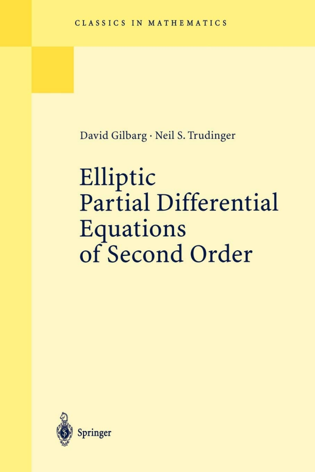
UNIVERSIDAD DE GRANADA

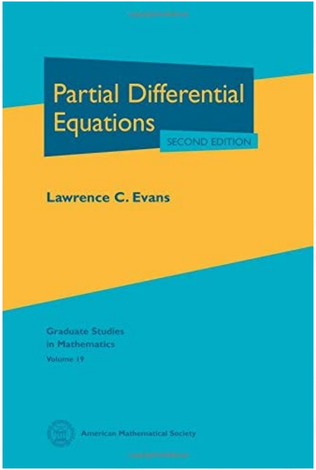
Introducción al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas lineales de segundo orden

Máster en Matemáticas

Luis Felipe Del Río López

Contexto


CLASSICS IN MATHEMATICS
David Gilbarg · Neil S. Trudinger
Elliptic
Partial Differential
Equations
of Second Order
Springer


Partial Differential
Equations
SECOND EDITION
Lawrence C. Evans
Graduate Studies
in Mathematics
American Mathematical Society

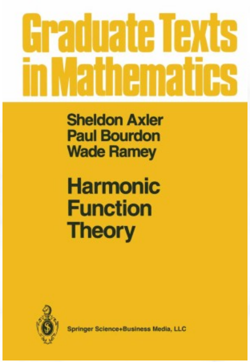
Análisis del problema

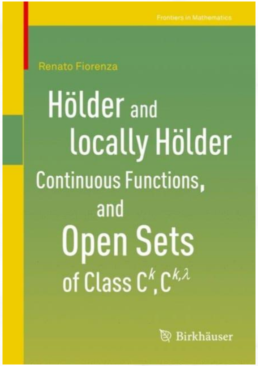
- Orden poco adecuado en la presentación de los resultados.
- Demostraciones poco detalladas.

$\Rightarrow$ Libros poco accesibles para gente nueva en el ámbito.

Acciones consideradas

- **Fuentes bibliográficas variadas y especializadas.**
- Mayor nivel de detalle en demostraciones.
- Demostraciones paso a paso.
- Incorporación de figuras y ejemplos.





Acciones consideradas

- Fuentes bibliográficas variadas y especializadas
- **Mayor nivel de detalle en demostraciones**
- Demostraciones paso a paso
- Incorporación de figuras y ejemplos

$$|u(x) - D_j v_\varepsilon(x)| = \left| \int_{|x-y| \leqslant 2\varepsilon} D_j\{(1-\eta_\varepsilon) D_i \Gamma\}(f(y) - f(x))\, dy \right|$$

$$\leqslant [f]_{\alpha;x} \int_{|x-y| \leqslant 2\varepsilon} \left(|D_{ij}\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon} |D_i \Gamma| \right) |x-y|^\alpha \, dy$$

$$\boxed{\leqslant \left(\frac{n}{\alpha} + 4 \right) [f]_{\alpha;x} (2\varepsilon)^\alpha}$$

Acciones consideradas

- Fuentes bibliográficas variadas y especializadas
- **Mayor nivel de detalle en demostraciones**
- Demostraciones paso a paso
- Incorporación de figuras y ejemplos

- Acotación de $A := \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon}\leq 2} |D_{ij}\Gamma||x-y|^\alpha \, dy$:

$$A = \int_{B_{2\varepsilon}(y)} |D_{ij}\Gamma(x-y)||x-y|^\alpha \, dy \leq \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n}|x-y|^\alpha \, dy =$$
$$= \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{\alpha-n} \, dy = \frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^{2\varepsilon} r^{\alpha-n} r^{n-1} \, dr \, d\theta =$$
$$= \frac{1}{\omega_n}(n\omega_n)\int_0^{2\varepsilon} r^{\alpha-1} \, dr = n\frac{(2\varepsilon)^\alpha}{\alpha} = \frac{n}{\alpha}(2\varepsilon)^\alpha.$$

- Acotación de $B := \int_{\frac{|x-y|}{\varepsilon}\leq 2} |D_{i}\Gamma||x-y|^\alpha \, dy$:

$$B = \int_{B_{2\varepsilon}(y)} |D_{i}\Gamma(x-y)||x-y|^\alpha \, dy \leq \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n}|x-y|^\alpha \, dy =$$
$$= \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1+\alpha-n} \, dy = \frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^{2\varepsilon} r^{1+\alpha-n} r^{n-1} \, dr \, d\theta =$$
$$= \frac{1}{n\omega_n}(n\omega_n)\int_0^{2\varepsilon} r^{\alpha} \, dr = \frac{(2\varepsilon)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

- Acotación de $I = A + \frac{2}{\varepsilon}B$:

$$I = A + \frac{2}{\varepsilon}B \leq \frac{n}{\alpha}(2\varepsilon)^\alpha + \frac{2}{\varepsilon}\frac{(2\varepsilon)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq \frac{n}{\alpha}(2\varepsilon)^\alpha + \frac{2}{\varepsilon}(2\varepsilon)^{\alpha+1} =$$
$$= \frac{n}{\alpha}(2\varepsilon)^\alpha + \frac{2}{\varepsilon}(2\varepsilon)^\alpha(2\varepsilon) = \frac{n}{\alpha}(2\varepsilon)^\alpha + 4(2\varepsilon)^\alpha = \left(\frac{n}{\alpha}+4\right)(2\varepsilon)^\alpha.$$

Por tanto, obtenemos que

$$|u(x) - D_j v_\varepsilon(x)| \leq [f]_{\alpha;x}\left(\frac{n}{\alpha}+4\right)(2\varepsilon)^\alpha,$$

Acciones consideradas

- Fuentes bibliográficas variadas y especializadas
- Mayor nivel de detalle en demostraciones
- **Demostraciones paso a paso**
- Incorporación de figuras y ejemplos

Proof. Choose $\varepsilon > 0$, and let $M = \sup |\varphi|$. Since ξ is a regular boundary point, there is a barrier w at ξ and, by virtue of the continuity of φ, there are constants δ and k such that $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$ if $|x - \xi| < \delta$, and $kw(x) \geqslant 2M$ if $|x - \xi| \geqslant \delta$. The functions $\varphi(\xi) + \varepsilon + kw$, $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw$ are respectively superfunction and subfunction relative to φ. Hence from the definition of u and the fact that every superfunction dominates every subfunction, we have in Ω,

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leqslant u(x) \leqslant \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$$

or

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leqslant \varepsilon + kw(x).$$

Since $w(x) \to 0$ as $x \to \xi$, we obtain $u(x) \to \varphi(\xi)$ as $x \to \xi$. $\square$

Acciones consideradas

- Fuentes bibliográficas variadas y especializadas
- Mayor nivel de detalle en demostraciones
- **Demostraciones paso a paso**
- Incorporación de figuras y ejemplos

Demostración. Como consecuencia de la continuidad de φ tenemos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|x - \xi| < \delta$ y $x \in \partial\Omega$, entonces $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$. Sea $M = \sup_{\partial\Omega} |\varphi|$. Puesto que ξ es regular podemos considerar una función frontera, w, y obtener un $K = K(\varepsilon) > 0$ tal que $Kw(x) \geq 2M$ si $|x - \xi| \geq \delta$.

<u>Paso 1</u>: Veamos que $\varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x)$ es una superfunción relativa a φ:

Recordemos que, puesto que w es función barrera de ξ , $w \in C(\bar{\Omega})$, w superarmónica en Ω, $w > 0$ en $\bar{\Omega} - \{\xi\}$ y $w(\xi) = 0$. En consecuencia, tenemos que

$$\varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x) \geq \varphi(x) + \varepsilon + 2M \geq \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega : |x - \xi| \geq \delta.$$

Además,

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \partial\Omega : |x - \xi| < \delta.$$

Por tanto, tenemos que

$$\varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x) \geq \varphi(x),$$

es decir, $\varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x)$ es una superfunción relativa a φ.

<u>Paso 2</u>: Veamos que $\varphi(\xi) - \varepsilon - Kw(x) \leq u(x)$:

Claramente $\varphi(\xi) - \varepsilon - Kw(x)$ es claramente una subfunción relativa a φ. Puesto que $u(x)$ es el supremo de todas las subfunciones de φ tenemos que

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - Kw(x) \leq u(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

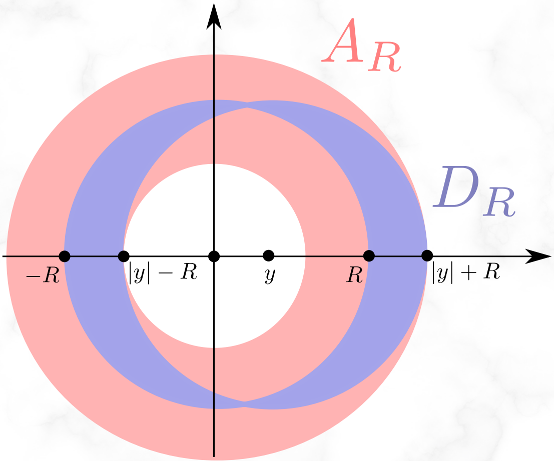
<u>Paso 3:</u> Usamos los pasos anteriores y concluimos:

Puesto que toda subfunción de una función φ está mayorada por cualquier superfunción de φ y $\varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x)$ es una superfunción relativa a φ (véase paso 1) tenemos que

$$v(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x) \quad \forall v \in S_\varphi.$$

Acciones consideradas

- Fuentes bibliográficas variadas y especializadas
- Mayor nivel de detalle en demostraciones
- Demostraciones paso a paso
- **Incorporación de figuras y ejemplos**



Acciones consideradas

- Fuentes bibliográficas variadas y especializadas
- Mayor nivel de detalle en demostraciones
- Demostraciones paso a paso
- **Incorporación de figuras y ejemplos**

Ejemplo:

La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log x} & \text{si } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

no es Hölder-continua para ningún exponente α en su dominio de definición.

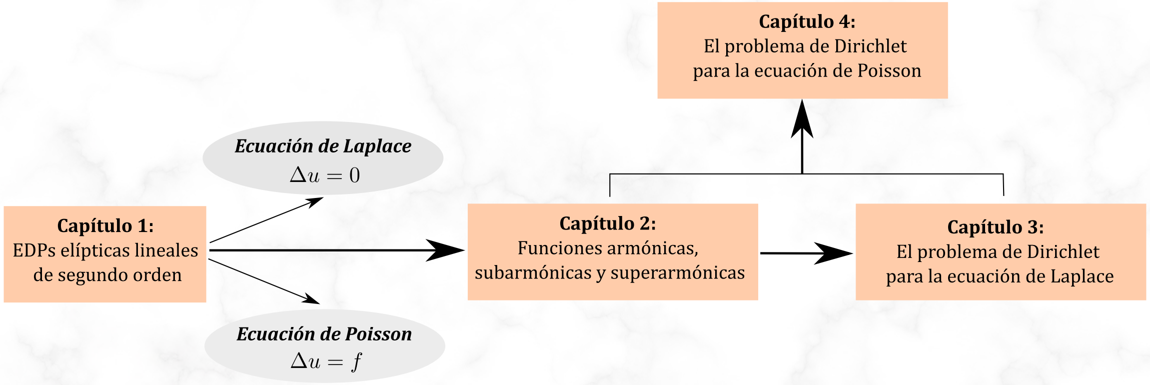
Ejemplo:

La función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right), \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

es Hölder-continua con exponente $\alpha = \frac{1}{2}$ en su dominio de definición D.

Esquema general de los contenidos del trabajo



Capítulo 1: EDPs elípticas lineales de segundo orden

Ecuaciones en derivadas parciales de k-ésimo orden

Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

Tipos en función de F
- Lineal
- Semilineal
- Cuasilineal
- No lineal

Tipos en función de sus valores propios
- Hiperbólica
- Parabólica
- Ultrahiperbólica
- Elíptica

Ecuaciones en derivadas elípticas lineales de segundo orden

Ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0$$

Ecuación de Poisson

$$\Delta u = f$$

Capítulo 2: Funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas

Definición de operador Laplaciano $\rightarrow$

Definición de funciones $\begin{cases} \text{Armónica} & \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \text{Subarmónica} & \Delta u \geq 0 \quad \text{en } \Omega \\ \text{Superarmónica} & \Delta u \leq 0 \quad \text{en } \Omega \end{cases}$

$\downarrow$

Desigualdades del valor medio

Teorema de Liouville

Desigualdad de Harnack

Principios del máximo-mínimo

$\downarrow$

Unicidad del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en dominio acotados

Capítulo 3: El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace

Ecuación de Laplace

Solución Fundamental

Representación de Green

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\, ds_x$$

$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ armónica

Caso 1: $\Omega = B_R$

Se conoce expresión explícita de la función de Green

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \displaystyle\int_{\partial B_R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, ds_y & x \in B \\ \varphi(x) & x \in \partial B \end{cases}$$

Solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \quad & \text{en } B \\ u = \varphi \quad & \text{en } \partial B \end{aligned}$$

Caso 2: Ω dominio acotado arbitrario

Método de Perron

El problema clásico de Dirichlet tiene solución para condiciones de contorno continuas si y sólo si todos los puntos de la frontera son Laplaciano-regulares.

¿Qué dominios verifican esta condición?

Ecuación de Poisson

Representación de Green

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\Gamma(x-y)}{\partial\nu} - \Gamma(x-y)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\, ds_x$$

$$+ \underbrace{\int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(x)\, dx}_{\text{Potencial Newtoniano de } f}$$

$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ verificando que $\Delta u = f$

¿ Siempre existe tal función u ?

NO, hay que imponer condiciones sobre f

Espacios de Hölder

El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson tiene una única solución si y sólo si se cumplen las **mismas condiciones** pedidas para el de **Laplace** y, además, que $\boldsymbol{f}$ esté **acotada** y sea **localmente Hölder-continua** en Ω.

Sean $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$ y $f \in C^{\alpha}(\bar{B})$. Entonces el problema de Dirichlet $\Delta u = f$ en B, $u = \varphi$ en ∂B tiene una única solución $u \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$.

Futuro trabajo

En este trabajo hemos estudiado → EDPs elípticas lineales de segundo orden prototipo

→ $\Delta u = 0$
$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u &= \varphi \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

→ $\Delta u = f$
$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= \varphi \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

¿Cuál es la siguiente fase del estudio? →

EDPs de la forma

$$L[u] = f$$

donde L es un operador lineal elíptico de segundo orden

$$\begin{cases} L[u] &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= \varphi \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Introducción al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas lineales de segundo orden

Máster en Matemáticas

Luis Felipe Del Río López