrow} = (1.0/\text{blanco})^\downarrow = 1.0/a + 1.0/b + 1.0/c + 0.5/d + 0.25/e + 1.0/f.$$

En este caso particular obtenemos los mismos resultados que obteníamos para los operadores de derivación de la propuesta anterior.

Aunque, en el ejemplo anterior obtenemos el mismo resultado que para los operadores de derivación anteriores (Ej. 5.1), estos nuevos operadores tienen ventajas con respecto a los que introducimos en la Definición 5.2. Como se pone de manifiesto en [13], para estos operadores de derivación sí que se tiene que $A \subseteq A^{\uparrow\downarrow}$, $\forall A \in L^G$, y lo mismo ocurre para cualquier conjunto de atributos $B \in L^M$.

Además, como se indica en [13], estos operadores generalizan los operadores clásicos cuando se toma como retículo residuado el único que tiene como soporte al $L = \{0, 1\}$. Y se tiene que estos operadores forman una conexión de Galois [13] y el retículo de conceptos formales se define del mismo modo que en la propuesta de Ana Burusco y Ramón Fuentes-González (Def. 5.3), con la relación de orden de la Ecuación 5.1. De hecho, esto será algo común para todas las propuestas que vamos a ver. En general los operadores de derivación que se definen en cada uno de ellos forman una conexión de Galois y, al igual que ocurre para el Análisis de Conceptos Formales clásico, los L -conceptos formales de estas propuestas se definen como los puntos fijos de dicha conexión de Galois, es decir, los pares de L -conjuntos de objetos y propiedades (A, B) para los que se da que $A^\uparrow = B$ y $B^\downarrow = A$, para cualesquiera que sean los operadores de derivación que se definan.

Las dos propuestas que acabamos de repasar son propuestas simétricas, en las que el papel de atributos y objetos es intercambiable, y los dos operadores de derivación que se definen son simétricos. Sin embargo, en la literatura podemos encontrar trabajos en los que se hace una propuesta no simétrica para los operadores de derivación.

Dos autores, Yahia [220] y Krajčí [122], propusieron, de forma independiente, lo que podríamos denominar una propuesta unilateral empleando la nomenclatura que usa Krajčí ("*one-sided fuzzy approach*"). Como se indica en [23], ambas propuestas difieren en el lado en que se aplica cada uno de los operadores, en los objetos o en los atributos. Dado que, desde un punto de vista teórico, tal y como se vio en la Sección 4.1, el papel de los objetos y los atributos en un contexto formal es intercambiable, basta con estudiar una de estas propuestas para conocerlas.

En [220] se define lo que es como un L -contexto formal³ como sigue.

Definición 5.6: L -Contexto formal de Yahia [220]

Un L -contexto formal es una tripleta $\mathbb{K} := (G, M, I)$, donde G es un conjunto de objetos, M es un L -conjunto de atributos e I es una L -relación entre G y M .

³Aunque este trabajo está claramente arraigado en la Teoría de Conjuntos Difusos, y emplea una nomenclatura que así lo indica, seguimos empleando el término L -contexto formal para unificar toda esta sección en la que presentamos distintos trabajos desarrollados a lo largo de la literatura.

Como podemos ver, en estas propuestas solo uno de los dos conjuntos es difuso, en este caso el conjunto de atributos. Cabe señalar que esta propuesta parte desde el punto de vista práctico de trabajar con una base de datos difusa de la que extraer reglas de asociación difusas [220]. En concreto, los autores proponen un método de extracción de reglas de asociación de una base de datos, donde se almacenan datos de distintas transacciones. En este trabajo, en lugar de considerar transacciones binarias o crisp, donde un elemento está o no en cada una de las transacciones o items de la base de datos, se consideran transacciones difusas en las que se tiene en cuenta la cantidad de cada producto en la transacción. De ahí que tenga una clara interpretación semántica el hecho de presentar un conjunto crisp de objetos, la transacción, y un conjunto difuso de atributos, que en el trabajo original se corresponde con la cantidad en la que aparece cada elemento en la transacción.

Desde el punto de vista del problema de Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales, esta definición de contexto formal también tiene una clara interpretación semántica: un contexto formal podría verse como un conjunto finito de objetos de los cuales conocemos que presentan un conjunto de propiedades graduales, como pueden ser el color o el tamaño. Por lo tanto, este tipo de propuestas unilaterales sí que tienen cabida desde un punto de vista práctico y no han de considerarse simplificaciones teóricas con respecto a otras propuestas más genéricas.

Pues bien, en las propuestas de Yahia y Krajči encontramos los siguientes operadores derivación donde, como vemos, no tenemos simetría.

Definición 5.7: Operadores de derivación de Yahia [220] y Krajči [122]

Consideremos un L -contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$. Entonces se definen los siguientes operadores de derivación $\uparrow : 2^G \rightarrow L^M$ y $\downarrow : L^M \rightarrow 2^G$ como sigue:

$$A^\uparrow(m) := \bigwedge_{g \in A} I(g, m),$$

$$B^\downarrow := \{g \in G \mid \forall m \in M : B(m) \leq I(g, m)\}.$$

A continuación podemos ver un ejemplo de aplicación de estos operadores de derivación para el contexto difuso de la Tabla 5.1 relativo al universo de la Figura 5.1.

Ejemplo 5.3:

Para el conjunto $A := \{a, e\}$ tenemos que

$$A^\uparrow = 0.5/cuadrado + 0.25/blanco.$$

Aplicando ahora el operador de derivación correspondiente al L -conjunto de atributos anterior, obtenemos el siguiente conjunto crisp de objetos:

$$A^{\uparrow\downarrow} = \{a, e\}.$$

En el ejemplo anterior, siguiendo la definición que se da para esta propuesta del conjunto de conceptos formales

$$FC(\mathbb{K}) := \{(A, B) \in 2^G \times L^M \mid f(A) = B, h(B) = A\},$$

el par $(\{a, e\}, 0.5/cuadrado + 0.25/blanco)$ es un concepto formal. En [220] se demuestra que el conjunto $FC(\mathbb{K})$ es un retículo completo.

En la Sección 4.1 ya hemos hablado de la explosión combinatoria que puede darse en el número de conceptos formales de un contexto formal (Ec. 4.13). Esta explosión puede darse del mismo modo en un L -contexto o incluso agravarse. Teniendo en cuenta este problema, Bělohlávek et al. en [28] propusieron trabajar con un menor número de conceptos formales, es decir, no considerar toda la información que podemos extraer de un L -contexto formal, considerando lo que denominan *crispily generated fuzzy concepts*, que sería un subconjunto de los conceptos formales obtenidos a través de los operadores de derivación de la Definición 5.5.

Dado un L -contexto formal \mathbb{K} , se considera el subconjunto $FC(\mathbb{K})_c \subseteq FC(\mathbb{K})$ definido como sigue:

$$FC(\mathbb{K})_c := \{(A, B) \in FC(\mathbb{K}) \mid \exists B_c \subseteq M : A = B_c^\downarrow\} \quad (5.2)$$

Los autores indican [28] que, considerando todos los L -conceptos formales que podría contener $FC(\mathbb{K})$, nos podríamos encontrar con conceptos como un par (A, B) donde $A(m) = 1/2 = B(g), \forall g \in G, \forall m \in M$, que serían conceptos que no resultarían interesantes desde un punto de vista práctico. Por lo tanto, el conjunto $FC(\mathbb{K})_c$ contiene en gran medida, y según la perspectiva de estos autores, la información relevante del contexto.

Por último, cabe señalar que, como se demuestra en [28], $FC(\mathbb{K})_c$ es un retículo completo que además es isomorfo al que obtenemos con la propuesta de Yahia y Krajčí en la Definición 5.7 [23].

Siguiendo con la problemática de tratar con el elevado número de conceptos formales que pueden aparecer, encontramos la siguiente propuesta que es una generalización que tiene como casos particulares la primera propuesta de Polland y Bělohlávek (Def. 5.5) y la propuesta de trabajar con conceptos formales *crispily generated* (Eq. 5.2). Así, en [27] se presenta una propuesta para reducir el número de conceptos formales que se consideran. En esta propuesta se consideran unas funciones que se denominan modificadores (del inglés *hedges* que en [27] se emplea como abreviación de *truth-stressing hedge*) que actúan como unos parámetros que controlan el número de conceptos extraídos al establecer qué objetos y/o atributos son considerados «importantes».

Definición 5.8: Modificador [27, 29]

Dado un retículo residuado completo $L := \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$, un modificador es una función monaria $*$: $L \rightarrow L$ que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $a, b \in L$:

1. $1^* = 1$,
2. $a^* \leq a$,
3. $(a \rightarrow b)^* \leq a^* \rightarrow b^*$,

$$4. a^{**} = a^*.$$

Si se comparan dos modificadores punto a punto, el mayor modificador es la función identidad y el menor sería el que se denomina globalización, el cual se define como $a^* = 0, \forall a \neq 0$.

En la propuesta presentada en [29] se definen los siguientes operadores de derivación empleando dos de estos modificadores como parámetros:

Definición 5.9: Operadores de derivación con modificadores [29]

Consideremos un retículo residuado L y un L -contexto formal (G, M, I) con $I : G \times M \rightarrow L$, siendo G y M dos conjuntos de objetos y atributos respectivamente. Entonces, se definen los siguientes operadores de derivación $\uparrow : L^G \rightarrow L^M$ y $\downarrow : L^M \rightarrow L^G$, donde *G y *M son modificadores sobre L :

$$A^\uparrow(m) := \bigwedge_{g \in G} (A(g)^{{}^*G} \rightarrow I(g, m)),$$

$$B^\downarrow(g) := \bigwedge_{m \in M} (B(m)^{{}^*M} \rightarrow I(g, m)).$$

Empleando estos operadores de derivación se define el retículo de conceptos de la forma usual [29]:

$$FC(G^{{}^*G}, M^{{}^*M}, I) := \{(A, B) \mid A^\uparrow = B, B^\downarrow = A\}.$$

Y si se consideran los dos modificadores siendo la identidad, entonces se tiene la propuesta de Polland y Bělohávek (Def. 5.5), y si por otro lado G^* es la identidad y M^* es la globalización, entonces se obtiene el retículo de conceptos formales *crisply generated*. Como se indica en [29], G^* y M^* pueden verse como parámetros para reducir el tamaño del retículo $FC(G^{{}^*G}, M^{{}^*M}, I)$.

En la literatura encontramos otra generalización del L -Análisis de Conceptos Formales en el trabajo de [123].

Definición 5.10: Generalización del L -ACF de Krajčí [123]

Consideremos un poset P y dos retículos completos C y D , así como la relación $\bullet : C \times D \rightarrow P$, una función monótona y continua por la izquierda en sus dos argumentos. Es decir, sea \bullet una función que presenta las siguientes propiedades:

- $c_1 \leq c_2 \implies c_1 \bullet d \leq c_2 \bullet d, \forall c_1, c_2 \in C, d \in D$.
- $d_1 \leq d_2 \implies c \bullet d_1 \leq c \bullet d_2, \forall c \in C, d_1, d_2 \in D$.
- Si se da que $c \bullet d \leq p$ con $d \in D, p \in P$ y $\forall c \in X \subseteq C$, entonces $\sup(X) \bullet d \leq p$.
- Si se da que $c \bullet d \leq p$ con $c \in C, p \in P$ y $\forall d \in Y \subseteq D$, entonces $c \bullet \sup(Y) \leq p$.

Por otro lado, sean A y B dos conjuntos no vacíos y $R : A \times B \rightarrow P$. Entonces se consideran L -conjuntos sobre los retículos C y D y se definen los siguientes operadores⁴ $\swarrow : C^A \rightarrow B^D$ y $\nearrow : D^B \rightarrow C^A$ tales que dados dos conjuntos representados por sus funciones de membresía $h : A \rightarrow C$ y $k : B \rightarrow D$, se tiene que:

$$\swarrow (h)(b) := \sup\{d \in D \mid \forall a \in A, h(a) \cdot d \leq R(a, b)\}.$$

$$\nearrow (k)(a) := \sup\{c \in C \mid \forall b \in B, c \cdot k(b) \leq R(a, b)\},$$

Como se puede ver en el propio trabajo de Krajčí [123], esta propuesta generaliza a los contextos difusos de Pollard y Bělohávek (Def. 5.5), así como a la propuesta del mismo autor en [122].

En esta generalización lo que tenemos es que los L -conjuntos de atributos y objetos que considerábamos en las propuestas anteriores se pueden definir sobre dos conjuntos L_1 y L_2 distintos, y que además pueden ser distintos del conjunto parcialmente ordenado que se emplea para establecer el grado de relación entre atributos y objetos en el contexto, de ahí que esta propuesta sea más genérica.

Y se demuestra en [123] que con estos operadores de derivación, con la metodología que estamos acostumbrados a emplear, se puede tener una estructura de retículo completo de conceptos formales.

A continuación vamos a ver una generalización que presenta mayor flexibilidad que la anterior. No solo permite manejar varios conjuntos de grados distintos para expresar gradualidad de distinta forma en objetos, atributos y la relación entre estos. También permite interpretar esta información de una forma distinta para cada atributo o para cada objeto que exista en el contexto. Esta generalización es una propuesta de Medina et al. en [150]. En primer lugar se introduce la siguiente definición que constituye el constructo principal para esta propuesta.

Definición 5.11: Tripletta adjunta [150]

Consideremos tres conjuntos parcialmente ordenados (P_1, \leq_1) , (P_2, \leq_2) y (P_3, \leq_3) ; y tres funciones $\& : P_1 \times P_2 \rightarrow P_3$, $\swarrow : P_3 \times P_2 \rightarrow P_1$ y $\searrow : P_3 \times P_1 \rightarrow P_2$ ⁵. Se dice que la tripletta $(\&, \swarrow, \searrow)$ es una tripletta adjunta con respecto a P_1 , P_2 y P_3 si verifica las siguientes propiedades:

- $\&$ conserva el orden en sus dos argumentos.
- \swarrow y \searrow conservan el orden en su primer argumento y lo invierten en el segundo.
- Para cualquier $(x, y, z) \in P_1 \times P_2 \times P_3$ se tiene que $x \leq_1 (z \swarrow y) \iff (x \& y) \leq_3 z \iff y \leq_2 (z \searrow x)$.

⁴Estamos siguiendo la notación de [123] para estos operadores, pero nos gustaría señalar que estos operadores no se corresponden con las relaciones flecha que hemos definido anteriormente.

⁵Nuevamente nos gustaría señalar que no hemos de confundir estas funciones con las relaciones flecha anteriormente introducidas.

Una vez que se ha definido el concepto de tripleta adjunta, en [150] se define el siguiente concepto, sobre el cual se definirá lo que es un contexto formal en esta propuesta.

Definición 5.12: Marco multi-adjunto [150]

Un marco multi-adjunto es una tupla

$$\mathcal{L} := (L_1, L_2, P, \leq_1, \leq_2, \leq, \&_1, \swarrow_1, \searrow_1, \dots, \&_n, \swarrow_n, \searrow_n),$$

donde (L_1, \leq_1) y (L_2, \leq_2) son retículos completos, (P, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado y para $\forall i = 1, \dots, n$ la tripleta $(\&_i, \swarrow_i, \searrow_i)$ es una tripleta adjunta con respecto a L_1, L_2 y P .

Este marco también se puede notar como $(L_1, L_2, P, \&_1, \dots, \&_n)$ para abreviar.

Una vez se ha definido qué es un marco multi-adjunto, los autores pasan a definir qué es un contexto sobre un marco multi-adjunto, que será la forma de generalizar otras extensiones del Análisis de Conceptos Formales clásico al caso gradual.

Definición 5.13: Contexto sobre un marco multi-adjunto [150]

Un contexto para un cierto marco multi-adjunto $(L_1, L_2, P, \&_1, \dots, \&_n)$ es una tupla (G, M, I, σ) , donde G y M son conjuntos no vacíos, $I : G \times M \rightarrow P$ es una L -relación, y σ es una función que asigna a cada objeto en G (o a cada atributo en M) una tripleta multi-adjunta $(\&_i, \swarrow_i, \searrow_i)$. Es decir, $\sigma : G \rightarrow \{1, \dots, n\}$ (o bien $\sigma : M \rightarrow \{1, \dots, n\}$).

Y en un contexto sobre un marco multi-adjunto se definen los siguientes operadores de derivación:

Definición 5.14: Operadores de derivación en un contexto sobre un marco multi-adjunto [150]

Consideremos un contexto formal definido sobre un marco multi-adjunto. Se definen los siguientes operadores de derivación $\uparrow : L_2^G \rightarrow L_1^M$ y $\downarrow : L_1^M \rightarrow L_2^G$:

$$A^\downarrow(m) := \inf_{g \in G} \{I(g, m) \searrow_{\sigma(m)} A(g)\},$$

$$B^\uparrow(g) := \inf_{m \in M} \{I(g, m) \swarrow_{\sigma(m)} B(m)\}.$$

Como se pone de manifiesto en [150], esta propuesta generaliza a la propuesta de Krajči introducida en la Definición 5.10. Nuevamente tenemos tres conjuntos distintos de grados de cumplimiento, que en este caso son los conjuntos L_1, L_2 y P del marco multi-adjunto que se considere, para definir los distintos L -conjuntos y L -relaciones que representan la información del contexto. Y, además, en este caso la relación entre la información de los L -conjuntos de objetos y atributos que se consideren y la información representada por I se puede dar con distinta semántica para cada uno de los atributos (o de los objetos, aunque en la Def. 5.14 se da para los atributos) a través de la función σ que introduce esta propuesta.

Veamos un ejemplo que dan en el propio [150] de aplicación de esta propuesta.

Ejemplo 5.4:

Se considera como marco multi-adjunto el $([0, 1], [0, 1], [0, 1], \&_G, \&_L)$, donde $\&_G$ y $\&_L$ son las conjunciones de Gödel y Łukasiewicz respectivamente y por lo tanto

$$b \searrow_L a = b \swarrow^L a := \min\{1, 1 + b - a\},$$

$$b \searrow_G a = b \swarrow^G a := \begin{cases} 1 & \text{si } b \geq a, \\ b & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los conjuntos de objetos y atributos que se consideran son:

$$G := \{\text{cálido, frío, poca lluvia, viento suave}\} \text{ y}$$

$$M := \{L, M, X, J, V, S, D\}.$$

Y la relación que se considera entre objetos y atributos es

	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>X</i>	<i>J</i>	<i>V</i>	<i>S</i>	<i>D</i>
<i>cálido</i>	0.5	1	0.5	0.5	0	0	0
<i>frío</i>	0.5	0	0.5	0.5	1	1	1
<i>poca lluvia</i>	1	1	0	1	0	0.5	0
<i>viento suave</i>	1	1	0	0	0	0	1

Podemos definir, por ejemplo, dos contextos distintos, $\mathbb{K}_1 := (G, M, I, \sigma_1)$ y $\mathbb{K}_2 := (G, M, I, \sigma_2)$, donde $\sigma_1(m) = \&_G$ y $\sigma_2(m) = \&_L$, $\forall m \in M$. Y si tenemos que la preferencia de un usuario es encontrar un día en el que caminar cómodamente, podríamos pensar que el usuario busca un día que no sea muy caluroso, ni muy frío, y que además no llueva. Estas preferencias del usuario las podemos representar con el siguiente conjunto difuso de atributos:

$$f := 0.5/\text{cálido} + 0.5/\text{frío} + 1.0/\text{poca lluvia} + 0.5/\text{viento suave}.$$

Entonces en \mathbb{K}_1 tenemos

$$f^\downarrow = 1.0/L,$$

$$f^{\downarrow\uparrow} = 0.5/\text{cálido} + 0.5/\text{frío} + 1.0/\text{poca lluvia} + 1.0/\text{viento suave}.$$

Y por tanto, se tiene que el lunes es el mejor día para ir a andar según la interpretación que se le da a la información contenida en I mediante la función σ_1 que se emplea en \mathbb{K}_1 . En cambio, si interpretamos esta información con σ_2 en \mathbb{K}_2 lo que obtenemos es

$$f^\downarrow = 1.0/L + 0.5/M + 0.5/J + 0.5/S + 0.5/D$$

$$f^{\downarrow\uparrow} = 0.5/\text{cálido} + 0.5/\text{frío} + 1.0/\text{poca lluvia} + 0.5/\text{viento suave}$$

Con lo que en esta ocasión el lunes es el mejor día; pero martes, jueves, sábado y domingo también podrían ser buenos días para salir a caminar. Por último, si además de estas preferencias del usuario tenemos que el usuario prefiere salir a caminar los domingos, podríamos definir un contexto \mathbb{K}_3 donde $\sigma_3(m) = \&_G$ para los días de la semana, mientras que $\sigma_3(m) = \&_L$ para el sábado y el domingo. Aquí se ve el potencial de esta propuesta, y es el potencial semántico que nos da el poder emplear distintas tripletas adjuntas para distintos elementos. En cuyo caso obtendríamos

$$f^\downarrow = 1/L + 0.5/S + 0.5/D$$

$$f^{\downarrow\uparrow} = 0.5/cálido + 0.5/frío + 1.0/poca\ lluvia + 0.5/viento\ suave$$

Con lo que ahora tendríamos que el lunes sigue siendo el mejor día, pero ahora son solo los días del fin de semana los que siguen siendo adecuados para salir a caminar.

Otra propuesta que se puede encontrar en la literatura es la de Georgescu y Popescu [95] en la cual trabajan con un retículo completo residuado $L := \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ que tiene como particularidad que, al contrario que sucedía con otras propuestas que se han presentado, \otimes no es conmutativa. Y en este caso la equivalencia se desdobra en dos:

$$\begin{aligned} \cdot a \leq b \rightarrow c &\iff a \otimes b \leq c, \\ \cdot a \leq b \Rightarrow c &\iff b \otimes a \leq c. \end{aligned}$$

Los autores de [95] justifican la necesidad de emplear una conjunción no conmutativa debido a que hay ocasiones en que el orden de los elementos en la conjunción es relevante. Esto puede verse, por ejemplo, con las propiedades contextuales de las que hablamos en la Sección 2.2.

En la literatura también se encuentran propuestas que trasladan el problema de un ámbito gradual a un ámbito crisp. Como se indica en [25] podemos encontrar dos estrategias distintas para realizar este proceso. En primer lugar podemos traducir los operadores de derivación del caso gradual a un conjunto de operadores de derivación cada uno de los cuales está asociado a un determinado grado de verdad de L . Esta idea ya se refleja en [24], y sus resultados pueden encontrarse en un trabajo más actualizado en la sección 5.3 de [26].

En concreto, en este trabajo se indica cómo se puede representar una L -conexión de Galois como un conjunto de conexiones de Galois clásicas, como pone de manifiesto el siguiente teorema.

Definición 5.15: Sistema de conexiones de Galois L -anidado [26]

Un sistema de conexiones de Galois $\{(\uparrow_\alpha, \downarrow_\alpha) \mid \alpha \in L\}$ se dice que está L -anidado si cumple las siguientes condiciones:

1. $\forall \alpha, \beta \in L$ tales que $\alpha \leq \beta$ se tiene que $A^{\uparrow_\alpha} \supseteq A^{\uparrow_\beta}$ y $B^{\downarrow_\alpha} \supseteq B^{\downarrow_\beta}$, para cualesquiera $A \in 2^G$ y $B \in 2^M$.

2. El conjunto $\{\alpha \in L \mid m \in \{g\}^{\uparrow\alpha}\}$ contiene al mayor elemento de L .

Teorema 5.1: Expresar una conexión de L -Galois a través de conexiones de Galois crisp [24, 26]

Dada una L -conexión de Galois $\langle \uparrow, \downarrow \rangle$ entre G y M , se define el siguiente conjunto de conexiones de Galois

$$C_{\langle \uparrow, \downarrow \rangle} := \{\langle \uparrow_\alpha, \downarrow_\alpha \rangle : \alpha \in L\}, \quad (5.3)$$

donde $\uparrow_\alpha : 2^G \rightarrow 2^M$ y $\downarrow_\alpha : 2^M \rightarrow 2^G$ vienen dadas por $A^{\uparrow_\alpha} = (A^\uparrow)_\alpha$ y $B^{\downarrow_\alpha} = (B^\downarrow)_\alpha$ para $A \in 2^G$ y $B \in 2^M$.

Para un sistema de conexiones de Galois entre G y M $C := \{\langle \uparrow_\alpha, \downarrow_\alpha \rangle : \alpha \in L\}$ L -anidado, llamamos $\langle \uparrow^C, \downarrow^C \rangle$ al par de funciones $\uparrow^C : L^G \rightarrow L^M$ y $\downarrow^C : L^M \rightarrow L^G$ que vienen dadas por:

$$A^{\uparrow^C}(m) := \bigvee \left\{ \alpha \in L \mid m \in \bigcap_{\beta \in L} (A_\beta)^{\uparrow_{a \otimes b}} \right\} \quad (5.4)$$

$$B^{\downarrow^C}(g) := \bigvee \left\{ \alpha \in L \mid g \in \bigcap_{\beta \in L} (B_\beta)^{\uparrow_{a \otimes b}} \right\}. \quad (5.5)$$

Entonces se tiene que:

1. $C_{\langle \uparrow, \downarrow \rangle}$ es un sistema de L -conexiones de Galois anidado entre G y M ,
2. $\langle \uparrow^C, \downarrow^C \rangle$ es una L -conexión de Galois entre G y M ,
3. $C = C_{\langle \uparrow, \downarrow \rangle}$ y $\langle \uparrow, \downarrow \rangle = \langle \uparrow^{C_{\langle \uparrow, \downarrow \rangle}}, \downarrow^{C_{\langle \uparrow, \downarrow \rangle}} \rangle$.

Lo que nos viene a decir el teorema anterior es que hay una forma de descomponer una L -conexión de Galois en un conjunto de conexiones de Galois clásicas, a partir de las cuales podemos recuperar la información dada por la L -conexión de Galois original. Este resultado nos permitiría (recordemos que los pares de operadores que se definen en un contexto formal forman una conexión de Galois) tratar el problema de calcular el conjunto $FC(\mathbb{K})$ a partir de varios conjuntos $FC(\mathbb{K}_\alpha)$ propios de contextos formales clásicos, ya que el conjunto $FC(\mathbb{K})$ puede ser visto como el conjunto de puntos fijos de la L -conexión de Galois correspondiente [26].

La otra idea para pasar de un ámbito gradual a uno crisp que se recoge en [25], y para la que también encontramos resultados en la sección 5.3 de [26], es pasar de un contexto donde consideramos relaciones graduales entre objetos y atributos, y por lo tanto consideramos L -conjuntos de objetos y de atributos, a uno en el que consideremos unos objetos y atributos artificiales, cada uno de los cuales se corresponden con la asociación de un grado de L con un objeto o atributo. A continuación presentamos el siguiente teorema, que es una adaptación del que encontramos en [26] más centrado en los resultados que nos interesan en esta memoria.

Teorema 5.2: Pasar de un L -contexto formal a un contexto formal clásico equivalente

Dado un L -contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, se tiene que el retículo $FC(\mathbb{K})$ es isomorfo al retículo de conceptos formales asociado al siguiente contexto formal clásico

$$(G \times L, M \times L, I^\times), \text{ donde } ((g, \alpha), (m, \beta)) \in I^\times \iff \beta \leq (\alpha/g)^\dagger(m). \quad (5.6)$$

Por último, vamos a presentar otra propuesta que también trata de pasar de un dominio gradual a uno crisp. Así, en [71] se introduce la siguiente idea:

Definición 5.16: L -ACF basado en α -cortes de Āuráková [71]

Dado un L -contexto $\mathbb{K} := \langle G, M, I \rangle$, donde $I : G \times M \rightarrow L$, se define una familia de contextos formales clásicos de la forma $\mathbb{K}^\alpha := \langle G, Y, I^\alpha \rangle$ donde $I^\alpha := \{(x, y) \mid I(x, y) \geq \alpha\}$ para un cierto $\alpha \in K \subseteq L$. Así, en cada uno de estos contextos formales clásicos, consideramos el correspondiente retículo de conceptos formales $FC(\mathbb{K}_\alpha)$ y definimos el siguiente conjunto:

$$\bigsqcup_{\alpha \in K} FC(\mathbb{K}^\alpha) := \{(A, B) \mid A \in Ext(I^\alpha) \text{ para algún } \alpha \in K\},$$

donde B es un multiconjunto en M con $B(m) := \|\alpha \in K \mid A \in Ext(I^\alpha), m \in A^{\uparrow I^\alpha}\|$.

En esta ocasión en [23] no se indica si esta estructura es un retículo completo o no.

En la siguiente sección presentamos una nueva propuesta para extender el Análisis de Conceptos Formales al ámbito difuso empleando la teoría de la Representación por Niveles, que puede verse como una evolución de esta última propuesta en la que se descompone un contexto difuso en un conjunto de contextos clásicos. Es por esto que no mostramos un ejemplo de aplicación de estas últimas propuesta por niveles, ya que veremos en la siguiente sección cómo funcionan este tipo de estrategias de un modo más general.

Como veremos, esta nueva propuesta nos permite aprovechar todos los avances teóricos y prácticos que se han desarrollado en el campo del Análisis de Conceptos Formales clásico en un ámbito gradual, lo que dota a nuestra aproximación de un gran potencial. Este potencial está presente tanto a nivel teórico, trasladando resultados interesantes en la literatura a un ámbito de aplicación gradual, como a nivel práctico, puesto que nos podremos beneficiar de aquellos desarrollos algorítmicos que han sido desarrollados, y ampliamente estudiados en la literatura, para resolver problemas relacionados con el manejo de información vaga a través de una estructura de contexto formal.

5.2 L -ANÁLISIS DE CONCEPTOS FORMALES BASADO EN LA REPRESENTACIÓN POR NIVELES

En la Sección 2.3.2 hemos presentado los fundamentos de la Representación por Niveles. Como hemos visto, podemos emplear la Representación por Niveles para

modelar distintos conceptos propios de la Teoría de Conjuntos Difusos, aunque esta teoría es mucho más general y tiene mayor capacidad expresiva que la Teoría de Conjuntos Difusos, como ya vimos.

A continuación presentamos nuestra propuesta para extender el Análisis de Conceptos Formales al ámbito gradual a través de la Representación por Niveles. Llamaremos a esta nueva extensión Análisis de Conceptos Formales basado en la Representación por Niveles, lo cual abreviamos como RN-ACF. Como veremos, esta propuesta da un marco mucho más general que el que se define en la propuesta de Pollard y Bělohlávek que hemos visto en la Definición 5.5.

En primer lugar vamos a ver cómo extendemos la idea de contexto formal a un contexto con información gradual representado por niveles. Si recordamos la filosofía de la Representación por Niveles, un entidad de un determinado tipo representada por niveles se corresponde con una asignación a distintos niveles de entidades básicas de ese tipo; por ejemplo, un RN-conjunto es una asignación de conjuntos clásicos a niveles.

Siguiendo esta filosofía, podemos pensar en que un RN-contexto será una asignación de contextos formales clásicos, como los introducidos en el Capítulo 4, a niveles. En la siguiente definición vamos a seguir la filosofía que acabamos de describir: en cada nivel consideramos un conjunto de objetos y atributos determinados, que definirán así un RN-conjunto de objetos y un RN-conjunto de atributos, y estableceremos una relación binaria en cada uno de estos niveles entre los objetos y atributos correspondientes. Por lo tanto, considerando la relación que definamos en cada uno de los niveles tendremos también una RN-relación binaria, que será un RN-subconjunto del producto cartesiano de dos RN-conjuntos tal y como lo formalizamos en la Definición 2.18.

Definición 5.17: Contexto formal definido sobre RN-conjuntos

Consideremos dos conjuntos Ω_G y Ω_M que llamaremos los conjuntos de objetos y atributos del contexto formal definido sobre RN-conjuntos. Un contexto formal definido sobre RN-conjuntos \mathbb{K} se define como una tripleta (G, M, I) , donde $G := (\Lambda_G, \rho_G)$ es un RN-conjunto definido sobre Ω_G , $M := (\Lambda_M, \rho_M)$ es un RN-conjunto definido sobre Ω_M e I es una RN-relación con $I \subseteq G \times M$.

Denotaremos por $\mathbb{K}_\alpha := \rho_{\mathbb{K}}(\alpha)$ al contexto formal clásico $(\rho_G(\alpha), \rho_M(\alpha), \rho_I(\alpha))$ con $\alpha \in \Lambda_{\mathbb{K}} := \Lambda_G \cup \Lambda_M \cup \Lambda_I$.

En primer lugar queremos aclarar la nomenclatura que hemos empleado en esta definición. Como vemos, no hemos denominado a este concepto como RN-contexto formal, puesto que la definición, siguiendo de forma estricta la filosofía de la Representación por Niveles, no se corresponde con tal idea, ya que no realizamos directamente una asignación de contextos formales a niveles. Sin embargo, es claro que a partir de un contexto formal definido sobre RN-conjuntos sí que podemos obtener un RN-contexto formal, de modo que a cada nivel α en $\Lambda_{\mathbb{K}}$ le asignamos el correspondiente contexto formal clásico \mathbb{K}_α que hemos definido. En lo que sigue nos referiremos a un contexto formal definido sobre RN-conjuntos simplemente como contexto formal, por brevedad.

Veamos un ejemplo de contexto formal definido sobre RN-conjuntos, vamos a ver cómo podemos representar la información imprecisa del universo de discurso

de la Figura 5.1 a través de un contexto formal como los que acabamos de definir.

Ejemplo 5.5:

Vamos a considerar los siguientes conjuntos de atributos y objetos, que se corresponden con los objetos y propiedades que consideramos en el universo de la Figura 5.1:

$$\Omega_G := \{a, b, c, d, e, f, g\},$$

$$\Omega_M := \{\text{cuadrado}, \text{círculo}, \text{triángulo}, \text{rojo}, \text{azul}, \text{blanco}\}.$$

A partir de estos conjuntos de objetos y propiedades podemos pasar a definir el RN-conjunto de objetos G y el RN-conjunto de atributos M , que serán los correspondientes a las filas y columnas de las tablas que encontramos en la Tabla 5.1. Por otro lado, la RN-relación I se define a partir de los α -cortes de la relación difusa que presentamos en la Tabla 5.1. Presentamos estos niveles en la Tabla 5.2.

En este ejemplo hemos considerado los α -cortes de la relación de la Tabla 4.1 para definir la RN-relación entre objetos y atributos. Pero, tal y como señalamos en la Sección 2.3.2, los distintos niveles de una representación por niveles no tienen que estar anidados necesariamente; por lo tanto esta representación y esta definición de contexto formal es mucho más general que las que hemos visto en la sección anterior, en particular que aquellas basadas en α -cortes que hemos visto al final de dicha sección.

Veamos ahora cómo se definen los operadores de derivación en un contexto formal como el que acabamos de definir. Como ya hemos visto, en nuestro caso manejaremos RN-conjuntos de objetos y atributos, puesto que estamos trabajando en un contexto formal que está definido por niveles. Por lo tanto, al definir un operador de derivación que actúe sobre un RN-conjunto de objetos o de atributos tendremos que definir un operador que se aplique en cada uno de los niveles de ese conjunto. Como en cada uno de los niveles del contexto tenemos una información determinada, tendremos que aplicar el operador en cada uno de los niveles de forma independiente, considerando la información que esté presente en cada nivel. Así llegamos a la siguiente definición de operador de derivación, en la que aplicamos los operadores de derivación clásicos introducidos en la Definición 4.2 en cada nivel, para el contexto formal clásico correspondiente a ese nivel del contexto.

Definición 5.18: Operadores de derivación sobre RN-conjuntos

Dado un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$ y sendos RN-subconjuntos $A \subseteq G$ y $B \subseteq M$ definimos los siguientes operadores de derivación:

$$A' := (\Lambda_{\mathbb{K}}, \rho_{A'}), \text{ donde } \rho_{A'}(\alpha) := \rho_A(\alpha)', \quad (5.7)$$

$$B' := (\Lambda_{\mathbb{K}}, \rho_{B'}), \text{ donde } \rho_{B'}(\alpha) := \rho_B(\alpha)'. \quad (5.8)$$

En las Ecuaciones 5.7 y 5.8, para calcular $\rho_A(\alpha)'$ y $\rho_B(\alpha)'$ empleamos el operador de derivación correspondiente al contexto formal clásico \mathbb{K}_α , donde los operadores de derivación son los definidos en la Definición 4.2.

objeto	<i>cuadrado</i>	<i>círculo</i>	<i>triángulo</i>	<i>azul</i>	<i>blanco</i>
<i>a</i>	1	0	0	0	1
<i>b</i>	0	0	1	0	1
<i>c</i>	0	1	0	0	1
<i>d</i>	0	0	1	0	0
<i>f</i>	0	0	0	0	1
<i>g</i>	0	0	0	1	0

(a) $\rho_I(1)$

objeto	<i>cuadrado</i>	<i>círculo</i>	<i>triángulo</i>	<i>azul</i>	<i>blanco</i>
<i>a</i>	1	0	0	0	1
<i>b</i>	0	0	1	0	1
<i>c</i>	0	1	0	0	1
<i>d</i>	0	0	1	0	0
<i>e</i>	0	0	0	1	0
<i>f</i>	0	1	0	0	1
<i>g</i>	1	0	0	1	0

(b) $\rho_I(0.75)$

objeto	<i>cuadrado</i>	<i>círculo</i>	<i>triángulo</i>	<i>rojo</i>	<i>azul</i>	<i>blanco</i>
<i>a</i>	1	0	0	0	0	1
<i>b</i>	0	0	1	0	0	1
<i>c</i>	0	1	0	0	0	1
<i>d</i>	0	0	1	1	0	1
<i>e</i>	1	1	0	0	1	0
<i>f</i>	0	1	0	0	0	1
<i>g</i>	1	0	0	0	1	0

(c) $\rho_I(0.5)$

objeto	<i>cuadrado</i>	<i>círculo</i>	<i>triángulo</i>	<i>rojo</i>	<i>azul</i>	<i>blanco</i>
<i>a</i>	1	0	0	0	0	1
<i>b</i>	0	0	1	0	0	1
<i>c</i>	0	1	0	0	0	1
<i>d</i>	0	0	1	1	0	1
<i>e</i>	1	1	0	0	1	1
<i>f</i>	0	1	0	0	0	1
<i>g</i>	1	1	0	0	1	0

(d) $\rho_I(0.25)$

Tabla 5.2: Niveles para la RN-relación que representa la información gradual del universo de la Figura 5.1. Los objetos y atributos en las filas y columnas de cada tabla son el conjunto de objetos y atributos que se considera en cada nivel.

Como podemos ver, estos operadores de derivación se definen en base a los operadores de derivación del caso clásico que hemos visto en la Sección 4.1. Por lo tanto, aquí podemos ver una de las principales ventajas de nuestra propuesta, y es que podemos emplear los resultados teóricos y prácticos del caso clásico para elaborar nuestros desarrollos en el manejo de información gradual a través del Análisis de Conceptos Formales.

Ejemplo 5.6:

Para el contexto que hemos definido en el Ejemplo 5.5 podemos considerar el siguiente RN-conjunto de atributos B :

1	{cuadrado, blanco}
0.75	{cuadrado, azul}
0.5	{cuadrado, azul}
0.25	{blanco}

Ahora, según la definición que acabamos de ver tenemos que B' es el siguiente RN-conjunto de objetos:

1	{a}
0.75	{g}
0.5	{e, g}
0.25	{a, b, c, d, e, f}

En este ejemplo vemos cómo podemos aplicar los operadores de derivación de la Definición 5.18 sobre RN-conjuntos que no tienen que tener necesariamente sus niveles anidados. Y también observamos cómo el resultado de aplicar un operador de derivación sobre un cierto RN-conjunto es otro RN-conjunto que tampoco tiene por qué tener sus niveles anidados. Así, se pone de manifiesto la potencia de esta propuesta, que aprovecha la capacidad de la Representación por Niveles para manejar estructuras más generales que aquellas presentes en la Teoría de Conjuntos Difusos.

Una vez hemos definido qué es un contexto formal y los operadores de derivación que sobre él podemos aplicar, siguiendo con la extensión natural que estamos haciendo del Análisis de Conceptos Formales al ámbito gradual, el siguiente paso es ver cómo definimos lo que es un concepto formal en este marco de trabajo. Nuevamente hemos de recordar que estamos trabajando con RN-conjuntos de objetos y propiedades. Por lo tanto, estableceremos que un concepto formal es un par de estos RN-conjuntos de modo que se dé la misma igualdad entre conjuntos que la que se establecía en el caso clásico (Def. 4.4); en esta ocasión exigiremos que se dé la igualdad nivel a nivel. Es decir, si consideramos un nivel α determinado, el par formado por el nivel correspondiente de los dos RN-conjuntos que estemos considerando formará un concepto formal en el contexto clásico \mathbb{K}_α .

Definición 5.19: Concepto formal de un contexto formal definido sobre RN-conjuntos

Consideremos un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$ y dos RN-subconjuntos $A \subseteq G$, $B \subseteq M$. Entonces, diremos que el par (A, B) es un concepto formal si, y solamente si, $B' = A$ y $A' = B$.

Dados dos conceptos formales $(A, B), (C, D)$ de un cierto contexto formal, podemos definir la siguiente relación de orden parcial entre ellos.

$$(A, B) \leq (C, D) \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subseteq C \iff B \supseteq D \quad (5.9)$$

Finalmente, podemos comprobar que el conjunto de los conceptos formales asociados a un contexto formal definido sobre RN-conjuntos tiene estructura de retículo completo con la relación de orden que acabamos de definir.

Definición 5.20: Conjunto de conceptos formales de un contexto formal definido sobre RN-conjuntos

Dado un contexto formal \mathbb{K} denotamos por $FC(\mathbb{K})$ al siguiente conjunto de conceptos formales.

$$FC(\mathbb{K}) := \{(A, B) \mid A \subseteq G, B \subseteq M, A' = B, B' = A\}.$$

Con la definición de concepto formal que hemos dado, puede verse que dado un cierto concepto formal (A, B) y un cierto $\alpha \in \Lambda_{\mathbb{K}}$, se tiene que el par $(\rho_A(\alpha), \rho_B(\alpha))$ es un concepto formal clásico en el contexto formal clásico \mathbb{K}_{α} . Por lo tanto, para obtener el conjunto $FC(\mathbb{K})$, basta con obtener el conjunto $FC(\mathbb{K}_{\alpha})$ en cada uno de los niveles, como veremos más adelante.

Teorema 5.3: Teorema fundamental de los retículos de conceptos formales sobre RN-conjuntos

Dado un contexto formal definido sobre RN-conjuntos \mathbb{K} , se tiene que $(FC(\mathbb{K}), \leq)$ es un retículo completo, llamado el retículo de conceptos de \mathbb{K} , para el cual el ínfimo y el supremo se definen como sigue:

$$\bigwedge_i (A_i, B_i) := \left(\bigcap_i A_i, \left(\bigcup_i B_i \right)'' \right), \quad (5.10)$$

$$\bigvee_i (A_i, B_i) := \left(\left(\bigcup_i A_i \right)'', \bigcap_i B_i \right). \quad (5.11)$$

Demostración: Al definir los operadores de derivación, así como los conceptos formales, estamos aplicando un operador de derivación clásico en cada uno de los niveles. Esto implica que dado un cierto concepto formal (A, B) y un cierto $\alpha \in \Lambda_{\mathbb{K}}$, se tiene que el par $(\rho_A(\alpha), \rho_B(\alpha))$ es un concepto formal clásico en el contexto formal clásico \mathbb{K}_{α} .

Y como en las Ecuaciones 5.10 y 5.11 consideramos la intersección (\cap) y unión (\cup) por niveles, así como en la Ecuación 5.9 consideramos que dos RN-conjuntos

A y C cumplen que $A \subseteq C$ si, y solamente si, $\rho_A(\alpha) \subseteq \rho_C(\alpha), \forall \alpha \in \Lambda_{\mathbb{K}}$, por el Teorema Fundamental de los Reticulos de Conceptos Formales [211] tenemos lo que queremos demostrar. \square

Por lo tanto, hemos demostrado que nuestra propuesta para extender el Análisis de Conceptos Formales al ámbito gradual a través de la Representación por Niveles conserva las propiedades del Análisis de Conceptos Formales clásico. Y con el mismo tipo de demostración que acabamos de hacer es trivial demostrar que los operadores de derivación cumplen las propiedades que vimos para los operadores de derivación clásicos en el Capítulo 4. A saber, para cualesquiera RN-conjuntos de objetos (o atributos) S, S_1 y S_2 , se tiene que:

1. $S_1 \subseteq S_2 \implies S'_1 \supseteq S'_2$,
2. $S \subseteq S''$,
3. $S''' = S'$.

Además, es clara la forma en la que podemos obtener el conjunto $FC(\mathbb{K})$, puesto que no tenemos más que obtener los correspondientes reticulos de conceptos formales en cada uno de los contextos clásicos \mathbb{K}_α , y considerar todas las posibles combinaciones de conceptos formales de los distintos niveles para definir todos los elementos de $FC(\mathbb{K})$, que serán RN-pares de conjuntos que en cada uno de sus niveles tendrá uno de los conceptos formales del contexto \mathbb{K}_α correspondiente. Con esta misma idea, podemos definir un algoritmo para determinar si un par de RN-conjuntos de objetos y atributos es un concepto formal.

- 1 sea \mathbb{K} el contexto formal
- 2 sea $\{FC(\mathbb{K}_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda_{\mathbb{K}}\}$ para cada $\alpha \in \Lambda_{\mathbb{K}}$ si $(\rho_A(\alpha), \rho_B(\alpha)) \notin FC(\mathbb{K}_\alpha)$ devolver **F** devolver **V**

Algoritmo 5.1: Algoritmo para determinar si un par de RN-conjuntos (A, B) es un concepto formal.

Algo interesante del algoritmo anterior es que, para obtener el reticulo de conceptos clásico $FC(\mathbb{K}_\alpha)$, en la Línea 2 podemos emplear cualquier algoritmo desarrollado en la literatura, como los que hemos presentado en la Sección 4.1.1. Ya vimos en dicha sección que, según el contexto con el que estemos trabajando, unos algoritmos tienen un rendimiento mejor que otros. En el Algoritmo 5.1 podemos beneficiarnos de los distintos algoritmos que existen, empleando para cada contexto formal clásico, \mathbb{K}_α , el mejor algoritmo para calcular su reticulo de conceptos. Además, este algoritmo es fácilmente paralelizable ya que el cálculo de cada uno de los niveles se realiza de forma independiente al resto, por lo tanto podemos aprovechar todo el desarrollo en el campo de la computación paralela y de altas prestaciones para acelerar el cálculo del reticulo.

Veamos, para el ejemplo que venimos empleando en esta sección, cómo calculamos el reticulo de conceptos formales para el contexto que hemos definido en el Ejemplo 5.5.

Ejemplo 5.7:

En este contexto podemos considerar cuatro contextos formales clásicos, aquellos que vienen dados por cada uno de los α -cortes de la relación I y que vienen definidos por cada una de las tablas en la Tabla 5.2. Así, en cada uno de estos contextos clásicos obtendremos los retículos de conceptos formales que mostramos en la Figura 5.2.

Como podemos ver, en cada nivel podemos tener un retículo de conceptos distinto, ya que la información de cada uno de los contextos \mathbb{K}_α es diferente, tal y como mostramos en la Tabla 5.2. Por ejemplo, en el retículo \mathbb{K}_1 tenemos el concepto formal $(\{c\}, \{\text{circulo}, \text{blanco}\})$ puesto que con este nivel de confianza este objeto es el único que presenta esas dos propiedades. Sin embargo, cuando bajamos al nivel 0.75, en $\mathbb{K}_{0.75}$ tenemos que este concepto desaparece y de hecho no hay ningún otro concepto formal que tenga a c como único elemento de su extensión. En su lugar el concepto formal $(\{c, f\}, \{\text{circulo}, \text{blanco}\})$ aparece. Mientras que en el nivel uno el objeto f solo poseía la propiedad de ser blanco, ahora con un nivel menos estricto también es considerado un círculo. Del mismo modo, mientras que el objeto e no posee ninguna propiedad con grado 1 y, por tanto, no se considera en \mathbb{K}_1 , cuando reducimos las restricciones sí que podemos tener en cuenta algunas propiedades que este objeto presenta con un grado menor. Así aparece el concepto formal $(\{e, g\}, \{\text{azul}\})$ en el contexto $\mathbb{K}_{0.75}$.

Entonces, una vez que tenemos los cuatro retículos de conceptos formales clásicos podemos obtener el retículo de conceptos formales del contexto \mathbb{K} que estamos considerando. Algunos ejemplos de conceptos formales para este contexto, que hemos denominado c_1 , c_2 y c_3 , se corresponden con las distintas columnas de la Tabla 5.3.

α	c_1	c_2	c_3
1	$(\{g\}, \{\text{azul}\})$	$(\{a, b, c, f\}, \{\text{blanco}\})$	$(\{g\}, \{\text{azul}\})$
0.75	$(\{g\}, \{\text{cuadrado}, \text{azul}\})$	$(\{a, g\}, \{\text{cuadrado}\})$	$(\{c, f\}, \{\text{circulo}, \text{blanco}\})$
0.5	$(\{a\}, \{\text{cuadrado}, \text{blanco}\})$	$(\{b, d\}, \{\text{triángulo}, \text{blanco}\})$	$(\{c, f\}, \{\text{circulo}, \text{blanco}\})$
0.25	$(\{e, g\}, \{\text{cuadrado}, \text{circulo}, \text{azul}\})$	$(\{c, e, f\}, \{\text{circulo}, \text{blanco}\})$	$(\{a, b, c, d, e, f\}, \{\text{blanco}\})$

Tabla 5.3: Ejemplo de conceptos formales para el contexto definido sobre RN-conjuntos que encontramos en el Ejemplo 5.5.

Es claro, que por la definición que hemos dado de concepto formal, el número de conceptos formales en un contexto formal definido sobre RN-conjuntos es

$$\prod_{\alpha \in \Lambda_{\mathbb{K}}} |FC(\mathbb{K}_\alpha)|. \quad (5.12)$$

Por lo tanto la explosión combinatoria en este caso se incrementa ya que, teniendo en cuenta la Ecuación 4.13, tenemos que el máximo de conceptos que pueden existir en un contexto definido sobre RN-conjuntos es:

$$(2^{\max(|\Omega_G|, |\Omega_M|)})^{|\Lambda_{\mathbb{K}}|}. \quad (5.13)$$

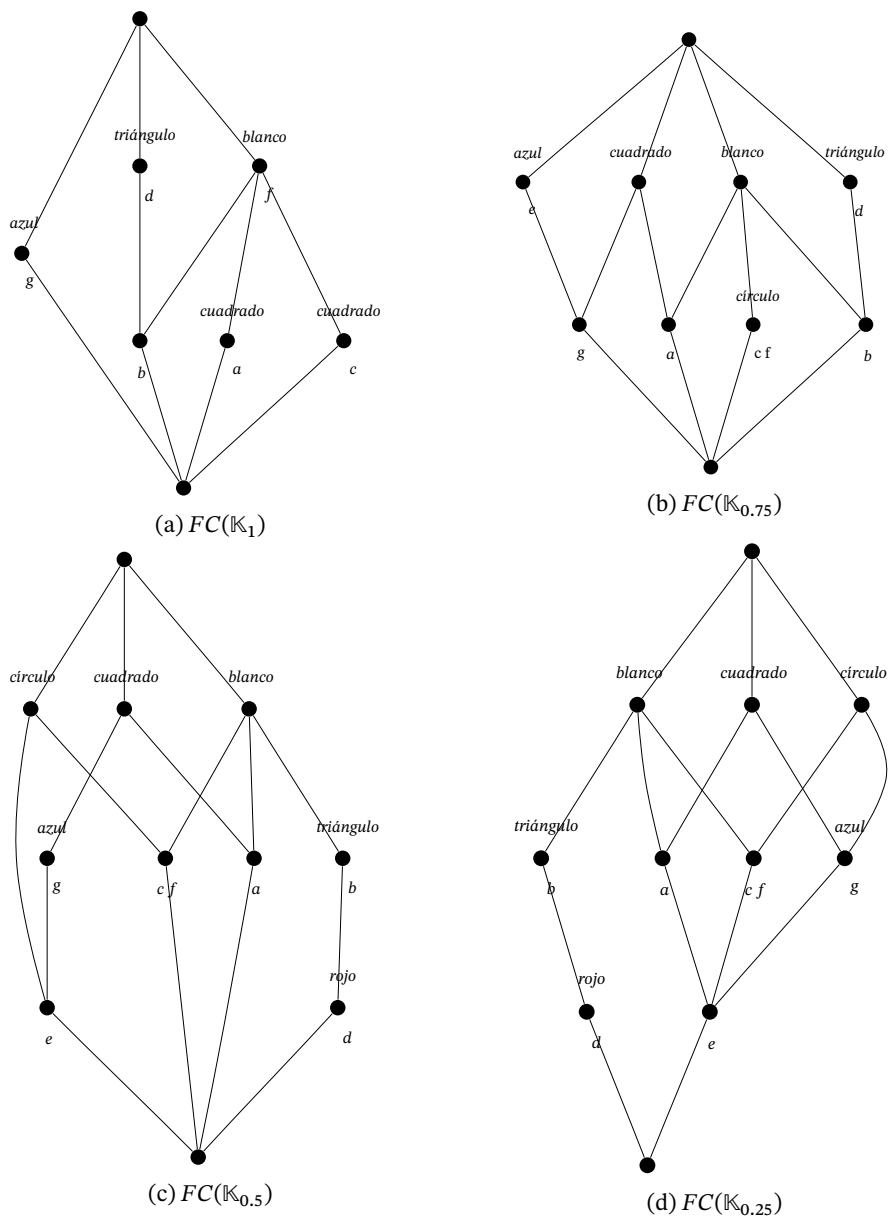


Figura 5.2: Retículos de conceptos formales clásicos para cada uno de los \mathbb{K}_α que podemos considerar en el contexto formal del Ejemplo 5.5.

Sin embargo, no necesitamos almacenar ni tratar con esta información al completo. Para almacenarla bastará con guardar en memoria cada uno de los retículos de conceptos clásicos $FC(\mathbb{K}_\alpha)$ y extraer de estos conceptos aquella información que necesitamos. Con lo que el número de conceptos clásicos que necesitamos almacenar será a lo sumo $|\Lambda_{\mathbb{K}}|2^{\max(|\Omega_G|, |\Omega_M|)}$, un número mucho menor en la mayoría de los casos.

También podemos desarrollar distintas medidas que nos permitan dar otra representación condensada del conjunto $FC(\mathbb{K})$. Así podríamos ver para un determinado par (A, B) con $A \subseteq \Omega_G$ y $B \subseteq \Omega_M$ en qué niveles aparece, y dar una medida como las que introdujimos en la Definición 2.22. Con lo que, en un ámbito gradual, podemos dar una representación condensada de esta gradualidad. Dando para cada par de conjuntos clásicos, en qué grado ese par es un concepto formal. Entonces nuestra propuesta maneja esta gradualidad de una forma distinta a como lo hacen otras propuestas que hemos visto en la Sección 5.1. Manejamos en este resumen conceptos formales clásicos y medimos el grado en el que se dan. Definiendo así un conjunto difuso de conceptos formales clásicos que pertenecen al contexto formal definido sobre RN-conjuntos que estemos considerando. Este conjunto difuso vendrá dado por la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{FC(\mathbb{K})}((A, B)) := \sum_{\alpha_i | (A, B) \in FC(\mathbb{K}_{\alpha_i})} (\alpha_i - \alpha_{i+1}). \quad (5.14)$$

A continuación, presentamos otras nociones dentro de nuestra propuesta que pueden resultar interesantes de cara a futuros desarrollos teóricos o prácticos. Además, con estos nuevos conceptos ponemos de manifiesto el potencial semántico de nuestra propuesta, ya que nos permite extender conceptos bien conocidos a un ambiente gradual y con una mayor flexibilidad que la Teoría de Conjuntos Difusos como ya hemos señalado en otras ocasiones. Además, veremos cómo podemos trasladar conceptos propios del Análisis de Conceptos Formales clásico a un ámbito gradual de una forma natural.

Así por ejemplo, podemos definir un retículo de conceptos formales por niveles, que nos da otro nivel de flexibilidad en nuestra propuesta para poder representar y manejar información más heterogénea.

Definición 5.21: RN-retículo de conceptos formales

Dado un conjunto de niveles Λ_{FC} , un RN-retículo de conceptos formales es un par $FC := (\Lambda_{FC}, \rho_{FC})$, donde para un cierto $\alpha \in \Lambda_{FC}$, $\rho_{FC}(\alpha) := FC(K^\alpha)$ siendo $K^\alpha := (G^\alpha, M^\alpha, I^\alpha)$ un contexto formal clásico.

Es claro que esta definición es una generalización del retículo de conceptos que hemos introducido anteriormente. Basta con considerar en cada nivel el correspondiente contexto formal clásico \mathbb{K}_α .

Otro concepto que hemos introducido en la Sección 4.1 es el de implicación entre atributos (Def. 4.13), puesto que hemos definido el concepto de predicado definido sobre RN-variables (Def. 2.20) podemos emplear este constructo para definir una implicación por niveles entre atributos.

Definición 5.22: RN-implicación entre RN-conjuntos de atributos

Consideremos un contexto formal definido sobre RN-conjuntos \mathbb{K} , $\mathbb{K} := (G, M, I)$, y dos RN-conjuntos $B, D \subseteq M$. Definimos la RN-implicación entre los conjuntos como un predicado

$$(B \Rightarrow D)(\alpha) := \begin{cases} \mathbf{V} & B'(\alpha) \rightarrow D'(\alpha), \\ \mathbf{F} & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.15)$$

Cuando el predicado $B \Rightarrow D$ sea cierto en todos los niveles diremos que se da la implicación entre los RN-conjuntos de atributos B y D y lo notaremos por $B \rightarrow D$.

Y es claro, a la luz de lo que hemos visto en esta sección, cómo podemos extender otros conceptos propios del Análisis de Conceptos Formales clásico a este marco de trabajo, por ejemplo las relaciones flecha que hemos introducido en la Definición 4.8.

A continuación pasamos a ver cómo podemos aplicar nuestra propuesta para tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales.

5.3 RN-ACF PARA GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA CON PROPIEDADES GRADUALES

En esta sección vamos a ver cómo emplear las ideas planteadas en la sección anterior para abordar el problema de Generación de Expresiones de Referencia en un universo con propiedades graduales. En primer lugar veamos cómo representar la información de un universo de discurso con información vaga en forma de los contextos formales que hemos visto en la sección anterior.

Definición 5.23: Contexto para un problema GER con información gradual

Consideremos un universo de discurso compuesto por un conjunto de objetos \mathcal{O} y un conjunto de propiedades graduales \mathcal{P} , de modo que cada objeto $o \in \mathcal{O}$ presenta cada propiedad $p \in \mathcal{P}$ con un cierto grado $p(o) \in [0, 1]$. Podemos representar esta información en forma de un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$ donde:

- $\Lambda_{\mathbb{K}} := \{\alpha \in (0, 1] \mid \exists o \in \mathcal{O}, p \in \mathcal{P} : p(o) = \alpha\}$.
- $\rho_G(\alpha) := \Omega_G = \mathcal{O}, \rho_M(\alpha) := \Omega_M = \mathcal{P}, \forall \alpha \in \Lambda_I$.
- $\rho_I(\alpha)$ es el α -corte de la relación difusa entre objetos y propiedades en el universo de discurso.

Aquí vemos cómo el Ejemplo 5.5 es un ejemplo de este tipo de contextos. En este caso estamos viendo la escena de la Figura 5.1 como un universo de discurso sobre el que resolver el problema de Generación de Expresiones de Referencia.

Y en este marco formal podemos formalizar el problema de Generación de Expresiones de Referencia como sigue. Queremos señalar que, en este caso, estamos considerando que las únicas descripciones que manejamos son las formadas por conjunciones de propiedades y no emplearemos más que propiedades atómicas de los objetos.

Problema 5.1: Problema de Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales en el marco del RN-ACF

Consideremos un contexto formal definido sobre RN-conjuntos $\mathbb{K} := (G, M, I)$. Entonces, dado un RN-conjunto de objetos O que llamaremos objetivo, el problema consiste en encontrar un RN-conjunto de propiedades re tal que $re' = O$.

Como podemos ver, este problema es más general que el que venimos tratando, ya que en esta ocasión queremos hacer referencia a un RN-conjunto de objetos en lugar de a un conjunto crisp. Esto no quiere decir que, como veremos más adelante, no nos permita abordar el Problema 3.1. Bastará con considerar un RN-conjunto que en todos sus niveles tenga el mismo conjunto de objetos.

El siguiente concepto que tenemos que definir en nuestro marco formal es el de expresión de referencia. En nuestro caso estamos trabajando con RN-conjuntos de objetos a los que queremos hacer referencia. Por lo tanto, el problema de Generación de Expresiones de Referencia se traslada a cada uno de los niveles desde el punto de vista clásico que hemos presentado en la Sección 2.1. Entonces, una expresión de referencia en el marco del Análisis de Conceptos Formales basado en Representación por Niveles será un RN-conjunto de atributos; cada uno de los cuales hace referencia al conjunto de objetos del nivel correspondiente.

Definición 5.24: Expresión de referencia

Consideremos un contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$ y un RN-conjunto de objetos $T \subseteq G$. Un RN-conjunto de propiedades generado para hacer referencia a T se denomina expresión de referencia para T .

Como vemos, en este caso damos una definición de expresión de referencia basada en su intención. Esto se debe a que pueden existir niveles en los que un conjunto no sea referible, y por lo tanto no podamos encontrar una expresión de referencia con éxito referencial en dicho nivel. Aunque según las operaciones que estemos realizando tengamos que definir dicho nivel para la expresión. Por ejemplo, en una representación por niveles, como hemos visto en la Definición 2.11, siempre hemos de considerar el nivel 1, donde por ejemplo el objeto e del ejemplo que estamos manejando no es referible. Así, construiremos una expresión de referencia y mediremos en qué grado tiene éxito referencial para el RN-conjunto de objetos que queremos referenciar.

Ejemplo 5.8:

En primer lugar vamos a considerar un caso más próximo al problema de Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales que hemos presentado en el Capítulo 3. Supongamos que queremos hacer referencia al conjunto de objetos $\{e, g\}$ en la Figura 5.1.

En ese caso definimos el RN-conjunto de la Tabla 5.4 y para él podemos definir la expresión de referencia que definimos en la misma tabla, donde ponemos el conjunto de propiedades que conforman la expresión de referencia en cada uno de los niveles.

Como vemos en la Tabla 5.4, en el nivel 1 no se incluye el objeto e puesto que este objeto no se considera en dicho nivel, como hemos visto en la Tabla 5.2, ya que en ese nivel el objeto e no presenta ninguna propiedad.

α	T	re
1	{g}	{azul}
0.75	{e, g}	{azul}
0.5	{e, g}	{cuadrado, azul}
0.25	{e, g}	{cuadrado, blanco}

Tabla 5.4: Ejemplo de expresión de referencia con propiedades graduales en el marco del RN-FCA.

A continuación vamos a ver un ejemplo más genérico, en el que ponemos de manifiesto la potencia de nuestra propuesta. Y es que podemos hacer referencia a RN-conjuntos de objetos más heterogéneos.

Ejemplo 5.9:

Vamos a considerar el RN-conjunto de objetos que definimos en la Tabla 5.5. Para este RN-conjunto podemos definir la expresión de referencia que presentamos en la misma tabla.

α	T	re
1	{a, b, c, f}	{blanco}
0.75	{c, f}	{círculo, blanco}
0.5	{a}	{cuadrado, blanco}
0.25	{e, g}	{cuadrado, círculo, azul}

Tabla 5.5: Ejemplo de expresión de referencia para un RN-conjunto de objetos no anidado de la Figura 5.1.

Asociado al concepto de expresión de referencia, podemos extender el concepto de semiconcepto referencial que presentamos en la Sección 4.2.

Definición 5.25: Semiconcepto referencial

Dado un contexto formal definido sobre RN-conjuntos \mathbb{K} , $\mathbb{K} := (G, M, I)$, un semiconcepto referencial es un par $(A, B) \in G \times M$ tal que $B' = A$.

Estos ejemplos nos llevan a pensar que habrá niveles para los que encontremos una o varias expresiones de referencia para un determinado conjunto de objetos, pero habrá otros niveles en los que no existirá una expresión de referencia válida para el conjunto que queramos referir. Por ejemplo, en el contexto del Ejemplo 5.5 tenemos que el objeto c es referible en el nivel 1 empleando las expresiones *círculo* o *círculo* \wedge *blanco*. Sin embargo, cuando pasamos al nivel 0.75 este objeto no puede ser referido, puesto que el objeto f pasa a presentar también la propiedad *círculo*, y por tanto la expresión de referencia *círculo* \wedge *blanco* pasa a referir el conjunto de objetos $\{c, f\}$. Del mismo modo, el objeto e no es referible en el nivel 1 puesto que no presenta ninguna propiedad con grado 1, pero sí que es referible en el nivel 0.5

a través de la expresión *círculo* \wedge *azul*; en el nivel 0.75 no existe una expresión de referencia para el objeto *e* tampoco.

Si un objeto, como acabamos de ver, puede ser referible o no en los distintos niveles de un cierto contexto formal definido sobre RN-conjuntos, entonces tiene sentido definir la siguiente medida.

Definición 5.26: Medida de referibilidad basada en niveles

Consideremos un contexto $\mathbb{K} := (G, M, I)$, y sea $O \subseteq \Omega_G$ un conjunto de objetos. Definimos el siguiente conjunto de niveles:

$$V^O := \{\alpha_i \in \Lambda_{\mathbb{K}} \mid \exists re \subseteq M_{\alpha_i} : re' = \rho_{\alpha_i}(O) \text{ en } \mathbb{K}_{\alpha_i}\} \quad (5.16)$$

Es decir, el conjunto V^O contiene los niveles para los que existe al menos una expresión de referencia con éxito referencial (en el sentido crisp) para el nivel correspondiente del RN-conjunto de objetos. Entonces, en base a este conjunto podemos dar la siguiente medida de referibilidad:

$$ref(O) := \sum_{\alpha_i \in V^O} (\alpha_i - \alpha_{i+1}). \quad (5.17)$$

Ejemplo 5.10:

Si volvemos al ejemplo que hemos analizado anteriormente tenemos que el objeto *c* es referible en el nivel 1 y deja de serlo en el nivel 0.75, por tanto su grado de referibilidad es $1 - 0.75 = 0.25$. Del mismo modo el conjunto *e* es referible a partir del nivel 0.5, con lo que tenemos que $ref(\{e\}) = 0.5 - 0 = 0.5$.

Además de esta medida de referibilidad que sigue la forma de las medidas sobre representaciones por niveles de la Ecuación 2.18, podemos definir otros índices de referibilidad basados en ella como el siguiente, que pueden tener distintas aplicaciones y semánticas.

$$ref_i(O) := \sum_{\alpha_i \in V^O} \alpha_i(\alpha_i - \alpha_{i+1}). \quad (5.18)$$

Y es claro que podemos trasladar la medida de éxito referencial para expresiones de referencia entendidas como conjuntos de atributos clásicos de la Ecuación 3.6 a este marco de trabajo. Ahora bien, como hemos visto anteriormente, el Análisis de Conceptos Formales basado en Representación por Niveles nos permite dar unas definiciones más generales de los conjuntos de objetos que queremos referir y del tipo de expresiones de referencia que podemos emplear, a través de RN-conjuntos de objetos y atributos respectivamente. A continuación, podemos ver cómo se trasladan las nociones de éxito referencial y de conjunto referible al caso general que aquí presentamos.

Definición 5.27: Éxito referencial

Consideremos un contexto formal \mathbb{K} definido sobre RN-conjuntos. Definimos el predicado $RS(B, A)$, donde *A* y *B* son variables que representan respectivamente RN-conjuntos de objetos y propiedades:

$$RS(B, A)(\alpha) := \begin{cases} \mathbf{V} & \rho_B(\alpha)' = \rho_A(\alpha), \\ \mathbf{F} & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.19)$$

Si el predicado $RS(B, A)$ es cierto en todos los niveles diremos que el RL-conjunto de atributos B tiene éxito referencial para A . En otro caso daremos una medida gradual del éxito referencial de B para A .

Definición 5.28: RN-conjunto de objetos referible

Dado un contexto formal \mathbb{K} , un RN-conjunto de objetos $O \subseteq G$ es referible si, y solamente si, existe una expresión de referencia con éxito referencial para él.

En caso contrario, daremos la medida de referibilidad definida en la Ecuación 5.17.

Por último, volviendo a los conceptos que hemos introducido en la Sección 4.2 podemos extender los conceptos de ILB_A (Ec. 4.20) y OLB_A (Ec. 4.21) a una representación por niveles, de modo en que en cada uno de los niveles del contexto \mathbb{K} consideremos las fronteras correspondientes para el conjunto (clásico) de objetos A .

Definición 5.29: Frontera inferior interna de un RN-conjunto de objetos

Consideremos un contexto formal $\mathbb{K} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I)$ y un RN-conjunto de objetos O . Se define la frontera inferior interna para el conjunto de expresiones de referencia exitosas para O como la representación por niveles $ILB_O := (\Lambda_O, \rho_{ILB_O})$, donde

$$\rho_{ILB_O} := ILB_{\rho_O(\alpha)}, \forall \alpha \in \Lambda_O. \quad (5.20)$$

Definición 5.30: Frontera inferior externa de un RN-conjunto de objetos

Consideremos un contexto formal $\mathbb{K} := (\mathcal{O}, \mathcal{P}, I)$ y un RN-conjunto de objetos O . Se define la frontera inferior externa para el conjunto de expresiones de referencia exitosas para O como la representación por niveles $OLB_O := (\Lambda_O, \rho_{OLB_O})$, donde

$$\rho_{OLB_O} := OLB_{\rho_O(\alpha)}, \forall \alpha \in \Lambda_O. \quad (5.21)$$

Por lo tanto, aquí podemos observar que el Análisis de Conceptos Formales basado en la Representación por Niveles nos permite afrontar el problema de Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales, aprovechando los desarrollos teóricos que ya hemos presentado en el capítulo anterior para tratar el problema clásico de GER a través del Análisis de Conceptos Formales clásico.

5.4 ANÁLISIS DEL ACF-RN PARA EL PROBLEMA DE LA GENERACIÓN DE EXPRESIONES DE REFERENCIA CON PROPIEDADES DIFUSAS

En la sección anterior hemos visto cómo podemos emplear el Análisis de Conceptos Formales basado en la Representación por Niveles para abordar el problema de Generación de Expresiones de Referencia con propiedades graduales. Y así hemos puesto de manifiesto la principal ventaja de nuestra propuesta sobre otras que podemos encontrar para extender el Análisis de Conceptos Formales al ámbito gradual y que hemos presentado en la Sección 5.1: y es que el ACF-RN nos permite

aprovechar todos los desarrollos teóricos y prácticos que hemos elaborado en la Sección 4.2 para resolver el problema de la Generación de Expresiones de Referencia clásico a través del Análisis de Conceptos Formales Clásico. Por ejemplo, ya vimos en la Sección 4.3.3 cómo el concepto de frontera interior (ILB_A Def. 4.20) y frontera exterior (OLB_A Def. 4.21) eran de gran importancia desde el punto de vista algorítmico, y constituía una de las principales aportaciones del Análisis de Conceptos Formales al campo de la Generación de Expresiones de Referencia, y hemos visto al final de la sección anterior que estos conceptos se pueden trasladar de forma natural al ámbito gradual a través del Análisis de Conceptos Formales basado en la Representación por Niveles.

Y es que, como hemos puesto de manifiesto a lo largo de las secciones anteriores, nuestra propuesta permite aprovechar todos los avances que podemos encontrar en la literatura para el Análisis de Conceptos Formales clásico, el cual está más desarrollado y ha sido más estudiado que su extensión gradual, para tratar información vaga o imprecisa, ya sea para resolver el problema central de esta tesis o para cualquier otro tipo de aplicación en la que el Análisis de Conceptos Formales sea una buena herramienta para tratar la información que se requiera. Vimos, por ejemplo, distintas extensiones del Análisis de Conceptos Formales que lo combinaban con otros mecanismos de representación de conocimiento como las lógicas descriptivas que tanta flexibilidad semántica nos aportaban, y es claro cómo podemos aprovechar estas combinaciones en cada uno de los niveles del contexto formal definido sobre RN-conjuntos que estamos empleando.

Ahora bien, también en la Sección 5.1 hemos visto algunas propuestas de la literatura que siguen una filosofía similar a la nuestra, y es que trasladan los problemas del ámbito gradual al ámbito clásico del Análisis de Conceptos Formales, a través de un conjunto de elementos clásicos que representan, de un modo alternativo, la información gradual contenida en el L -contexto formal original. Por lo tanto, en este análisis nos gustaría centrarnos en analizar qué aporta el Análisis de Conceptos Formales basado en la Representación por Niveles a la literatura, comparándolo con estas otras propuestas. Ya que, como hemos dicho, la ventaja del ACF-RN con respecto al resto de propuestas es clara: tomar aquellos avances que existen para el Análisis de Conceptos Formales clásico y emplearlos en el ámbito gradual.

Como vimos en la Sección 2.3.2 una de las principales ventajas que tiene la Representación por Niveles es que las extensiones de conceptos difusos a través de una representación por niveles conservan las propiedades del concepto clásico. Recordemos por ejemplo lo que ocurría con las propiedades propias de las álgebras booleanas. Pusimos de manifiesto en la Sección 2.3.2 que mientras que las distintas teorías de conjuntos difusos nos permitían tener una gran flexibilidad semántica al poder escoger la tripleta de operadores $\langle \otimes, \oplus, \neg \rangle$ que mejor se adecuase a nuestra aplicación, estas teorías tenían el problema de que no podían verificar todas y cada una de las propiedades de las álgebras booleanas clásicas. Además, dentro del campo de la Lingüística Computacional uno de los principales problemas que se señalan en el manejo de la gradualidad propia del lenguaje a través de la Teoría de Conjuntos Difusos viene precisamente de esta flexibilidad. Así, se considera que el hecho de que no exista una forma única de definir las distintas operaciones dificulta el uso de la Teoría de Conjuntos Difusos para este propósito, sobre todo se señala

la complejidad para definir las funciones de membresía que modelan los distintos conceptos lingüísticos. En cambio, en la Representación por Niveles, hay una forma única de definir cada extensión de un concepto al ámbito gradual. Por lo que trabajar con representaciones por niveles nos permite, no solo aprovechar las herramientas que ya hemos definido para el problema de Generación de Expresiones de Referencia clásico, sino que además nos permite manejar esta gradualidad sin el problema que acabamos de presentar.

En particular, emplear una representación por niveles tiene ventajas cuando queremos tratar con propiedades booleanas, como por ejemplo las que vimos para algunas extensiones del problema de Generación de Expresiones de Referencia en la Sección 2.2, y queremos conservar estas propiedades. Es claro que trabajar con disyunciones de propiedades por niveles resulta tan natural como podría serlo en el caso clásico del Análisis de Conceptos Formales.

Ahora bien, alguna de las extensiones del Análisis de Conceptos Formales que hemos visto anteriormente se basaba en α -cortes, algo que como vimos era un caso particular de representación por niveles. Por lo que podemos pensar que este tipo de extensiones son tan versátiles como nuestra propuesta y que presentan las mismas ventajas. Sin embargo, el problema que tienen los α -cortes es que no son tan flexibles como lo es la Representación por Niveles, que ya vimos que tiene una gran capacidad de generalización en la Sección 2.3.2. Además, hay ocasiones en los que los α -cortes nos llevan a resultados que no parecen lógicos o que no tienen sentido desde un punto de vista práctico.

Pensemos en un ejemplo particular que refleja cómo el uso de α -cortes puede conllevar ciertas inconsistencias propias de la Teoría de Conjuntos Difusos, y que no están presentes en la Representación por Niveles, ya que, como hemos dicho, esta última conserva todas las propiedades de las álgebras booleanas clásicas.

Así, vamos a ver lo que sucede con la negación de propiedades graduales, y vamos a considerar la operación de complementación usual en la Teoría de Conjuntos Difusos; $x \rightarrow 1 - x$.

Ejemplo 5.11:

Podemos considerar un universo de discurso como el que mostramos en la siguiente tabla, en el que tenemos un conjunto de objetos $\{a, b, c\}$ y un conjunto de propiedades graduales $\{x, y, z\}$.

	x	y	z
a	0.5	1	1
b	1	0.7	1
c	1	1	1

En este caso tenemos que si consideramos, por ejemplo, la propiedad $\neg x$ tenemos que $\neg x(a) = 0.5$, por tanto, si consideramos un nuevo universo en el que incluimos cada propiedad y su negada, tenemos lo siguiente:

	x	y	z	$\neg x$	$\neg y$	$\neg z$
a	0.5	1	1	0.5	0	0
b	1	0.7	1	0	0.3	0
c	1	1	1	0	0	0

Con lo que tendremos que en el 0.5-corte, que recogemos en la siguiente tabla, se tiene que a presenta a la vez las propiedades x y $\neg x$ algo que, en muchos casos resultará contradictorio y llevará a contextos clásicos que contendrán información sin sentido.

	x	y	z	$\neg x$	$\neg y$	$\neg z$
a	1	1	1	1	0	0
b	1	1	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0	0

Sin embargo, este problema puede ser salvado si empleamos nuestra propuesta que no exige un anidamiento, ni una relación entre los distintos niveles, de modo que en cada nivel de nuestro contexto formal definido sobre RN-conjuntos incluyamos la propiedad $\neg x$ si, y solamente si, no está presente la propiedad x .

Centrémonos entonces en cómo se manejan los atributos negados en el campo del Análisis de Conceptos Formales. Lo que se hace normalmente para manejar atributos negativos en el Análisis de Conceptos Formales clásico es, en lugar de considerar el contexto añadiéndole nuevos atributos que representen los negados de los atributos originales, lo que supondría un aumento del coste computacional del cálculo del retículo [154, 181], es que se tienen en cuenta esta información solo en los operadores de derivación para así tener algoritmos más eficientes como los que presentan en [129, 181].

En el caso del L -Análisis de Conceptos Formales encontramos la propuesta en [9], en la que se consideran L -conceptos formales de modo que en su intensidad incluyen tanto atributos negativos como positivos. En concreto se tiene lo siguiente.

Definición 5.31: Operadores de derivación antitónicos e isotónicos [9]

Consideremos un L -contexto formal $\mathbb{K} := (G, M, I)$, donde G es un conjunto de objetos, M es un conjunto de atributos e I es una L -relación entre objetos y atributos, es decir, $I \in L^{G \times M}$. Se definen los siguientes pares de operadores de derivación.

Por un lado tenemos los operadores antitónicos (\uparrow, \downarrow) que son los operadores de derivación usuales del L -Análisis de Conceptos Formales.

$$\uparrow: L^G \rightarrow L^M; A^\uparrow(m) := \bigwedge_{g \in G} (A(g) \rightarrow I(g, m)), \quad (5.22)$$

$$\downarrow: L^M \rightarrow L^G; B^\downarrow(g) := \bigwedge_{m \in M} (B(m) \rightarrow I(g, m)). \quad (5.23)$$

Por otro lado se define el siguiente par de operadores isotónicos (\cap, \cup) que vienen dados por las siguientes ecuaciones donde \otimes es una t-norma.

$$\cap: L^G \rightarrow L^M; A^\cap(m) := \bigvee_{g \in G} (A(g) \otimes I(g, m)), \quad (5.24)$$

$$\cup: L^M \rightarrow L^G; B^\cup(g) := \bigwedge_{m \in M} (I(g, m) \rightarrow B(m)). \quad (5.25)$$

En las figuras 2 y 3 de [9] podemos encontrar una interpretación gráfica de estos dos pares de operadores. Como se señala en [9], mientras que los operadores (\uparrow, \downarrow) consideran los atributos en un sentido positivo (podríamos hacer un análisis similar para el caso de los objetos) y por lo tanto el grado $A^\uparrow(m)$ nos dice en qué grado al menos todos los objetos de A presentan el atributo m , los operadores isotónicos, (\cap, \cup) , consideran los atributos en un sentido negativo, es decir, el grado $A^\cap(m)$ nos dice en qué grado como máximo todos los objetos en A presentan el atributo m . Por ejemplo, cuando $A^\cap(m) = 0$ esto indica que ninguno de los objetos en A presenta el atributo m en ningún grado. En base a estos operadores vamos a ver cómo se definen L -contextos formales en los que se manejan atributos en sentido positivo y negativo.

Notación 5.1: L -conceptos con atributos positivos y negativos [9]

Se consideran L -conceptos formales donde la intensión está compuesta por un L -conjunto definido sobre un conjunto de atributos positivos ${}^+M$ y un L -conjunto definido sobre un conjunto de atributos negativos ${}^-M$. Así, se tendrá por ejemplo el par $A = ({}^+A, {}^-A)$, un par de L -conjuntos de atributos, unos considerados en sentido positivo y otros en negativo.

Definición 5.32: Operadores de derivación para un L -contexto con atributos positivos y negativos [9]

Consideremos un L -contexto $\mathbb{K} := (G, M, I)$, donde G es un conjunto de objetos, M es un conjunto de atributos e I es una L -relación entre objetos y atributos. Entonces se definen sendos conjuntos de atributos positivos y negativos ${}^+M, {}^-M \subseteq M$, que no necesariamente han de ser conjuntos disjuntos.

Se define ahora un L -contexto con atributos positivos y negativos como una tripleta $\mathbb{K}^\pm := (G, ({}^+M, {}^-M), I) = (G, M, I)$, y notamos por ${}^+I = I \cap (G \times {}^+M)$ y ${}^-I = I \cap (G \times {}^-M)$. En este nuevo contexto se definen los siguientes operadores de derivación:

$$\Delta: L^G \rightarrow L^{+M \times -M}; A^\Delta := (A^\uparrow, A^\cap), \quad (5.26)$$

$$\nabla: L^{+M \times -M} \rightarrow L^G; B^\nabla := ({}^+B^\downarrow \cap {}^-B^\cup), \quad (5.27)$$

Hemos de señalar que en cada caso los operadores de derivación antitónicos e isotónicos que se emplean son aquellos inducidos, respectivamente, por las L -relaciones ${}^+I$ y ${}^-I$.

De este modo, podemos manejar atributos en sentido positivo y negativo en un L -contexto formal. Ahora bien, como se ha indicado en la anterior definición, los

conjuntos ^+M y ^-M no tienen por qué ser disjuntos, por lo tanto, esto no evita casos paradójicos como los que hemos expuesto en el Ejemplo 5.11.

También, nos gustaría señalar que las propuestas basadas en considerar propiedades artificiales que representen los distintos grados de membresía de un atributo u objeto a un L -conjunto pueden resultar más ineficientes que nuestra propuesta. No solamente son menos generales, sino que como hemos visto en la Ecuación 4.13, incrementar el número de propiedades en un contexto aumenta exponencialmente el tiempo de cómputo requerido, mientras que nuestra propuesta es fácilmente paralelizable, y además podemos emplear los métodos de reducción y clarificación que hemos visto en la Sección 4.1.2 para simplificar aún más los contextos formales clásicos correspondientes a cada nivel.

Por último vamos a ver una tabla en la que comparamos distintos aspectos de las propuestas que hemos visto en la Sección 5.1 en relación con nuestra propuesta. Hemos de señalar que aquí no consideramos la primera propuesta de Burusco y Fuentes-González, ya que como hemos visto presentaba problemas de base.

	Consistencia	Reutilización	Toda la información	Grados	Semántica
RN-ACF	•	•	•	•	
PollandyBělohávek			•		
Yahia			•		
<i>crisplygenerated</i>					
modificadores			•		
Krajčí			•	•	
Medina			•	•	•
Georgescu y Popescu			•		
Conexiones de Galois anidadas		•	•	•	
Propiedades artificiales		•	•	•	
Ďuráková				•	

Tabla 5.6: Comparativa de las distintas propuestas para extender el Análisis de Conceptos Formales al ámbito gradual. Mostramos para cada propuesta (en orden) si mantiene la consistencia de las propiedades algebraicas, si permite la reutilización de desarrollos en el caso crisp, si usa toda la información contenida en el contexto, si permite emplear distintos conjuntos de grados para distintas componentes del problema y si permite tratar con distinta semántica la información para cada objeto (o para cada atributo) del contexto.

En primer lugar, analizamos la conservación de las propiedades algebraicas propias de las lógicas booleanas. Como hemos visto a lo largo de este capítulo, nuestra propuesta es la única que conserva todas las propiedades algebraicas al pasar a un ámbito gradual. El resto de propuestas, incluso aquellas que pasan de un contexto gradual a varios niveles crisp, como las pasadas en α -cortes o la que incluye propiedades artificiales para representar varios grados de una propiedad, tienen inconsistencias lógicas.

Estas últimas propuestas, que realizan un proceso de «desgradualización» tienen en común con nuestra propuesta la ventaja de poder aprovechar aquellos desarrollos teóricos y prácticos que se pueden encontrar para el Análisis de Conceptos Formales clásicos, aplicando estas ideas en cada uno de los niveles que las definen.

Esto, como hemos venido diciendo, es muy importante e interesante. Por ejemplo, ya analizamos las importantes ventajas y propiedades que tiene nuestra propuesta de la Sección 4.2 para tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia en el caso clásico a través del Análisis de Conceptos Formales. Estas propuestas nos permitirán conservar estas características en un ámbito gradual.

También podemos pensar en si una propuesta extrae toda la información posible de un L -contexto formal. En general, de un modo u otro, todas las propuestas que hemos visto consideran toda la información del contexto. Sin embargo la propuesta de considerar conceptos *crisply generated*, ignora mucha información del contexto, ya que solo considera conceptos que pueden ser descritos por medio de un conjunto crisp de propiedades. Aunque esto disminuye la cantidad de información que hemos de manejar y puede tener interesantes implicaciones prácticas, es evidente, que habrá conceptos interesantes en un contexto formal que sean ignorados por esta propuesta, por ejemplo el conjunto de objetos anaranjados. Del mismo modo, no consideramos que la propuesta de Ďuráková basada en α -cortes proporcione toda la información posible a partir de un contexto formal, puesto que el multiconjunto que emplean hace que se pierda información tan relevante como en qué niveles se da el atributo.

Por último, nos gustaría centrarnos en la generalización que aporta cada propuesta. Es claro que las generalizaciones de Krajčí y de Medina tiene una gran capacidad de generalización, al permitir considerar distintos conjuntos de grados, y esto las diferencia de la mayoría de propuestas que hemos presentado.

Ahora bien, nuestra propuesta es lo suficientemente general como para poder manejar distintos conjuntos de grados como hace Krajčí. Y es que bastará con considerar como niveles elementos del producto cartesiano de tres conjuntos de niveles: una para los objetos, otro para los atributos y otro para la relación entre objetos y atributos. A partir de estos niveles, podemos considerar en cada uno la misma información que se considera en la propuesta de Krajčí. Y el mismo razonamiento podemos hacer para otras propuestas como las basadas en α -cortes. Aunque, como hemos dicho, de entre estas propuestas que pasan de un ámbito gradual a uno crisp, nuestra propuesta es mucho más general al emplear la Representación por Niveles para ello.

Por lo tanto, nuestra propuesta es tan general como la de Krajčí, pero es cierto que la propuesta de Medina da una mayor flexibilidad semántica gracias a la asignación de tripletas adjuntas a cada atributo, con lo que su propuesta es más flexible, aunque no conserva las propiedades algebraicas, ni permite aprovechar resultados del Análisis de Conceptos Formales clásico.

Capítulo 6

Desarrollos prácticos

En los capítulos anteriores hemos introducido las bases sobre las que se sustenta este trabajo de investigación y hemos presentado los desarrollos teóricos que constituyen la principal aportación de esta tesis doctoral. Hemos visto cómo el Análisis de Conceptos Formales es un mecanismo formal de representación de conocimiento que nos permite tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia, tanto en un ámbito crisp como gradual.

En este capítulo nos centraremos en otros resultados que complementan la investigación dentro del campo de la Generación de Expresiones de Referencia, trabajos que en mayor o menor medida tienen un carácter práctico, a diferencia de los resultados que hemos presentado en los capítulos anteriores, que son resultados puramente teóricos.

En primer lugar, presentaremos el desarrollo de un sistema de interacción con usuarios a través de expresiones de referencia. Este sistema, que se programó como una aplicación Android, está orientado al campo de la enseñanza. En concreto, el propósito de este sistema es ayudar a niños y niñas en edad escolar a aprender conceptos básicos como la forma o el color. En esta aplicación creamos un juego referencial en el que usuario ha de tocar en la pantalla el objeto que se le indica con una expresión de referencia generada de forma automática, empleando algoritmos como los que hemos visto en los Capítulos 2, 4 y 5. Esta aplicación se describirá en la Sección 6.1.

Además, esta aplicación ha sido de gran importancia en la investigación realizada ya que nos ha servido como herramienta experimental para otros estudios que hemos realizado. Gracias a esta aplicación hemos podido realizar distintas experimentaciones que se han enfocado como un juego referencial con unas características determinadas, con lo que adaptando el sistema desarrollado en esta aplicación Android, hemos podido realizar distintas experimentaciones que han arrojado resultados muy interesantes, tanto en el campo de la Generación de Lenguaje Natural como en el de la Lingüística Computacional. En concreto, en la Sección 6.2 presentamos un estudio experimental centrado en la evaluación de medidas de especificidad. En esta experimentación se estudian distintas medidas de especificidad para ver cuál de ellas modela mejor la semántica de especificidad en la tarea de la iden-

tificación de figuras geométricas en una escena o, más en general, en la tarea de la identificación de objetos. Como hemos visto en el Capítulo 3, existe una gran variedad de medidas de especificidad, lo que nos permite escoger aquella que mejor se adecue a nuestro sistema. Así, esta experimentación, no solo arroja resultados sobre la tarea realizada y las medidas de especificidad analizadas, sino que establece un protocolo y un diseño de experimentación para analizar la adecuación de una medida de especificidad para un sistema determinado.

Otra tarea de gran relevancia en este tipo de sistemas es la del modelado de los términos lingüísticos que en él se emplean. Ya hemos visto en el Capítulo 3 la gradualidad presente en los términos lingüísticos que usamos en nuestro día a día, y la importancia que tiene el problema de Anclaje de Símbolos en el campo de la Generación de Lenguaje Natural. En concreto, en la Sección 6.3 presentamos una propuesta preliminar para modelar de manera automática la semántica de propiedades contextuales, lo que resulta de gran interés, ya que el modelado de este tipo de propiedades resulta más complejo al tener que incorporar también cómo afecta el contexto a la propiedad.

Finalmente, en la Sección 6.4 veremos cómo podemos combinar técnicas de Generación de Expresiones de Referencia, como las que hemos visto en los capítulos anteriores, con técnicas propias del área del Aprendizaje Profundo, en concreto del área de la Visión Artificial, para diseñar un sistema de descripción automática de imágenes. Esta investigación demuestra cómo el uso de juegos referenciales puede servir de herramienta para la resolución del problema de Anclaje de Símbolos del que hemos hablado.

6.1 UN CASO DE USO: APLICACIÓN PARA LA ENSEÑANZA

Ya hemos visto a lo largo de esta memoria distintos desarrollos teóricos, y hemos puesto de manifiesto que los sistemas data-2-text constituyen un ejemplo paradigmático de aplicación de todas aquellas técnicas que hemos desarrollado para tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia. En esta sección vamos a ver un ejemplo más concreto de este tipo de sistemas, y será un ejemplo sobre el que podemos aplicar buena parte de los desarrollos teóricos que hemos venido viendo a lo largo de los capítulos y secciones anteriores.

La aplicación que vamos a presentar, que hemos denominado *Refer4Learning*, es una aplicación Android orientada al campo de la enseñanza, donde el campo de la Generación de Lenguaje Natural tiene múltiples aplicaciones [73]. En concreto, nuestra aplicación tiene como objetivo ayudar a niños y niñas en edad escolar a asimilar o aprender conceptos como la forma, el color, el tamaño y la posición de objetos en una escena. En esta aplicación se muestran escenas compuestas por una serie de figuras geométricas con distintos colores y tamaños como la que se muestra en la Figura 6.1.

Esta aplicación se encarga de generar una escena de forma aleatoria, compuesta por un conjunto de objetos, y le indica al usuario que toque el único objeto que se corresponde con una determinada descripción, con una determinada expresión de referencia que ha sido construida de forma automática. Este tipo de ejercicios

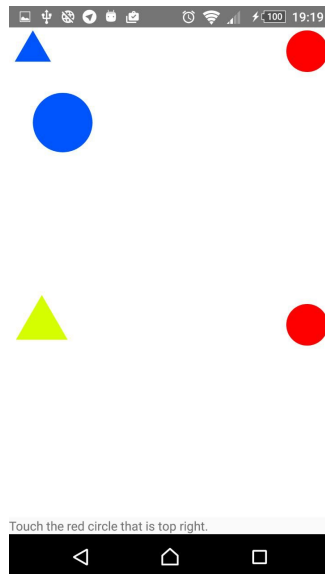


Figura 6.1: Ejemplo de escena con figuras geométricas que se genera en la aplicación *Refer4Learning*.

coinciden con las actividades que podemos encontrar en muchas fichas escolares, donde se pide que se rodee o coloree un objeto determinado, por ejemplo «el círculo más grande», como ya señalamos al comienzo del Capítulo 2.

Como es común en todo proceso de aprendizaje, este tipo de ejercicios se plantea en orden creciente de dificultad; en cada paso se presentan propiedades más complejas, descripciones más elaboradas, o escenas más complejas. Nuestro sistema de generación de escenas también incorpora distintos niveles de dificultad, presentando conjuntos de escenas cada vez más complejas, en las que el usuario ha de identificar el objeto correcto. Es decir, la aplicación que hemos desarrollado es un ejemplo de juego referencial [77].

En estas escenas, como la que vemos en la Figura 6.1, consideramos cuatro propiedades distintas para cada uno de los elementos de la escena: la forma, el color, el tamaño y su posición en la escena en términos absolutos. Mientras que la forma, en este caso, la modelamos sin ningún tipo de gradualidad, para el color, el tamaño y la posición en la escena, sí que consideramos gradualidad en su definición. Por tanto, como hemos puesto de manifiesto en capítulos anteriores, en este sistema hemos tenido que modelar esta gradualidad en las propiedades a fin de hacer que nuestro sistema trabaje con estos términos lingüísticos de una forma adecuada.

En el caso de esta aplicación, se han modelado las distintas etiquetas lingüísticas que consideramos empleando para ello particiones difusas, como la que veíamos para el matiz del modelo HSV del color en el Capítulo 3. En concreto, es esta partición la que empleamos en la aplicación. En nuestro caso consideramos colores con un brillo y saturación fijos, con lo que la etiqueta lingüística del color vendrá

dada únicamente por su matiz.

Del mismo modo, el tamaño de los objetos se modela empleando una partición fija del espacio de posibles tamaños de los mismos, sin tener en cuenta el contexto. Aunque ya vimos en el Capítulo 3 que este tipo de representaciones no eran del todo convenientes para tratar con propiedades contextuales, en este caso, y para los propósitos de nuestra aplicación, sí que consideramos que con una partición difusa como la que mostramos en la Figura 6.2 es suficiente para nuestros objetivos. Como podemos observar, en este caso no estamos empleando la Representación por Niveles para modelar esta gradualidad; en este caso, las propiedades de la Teoría de Conjuntos Difusos son suficientes para este sistema y no necesitamos de aquellas características que en particular ofrece la Representación por Niveles. Y además, luego podremos discretizar estos conjuntos difusos y pasar a una representación por niveles como hemos visto. Sin embargo, una representación directa por medio de niveles también resultaría adecuada para nuestros objetivos.

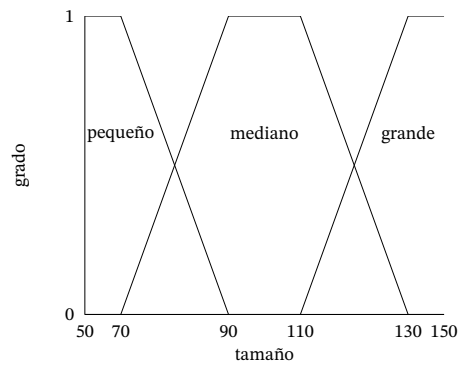


Figura 6.2: Ejemplo de partición difusa para modelar las etiquetas lingüísticas relativas al tamaño de los objetos en la aplicación *Refer4Learning*.

Al igual que en el caso del tamaño, la posición de los objetos se modela como un par de particiones difusas en los ejes horizontal y vertical de la pantalla. De modo que se consideran las etiquetas lingüísticas *arriba*, *en el medio* y *abajo* para la posición vertical del objeto; y las etiquetas *izquierda*, *en el centro* y *derecha* para referirnos a la posición horizontal del objeto.

Una vez que hemos visto cómo modelamos los términos lingüísticos que empleamos en nuestro sistema, veamos cómo funciona. En nuestro sistema empleamos un proceso inverso al que estamos acostumbrados a ver en los capítulos anteriores donde, a partir de una escena y objeto, se construía una expresión de referencia para el objeto que se desea referenciar. En nuestro caso, a partir de una expresión de referencia, que será adecuada para señalar una determinada propiedad, y por tanto constituirá un buen ejemplo para trabajar un determinado concepto, intentamos encontrar una escena en la que exista un único objeto que se corresponda con dicha expresión de referencia. Formalmente este problema se podría describir como sigue:

Problema 6.1:

Dada una cierta expresión de referencia re y un conjunto de imágenes D , encontrar aquellas imágenes tales que se da la siguiente condición, donde rs es una medida de éxito referencial y τ es un nivel mínimo de éxito referencial que establecemos y que dependerá de nuestros objetivos:

$$\exists o \in O \mid rs(re, o) \geq \tau \quad (6.1)$$

Nuestro sistema podrá obtener, dentro del conjunto de imágenes que son adecuadas para tratar un determinado concepto, aquellas que cumplan unos criterios de complejidad determinados, como puede ser el número de distractores en la escena o el parecido, en la propiedad en cuestión, que los distractores tendrán con el objeto objetivo, aumentando o reduciendo así la complejidad del ejercicio. Es decir, en nuestro sistema se realiza un proceso de Recuperación de Información, en este caso en un repositorio de imágenes o escenas. Aunque el procedimiento que se realiza en nuestro sistema es extensible a otros sistemas de recuperación de información y otros repositorio o bases de datos.

Ya hemos visto en Capítulo 3 la relación entre los conceptos de éxito referencial y de especificidad. Es el ámbito de nuestro sistema en concreto, nosotros estamos interesados en imágenes en las cuales la expresión de referencia que se use señale a un único objeto, que será el objeto a identificar y a través del cual el niño o niña reforzará su conocimiento sobre un concepto determinado, como puede ser el color rojo al identificar un círculo rojo en la escena. Pero no nos importa qué objeto dentro de la escena sea el que cumpla este objetivo; solo nos interesa que exista uno. Por lo tanto, esto equivale a buscar una escena que, vista como un conjunto de objetos, haga que la especificidad del conjunto difuso que sobre ese conjunto de objeto defina la expresión de referencia escogida sea lo suficientemente grande. Además, si en lugar de buscar una escena donde esta especificidad sea máxima, buscamos una donde la especificidad sea menor, tendremos un ejemplo donde será más difícil identificar el objeto correcto, de forma que podamos controlar el nivel de dificultad del ejercicio. Este nivel de dificultad puede venir también determinado por otros factores como el número de objetos en la escena o la variedad de propiedades en la misma.

Si vemos este proceso de recuperación de imágenes como una consulta en una base de datos, entonces la sentencia SQL para obtener el conjunto de escenas que necesitamos sería la siguiente, donde se emplea una cierta medida de especificidad Sp y se considera una expresión de referencia re .

```
SELECT escena FROM repositorio
WHERE  $Sp(re) \geq \tau$  AND otros criterios
ORDER BY  $Sp(re)$ , otros criterios. \quad (6.2)
```

Por ejemplo, en la Figura 6.1 tenemos una imagen que tiene especificidad máxima para la expresión de referencia «el círculo rojo en la esquina superior derecha». Por otro lado, para las escenas de la Figura 6.3, tenemos escenas en las que, por un

motivo u otro, la especificidad de dicha expresión de referencia disminuye, aumentando la complejidad del ejercicio.

Para determinar la especificidad de una escena concreta el sistema ha de ser capaz de analizar cada una de las escenas del repositorio, con lo que necesitamos representar la información del mismo de un modo que sea tratable por el sistema. En el caso de esta aplicación optamos por emplear unos grafos etiquetados similares a los que hemos presentado en la Sección 2.1.1, en el que representábamos para cada objeto el grado en el que cumplía cada una de las propiedades de las que hemos hablado. Estas imágenes se pueden generar automáticamente, emplean un mecanismo que, dada una expresión de referencia determinada, fuese capaz de generar un universo donde dicha expresión tiene una especificidad determinada, así como otros criterios de complejidad. O bien, pueden ser generadas por el usuario, en cuyo caso se analiza la escena generada, se determina qué objetos son referibles y se genera una expresión para uno de ellos.

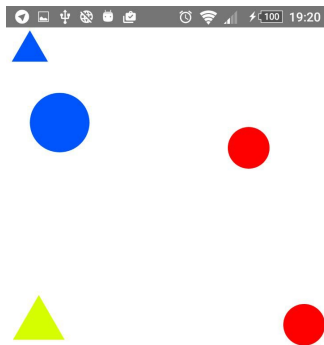
En la siguiente sección vamos a ver cómo podemos emplear este tipo de juegos para llevar a cabo una experimentación interesante tanto desde el punto de vista de la Generación de Expresiones de Referencia, como desde el campo de la Lingüística Computacional.

6.2 EXPERIMENTACIÓN A TRAVÉS DE UN JUEGO REFERENCIAL

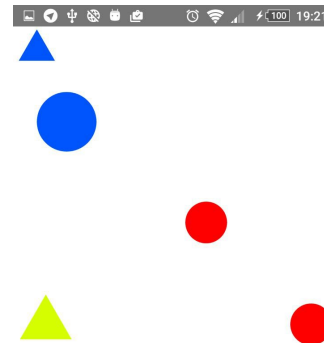
Como hemos visto en el Capítulo 3, para medir la especificidad de un conjunto difuso podemos definir diversas medidas de especificidad, que pueden tener asociada distintas semánticas. El propósito de los sistemas que estamos tratando en ese capítulo, y del campo de la Generación de Lenguaje Natural en general, es producir un texto similar al que produciría un humano para la misma tarea. Es por esto que, como hemos puesto de manifiesto en el Capítulo 3, se introduce la gradualidad en el problema de la Generación de Expresiones de Referencia, lo que hace que medir la especificidad de una determinada expresión de referencia con propiedades graduales sea más complejo que en un ámbito crisp.

Además, dado que el objetivo de estos sistemas es producir una comunicación natural con el usuario, el concepto de especificidad y de éxito referencial, que como sabemos son dos conceptos fuertemente ligados, tendrán que reflejar las preferencias y la semántica del propio usuario; no bastará con dar un valor numérico ajeno a las preferencias del usuario y a las condiciones específicas del problema concreto en el que estemos trabajando. En general, el modelado que hagamos de los distintos elementos de nuestro sistema tendrá que tener en cuenta al usuario final del mismo. Ya hemos visto ejemplos de esto en el caso del modelado de términos lingüísticos en un sistema de generación de lenguaje natural.

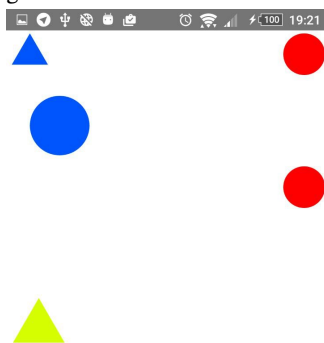
Por ejemplo, cuando estamos trabajando con propiedades contextuales, establecemos en muchos casos un orden entre los objetos del universo de discurso en base a esas propiedades. Es decir, realizamos comparaciones entre los objetos en base a la propiedad contextual que se esté considerando en cada momento. Pero habrá diferencias entre objetos para una propiedad que serán imperceptibles para el usuario. Nuestro sistema ha de ser capaz de determinar cuándo dos objetos, a los ojos



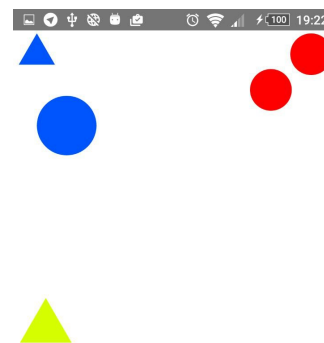
(a) Ejemplo de escena donde la especificidad es 0.6 ya que el objetivo no cumple la expresión en grado máximo.



(b) Ejemplo de escena donde la especificidad es 0 ya que el objetivo no cumple en absoluto.



(c) Ejemplo de escena donde la especificidad es 0.6 ya que hay un segundo objeto que cumple la expresión con cierto grado.



(d) Ejemplo de escena donde la especificidad es 0 ya que hay un segundo objeto que cumple la expresión en máximo grado.

Figura 6.3: Ejemplos de escenas en las que la expresión de referencia «el círculo rojo en la esquina superior derecha» presenta una especificidad más baja debido a distintos motivos, lo que dificulta el ejercicio a realizar.

del usuario, son indistinguibles según una propiedad determinada, de modo que no considere que esos objetos son referibles a través de esa propiedad. Y es que un ordenador puede manejar datos con una alta precisión, pero llegará un momento en que estas diferencias en los valores representados en el ordenador no serán distinguibles para el usuario. Por ejemplo, para los objetos de la Figura 6.4, aunque el radio del círculo *A* es de 1cm , mientras que el del círculo *B* es de 1.05cm , la expresión de referencia «el círculo pequeño» no tendrá éxito referencial en absoluto para el círculo *A*, ya que a simple vista ambos círculos son indistinguibles.

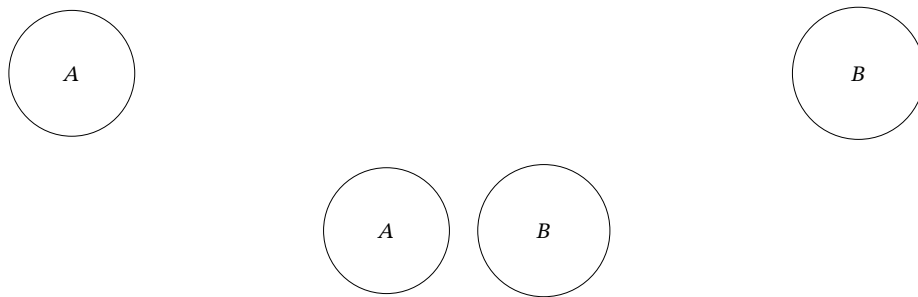


Figura 6.4: Ejemplo en el que dos círculos son indistinguibles a simple vista, aunque realmente sus radios sean distintos. Como podemos ver, cuando los círculos están suficientemente cerca, entonces es perceptible su diferencia de tamaño, pero si los círculos están más alejados esta diferencia es prácticamente imperceptible, aunque esto dependerá de la agudeza visual del usuario.

Y con esta idea, es claro que el uso de una medida especificidad u otra dependerá de cómo cada medida sea capaz de reflejar la especificidad real de una expresión de referencia para un usuario real en el contexto en el que estemos trabajando. A continuación, presentamos un estudio experimental en el que, para ocho medidas de especificidad distintas, vemos cuál de ellas refleja mejor la especificidad real en un contexto determinado. Además, a partir de la misma experimentación, realizamos un estudio de qué factores influyen en el éxito de una determinada expresión de referencia.

En este estudio vamos a analizar un conjunto de ocho medidas de especificidad, las cuales encontramos en la Tabla 6.1. Estas medidas se corresponden con medidas de especificidad tipo predicado, como las que hemos visto en el Capítulo 3. En este caso estamos comparando medidas de especificidad adecuadas para, por ejemplo, el sistema de Recuperación de Información que hemos presentado en la sección anterior. Estas medidas indican en qué grado en la escena se da que la expresión de referencia tiene éxito referencial para un único objeto en la escena, aunque no nos importa para qué objeto sea.

Como vemos, en la Tabla 6.1 encontramos medidas normalizadas y sin normalizar. El hecho de emplear estos dos tipos de medidas es debido a que tienen un comportamiento distinto en ocasiones. En concreto, en el caso en el que un conjunto difuso no esté normalizado, entonces, las medidas de especificidad no normalizadas pueden darnos el mismo resultado en distintas situaciones. Por ejemplo,

	$Sp(O)$		$Sp(O)$
m_1	$a_1 - a_2$	m_2	$(a_1 - a_2)/a_1$
m_3	$a_1 * (a_1 - a_2)$	m_4	$a_1 * (a_1 - a_2)/a_1$
m_5	$a_1 * (1 - a_2)$	m_6	$a_1 * (1 - a_2)/a_1$
m_7	$\min(1, 1 - a_2)$	m_8	$\min(1, 1 - a_2)/a_1$

Tabla 6.1: Medidas de especificidad que se analizan en esta experimentación. Como vemos, en cada fila encontramos una medida de especificidad y la misma medida normalizada, donde $a_1 \geq \dots \geq a_n$ son los grados de membresía del conjunto difuso $O \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ ordenados en orden creciente.

la medida m_1 nos da el mismo grado de especificidad cuando $a_1 = 1$ y $a_2 = 0.5$, y cuando $a_1 = 0.5$ y $a_2 = 0$. Por tanto, resulta interesante comprobar en nuestra experimentación qué tipo de comportamiento se ajusta mejor a lo que espera un usuario real.

En nuestra experimentación empleamos una aplicación Android, que es una variación de la aplicación *Refer4Learning* que hemos presentado, en la que se proponía a los sujetos que identificasen un objeto determinado en distintas escenas, es decir, empleamos un juego referencial con el que llevar a cabo nuestros experimentos y extraer información de los resultados de cada sujeto en los mismos. En concreto, para cada escena y sujeto medimos dos variables distintas: el tiempo que el sujeto tarda en responder (tiempo de respuesta) y si ha escogido el objeto correcto (tasa de acierto), que son las variables que se consideran en la experimentación de [88]. A través de este experimento extraemos información relativa a dos cuestiones distintas:

1. Ver el impacto de distintos factores en el éxito referencial de la expresión de referencia empleada, como puede ser el tipo de propiedad empleado en la misma.
2. Comprobar en qué grado cada una de las medidas de especificidad de la Tabla 6.1 es capaz de predecir el tiempo que le llevará al usuario identificar el objeto y si el usuario acertará o no, es decir, queremos ver la correlación entre las medidas de especificidad y las dos variables que medimos en el experimento.

En cada ejercicio presentamos al sujeto una escena con cinco elementos, uno de los cuales es el objeto a identificar, a través de la expresión de referencia que presentamos al sujeto acompañando a la escena. En esta expresión de referencia se emplea una de las siguientes cuatro propiedades para identificar el objeto: el color; el tamaño medido en términos absolutos en tres intervalos de tamaño distintos; correspondientes a los tamaños grande, pequeño y mediano; la posición vertical absoluta del objeto y la horizontal. Además, para cada una de estas propiedades se consideran cinco niveles en los que el objeto presenta dicha propiedad, según la propiedad puede aplicarse en mayor o menor grado al objeto.

Un último factor adicional que consideramos es la presencia en la escena o no de un distractor similar al objetivo en la propiedad escogida para el objeto. Esto nos da un total de $4 \times 5 \times 2 = 40$ posibles combinaciones de factores para construir la escena. Así, de cara a realizar el estudio que detallaremos a continuación se realizó un diseño experimental adecuado para ello, poniendo especial atención en las propiedades de dicho experimento de cara a extraer conclusiones significativas de los experimentos.

A cada sujeto se le presentaron un total de 40 escenas distintas, cada una de las cuales se corresponde con una de las posibles combinaciones de factores que acabamos de ver. Para una misma escena, con unas figuras determinadas, de unos colores y tamaños determinados, podemos considerar una combinación determinada de factores; podemos tener la misma escena en la que un objeto sea rojo con grado máximo o tenga un grado menor de rojo, por ejemplo. Así, estas combinaciones se rotan para cada sujeto empleando un cuadrado latino, de modo que distintos sujetos vean la misma escena bajo distintas combinaciones de factores, o lo que es lo mismo, se considere la misma combinación de factores con escenas distintas.

De este modo, con este diseño intra-sujetos, es decir, un diseño en el que todos los sujetos son expuestos a todas las posibles condiciones del experimento, y en el que además presentamos para cada combinación de factores una escena distinta a cada sujeto, nos aseguramos que el efecto de una determinada combinación de factores sea independiente de la escena en la que se emplea.

Para llevar a cabo esta experimentación empleamos una adaptación de la aplicación Android que hemos presentado en la sección anterior, de modo que nos sirviese para llevar a cabo los experimentos con adultos que deseamos realizar. En la Figura 6.5 encontramos una captura de un ejemplo de escena empleada en estos experimentos. En cada experimento mostramos una escena con 5 elementos acompañada por una expresión de referencia que indica al sujeto qué objeto debe tocar, tanto por voz como por texto. Además, en la parte inferior de la pantalla se muestran una serie de objetos que sirven de referencia para las tres categorías de tamaño que consideramos.

6.2.1 RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN

En primer lugar podemos estudiar el impacto de distintos factores en el tiempo de respuesta y la tasa de acierto. Podemos comparar, para cada combinación de factores considerada, cómo varía el número de aciertos de los sujetos. Estos resultados se muestran en la Figura 6.6. Podemos ver cómo el grado en el que el objetivo presenta la propiedad y la presencia de un distractor similar tienen influencia en el éxito de la tarea. Y en concreto, el tiempo requerido para identificar un objeto por su tamaño disminuye a medida que el objeto presenta el tamaño indicado en mayor grado. Por otro lado, cuando hay un distractor similar y se emplea el color para identificar el objeto, el acierto de los sujetos disminuye a medida que el objeto, y por tanto también el distractor similar, presentan dicho color en mayor grado. Esto es lógico, puesto que cuando un objeto presenta, por ejemplo, el color rojo en un grado bajo, su distractor lo presentará en un grado aún menor, y por tanto quizás tenga un color claramente anaranjado, que el usuario identificará como naranja.

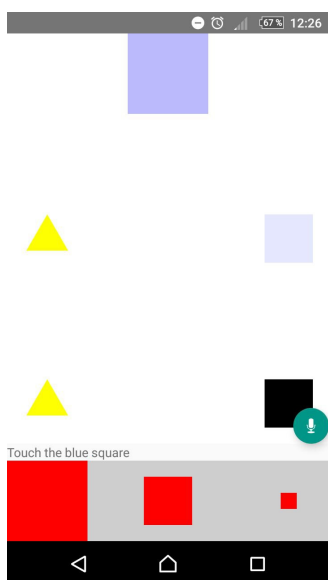
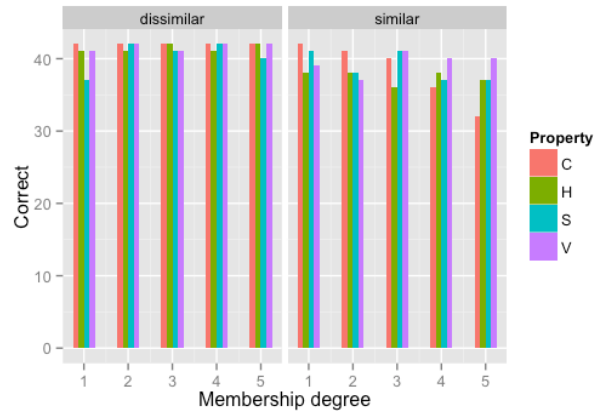
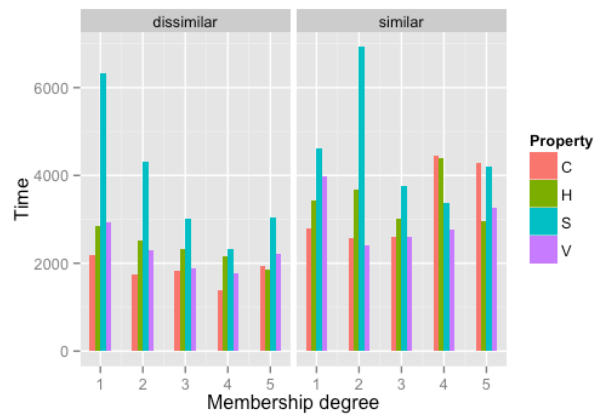


Figura 6.5: Ejemplo de ejercicio propuesto al sujeto en nuestra experimentación. Vemos la escena concreta del ejercicio sobre fondo blanco, la expresión de referencia relativa al ejercicio y, sobre fondo gris, los objetos que son referencia de las tres categorías de tamaño que se consideran. También puede verse un botón con el que el sujeto puede reproducir nuevamente la locución que lee la expresión de referencia indicada.

Sin embargo, cuando este grado aumenta, ambos objetos tendrá un color rojizo, y por tanto el usuario tendrá mayores dificultades para identificar el objeto correcto, al no poder descartar tan fácilmente al distractor.



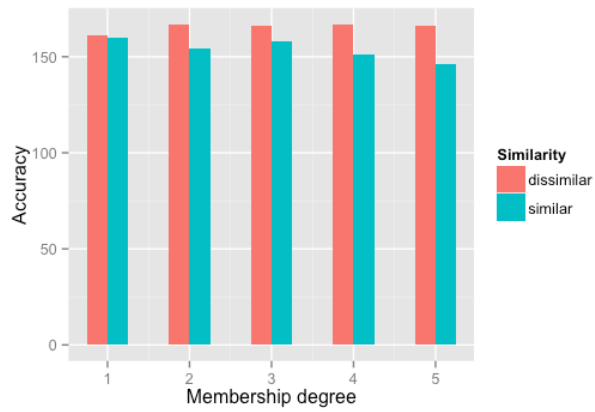
(a) Tasa de acierto.



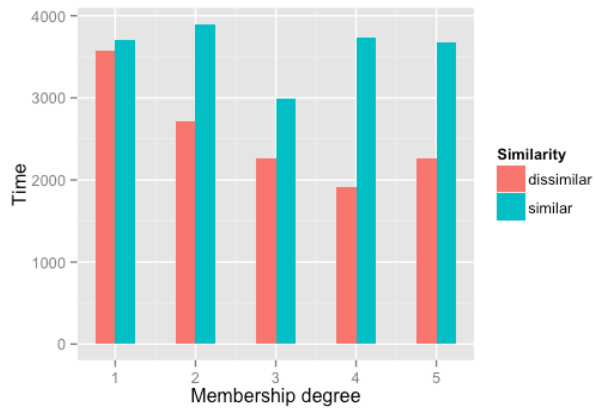
(b) Tiempo de respuesta.

Figura 6.6: Tasa de acierto y tiempo de respuesta de los sujetos, para cada posible combinación de propiedad, grado y presencia o no de un distractor similar. Leyenda: C (color), H (posición horizontal), S (tamaño) y V (posición vertical).

En la Figura 6.7 podemos ver cómo, en general, la presencia de un distractor similar disminuye la tasa de acierto de los sujetos y aumenta el tiempo que toman para responder a los ejercicios. Del mismo modo, podemos observar que cuando no hay un distractor similar en la escena, y por tanto la dificultad para identificar el objeto depende únicamente de cómo de clara sea la propiedad empleada para ese objeto, el tiempo de respuesta disminuye cuando el grado en el que el objeto presenta la propiedad es mayor.



(a) Tasa de acierto.



(b) Tiempo de respuesta.

Figura 6.7: Tiempo de respuesta de los sujetos para cada posible grado y presencia o no de un distractor similar, agrupando todos los resultados para las distintas propiedades que podemos emplear. Leyenda: C (color), H (posición horizontal), S (tamaño) y V (posición vertical).

A continuación vamos a realizar un análisis por separado para cada una de las dos variables que medimos, el tiempo de respuesta y la tasa de acierto. En este análisis empleamos un modelo jerárquico mixto con el que estudiar el efecto de los distintos factores que variamos de una escena a otra. En primer lugar construimos un modelo por separado para cada uno de los factores que consideramos, y los comparamos por medio de tres medidas distintas con un modelo base nulo: el criterio de información Bayesiano (CIB), la verosimilitud logarítmica (LL, por sus siglas en inglés) y el estadístico χ^2 .

modelo	CIB	LL	χ^2	modelo	BIC	LL	χ^2
base	546.74	-263.27		base	16019	-7996.1	
similitud	502.31	-237.69	51.159***	similitud	16003	-7984.5	23.313***
grado	550.34	-261.7	3.134*	grado	16020	-7993.4	5.4181**
propiedad	552.88	-262.97	0.5939	propiedad	16024	-7995	2.2904

(a) Tasa de acierto.

(b) Tiempo de respuesta.

Tabla 6.2: Comparación de modelos simples para analizar el impacto de los distintos factores sobre las variables de tasa de acierto y tiempo de respuesta. Leyenda: *** el nivel de significación es $p < 0.001$, ** el nivel de significación es $p < 0.05$, * significación marginal con $p \geq 0.05$.

La Tabla 6.2 resume los resultados de estas comparaciones con el modelo nulo, tanto para la tasa de acierto, como para el tiempo de respuesta. Y puede verse que, si no tenemos en cuenta ningún otro factor y los consideramos como independientes, es la presencia o no de un distractor similar el factor que mayor efecto tiene, ya que este es el modelo más explicativo (el que considera la similitud únicamente). Por otro lado, el grado en el que el objeto presenta la propiedad tiene mayor importancia para el tiempo de respuesta que para la tasa de acierto del sujeto. Por último, vemos que el tipo de propiedad empleada, por sí solo, no parece tener ningún tipo de influencia en las variables que se consideran.

Ahora podemos pasar a considerar modelos más complejos, en los que analicemos la influencia de unos factores sobre otros, viendo así cómo interactúan las distintas combinaciones de factores que podemos tener sobre las variables que consideramos. A partir de los resultados que mostramos en la Tabla 6.3, tenemos que la presencia de un distractor similar tiene efecto, pero depende también del grado en el que el objeto a identificar presenta la propiedad. También podemos ver que el tipo de propiedad que empleamos tiene efectos en las dos variables que consideramos.

Ahora vamos a pasar al estudio que más nos interesa teniendo en cuenta los desarrollos teóricos que hemos planteado en el Capítulo 3, y es el estudio de la adecuación de distintas medidas de calidad para un sistema particular de generación de expresiones de referencia.

Para poder elegir, de entre todas estas medidas de especificidad, cuál es mejor para nuestros propósitos podemos realizar un estudio como los que mostramos en las Tablas 6.4 y 6.5. Así, en el caso de la tasa de acierto, dividimos los experimentos realizados por los sujetos según hayan acertado o no. Después, obtenemos la media

factores fijados	estimación	error estándar	z-valor
base	2.88	0.45	6.39***
S	0.07	0.74	0.09
G	0.07	0.13	0.53
P	-0.66	0.33	-2.01*
S × G	-0.73	0.26	-2.77**
S × P	-0.42	0.66	-0.64
G × P	0.18	0.12	1.58
S × G × P	0.29	0.23	1.26

(a) Tasa de acierto.

factores fijados	estimación	error estándar	t-valor
base	3620.53	329.01	11***
S	119.29	508.24	0.24
G	-182.07	76.62	-2.38*
P	585.02	232.54	2.52*
S × G	314.26	153.24	2.05*
S × P	102.32	454.59	0.23
G × P	-142.17	69.58	-2.04*
S × G × P	-125.16	137.06	-0.91

(b) Tiempo de respuesta.

Tabla 6.3: Comparación de modelos combinados en los que analizamos la influencia de unos factores sobre otros. Leyenda: S (similitud), G (grado) y P (propiedad). En las primera filas aparecen los modelos donde se consideran los factores de forma individual. En las siguientes cada modelo representa la combinación de los factores que aparecen. Por ejemplo, el modelo S × P es el modelo que combina la presencia de un distractor similar con el tipo de la propiedad empleada. *** el nivel de significación es $p < 0.001$, ** el nivel de significación es $p < 0.01$, * el nivel de significación es $p < 0.05$.

del valor asignado por cada medida para cada uno de los conjuntos de experimentos, y vemos la diferencia entre ambos valores. Por lo tanto, cuanto mayor sea esta diferencia (Tabla 6.4) mejor será la media para predecir la tasa de acierto.

	\bar{X}_{corr}	\bar{X}_{incorr}	$\bar{X}_{corr} - \bar{X}_{incorr}$
m_1	0.418	0.238	0.180
m_2	0.756	0.476	0.280
m_3	0.293	0.161	0.132
m_4	0.418	0.238	0.180
m_5	0.455	0.301	0.154
m_6	0.824	0.588	0.235
m_7	0.493	0.360	0.134
m_8	0.890	0.689	0.201

Tabla 6.4: Valor medio de especificidad de cada medida para aquellas escenas en la que el sujeto ha acertado, \bar{X}_{corr} , y para aquellas en las que ha fallado \bar{X}_{incorr} .

En el caso del tiempo de respuesta calculamos dos coeficientes de correlación entre el valor devuelto por cada medida y el tiempo de respuesta del sujeto en el experimento. En este caso los resultados no son concluyentes, probablemente debido a la naturaleza de los datos que consideramos.

	r de Pearson	ρ de Spearman
m_1	-0.184	-0.258
m_2	-0.117	-0.202
m_3	-0.159	-0.239
m_4	-0.184	-0.258
m_5	-0.181	-0.293
m_6	-0.107	-0.202
m_7	-0.172	-0.265
m_8	-0.091	-0.163

Tabla 6.5: Coeficientes de correlación entre el tiempo de respuesta y el valor de distintas medidas de especificidad sobre la escena.

Como hemos podido ver, a partir de un juego referencial podemos obtener una gran cantidad de información relevante para el problema central de esta tesis doctoral, la Generación de Expresiones de Referencia. A continuación pasamos a ver una propuesta preliminar para el modelado de propiedades contextuales en sistemas como los que hemos visto en estas secciones.

6.3 MODELADO DE PROPIEDADES CONTEXTUALES

En la comunidad de la Lingüística Computacional hay cierto debate sobre el uso de la Teoría de Conjuntos Difusos como herramienta adecuada para el modelado de términos lingüísticos. En concreto, quienes no consideran que este mecanismo sea apropiado para este fin indican que resulta muy complejo el definir las funciones de membresía que modelan cada uno de los términos lingüísticos a utilizar en el sistema. Y además, el hecho de que las operaciones entre conjuntos difusos puedan definirse de infinitas formas distintas, hace que se encuentren dificultades a la hora de emplear la Teoría de Conjuntos Difusos para esta área.

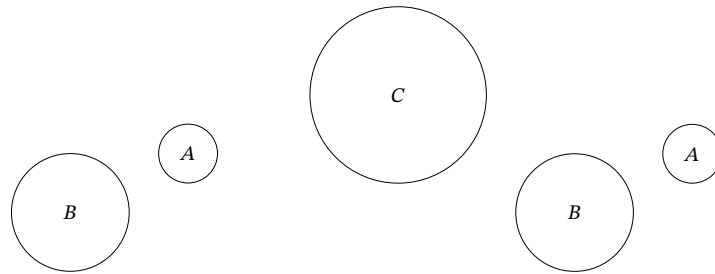
En esta sección vamos a presentar una propuesta para el modelado automático de propiedades contextuales. Mostrando así cómo realmente la Teoría de Conjuntos Difusos nos permite trabajar de una forma adecuada con términos lingüísticos, permitiéndonos modelarlos con una semántica correcta y de un modo automático. También mostramos que el uso de juegos referenciales puede ayudar en el desarrollo y validación de propuestas para la resolución del problema de Anclaje de Símbolos mediante el uso de la Teoría de Conjuntos Difusos.

En lo que sigue nos vamos a centrar en el modelado de una de las propiedades contextuales más usuales que podemos encontrar en nuestro día a día, el tamaño. Ahora bien, nos gustaría señalar que la propuesta que vamos a presentar a continuación se puede emplear para todas aquellas propiedades que tengan una naturaleza similar al tamaño, como pueden ser la altura o la rapidez. En definitiva, la siguiente propuesta es adecuada para aquellas propiedades que permitan ordenar de algún modo los objetos, según algún valor que esté asociado con esta propiedad, como pueden ser los metros por segundo que puede alcanzar un corredor para ser etiquetado como *rápido* o *lento*.

En nuestro caso, vamos a modelar este tipo de propiedades por medio de conjuntos difusos, con lo que haremos uso de las herramientas propias de la Teoría de Conjuntos Difusos para definir las funciones de membresía que asignan una etiqueta lingüística determinada a un objeto, según las características que presente. Hemos de tener en cuenta que, a diferencia de propiedades como el color o la posición relativa de los objetos (que podrían ser modeladas sin dependencia del universo de discurso en el que estemos trabajando, mediante un conjunto de funciones de membresía o particiones difusas como las que hemos visto para el color o el tamaño de los objetos) las propiedades contextuales deben ser modeladas teniendo en cuenta la información contenida en el universo de discurso sobre el que se estén considerando.

A modo de ejemplo, para poner de manifiesto que el tamaño es una propiedad contextual, podemos considerar los dos universos de discurso presentes en la Figura 6.8. Como vemos, en la Figura 6.8a el objeto *B* podría ser descrito como «el círculo grande», ya que es el círculo de mayor tamaño en la escena. En cambio, en el universo de la Figura 6.8b, aparece un nuevo objeto *C* con un tamaño mayor que el de *B*, por tanto la expresión de referencia «el círculo grande» no puede aplicarse al objeto *B* puesto que en este caso señalará al objeto *C* de forma unívoca. Así, sería más apropiado describir el objeto *B* como «el objeto mediano».

A continuación, vamos a presentar una propuesta preliminar para asignar eti-



(a) Universo en el que el objeto B es el objeto más grande.

(b) Universo en el que aparece un objeto de mayor tamaño que B .

Figura 6.8: Universos de discurso donde se pone de manifiesto cómo el tamaño es una propiedad contextual.

quetas lingüísticas a los objetos de un universo de discurso determinado según su tamaño, teniendo en cuenta el resto de objetos en la escena. En este caso se considera un conjunto de 3 posibles etiquetas lingüísticas (*pequeño*, *mediano* y *grande*). Por lo tanto se han de definir tres conjuntos difusos, donde la membresía a cada uno de los cuales indica en qué grado una etiqueta es adecuada para describir a un objeto determinado.

Como hemos dicho, nuestra propuesta se basa en que la propiedad que consideremos, en este caso el tamaño, nos permita definir un orden entre los objetos o una comparación entre ellos. De este modo, nuestra propuesta se basa en la similitud entre los objetos en dicha propiedad para establecer estos conjuntos difusos, que modelarán las distintas etiquetas lingüísticas que consideremos.

Partimos entonces del conjunto de tamaños de los objetos, que será un conjunto $S := \{s_1, \dots, s_n\}$, con $n \geq 2$, y de modo que estos elementos estén ordenados en orden decreciente: $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$. Puede haber objetos que tengan el mismo tamaño, con lo que simplemente se les asignará la misma etiqueta. A partir de este conjunto de tamaños, nosotros queremos definir tres conjuntos difusos en $\mathcal{F}(S)$ que modelen las tres etiquetas lingüísticas que manejamos. Así, tendremos los conjuntos *pequeño*, *mediano* y *grande*, e imponemos las siguientes restricciones:

- $pequeño(s_1) = 1 = grande(s_n)$.
- $pequeño(s_n) = 0 = grande(s_1)$.
- En el caso en el que $n > 2$, entonces también podemos definir los representantes del conjunto *mediano*. De modo que, si n es impar, tendremos que este representante es $s_{(n+1)/2}$, mientras que si n es par, entonces tendremos dos representantes para esta clase, que serán $s_{n/2}$ y $s_{(n/2)+1}$.

Una vez hemos establecido cuáles serán los representantes cada una de las categorías de objetos o de cada una de las etiquetas lingüísticas que consideramos, vamos a definir la función de membresía de cada uno de estos conjuntos difusos.

En concreto, esta pertenencia a cada uno de los conjuntos será proporcional a la distancia entre el tamaño del objeto y el tamaño o tamaños de los representantes de cada categoría; cuanto más similar sea el tamaño del objeto al tamaño representativo de la clase correspondiente, más adecuado será asignar a ese objeto la etiqueta correspondiente. Esta asignación de grados la realizaremos mediante un proceso de agrupamiento difuso, siguiendo una idea similar a la planteada en [161]. Para realizar este agrupamiento consideramos la siguiente relación de similitud difusa entre objetos, donde d_m es la distancia a partir de la cual juzgamos que el parecido entre los objetos es nulo.

$$R(s_i, s_j) := \max\left(1 - \frac{d(s_i, s_j)}{d_m}, 0\right) \quad (6.3)$$

Una vez hemos obtenido los valores de esta relación de similitud entre objetos, pasamos a realizar un proceso de agrupamiento difuso que se puede describir resumidamente como sigue:

1. Obtenemos los α -cortes de la relación de similitud anterior, que denotaremos por R_α .
2. Obtenemos el conjunto de cliques maximales en cada R_α ; es decir, realizamos un agrupamiento en cada nivel.

A partir de este agrupamiento por niveles definimos las funciones de membresía como sigue, donde $C_\alpha^{\text{pequeño}}$, $C_\alpha^{\text{mediano}}$ y C_α^{grande} , se corresponden con los conjuntos de objetos en cada nivel que están en alguno de los clústeres en los que está también el representante o representantes de la clase correspondiente.

$$\text{pequeño}(s_i) := \sum_{\alpha_k \mid s_i \in C_{\alpha_k}^{\text{pequeño}}} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \quad (6.4)$$

$$\text{mediano}(s_i) := \sum_{\alpha_k \mid s_i \in C_{\alpha_k}^{\text{mediano}}} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \quad (6.5)$$

$$\text{grande}(s_i) := \sum_{\alpha_k \mid s_i \in C_{\alpha_k}^{\text{grande}}} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \quad (6.6)$$

Veamos un ejemplo de aplicación de esta propuesta.

Ejemplo 6.1:

Consideramos el siguiente conjunto de tamaños de objetos:

$$S := \{10, 20, 25, 30, 40\}.$$

En este caso los representantes de las tres clases que consideramos son: $s_1 = 10$ para la clase *pequeño*, $s_5 = 40$ para la clase *grande* y $s_3 = 25$ para la clase *mediano*. Y consideramos $d_m = 15$. Como el conjunto de distancias entre los distintos tamaños es $\{0, 5, 10, 15, 20, 30\}$, aplicando la medida de similitud de la Ecuación 6.3, tenemos

que el conjunto de niveles a considerar, el conjunto de distintos valores que toma la relación de similitud entre objetos, es $\Lambda = \{1.0, 0.66, 0.33\}$. Para cada uno de estos niveles tenemos los siguientes clústeres.

α_k	$C_{\alpha_k}^{pequeño}$	$C_{\alpha_k}^{mediano}$	$C_{\alpha_k}^{grande}$
1.0	{10}	{25}	{40}
0.66	{10}	{20, 25, 30}	{40}
0.33	{10, 20}	{20, 25, 30}	{30, 40}

Y a partir de estos clústeres definimos los siguientes conjuntos difusos.

$$\begin{aligned}
 \textit{pequeño} &= 1.0/10 + 0.33/20 \\
 \textit{mediano} &= 0.66/20 + 1.0/25 + 0.66/30 \\
 \textit{grande} &= 0.33/30 + 1.0/40
 \end{aligned}$$

De este modo, teniendo en cuenta la información del universo de discurso, podemos ver en qué grado podemos asignar a cada uno de los objetos en este universo la etiqueta lingüística correspondiente.

Así, hemos visto un modo de modelar etiquetas lingüísticas relativas a propiedades contextuales, teniendo en cuenta la información del universo de discurso en el que estemos trabajando. Existen diversas propuestas para el modelado de términos lingüísticos en la literatura: así en [161] las etiquetas lingüísticas se asignan empleando el proceso de c-medias difuso, en [39] se emplean un procedimiento de gradiente descendente para ajustar los parámetros de las funciones de membresía, y en los trabajos de [106, 193] se emplean algoritmo genéticos con este propósito. Nuestra propuesta es una propuesta preliminar para el modelado de propiedades contextuales de forma automática y seguiremos profundizando en ella.

También cabe señalar que, a través de un juego referencial como el que hemos presentado en las secciones anteriores, podríamos validar el modelado que hayamos realizado en nuestro sistema, por ejemplo para el tamaño. Para ello, podríamos diseñar un experimento en el que comprobemos si las expresiones de referencia que generemos, incluyendo etiquetas lingüísticas relativas al tamaño a través de nuestro modelado, hacen que el usuario identifique el objeto correcto y que lo haga en poco tiempo.

A continuación vamos a ver cómo podemos combinar estrategias clásicas de la Generación de Expresiones de Referencia, como las que hemos podido ver en capítulos anteriores, con técnicas avanzadas de Aprendizaje Profundo.

6.4 UN EJEMPLO DE APLICACIÓN EN VISIÓN POR COMPUTADOR

Los resultados teóricos y algorítmicos que hemos presentado en los capítulos anteriores para tratar el problema de Generación de Expresiones de Referencia a través del Análisis de Conceptos Formales, parten del contexto formal que representa la información del universo de discurso en el que estamos trabajando. Estas

propuestas son, por lo tanto, completamente independientes de la técnica o proceso mediante el cual se obtenga dicho contexto formal. Podemos decir que nuestros desarrollos son agnósticos del método de obtención del contexto formal que se emplee. Por lo tanto, cualquier técnica o avance en esta tarea, que nos permita extraer esta información de un universo de discurso, podrá emplearse en combinación con nuestros desarrollos de los Capítulos 4 y 5. En concreto, en esta sección presentamos un trabajo en colaboración con un equipo de investigación experto en el campo de la Visión por Computador. Así, en este estudio analizamos la combinación de nuestros desarrollos teóricos, que hemos ido presentando en los capítulos anteriores, con los avances en el campo de la Visión por Computador realizados por este grupo. Por tanto, aquí pasamos de estudios más teóricos o experimentaciones de laboratorio a analizar la utilidad de nuestras propuestas en un sistema de Inteligencia Artificial avanzada.

Si, dentro del campo de la Generación de Lenguaje Natural, pensamos en un sistema automático de descripción de imágenes, es claro que necesitamos dotar a nuestro sistema de los mecanismos necesarios para detectar los distintos objetos o elementos de la escena, y para extraer las propiedades que presenta cada uno de ellos, como puede ser determinar la categoría a la que pertenecen o su color dominante.

Como sabemos, una aplicación típica de las técnicas de Aprendizaje Profundo es la de categorizar imágenes de objetos en distintas categorías, como puede ser determinar si en una imagen aparece un gato o un edificio. Por tanto, el uso del Aprendizaje Profundo en este tipo de sistemas de descripción de imágenes o, más en general, de sistemas de Generación de Lenguaje Natural, resulta de especial interés [160]. Aunque en la literatura podemos encontrar propuestas [133, 135] que emplean técnicas de Aprendizaje Profundo, tanto en esta fase de extracción de características, como en la fase de generación de expresiones de referencia, nosotros proponemos una combinación de estas técnicas junto a los desarrollos teóricos que hemos visto en los capítulos anteriores.

Podemos pensar en el universo de discurso que encontramos en la Figura 6.9. En él encontramos distintos objetos de muy diversos tipos, con distintos colores y en distintas posiciones. Un sistema de descripción automática de imágenes debería ser capaz de identificar cada uno de los objetos en la escena de forma automática, y determinar qué tipo de objeto es y extraer las características que posee. En este ejemplo nos vamos a centrar en el color y la posición que ocupa el objeto, en relación con el resto de objetos en la escena.

Para poder realizar esta tarea de identificación de objetos o segmentación, los expertos del grupo de investigación con el que hemos colaborado emplean un modelo de Aprendizaje Profundo que se encarga de proponer regiones de píxeles de interés en la escena, aquellas que se corresponderían con objetos de la imagen, y que luego categorice dichas regiones, como puede ser un modelo Mask-RCNN [104]. Para la escena de la Figura 6.9, a partir de un modelo Mask-RCNN entrenado adecuadamente por estos investigadores para el tipo de escena que estamos intentando segmentar, obtenemos la segmentación que mostramos en la Figura 6.10.

Una vez se han identificado los objetos de la escena con su región de píxeles correspondiente, estos investigadores logran extraer, a partir de esta región, infor-

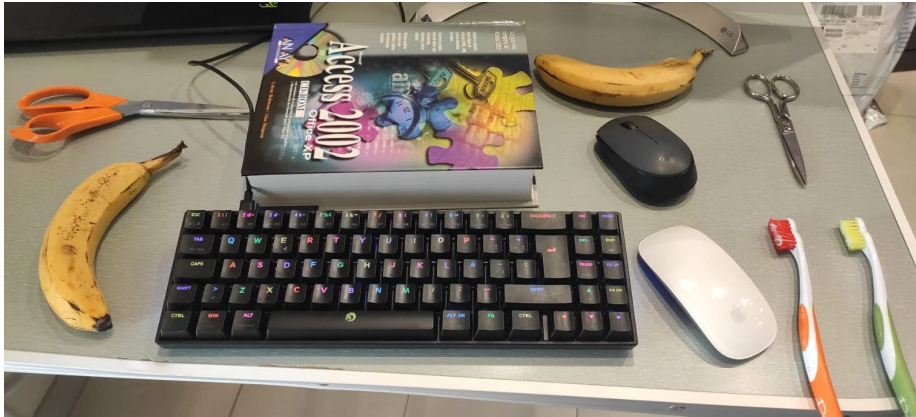


Figura 6.9: Ejemplo de universo de discurso donde existen diversos objetos de distintos tipos y colores.

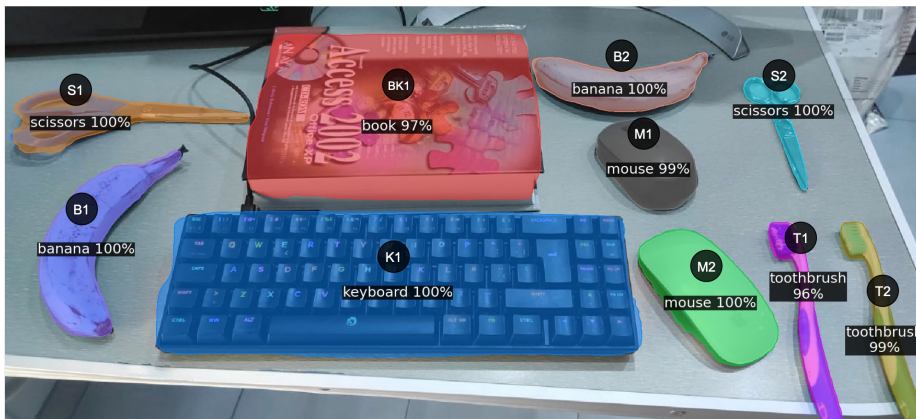


Figura 6.10: Segmentación del universo de la Figura 6.9, donde se muestra cada uno de los objetos detectados por la red neuronal empleada, así como la categoría que se le asigna a cada uno de ellos, con un porcentaje que expresa la seguridad con la que la red asigna esa etiqueta al objeto.

mación sobre cada objeto, como el color dominante en la región [34, 35].

Por otro lado, podemos considerar la posición relativa de los objetos en la escena en base a la posición relativa de los centroides de sus correspondientes regiones de píxeles. Podemos definir una partición difusa en el intervalo $[0, 2\pi]$, para modelar distintas etiquetas lingüísticas para hacer referencia a la posición relativa de dos objetos según el ángulo que forman sus centroides.

A partir del proceso de segmentación y categorización conseguido a través de un modelo Mask-RCNN [104], así como de la información extraída a partir de estas regiones de interés, podemos obtener de forma automática la información relativa al universo de discurso de la Figura 6.9 a través de técnicas como las que hemos presentado en capítulos anteriores. En la Tabla 6.6 tenemos la información relativa a la categoría y el color del objeto.

S1	(tijeras,1), (gris,1), (naranja,1)
B1	(banana,1), (oliva, 0.32), (amarillo, 0.73)
BK1	(libro, 0.97), (oliva, 0.59), (gris,1)
K1	(teclado,1), (negro,1)
B2	(banana,1), (oliva, 0.22), (amarillo, 0.78)
M1	(ratón, 0.99), (gris,1)
M2	(ratón,1), (blanco,1)
S2	(tijeras,1), (gris,1)
T1	(cepillo de dientes, 0.96), (blanco,1), (naranja, 0.99)
T2	(cepillo de dientes, 0.99), (verde, 0.84), (blanco,1)

Tabla 6.6: Propiedades individuales de cada uno de los objetos de la Figura 6.9.

Del mismo modo, podemos extraer de forma automática la información sobre la posición relativa de cada objeto a partir de los centroides de sus regiones de interés, como hemos explicado anteriormente. En la Tabla 6.7 tenemos en qué grado cada objeto está a la izquierda del resto de objetos de la escena, y lo mismo para la relación «encima de» en la Tabla 6.8. No mostramos la información relativa a las otras dos relaciones espaciales que consideramos, puesto que son simétricas a estas otras dos.

Teniendo en cuenta esta información, podemos extraer, empleando los resultados teóricos y algorítmicos que hemos visto en las Secciones 4.2 y 5.3, las siguientes expresiones de referencia para el objeto M1 de la Figura 6.9, entre otras. Para cada una de estas expresiones de referencia mostramos su éxito referencial relativo al objeto M1, obtenido con la medida definida en la Ecuación 3.6.

- «El ratón gris.» (0.98)
- «El ratón gris que está a la izquierda de unas tijeras.» (0.98)
- «El ratón gris que está debajo de una banana.» (0.98)
- «El ratón gris que está a la derecha de un libro.» (0.94)

	S1	B1	BK1	K1	B2	M1	M2	S2	T1	T2
S1		0	0	0	0	0	0	0	0	0
B1	0		0	0	0	0	0	0	0	0
BK1	1	0.92		0	0	0	0	0	0	0
K1	0.75	1	0		0	0	0	0	0	0
B2	1	1	1	0.56		0	0	0	0	0
M1	1	1	1	0.88	0		0	0	0	0
M2	1	1	0.80	1	0.05	0.10		0	0	0
S2	1	1	1	0.96	1	1	0.05		0	0
T1	1	1	0.87	1	0.36	0.51	1	0		0
T2	1	1	0.95	1	0.55	0.73	1	0.19	1	

Tabla 6.7: Grados de cumplimiento de la relación espacial «a la izquierda» entre los objetos de la Figura 6.9.

	S1	B1	BK1	K1	B2	M1	M2	S2	T1	T2
S1		0	0	0	0	0	0	0	0	0
B1	1		0.07	0	0	0	0	0	0	0
BK1	0	0		0	0	0	0	0	0	0
K1	0.24	0	1		0.43	0.11	0	0.03	0	0
B2	0	0	0	0		0	0	0	0	0
M1	0	0	0	0	1		0	0	0	0
M2	0	0	0.19	0	0.94	0.89		0.94	0	0
S2	0	0	0	0	0	0	0		0	0
T1	0	0	0.12	0	0.63	0.48	0	1		0
T2	0	0	0.04	0	0.44	0.26	0	0.80	0	

Tabla 6.8: Grados de cumplimiento de la relación espacial «encima de» entre los objetos de la Figura 6.9.

- «El ratón que está a la izquierda de unas tijeras.» (0.93)
- «El ratón que está a la izquierda de unas tijeras grises.» (0.93)
- «El ratón que está encima de otro ratón.» (0.79)
- «El ratón que está encima de un ratón blanco.» (0.79)
- «El ratón gris que está encima de otro ratón.» (0.79)
- «El ratón gris que está a la derecha de un teclado.» (0.79)

Por lo tanto aquí hemos visto cómo el uso de técnicas de generación automática de expresiones de referencia puede utilizarse, junto con técnicas de análisis y segmentación, como las basadas en Aprendizaje Profundo vista en este experimento, para etiquetar y describir de forma efectiva imágenes reales. Permittiéndonos desarrollar así un sistema de descripción automática de imágenes gracias, por ejemplo, a las herramientas que aporta el Análisis de Conceptos Formales al campo de la Generación de Expresiones de Referencia.

Desde nuestro punto de vista, esto ofrece ventajas sobre las propuestas que emplean únicamente Aprendizaje Profundo:

- Podemos aprovechar los algoritmos usuales que encontramos en la literatura para el problema de Generación de Expresiones de Referencia. Además, estos algoritmos pueden presentar una serie de parámetros, como por ejemplo la lista ordenada de propiedades en el Algoritmo Incremental, que permiten modelar las preferencias del usuario de una forma sencilla. Si quisiéramos cambiar el funcionamiento de un algoritmo para que se adaptase a cada usuario en el caso del Aprendizaje Profundo, necesitaríamos volver a entrenar la red o redes neuronales que se empleen en el proceso para poder reflejar estas preferencias de usuario.
- Las redes neuronales que empleemos en nuestra propuesta serán más simples o harán frente a una tarea mucho más sencilla que la que puede ser generar lenguaje natural. En consecuencia, el conjunto de datos de entrenamiento que necesitaremos será menor. Si quisiéramos generar expresiones de referencia empleando una red neuronal, tendríamos que emplear un corpus de expresiones de referencia generado por el usuario o por un experto, lo que sería un conjunto de entrenamiento no solo más complejo, sino también más complicado y costoso de obtener.
- Como hemos visto en la Sección 2.2, existen diversas extensiones del problema de Generación de Expresiones de Referencia. Gracias a nuestra propuesta, podríamos reutilizar los algoritmos existentes en la literatura para resolver estos nuevos problemas, como por ejemplo el uso de propiedades colectivas u otros operadores lógicos. Sin embargo, necesitaríamos volver a entrenar, cuando no volver a diseñar, la red neuronal de nuestro sistema para poder resolver nuevas extensiones del problema de Generación de Expresiones de Referencia, con los costes de tiempo y desarrollo que esto supondría.

Con esto finalizamos el repaso a los trabajos de un corte más práctico que se han realizado durante este trabajo de investigación.

6.5 DIFUSIÓN DE RESULTADOS

Los resultados que se recogen en este capítulo de la memoria se corresponden con los trabajos correspondientes a distintas publicaciones que hemos realizado. En concreto:

1. Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Scene selection for teaching basic visual concepts in the Refer4Learning app». En: *2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. ISSN: 1558-4739. 2017, págs. 1-6
2. Albert Gatt, Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Specificity measures and reference». En: *Proceedings of the 11th International Conference on Natural Language Generation*. Tilburg University, The Netherlands: Association for Computational Linguistics, 2018, págs. 492-502
3. Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «An Approximation to Context-Aware Size Modeling for Referring Expression Generation». En: *2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. 2018, págs. 1-8
4. Jesús Chamorro-Martínez, Nicolás Marín, Míriam Mengíbar-Rodríguez, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Referring expression generation from images via deep learning object extraction and fuzzy graphs». En: *2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. ISSN: 1558-4739. 2021, págs. 1-6

Entrando con algo más de detalle en cada una de estas publicaciones, tenemos que:

- En [140] presentamos la aplicación *Refer4Learning* como un sistema de Recuperación de Información a través de medidas de especificidad. Este trabajo fue presentado en el congreso internacional FUZZ-IEEE 2017.
- Nuestro estudio experimental sobre medidas de especificidad se recoge en [93], trabajo presentado en el congreso internacional iNLG. Este trabajo se realizó con la colaboración del Doctor Albert Gatt, referente en el área de la Lingüística Computacionales y en el campo de la Generación de Expresiones de Referencia.
- Nuestra propuesta para el modelado de propiedades contextuales de forma automática se encuentra en [142]. Este trabajó se presentó en el congreso internacional FUZZ-IEEE 2020.

- Finalmente, la propuesta para desarrollar un sistema de descripción automática de escenas combinando técnicas propias de la Generación de Expresiones de Referencia y del Aprendizaje Profundo se desarrolla en [33], trabajo presentado en el congreso internacional FUZZ-IEEE 2021. Este trabajo se realizó en colaboración con un grupo de investigación de la Universidad de Granada experto en el área de la Visión Artificial, en el contexto de un proyecto de investigación.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis se han llevado a cabo aportaciones al problema de la búsqueda de expresiones de referencia para objetos descritos mediante propiedades graduales, uno de los problemas más importantes en el ámbito de los sistemas data-to-text. Nuestras principales aportaciones han sido:

- La propuesta de un nuevo marco formal, basado en el Análisis de Conceptos Formales, para determinar los conjuntos de objetos referibles en el contexto bajo análisis, en base a propiedades crisp, así como la caracterización del conjunto completo de expresiones de referencia para cada conjunto de objetos en base a las propiedades consideradas. Hemos podido comprobar que el marco propuesto proporciona capacidades que no presenta de forma conjunta ninguno de los marcos formales propuestos en la literatura. Asimismo, hemos comprobado que es posible extender la capacidad expresiva de las expresiones de referencia desde conjunciones de propiedades simples hasta incluir propiedades relacionales, contextuales y colectivas, así como expresiones booleanas.
- Una propuesta novedosa de extensión del Análisis de Conceptos Formales al ámbito gradual mediante el uso de la Teoría de Representaciones por Niveles. El uso de esta teoría nos ha permitido beneficiarnos de dos de sus grandes virtudes: proporcionar una extensión natural (y por lo tanto fácil de entender) del Análisis de Conceptos Formales al caso gradual, y la conservación de todos los resultados y algoritmos del caso crisp (algo que no ocurre con las extensiones difusas), ya que consiste en la aplicación directa del Análisis crisp en un conjunto finito de niveles de forma independiente. Esta extensión, que es general y aplicable a cualquier tipo de problema donde el Análisis Formal de Conceptos deba considerar gradualidad en el contexto, nos ha permitido asimismo extender el marco formal mencionado en el primer punto de estas conclusiones al caso de objetos descritos mediante propiedades graduales.
- Para determinar el éxito referencial de expresiones de referencia con propiedades graduales, hemos presentado una definición del concepto de éxito re-

ferencial gradual basado en un conjunto de axiomas, y hemos propuesto un amplio conjunto de medidas de éxito referencial, particularmente familias de medidas basadas en el uso de medidas de especificidad. Adicionalmente, hemos llevado a cabo un estudio de las medidas de especificidad, identificando familias de medidas con distintos comportamientos y usos potenciales en el problema de la generación de expresiones de referencia con propiedades graduales. En nuestro estudio de la especificidad como concepto de especial relevancia a la hora de determinar el éxito referencial, hemos propuesto nuevas familias de medidas de especificidad obtenidas en base a medidas de semejanza entre conjuntos difusos. Cabe destacar que nuestros estudios y resultados en el ámbito de la especificidad tienen una utilidad potencial que trasciende su uso en el problema de la generación de expresiones de referencia. Finalmente, hemos estudiado la extensión de las medidas de éxito referencial al caso en el que la gradualidad representa incertidumbre posibilística en las propiedades, proporcionando medidas de necesidad y posibilidad para el éxito referencial de las expresiones generadas.

- El trabajo de propuesta de modelos anterior se ha completado con el desarrollo de un prototipo de prueba de concepto que nos ha permitido mostrar la utilidad de nuestras propuestas en el ámbito de los juegos referenciales, un tipo de sistema image-to-text bien conocido en la literatura. El prototipo está orientado a la enseñanza de conceptos visuales básicos (color, forma, tamaño, posición, etc.) en las primeras etapas del sistema educativo, conceptos cuya gradualidad complica la resolución del problema de anclaje de símbolos para utilizar con solvencia el lenguaje natural. Hemos utilizado este prototipo para realizar algunos experimentos con adultos para analizar la relación entre distintas propiedades y medidas de calidad con respecto al desempeño y las preferencias del usuario. Adicionalmente, y fruto de una colaboración interdisciplinar con investigadores del ámbito del análisis de imágenes y visión por computador, hemos podido demostrar que nuestros resultados pueden integrarse con herramientas actuales de segmentación e identificación de objetos con propiedades graduales basadas en aprendizaje profundo, lo que permite automatizar la generación de expresiones de referencia para objetos en imágenes, con aplicaciones directas en sistemas image-to-text, recuperación de información visual, y sistemas de interacción con imágenes basados en el diálogo.

Con todo ello, consideramos que hemos alcanzado los objetivos planteados en la presente tesis doctoral. Queremos asimismo destacar que hemos proporcionado resultados que permiten solventar los dos principales inconvenientes señalados desde la comunidad de Generación de Lenguaje Natural en relación al uso de la Teoría de Conjuntos Difusos para la generación de expresiones de referencia con propiedades graduales:

- En primer lugar, gracias al uso de la Teoría de Representaciones por Niveles, no es necesario llevar a cabo una elección de operadores para realizar la conjunción, disyunción y negación de propiedades, ya que en dicha teoría la

extensión para el manejo de la gradualidad se realiza de forma única y directa utilizando como base todos los resultados y algoritmos del caso crisp sin modificación; además, y contrariamente a lo que ocurre con la Teoría de Conjuntos Difusos, se conservan todas las propiedades del caso crisp, tales como la estructura de Álgebra de Boole propia de las operaciones de conjunto.

- En segundo lugar, hemos proporcionado mecanismos para la construcción de funciones de pertenencia de propiedades graduales visuales sensibles al contexto, que pueden extenderse a otros ámbitos. Los juegos referenciales son una herramienta que puede utilizarse para el desarrollo y validación de propuestas para la obtención semiautomática de la semántica de los términos del lenguaje.

Nuestro trabajo de investigación, aunque completa en nuestra opinión los objetivos planteados al inicio del mismo, se encuadra en una línea de investigación reciente que explora la integración de técnicas y resultados en el ámbito de la Lingüística Computacional con el uso de herramientas de Computación Flexible. En esta línea, y como continuación del estudio realizado en la presente tesis, consideramos las siguientes líneas de trabajo futuro:

- Desarrollo de algoritmos para la extensión de las expresiones de referencia al caso de propiedades relacionales, contextuales y colectivas, así como expresiones booleanas. Como ya hemos visto, la incorporación de dichas propiedades aumenta de forma considerable la cardinalidad del conjunto de propiedades considerado en el contexto formal lo cual, dado que la eficiencia de los algoritmos es exponencial en el número de propiedades, puede tener un impacto indeseado en el tiempo de respuesta para problemas de cierto tamaño. Por tanto, es necesario el desarrollo de heurísticas de exploración del espacio de expresiones para proporcionar resultados en un tiempo razonable, entre otras posibilidades.
- En relación también con la eficiencia, la aplicación de nuestra propuesta para la gestión de la gradualidad mediante la representación por niveles del Análisis de Conceptos Formales abre el camino para el desarrollo de implementaciones paralelas que aprovechen el hecho de que nuestra propuesta realiza cálculos en cada nivel de forma independiente del resto.
- Ampliar los resultados al ámbito de la generación de descripciones lingüísticas de datos en sistemas data-to-text. Las expresiones de referencia pueden utilizarse para construir textos que describan aspectos de interés de conjuntos de datos, basados en la identificación de objetos y conjuntos de objetos relevantes en relación con las preferencias del usuario. Partimos para ello de la hipótesis de que una descripción lingüística de datos puede obtenerse a partir de un conjunto de expresiones de referencia que recubra el conjunto de datos de interés. Al estudio teórico de estos recubrimientos habrá que añadir el planteamiento de modelos de calidad para su validación, así como de heurísticas que permitan el desarrollo de soluciones algorítmicas para su generación.

- Analizar el uso de expresiones de referencia para la realización de consulta flexible y recuperación de información. Dado el poder de identificación de las expresiones de referencia, estas pueden resultar de gran utilidad en procesos de resolución de consulta flexible sobre datos, tanto para aumentar la capacidad expresiva de los lenguajes de consulta como a la hora de mostrar los resultados de la misma. Asimismo, las expresiones de referencia pueden enriquecer la indexación de documentos en general en sistemas de recuperación de información, siguiendo la línea de las experiencias realizadas en esta tesis en relación con el uso de la especificidad para la recuperación de escenas.
- Por último, atendiendo a las expectativas generadas cuando hemos mostrado nuestra herramienta a profesionales del ámbito de las Ciencias de la Educación, nos planteamos llevar a cabo una colaboración multidisciplinar con investigadores de este área que permita validar en dicho ámbito la utilidad de Refer4Learning como asistente en los procesos de aprendizaje para la resolución del problema de anclaje de símbolos en etapas tempranas del desarrollo cognitivo.

CONCLUSIONS

In this thesis, contributions have been made to the problem of referring expression generation for objects described by gradual properties, one of the most important problems in the field of data-to-text systems. Our main contributions are:

- The proposal of a new formal framework, based on the Formal Concept Analysis, to determine the sets of referable objects in the context under analysis, based on crisp properties. Additionally, this formal framework allow us to characterize the complete set of referring expressions for each set of objects based on the properties considered. The proposed framework provides capabilities which are not jointly provided by any of the formal frameworks previously proposed in the literature. At the same time, we have verified that it is possible to extend the expressive power of referring expressions from simple property conjunctions to more advanced forms including relational, contextual, and collective properties, as well as Boolean expressions.
- A novel proposal to extend the Formal Concept Analysis to deal with graduality through the use of the Theory of Representations by Levels. The use of this theory has allowed us to benefit from some of its great virtues: providing a natural (and therefore easy to understand) extension of the Formal Concept Analysis to the gradual setting, and keeping the whole set of results and algorithms of the crisp case (something that does not happen with the fuzzy extensions available in the literature), since the new proposal consists of the direct application of the crisp analysis in a finite set of levels independently. This extension, which is general and applicable to any type of problem where the Formal Concept Analysis must consider graduality in the context, has

allowed us also extend the formal framework mentioned in the first point of these conclusions to the case of objects described by gradual properties.

- In order to determine the referential success of expressions with gradual properties, we have introduced a definition of the concept of gradual referential success based on a set of axioms, and we have proposed a broad set of referential success measures, particularly families of measures based on the use of specificity measures. Additionally, we have carried out a study of the measures of specificity, identifying families of measures with different behaviors and potential uses in the problem of generating referring expressions with gradual properties. Moreover, in our study of specificity as a concept of special relevance when determining referential success, we have proposed new families of specificity measures on the basis of similarity measures between fuzzy sets. It should be noted that our studies and results in the realm of specificity have a potential utility that transcends its use in the problem of referring expression generation. Finally, we have studied the extension of referential success measures to the case in which graduality represents possibilistic uncertainty in the properties, providing measures of necessity and possibility to assess the referential success of the generated expressions.
- The previously described proposal of models has been completed with the development of a proof-of-concept prototype that has allowed us to show the usefulness of our proposals in the field of referential games, a type of image-to-text system well known in the literature. The prototype is aimed at teaching basic visual concepts (color, shape, size, position, etc.) in the early stages of the educational system, concepts whose graduality complicates the resolution of the symbol grounding problem in order to use the natural language with solvency. We have used this prototype to perform some experiments with adults to analyze the relationship between different properties and measures of quality with respect to performance and user preferences. Additionally, and as a result of an interdisciplinary collaboration with researchers in the field of image analysis and computer vision, we have been able to show that our results can integrate with current segmentation and object identification tools in the presence of gradual properties based on deep learning, which allows to automate the generation of referring expressions for objects in images, with direct applications in image-to-text systems, visual information retrieval, and dialogue systems for interacting with images.

According to this, we consider that we have achieved the objectives set out in the present doctoral thesis. We also want to emphasize that we have provided results that allow to solve the two main inconveniences indicated from the Natural Language Generation community in relation to the use of the Theory of Fuzzy Sets for generating referring expressions with gradual properties:

- On the one hand, thanks to the use of the Theory of Representations by Levels, it is not necessary to carry out a setting of operators to carry out the conjunction, disjunction, and negation of properties, since in the RL theory

the extension for the handling of graduality is done in a unique and direct way using as a basis all the results and algorithms of the crisp case without modification; furthermore, and contrary to what happens with the Theory of Fuzzy Sets, all properties of the crisp case are preserved, such as the Boolean Algebra structure of set operations.

- On the second hand, we have provided mechanisms for building context aware membership functions for gradual visual properties, which can be extended to other areas. The referential games are a tool that can be used for the development and validation of proposals for the semi-automatic obtaining of the semantics of the linguistic terms.

Our research work, although it completes in our opinion the objectives raised at the beginning of the present thesis, is part of a current hip research line that explores the integration of techniques and results in the field of Computational Linguistics with the use of Soft Computing tools. In this line, and as a continuation of the study carried out in this thesis, we consider the following lines of future work:

- Developing of algorithms for the extension of referring expressions to the case of relational, contextual, and collective properties, as well as Booleans expressions. As we have already seen, the incorporation of these properties greatly increases the cardinality of the property set considered in the formal context which, given that the efficiency of the algorithms is exponential in the number of properties, can have an undesired impact in response time for problems of a certain size. Therefore, it is necessary to develop exploration heuristics for the space of expressions to provide results in a reasonable amount of time, among other possibilities.
- In relation also to efficiency, the application of our proposal for the management of graduality through the representation by levels of the Formal Concept Analysis paves the way for the development of parallel implementations initiatives that take advantage of the fact that, in our proposal, computations can be independently carried out at each level.
- Applying our results to the field of generating linguistic descriptions of data in data-to-text systems. Referring expressions can be used to construct texts that describe aspects of interest of datasets, based on the identification of relevant objects and sets of objects according to user preferences. To do that, we consider the hypothesis that a linguistic description of data can be obtained from a set of referring expressions that covers the whole set of data. To the theoretical study of these coverings, it will be necessary to propose quality models for their validation, as well as heuristics that allow the development of algorithmic solutions for its generation.
- Analyzing the use of referring expressions for flexible querying and information retrieval. Given the identifying power of referring expressions, these can be very useful in processes of flexible query resolution, to increase the expressive power of query languages as well as to improve the displaying of the

results. Additionally, referring expressions can enrich the indexing of documents in general in information retrieval systems, following the line of the experiments carried out in this thesis in relation to the use of specificity for the retrieval of scenes.

- Finally, taking into account the expectations generated when we have shown our tool to professionals in the field of Education Sciences, we plan to carry out a multidisciplinary collaboration with researchers in this area that allows validating the usefulness of Refer4Learning to assist in symbol grounding learning processes in early stages of cognitive development.

«El conocimiento científico pertenece a la humanidad»
ALEXANDRA ASÁNOVNA ELBAKIÁN

Bibliografía

- [1] Claudi Alsina, Enric Trillas y Llorenç Valverde. «On Some Logical Connectives for Fuzzy Sets Theory». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 93 (1983), págs. 15-26.
- [2] Troels Andreasen, Guy De Tré, Janusz Kacprzyk, Henrik Legind Larsen, Gloria Bordogna y Sławomir Zadrozny. *Proceedings of the 14th Flexible Query Answering Systems International Conference*. Vol. 12871. Lecture Notes in Computer Science. 2021.
- [3] Carlos Areces, Santiago Figueira y Daniel Gorín. «Using logic in the generation of referring expressions». En: *Proceedings of the 6th international conference on Logical aspects of computational linguistics*. LACL'11. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011, págs. 17-32.
- [4] Carlos Areces, Alexander Koller y Kristina Striegnitz. «Referring Expressions as Formulas of Description Logic». En: *Proceedings of the Fifth International Natural Language Generation Conference*. Salt Fork, Ohio, USA: Association for Computational Linguistics, 2008, págs. 42-49.
- [5] William Ward Armstrong. «Dependency Structures of Data Base Relationships». En: *Information Processing, Proceedings of the 6th IFIP Congress 1974, Stockholm, Sweden, August 5-10, 1974*. Ed. por Jack L. Rosenfeld. North-Holland, 1974, págs. 580-583.
- [6] Jamal Atif, Céline Hudelot e Isabelle Bloch. «Explanatory reasoning for image understanding using formal concept analysis and description logics». En: *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans* (2013), págs. 1-19.
- [7] Franz Baader, Diego Calvanese, Deborah L. McGuinness, Daniele Nardi y Peter F. Patel-Schneider, eds. *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications*. 2.^a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [8] Dale Barr, Kees van Deemter y Raquel Fernández. «Generation of Quantified Referring Expressions: Evidence from Experimental Data». En: *Proceedings of the 14th European Workshop on Natural Language Generation*. Sofia, Bulgaria: Association for Computational Linguistics, 2013, págs. 157-161.

- [9] Eduard Bartl y Jan Konecny. «L-concept analysis with positive and negative attributes». En: *Information Sciences* 360 (2016), págs. 96-111.
- [10] Bert Baumgaertner, Raquel Fernández y Matthew Stone. «Towards a flexible semantics: colour terms in collaborative reference tasks». En: *Proceedings of the First Joint Conference on Lexical and Computational Semantics - Volume 1: Proceedings of the main conference and the shared task, and Volume 2: Proceedings of the Sixth International Workshop on Semantic Evaluation*. SemEval '12. USA: Association for Computational Linguistics, 2012, págs. 80-84.
- [11] Konstantin Bazhanov y Sergei A. Obiedkov. «Comparing Performance of Algorithms for Generating the Duquenne-Guigues Basis». En: *Proceedings of The Eighth International Conference on Concept Lattices and Their Applications, Nancy, France, October 17-20, 2011*. Ed. por Amedeo Napoli y Vilém Vychodil. Vol. 959. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS.org, 2011, págs. 43-57.
- [12] Aimene Belfodil, Adnene Belfodil y Mehdi Kaytoue. «Mining Formal Concepts Using Implications Between Items». En: *Formal Concept Analysis - 15th International Conference, ICFA 2019, Frankfurt, Germany, June 25-28, 2019, Proceedings*. Ed. por Diana Cristea, Florence Le Ber y Baris Sertkaya. Vol. 11511. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2019, págs. 173-190.
- [13] RADIM Belohlávek. «Lattices generated by binary fuzzy relations». En: *Int. Conf. on Fuzzy Set Theory and Applications*. Vol. 11. 1998.
- [14] Anja Belz y Albert Gatt. «The attribute selection for GRE challenge: overview and evaluation results». En: *Proceedings of the Workshop on Using corpora for natural language generation*. Copenhagen, Denmark, 2007.
- [15] Anja Belz y Ehud Reiter. «Comparing Automatic and Human Evaluation of NLG Systems». En: *EACL 2006, 11st Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics, Proceedings of the Conference, April 3-7, 2006, Trento, Italy*. Ed. por Diana McCarthy y Shuly Wintner. The Association for Computer Linguistics, 2006.
- [16] Fernando Bobillo, Marco Cerami, Francesc Esteva, Àngel García-Cerdaña, Rafael Peñalosa y Umberto Straccia. «Fuzzy Description Logics». En: *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic Volume III*. Ed. por Petr Cintula, Christian Fermüller y Carles Noguera. Vol. 58. Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations. College Publications, 2015. Cap. XVI, págs. 1105-1181.
- [17] Jean Paul Bordat. «Calcul pratique du treillis de Galois d'une correspondance». En: *Mathématiques et Sciences Humaines* 96 (1986), págs. 31-47.
- [18] Bernadette Bouchon-Meunier, Giulianella Coletti, Marie-Jeanne Lesot y Maria Rifqi. «Towards a Conscious Choice of a Fuzzy Similarity Measure: A Qualitative Point of View». En: *Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design*. Ed. por Eyke Hüllermeier, Rudolf Kruse y Frank Hoffmann. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010, págs. 1-10.

- [19] Chris Brink, Katarina Britz y Renate A. Schmidt. «Peirce algebras». En: *Formal Aspects of Computing* 6.3 (1994), págs. 339-358.
- [20] Alberto Bugarín, Nicolás Marín, Daniel Sánchez y Gracián Trivino. «Aspects of quality evaluation in linguistic descriptions of data». En: *2015 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. 2015, págs. 1-8.
- [21] Ana Burusco Juandeaburre y Ramón Fuentes-González. «The study of the L-fuzzy concept lattice». En: *Mathware & soft computing* 1.3 (1994), págs. 209-218.
- [22] H. Bustince. «Indicator of inclusion grade for interval-valued fuzzy sets. Application to approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets». En: *International Journal of Approximate Reasoning* 23.3 (2000), págs. 137-209.
- [23] Radim Bělohlávek y Vilém Vychodil. «What is a fuzzy concept lattice?» En: *Proceedings of the CLA 2005 International Workshop on Concept Lattices and their Applications Olomouc, Czech Republic, September 7-9, 2005*. Ed. por Radim Bělohlávek y Václav Snásel. Vol. 162. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS.org, 2005.
- [24] Radim Bělohlávek. «Fuzzy Galois Connections». En: *Mathematical Logic Quarterly* 45.4 (1999), págs. 497-504.
- [25] Radim Bělohlávek. «What is a Fuzzy Concept Lattice? II». En: *Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing*. Ed. por Sergei O. Kuznetsov, Dominik Ślęzak, Daryl H. Hepting y Boris G. Mirkin. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011, págs. 19-26.
- [26] Radim Bělohlávek. *Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles*. Vol. 20. Springer Science & Business Media, 2012.
- [27] Radim Bělohlávek, Taána Funioková y Vilém Vychodil. «Galois Connections with Hedges». En: *IFSA Congress 2005*. 2005, pág. 6.
- [28] Radim Bělohlávek, Vladimír Sklenář y Jiří Zacpal. «Crisply Generated Fuzzy Concepts». En: *Formal Concept Analysis*. Ed. por Bernhard Ganter y Robert Godin. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005, págs. 269-284.
- [29] Radim Bělohlávek y Vilém Vychodil. «Reducing the Size of Fuzzy Concept Lattices by Hedges». En: *The 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2005. FUZZ '05*. 2005, págs. 663-668.
- [30] Charles B. Callaway y James C. Lester. «Pronominalization in Generated Discourse and Dialogue». En: *Proceedings of the 40th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. Philadelphia, Pennsylvania, USA: Association for Computational Linguistics, 2002, págs. 88-95.
- [31] Diego Calvanese, Giuseppe De Giacomo y Maurizio Lenzerini. «Description Logics for Information Integration». En: *Computational Logic: Logic Programming and Beyond: Essays in Honour of Robert A. Kowalski Part II*. Ed. por Antonis C. Kakas y Fariba Sadri. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002, págs. 41-60.

- [32] Tru Hoang Cao. *Conceptual Graphs and Fuzzy Logic - A Fusion for Representing and Reasoning with Linguistic Information*. Vol. 306. Studies in Computational Intelligence. Springer, 2010.
- [33] Jesús Chamorro-Martínez, Nicolás Marín, Míriam Mengíbar-Rodríguez, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Referring expression generation from images via deep learning object extraction and fuzzy graphs». En: *2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. 2021, págs. 1-6.
- [34] Jesús Chamorro-Martínez, José Manuel Soto-Hidalgo, Pedro Manuel Martínez-Jiménez y Daniel Sánchez. «Fuzzy Color Spaces: A Conceptual Approach to Color Vision». En: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 25.5 (2017), págs. 1264-1280.
- [35] Jesús Chamorro-Martínez, Daniel Sánchez, José Manuel Soto-Hidalgo y Pedro Manuel Martínez-Jiménez. «A discussion on fuzzy cardinality and quantification. Some applications in image processing». En: *Fuzzy Sets and Systems*. Special Issue on Fuzzy Numbers and Their Applications 257 (2014), págs. 85-101.
- [36] Ganesh Chandrasekaran, Tu N. Nguyen y Jude Hemanth D. «Multimodal sentimental analysis for social media applications: A comprehensive review». En: *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery* 11.5 (2021), e1415.
- [37] Michel Chein. «Algorithme de recherche des sous-matrices premières d'une matrice». En: *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie. Nouvelle Série* 13 (1969), págs. 21-25.
- [38] Michel Chein y Marie-laure Mugnier. «Conceptual Graphs: fundamental notions». En: *Revue d'Intelligence Artificielle* 6 (1992), págs. 365-406.
- [39] Mu-Song Chen y Shinn-Wen Wang. «Fuzzy clustering analysis for optimizing fuzzy membership functions». En: *Fuzzy Sets and Systems*. Soft Computing for Pattern Recognition 103.2 (1999), págs. 239-254.
- [40] Raghavendra K. Chunduri y Aswani Kumar Cherukuri. «Scalable formal concept analysis algorithms for large datasets using Spark». En: *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing* 10.11 (2019), págs. 4283-4303.
- [41] Martin C. Cooper. «Reduction operations in fuzzy or valued constraint satisfaction». En: *Fuzzy sets and systems* 134.3 (2003), págs. 311-342.
- [42] Pablo Cordero, Manuel Enciso, Angel Mora y Manuel Ojeda-Aciego. «Computing Minimal Generators from Implications: a Logic-guided Approach». En: *Proceedings of The Ninth International Conference on Concept Lattices and Their Applications, Fuengirola (Málaga), Spain, October 11-14, 2012*. Ed. por Laszlo Szathmary y Uta Priss. Vol. 972. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS.org, 2012, págs. 187-198.
- [43] Patricia Córdoba-Hidalgo, Nicolás Marín y Daniel Sánchez. «RL-instances: an alternative to conjunctive fuzzy sets of tuples for flexible querying in relational databases». En: *Fuzzy Sets Syst. (Sometido)*.

- [44] Inés Couso, Laura Garrido y Luciano Sánchez. «Similarity and dissimilarity measures between fuzzy sets: A formal relational study». En: *Information Sciences* 229 (2013), págs. 122-141.
- [45] Madalina Croitoru y Kees van Deemter. «A Conceptual Graph Approach for the Generation of Referring Expressions». En: *IJCAI 2007, Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence, Hyderabad, India, January 6-12, 2007*. Ed. por Manuela M. Veloso. 2007, págs. 2456-2461.
- [46] Madalina Croitoru y Kees van Deemter. «An Inferential Approach to the Generation of Referring Expressions». En: *Conceptual Structures: Knowledge Architectures for Smart Applications*. Ed. por Uta Priss, Simon Polovina y Richard Hill. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007, págs. 126-139.
- [47] Valerie Cross y Shangye Chen. «Fuzzy Ontologies: State of the Art Revisited». En: *Fuzzy Information Processing*. Ed. por Guilherme A. Barreto y Ricardo Coelho. Communications in Computer and Information Science. Cham: Springer International Publishing, 2018, págs. 230-242.
- [48] Robert Dale. «Cooking up referring expressions». En: *Proceedings of the 27th annual meeting on Association for Computational Linguistics*. ACL '89. USA: Association for Computational Linguistics, 1989, págs. 68-75.
- [49] Robert Dale y Nicholas Haddock. «Generating referring expressions involving relations». En: *Proceedings of the fifth conference on European chapter of the Association for Computational Linguistics*. EACL '91. USA: Association for Computational Linguistics, 1991, págs. 161-166.
- [50] Robert Dale y Ehud Reiter. «Computational Interpretations of the Gricean Maxims in the Generation of Referring Expressions». En: *Cognitive Science* 19.2 (1995), págs. 233-263.
- [51] Robert Dale y Jette Viethen. «Referring expression generation through attribute-based heuristics». En: *Proceedings of the 12th European Workshop on Natural Language Generation*. ENLG '09. USA: Association for Computational Linguistics, 2009, págs. 58-65.
- [52] Kees van Deemter. «Generating Referring Expressions that Involve Gradable Properties». En: *Comput. Linguistics* 32.2 (2006), págs. 195-222.
- [53] Kees van Deemter. «Utility and Language Generation: The Case of Vagueness». En: *Journal of Philosophical Logic* 38.6 (2009), págs. 607-632.
- [54] Kees van Deemter. *Computational Models of Referring: A Study in Cognitive Science*. The MIT Press, 2016.
- [55] Kees van Deemter y Jan Odijk. «Context modeling and the generation of spoken discourse». En: *Speech Communication*. Speak! 21.1 (1997), págs. 101-121.
- [56] Kees van Deemter. «Generating Referring Expressions: Boolean Extensions of the Incremental Algorithm». En: *Computational Linguistics* 28.1 (2002), págs. 37-52.

- [57] Kees van Deemter. *Not Exactly: In Praise of Vagueness*. Oxford : New York: OUP Oxford, 2012.
- [58] Kees van Deemter, Albert Gatt, Ielka van der Sluis y Richard Power. «Generation of Referring Expressions: Assessing the Incremental Algorithm». En: *Cognitive Science* 36.5 (2012), págs. 799-836.
- [59] Judith Degen, Michael Franke y Jäger Gerhard. «Optimal Reasoning About Referential Expressions». En: *16th workshop on the Semantics and Pragmatics of Dialogue (SemDial)*. 2012.
- [60] Miguel Delgado, M. Dolores Ruiz, Daniel Sánchez y M. Amparo Vila. «Fuzzy quantification: a state of the art». En: *Fuzzy Sets and Systems*. Theme: Quantifiers and Logic 242 (2014), págs. 1-30.
- [61] Felix Distel. «Adapting Fuzzy Formal Concept Analysis for Fuzzy Description Logics». En: *Proceedings of the 9th international conference on concept lattices and their applications (CLA 2012)*. 2012, págs. 163-174.
- [62] Didier Dubois, Hung T. Nguyen y Henri Prade. «Possibility Theory, Probability and Fuzzy Sets Misunderstandings, Bridges and Gaps». En: *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Ed. por Didier Dubois y Henri Prade. The Handbooks of Fuzzy Sets Series. Boston, MA: Springer US, 2000, págs. 343-438.
- [63] Didier Dubois y Henri Prade. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*. Mathematics in Science and Engineering 144. Burlington, MA: Elsevier, 1980.
- [64] Didier Dubois y Henri Prade. «New Results about Properties and Semantics of Fuzzy Set-Theoretic Operators». En: *Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems*. Ed. por Paul P. Wang y S. K. Chang. Boston, MA: Springer US, 1980, págs. 59-75.
- [65] Didier Dubois y Henri Prade. «Properties of measures of information in evidence and possibility theories». En: *Fuzzy Sets and Systems*. Measures of Uncertainty 24.2 (1987), págs. 161-182.
- [66] Didier Dubois y Henri Prade. *Possibility Theory*. New York: Plenum Press, 1988.
- [67] Didier Dubois y Henri Prade. «An introduction to possibilistic and fuzzy logics». En: *Readings in uncertain reasoning*. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1990, págs. 742-761.
- [68] Didier Dubois y Henri Prade, eds. *Fundamentals of Fuzzy Sets*. The Handbooks of Fuzzy Sets. Springer US, 2000.
- [69] Didier Dubois y Henri Prade. «Fuzzy elements in a fuzzy set». En: *International Fuzzy Systems Association World Congress*. Ed. por Liu, Y., Chen, G., Ying y M. Beijing, China: Springer, 2005, págs. 55-60.
- [70] Didier Dubois y Henri Prade. «Gradual elements in a fuzzy set». En: *Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications* 12.2 (2008), págs. 165-175.

- [71] D. Ďuráková, S. Krajčí, V. Snášel y P. Vojtáš. «Conceptual structures». En: *Arbeitstagung Allgemeine Algebra* (2002).
- [72] Luka Eciolaza, Martín Pereira-Fariña y Gracian Trivino. «Automatic linguistic reporting in driving simulation environments». En: *Applied Soft Computing* 13.9 (2013), págs. 3956-3967.
- [73] Barbara Di Eugenio y Nancy L. Green. «Emerging Applications of Natural Language Generation in Information Visualization, Education, and Health Care». En: *Handbook of Natural Language Processing, Second Edition*. Ed. por Nitin Indurkha y Fred J. Damerau. Chapman y Hall/CRC, 2010, págs. 557-575.
- [74] Raquel Fernández. «Saliency and feature variability in definite descriptions with positive-form vague adjectives». En: *Proceedings of the PRE-CogSci 2009 Workshop on Production of Referring Expressions: Bridging the gap between computational and empirical approaches to reference, Amsterdam, Netherlands, 2009*. 2009.
- [75] Jerry A. Fodor. *The Language of Thought*. Harvard University Press, 1975.
- [76] William Ford y David Olson. «The elaboration of the noun phrase in children's description of objects». En: *Journal of Experimental Child Psychology* 19.3 (1975), págs. 371-382.
- [77] Michael Franke. «On Scales, Saliency and Referential Language Use». En: *Logic, Language and Meaning*. Ed. por Maria Aloni, Vadim Kimmelman, Floris Roelofsen, Galit W. Sassoon, Katrin Schulz y Matthijs Westera. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012, págs. 311-320.
- [78] Julio Janeiro Gallardo, Ismael Rodríguez-Fdez, Alejandro Ramos-Soto y Alberto Bugarín. «Data Mining for Automatic Linguistic Description of Data - Textual Weather Prediction as a Classification Problem». En: *ICAART 2015 - Proceedings of the International Conference on Agents and Artificial Intelligence, Volume 2, Lisbon, Portugal, 10-12 January, 2015*. Ed. por Stéphane Loiseau, Joaquim Filipe, Béatrice Duval y H. Jaap van den Herik. SciTePress, 2015, págs. 556-562.
- [79] L. T. F. Gamut. *Logic, Language, and Meaning, Volume 2: Intensional Logic and Logical Grammar*. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1990.
- [80] Bernhard Ganter y Sergei A. Obiedkov. *Conceptual Exploration*. Springer, 2016.
- [81] Bernhard Ganter y Rudolf Wille. «Contextual Attribute Logic». En: *Conceptual Structures: Standards and Practices, 7th International Conference on Conceptual Structures, ICCS '99, Blacksburg, Virginia, USA, July 12-15, 1999, Proceedings*. Ed. por William M. Tepfenhart y Walling R. Cyre. Vol. 1640. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1999, págs. 377-388.
- [82] Bernhard Ganter y Rudolf Wille. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
- [83] Claire Gardent. «Generating minimal definite descriptions». En: *Proceedings of the 40th Annual Meeting on Association for Computational Linguistics. ACL '02. USA: Association for Computational Linguistics, 2002*, págs. 96-103.

- [84] Luis Garmendia, Ronald Yager, Enric Trillas y Adela Salvador. «On T-norm based measures of specificity». En: *Fuzzy Sets and Systems* 133 (2003), págs. 237-248.
- [85] Luis Garmendia, Ronald R. Yager, Enric Trillas y Adela Salvador. «A t-norm based specificity for fuzzy sets on compact domains». En: *Int. J. Gen. Syst.* 35.6 (2006), págs. 687-698.
- [86] Luis Garmendia, Ronald R. Yager, Enric Trillas y Adela Salvador. «Measures of specificity of fuzzy sets under T-indistinguishabilities». En: *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 14.4 (2006), págs. 568-572.
- [87] Albert Gatt. «Generating coherent references to multiple entities». Tesis doct. University of Aberdeen, UK, 2007.
- [88] Albert Gatt y Anja Belz. «Introducing shared tasks to NLG: the TUNA shared task evaluation challenges». En: *Empirical methods in natural language generation: data-oriented methods and empirical evaluation*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010, págs. 264-293.
- [89] Albert Gatt y Kees van Deemter. «Conceptual Coherence in the Generation of Referring Expressions». En: *Proceedings of the COLING/ACL 2006 Main Conference Poster Sessions*. Sydney, Australia: Association for Computational Linguistics, 2006, págs. 255-262.
- [90] Albert Gatt y Kees van Deemter. «Incremental Generation of Plural Descriptions: Similarity and Partitioning». En: *Proceedings of the 2007 Joint Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and Computational Natural Language Learning (EMNLP-CoNLL)*. Prague, Czech Republic: Association for Computational Linguistics, 2007, págs. 102-111.
- [91] Albert Gatt y Emiel Krahmer. «Survey of the State of the Art in Natural Language Generation: Core tasks, applications and evaluation». En: *J. Artif. Intell. Res.* 61 (2018), págs. 65-170.
- [92] Albert Gatt, Nicolás Marín, François Portet y Daniel Sánchez. «The Role of Graduality for Referring Expression Generation in Visual Scenes». En: *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*. Ed. por Joao Paulo Carvalho, Marie-Jeanne Lesot, Uzay Kaymak, Susana Vieira, Bernadette Bouchon-Meunier y Ronald R. Yager. Communications in Computer and Information Science. Cham: Springer International Publishing, 2016, págs. 191-203.
- [93] Albert Gatt, Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Specificity measures and reference». En: *Proceedings of the 11th International Conference on Natural Language Generation*. Tilburg University, The Netherlands: Association for Computational Linguistics, 2018, págs. 492-502.
- [94] Albert Gatt, François Portet, Ehud Reiter, Jim Hunter, Saad Mahamood, Wendy Moncur y Somayajulu Sripada. «From data to text in the Neonatal Intensive Care Unit: Using NLG technology for decision support and information management». En: *AI Commun.* 22.3 (2009), págs. 153-186.
- [95] George Georgescu y Andrei Popescu. «Non-commutative fuzzy Galois connections». En: *Soft Comput.* 7.7 (2003), págs. 458-467.

- [96] Ingo Glöckner. «Evaluation of quantified propositions in generalized models of fuzzy quantification». En: *International Journal of Approximate Reasoning* 37.2 (2004), págs. 93-126.
- [97] Robert Godin, Rokia Missaoui y Hassan Alaoui. «Incremental Concept Formation Algorithms Based on Galois (concept) Lattices». En: *Computational Intelligence* 11.2 (1995), págs. 246-267.
- [98] Eli Goldberg, Norbert Driedger y Richard I. Kittredge. «Using Natural-Language Processing to Produce Weather Forecasts». En: *IEEE Expert* 9.2 (1994), págs. 45-53.
- [99] José Luis González Sánchez, Ramón González del Campo y Luis Garmendia. «Some New Measures of k-Specificity». En: *Advances in Artificial Intelligence*. Ed. por Oscar Luaces, José A. Gámez, Edurne Barrenechea, Alicia Troncoso, Mikel Galar, Héctor Quintián y Emilio Corchado. Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer International Publishing, 2016, págs. 489-497.
- [100] H. Paul Grice. «Logic and Conversation». En: *Syntax and Semantics: Vol. 3: Speech Acts*. Ed. por Peter Cole y Jerry L. Morgan. New York: Academic Press, 1975, págs. 41-58.
- [101] Jean-Louis Guigues y Vincent Duquenne. «Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires». En: *Mathématiques et Sciences Humaines* 95 (1986), págs. 5-18.
- [102] Mohamed Rouane Hacene, Marianne Huchard, Amedeo Napoli y Petko Valtchev. «Relational concept analysis: mining concept lattices from multi-relational data». En: *Ann. Math. Artif. Intell.* 67.1 (2013), págs. 81-108.
- [103] Stevan Harnad. «The symbol grounding problem». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 42.1 (1990), págs. 335-346.
- [104] Kaiming He, Georgia Gkioxari, Piotr Dollár y Ross B. Girshick. «Mask R-CNN». En: *IEEE International Conference on Computer Vision, ICCV 2017, Venice, Italy, October 22-29, 2017*. IEEE Computer Society, 2017, págs. 2980-2988.
- [105] Masahiko Higashi y George J. Klir. «Measures of Uncertainty and Information Based on Possibility Distributions». En: *International Journal of General Systems* 9.1 (1982), págs. 43-58.
- [106] Abdollah Homaifar y Ed McCormick. «Simultaneous design of membership functions and rule sets for fuzzy controllers using genetic algorithms». En: *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 3.2 (1995), págs. 129-139.
- [107] Helmut Horacek. «On Referring to Sets of Objects Naturally». En: *Natural Language Generation*. Ed. por Anja Belz, Roger Evans y Paul Piwek. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004, págs. 70-79.
- [108] Ian Horrocks, Oliver Kutz y Ulrike Sattler. «The even more irresistible SROIQ». En: *Proceedings of the Tenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, KR'06*. Lake District, UK: AAAI Press, 2006, págs. 57-67.

- [109] Marianne Huchard, Mohamed Rouane-Hacene, Cyril Roume y Petko Valtchev. «Relational Concept Discovery in Structured Datasets». En: *Ann. Math. Artif. Intell.* 49 (2007), págs. 39-76.
- [110] Daphne Ippolito, Reno Kriz, João Sedoc, Maria Kustikova y Chris Callison-Burch. «Comparison of Diverse Decoding Methods from Conditional Language Models». En: *Proceedings of the 57th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. Florence, Italy: Association for Computational Linguistics, 2019, págs. 3752-3762.
- [111] Akshay Jain, Mihail Popescu, James M. Keller, Marilyn Rantz y Brianna Markway. «Linguistic summarization of in-home sensor data». En: *J. Biomed. Informatics* 96 (2019).
- [112] Janusz Kacprzyk y Sławomir Zadrozny. «Linguistic database summaries and their protoforms: towards natural language based knowledge discovery tools». En: *Information Sciences. Dealing with Uncertainty in Data Mining and Information Extraction* 173.4 (2005), págs. 281-304.
- [113] Janusz Kacprzyk y Sławomir Zadrozny. «Computing With Words Is an Implementable Paradigm: Fuzzy Queries, Linguistic Data Summaries, and Natural-Language Generation». En: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 18.3 (2010), págs. 461-472.
- [114] John D. Kelleher y Josef van Genabith. «Exploiting Visual Saliency for the Generation of Referring Expressions». En: *Proceedings of the Seventeenth International Florida Artificial Intelligence Research Society Conference, Miami Beach, Florida, USA*. Ed. por Valerie Barr y Zdravko Markov. AAAI Press, 2004, págs. 911-916.
- [115] Imtiaz Hussain Khan, Graeme Ritchie y Kees van Deemter. «The Clarity-Brevity Trade-off in Generating Referring Expressions». En: *Proceedings of the Fourth International Natural Language Generation Conference*. Sydney, Australia: Association for Computational Linguistics, 2006, págs. 89-91.
- [116] Rodger Kibble y Richard Power. «Optimizing Referential Coherence in Text Generation». En: *Computational Linguistics* 30.4 (2004), págs. 401-416.
- [117] László Kovács. «Efficiency analysis of concept lattice construction algorithms». En: *Procedia Manufacturing*. 11th International Conference Interdisciplinarity in Engineering, INTER-ENG 2017, 5-6 October 2017, Tirgu Mures, Romania 22 (2018), págs. 11-18.
- [118] Emiel Krahmer y Kees van Deemter. «Computational Generation of Referring Expressions: A Survey». En: *Computational Linguistics* 38.1 (2011), págs. 173-218.
- [119] Emiel Krahmer y Kees van Deemter. «Graphs and Booleans: on the generation of referring expressions». En: *Computing Meaning: Volume 3 (Studies in Linguistics and Philosophy)* (2006), págs. 397-422.
- [120] Emiel Krahmer, Sebastiaan van Erk y André Verleg. «Graph-Based Generation of Referring Expressions». En: *Computational Linguistics* 29.1 (2003), págs. 53-72.

- [121] Petr Krajca, Jan Outrata y Vilem Vychodil. «Parallel Recursive Algorithm for FCA». En: *Proceeding of the Sixth International Conference on Concept Lattices and their Applications*. 2008, págs. 71-82.
- [122] Stanislav Krajčí. «Cluster based efficient generation of fuzzy concepts». En: *Neural Network World* 13 (2003), págs. 521-530.
- [123] Stanislav Krajčí. «A Generalized Concept Lattice». En: *Logic Journal of the IGPL* 13.5 (2005), págs. 543-550.
- [124] Sergei O. Kuznetsov. «Learning of Simple Conceptual Graphs from Positive and Negative Examples». En: *Principles of Data Mining and Knowledge Discovery, Third European Conference, PKDD '99, Prague, Czech Republic, September 15-18, 1999, Proceedings*. Ed. por Jan M. Zytkow y Jan Rauch. Vol. 1704. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1999, págs. 384-391.
- [125] Sergei O. Kuznetsov y Sergei A. Obiedkov. «Comparing performance of algorithms for generating concept lattices». En: *J. Exp. Theor. Artif. Intell.* 14.2-3 (2002), págs. 189-216.
- [126] Jonathan Lawry. *Modelling and Reasoning with Vague Concepts*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [127] Chris van der Lee, Albert Gatt, Emiel van Miltenburg y Emiel Kraemer. «Human evaluation of automatically generated text: Current trends and best practice guidelines». En: *Computer Speech & Language* 67 (2021), págs. 1011-1051.
- [128] Fritz Lehmann y Rudolf Wille. «A triadic approach to formal concept analysis». En: *Conceptual Structures: Applications, Implementation and Theory*. Ed. por Gerard Ellis, Robert Levinson, William Rich y John F. Sowa. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995, págs. 32-43.
- [129] Yuxia Lei y Jingying Tian. «Concepts with negative-values and corresponding concept lattices». En: *2012 9th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*. 2012, págs. 1005-1008.
- [130] Marie-Jeanne Lesot, Laure Mouillet y Bernadette Bouchon-Meunier. «Fuzzy Prototypes Based on Typicality Degrees». En: *Computational Intelligence, Theory and Applications*. Ed. por Bernd Reusch. Advances in Soft Computing. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005, págs. 125-138.
- [131] Marie-Jeanne Lesot, Gilles Moysse y Bernadette Bouchon-Meunier. «Interpretability of fuzzy linguistic summaries». En: *Fuzzy Sets and Systems*. Special Issue in Honor of Francesc Esteva on the Occasion of his 70th Birthday 292 (2016), págs. 307-317.
- [132] Zhizhen Liang y Pengfei Shi. «Similarity measures on intuitionistic fuzzy sets». En: *Pattern Recognition Letters* 24.15 (2003), págs. 2687-2693.
- [133] Jingyu Liu, Wei Wang, Liang Wang y Ming-Hsuan Yang. «Attribute-Guided Attention for Referring Expression Generation and Comprehension». En: *IEEE Transactions on Image Processing* 29 (2020), págs. 5244-5258.

- [134] Xudong Luo, Jimmy Ho-man Lee, Ho-fung Leung y N. Jennings. «Prioritized fuzzy constraint satisfaction problems: axioms, instantiation and validation». En: *Fuzzy Sets Syst.* (2003), págs. 151-188.
- [135] Junhua Mao, Jonathan Huang, Alexander Toshev, Oana Camburu, Alan L. Yuille y Kevin Murphy. «Generation and Comprehension of Unambiguous Object Descriptions». En: *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2016, Las Vegas, NV, USA, June 27-30, 2016*. IEEE Computer Society, 2016, págs. 11-20.
- [136] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Referring under Uncertainty». En: *2019 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE 2019, New Orleans, LA, USA, June 23-26, 2019*. IEEE, 2019, págs. 1-6.
- [137] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla, M. Dolores Ruiz y Daniel Sánchez. «Formal concept analysis for the generation of plural referring expressions». En: *Information Sciences* 579 (2021), págs. 717-731.
- [138] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «A Measure of Referential Success Based on Alpha-Cuts». En: *Scalable Uncertainty Management*. Ed. por Steven Schockaert y Pierre Senellart. Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer International Publishing, 2016, págs. 345-351.
- [139] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Using specificity to measure referential success in referring expressions with fuzzy properties». En: *2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. 2016, págs. 563-570.
- [140] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Scene selection for teaching basic visual concepts in the Refer4Learning app». En: *2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. 2017, págs. 1-6.
- [141] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Using k-Specificity for the Management of Count Restrictions in Flexible Querying». En: *Scalable Uncertainty Management*. Ed. por Serafín Moral, Olivier Pivert, Daniel Sánchez y Nicolás Marín. Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer International Publishing, 2017, págs. 49-63.
- [142] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «An Approximation to Context-Aware Size Modeling for Referring Expression Generation». En: *2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. 2018, págs. 1-8.
- [143] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez. «Fuzzy Logic for Vagueness Management in Referring Expression Generation». En: *Proceedings of the Workshop on Intelligent Information Processing and Natural Language Generation*. 2020, págs. 71-76.
- [144] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla, Daniel Sánchez y Ronald R. Yager. «On families of bounded specificity measures». En: *2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. 2017, págs. 1-6.

- [145] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla, Daniel Sánchez y Ronald R. Yager. «Specificity Measures and Referential Success». En: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 26.2 (2018), págs. 859-868.
- [146] Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla, Daniel Sánchez y Ronald R. Yager. «Specificity measures based on fuzzy set similarity». En: *Fuzzy Sets and Systems. Fuzzy Measures, Integrals and Quantification in Artificial Intelligence Problems – An Homage to Prof. Miguel Delgado* 401 (2020), págs. 189-199.
- [147] Nicolás Marín y Daniel Sánchez. «On generating linguistic descriptions of time series». En: *Fuzzy Sets and Systems. Special Issue on Linguistic Description of Time Series* 285 (2016), págs. 6-30.
- [148] Frano Škopljanač Mačina y Bruno Blašković. «Formal Concept Analysis – Overview and Applications». En: *Procedia Engineering. 24th DAAAM International Symposium on Intelligent Manufacturing and Automation, 2013* 69 (2014), págs. 1258-1267.
- [149] Jesús Medina. «Relating attribute reduction in formal, object-oriented and property-oriented concept lattices». En: *Computers & Mathematics with Applications* 64.6 (2012), págs. 1992-2002.
- [150] Jesús Medina, Manuel Ojeda-Aciego y Jorge Ruiz-Calviño. «On Multi-adjoint Concept Lattices: Definition and Representation Theorem». En: *Formal Concept Analysis*. Ed. por Sergei O. Kuznetsov y Stefan Schmidt. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007, págs. 197-209.
- [151] Jesús Medina, Manuel Ojeda-Aciego y Jorge Ruiz-Calviño. «Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices». En: *Fuzzy Sets and Systems. Contribution of Fuzziness & Uncertainty to Modern Artificial Intelligence, Case-Based Reasoning* 160.2 (2009), págs. 130-144.
- [152] Dean van der Merwe, Sergei Obiedkov y Derrick Kourie. «AddIntent: A New Incremental Algorithm for Constructing Concept Lattices». En: *Concept Lattices*. Ed. por Peter Eklund. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2004, págs. 372-385.
- [153] Rokia Missaoui, Lhouari Nourine y Yoan Renaud. «Generating Positive and Negative Exact Rules Using Formal Concept Analysis: Problems and Solutions». En: *ICFCA 2008*. 2008, págs. 169-181.
- [154] Rokia Missaoui, Lhouari Nourine y Yoan Renaud. «Computing Implications with Negation from a Formal Context». En: *Fundamenta Informaticae* 115.4 (2012), págs. 357-375.
- [155] Banibrata Mondal, Dipankar Mazumdar y Swapan Raha. «Similarity in approximate reasoning». En: *Int. J. Comput. Cognit* 4.3 (2006), págs. 46-56.
- [156] John N. Mordeson y Sunil Mathew. *Advanced Topics in Fuzzy Graph Theory*. Vol. 375. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2019.

- [157] Aurélien Moreau, Olivier Pivert y Grégory Smits. «A Fuzzy Approach to the Characterization of Database Query Answers». En: *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*. Ed. por Joao Paulo Carvalho, Marie-Jeanne Lesot, Uzay Kaymak, Susana Vieira, Bernadette Bouchon-Meunier y Ronald R. Yager. Communications in Computer and Information Science. Cham: Springer International Publishing, 2016, págs. 329-340.
- [158] Eugene M. Norris. «An Algorithm for Computing the Maximal Rectangles in a Binary Relation». En: *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* 23.2 (1978), págs. 243-250.
- [159] Lhouari Nourine y Olivier Raynaud. «A fast algorithm for building lattices». En: *Information Processing Letters* 71.5 (1999), págs. 199-204.
- [160] Daniel W. Otter, Julian R. Medina y Jugal K. Kalita. «A Survey of the Usages of Deep Learning for Natural Language Processing». En: *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 32.2 (2021), págs. 604-624.
- [161] Doğan Özdemir y Lale Akarun. «A fuzzy algorithm for color quantization of images». En: *Pattern Recognit.* 35.8 (2002), págs. 1785-1791.
- [162] Jean Stilwell Pececi. *Child Language*. London: Routledge, 1994.
- [163] Thomas Pechmann. «Incremental speech production and referential overspecification». En: *Linguistics* 27.1 (1989), págs. 89-110.
- [164] Martín Pereira-Fariña, Luka Eciolaza y Gracian Trivino. «Quality assessment of linguistic description of data». En: *XVI Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*. 2012, págs. 608-613.
- [165] John L. Pfaltz y Christopher M. Taylor. «Closed set mining of biological data». En: *Proceedings of the 2nd International Conference on Data Mining in Bioinformatics*. BIODDD'02. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002, págs. 43-48.
- [166] Paul Piwek. «Salience in the generation of multimodal referring acts». En: *Proceedings of the 2009 international conference on Multimodal interfaces*. ICMI-MLMI '09. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2009, págs. 207-210.
- [167] Paul Piwek, Robbert-Jan Beun y Anita Cremers. «'Proximal' and 'distal' in language and cognition: Evidence from deictic demonstratives in Dutch». En: *Journal of Pragmatics* 40.4 (2008), págs. 694-718.
- [168] Jonas Poelmans, Dmitry I. Ignatov, Sergei O. Kuznetsov y Guido Dedene. «Fuzzy and rough formal concept analysis: a survey». En: *International Journal of General Systems* 43.2 (2014), págs. 105-134.
- [169] Silke Pollandt. «Relation Graphs: A Structure for Representing Relations in Contextual Logic of Relations». En: *Conceptual Structures: Integration and Interfaces*. Ed. por Uta Priss, Dan Corbett y Galia Angelova. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002, págs. 34-47.

- [170] Silke Pollandt. *Fuzzy-Begriffe: Formale Begriffsanalyse unscharfer Daten*. Springer-Verlag, 2013.
- [171] Ana Pradera, Enric Trillas, Sergio Guadarrama y Eloy Renedo. «On Fuzzy Set Theories». En: *Fuzzy Logic: A Spectrum of Theoretical & Practical Issues*. Ed. por Paul P. Wang, Da Ruan y Etienne E. Kerre. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007, págs. 15-47.
- [172] A. Ramos-Soto, A. Bugarín y S. Barro. «On the role of linguistic descriptions of data in the building of natural language generation systems». En: *Fuzzy Sets and Systems*. Special Issue on Linguistic Description of Time Series 285 (2016), págs. 31-51.
- [173] Alejandro Ramos-Soto, Alberto Bugarin, Sanén Barro y Félix Díaz-Hermida. «Automatic linguistic descriptions of meteorological data a soft computing approach for converting open data to open information». En: *2013 8th Iberian Conference on Information Systems and Technologies (CISTI)*. 2013, págs. 1-6.
- [174] Alejandro Ramos-Soto, Alberto Bugarín, Senén Barro, Nuria Gallego, Catalina Rodríguez, Iván Fraga y Anthony Saunders. «Automatic Generation of Air Quality Index Textual Forecasts Using a Data-To-Text Approach». En: *Advances in Artificial Intelligence - 16th Conference of the Spanish Association for Artificial Intelligence, CAEPIA 2015, Albacete, Spain, November 9-12, 2015, Proceedings*. Ed. por José Miguel Puerta, José A. Gámez, Bernabé Dorronsoro, Edurne Barrenechea, Alicia Troncoso, Bruno Baruque y Mikel Galar. Vol. 9422. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2015, págs. 164-174.
- [175] Ehud Reiter. «An Architecture for Data-to-Text Systems». En: *Proceedings of the Eleventh European Workshop on Natural Language Generation, ENLG 2007, Schloss Dagstuhl, Germany, June 17-20, 2007*. Ed. por Stephan Busemann. 2007.
- [176] Ehud Reiter. «Task-based evaluation of nlg systems: Control vs real-world context». En: *Proceedings of the UCNLG+ Eval: Language Generation and Evaluation Workshop*. 2011, págs. 28-32.
- [177] Ehud Reiter y Robert Dale. «Building applied natural language generation systems». En: *Natural Language Engineering* 3.1 (1997), págs. 57-87.
- [178] Ehud Reiter, Albert Gatt, François Portet y Marian van der Meulen. «The Importance of Narrative and Other Lessons from an Evaluation of an NLG System that Summarises Clinical Data». En: *INLG 2008 - Proceedings of the Fifth International Natural Language Generation Conference, June 12-14, 2008, Salt Fork, Ohio, USA*. Ed. por Michael White, Crystal Nakatsu y David McDonald. The Association for Computer Linguistics, 2008.
- [179] Ehud Reiter y Somayajulu Sripada. «Should Corpora Texts Be Gold Standards for NLG?». En: *Proceedings of the International Natural Language Generation Conference, Harriman, New York, USA, July 2002*. Association for Computational Linguistics, 2002, págs. 97-104.

- [180] Yuan Ren, Kees van Deemter y Jeff Pan. «Generating referring expressions with OWL2». En: *Proceedings of the 23rd International Workshop on Description Logics (DL 201): Waterloo, Ontario, Canada, May 4-7, 2010*. CEUR-WS, 2010, págs. 428-438.
- [181] José Manuel Rodríguez-Jiménez, Pablo Cordero, Manuel Enciso y Sebastian Rudolph. «Concept lattices with negative information: A characterization theorem». En: *Inf. Sci.* 369 (2016), págs. 51-62.
- [182] María Ros, Manuel Pegalajar, Miguel Delgado, Amparo Vila, Derek T. Anderson, James M. Keller y Mihail Popescu. «Linguistic summarization of long-term trends for understanding change in human behavior». En: *2011 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2011)*. 2011, págs. 2080-2087.
- [183] Eleanor Rosch. «Neither Concepts Nor Lotfi Zadeh are Fuzzy Sets». En: *On Fuzziness: A Homage to Lotfi A. Zadeh – Volume 2*. Ed. por Rudolf Seising, Enric Trillas, Claudio Moraga y Settimo Termini. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013, págs. 591-596.
- [184] Azriel Rosenfeld. «Fuzzy Graphs». En: *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes*. Ed. por Lotfi A. Zadeh, King-Sun Fu, Kōkichi Tanaka y Masamichi Shimura. Academic Press, 1975, págs. 77-95.
- [185] Zsófia Ruttkay. «Fuzzy constraint satisfaction». En: *Proceedings of 1994 IEEE 3rd International Fuzzy Systems Conference*. Vol. 2. 1994, págs. 1263-1268.
- [186] Daniel Sánchez, Miguel Calvo-Flores y M. Amparo Vila. «Representation of imprecise properties via restriction levels: An alternative to fuzzy negation». En: *Proceedings ESTYLF 2008 (2008)*, págs. 423-428.
- [187] Daniel Sánchez, Miguel Delgado y M. Amparo Vila. «A restriction level approach to the representation of imprecise properties». En: *IPMU 2008 (2008)*, págs. 153-159.
- [188] Daniel Sánchez, Miguel Delgado, M. Amparo Vila y Jesús Chamorro-Martínez. «On a non-nested level-based representation of fuzziness». En: *Fuzzy Sets Syst.* 192 (2012), págs. 159-175.
- [189] José Luis González Sánchez, Ramón González del Campo, Luis Garmendia y Ronald R. Yager. «Comparing families of measures of k-specificity. measure of crispness». En: *2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE 2017, Naples, Italy, July 9-12, 2017*. IEEE, 2017, págs. 1-6.
- [190] John R. Searle y John Rogers Searle. *Speech Acts: An Essay in the Philosophy of Language*. Cambridge University Press, 1969.
- [191] Baris Sertkaya. «A Survey on how Description Logic Ontologies Benefit from Formal Concept Analysis». En: *CoRR abs/1107.2822 (2011)*.

- [192] Robert D. C. Shearer, Boris Motik y Ian Horrocks. «Hermit: A Highly-Efficient OWL Reasoner». En: *Proceedings of the Fifth OWLED Workshop on OWL: Experiences and Directions, collocated with the 7th International Semantic Web Conference (ISWC-2008), Karlsruhe, Germany, October 26-27, 2008*. Ed. por Catherine Dolbear, Alan Ruttenberg y Ulrike Sattler. Vol. 432. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS.org, 2008.
- [193] Koji Shimojima, Toshio Fukuda y Yasuhisa Hasegawa. «Self-tuning fuzzy modeling with adaptive membership function, rules, and hierarchical structure based on genetic algorithm». En: *Fuzzy Sets and Systems*. Fuzzy Neural Control 71.3 (1995), págs. 295-309.
- [194] Grégory Smits, Pierre Nerzic, Olivier Pivert y Marie-Jeanne Lesot. «Efficient Generation of Reliable Estimated Linguistic Summaries». En: *2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. 2018, págs. 1-8.
- [195] José Manuel Soto-Hidalgo, Jesús Chamorro-Martínez y Daniel Sánchez. «A new approach for defining a fuzzy color space». En: *FUZZ-IEEE 2010, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Barcelona, Spain, 18-23 July, 2010, Proceedings*. IEEE, 2010, págs. 1-6.
- [196] John F. Sowa. «Conceptual Graphs for a Data Base Interface». En: *IBM Journal of Research and Development* 20.4 (1976), págs. 336-357.
- [197] John F. Sowa. *Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine*. Addison-Wesley, 1984.
- [198] Matthew Stone. «On Identifying Sets». En: *Proceedings of the First International Conference on Natural Language Generation*. Vol. 14. INLG '00. Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2000, págs. 116-123.
- [199] Matthew Stone y Bonnie L. Webber. «Textual Economy through Close Coupling of Syntax and Semantics». En: *CoRR* cmp-lg/9806020 (1998).
- [200] Umberto Straccia. *Foundations of Fuzzy Logic and Semantic Web Languages*. Taylor & Francis, 2013.
- [201] Gerd Stumme. «The concept classification of a terminology extended by conjunction and disjunction». En: *Proceedings of the 4th Pacific Rim International Conference on Topics in Artificial Intelligence*. PRICAI'96. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996, págs. 121-131.
- [202] Enric Trillas. «Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos.» En: *Stochastica* 3.1 (1979), págs. 47-60.
- [203] Amos Tversky. «Features of similarity». En: *Psychological Review* 84.4 (1977), págs. 327-352.
- [204] Aareba Umair, Elio Masciari y Muhammad Habib Habib Ullah. «Sentimental Analysis Applications and Approaches during COVID-19: A Survey». En: *IDEAS 2021: 25th International Database Engineering & Applications Symposium, Montreal, QC, Canada, July 14-16, 2021*. ACM, 2021, págs. 304-308.

- [205] Jette Viethen y Robert Dale. «The Use of Spatial Relations in Referring Expression Generation». En: *Proceedings of the Fifth International Natural Language Generation Conference*. INLG '08. Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2008, págs. 59-67.
- [206] Jette Viethen, Margaret Mitchell y Emiel Krahmer. «Graphs and Spatial Relations in the Generation of Referring Expressions». En: *Proceedings of the 14th European Workshop on Natural Language Generation*. Sofia, Bulgaria: Association for Computational Linguistics, 2013, págs. 72-81.
- [207] Björn Vormbrock y Rudolf Wille. «Semiconcept and Protoconcept Algebras: The Basic Theorems». En: *Formal Concept Analysis: Foundations and Applications*. Ed. por Bernhard Ganter, Gerd Stumme y Rudolf Wille. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005, págs. 34-48.
- [208] Anna Wilbik, Diego Barreto y Ge Backus. «On Relevance of Linguistic Summaries – A Case Study from the Agro-Food Domain». En: *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*. Ed. por Marie-Jeanne Lesot, Susana Vieira, Marek Z. Reformat, João Paulo Carvalho, Anna Wilbik, Bernadette Bouchon-Meunier y Ronald R. Yager. Communications in Computer and Information Science. Cham: Springer International Publishing, 2020, págs. 289-300.
- [209] Anna Wilbik y Janusz Kacprzyk. «On the evaluation of the linguistic summarization of temporally focused time series using a measure of informativeness». En: *Proceedings of the International Multiconference on Computer Science and Information Technology*. 2010, págs. 155-162.
- [210] Anna Wilbik y Uzay Kaymak. «Gradual Linguistic Summaries». En: *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*. Ed. por Anne Laurent, Olivier Strauss, Bernadette Bouchon-Meunier y Ronald R. Yager. Communications in Computer and Information Science. Cham: Springer International Publishing, 2014, págs. 405-413.
- [211] Rudolf Wille. «Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts». En: *Ordered Sets*. Ed. por Ivan Rival. NATO Advanced Study Institutes Series. Dordrecht: Springer Netherlands, 1982, págs. 445-470.
- [212] Rudolf Wille. «Formal Concept Analysis as Mathematical Theory of Concepts and Concept Hierarchies». En: *Formal Concept Analysis: Foundations and Applications*. Ed. por Bernhard Ganter, Gerd Stumme y Rudolf Wille. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005, págs. 1-33.
- [213] Wei-Zhi Wu, Yee Leung y Ju-Sheng Mi. «Granular Computing and Knowledge Reduction in Formal Contexts». En: *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.* 21.10 (2009), págs. 1461-1474.
- [214] Su Mei Xi y Young Im Cho. «Comparison of application effect of natural language processing techniques for information retrieval». En: *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems* 18.11 (2012), págs. 1059-1064.

- [215] Ronald R. Yager. «Measuring Tranquility and Anxiety in Decision Making: An Application of Fuzzy Sets». En: *International Journal of General Systems* 8.3 (1982), págs. 139-146.
- [216] Ronald R. Yager. «Ordinal Measures of Specificity». En: *International Journal of General Systems* 17.1 (1990), págs. 57-72.
- [217] Ronald R. Yager. «On the specificity of a possibility distribution». En: *Fuzzy Sets and Systems* 50.3 (1992), págs. 279-292.
- [218] Ronald R. Yager. «Measures of Specificity». En: *Computational Intelligence: Soft Computing and Fuzzy-Neuro Integration with Applications*. Ed. por Okay Kaynak, Lotfi A. Zadeh, Burhan Türkşen e Imre J. Rudas. NATO ASI Series. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998, págs. 94-113.
- [219] Ronald R. Yager. «Expansible measures of specificity». En: *International Journal of General Systems* 41.3 (2012), págs. 247-263.
- [220] Sadok Ben Yahia y Ali Jaoua. «Discovering Knowledge from Fuzzy Concept Lattice». En: *Data Mining and Computational Intelligence*. Ed. por Abraham Kandel, Mark Last y Horst Bunke. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Heidelberg: Physica-Verlag HD, 2001, págs. 167-190.
- [221] Luyao Yuan, Zipeng Fu, Jingyue Shen, Lu Xu, Junhong Shen y Song-Chun Zhu. «Emergence of Pragmatics from Referential Game between Theory of Mind Agents». En: *CoRR* abs/2001.07752 (2020).
- [222] Lotfi A. Zadeh. «A prototype-centered approach to adding deduction capability to search engines - The concept of protoform». En: vol. 2002-January. 2002, págs. 523-525.
- [223] Lotfi A. Zadeh. «Fuzzy Sets». En: *Inf. Control*. 8.3 (1965), págs. 338-353.
- [224] Lotfi A. Zadeh. «Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes». En: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* SMC-3.1 (1973), págs. 28-44.
- [225] Lotfi A. Zadeh. *A Theory of Approximate Reasoning (AR)*. Inf. téc. UCB/ERL M77/58. EECS Department, University of California, Berkeley, 1977.
- [226] Lotfi A. Zadeh. «Fuzzy logic = computing with words». En: *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 4.2 (1996), págs. 103-111.
- [227] Wenyi Zeng y Hongxing Li. «Relationship between similarity measure and entropy of interval valued fuzzy sets». En: *Fuzzy Sets and Systems* 157.11 (2006), págs. 1477-1484.
- [228] Hongying Zhang, Wenxiu Zhang y Changlin Mei. «Entropy of interval-valued fuzzy sets based on distance and its relationship with similarity measure». En: *Knowledge-Based Systems* 22.6 (2009), págs. 449-454.