UNIVERSIDAD DE GRANADA

Máster en Matemáticas

Introducción al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas lineales de segundo orden

Luis Felipe Del Río López

Departamento de Análisis Matemático

Tutor: Pieralberto Sicbaldi

Curso académico 2021-2022

Introducción al estudio de las EDPs elípticas lineales de segundo orden.

Trabajo de fin de Máster. Curso académico 2020-2021.

Autor	Luis Felipe Del Río López	Máster en Matemáticas
Tutor	Pieralberto Silcbaldi	Escuela de Posgrado
Departamento	Análisis Matemático	Universidad de Granada

Índice general

Introducción

El presente Trabajo de Fin de Máster tiene como objetivo introducir al lector en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas lineales de segundo orden. La referencia principal que se ha seguido en el trabajo ha sido [6], la cual es una de las más completas y reconocidas en este ámbito. Sin embargo, como he podido comprobar a lo largo de la elaboración de este trabajo, tanto el orden de la presentación de sus resultados como el bajo nivel de detalle en algunas de sus demostraciones no son especialmente apropiados para estudiantes que se estén iniciando en el tema. Es por ello que la labor que se ha realizado en el presente trabajo ha sido subsanar estos inconvenientes, de forma que sea accesible a un público más amplio.

Para ello, se han estructurado los resultados de la forma más pedagógica posible y, con ayuda del resto de las fuentes bibliográficas, se han completado y detallado las demostraciones. Además, se han incluido algunos ejemplos y figuras, de elaboración propia, para la mejor comprensión de los mismos. Por tanto, este trabajo es especialmente adecuado para estudiantes de posgrado que quieran introducirse en el estudio de este tema, o bien para investigadores de ramas afines que necesiten de los resultados contenidos en él.

Para introducir al lector en el estudio de las EDPs elípticas lineal de segundo orden se ha optado por estudiar el operador elíptico lineal de segundo orden tipo: el Laplaciano, el cual da lugar tanto a la ecuación de Laplace como a la ecuación de Poisson. Alrededor de dichas ecuaciones girará todo nuestro trabajo.

Para la redacción del mismo se han usado simultáneamente todas las fuentes recogidas en la bibliografía, escogiendo en cada uno de los resultados las más adecuadas. En consecuencia, no se citarán las fuentes en el desarrollo del trabajo, ya que todas se están utilizando de forma simultánea.

Finalmente, señalamos que se consideran como prerrequisitos los contenidos matemáticos desarrollados en el Grado de Matemáticas, siendo muy recomendable haber cursado la asignatura optativa "Ecuaciones en Derivadas Parciales". En consecuencia, no se enunciarán ni demostrarán aquellos teoremas y resultados vistos en él; se anima al lector a que consulte fuentes especializadas en caso de querer profundizar en ellos. La notación que se usará en el trabajo será, por tanto, la usada de forma usual en el Grado. Sin embargo, para mayor claridad, se detallará la más relevante a continuación:

Notación previa básica:

- Denotaremos ∂S a la frontera del conjunto S.
- Denotaremos $\bar{S} = S \cup \partial S$: a la adherencia (o clausura) del conjunto S.
- Denotaremos $S - S'$ al conjunto $= \{x \in S : x \notin S'\}$.
- Denotaremos $S' \subset\subset S$ si S' está estrictamente contenido en S.
- Llamaremos Ω a un abierto cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Será dominio si además es conexo.
- Denotaremos $B_R(y)$ a la bola de centro $y \in \mathbb{R}^n$ y radio R.
- Denotaremos $\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$ al volumen de la bola unidad de $\mathbb{R}^n$.
- $D_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$; $Du = (D_1 u, ..., D_n u)$ es el gradiente de u; $D^2 u = [D_{ij}]$ es la matriz Hessiana u.
- $D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$, donde $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, β_i enteros positivos y $|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$.
- Denotaremos $C^0(\Omega)$ al conjunto de funciones continuas en Ω.

- Denotaremos $C^0(\bar{\Omega})$ al conjunto de funciones continuas en $\bar{\Omega}$.
- Denotaremos $C^k(\Omega)$ al conjunto de funciones cuyas derivadas de orden menor o igual que k son continuas en Ω.
- Denotaremos $C^k(\bar{\Omega})$ al conjunto de funciones de $C^k(\Omega)$ cuyas derivadas de orden menor o igual que k tienen una extensión continua en $\bar{\Omega}$.
- Denotaremos $C_0^k(\Omega)$ al conjunto de funciones de $C^k(\Omega)$ de soporte compacto en Ω.
- $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ (Función Delta de Kronecker)

Resumen

El presente Trabajo de Fin de Máster tiene como principal objetivo introducir al lector en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas lineales de segundo orden. Para ello, se ha optado por estudiar sus dos ecuaciones tipo: la ecuación de Laplace y su versión no homogénea, la ecuación de Poisson.

El trabajo se ha dividido en los siguiente capítulos:

- EDPs elípticas de segundo orden.
- Funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas.
- El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.
- El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson.

Antes de poder introducir al lector en el estudio de las EDPs elípticas lineales de segundo orden, es imprescindible definirlas previamente. Es por ello que se ha dedicado el Capítulo 1 del trabajo a este fin. En él partiremos de la definición general de ecuación en derivadas parciales hasta llegar, finalmente, a las lineales elípticas de segundo orden. Por último, introduciremos las dos EDPs elípticas lineales de segundo orden tipo: la ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson, las cual trataremos con más detalle en los siguiente capítulos.

Estos capítulos restantes (2, 3 y 4) estarán dedicados al estudio de la existencia y unicidad de los problemas clásicos de Dirichlet para las ecuaciones de Laplace y Poisson, es decir, del problema

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= f(x) \qquad x \in \Omega, \\ u(x) &= \varphi(x) \qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

donde φ y f son funciones dadas (si $f \equiv 0$ estamos en el caso de la ecuación de Laplace, en caso contrario en el de la ecuación de Poisson).

En el Capítulo 2 se introducen los conceptos de funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas los cuales, como se pone de manifiesto en su definición, están íntimamente relacionados con el operador Laplaciano. A lo largo del capítulo se describen algunas de sus principales propiedades, entre las que destacan las llamadas desigualdades del valor medio. Gracias a éstas, obtendremos un resultado fundamental en nuestro trabajo: el principio del máximo-mínimo. Como consecuencia de éste obtendremos, al final del capítulo, un resultado que, como veremos más adelante, nos asegurará la unicidad de solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.

En la Capítulo 3 nos dedicaremos al estudio de la existencia de soluciones del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson. Distinguiremos dos casos: los dominios en forma de bola y los dominios acotados arbitrarios. Haciendo uso de las Identidades de Green obtendremos la existencia de solución en bolas, es más, la obtendremos explícitamente. Para el estudio del problema en dominios acotados arbitrarios tendremos que hacer uso del método de las funciones subarmónicas, conocido también como el método de Perron. Gracias a este obtendremos una condición suficiente y necesaria, que dependerá de la frontera del dominio, para la existencia de solución (la cual sabemos que sería única, como vimos en el capítulo anterior). Finalmente, veremos algunas condiciones sobre la frontera del dominio que nos aseguren esta existencia de solución.

Finalmente, en el Capítulo 4, estudiaremos el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson. Una de las dificultades a las que nos enfrentaremos será que no basta imponer que la función f sea de clase C^1 para obtener soluciones de clase C^2. Con el fin de solucionar este problema introduciremos un nuevo espacio de funciones: el espacio de las funciones Hölder continuas. Gracias a él, haciendo uso de sus propiedades, obtendremos una serie de estimaciones que nos servirán para, finalmente, obtener resultados de existencia y unicidad del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson.

Capítulo 1

EDPs elípticas lineales de segundo orden

En esta capítulo vamos a definir el concepto de ecuación en derivadas parciales (EDP) elíptica lineal de segundo orden. Para ello partiremos de la definición más general de ecuación en derivadas parciales e iremos clasificándolas hasta llegar a ellas. Tras ésto daremos dos ejemplos de las mismas: la ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson, que serán aquellas que estudiaremos a lo largo del presente trabajo.

1.1 Ecuación en derivadas parciales (EDP)

Vamos, en primer lugar, a definir el concepto de ecuación en derivadas parciales de k-ésimo orden:

Definicion 1.1. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos ecuación en derivadas parciales de k-ésimo orden a aquella de la forma*

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), ..., Du(x), u(x), x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega, \tag{1.1}$$

donde

- *$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida.*
- *$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times ... \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación dada.*

Dependiendo de la F tomada podemos clasificar las EDPs en cuatro subtipos:

Definicion 1.2. *(Clasificación de las EDPs en función de F)*

- *La EDP (1.1) es lineal si F es de la forma*

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x),$$

donde f y los a_α son funciones dadas. Además, si $f \equiv 0$, diremos que la EDP es lineal y homogénea

- *Diremos que la EDP (1.1) es semilineal si F es de la forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), ..., Du(x), u(x), x) = 0.$$

- *Diremos que la EDP (1.1) es cuasilineal si F es de la forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1u}(x), ..., u(x), u) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u(x), ..., u(x), x) = 0.$$

- *Diremos que la EDP (1.1) es no lineal si depende nolinalmente de la derivada de mayor orden.*

1.2 Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

En virtud de lo visto en la sección anterior podemos definir de forma general una EDP de segundo orden general:

Definicion 1.3. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos ecuación en derivadas parciales de segundo orden a aquella de la forma*

$$F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = 0 \qquad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

donde

- *$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida.*
- *$F : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación dada.*

Ahora bien, esta función F la podemos expresar de la siguiente forma

$$F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) := A(x) \cdot D^2u(x) - D(\nabla u(x), u(x), x), \tag{1.3}$$

donde $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ es una matriz $n \times n$, cuyos coeficientes dependen de $\nabla u(x), u(x), x$. $D^2u(x)$ es la matriz Hessiana de u. Si realizamos el producto de dichas matrices obtenemos el siguiente resultado:

$$A(x) \cdot D^2u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Además, si u $\in C^2(\Omega)$ las derivadas cruzadas coinciden y, en consecuencia, podemos asumir sin pérdida de generalidad que nuestra matriz A es simétrica. Gracias a esto, junto con el hecho de que los coeficientes son reales, tenemos que la matriz A es diagonalizable, con valores propios $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_n(x)$.

En función de estos valores propios vamos a clasificar nuestras EDPs en un punto $x \in \Omega$. Denotaremos P al número de valores propios estrictamente positivos y Z al número de valores propios nulos.

Definicion 1.4. *(Clasificación, en un punto $x \in \Omega$, de las EDPs de segundo orden en función de los valores propios de la matriz $A(x)$.)*

- *Diremos que una EDP es hiperbólica en $x \in \Omega$ si $Z = 0$ y, además, $P = 1$ o bien $P = n - 1$.*
- *Diremos que una EDP es parabólica si $Z > 0$.*
- *Diremos que una EDP es ultra hiperbólica si $Z = 0$ y , además, $1 < P < n-1$.*
- *Diremos que una EDP es elíptica si $Z = 0$ y, además, $P = n$ o bien $P = 0$.*

Otra definición, equivalente a la anterior, para EDPs elípticas es la siguiente:

Definicion 1.5. *Diremos que una EDP de segundo grado es elíptica en $x \in \Omega$ si*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \neq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

1.3 Ecuaciones en derivadas parciales elípticas lineales de segundo orden

Por tanto, como consecuencia de todas las definiciones vistas a lo largo del capítulo, estamos en condiciones de poder definir qué es una ecuaciones en derivadas parciales elíptica de segundo orden en un punto $x \in \Omega$:

Definicion 1.6. *Llamaremos ecuación en derivadas parciales elíptica lineal de segundo orden en $x \in \Omega$ a aquella de la forma*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} - b(x)\cdot\nabla u(x) - c(x)u(x) = f(x) \tag{1.4}$$

verificando que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \neq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Está definición es puntual, llamaremos ecuación en derivadas parciales elíptica lineal de segundo orden a aquella que lo sea para todo $x \in \Omega$. Esto lleva a la siguiente definición:

Definicion 1.7. *Diremos que la ecuación (1.4) es elíptica (en Ω) si existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\alpha|\xi|^2 \leq A(x)\xi\cdot\xi, \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

donde $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Si $\alpha = 0$ diremos que es elíptica degenerada.

1.4 Ejemplos de EDPs elípticas lineales de segundo orden

Los dos ejemplos más conocidos, y sencillos, de EDP elíptica lineal de segundo orden son las ecuaciones de Laplace y de Poisson:

Ecuación de Laplace

$$\Delta u(x) = 0, \qquad \forall x \in \Omega.$$

A las soluciones de esta ecuación las llamaremos, como veremos más adelante, funciones armónicas en Ω.

Ecuación de Poisson

$$\Delta u(x) = f(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Nótese que la ecuación de Poisson es la versión no homogénea de la ecuación de Laplace. Estas ecuaciones las trataremos con más detalle en lo que resta de trabajo.

Capítulo 2

Funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas

En este capítulo introduciremos el concepto de función armónica, subarmónica y superarmónica y estudiaremos algunas de sus propiedades más relevantes. Estas propiedades serán de gran utilidad en los siguientes capítulos, donde las utilizaremos para estudiar la existencia y unicidad de soluciones tanto del problema clásico de Dirichlet para la ecuación de Laplace como del problema clásico de Dirichlet para la ecuación de Poisson.

2.1 El operador Laplaciano

El concepto de función armónica, subarmónica y superarmónica está íntimamente ligado, como veremos en breve, al operador Laplaciano, el cual definimos como sigue:

Definicion 2.1. *Sea Ω un dominio (conjunto abierto y conexo) en $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega)$. Llamaremos Laplaciano de u, y lo denotaremos Δu, al operador definido por*

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} D_{ij} u(x) = div(Du(x)), \qquad x \in \Omega.$$

Dicho operador tiene gran importancia en múltiples contextos físicos, tales como la teoría del potencial, la propagación de ondas, la conducción del calor, la electrostática, la mecánica cuántica, etc.

2.2 Definición de armónica, subarmónica y superarmónica

Definicion 2.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $u \in C^2(\Omega)$,*

- *Diremos que u es armónica en Ω si verifica que $\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$.*
- *Diremos que u es subarmónica en Ω si verifica que $\Delta(x)u \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$*
- *Diremos que u es supermarmónica en Ω si verifica que $\Delta u(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$.*

Es decir, el concepto de función armónica, subarmónica y superarmónica depende del signo que tome el Laplaciano de la función en todos los puntos del dominio considerado. A continuación daremos algunos ejemplos básicos de estos tipos de funciones:

Ejemplos de funciones armónicas

- Las funciones constantes son armónicas en todo su dominio de definición.
- $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ es armónica en $\Omega = \mathbb{R}^2$
- $u(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ es armónica en $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Ejemplos de funciones subarmónicas

- $u(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2$ es subarmónica en $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- $u(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2$ es subarmónica en $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$.
- $u(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2^3$ es subarmónica en $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 < 0\}$.

Ejemplos de funciones superarmónicas

- $u(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2^2$ es superarmónica en $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- $u(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2$ es superarmónica en $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}$.
- $u(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2^3$ es superarmónica en $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 > 0\}$.

2.3 Desigualdades del valor medio

En esta sección vamos a demostrar las llamadas desigualdades del valor medio para funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas. Gracias a ellas seremos capaces de probar el principio del máximo-mínimo en la siguiente sección del capítulo.

Teorema 2.1. *Sea $u \in C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u = 0$ $(\geq 0, \leq 0)$ en Ω. Entonces para cualquier bola $B = B_R(y) \subset \Omega$ se tiene que:*

$$u(y) = (\leq, \geq)\frac{1}{n\,\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B} u(x)\,ds_x. \tag{2.1}$$

$$u(y) = (\leq, \geq)\frac{1}{\omega_n R^{n}}\int_{B} u(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Para funciones armónicas, el teorema nos dice que el valor en el centro de la bola B es igual a la integral de los valores medios sobre ∂B y B.

Demostración. Consideremos $\rho \in (0, R)$ y apliquemos el Teorema de la divergencia a Du en la bola $B_\rho = B_\rho(y)$. De tal forma obtenemos que

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\,ds_x = \int_{B_\rho} \Delta u(x)\,dx = (\geq, \leq)\,0$$

A continuación usaremos las coordenadas radiales y angulares $r = |x - y|$, $\omega = \frac{x-y}{r}$. De tal forma, tenemos que $u(x) = u(y + r\omega)$ y, en consecuencia, que

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\,ds &= \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial r}(y+\rho\omega)\,ds = \rho^{n-1}\int_{||\omega||=1} \frac{\partial u}{\partial r}(y+\rho\omega)\,d\omega = \\ &= \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\int_{||\omega=1||} u(y+\rho\omega)\,d\omega = \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho} u(x)\,ds_x\right] = (\geq, \leq)\;0.\end{aligned}$$

Vamos a estudiar las 3 situaciones posibles por separado:

i) $\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho} u(x)\,ds_x\right] = 0$:

Puesto que ρ es distinto de 0 tenemos que $\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho} u(x)\,ds_x\right] = 0$, lo cual equivale a que la función $\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho} u(x)\,ds_x$, es constante respecto de ρ. En consecuencia, es constantemente igual a su valor en, por ejemplo, $\rho = R$, es decir:

$$\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho} u(x)\,ds_x = R^{1-n}\int_{\partial B_R} u(x)\,ds_x, \qquad \forall \rho \in (0, R).$$

ii) $\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x\right]\geq 0$:

Puesto que ρ es distinto de 0 tenemos que $\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x\right]\geq 0$, lo cual equivale a que la función $\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x$, es creciente respecto de ρ. En consecuencia, tenemos que

$$\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x\leq R^{1-n}\int_{\partial B_R}u(x)\,ds_x,\qquad\forall\rho\in(0,R).$$

iii) $\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x\right]\leq 0$:

Puesto que ρ es distinto de 0 tenemos que $\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x\right]\leq 0$, lo cual equivale a que la función $\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x$, es decreciente respecto de ρ. En consecuencia, tenemos que

$$\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x\geq R^{1-n}\int_{\partial B_R}u(x)\,ds_x,\qquad\forall\rho\in(0,R).$$

Todo esta información se puede condensar de la siguiente forma:

$$\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x=(\leq,\geq)R^{1-n}\int_{\partial B_R}u(x)\,ds_x,\qquad\forall\rho\in(0,R).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x=n\omega_n u(y).$$

En consecuencia, a partir lo anterior, tenemos lo siguiente:

$$n\omega_n u(y)=\lim_{\rho\to 0}\rho^{1-n}\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x=(\leq,\geq)R^{1-n}\int_{\partial B_R}u(x)\,ds_x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(y)=(\leq,\geq)\frac{R^{1-n}}{n\omega_n}\int_{\partial B_R}u(x)\,ds_x=\frac{1}{n\,\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B}u(x)\,ds_x,$$

que es justo (2.1).

Vamos ahora a probar la expresión (2.2) haciendo uso de lo que acabamos de demostrar:

$$\int_B u(x)\,dx\;=\int_0^R\left(\int_{\partial B_\rho}u(x)\,ds_x\right)d\rho=(\geq,\leq)\;\int_0^R(u(y)\;n\omega_n\rho^{n-1})d\rho=$$

$$=u(y)\int_0^R(n\omega_n\rho^{n-1})d\rho=u(y)\omega^n R^n.$$

$$\Rightarrow u(y)=(\leq,\geq)\;\frac{1}{\omega^n R^n}\int_B u(x)\;dx.$$

■

2.4 Teorema de Liouville

A continuación vamos a demostrar el conocido como Teorema de Liouville, el cual nos asegura que toda función armónica en $\mathbb{R}^n$ acotada es constante.

Teorema 2.2. *Sea u una función armónica en $\mathbb{R}^n$ tal que $|u(y)| \leq M$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Entonces u es constante.*

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}^n$ y tomemos $R > 0$. Aplicando el Teorema 2.1 tenemos que

$$\begin{aligned} |u(y) - u(0)| &= \frac{1}{\omega_n R^n} \left| \int_{B_R(y)} u(x)\, dx - \int_{B_R(0)} u(x)\, dx \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{\omega_n R^n} \left| \int_{B_R(y)} dx - \int_{B_R(0)} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{\omega_n R^n} \int_{D_R} dx. \end{aligned}$$

donde $D_R = [B_R(y) \cup B_R(0)] - [B_R(y) \cup B_R(0)]$ es la llamada diferencia simétrica de las bolas $B_R(y)$ y $B_R(0)$.

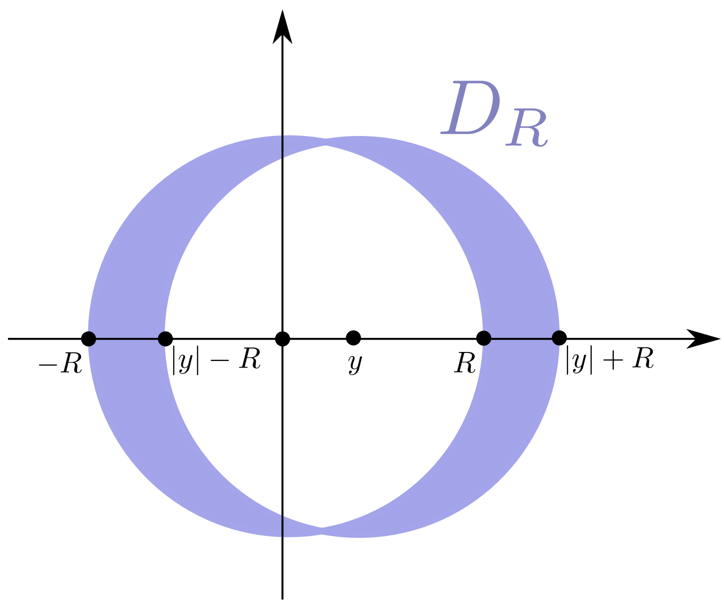

Figura 2.1: Diferencia simétrica de $B_R(y)$ y $B_R(0)$

A continuación, vamos a buscar un conjunto, que llamaremos A_R, cuyo volumen nos acote al de D_R y el cual sepamos calcular. Es decir, buscamos un conjunto A_R tal que

$$\int_{D_R} dx \leq \int_{A_R} dx.$$

Este conjunto va a ser el siguiente:

$$A_R = B_{|y|+R}(0) - B_{R-|y|}(0).$$

La demostración es inmediata, basta ver la siguiente figura comparando D_R con A_R:

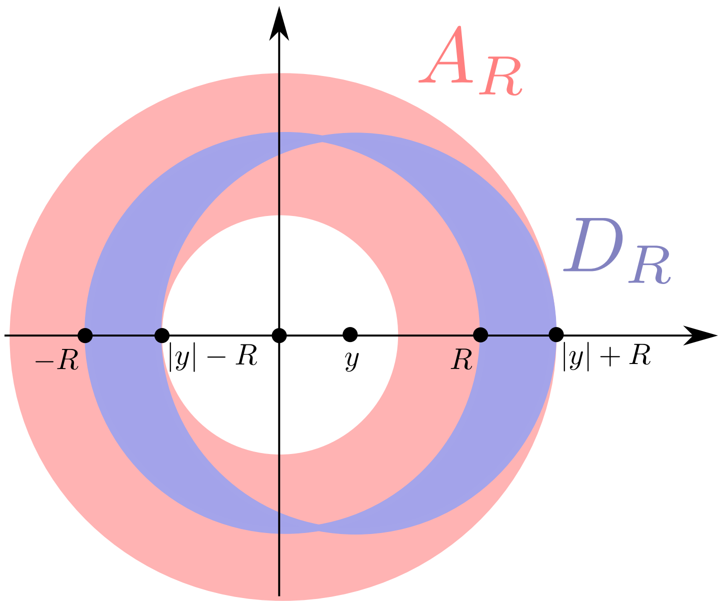

Figura 2.2: Comparación de A_R y D_R.

Luego, si usamos ésto en la acotación anterior, tenemos que

$$|u(y)-u(0)| \leq \frac{M}{\omega_n R^n}\int_{D_R} dx \leq \frac{M}{\omega_n R^n}\int_{A_R} dx = \frac{M}{\omega_n R^n}\left(\int_{B_{|y|+R}(0)} dx - \int_{B_{R-|y|}(0)} dx\right) =$$

$$= \frac{M}{\omega_n R^n}\left(((|y|+R)^n\omega_n - (R-|y|)^n\omega_n\right) = \frac{M\left(((|y|+R)^n - (R-|y|)^n\right)}{R^n}.$$

Por tanto, si hacemos tender R a infinito en la expresión anterior obtenemos que $|u(y)-u(0)| \leq 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia, tenemos $u(x) = u(0), \ \forall y \in \mathbb{R}^n$, es decir, la función u es constante.

■

A continuación, vamos a ver que también son constantes las funciones armónicas y positivas en $\mathbb{R}^n$. Este resultado es conocido como el Teorema de Liouville para funciones armónicas positivas:

Teorema 2.3. *Sea u una función armónica en $\mathbb{R}^n$ tal que $u(y) \geq 0$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Entonces u es constante.*

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}^n$ fijo pero arbitrario y tomemos $R > |x|$. Sean D_R la diferencia simétrica de las bolas $B_R(y)$ y $B_R(0)$ y A_R el conjunto definido en la demostración anterior, es decir:

$$D_R = [B_R(y) \cup B_R(0)] - [B_R(y) \cup B_R(0)],$$

$$A_R = B_{|y|+R}(0) - B_{R-|y|}(0).$$

(Recordemos que vimos que $\int_{D_R} dx \leq \int_{A_R} dx$).

En virtud de la propiedad del valor medio para funciones armónicas, Teorema 2.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
|u(y) - u(0)| &= \frac{1}{\omega_n R^n} \left| \int_{B_R(y)} u(x)\, dx - \int_{B_R(0)} u(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{D_R} u(x)\, dx \leq \\
&\leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{A_R} u(x)\, dx = \frac{1}{\omega_n R^n} \left(\int_{B_{|y|+R}(0)} u(x)\, dx - \int_{B_{R-|y|}(0)} u(x)\, dx \right) = \\
&= \frac{1}{\omega_n R^n} \left(u(0)(|y| + R)^n \omega_n - (R - |y|)^n \omega_n \right) = \\
&= u(0) \frac{((|y| + R)^n - (R - |y|)^n)}{\omega_n R^n}.
\end{aligned}$$

Nótese que si u no fuese positiva estas desigualdades no son necesariamente ciertas.

Por tanto, si hacemos tender R a infinito, obtendremos que $|u(y) - u(0)| \leq 0$, es decir $u(y) = u(0)$. Como y era arbitrario podemos realizar este proceso para todo $y \in \mathbb{R}^n$ y, en consecuencia, tenemos u es constante.

■

Finalmente, mostraremos una versión aún más general del Teorema de Liouville, la cual es conocida como el Teorema de Liouville generalizado:

Teorema 2.4. *Sea u una función armónica en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\liminf_{y\to\infty} \frac{u(y)}{|y|} \geq 0,$$

entonces u es constante en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}^n$ un punto fijo pero arbitrario y $\varepsilon > 0$. Tomemos ahora $R > |y|$ tal que $\dfrac{|u(z)|}{|z|} \geq -\varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $|z| > r - |y|$.

En virtud de la propiedad del valor medio para funciones armónicas, Teorema 2.1, tenemos que

$$u(y) - u(0) = \frac{1}{\omega_n R^n}\left(\int_{B_R(y)} u(x)\, dx - \int_{B_R(0)} u(x)\, dx\right).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las propiedades de los conjuntos D_R y A_R vistas en las demostraciones de esta sección, tenemos que

$$\begin{aligned} |u(y) - u(0)| &\leq \frac{1}{\omega_n R^n}\left|\int_{B_R(y)} u\, dx - \int_{B_R(0)} u\, dx\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{D_R} |u|\, dx \leq \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{A_R} |u|\, dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos la siguiente acotación de u para valores de A_R:

$$|u(z)| \leq 2\varepsilon|z| + u(z) \leq 4\varepsilon r + u(z), \qquad \forall z \in A_R.$$

La primera desigualdad es inmediata si $u(z) \geq 0$ y, en el caso $u(z) < 0$, consecuencia de nuestra elección de R.

Por tanto, si utilizamos esta acotación, obtenemos lo siguiente:

$$|u(y) - u(0)| \leq \frac{1}{\omega_n R^n}\left(\int_{A_R} 4\varepsilon r\, dx + \int_{A_R} u(x)\, dx\right) = (4\varepsilon r + u(0))\frac{((|y| + R)^n - (R - |y|)^n)}{\omega_n R^n}.$$

Si hacemos tender R a infinito obtenemos que $|u(y) - u(0)| \leq 8\varepsilon n|y|$. Finalmente, si tomamos límite cuando ε tiende a 0 obtenemos que $u(y) = u(0)$. Como y es un punto fijo pero arbitrario concluimos que u es constante. ∎

2.5 Desigualdad de Harnack

Otra consecuencia de las desigualdades del valor medio para funciones armónicas es la conocida desigualdad de Harnack.

Teorema 2.5. *Sea u una función no negativa y armónica en Ω. Entonces para todo subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ existe una constante C, que depende únicamente de Ω' y Ω tal que*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u. \tag{2.3}$$

Demostración. Sea $y \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $B_{4R}(y) \subset \Omega$. Entonces, $\forall x_1, x_2 \in B_R(y)$ tenemos, en virtud de la propiedad del valor medio para funciones armónicas, que

$$u(x_1) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_1)} u(x)\, dx$$

$$u(x_2) = \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u(x)\, dx$$

Además, es claro que $B_R(x_1) \subset B_{2R}(y)$ y que $B_{3R}(x_2) \supset B_{2R}(y)$. Por tanto, puesto que u es no negativa, podemos considerar las siguientes desigualdades:

$$u(x_1) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_1)} u(x)\, dx \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, dx. \tag{2.4}$$

$$u(x_2) = \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u(x)\, dx \geq \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, dx. \tag{2.5}$$

Multiplicando (2.5) por 3^n obtenemos

$$3^n u(x_2) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u(x)\, dx \geq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, dx. \tag{2.6}$$

Ahora bien, si observamos las desigualdades (2.4) y (2.6) podemos obtener la siguiente cadena de desigualdades:

$$u(x_1) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_1)} u(x)\, dx \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, dx \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u(x)\, dx = 3^n u(x_2),$$

es decir,

$$u(x_1) \leq 3^n u(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in B_R(y).$$

En particular, si tomamos x_1 y x_2 tales que $u(x_1) = \sup_{B_R(y)} u$ y $u(x_2) = \inf_{B_R(y)} u$ obtenemos la siguiente estimación:

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf_{B_R(y)} u. \tag{2.7}$$

Sea ahora $\Omega' \subset\subset \Omega$ y tomemos $y_1, y_2 \in \bar{\Omega}'$ tales que $u(y_1) = \sup_{\Omega'} u$ y $u(y_2) = \inf_{\Omega'} u$. En tal caso, podemos considerar un arco cerrado $\Gamma \subset \Omega'$ uniendo y_1 e y_2 y escoger R de forma que $4R < dist(\Gamma, \partial\Omega)$. Entonces, en virtud del Teorema de Heine-Borel, podemos recubrir Γ por un número finito de bolas N (que depende únicamente de Ω' y Ω) de radio R.

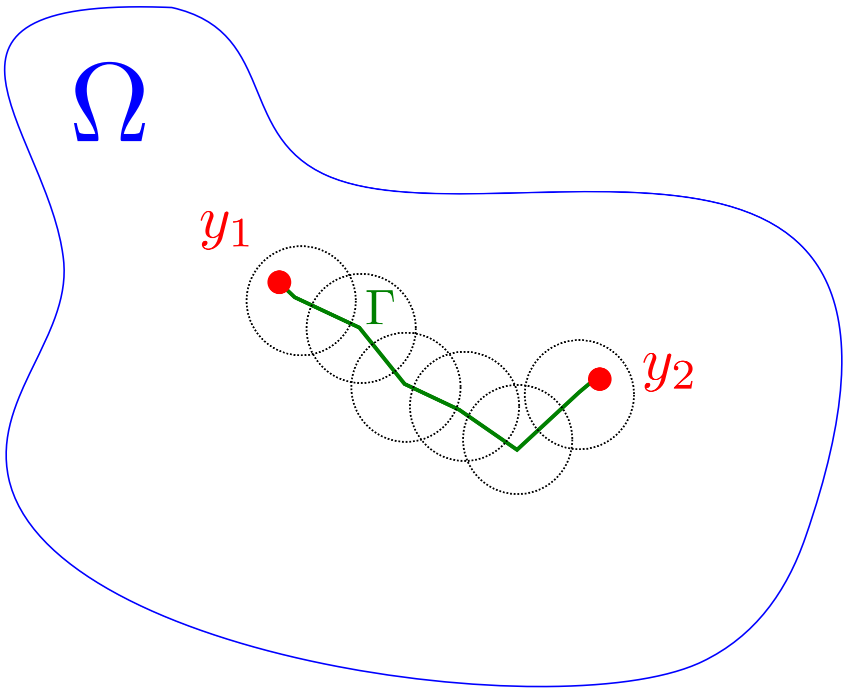

Figura 2.3: Aplicamos la estimación a cada una de las N bolas.

Finalmente, aplicando la estimación (2.7) a cada una de estas N bolas y combinando las desigualdades que se obtienen, obtenemos que

$$\sup_{\Omega'} u = u(y_1) \leq 3^{nN} u(y_2) = 3^{nN} \inf_{\Omega'} u.$$

Por tanto, hemos obtenido que

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u,$$

donde $C = 3^{nN}$ únicamente depende de Ω y Ω', que es justo lo que queríamos demostrar.

■

2.6 Principios del máximo y del mínimo

A continuación vamos a obtener, haciendo uso del Teorema 2.1, los principios fuertes del máximo y del mínimo para funciones subarmónicas y superarmónicas.

Teorema 2.6. *Sea $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) en Ω, y supongamos que existe un punto $y \in \Omega$ tal que $u(y) = \sup_{\Omega} u$ $\left(\inf_{\Omega} u\right)$. Entonces u es constante.*

Demostración. Sea $\Delta u \geq 0$ en Ω y $M = \sup_{\Omega} u$. Definimos el conjunto

$$\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$$

Claramente $\emptyset \neq \Omega_M \subset \Omega$. Por tanto, si demostramos que Ω_M es abierto y cerrado relativo a Ω tendremos que $\Omega_M = \Omega$, es decir, u será constantemente igual a M en todo Ω. Vamos a demostrarlo:

- Ω_M es cerrado relativo a Ω:

  Que Ω_M es cerrado relativo a Ω es inmediato teniendo en cuenta que u es continua.

- Ω_M es abierto relativo a Ω:

  Queremos ver que para todo $z \in \Omega_M$ existe una bola $B_R(z)$ tal que $B_R(z) \subset \Omega_M$. Si aplicamos la desigualdad del valor medio a $u - M$ (que claramente es subarmónica) en una bola $B_R(z) \subset\subset \Omega$ obtenemos que

  $$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_r(z)} (u(x) - M)\, dx \leq 0 \Rightarrow u(x) = M \ \forall x \in B_R(z),$$

  es decir, $B_R(z) \subset \Omega_M$ como queríamos probar.

Por tanto, podemos concluir que u es contante en todo Ω. Para demostrar este resultado para funciones superarmónicas $(\Delta u \leq 0)$ basta tomar la función $-u$ en lugar de u y seguir el mismo razonamiento. ■

Por tanto, una función armónica no puede alcanzar un máximo o un mínimo en su interior a menos que sea constante.

Como consecuencia de los principios fuertes del máximo y del mínimo podemos obtener las siguientes estimaciones globales, la cual son conocidas como los principios débiles del máximo y del mínimo:

Teorema 2.7. *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, con $\Delta u \geq 0 \, (\leq 0)$. Entonces si Ω está acotado se tiene que*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \qquad \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

Demostración. Puesto que u es continua y Ω es un dominio acotado sabemos que tiene supremo e ínfimo. Sabido ésto basta aplicar el teorema anterior. ∎

En consecuencia, toda función armónica $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}_0)$, con Ω dominio acotado, verifica lo siguiente:

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Nótese que la condición de que Ω esté acotado es imprescindible. Para ello veremos un ejemplo de una función armónica en un dominio Ω no acotado que no se satisface el principio débil del máximo:

Ejemplo:

Consideremos la función $u(x, y) = e^y cos(x)$ en el dominio

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), y \in (-\infty, +\infty) \right\},$$

el cual claramente no está acotado.

Es trivial que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Veamos que u es armónica en Ω:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = e^y cos(x) - e^y cos(x) = 0.$$

Por tanto, si el teorema anterior fuese cierto para dominios no acotados tendríamos que $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$.

Veamos que no es cierto:

$$\partial\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}, y \in (-\infty, +\infty) \right\},$$

es decir, los puntos de $\partial\Omega$ son de la forma $\left(\pm\frac{\pi}{2}, y\right)$, con $y \in (-\infty, +\infty)$.

Ahora bien,

$$u\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0, \qquad \forall y \in (-\infty, +\infty),$$

es decir, $u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$.

Por otro lado, tenemos que $u(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$, de hecho tenemos que

$$\lim_{y\to+\infty} u(0, y) = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty.$$

En consecuencia, hemos obtenido que

$$\sup_{\Omega} u = +\infty \neq 0 = \sup_{\partial\Omega} u,$$

y, por tanto, que el teorema anterior no es cierto, en general, para dominios no acotados.

Finalmente, concluiremos la sección con un resultado que, como veremos más adelante, nos asegurará la unicidad de solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en dominios acotados.

Teorema 2.8. *Sean $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, con Ω acotado, tales que $\Delta u = \Delta v$ y $u = v$ en $\partial\Omega$. Entonces $u = v$ en todo Ω .*

Demostración. Definimos $w = v - u$. Dicha función verifica que

$$\begin{aligned} \Delta w(x) &= 0 \qquad \text{en } x \in \Omega \\ w(x) &= 0 \qquad \text{en } x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

En consecuencia, en virtud del teorema anterior,

$$0 = \inf_{\partial\Omega} u \leq w(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Rightarrow w(x) = v(x) - u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Rightarrow u(x) = v(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

tal y como queríamos demostrar. ■

Capítulo 3

El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace

3.1 La ecuación de Laplace

En primer lugar, vamos a buscar soluciones de la ecuación

$$\Delta u = 0, \tag{3.1}$$

comúnmente conocida como la ecuación de Laplace. En particular, vamos a centrarnos en las de tipo radial, es decir, aquellas de la forma $u = v(r)$, donde $r = |x - y|$ e $y \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijado.

Aplicando convenientemente la regla de la cadena en (3.1) obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0, .$$

Para resolverla utilizaremos el cambio de variable $w(r) = v'(r)$, obteniendo la EDO de primer orden

$$w'(r) + \frac{n-1}{r} w(r) = 0.$$

La resolveremos por el método de variables separadas:

$$\frac{w'(r)}{w(r)} = \frac{1-n}{n} \Rightarrow \ln w(r) = \int \frac{1-n}{r}\, dr = \ln(r^{(1-n)}) + K \qquad (K \text{ constante})$$

$$\Rightarrow w(r) = e^K r^{(1-n)} = C r^{(1-n)} \qquad (C \text{ constante}).$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable, tenemos que

$$v(r) = \int Cr^{1-n}\,dr = \begin{cases} \dfrac{C}{2-n} r^{2-n} & \text{si } n > 2 \\ C \log r & \text{si } n = 2, \end{cases} \qquad (C \text{ constante}).$$

Por tanto, las soluciones radiales de la ecuación de Laplace (3.1) son de la forma

$$u(x-y) = u(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{C}{2-n} |x-y|^{2-n} & \text{si } n > 2 \\ C \log |x-y| & \text{si } n = 2, \end{cases} \qquad (C \text{ constante}) \tag{3.2}$$

Nótese que cualquier función constante también es solución de la ecuación de Laplace.

Definicion 3.1. *Llamaremos solución fundamental de la ecuación de Laplace en un dominio Ω a la función definida como*

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n} |x-y|^{2-n}, & si \ \ n > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log |x-y|, & si \ \ n = 2, \end{cases}$$

donde $y \in \Omega$ es un punto fijado.

Nótese que la solución fundamental que acabamos de definir es la solución radial general de la ecuación de Laplace, definida en (3.2), tomando como constante $C = \dfrac{1}{n\omega_n}$.

Se puede comprobar fácilmente que esta función Γ que acabamos de definir es armónica en Ω para todo $x \neq y$, para ello basta utilizar que

$$\begin{aligned} D_i\Gamma(x-y) &= \frac{1}{n\omega_n}(x_i - y_i)|x-y|^{-n}. \\ D_{ij}\Gamma(x-y) &= \frac{1}{n\omega_n}\left\{|x-y|^2\delta_{ij} - n(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right\}|x-y|^{-n-2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La forma de comprobarlo es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\Delta\Gamma(x-y) &= \sum_{k=1}^{n} D_{kk}\Gamma(x-y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\omega_n}\left\{|x-y|^2\delta_{kk} - n(x_k-y_k)(x_k-y_k)\right\}|x-y|^{-n-2} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\omega_n}\left\{|x-y|^2 - n(x_k-y_k)^2\right\}|x-y|^{-n-2} = \\
&= \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n-2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left\{|x-y|^2 - n(x_k-y_k)^2\right\}\right) = \\
&= \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n-2}\left(n|x-y|^2 - n\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right) = \\
&= \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n-2}\left(n|x-y|^2 - n|x-y|^2\right) = 0, \qquad \forall x \neq y.
\end{aligned}$$

Vamos ahora a aplicar la segunda identidad de Green a Γ. Para ello supondremos, en primer lugar, que Ω verifica las condiciones del Teorema de la Divergencia. Sin embargo, como consecuencia de la singularidad en y, no podemos aplicar directamente la segunda identidad de Green a Γ.

Para sortear esta dificultad remplazaremos Ω por $\Omega - \bar{B}_\rho$, donde $B_\rho = B_\rho(y)$ para un ρ lo suficientemente pequeño. Por tanto, aplicando la segunda identidad de Green para Γ en $\Omega - \bar{B}_\rho$ a una función $u \in C^2(\bar{\Omega})$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega - B_\rho} \Gamma(x-y)\,\Delta u(x)\,dx &= \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu} - u(x)\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial\nu}\right)ds_x \\
&+ \int_{\partial B_\rho}\left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu} - u(x)\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial\nu}\right)ds_x
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Veamos que ocurre con algunos de los términos cuando hacemos tender ρ a cero:

$$\int_{\partial B_\rho} \Gamma(x-y)\,\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\,ds_x = \Gamma(\rho)\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds_x \leq n\omega_n\rho^{n-1}\sup_{B_\rho}|Du| \xrightarrow{\rho\to 0} 0.$$

$$\int_{\partial B_\rho} u(x)\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial\nu}\,ds_x = -\Gamma'(\rho)\int_{\partial B_\rho} u(x)\,ds_x = \frac{-1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho} u(x)\,ds_x \xrightarrow{\rho\to 0} -u(y).$$

En consecuencia, si hacemos tender ρ a 0 en (3.4) obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u(y) = &\int_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds_x \\ &+ \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u(x)\, dx, \quad y \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nótese que, en caso de ser u armónica ($\Delta u = 0$), podemos reescribir (3.5) como

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds_x, \qquad y \in \Omega.$$

Puesto que el integrando de la expresión anterior es infinitamente derivable y analítico con respecto a y, tenemos que la función armónica u es también analítica en Ω. Por tanto, las funciones armónicas son analíticas en su dominio de definión y, en consecuencia, están determinadas de forma única por sus valores en cualquier subconjunto abierto como consecuencia del Teorema de la Identidad para funciones analíticas.

Por otro lado, si u es de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ la ecuación (3.5) se transforma en

$$u(y) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\, \Delta u(x)\, dx.$$

Para toda función f integrable llamaremos potencial Newtoniano de f a

$$\int_{\Omega} \Gamma(x-y)\, f(x)\, dx.$$

Estas funciones las trataremos con más detalle en el Capítulo 4.

Supongamos ahora $h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ armónica en Ω. Entonces, haciendo uso de la segunda identidad de Green, tenemos que

$$-\int_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial h(x)}{\partial \nu} - h(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds_x = \int_{\Omega} h(x)\, \Delta u(x)\, dx. \tag{3.6}$$

Si consideramos $G = \Gamma + h$ y sumamos (3.5) y (3.6) obtenemos una versión más general de la fórmula de representación de Green:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} - G(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds_x + \int_{\Omega} G(x,y)\, \Delta u(x)\, dx.$$

Además, si $G = 0$ en $\partial\Omega$ obtenemos que

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\, ds_x + \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(x)\, dx, \tag{3.7}$$

donde la función $G = G(x, y)$ es llamada la función de Green (para el problema de Dirichlet) en el dominio Ω.

Además, por el Teorema 2.8 tenemos que dicha función es única y, como consecuencia de la última expresión obtenida, su existencia implica una representación de las funciones armónicas de clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ en términos de sus valores en la frontera.

Desgraciadamente no es posible, en general, construir la función de Green de forma explícita. Una de las excepciones es cuando el dominio Ω es una bola. En tal caso, la función de Green puede determinarse explícitamente haciendo uso del llamado método de las imágenes:

Consideremos $B_R = B_R(0)$ y, para $x \in B_R, x \neq 0$, sea

$$\bar{x} = \frac{R^2}{|x|^2}\, x$$

el punto inverso de x respecto de B_R (si $x = 0$ consideraremos $\bar{x} = \infty$). En tal caso, se puede comprobar que la función de Green en el dominio B_R viene dada por

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\dfrac{|y|}{R}|x-\bar{y}|\right), & y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R), & y = 0 \end{cases} =$$

$$= \Gamma\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2x\cdot y}\right) - \Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|x|\,|y|}{R}\right)^2 + R^2 - 2x\cdot y}\right) \; \forall x, y \in B_R, x \neq y. \tag{3.8}$$

Esta función G tiene las siguiente propiedades:

$$G(x,y) = G(y,x), \qquad G(x,y) \leq 0 \qquad \forall x, y \in \bar{B}_R.$$

Además, la derivada de G respecto del normal en $x \in \partial B_R$ viene dada por

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} = \frac{\partial G(x,y)}{\partial |x|} = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R}|x-y|^{-n} \geq 0.$$

En consecuencia, si $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\bar{B}_R)$ es armónica y sustituimos la expresión anterior en (3.7), obtenemos la denominada fórmula de la Integral de Poisson:

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(x)}{|x-y|^n}\, ds_x. \tag{3.9}$$

3.2 El problema clásico de Dirichlet

Vamos ahora a estudiar la existencia de soluciones del conocido problema clásico de Dirichlet para la ecuación de Laplace, es decir, del problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Gracias a lo visto en la sección anterior estamos en condiciones de probar un resultado que nos asegura la existencia de soluciones del problema clásico de Dirichlet en cualquier bola.

Teorema 3.1. *Sea $B = B_R(0)$ y φ una función continua en ∂B. Entonces la función u definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \displaystyle\int_{\partial B_R} \dfrac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, ds_y & x \in B \\ \varphi(x) & x \in \partial B \end{cases} \tag{3.11}$$

es de clase $C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ y armónica en B.

Demostración. La función u definida en (3.11) es armónica y de clase C^2 en B por serlo G (definida en 3.8) y, en consecuencia, $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}$. Para ver que u es continua en ∂B vamos a usar la fórmula de la Intergal de Poisson (3.9) en el caso particular $u = 1$. De esta forma obtenemos la siguiente identidad:

$$\int_{\partial B} K(x,y)\, ds_y = 1 \qquad \forall\, x \in B.$$

donde K es el llamado Núcleo de Poisson:

$$K(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R|x-y|^n} : \quad x \in B, \quad y \in \partial B. \tag{3.12}$$

Tomemos ahora $x_0 \in \partial B$ arbitrario. Puesto que φ es continua sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. Además, existe

$M > 0$ tal que $|\varphi| \leq M$ en ∂B. Entonces, si $|x - x_0| < \dfrac{\delta}{2}$, tenemos que:

$$|u(x) - u(x_0)| = \left| \int_{\partial B} K(x,y)\,(\varphi(y) - \varphi(x_0))\; ds_y \right| \leq \int_{\partial B} K(x,y)\,|\varphi(y) - \varphi(x_0)|\; ds_y \tag{3.13}$$

Consideremos ahora los conjuntos

$$B_1 = \{y \in \partial B : |y - x_0| \leq \delta\}, \quad B_2 = \{y \in \partial B : |y - x_0| > \delta\}.$$

Entonces,

$$(3.13) = \int_{B1} K(x,y)\,|\varphi(y) - \varphi(x_0)|\; ds_y + \int_{B2} K(x,y)\,|\varphi(y) - \varphi(x_0)|\; ds_y. \tag{3.14}$$

Para continuar debemos tener en cuenta lo siguiente:

- $|y - x_0| < \frac{\delta}{2}$ en B_1, luego $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ en B_1.
- Aplicando desigualdad triangular y teniendo en cuenta que $|\varphi| \leq M$ en ∂B, tenemos que $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| \leq |\varphi(y)| + |\varphi(x)| \leq M + M = 2M$ en B_2.
- Puesto que $K(x,y) \geq 0$, $\int_{B_1} K(x,y)\; ds_y \leq \int_{\partial B} K(x,y)\; ds_y = 1$.

Luego,

$$(3.14) \leq \varepsilon \cdot 1 + 2M \int_{B_2} K(x,y)\, ds_y = \varepsilon + 2M \int_{B_2} \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R|x-y|^n}\, ds_y|| \leq$$

$$\leq \varepsilon + 2M \int_{B_2} \frac{R^2 - |x|^2}{R|x-y|^n}\, ds_y \leq \varepsilon + 2MR^{n-1}\frac{R^2 - |x|^2}{R\,(\delta/2)^n} = \varepsilon + \frac{2MR^{n-1}(R^2 - |x|^2)}{(\delta/2)^n} \tag{3.15}$$

Juntando todas las desigualdades tenemos que

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \varepsilon + \frac{2MR^{n-1}(R^2 - |x|^2)}{(\delta/2)^n}$$

Luego, si tomamos $|x - x_0|$ suficientemente pequeño tendremos que $|u(x) - u(x_0)| < 2\varepsilon$ y, en consecuencia, u será continua en x_0. Como x_0 es arbitrario tenemos $u \in C^0(\partial B)$ que, junto al hecho de que $u \in C^2(B)$, implica que $u \in C^0(\bar{B})$, que era lo que nos faltaba por probar. ■

Seguiremos estudiando la existencia de soluciones en dominios acotados arbitrarios en la Sección 3.5.

3.3 Teoremas de convergencia

Hasta el momento sabemos que toda función armónica verifica la propiedad del valor medio. ¿Es cierto el recíproco? Es decir, ¿las funciones armónicas están caracterizadas por su propiedad del valor medio? El siguiente resultado nos da una respuesta positiva a dicha cuestión:

Teorema 3.2. *Una función $u \in C^0(\Omega)$ es armónica si y sólo si para toda bola $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ satisface la propiedad del valor medio*

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u(x)\, ds_x.$$

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ya probado (véase Teorema 2.1).

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que u satisface la propiedad del valor medio. Por el Teorema 3.1 sabemos que para toda bola $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ existe una función armónica h de clase $C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ tal que $h = u$ en ∂B. En consecuencia, la función $w := u - h$ verificará la propiedad del valor medio en cualquier bola de B. Por tanto, tendremos que w satisface el principio del máximo y todos los resultados de unicidad vistos (nótese que la única propiedad de las funciones armónicas que se utiliza en las demostraciones es la del valor medio) y, en consecuencia, $w = 0$ en B, lo cual implica que u es armónica en Ω.

■

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *El límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones armónicas es una función armónica.*

En consecuencia, si tenemos una sucesión de funciones armónicas $\{u_n\}$ en un dominio Ω con valores en la frontera $\{\varphi_n\}$ que convergen en $\partial\Omega$ a una función φ, entonces $\{u_n\}$ converge uniformemente (por el principio del máximo) a una función armónica cuyos valores en la frontera coinciden con los de φ en $\partial\Omega$.

Además, usando este último teorema y la desigualdad de Harnack (2.3), obtendremos el llamado Teorema de la Convergencia de Harnack:

Teorema 3.4. *Sea $\{u_n\}$ una sucesión monótonamente creciente de funciones armónicas en un dominio Ω y supongamos que para algún punto $y \in \Omega$ la sucesión $\{u_n(y)\}$ está acotada. Entonces la sucesión converge uniformemente en cualquier subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ a una función armónica.*

Demostración. Toda sucesión monótona y acotada es convergente, por tanto $\{u_n(y)\}$ convergerá, es decir, para todo ε existe un número $N = N_\varepsilon$ tal que

$$0 \leq u_m(y) - u_n(y) < \varepsilon \quad \forall m \geq n > N.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

- $\sup_{\Omega'} |u_m(x) - u_n(x)| \leq \sup_{\Omega} |u_m(x) - u_n(x)| \qquad \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega.$
- $\inf_{\Omega} |u_m(x) - u_n(x)| \leq |u_m(y) - u_n(y)| < \varepsilon.$
- $\sup_{\Omega} |u_m(x) - u_n(x)| \leq C \inf_{\Omega} |u_m(x) - u_n(x)|$ (Desigualdad de Harnack).

obtenemos que

$$\sup_{\Omega'} |u_m(x) - u_n(x)| < C\varepsilon,$$

donde C es una constante que depende únicamente de Ω y Ω'. Por tanto, $\{u_n\}$ converge uniformemente en cualquier subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ y, en virtud del teorema anterior, la función límite es armónica.

■

3.4 Estimaciones interiores de las derivadas

El primer objetivo de la sección es obtener estimaciones de la derivada en el interior del dominio de funciones armónicas haciendo uso de sus propiedades del valor medio.

Sea u una función armónica en Ω y $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$. Como el gradiente de u, Du, es también una función armónica podemos considerar también su propiedad del valor medio:

$$Du(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B Du(x)\, dx.$$

Usando ahora el Teorema de la divergencia obtenemos que

$$Du(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B Du(x)\, dx = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B} u(x)\nu \, ds_x$$

y, en consecuencia, obtenemos la siguiente acotación

$$|Du(y)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B} |u|.$$

Como ésto se verifica para cada bola B, esto implica que

$$|Du(y)| \leq \frac{n}{d_y} \sup_{\Omega} |u|, \tag{3.16}$$

donde $d_y = dist(y, \partial\Omega)$.

Aplicando sucesivamente esta estimación en bolas anidadas igualmente espaciadas obtenemos una estimación para las derivadas de mayor orden:

Teorema 3.5. *Sea u una función armónica en Ω y sea Ω' cualquier subconjunto compacto de Ω. Entonces para cualquier multiíndice α tenemos que*

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|$$

donde $d = dist(\Omega', \partial\Omega)$.

Nótese que esta última acotación implica la equicontinuidad en subdominios acotadas de las derivadas de cualquier conjunto acotado de funciones armónicas. Por tanto, aplicando el Teorema de Ascoli-Arzela, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.6. *Todo sucesión acotada de funciones armónicas en un dominio Ω contiene una subsucesión que converge uniformemente en subdominios compactos de Ω a una función armónica.*

3.5 Método de Perron

Ya hemos obtenido ciertos resultados referentes a la existencia de soluciones del problema clásico de Dirichlet en bolas. El objetivo ahora es tratar de obtener resultados referentes a la existencia de soluciones para dominios acotados arbitrarios. Para alcanzar dicho fin vamos a usar el llamado método de Perron para funciones subarmónicas, el cual está íntimamente relacionado con el principio del máximo y con la existencia de soluciones del problema de Dirichlet en bolas.

En primer lugar vamos a generalizar el concepto de función subarmónica y superarmónica (hasta el momento imponíamos que tenián que ser de clase C^2 en Ω).

Definicion 3.2. *Diremos que una función $u \in C^0(\Omega)$ es subarmónica en Ω si para toda bola $B \subset\subset \Omega$ y para toda función armónica h en B tal que $u \leq h$ en ∂B se verifica también que $u \leq h$ en B.*

Definicion 3.3. *Diremos que una función $u \in C^0(\Omega)$ es superarmónica en Ω si para toda bola $B \subset\subset \Omega$ y para toda función armónica h en B tal que $u \geq h$ en ∂B se verifica también que $u \geq h$ en B.*

Veamos ahora algunas propiedades de las funciones subarmónicas de clase $C^0(\Omega)$ que acabamos de definir:

i) Si u es subarmónica en un dominio Ω satisface el principio fuerte del máximo. Si v es superarmónica en un dominio acotado Ω con $v \geq u$ en $\partial\Omega$, entonces o bien $v > u$ en Ω o bien $v \equiv u$.

ii) Sea u una función subarmónica en Ω y B una bola contenida estrictamente en Ω. Llamemos $\bar{u}$ a la función armónica en B (dada por la integral de Poisson de y en ∂B) verificando que $\bar{u} = u$ en B. Si definimos en Ω la función *lifting armónico* de u en B como

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x), & x \in B \\ u(x), & x \in \Omega - B \end{cases}$$

entonces U también es subarmónica en Ω.

iii) Sean $u_1, u_2, \ldots, u_N$ funciones subarmónicas en Ω. Entonces la función

$$u(x) = \text{máx}\,\{u_1(x), ..., u_N(x)\}$$

es también subarmónica.

Las correspondientes propiedades para funciones superarmónicas son análogas a las anteriores.

Sea ahora Ω un dominio acotado y sea φ una función acotada en $\partial\Omega$. Una función subarmónica $u \in C^0(\bar{\Omega})$ es llamada subfunción relativa a φ si satisface que $u \leq \varphi$ en $\partial\Omega$. Análogamente, una función $u \in C^0(\bar{\Omega})$ superarmónica es llamada superfunción relativa a φ si verifica que $u \geq \varphi$ en $\partial\Omega$. Por el principio del máximo toda subfunción es menor o igual que cualquier superfunción. En particular, las funciones menores o iguales que $\text{ínf}_{\partial\Omega}\,\varphi$ (mayores o iguales que $\sup_{\partial\Omega}\varphi$) son subfunciones (superfunciones). Denotaremos S_φ al conjunto de subfunciones relativas a φ. El siguiente teorema contiene el resultado básico fundamental del método de Perron:

Teorema 3.7. *La función* $u(x) = \sup\limits_{v \in S_\varphi} v(x)$ *es armónica en* Ω*.*

Demostración. Por el principio del máximo tenemos que cualquier función $v \in S_\varphi$ verifica que $v \leq \sup\varphi$ en todo Ω, luego u está bien definida. Sea $y \in \Omega$ un punto fijo pero arbitrario. Por definición de u existe una sucesión $\{v_n\} \subset S_\varphi$ tal que $v_n(y) \to u(y)$. Reemplazando v_n por $\text{máx}(v_n, \text{ínf}\,\varphi)$ podemos suponer que la sucesión$\{v_n\}$ está acotada. Escojamos ahora R tal que $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ y definamos el *lifting armónico* de v_n en B como

$$V_n(x) = \begin{cases} \bar{v_n}, & x \in B \\ v_n(x), & x \in \Omega - B \end{cases}$$

Como ya sabemos, V_n es subarmónica y, además $V_n(y) \to u(y)$. Además, como consecuencia del Teorema (3.6), la sucesión $\{V_n\}$ contiene una subsucesión $\{V_{n_k}\}$ que converge uniformemente en cualquier bola $B_\rho(y)$, con $\rho < R$, a una función v armónica en B. Claramente $v \leq u$ en B y $v(y) = u(y)$. Veamos que, de hecho, $v = u$ en toda la bola B; razonaremos por contracción. Supongamos que existe $z \in B$ tal que $v(z) < u(z)$. En tal caso, existiría una función $\bar{u} \in S_\varphi$ tal que $v(z) < \bar{u}(z)$. Definiendo $w_k = \text{máx}\,(\bar{u}, V_{n_k})$ y su correspondiente *lifting armónico* W_k obtendríamos, de forma análoga a la vista con V_n, una subsucesión suya que convergería a una función armónica w, verificando que $v \leq w \leq u$ en B y tal que $v(y) = w(y) = u(y)$. Sin embargo, como consecuencia del principio del máximo, tendríamos que $v = w$ en B, lo cual contradice la definición de $\bar{u}$. Por tanto, como habíamos adelantado, $v = u$ en todo $B = B_\rho(y)$. Como y era arbitrario tenemos que, u es armónica en todo Ω. ■

Este resultado nos muestra una función (llamada solución de Perron) que, como veremos más adelante, es la candidata a solución del problema clásico de Dirichlet: $\Delta u = 0, u = \varphi$ en $\partial\Omega$. Es más, si el problema de Dirichlet admite solución, entonces será idéntica a la solución de Perron. Para ello basta tener en cuenta que, si w es solución del problema, entonces claramente $w \in S_\varphi$ y además, como consecuencia del principio del máximo, $w \geq u \,\forall\, u \in S_\varphi$.

En el método de Perron el estudio del comportamiento en la frontera de la solución está esencialmente separado del de la existencia de solución para el problema. La suposición de continuidad de los valores de la frontera está conectada con las propiedades geométricas de la frontera a través del concepto de función barrera, el cual procedemos a definir a continuación.

Definicion 3.4. *Sea ξ un punto de $\partial\Omega$, diremos que una función $w = w_\xi \in C^0(\bar{\Omega})$ es la función barrera de ξ relativa a Ω si verifica las siguiente propiedades:*

i) w *es superarmónica en* Ω.

ii) $w > 0$ *en* $\bar{\Omega} - \{\xi\}$, $w(\xi) = 0$.

Un aspecto importante del concepto de barrera es que es una propiedad local de la frontera $\partial\Omega$. Es por ello que podemos definir el concepto de barrera local en $\xi \in \partial\Omega$:

Definicion 3.5. *Decimos que una función w es una función barrera local en $\xi \in \partial\Omega$ si existe un entorno N de ξ tal que w verifica la definición anterior en $\Omega \cap N$.*

En consecuencia, dada una función barrera $w = w_\xi$, se puede definir una función barrera local en ξ relativa a Ω como sigue

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} \min(m, w(x)), & x \in \bar{\Omega} \cap B \\ m, & x \in \bar{\Omega} - B \end{cases}$$

donde B es una bola tal que $\xi \in B \subset\subset N$ y $m = \inf\limits_{N-B} w > 0$.

Veamos que, efectivamente, $\bar{w}$ es una función barrera de ξ relativa a Ω, es decir, veamos que $\bar{w} \in C^0(\bar{\Omega})$ y que se verifican las dos propiedades de la definición:

Claramente $\bar{w}$ es continua en Ω y, como consecuencia de la tercera propiedad de funciones subarmónicas, es superarmónica en Ω. Comprobar la segunda propiedad de función barrera es inmediata.

La siguiente definición nos va a relacionar las propiedades geométricas de los puntos de la frontera con la existencia de función barrera en dichos puntos.

Definicion 3.6. *Diremos que un punto de la frontera, ξ, es Laplaciano-regular si existe una función barrera en dicho punto.*

En los siguiente resultados veremos la conexión existente entre el comportamiento de las soluciones en la frontera y la existencia de función barrera.

Lema 3.1. *Sea u la función armónica definida en Ω por el método de Perron. Si ξ es un punto de la frontera de Ω Laplaciano-regular y φ es una función continua en ξ, entonces se tiene que*

$$\lim_{x \to \xi} u(x) = \varphi(\xi).$$

Demostración. Como consecuencia de la continuidad de φ tenemos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|x - \xi| < \delta$ y $x \in \partial\Omega$, entonces $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$. Sea $M = \sup_{\partial\Omega} |\varphi|$. Puesto que ξ es regular podemos considerar una función frontera, w, y obtener un $K = K(\varepsilon) > 0$ tal que $Kw(x) \geq 2M$ si $|x - \xi| \geq \delta$.

Paso 1: Veamos que $\varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x)$ es una superfunción relativa a φ:

Recordemos que, puesto que w es función barrera de ξ , $w \in C(\bar{\Omega})$, w superarmónica en Ω, $w > 0$ en $\bar{\Omega} - \{\xi\}$ y $w(\xi) = 0$. En consecuencia, tenemos que

$$\varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x) \geq \varphi(x) + \varepsilon + 2M \geq \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega : |x - \xi| \geq \delta.$$

Además,

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \partial\Omega : |x - \xi| < \delta.$$

Por tanto, tenemos que

$$\varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x) \geq \varphi(x),$$

es decir, $\varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x)$ es una superfunción relativa a φ.

Paso 2: Veamos que $\varphi(\xi) - \varepsilon - Kw(x) \leq u(x)$:

Claramente $\varphi(\xi) - \varepsilon - Kw(x)$ es claramente una subfunción relativa a φ. Puesto que $u(x)$ es el supremo de todas las subfunciones de φ tenemos que

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - Kw(x) \leq u(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Paso 3: Usamos los pasos anteriores y concluimos:

Puesto que toda subfunción de una función φ está mayorada por cualquier superfunción de φ y $\varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x)$ es una superfunción relativa a φ (véase paso 1) tenemos que

$$v(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x) \quad \forall v \in S_\varphi.$$

En particular, esto es cierto para $u(x) = \sup\limits_{v \in S_\varphi} v(x)$:

$$u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x).$$

Por tanto, tenemos que

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + Kw(x).$$

Finalmente, haciendo tender x a ξ, usando que $w(\xi) = 0$, concluimos que

$$\lim_{x \to \xi} u(x) = \varphi(\xi).$$

■

Finalmente, vamos a probar el resultado fundamental de nuestro capítulo, el cual nos caracterizará los dominios acotados en los que existe solución al problema clásico de Dirichlet:

Teorema 3.8. *El problema clásico de Dirichlet en dominios acotados tiene solución para condiciones de contorno continuas si y sólo si todos los puntos de la frontera son Laplaciano-regulares.*

Demostración.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si las condiciones de contorno son continuas y todos los puntos de la frontera $\partial\Omega$ son Laplaciano-regulares entonces, en virtud del lema anterior, la función u que nos proporciona el método de Perron es solución del problema de Dirichlet.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que el problema de Dirichlet tiene solución para cualesquiera condiciones de contorno continuas. Sea $\xi \in \partial\Omega$. En tal caso, la función $\varphi(x) = |x - \xi|$ es continua en $\partial\Omega$ y, claramente, la función armónica que resuelve el problema de Dirichlet en Ω con valores en la frontera φ es una barrera en ξ. Por tanto, todos los puntos de la frontera $\xi \in \partial\Omega$ son Laplaciano-regulares.

■

Tras conocer este resultado es lógico que el lector se plantee la siguiente pregunta: ¿Qué dominios acotados tienen todos los puntos de su frontera Laplaciano-regulares? Daremos respuesta a esta pregunta en la siguiente sección.

3.6 Dominios con frontera Laplaciano-regular

Para terminar el capítulo vamos a estudiar algunas condiciones que nos aseguren que nuestro dominio tienen frontera regular y, en consecuencia, que el problema clásico de Dirichlet para la ecuación de Laplace en dicho dominio tenga solución.

Definicion 3.7. *Decimos que un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisface la condición de la esfera exterior en $\xi \in \partial\Omega$ si existe una bola $B = B_R(y)$ tal que $\bar{B} \cap \bar{\Omega} = \xi$.*

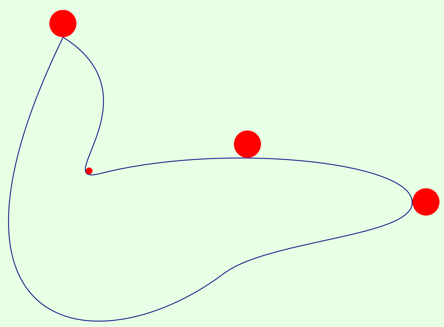

Figura 3.1: Condición de la esfera exterior.

Proposición 3.1. *Si Ω satisface la condición de la esfera exterior en ξ, entonces $\partial\Omega$ es Laplaciano-regular en ξ.*

Demostración. Sea $\xi \in \partial\Omega$, y consideremos la función

$$w(x) := \begin{cases} log\frac{|x-y|}{R} & n = 2 \\ R^{2-n} - |x-y|^{2-n} & n \geq 3. \end{cases}$$

Esta función verifica lo siguiente:

- w es armónica en Ω y, por ende, superarmónica.
- $w(\xi) = 0$.
- $w(x) > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega} - \{\xi\}$.

Por tanto, w es una función barrera de ξ en Ω y, en consecuencia, ξ es un punto regular.

∎

Ahora bien, ¿hay algún tipo de dominios que siempre verifiquen la condición de la esfera exterior? La respuesta es afirmativa, un ejemplo de dicho dominios son aquellos que tienen frontera de clase C^2.

Definicion 3.8. *Decimos que una superficie Ω es de clase C^k, k entero positivo, en su frontera si para todo $\xi \in \partial\Omega$ existe un entorno E de ξ y una función $f \in C^k(E, \mathbb{R})$ tales que*

- $\Omega \cap E = \{x \in E : f(x) < 0\}$.
- $\partial\Omega \cap E = \{x \in E : f(x) = 0\}$.
- $Df(\xi) \neq 0, \ \forall \xi \in \partial\Omega \cap E$.

Proposición 3.2. *Si Ω tiene frontera de clase C^2, entonces ξ satisface la propiedad de la esfera exterior $\forall \xi \in \partial\Omega$.*

Demostración. Dado $\xi \in \partial\Omega$ escogemos un sistema ortogonal $x_1, ..., x_n$ para $\mathbb{R}^n$ de forma que ξ se encuentre en el punto $(0, 0, ..., 0)$ y que el hiperplano tangente a $\partial\Omega$ en este punto sea el hiperplano $x_n = 0$, con vector normal $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$.

Como la frontera de Ω es de clase C^2 podemos tomar, en virtud del Teorema de la función Implícita, un entorno del origen de nuestras coordenadas, $\Omega \cap B_\varepsilon(0)$, en el que nuestro dominio Ω esté definido como

$$\Omega \cap B_\varepsilon(0) = \{(x_1, ..., x_n) : x_n < f(x_1, ..., x_n)\},$$

donde $f : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de C^2 tal que $f(0, ..., 0) = 0$ y $Df(0, ..., 0) = 0$.

Además, por el Teorema de Taylor, tenemos que existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M(x_1^2 + ... + x_{n-1}^2)$$

en un entorno del origen de nuestro nuevo sistema de coordenadas.

Sea ahora $y = Re_n$, $R > 0$ (claramente $y \in \mathbb{R}^n - \Omega$). Vamos a demostrar que existe $R > 0$ suficientemente pequeño tal que $B_R(y) \subset \mathbb{R}^n - \bar{\Omega}$ y $\bar{B}_R(y) \cap \bar{\Omega} = \{0\}$.

Si tomamos $x \in \bar{B}_R(y)$, $x \neq 0$, tenemos que

$$|x-y|^2 = |x|^2 - 2Rx_n + R^2 \leq R^2$$

y, en consecuencia, que $|x|^2 \leq 2Rx_n$.

Por tanto, si tomamos $R < \frac{1}{2M}$ tendremos que $f(x_1, ..., x_{n-1}) \leq M|x|^2 \leq MRx_n < x_n$, es decir, $x \in \mathbb{R}^n - \Omega$. Nótese que la bola únicamente interseca con la frontera del dominio en el origen de coordenadas.

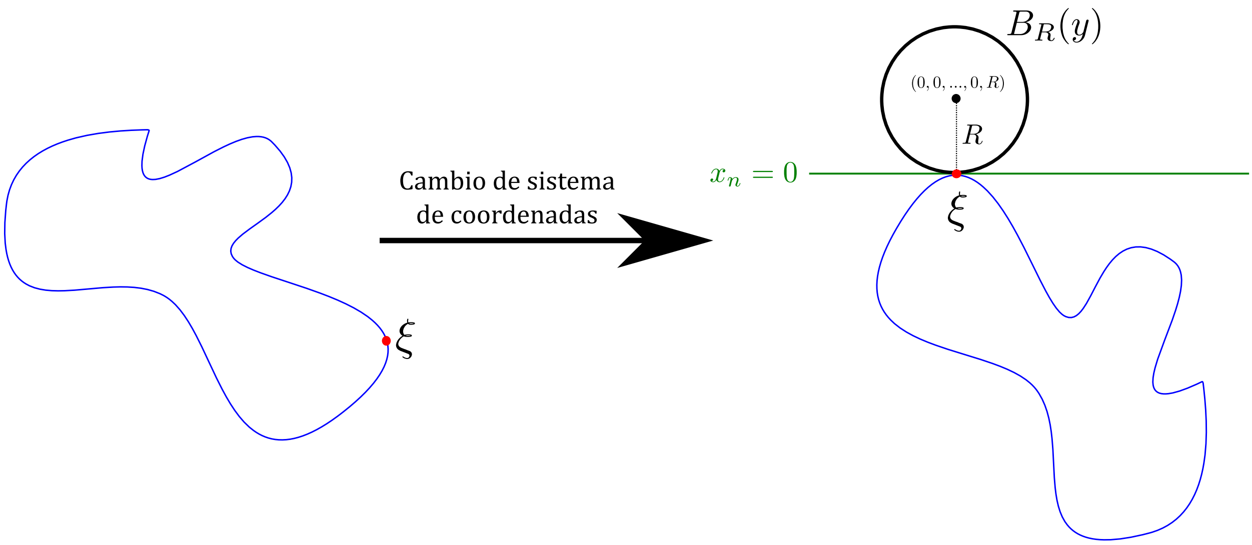

Figura 3.2: Obtención de la bola para cada $\xi \in \partial\Omega$.

Resumiendo, si tomamos $R < \frac{1}{2M}$ la bola $B_R(y)$ verifica que $\bar{B}_R(y) \cap \bar{\Omega} = \{0\}$ (recordemos que, como consecuencia del cambio de coordenadas, $\{0\}$ representa al punto ξ). Como podemos realizar este proceso para todo $\xi \in \partial\Omega$ tenemos que Ω verifica la propiedad de la esfera exterior tal y como queríamos demostrar.

■

Otra condición de regularidad similar, recogida en el ejercicio propuesto 2.12 de [6], es la llamada condición del cono exterior. Vamos a definir, en primer lugar, dicha condición para posteriormente resolver el ejercicio mencionado.

Definicion 3.9. *Decimos que un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisface la condición del cono exterior en $\xi \in \partial\Omega$ si existe un cono finito circular K, con vértice en ξ tal que $\bar{K} \cap \bar{\Omega} = \xi$.*

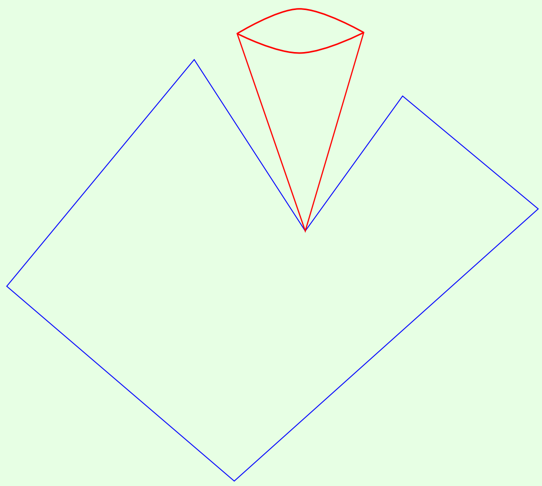

Figura 3.3: Condición del cono exterior.

Proposición 3.3. *Si Ω satisface la condición del cono exterior en ξ, entonces $\partial\Omega$ es Laplaciano-regular en ξ.*

Demostración. Siguiendo las indicaciones del ejercicio 2.12 [6] vamos a buscar una función barrera de la forma $w(x) = r^\lambda f(\theta)$, donde $r = |x - \xi|$, $\lambda > 0$ y θ es el ángulo del cono.

Calculemos, en primer lugar, el laplaciano de $w(x)$:

$$\Delta w = r^{\lambda-2}(\lambda^2 f + f'')$$

Vamos a buscar una función $f(\theta)$ de forma que $\Delta w = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$:

$$r^{\lambda-2}[\lambda^2 f(\theta) + f''(\theta)] = 0, \ \forall x \in \Omega \iff \lambda^2 f(\theta) + f''(\theta) = 0 \iff$$

$$\iff f(\theta) = Acos(\lambda\theta) + B\, i \sin(\lambda\theta) \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, si tomamos $f(\theta) = \cos(\lambda\theta)$ tenemos que la función $w(x) = r^\lambda \cos(\lambda\theta)$ verifica:

- $\Delta w = 0$.
- $w(\xi) = 0$.
- $w(x) > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} - \{\xi\}$:

  Basta tomar λ suficientemente pequeño de manera que $\cos(\lambda\theta)$ sea mayor que 0.

Por tanto, w es una función barrera en ξ y, en consecuencia, ξ es un punto Laplaciano-regular.

$\blacksquare$

Otra forma de caracterizar los puntos regulares de un dominio es a través del concepto físico de capacidad, véase la sección 2.9 de [6] para más detalles.

Capítulo 4

El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson

4.1 Ecuación de Poisson

A lo largo de este capítulo vamos a estudiar la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega$$

estudiando el potencial Newtoniano de f, cuya expresión ya vimos en el Capítulo 3:

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y)\, dy.$$

Como consecuencia de los visto en (3.5), tenemos que si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ es solución de la ecuación de Poisson, entonces tiene la siguiente representación:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds_x + \int_\Omega \Gamma(x-y) f(x)\, dx, \quad y \in \Omega.$$

Es decir, se podían expresar mediante la suma de una función armónica y del potencial Newtoniano de su laplaciano. Por tanto, el estudio de la ecuación de Poisson estará, como veremos a lo largo del capítulo, íntimamente relacionado con el estudio del potencial Newtoniano de f.

4.2 Problemas de regularidad de la ecuación de Poisson

Si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces su potencial Newtoniano w es de clase $C^\infty(\bar{\Omega})$, lo cual se ve fácilmente escribiendo

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z)f(x-z)\,dz.$$

Sin embargo, si únicamente suponemos que f es continua, su potencial Newtoniano w no tiene por qué ser, necesariamente, dos veces diferenciable. Esto se debe a que el operador Laplaciano $\Delta : C^2(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$ no es biyectivo, es decir, habrá funciones $f \in C(\Omega)$ para las que exista una función u tal que $\Delta u = f$, pero que no serán de clase $C^2(\Omega)$. Ejemplos de funciones en las que ésto ocurre se pueden ver en el Problema 4.9 de [6] o en el ejemplo de la página 35 de [10], el cual mostramos a continuación:

Ejemplo:

Consideremos la función continua

$$f(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2}\left(\frac{n+2}{(-\log|x|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(-log|x|)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

en $\Omega = B_R(0)$, con $R < 1$.

Entonces la función

$$u(x) = (x_1^2 - x_2^2)(-log|x|)^{\frac{1}{2}}$$

es de clase $C(\bar{B}_R(0)) \cap C^\infty(\bar{B}_R(0) - \{0\})$ y satisface el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } B_R(0) - \{0\}, \\ u = \sqrt{-logR}(x_1^2 - x_2^2) & \text{en } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Sin embargo, nuestra solución u no es de clase $C^2(B_R(0))$, para ello basta calcular $D_{11}u$ y observar que $\lim\limits_{|x|\to 0} D_{11}u = \lim\limits_{|x|\to 0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = +\infty$.

Este problema nos lleva a plantearnos la siguiente pregunta: ¿Existirá algún conjunto de funciones, H, tal que el operador Laplaciano $\Delta u : C^2(\Omega) \longrightarrow H$ sea biyectivo?

Esta pregunta motiva la definición de un nuevo espacio de funciones, el espacio de las funciones Hölder-continuas, las cuales vamos a tratar en la siguiente sección.

4.3 Continuidad de Hölder

Definicion 4.1. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, f una función definida en un conjunto acotado D que contenga a x_0 y $\alpha \in (0,1)$. Diremos que que f es Hölder-continua con exponente α en x_0 si el valor*

$$[f]_{\alpha;x_0} := \sup_D \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha}$$

es finito. A dicho valor lo llamaremos el coeficiente α-Hölder en x_0 respecto de D.

Claramente si f es Hölder-continua en x_0, entonces f es continua en x_0. Cuando $[f]_{\alpha;x_0}$, con $\alpha = 1$, decimos que f es Lipschitz-continua (o simplemente lipschitziana).

Ejemplo:

La función $f(x) = |x|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ es Hölder-continua con exponente α en $x = 0$. Si $\alpha = 1$, entonces es Lipschtitz-continua en $x = 0$.

La definición dada anteriormente es local, pero puede extenderse a todo el conjunto D (que no necesariamente tiene por qué estar acotado):

Definicion 4.2. *Decimos que una función f es uniformemente Hölder-continua con exponente α en un conjunto D si es valor*

$$[f]_{\alpha,D} = \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

es finito. Diremos que f es localmente Hölder-continua con exponente α en D si es uniformemente continua con exponente α en todo subconjunto compacto de D.

A continuación mostraremos un ejemplo de función Hölder continua en su dominio de definición y otra que no lo es para ningún exponente α (ejemplos obtenidos de [5]):

Ejemplo:

La función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right), \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

es Hölder-continua con exponente $\alpha = \frac{1}{2}$ en su dominio de definición D.

Demostración. Sean $x, y \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ y asumamos, sin pérdida de generalidad, que $y < x$. En tal caso tenemos que

$$f(x) - f(y) = x \sin \frac{1}{x} - y \sin \frac{1}{y} = (x - y) \sin \frac{1}{x} + y \left(\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y} \right).$$

Por tanto, haciendo uso de las desigualdades

- $|x - y|^{\frac{1}{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
- $\left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y} \right|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}$.
- $\left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y} \right|^{\frac{1}{2}} \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|^{2} = \dfrac{|x - y|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$.

obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x - y|^{\frac{1}{2}} + y\sqrt{2} \left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{y} \right|^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x - y|^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} \sqrt{\frac{y}{x}} |x - y|^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{2} \right) |x - y|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$[f]_{\frac{1}{2}, D} = \sup_{\substack{x, y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{2} \right) < \infty,$$

es decir, f es Hölder continua con exponente $\alpha = \frac{1}{2}$ en su dominio de definición, al cual hemos llamado D.

■

Ejemplo:

La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log x} & \text{si } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

no es Hölder-continua para ningún exponente α en su dominio de definición.

Demostración. Supongamos que fuese Hölder-continua para algún exponente α. En consecuencia

$$|f(x) - f(y)| \leq [f]_\alpha |x-y|^\alpha, \qquad \forall x, y \in [0,2].$$

En particular, como $f(0) = 0$, tendríamos que

$$|f(x)| \leq [f]_\alpha x^\alpha, \qquad \forall x \in (0, \frac{1}{2}],$$

lo cual a equivale a decir que

$$\frac{1}{x^\alpha |\log x|} \leq [f]_\alpha, \qquad \forall x \in (0, \frac{1}{2}].$$

Con esto llegamos a un absurdo, ya que $\dfrac{1}{x^\alpha |\log x|}$ diverge cuando x tiende a 0.

Por tanto, concluimos que f no es Hölder-continua para ningún exponente α en su dominio de definición.

■

Las definiciones anteriores motivan la expansión de los ya conocidos espacios de funciones diferenciables $C^k(\Omega)$.

Definicion 4.3. *Diremos que una función pertenece al espacio de Hölder $C^{k,\alpha}(\Omega)$ si es de clase $C^k(\Omega)$ y su k-ésima derivada es localmente Hölder-continua con exponente α en Ω.*

Definicion 4.4. *Diremos que una función pertenece al espacio de Hölder $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ si es de clase $C^k(\bar{\Omega})$ y su k-ésima derivada es uniformemente Hölder-continua con exponente α en Ω.*

Por simplicidad seguiremos los siguientes convenios en la notación:

- $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{\alpha}(\Omega), \qquad C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = C^{\alpha}(\bar{\Omega})$.
- $C^{k,0}(\Omega) = C^{k}(\Omega), \qquad C^{k,0}(\bar{\Omega}) = C^{k}(\bar{\Omega})$.
- $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$ será el espacio de funciones $C^{k,\alpha}(\Omega)$ con soporte compacto en Ω.

Definamos ahora los siguiente valores:

$$[u]_{k,0;\Omega} = |D^k u|_{0;\Omega} = \sup_{|\beta|=k} \sup_{\Omega} |D^\beta u|, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

$$[u]_{k,\alpha;\Omega} = [D^k u]_{\alpha;\Omega} = \sup_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{\alpha;\Omega}.$$

Con estas seminormas podemos definimos las normas relativas a los espacios $C^k(\bar{\Omega})$ y $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$:

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = |u|_{k;\Omega} = |u|_{k,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} [u]_{j,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} |D^j u|_{0;\Omega},$$

$$\|y\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = |u|_{k,\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + [u]_{k,\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + [D^k u]_{\alpha;\Omega}$$

Para este capítulo nos será útil definir las normas no-dimensionales en $C^k(\bar{\Omega})$ y $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Sea Ω un conjunto acotado de diámetro d, entonces:

$$\|u\|'_{C^k(\bar{\Omega})} = |u|'_{k;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} d^j [u]_{j,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} d^j |D^j u|_{0;\Omega};$$

$$\|u\|'_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = |u|'_{k,\alpha;\Omega} = |u|'_{k;\Omega} + d^{k+\alpha} [u]_{k,\alpha;\Omega} = |u|'_{k;\Omega} + d^{k+\alpha} [D^k u]_{\alpha;\Omega}.$$

Los espacios $C^k(\bar{\Omega})$ y $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ junto con sus recién definidas normas forman espacios de Banach (véase el Capítulo 5 de [6]).

Además, el producto de dos funciones Hölder-continuas es también Hölder-continuo: Sea $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ y $v \in C^\beta(\Omega)$, entonces $uv \in C^\gamma(\bar{\Omega})$, donde $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ y

$$\|uv\|_{C^\gamma(\bar{\Omega})} \leq \max(1, d^{\alpha+\beta-2\gamma}) \|u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \|v\|_{C^\beta(\bar{\Omega})};$$

$$\|uv\|'_{C^\gamma(\bar{\Omega})} \leq \|u\|'_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \|v\|'_{C^\beta(\bar{\Omega})}.$$

4.4 Problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson

En esta sección veremos que si f está acotada y es Hölder-continua en un dominio acotado Ω, entonces el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson será resoluble bajo las mismas condiciones que en el problema para la ecuación de Laplace.

En primer lugar vamos a tener en cuenta las siguientes estimaciones de las derivadas de Γ, las cuales son consecuencia de (3.3):

$$\begin{aligned} |D_i\Gamma(x-y)| &\leq \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n}, \\ |D_{ij}\Gamma(x-y)| &\leq \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n}, \\ |D^\beta\Gamma(x-y)| &\leq C|x-y|^{2-n-|\beta|}, \qquad C = C(n,|\beta|). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Lema 4.1. *Sea f una función acotada e integrable en Ω, y sea w su potencial Newtoniano. Entonces $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y, para todo $x \in \Omega$,*

$$D_i w(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x-y)f(y)\,dy, \qquad i = 1, ..., n. \tag{4.2}$$

Demostración.

Paso 1: Comprobamos que la función (4.2) está bien definida:

Como consecuencia de la estimación (4.1) para $D\Gamma$ tenemos que la función definida como

$$v(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x-y)f(y)\,dy$$

está bien definida para todo $x \in \Omega$.

Paso 2: Veamos que $v(x)$ es justamente $D_i w$:

Consideremos una función $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

- $0 \leq \eta(t) \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
- $0 \leq \eta'(t) \leq 2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
- $\eta(t) = 0$ si $t \leq 1, \quad \eta(t) = 1$ para $t > 2$.

Definimos a continuación, para $\varepsilon > 0$, la función

$$w_\varepsilon(x) = \int_\Omega \Gamma \eta_\varepsilon f(y)\, dy,$$

donde $\Gamma = \Gamma(x-y),\ \eta_\varepsilon = \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)$.

Claramente $w_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ y

$$v(x) - D_i w_\varepsilon(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x-y) f(y)\, dy - \int_\Omega D_i\{\Gamma\eta_\varepsilon f(y)\}\, dy = \int_\Omega D_i\{(1-\eta_\varepsilon)\Gamma\} f(y)\, dy =$$

$$= \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon}\le 2} D_i\{(1-\eta_\varepsilon)\Gamma\} f(y)\, dy + \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon}> 2} D_i\{(1-\eta_\varepsilon)\Gamma\} f(y)\, dy =$$

$$= \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon}\le 2} D_i\{(1-\eta_\varepsilon)\Gamma\} f(y)\, dy = \int_{B_{2\varepsilon}(y)} D_i\{(1-\eta_\varepsilon)\Gamma\} f(y)\, dy,$$

donde hemos usando en el penúltima igualdad que $\eta_\varepsilon(t) = 1$ si $t = \frac{|x-y|}{\varepsilon} > 2$.

En consecuencia, tenemos que

$$|v(x) - D_i w_\varepsilon(x)| \le \sup|f| \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \left(|D_i\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon}|\Gamma|\right)\, dy.$$

A continuación, vamos a acotar cada uno de los sumando de la integral interior. Para ello usaremos que, a partir de las estimaciones (4.1), tenemos que

$$|\Gamma(x-y)| \le C_1|x-y|^{2-n}, \quad C_1 = C_1(n)$$

$$|D\Gamma(x-y)| \le C_2|x-y|^{1-n}, \quad C_2 = C_2(n)$$

y el siguiente resultado, el cual usaremos con frecuencia en este capítulo:

$$\int_{B_R(y)} f(|x-y|)dx = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^R f(r) r^{n-1}\, dr\, d\theta = (n\omega_n) \int_0^R f(r) r^{n-1}\, dr,$$

siendo f una función radial integrable en $B_R(y)$.

- Estimación de $\int_{B_{2\varepsilon}(y)} |D_i\Gamma|\, dy$:

$$\int_{B_{2\varepsilon}(y)} |D_i\Gamma(x-y)|\, dy \le \int_{B_{2\varepsilon}(y)} C_1|x-y|^{1-n}\, dy = C_1 \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{2\varepsilon} r^{1-n} r^{n-1}\, dr\, d\theta =$$

$$= C_1(n\omega_n) \int_0^{2\varepsilon} dr = C_1(n\omega_n) 2\varepsilon = \hat{C}_1 \varepsilon.$$

- Estimación de $\frac{2}{\varepsilon}\int_{B_{2\varepsilon}(y)} |\Gamma|\, dy$:

$$\frac{2}{\varepsilon}\int_{B_{2\varepsilon}(y)} |\Gamma(x-y)|\, dy \leq \frac{2}{\varepsilon}\int_{B_{2\varepsilon}(y)} C_2|x-y|^{2-n}\, dy = C_2\frac{2}{\varepsilon}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^{2\varepsilon} r^{2-n}r^{1-n}\, dr\, d\theta =$$

$$= C_2\frac{2}{\varepsilon}(n\omega_n)\int_0^{2\varepsilon} r\, dr = C_2\frac{2}{\varepsilon}(n\omega_n)2\varepsilon^2 = \hat{C}_2\varepsilon.$$

Luego, si llamamos $\hat{C} = \text{máx}(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$, obtenemos finalmente que

$$|v(x) - D_i w_\varepsilon(x)| \leq \sup|f| \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \left(|D_i\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon}|\Gamma|\right) dy \leq$$

$$\leq \sup|f|(\hat{C}_1\varepsilon + \hat{C}_2\varepsilon) \leq \sup|f|\hat{C}\varepsilon.$$

Por tanto, si hacemos tender ε a 0 tenemos que w_ε y $D_i w_\varepsilon$ convergente uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^n$ a w y v respectivamente y, en consecuencia, $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $D_i w = v$, tal y como queríamos demostrar. ■

Lema 4.2. *Sea f una función acotada y localmente Hölder-continua (con exponente $\alpha \leq 1$) en Ω, y sea w su potencial Newtoniano. Entonces $w \in C^2(w)$, $\Delta w = f$ en Ω y, para todo $x \in \Omega$, se tiene que*

$$\begin{aligned} D_{ij}w(x) = &\int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))\, dy \\ &- f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)\, ds_y,\ i,j = 1,...,n. \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde Ω_0 es cualquier dominio que contenga a Ω para el cual se verifican las condiciones del Teorema de la divergencia y f ha sido definida como 0 fuera de Ω.

Demostración.

Paso 1: Comprobamos que la función del lema está bien definida:

Como consecuencia de la estimación (4.1) para $D^2\Gamma$ y de la Hölder-continuidad puntual de f en Ω, tenemos que la función

$$u(x) = \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(f(y) - f(x))\, dy - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma\nu_j(y) ds_y$$

está bien definida para todo $x \in \Omega$.

Paso 2: Veamos que $u(x)$ es justamente $D_{ij}w$:

Sea $v = D_i w$ y, para $\varepsilon > 0$, definimos la función

$$v_\varepsilon(x) = \int_\Omega D_i\Gamma \eta_\varepsilon f(y)\, dy,$$

donde η_ε es la función que definimos en la demostración del lema anterior. Claramente $v_\varepsilon \in C^1(\Omega)$ y, tras derivarla, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
D_j v_\varepsilon(x) &= \int_\Omega D_j(D_i\Gamma\eta_\varepsilon) f(y)\, dy = \\
&= \int_\Omega D_j(D_i\Gamma\eta_\varepsilon)(f(y) - f(x))\, dy + \int_\Omega D_j(D_i\Gamma\eta_\varepsilon) f(x)\, dy = \\
&= \int_\Omega D_j(D_i\Gamma\eta_\varepsilon)(f(y) - f(x))\, dy + f(x) \int_\Omega D_j(D_i\Gamma\eta_\varepsilon)\, dy = \\
&= \int_{\Omega_0} D_j(D_i\Gamma\eta_\varepsilon)(f(y) - f(x))\, dy \; - f(x) \int_{\partial\Omega} D_j(D_i\Gamma\nu_j(y))\, ds_y,
\end{aligned}$$

con ε suficientemente pequeño. En consecuencia, tenemos que

$$\begin{aligned}
|u(x) - D_j v_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon} \le 2} D_j\{(1-\eta_\varepsilon) D_i\Gamma\}(f(y) - f(x))\; dy \right| \le \\
&\le \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon} \le 2} |D_j\{(1-\eta_\varepsilon) D_i\Gamma\}| \cdot |(f(y) - f(x))|\; dy \le \\
&\le \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon} \le 2} \left(|D_{ij}\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon}|D_i\Gamma| \right) |x-y|^\alpha [f]_{\alpha;x}\; dy \le \\
&\le [f]_{\alpha;x} \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon} \le 2} \left(|D_{ij}\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon}|D_i\Gamma| \right) |x-y|^\alpha\; dy.
\end{aligned}$$

A continuación, vamos a acotar la integral

$$I := \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon} \le 2} \left(|D_{ij}\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon}|D_i\Gamma| \right) |x-y|^\alpha\; dy,$$

para ello acotaremos cada sumando haciendo uso de las estimaciones (4.1):

- Acotación de $A := \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon}\leq 2} |D_{ij}\Gamma||x-y|^{\alpha}\,dy$:

$$A = \int_{B_{2\varepsilon}(y)} |D_{ij}\Gamma(x-y)||x-y|^{\alpha}\,dy \leq \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n}|x-y|^{\alpha}\,dy =$$

$$= \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{\alpha-n}\,dy = \frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^{2\varepsilon} r^{\alpha-n}r^{n-1}\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}(n\omega_n)\int_0^{2\varepsilon} r^{\alpha-1}\,dr = n\frac{(2\varepsilon)^{\alpha}}{\alpha} = \frac{n}{\alpha}(2\varepsilon)^{\alpha}.$$

- Acotación de $B := \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon}\leq 2} |D_{i}\Gamma||x-y|^{\alpha}\,dy$:

$$B = \int_{B_{2\varepsilon}(y)} |D_{i}\Gamma(x-y)||x-y|^{\alpha}\,dy \leq \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n}|x-y|^{\alpha}\,dy =$$

$$= \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1+\alpha-n}\,dy = \frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^{2\varepsilon} r^{1+\alpha-n}r^{n-1}\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}(n\omega_n)\int_0^{2\varepsilon} r^{\alpha}\,dr = \frac{(2\varepsilon)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

- Acotación de $I = A + \frac{2}{\varepsilon}B$:

$$I = A + \frac{2}{\varepsilon}B \leq \frac{n}{\alpha}(2\varepsilon)^{\alpha} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{(2\varepsilon)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq \frac{n}{\alpha}(2\varepsilon)^{\alpha} + \frac{2}{\varepsilon}(2\varepsilon)^{\alpha+1} =$$

$$= \frac{n}{\alpha}(2\varepsilon)^{\alpha} + \frac{2}{\varepsilon}(2\varepsilon)^{\alpha}(2\varepsilon) = \frac{n}{\alpha}(2\varepsilon)^{\alpha} + 4(2\varepsilon)^{\alpha} = \left(\frac{n}{\alpha}+4\right)(2\varepsilon)^{\alpha}.$$

Por tanto, obtenemos que

$$|u(x) - D_j v_{\varepsilon}(x)| \leq [f]_{\alpha;x}\left(\frac{n}{\alpha}+4\right)(2\varepsilon)^{\alpha},$$

con $2\varepsilon < dist(x, \partial\Omega)$.

En consecuencia, si ε tiende a 0 tenemos que $D_j v_{\varepsilon}$ converge uniformemente a u en los subconjuntos compactos de Ω. Además, puesto que que v_{ε} converge uniformemente a $v = D_i w$ en Ω, tenemos que $w \in C^2(\Omega)$ y $u = D_{ij}w$.

Paso 3: Veamos que $\Delta w = f$ en Ω:

Finalmente, tomando $\Omega_0 = B_R(x)$ en (4.3) para un R suficientemente grande, obtenemos lo siguiente:

$$\Delta w(x) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} f(x) \int_{|x-y|=R} \nu_i(y)\nu_i(y)\, ds_y = f(x),$$

tal y como queríamos demostrar.

■

Finalmente, haciendo uso de los Lemas 4.1, 4.2 y el Teorema 3.8 obtendremos el resultado que habíamos anunciado al principio de esta sección:

Teorema 4.1. *Sea Ω un dominio acotado y supongamos que todos los puntos de su frontera, $\partial\Omega$, son Laplaciano-regulares. Entonces si f está acotada y es localmente Hölder-continua en Ω, entonces el problema clásico de Dirichlet: $\Delta u = f$ en Ω, $u = \varphi$ en $\partial\Omega$, tiene una única solución para cualesquiera condiciones de contorno continuas φ.*

Demostración. Sea w el potencial Newtoniano de f. Definimos la función $v := u - w$. En consecuencia, el problema $\Delta u = f$ en Ω, $u = \varphi$ en $\partial\Omega$, es equivalente al problema $\Delta v =$ en Ω, $v = \varphi - w$ en Ω que, en virtud del Teorema 3.8, sabemos que tiene una única solución.

■

Nótese que, en caso de que nuestro dominio Ω sea una bola, este último teorema que acabamos de probar es consecuencia directa del Teorema 3.1 y de los Lemas 4.1 y 4.2. Es más, tenemos una fórmula explícita de la solución:

$$u(x) = \int_{\partial B} K(x,y)\varphi(y)\, ds_y + \int_B G(x,y) f(y)\, dy,$$

donde K es el núcleo de Poisson y G es la función de Green.

4.5 Estimaciones de Hölder para las segundas derivadas

El siguiente lema nos dará una estimación que usaremos más adelante en esta sección:

Lema 4.3. *Sean $B_1 = B_R(x_0)$ y $B_2 = B_{2R}(x_0)$ dos bolas concéntricas en $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\alpha(\bar{B}_2)$, $0 < \alpha < 1$, y w el potencial Newtoniano de f en B_2. Entonces $w \in C^{2,\alpha}(B_1)$ y se verifica que*

$$|D^2 w|'_{0,\alpha;B_1} \leq C|f|'_{0,\alpha;B_2},$$

es decir,

$$|D^2 w|_{0;B_1} + R^\alpha [D^2 w]_{\alpha;B_1} \leq C\left(|f|_{0;B_2} + R^\alpha [f]_{\alpha;B_2}\right)$$

donde $C = C(n, \alpha)$.

Demostración. La demostración de este resultado es larga y no aporta nada a las siguientes demostaciones del capítulo. Es por ello que, en caso de querer consultarla, se insta al lector a leerla en [6]. ■

Nótese que este lema es también cierto para dominios Ω_1 y Ω_2 tales que $\Omega_1 \subset B_1$ y $\Omega_2 \supset B_2$, siendo w el potencial Newtoniano de f en Ω_2 y, en consecuencia,

$$|D^2 w|'_{0,\alpha;\Omega_1} \leq C|f|'_{0,\alpha;\Omega_2}.$$

Teorema 4.2. *Sean $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n), f \in C_0^\alpha(\mathbb{R}^n)$ tales que $\Delta u = f$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ y, si $B = B_R(x_0)$ es cualquier bola que contenga el soporte de u, entonces tenemos que*

$$\begin{aligned} &|D^2 u|'_{0,\alpha;B} \leq C|f|'_{0,\alpha;B}, && C = C(n,\alpha) \\ &|u|'_{1;B} \leq CR^2|f|_{0;B}, && C = C(n). \end{aligned}$$

Demostración. Puesto que la función $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ es de soporte compacto en B, sabemos que podemos expresarla como

$$u(y) = \int_B \Gamma(x-y)\Delta u \, dx$$

y, además, que el término de la derecha de esta igualdad es el llamado potencial Newtoniano de Δu. Ahora bien, por hipótesis sabemos que $\Delta u = f$ en Ω y, en consecuencia, lo anterior puede reescribirse de la siguiente forma:

$$u(y) = \int_B \Gamma(x-y) f(x)\, dx \qquad \text{(potencial Newtoniano de } f\text{)}.$$

Parte 1: Estimación de $|D^2 u|'_{0,\alpha,B}$:

Aplicando ahora el Lema 4.3 al potencial Newtoniano de f, que es justamente u, en $B_1 = B_2 = B$ tenemos que

$$|D^2 u|'_{0;\alpha,B} \leq C |f|'_{0,\alpha,B},$$

donde $C = C(n, \alpha)$, tal y como queríamos probar.

Parte 2: Estimación de $|u|'_{1;B}$:

Por definición, tenemos que

$$|u|'_{1;B} = \sum_{j=0}^{1} d^j [u]_{j,0;B} = \sum_{j=0}^{1} d^j |D^j u|_{0;B} = |u|_{0;B} + d|Du|_{0;B} = |u|_{0;B} + 2R|Du|_{0;B},$$

donde hemos usado que $d = \text{diámetro}(B) = 2R$. En consecuencia, para estimar $|u|'_{1;B}$ tendremos que acotar primero $|u|_{0;B}$ y $|Du|_{0;B}$:

Parte 2.1: Estimación de $|u|_{0;B}$:

Usando que u es el potencial Newtoniano de f tenemos que

$$|u|_{0;B} \leq \int_B |\Gamma(x-y)| \cdot |f(x)|\, dx \leq [f]_{0;B} \int_B |\Gamma(x-y)|\, dx.$$

A continuación, vamos acotar $\int_B |\Gamma(x-y)|\, dx$, para ello usaremos que

$$|\Gamma(x-y)| \leq C_1 |x-y|^{2-n}, \quad C_1 = C_1(n). \qquad \text{(véase en (4.1))}.$$

Como consecuencia, obtenemos que

$$\int_B |\Gamma(x-y)|\, dx \leq \int_B C_1(n)|x-y|^{2-n}\, dx = C_1(n) \int_B |x-y|^{2-n}\, dx =$$

$$= C_1(n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^R r^{2-n} r^{n-1}\, dr\, d\theta =$$

$$= C_1(n) n\omega_n \int_0^R r dr = C_1(n) n\omega_n \frac{1}{2} R^2 = \hat{C}_1(n) R^2.$$

Por tanto, concluimos que

$$|u|_{0;B} \leq \hat{C}_1[f]_{0;B}R^2, \qquad \hat{C}_1 = \hat{C}_1(n).$$

Parte 2.2: Estimación de $|Du|_{0;B}$:

Haciendo uso del Lema 4.1 tenemos que

$$Du(y) = \int_B D\Gamma(x-y)f(x)\,dx.$$

En consecuencia, tenemos que

$$|Du|_{0;B} \leq \int_B |D\Gamma(x-y)||f(x)|\,dx \leq [f]_{0;B}\int_B |D\Gamma(x-y)|\,dx.$$

A continuación, vamos acotar $\int_B |D\Gamma(x-y)|\,dx$, para ello usaremos que

$$|D\Gamma(x-y)| \leq C_2|x-y|^{1-n}, \quad C_2 = C_2(n). \qquad \text{(véase en (4.1))}.$$

Como consecuencia, obtenemos que

$$\int_B |D\Gamma(x-y)|\,dx \leq \int_B C_2(n)|x-y|^{1-n}\,dx = C_2(n)\int_B |x-y|^{1-n}\,dx =$$
$$= C_2(n)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^R r^{1-n}r^{n-1}\,dr\,d\theta =$$
$$= C_2(n)n\omega_n\int_0^R dr = \hat{C}_2(n)n\omega_n R = \hat{C}_2(n)R.$$

Por tanto, concluimos que

$$|Du|_{0;B} \leq \hat{C}_2(n)[f]_{0;B}R, \qquad \hat{C}_2 = \hat{C}_2(n).$$

Parte 2.3: Usamos las estimaciones de $|u|_{0;B}$ y $|Du|_{0;B}$ para obtener la de $|u|'_{1;B}$:

Finalmente, si consideramos $C = C(n) = \text{máx}(\hat{C}_1, 2\hat{C}_2)$ tenemos que

$$|u|'_{1;B} = |u|_{0;B} + d|Du|_{0;B} \leq \hat{C}_1(n)[f]_{0;B}R^2 + 2R\hat{C}_2(n)[f]_{0;B}R =$$
$$= \left(\hat{C}_1(n)R^2 + 2\hat{C}_2(n)R^2\right)[f]_{0;B} \leq C(n)R^2|f|_{0;B},$$

tal y como queríamos demostrar.

∎

Teorema 4.3. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega)$ y $f \in C^\alpha(\Omega)$ tales que $\Delta u = f$ en Ω. Entonces $u \in C^2(\Omega)$ y, para cualesquiera dos bolas concéntricas $B_1 = B_R(x_0), B_2 = B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega$, tenemos que*

$$|u|'_{2,\alpha;B_1} \leq C(|u|_{0;B_2} + R^2|f|'_{0,\alpha;B_2})$$

donde $C = C(n, \alpha)$.

Demostración. Por la representación de Green podemos escribir toda función u como

$$u(x) = v(x) + w(x), \quad x \in B_2$$

donde v es una función armónica en B_2 y w es el potencial Newtoniano de f en B_2.

Por el Teorema 3.5 y los Lemas 4.1 y 4.3 tenemos que

$$R|Dw|_{0;B_1} + R^2|D^2w|'_{0,\alpha,B_1} \leq CR^2|f|'_{0,\alpha;B_2}$$
$$R|Dv|_{0;B_1} + R^2|D^2v|'_{0,\alpha;B_1} \leq C|v|_{0;B_2} \leq C(|u|_{0;B_2} + R^2|f|_{0;B_2})$$

La última desigualdad, para $n > 2$, es consecuencia de que $v = u - w$. Para $n = 2$ basta considerar como solución de la ecuación de Poisson en una bola de $\mathbb{R}^3$ a la función $u(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2)$.

Finalmente, combinando las dos desigualdad obtenidas, obtenemos el resultado buscado.

■

Como consecuencia directa de esta estimación obtenemos la equicontinuidad en los subdominios compactos de las segundas derivadas de cualquier conjunto de soluciones de la ecuación de de Poisson $\Delta u = f$. Por tanto, en virtud del Teorema de Ascoli-Arzela, tenemos la siguiente extensión del Teorema 3.6:

Corolario 4.1. *Cualquier sucesión acotado de solución de la ecuación de Poisson $\Delta u = f$ en un dominio Ω con $f \in C^\alpha(\Omega)$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en subdominios compactos a la solución.*

4.6 Estimaciones en la frontera

En esta sección vamos a obtener una extensión del Lema 4.3. En lo que sigue, denotaremos $\mathbb{R}^n_+$ al semiespacio $x_n > 0$ y T al hiperplano $x_n = 0$. Dadas $B_2 = B_{2R}(x_0)$, $B_1 = B_R(x_0)$, bolas con centro $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}^n_+$, llamaremos $B_2^+ = B_2 \cap \mathbb{R}^n_+$, $B_1^+ = B_1 \cap \mathbb{R}^n_+$.

Lema 4.4. *Sean $f \in C^\alpha(\bar{B_2}^+)$ y w el potencial Newtoniano de f en B_2^+. Entonces $w \in C^{2,\alpha}(\bar{B}_1^+)$ y*

$$|D^2 w|'_{0,\alpha,B_1^+} \leq C|f|'_{0,\alpha,B_2^+}$$

donde $C = C(n, \alpha)$.

Demostración.

<u>**Caso 1**</u>**:** $B_2 \cap T = \emptyset$:

Si B_2 y T no intersecan, entonces el resultado está contenido en el Lema 4.3.

<u>**Caso 2**</u>**:** $B_2 \cap T \neq \emptyset$:

La representación (4.3) se satisface para $D_{ij}w$ con $\Omega_0 = B_2^+$. Además, si i o j son distintas de n, tenemos que la integral

$$\int_{\partial B_2^+} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y \left(= \int_{\partial B_2^+} D_j\Gamma(x-y)\nu_i(y)ds_y \right)$$

se anula en T, ya que ν_i, o bien ν_j son nulas en T. Las estimaciones del Lema 4.3, para i o j distintas de n, se realizan de manera análoga a lo visto en su demostración cambiando B_2 por B_2^+ y ∂B_2 por $\partial B_2^+ - T$. De esta forma conseguimos estimaciones para $D_{ij}w$, $i, j = 1, ..., n$ excepto para $D_{nn}w$. Para estimar $D_{nn}w$ obtendremos su valor de la ecuación $\Delta w = f$, ya que las estimaciones $D_{kk}w$, $k = 1, .., n-1$, sí son conocidas.

∎

Teorema 4.4. *Supongamos que Ω es simétrico respecto del hiperplano T de . Si u es continua en $\Omega^+ \cup T$, u armónica en Ω^+ y, además, $u = 0$ en $\Omega \cap T$, entonces u se puede extender a un función armónica en Ω (hemos denotado $\Omega^+ = \Omega \cap \mathbb{R}^+_n$).*

Demostración. Sea $x = (x', x_n)$, donde $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$. Consideremos el hiperplano

$$T = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}.$$

Entonces la función

$$\hat{u}(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n) & \text{si } (x', x) \in \Omega,\ x_n \geq 0 \\ -u(x', -x_n) & \text{si } (x', x) \in \Omega,\ x_n < 0 \end{cases}$$

es continua en Ω y satisface la propiedad del valor medio 2.1. Por tanto, como consecuencia del Teorema 3.2, tenemos que u es armónica en todo Ω.

■

Este resultado, aplicado a $\Omega = B_2$ nos será de ayuda para probar el siguiente resultado:

Teorema 4.5. *Sean $u \in C^2(B_2^+) \cap C^0(\bar{B}_w^+)$ y $f \in C^\alpha(\bar{B}_2^+)$ tales que $\Delta u = f$ en B_2^+ y $u = 0$ en T. Entonces $u \in C^{2,\alpha}(\bar{B}_1^+)$ y tenemos que*

$$|u|'_{2,\alpha,B_1^+} \leq C(|u|_{0;B_2^+} + R^2|f|'_{0,\alpha,B_2^+}),$$

donde $C = C(n, \alpha)$.

Demostración.

<u>**Caso 1**</u>**:** $B_2 \cap T = \emptyset$:

Si B_2 y T no intersecan, entonces el resultado nos lo da el Teorema 4.3.

<u>**Caso 2**</u>**:** $B_2 \cap T \neq \emptyset$:

Sea $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$, $x^* = (x', -x_n)$ y definimos la función

$$f^*(x) = f^*(x', x_n) = \begin{cases} f(x', x_n) & \text{si } x_n \geq 0 \\ f(x', -x_n) & \text{si } x_n \leq 0. \end{cases}$$

Consideremos ahora los conjuntos

$$B_2^- = \{x \in \mathbb{R}^n : x^* \in B_2^+\}, \qquad D = B_2^+ \cup B_2^- \cup (B_2 \cap T)\,.$$

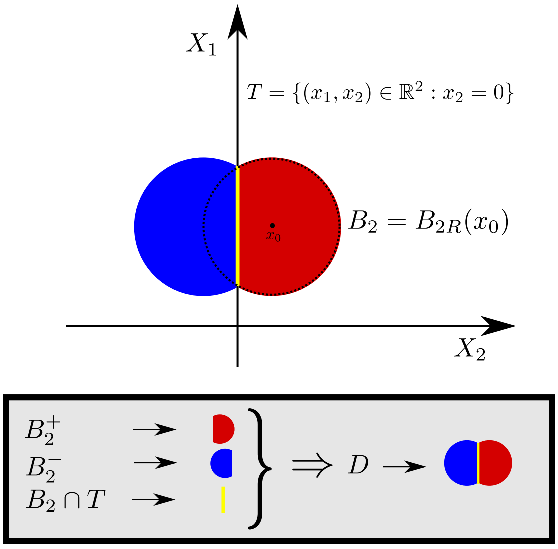

Figura 4.1: Ejemplo de representación de dichos conjuntos en dimensión $n = 2$.

Entonces $f^* \in C^\alpha(\bar{D})$ y $|f^*|'_{0,\alpha;D} \leq 2|f|'_{0,\alpha;B_2^+}$.

A continuación, definimos la función

$$w(x) = \int_{B_2^+} [\Gamma(x-y) - \Gamma(x^* - y)]\, f(y)\, dy = \int_{B_2^+} [\Gamma(x-y) - \Gamma(x - y^*)]\, f(y)\, dy,$$

la cual verifica que $w(x', 0) = 0$ y $\Delta w = f$ en B_2^+.

Además, nótese que

$$\int_{B_2^+} \Gamma(x-y^*) f(y)\, dy = \int_{B_2^-} \Gamma(x-y) f^*(y)\, dy$$

y, en consecuencia, obtenemos que

$$w(x) = \int_{B_2^+} \Gamma(x-y) f(y)\, dy - \int_D \Gamma(x-y) f^*(y)\, dy.$$

Sea ahora $w^*(x) = \int_D \Gamma(x-y) f^*(y) dy$. Como consecuencia del Lema 4.3 (tomando como conjuntos $\Omega_1 = B_1^+$ y $\Omega_2 = D$) tenemos que

$$|D^2 w^*|'_{0,\alpha,B_1^+} \leq C|f*|'_{0,\alpha;D} \leq 2C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}.$$

Combinando esto con el Lema 4.4, tenemos que

$$|D^2 w|'_{0,\alpha;B_1^+} \leq C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}.$$

Consideremos ahora $v = u - w$. En tal caso tenemos que

$$\Delta v = \Delta u - \Delta w = f - f = 0 \quad \text{en } B_2^+$$

y $v = 0$ en T. Luego, en virtud del Teorema 4.4, podemos extender por reflexión a v a una función armónica en todo B_2 y, por tanto, la estimación buscada la obtenemos como consecuencia del Teorema 3.5.

■

Teorema 4.6. *Sea B una bola en $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ y $f \in C^\alpha(\bar{B})$ tales que $\Delta u = f$ en B y $u = 0$ en ∂B. Entonces $u \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$.*

Demostración. Mediante una traslación podemos asumir que ∂B pasa por el origen de coordenadas. Consideremos ahora la aplicación

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \\ x &\longmapsto I(x) = x^* := \frac{x}{|x|^2}, \end{aligned}$$

la cual es bicontinua y suave en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ en sí misma, y relaciona B con el semiespacio B^*. Además, si $u \in C^2(B) \cup C^0(\bar{\Omega})$, entonces la función

$$v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right),$$

llamada transformada de Kelvin de u, satisface lo siguiente (véase [1])

$$\begin{aligned} \Delta_{x^*} v(x^*) &= |x^*|^{-n-2} \Delta_x u(x), \quad x^* \in B^*, x \in B, \\ &= |x^*|^{-n-2} f\left(\frac{x^*}{|x^*|^2}\right), \quad x^* \in B^*. \end{aligned}$$

En consecuencia, podemos aplicar el Teorema 4.5 a la transformada de Kelvin v y, como podemos realizar la traslación al origen a cualquier punto de ∂B, tenemos que $u \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$.

■

Corolario 4.2. *Sean $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$ y $f \in C^\alpha(\bar{B})$. Entonces el problema de Dirichlet $\Delta u = f$ en B, $u = \varphi$ en ∂B tiene una única solución $u \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$.*

Demostración. Sea $v = u - \varphi$. En tal caso, tenemos que el problema de Dirichlet $\Delta u = f$ en B, $u = \varphi$ en ∂B se puede reescribir como $\Delta v = f - \Delta\varphi$ en B, $v = 0$ en ∂B. Sabemos, en virtud del Teorema 4.1, que tiene como única solución una función $v \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$, la cual será también de clase $C^{2,\alpha}(\bar{B})$ como consecuencia del teorema que acabamos de demostrar. Finalmente, como $u = v + \varphi$, $\phi \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$ y acabamos de probar que $v \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$, es inmediato que la única solución, u, del problema de Dirichlet inicial es de clase $C^{2,\alpha}(\bar{B})$.

$\blacksquare$

Glosario de Términos

S

T

Bibliografía

[1] Axler, S., Bourdon, P. & Ramey, W. (2001). *Harmonic function theory (GTM, Vol. 137)*. Springer.

[2] Cesaroni, A. *Perron method for the Dirichlet problem.* Introduzione alle equazioni alle derivate parziali, Laurea Magistrale in Matematica. Universidad de Padua. https://www.math.unipd.it/~ancona/pdf/notes/perron_cesaroni.pdf

[3] Duchateau, P. & Zachmann, D. (2011). *Schaum's Outline of Partial Differential Equations*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Education

[4] Evans, L.C. (2010). *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.

[5] Fiorenza, R. (2017). *Hölder and locally Hölder Continuous Functions, and Open Sets of Class $C^k, C^{k,\lambda}$*. Birkhäuser.

[6] Gilbarg, D. & Trudinger, N.S. (2001). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer.

[7] Han, Q. & Lin, F. (2011). *Elliptic partial differential equations (Vol. 1)*. American Mathematical Soc.

[8] John, F. (1978). *Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 1. Springer, New York.

[9] Urbas, J. (1996). *Lecture on second order linear partial differential equations.* Instructional Workshop on Analysis and Geometry, Part 1 (pp. 39-75). Australian National University, Mathematical Sciences Institute.
https://maths.anu.edu.au/files/CMAProcVol34P1-Urbas.pdf

[10] Villavert, J. (2015). *Elementary Theory and Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. University of Texas.
https://faculty.utrgv.edu/john.villavert/research%20papers/my%20elliptic%20equations.pdf