



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

**SUPERFICIES MÍNIMAS Y DE
CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN
ESPACIOS HOMOGÉNEOS**

Jesús Castro Infantes

Dirigida por:

Magdalena Rodríguez Pérez

José Miguel Manzano Prego

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Jesús Castro Infantes
ISBN: 978-84-1117-270-7
URI: <http://hdl.handle.net/10481/73979>

*A mis padres,
a mis hermanos
y a mis amigos.*

Quisiera agradecer a mis directores Magdalena y Miguel, por toda vuestra ayuda y consejo a lo largo de estos años. Gracias por vuestra paciencia y dedicación. Mucho de lo que he aprendido es gracias a vosotros.

Gracias a todos los compañeros del departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada por vuestro interés y ayuda a lo largo de estos años, especialmente a Paco Torralbo por todos los ofrecimientos de batidos y galletas cada vez que lo visitaba.

Gracias a Ana y Laurent por su acogimiento en mis estancias en el extranjero y por toda la ayuda recibida.

Gracias a mis compañeros de la carrera Alberto, Sergio, Diego y Antonio. Ha sido un privilegio poder contar siempre con vosotros. Gracias Antonio por compartir todos estos años de carrera, máster y doctorado juntos.

Gracias también a todos los compañeros de doctorado a lo largo de estos años: Antonio Bueno, David, Fidel y Julián y a todos los amigos que he hecho a lo largo de estos años de doctorado.

Gracias a mis amigos de siempre Rafa, Miguel y Casiano, habéis estado siempre que os he necesitado prestando vuestra alegría. Gracias también a María por su apoyo y ayuda constante.

Gracias a toda mi familia, siempre me he sentido muy afortunado de teneros a vosotros. Gracias a Vero, a mis hermanos Alfonso, Santi y Gloria y a mis padres, sois un ejemplo a seguir en todos los aspectos de la vida, y todo os lo debo a vosotros.

Índice

Summary and conclusions	1
Introducción	21
Capítulo 1: Preliminares	45
1.1 Los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	45
1.1.1 Geodésicas e isometrías de los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	50
1.1.2 Superficies en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	52
1.2 El espacio $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$	55
1.2.1 Isometrías en $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$	56
1.2.2 Grafos mínimos invariantes	59
1.3 El problema de Jenkins-Serrin en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	65
1.3.1 Problema de Jenkins-Serrin sobre polígonos simétricos	69
Capítulo 2: Superficies mínimas con curvatura total finita	79
2.1 Superficies con curvatura total -4π en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	83
2.2 Superficies con curvatura total finita en $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$	89
2.2.1 Los ejemplos Twisted Scherk	89
Capítulo 3: Construcciones Conjugadas en los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	91
3.1 La correspondencia de Daniel y sus propiedades	91
3.1.1 Correspondencia entre curvas	96
3.1.2 Correspondencia entre simetrías	97
3.1.3 Polígonos geodésicos	99
3.1.4 Conjugación de grafos verticales	105
3.2 Construcción de k -noides y Saddle Towers mínimos con género 1 en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	108

3.2.1	La construcción conjugada	109
3.2.2	Resolviendo los problemas de periodos	114
3.2.3	El problema del embebimiento	124
3.2.4	Ejemplos con infinitos finales	125
3.3	Construcción de H -superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y la propiedad de Krust	127
3.3.1	Construcción de los Saddle Towers	132
3.3.2	La construcción de (H, k) -noides	137
3.3.3	La construcción de (H, k) -nodoides	140
3.3.4	La propiedad de Krust	142
Capítulo 4: El problema de Plateau asintótico en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$		145
4.1	Anillos área minimizantes en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$	146
4.2	Teoremas asintóticos	151
4.2.1	El problema de Plateau asintótico para superficies míni- mas	152
4.2.2	El problema de Plateau asintótico para superficies área- minimizantes	155
4.3	El Teorema de la Banda	156
4.4	Ejemplos de Scherk helicoidales	165

Summary and conclusions

The theory of minimal and constant mean curvature surfaces in the Euclidean space \mathbb{R}^3 is a classical field in Differential Geometry. It gathers different techniques such as Complex Analysis, Geometry Measure Theory and Partial Differential Equations, as well as Topology and Algebra. Nowadays it is still an important research field with different applications in Geometry and other areas of Mathematics.

The origins of minimal surfaces date back to 1760 when Lagrange proposed the problem, previously treated by Euler for revolution surfaces, of finding a surface with the least area possible which encloses a given closed curve without self-intersections. This approach was subsequently expanded by the experimental model of the physicist Plateau, that consists in immersing a closed curved of thin wire in soapy water. Removing the wire carefully, the solution to this problem appears, which has in general, the shape of a regular surface and remain still by the action of the surface tension of the liquid. By the Laplace-Young Law, such a surface has mean curvature zero. Surfaces with constant mean curvature equal to zero are known as *minimal surfaces*.

Lagrange's problem is an example of the method that it is known as Calculus of Variations nowadays. Area-minimizing surfaces, that is, those that solve the minimization problem, are critical points of the Area functional (which is equivalent to being a minimal surface), though not every critical point of this functional solves the minimization problem. We can argue that the minimal surfaces which are observable are locally minima of the Area functional. In particular, they are stable, that is, the second derivate of the Area functional is bigger than o equal zero for all compactly supported variation of the surface.

The concept of constant mean curvature surface or H -surface ($H \in \mathbb{R}$) was extended to any 3-Riemannian manifold as a critical point of the fun-

ctional

$$\text{Area} - 2H \cdot \text{Volume},$$

where $2H$ is the trace of the Weingarten operator, see for instance [5].

It is natural to study this class of surfaces in the 3-Riemannian manifolds with group of isometries as large as possible, where the theory is richer and more interesting. In that sense, the most symmetric spaces are the *homogeneous spaces*, ie., those such that for each pair of points there is an isometry that sends one to the other. Simply-connected homogeneous 3-manifolds are classified, being all of them isometric to a Lie group of dimension 3 with some left-invariant metric, except for the Riemannian products $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ with $\kappa > 0$, see [65, Theorem 2.4]. Among them, the most symmetric ones are the space forms $\mathbb{M}^3(\kappa)$, which are simply 3-manifold connected with constant sectional curvature $\kappa \in \mathbb{R}$, with group of isometries of dimension 6. After the space forms, the most symmetric ones are the spaces that have a group of isometries of dimension 4, which can be classified as a 2-parameter family of spaces $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, where $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$, see [17]. We will focus our study on these spaces.

The family $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ contains the product spaces $\mathbb{E}(-1, 0) \equiv \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{E}(1, 0) \equiv \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, as well as the Lie groups $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, Nil_3 and $\text{SU}(2)$ with left-invariant metrics that have an unitary Killing vector field ξ , see [17, 50]. Moreover, $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ admits a Riemannian submersion $\Pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ with constant bundle curvature τ over $\mathbb{M}^2(\kappa)$, the simply connected complete surface of constant curvature κ , and whose fibers are the integral curves of an unitary Killing vector field ξ . This structure is known as *Killing submersion*, see [50]. The Killing vector field ξ is a distinguished vector field, which allows us to define the concepts of *vertical* direction, as that tangent to ξ , and *horizontal* direction, as that orthogonal to ξ . Moreover, this structure allows us to talk about *cylinders over a curves* and *multigraphs*, concepts that play a very importance role in this work. On the one hand, we define the cylinder over a smooth curve $\alpha \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$ as $\Pi^{-1}(\alpha) \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$; one has that $\Pi^{-1}(\alpha)$ is a flat surface whose mean curvature is equal to the half of the curvature of α . So, the H -cylinders project onto curves of constant curvature $2H$ in $\mathbb{M}^2(\kappa)$. In the case $H = 0$, the H -cylinders are called vertical planes, but they are not totally geodesic surfaces when $\tau \neq 0$. On the other hand, an isometric immersion $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ is said to be a multigraph if it is transverse to ξ , see epigraph "Grafos y multigrafos" in Section 1.1.2.

In the spaces $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, which correspond to $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ with $\kappa < 0$, there is a notion of asymptotic boundary. We can identify topologically $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ with $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (choosing a global section of Π which can be identified with $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$) and then consider the product compactification for $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. In this way, the asymptotic boundary of $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ is homeomorphic to the vertical boundary $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ together with the caps $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ and $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$. Moreover, this allows us to define properly the asymptotic behaviour of a surface Σ immersed in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. For instance, we say that a point $p \in \partial_\infty(\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}))$ is in the asymptotic boundary of a surface Σ if there exists a divergent sequence of points $p_n \in \Sigma$ that converges topologically in the product compactification. We denote by $\partial_\infty \Sigma$ the asymptotic boundary of Σ .

The theory of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds has drawn considerable attention during the last decades, being the homogeneous setting a natural step in the generalization of classical results in space forms. This can be exemplified by the results of classification of spheres in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ by Abresch and Rosenberg in [1, 2], by the recent classification of spheres in Lie metric groups by Meeks, Pérez, Mira, Rosen [64], by the half-spaces theorems obtained by Mazet en [60], Daniel and Hauswirth in [20], Hauswirth, Rosenberg and Spruck in [37] and Hauswirth, Menezes and Rodríguez in [34] and, by the work of Daniel [17, 19] (where the Lawson correspondence between minimal surfaces in \mathbb{S}^3 and 1-surfaces in \mathbb{R}^3) and the concept of associate family are generalized. Daniel correspondence is an isometric correspondence between H -surfaces in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ that we study in detail in Chapter 3. We also highlight the works of Fernández and Mira [24, 25, 26], in which they show the existence of a harmonic Gauss map for $\frac{1}{2}$ -surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and minimal surfaces in Nil_3 , and used it to solve the Bernstein problem (that is, the classification of minimal entire graphs) in Nil_3 .

One of the most studied subclass of H -surfaces in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ -spaces are the minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ triggered by the work of Rosenberg in [85]. After that there were many works on this topic, among which, we emphasize the work of Nelli and Rosenberg [71], where they show that the Bernstein theorem fails in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ by solving the Radó problem for curves in the asymptotic boundary that project graphically (see epigraph "The asymptotic Plateau problem in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ "), the work of Sa Earp and Toubiana [87],

where they classify the invariant minimal surfaces, and the work of Hauswirth [31], where he constructs and classifies the minimal surfaces foliated by horizontal curves of constant curvature. We also emphasize the work of Hauswirth, Sa Earp and Toubiana where they extend the concepts of associate family and conjugate surfaces to minimal surfaces of $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, this is a particular of Daniel correspondence using a different approach.

One of the most celebrated results in the theory was given by Collin and Rosenberg [14], who solved a Dirichlet problem over unbounded domains of \mathbb{H}^2 for the minimal surface equation with asymptotic boundary values $\pm\infty$ over geodesics arcs in the boundary of the domain. This problem is known as *the Jenkins-Serrin problem* and was treated earlier by Nelli and Rosenberg in [71] for bounded domains. This problem take its name from the analogous problem in \mathbb{R}^3 originally discussed by Jenkins and Serrin in [41]. Collin and Rosenberg use these examples of minimal surfaces to construct minimal entire graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ which are conformally equivalent to the complex plane \mathbb{C} , disproving a conjecture by Schoen and Yau, since such graphs induce a harmonic diffeomorphism between \mathbb{C} and \mathbb{H}^2 through the natural projection over the first factor. Later, Mazet, Rodriguez and Rosenberg in [61] solved the Jenkins-Serrin problem for much more general domains. Some particular cases of this problem was studied in $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ by Younes [94] y Melo [69] and by Pinheiro in Nil_3 in [80]. In Section 1.3 we collect the main results in this topic and we solve the Jenkins-Serrin problem for some special domains in $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ and Nil_3 . We will use the solutions in order to construct H -surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. This problem has also been studied for surfaces with constant mean curvature $0 < H < \frac{1}{2}$ in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ in bounded domains by Hauswirth, Rosenberg and Spruck in [38] and in unbounded domains by Folha and Melo in [28]. In this case, the H -graphs take asymptotic values $\pm\infty$ over curves of constant curvature $\pm 2H$.

Minimal surfaces with total finite curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Another topic that has received a considerable attention within the theory is the construction and classification of minimal surfaces with finite total curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, that is, these whose Gauss curvature is integrable as a function in the surface. In the Euclidean space \mathbb{R}^3 , minimal surfaces with finite total curvature are one of the best known families thanks to the work of Osserman [76]. Using that the Gauss map of a minimal surface in \mathbb{R}^3 is

conformal, if the total curvature is finite, it has to be a multiple of -4π and the surface is conformally equivalent to a compact Riemann surface minus k points by a result of Huber [40].

It is expected that in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ the family of minimal surfaces with finite total curvature has relevant properties. In fact, the combined work of Hauswirth and Rosenberg [36], Hauswirth, Nelli, Sa Earp and Toubiana [35] and Hauswirth, Menezes y Rodríguez [33] shows that an immersed minimal surface has finite total curvature if and only if it is proper, has finite topology, and each of its ends is asymptotic to an *admissible polygon at infinity* (see Definition 2.2 and Theorem 2.4). It follows from [36] that an orientable minimal surface with total finite curvature is conformally equivalent to a compact Riemann surface minus k points which correspond to the ends of the surface, and the total curvature satisfies a Gauss-Bonnet type formula as expressed by equation (2.1); in particular, it is a multiple of -2π , see Theorem 2.1. It is important to remark that the study of minimal surfaces with finite total curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ is easier than in the rest of $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ -spaces, due in part to the fact that the Gauss curvature is negative in this case as shown by the Gauss equation $K = \det A - \nu^2$, see Equation (1.8).

Although this characterization is very satisfactory from a theoretical point of view, it seems tough in general to determine whether or not a given family of admissible polygons actually bounds a minimal surface, or if a given topological type can be realized by such a surface. In fact, there are not many examples of surfaces with finite total curvature in the literature. Let us highlight some of the most relevant constructions:

- The simplest case is that of flat minimal surfaces, which must be vertical planes. In particular, vertical planes are the only complete minimal surfaces with zero finite total curvature, see [39, Corollary 5].
- A minimal Scherk graph in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ is a minimal graph over a geodesic ideal polygon of \mathbb{H}^2 with $2a$ vertexes, $a \geq 2$, taking alternating limit values $+\infty$ and $-\infty$ on the sides of the polygon. They are solutions to the most simply Jenkins-Serrin problems over an unbounded domain, whose existence follows from [71, 14]. They have genus 0, and one end asymptotic to an admissible polygon at infinity with a geodesics in $\mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$. These surfaces have total curvature $-2(a-1)\pi$. The

case $a = 2$ gives rise to the only complete minimal surfaces with total curvature -2π , as shown by Rodríguez and Pyo [83, Theorem 4.1].

- The Twisted Scherk surfaces constructed by Pyo and Rodríguez in [83] with genus 0, one end, and total curvature $-4b\pi$ for any $b > 1$. Some of these surfaces are embedded and they are the only examples of minimal surfaces with finite total curvature that are not graphs or bigraphs, (here, a bigraph is nothing but the union of two graphs being one obtained from the other by a mirror symmetry about a horizontal plane $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$).
- The minimal k -noids constructed by Morabito and Rodríguez [70] (also by Pyo [81] in the symmetric case) have finite total curvature, genus 0 and $k > 2$ ends asymptotic to vertical planes. Inside this family we can find the horizontal catenoids ($k = 2$) which were characterized by Hauswirth, Nelli, Sa Earp and Toubiana in [35] as the unique complete connected minimal surfaces with finite total curvature with two ends, each of them asymptotic to a vertical plane, see Theorem 2.7. We remark that the family of minimal surfaces with finite total curvature and planar ends is not hitherto well understood, not even in the case of genus 0.
- For genus $g > 0$, Martín, Mazzeo and Rodríguez construct in [58] properly embedded minimal surfaces with finite total curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ of genus g and k ends asymptotic to vertical planes, for arbitrary genus $g \geq 0$ and k sufficiently large depending on g .

In Section 3.2 we enlarge this list by constructing minimal surfaces with finite total curvature with genus 1 and $k \geq 3$ ends each of them asymptotic to a vertical plane.

There are no many examples of surfaces with finite total curvature in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, in Section 2.2.1, following the ideas of Rodríguez and Pyo [83] we construct examples in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ that are analogous to the Twisted Scherk surfaces. These can be seen as solutions to the asymptotic Plateau problem when Γ is an admissible polygon at infinity (see epigraph "The asymptotic Plateau problem in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ "). We will show that they have finite total curvature by a result of Hauswirth, Menezes and Rodríguez in [33], see Theorem 2.12.

Minimal surfaces with total curvature -4π in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. By the above mentioned result by Rodríguez and Pyo, the next possible value of the finite total curvature for which there is not a classification is -4π . With this total curvature the only known examples are the Scherk graphs over an ideal geodesic hexagon, the Twisted Scherk surfaces with $b = 1$ and the horizontal catenoid. In Section 2.1, we analyze the complete minimal surfaces properly embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with total curvature -4π . We prove that such a surface must be a horizontal catenoid or a simply connected surface with one end asymptotic to some admissible polygon at infinity, see Theorem 2.9 and Figure 2.1.

However, the classification of complete minimal surfaces properly embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with total curvature -4π is still open, and we expect that the Scherk graph, the Twisted Scherk graphs, and the horizontal catenoid are the unique examples.

Conjugate constructions in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ spaces.

Given the spaces $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ and $\mathbb{E}^*(\kappa^*, \tau^*)$, where $\kappa - 4\tau^2 = \kappa^* - 4(\tau^*)^2$, and given $\theta, H, H^* \in \mathbb{R}$ verifying $iH + \tau = e^{i\theta}(iH^* + \tau^*)$, Daniel [17] proved that there is an isometric correspondence between H -surfaces of \mathbb{E} and H^* -surface of $\mathbb{E}^*(\kappa^*, \tau^*)$, see Theorem 3.1. This correspondence is particularly relevant when we apply it between minimal surfaces in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, and H -surfaces in $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ for $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$, which corresponds with choosing $\theta = \frac{\pi}{2}$ in Theorem 3.1. These corresponding immersions are known as conjugate immersion. In this case the parameters are univocally determined by $\kappa = 4H^2 + \epsilon$ and $\tau = H$. The case $k = 4\tau^2$ (and consequently $\epsilon = 0$) corresponds to the Lawson correspondence between minimal surfaces of \mathbb{S}^3 and 1-surfaces in \mathbb{R}^3 .

This correspondence shows the relevant role of the critical value for the mean curvature $H = \frac{1}{2}$ in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, being the behaviour of the surface very different for $0 < H < \frac{1}{2}$, $H = \frac{1}{2}$ or $H > \frac{1}{2}$. We have that a H -surface with $0 < H < \frac{1}{2}$ in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ is locally isometric to a minimal surface in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$, a $\frac{1}{2}$ -surface in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ is locally isometric to a minimal surface in $\text{Nil}_3 = \mathbb{E}(0, \frac{1}{2})$ and a H -surface with $H > \frac{1}{2}$ is locally isometric to a minimal surface in the Berger sphere $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$, see Table 3.1.

The fact that the conjugation has special properties among all sister surfaces for any $\theta \in \mathbb{R}$ is due to the next correspondence between curves

proved independently by Manzano and Torralbo in [54] and by Plehnert in [77]: If $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ and $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ are conjugate immersions and $\alpha \subset \Sigma$ is a differentiable curve, then if $\gamma = \phi(\alpha)$ is a horizontal (resp. vertical) geodesic of $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$, if and only if $\gamma^* = \phi^*(\alpha)$ is contained in a vertical (resp. horizontal) plane of $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$. Moreover, $\phi^*(\Sigma)$ intersects orthogonally such a plane along γ^* , see Theorem 3.6. Furthermore, there is a correspondence between axial symmetries about horizontal (resp. vertical) geodesics and mirror symmetries about vertical (resp. horizontal) planes, see Proposition 3.7.

This gives rise to the following technique to construct H -surfaces the product spaces, known as the conjugate technique and based on the ideas of Lawson [46] and Karcher [43] in the space forms: first, we consider a minimal surface in $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ whose boundary is composed of horizontal and vertical geodesics; second we consider the conjugate surface in the product space; and finally we extend this conjugate surface until a complete surface in $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ is obtained. This technique has been used in several constructions of minimal and mean curvature surfaces, see for instance [54, 55, 56, 57, 59, 62, 70, 77, 78, 81]. In this work we have focused and produced new techniques to treat the case when the minimal surface has vertical ideal geodesics (only possible in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ or $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$) or when it has horizontal ideal geodesics. This kind of surfaces are usually obtained as a solution of a Jenkins-Serrin problem.

In Section 3.1 we study in detail the properties of the conjugate construction. We emphasize the analysis of the conjugate curve of a vertical segment contained in the boundary of a multigraph Σ . Here, we show that for $H > 0$, the direction of the rotation of the normal vector along this segment plays a determinant role since the bundle curvature of the space $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$. Observe that the bundle curvature depends in turn on the orientation of the ambient space. If $\Gamma \subset \partial\Sigma$ is a vertical segment and $\Gamma^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$ denotes the conjugate curve in the boundary of the conjugate surface Σ^* , then we define θ the *angle of rotation along* Γ as the angle between N and the horizontal vector fields $\{E_1, E_2\}$ in a positively oriented orthonormal frame $\{E_1, E_2, \xi\}$. Let $\Omega \subset \mathbb{M}^2(4H^2 - 1)$ be the domain over which Σ is projecting, let N^* be the normal of Σ^* , and let Ω^* be the domain (possibly non-embedded) where Σ^* is projecting. Then we deduce the next properties:

- If $\theta' > 0$ (resp. $\theta' < 0$) then, N^* points to the interior (resp. exterior) of Ω^* along Γ^* with $\kappa_g < 2H$ ($\kappa_g > 2H$), and Σ^* is locally contained in $\mathbb{H}^2 \times (-\infty, z_0]$ ($\mathbb{H}^2 \times [z_0, +\infty)$) around Γ^* .
- If $4H^2 - 1 < 0$, $\theta' > 0$ y $\int_{\Gamma} \theta' \leq \pi$, then Γ^* is embedded.

This is illustrated by Figure 3.2, see also Equation (3.10) and Theorem 3.10. This imply that conjugate H -surfaces will behave very differently for opposite direction of rotation as we will see in the examples constructed in Section 3.3. This highlight the importance of the orientation in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ -spaces.

Construction of minimal k -noids and Saddle Towers with genus 1 in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. We will use the Daniel correspondence in the case $H = 0$ in order to construct of properly Alexandrov embedded minimal surfaces with finite total curvature, genus 1 and $k \geq 3$ ends. They are conformally equivalent to a torus minus k points and can be seen as the counterparts of the k -noids of genus 1 in \mathbb{R}^3 constructed by Mazet in [59]. In fact our construction is inspired by this work of Mazet, and by the construction for $\frac{1}{2}$ -surfaces with genus 1 in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ given by Plehnert [77].

Outside a compact set, these surfaces look like the minimal k -noids constructed by Morabito and Rodríguez [70] and Pyo [81], since they are asymptotic to k vertical planes, our examples are also symmetric with respect to k equiangular vertical planes containing a common geodesic, see Theorem 3.17 . Although each end is embedded, these surfaces are not globally embedded in general. There are not examples for $k = 2$ since they wold contradict the uniqueness of the horizontal catenoids given by Hauswirth, Nelli, Sa Earp and Toubina [35] see Theorem 2.7.

In order to construct the genus 1 k -noids we begin by considering the solution of a Jenkins-Serrin problem in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ over a geodesic triangle $\Delta \subset \mathbb{H}^2$ with two interior vertices and one ideal vertex. If we fix an interior vertex and the ideal vertex (for example, in $(0,0)$ and in $(1,0)$ in the disk model for \mathbb{H}^2), the triangle is determined by the length $a > 0$ of the finite side and the angle $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ at $(0,0)$. We call $\Sigma(a, \varphi, b)$ the solution to the Jenkins-Serrin problem which takes the value $+\infty$ on the side opposite to $(0,0)$, a finite value $b \in \mathbb{R}$ on the side of length a , and 0 on the other side, see Figure 3.4.

The conjugate surface $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ is another minimal graph in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ because of the Krust-type theorem proved by Hauswirth, Sa Earp and Toubiana in [39] that we will discuss later. The two horizontal geodesics contained in the boundary of $\Sigma(a, \varphi, b)$ correspond by conjugation two symmetry curves of symmetry of $\Sigma(a, \varphi, b)^*$ contained in vertical planes. The half vertical geodesic and the segment of length $|b|$ correspond by conjugation with two symmetry curves of $\Sigma(a, \varphi, b)^*$ contained in horizontal planes, see Figure 3.4.

Our goal will be to find values of (a, φ, b) that ensure that, after reflecting $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ by mirror symmetries across the horizontal and vertical planes of symmetry, we obtain a complete surface of genus 1.

As in the work of Plehnert [77], we define two period problems, to obtain the desired complete genus-1 surface, see Section 3.2.1. The first problem will be solved when the two horizontal curves of symmetry contained in the boundary of $\Sigma(a, \varphi, b)$ lie in the same horizontal plane. The second period problem will be solved when the vertical planes containing the symmetry curves intersect with an angle $\frac{\pi}{k}$. We observe that when $b = 0$ and $\varphi = \frac{\pi}{k}$ we recover the (symmetric) minimal k -nodois of Morabito and Rodríguez [70] and Pyo [81].

We will prove, that for any $\frac{\pi}{k} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ there exist a_φ and b_φ solving the two periods problems, giving rise after reflections across the symmetry planes a complete minimal surface of genus-1 and k ends.

The value b_φ is univocally determined by φ and a_φ . However, our analysis of the second period function does not allow us to prove the uniqueness of a_φ since it is not clear the dependence of the second problem with respect the parameters. Although, it is expected that there are values of φ for which the complete surface will be embedded, it seems difficult to prove it. observe that the fundamental piece is a vertical graph contained in a half-space but we can lose the embeddedness after reflecting the fundamental piece about the vertical planes of symmetry. We can ensure that the complete surface is embedded if the value a_φ that solves both period problem is bigger than some quantity $a_{\text{emb}}(\varphi)$, see Equation (3.21).

By a similar argument to that of Collin and Rosenberg in [14] using Fatou's Lemma, we prove that the obtained surfaces have finite total curvature. However, it can be also proved by means of the characterization

of minimal surfaces with finite total curvature of Hauswirth, Menezes and Rodriguez in [33], since these surfaces are proper, have finite topology and the asymptotic boundary of each end coincides with the asymptotic boundary of a vertical plane, so it is an asymptotic polygon ant infinity. The study of minimal surfaces with finite total curvature in [36, 35, 33] will also allow to control the asymptotic behaviour of the ends of the k -noids with genus 1.

Moreover, we can adapt this construction to produce minimal surfaces invariant by a vertical translation, similar to the Saddle Towers given in [70]. These surfaces have genus 1 in the quotient of $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ by the vertical translation, see Theorem 3.18. We can see that they have finite total curvature in the quotient using in this case the characterization of minimal surfaces with finite total curvature in the quotient spaces of $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ given by Hauswirth and Menezes in [32]. These are the first examples where this characterization is used.

The analysis of the period problems also allow us to find minimal surfaces that are invariant by a discrete group of parabolic or hyperbolic translations instead of a discrete group of rotations. We call these examples *parabolic or hyperbolic ∞ -noids*, respectively, see Figure 3.10. These are obtained when the vertical planes of symmetry of $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ are asymptotic (parabolic ∞ -noids) or they lie at positive distance (hyperbolic ∞ -noids). They have infinitely many ends and we can guarantee the embeddedness for some hyperbolic ∞ -noids since we can choose the parameter $a_\varphi > a_{\text{emb}}(\varphi)$, see Theorem 3.25.

Construction of H -surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and the Krust property. In the previous sections we have given several reasons why the conjugate technique has been specially relevant in the case $H = 0$. One of them reason is the fact that Hauswirth, Sa Earp and Toubiana [39] extended a theorem of Krust (unpublished, see [43, Theorem 2.4.1]) showing that the conjugate minimal surface of a minimal graph in a product space $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, defined on a convex domain of \mathbb{H}^2 , must be a graph, see Theorem 3.15. This result has turned out to be very useful to deal with the embeddedness of the conjugate minimal surface as in the case of the minimal k -noids of Morabito and Rodriguez [70] and Pyo [81], or in the proof that the ends of the genus 1 minimal k -noids are embedded, among other constructions. Although it

was expected that this property also holds true for the case $0 < H < \frac{1}{2}$, since H -surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ are often similar to minimal surfaces in \mathbb{R}^3 . In Section 3.3.4, we will show that this property fails in general for all $H > 0$. It is a very interesting problem to find extra hypothesis that ensure a Krust-type theorem for $0 < H < \frac{1}{2}$. The importance of such a result is motivated by the fact that is usually one of the most difficult problems in conjugate constructions. Recently, Manzano and Torralbo have proved the embeddedness in some particular case for $H > \frac{1}{2}$ using techniques that require to identify functions with geometric content in the kernel of the common stability operator of conjugate surfaces, see [56].

For $0 < H \leq \frac{1}{2}$, our counterexamples to the Krust property in Theorem 3.37 belong to a broader 2-parameter family of H -surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ that also depend on a fixed integer $k \geq 2$ indicating the number of vertical planes of symmetry and the number of ends. These surfaces include the symmetric Saddle Towers and minimal k -noids of Morabito and Rodríguez [70] and Pyo [81] when $H = 0$. Nevertheless, for $0 < H \leq \frac{1}{2}$, its behaviour is very different; for instance, there are non-embedded examples with two ends for any value of $0 < H < \frac{1}{2}$, unlike the case $H = 0$ where all horizontal catenoids are embedded.

More concretely, for each $0 \leq H \leq \frac{1}{2}$ and for each integer $k \geq 2$, we construct a 2-parametric family of H -surfaces properly Alexandrov embedded that we denote by $\overline{\Sigma}_{a,b}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $a, b \in (0, \infty]$ (no both of them equal to ∞). These surfaces are invariant by mirror symmetries over a horizontal plane and k equiangular vertical planes sharing a common vertical geodesic. We have the following cases (see Figure 1 and Theorem 3.28).

- (a) If $a, b < \infty$, then $\overline{\Sigma}_{a,b}^*$ are called *saddle towers*. They are simply periodic in the vertical direction, they have genus 0 and $2k$ ends in the quotient of $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ by a vertical translation, each end is asymptotic in the quotient to the half of a H -cylinder. We study them in Section 3.3.1.
- (b) If $a = \infty$ and $b < \infty$, then $\overline{\Sigma}_{\infty,b}^*$ are called (H, k) -*noids* (or H -catenoids if $k = 2$). They have genus 0 and k ends. If $H \in [0, \frac{1}{2})$, then each end is embedded and contained in the concave part of a H -cylinder to which it is asymptotic. If $H = \frac{1}{2}$, then each end is tangent to the asymptotic boundary $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ along a vertical ideal geodesic. We study this case in Section 3.3.2.

(c) If $a < \infty$ and $b = \infty$, then $\bar{\Sigma}_{a,\infty}^*$ are called (H, k) -*nodoids* (or H -catenodoids if $k = 2$). They have genus 0 and k ends. If $H \in [0, \frac{1}{2})$, then each end is embedded and contained in the convex part of a H -cylinder to which it is asymptotic. If $H = \frac{1}{2}$, then the corresponding H -cylinders disappear at infinity. We study this case in Section 3.3.3.

If $0 \leq H \leq \frac{1}{2}$, the (H, k) -noids $\bar{\Sigma}_{\infty,b}^*$ coincide with the surfaces constructed by Plehnert in [78] by conjugation. Moreover, the $\frac{1}{2}$ -catenoids were originally discovered by Daniel and Hauswirth in [20], by means of its harmonic Gauss map as surfaces of critical mean curvature. If $H = 0$ the surfaces $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ and $\bar{\Sigma}_{b,a}^*$ are congruent for all $a, b \in (0, \infty]$, and the subfamilies of $(0, k)$ -noids and $(0, k)$ -nodois are the same (see Remark 1.14). The counterexamples to the Krust property appear in the family of H -catenodoids where we find non-embedded surfaces which come from by conjugation of a minimal graph in $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ over a convex domain in $\mathbb{M}^2(4H^2 - 1)$.

The fundamental piece of the minimal initial surface $\Sigma_{a,b}$ is a minimal graph in $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ over a triangle $T_{a,b} \subset \mathbb{M}^2(4H^2 - 1)$ determined by the angle $\frac{\pi}{k}$ in one of its vertexes (we assume it is $(0, 0)$) and the lengths $a, b \in (0, \infty]$, not both of them equal to ∞ , of the adjacent sides to that vertex. This fundamental piece of $\Sigma_{a,b}$ is a solution of a Jenkins-Serrin problem with values 0 over the sides of length a and b and $+\infty$ in the other side. When $a = \infty$ or $b = \infty$ the triangle becomes in a non bounded triangle with one ideal vertex in $\mathbb{H}^2(4H^2 - 1)$, or in a half strip in \mathbb{R}^2 with and angle $\frac{\pi}{k}$ if $H = \frac{1}{2}$, see Figure 3.11. The boundary of the conjugate surface of the fundamental piece consists of two symmetry curves contained in vertical planes which intersect with angle $\frac{\pi}{k}$ and two symmetry curves contained in horizontal planes, but one of them is ideal in the limit cases $a = \infty$ or $b = \infty$. By successive reflections about these vertical and horizontal planes we obtain the desired surfaces $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$.

In the case when a and b are finite, the solution of the Jenkins-Serrin problem can be deduced from the results of Younes in [94] for $0 < H < \frac{1}{2}$ and from the results of Pinheiro in [80] for $H = \frac{1}{2}$. However, when $a = \infty$ or $b = \infty$, these results must be adapted to guarantee the existence of solution, see Section 1.3.1. It is specially significant the case of $b = \infty$ and $H = \frac{1}{2}$, since in order to obtain the solution of the Jenkins-Serrin problem we construct a new family of minimal surfaces in Nil_3 that solve the problem for $k = 2$ and act as barriers. These belong to a family of

horizontal helicoids that we denote by \mathcal{H}_μ , foliated by Euclidean straight lines, see Figure 1.10. We observe that these lines are not geodesics in Nil_3 . The family \mathcal{H}_μ includes the helicoids given by Daniel and Hauswirth in [20, Section 7] with different techniques, as well as other helicoids with different direction of rotation and entire minimal graphs (among them we find the invariant graphs of Figueroa, Mercuri and Pedrosa [30]). Daniel in [19, Examples 8.4] gave another family of entire minimal graphs foliated by straight lines not included in our family \mathcal{H}_μ .

The uniqueness in these problems in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ for unbounded domains can be proved using the general maximum principle of Mazet, Rosenberg and Rodríguez [61], see Theorem 1.12. This result extends easily to $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ since here the base surface is also \mathbb{H}^2 and we have a well defined notion of asymptotic boundary. Nevertheless, it seems complicated that a similar result holds true in Nil_3 , where there is not a well defined asymptotic boundary. In fact, it is not clear if the solution that we give over the half-strip (even for the $k = 2$) is unique. Even more, in the limit case $a = b = \infty$, Nelli, Sa Earp and Toubiana proved that the solution to the Jenkins-Serrin problem is not unique, see [74].

As $H \neq 0$, different directions of the rotation of the normal θ along the vertical geodesics $\Gamma \subset \Sigma_{a,b}$ imply different curvature estimates for the conjugate curves $\Gamma^* \subset \Sigma_{a,b}^*$, as we mentioned above, see Equation (3.10) and Theorem 3.10. In particular, we exploit the fact that swapping the boundary values $+\infty$ and $-\infty$ in a Jenkins-Serrin problem (that is, swapping a and b in our construction) outputs very different H -surfaces. We have the (H, k) -noids (resp. (H, k) -nodoids) when $a = \infty$ (resp. $b = \infty$) and the rotation along the vertical geodesics contained in $\Sigma_{\infty,b}$ ($\Sigma_{a,\infty}$ resp.) is in the positive (resp. negative) direction, see Figure 3.11.

The differences can be also illustrated by the case of spherical helicoids in Berger spheres, in which different directions of rotation of such a helicoid lead to rotationally invariant unduloid-type or nodoid-type surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with $H > \frac{1}{2}$, as observed by Manzano and Torralbo in [54, Proposition 1], this motivates the name of (H, k) -nodoids and H -catenodoid. Likewise, vertical helicoids in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ or Nil_3 give rise to embedded and non-embedded rotationally invariant H -surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with $0 < H \leq \frac{1}{2}$, which are described, for example in [73, Proposition 5.2].

The limit of $\overline{\Sigma}_{a,b}^*$ when $a \rightarrow 0$ or $b \rightarrow 0$ is the union of k asymptotic

vertical H -cylinders that produce, after a suitable rescaling, a symmetric minimal k -noid in \mathbb{R}^3 , see Remark 3.30. As a matter of fact, for small values of the parameters, H -catenoids and H -catenodoids desingularize two tangent vertical H -cylinders from the concave or the convex side, respectively. In Lemma 3.29, we will show that there is a unique H -catenoid or H -catenodoid for each prescribed signed distance (in the admissible range) between the asymptotic vertical H -cylinders. Moreover, we discuss how, in the case $H = \frac{1}{2}$, the possible asymptotic horocylinders of the $(\frac{1}{2}, k)$ -noids and $(\frac{1}{2}, k)$ -nodoids disappear at infinity.

After the description of the symmetries and the asymptotic behaviour of the surfaces $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$, one of the most interesting problems we deal with in Section 3.3, is the embeddedness of $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$. Unlike the minimal Saddle Towers, the embeddedness of $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ may fail for $H > 0$, even when the fundamental piece is embedded, since it could scape from the horizontal slab of $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ determined by the horizontal planes that contain the boundary curves and produce self-intersections after reflecting the fundamental piece about these planes. By Studying the angle function of the surface $\Sigma_{a,b}$ in Lemma 3.31 and Proposition 3.33, we prove that $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ lies inside the slab for $k = 2$, but not in general for values of the parameters a, b and $k \geq 3$.

The embeddedness of the fundamental piece is therefore analysed by studying the embeddedness of the conjugate curves of the vertical geodesic contained Γ in $\Sigma_{a,b}$, where the angle of rotation θ along Γ is again determinant. In fact, when $\theta' > 0$ along Γ we can guarantee the embeddedness of the conjugate curves if the total variation of the normal is less than or equal to π , see item (c) in Theorem 3.10. This, along with the study of the limit surface $\Sigma_{\infty, \infty}$, which is a Scherk ideal H -graph if $0 < H < \frac{1}{2}$ or a entire graph when $H = \frac{1}{2}$, allows us to give conditions for the embeddedness of some (H, k) -noids and (H, k) -nodoids (see Propositions 3.34 and 3.35). For $0 < H < \frac{1}{2}$, all the H -catenoids are embedded while there are embedded and non-embedded H -catenodoids (see Figure 3.12). As for $H = \frac{1}{2}$ the possible asymptotic horocylinders disappear at infinity: all the $\frac{1}{2}$ -catenoids are embedded and all the $\frac{1}{2}$ -catenodoids are non-embedded. The domain of \mathbb{H}^2 over which they project has been numerically drawn in Figure 3.13.

It would be interesting to prove that the H -catenoid and H -catenodoids have finite total curvature and to prove a Schoen type theorem similar to that Hauswirth, Nelli, Sa Earp and Toubiana in [35] in the minimal case.

Another interesting problem will be to construct complete H -surfaces with genus 1 in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, for $0 < H < \frac{1}{2}$ similar to the case $H = 0$ previously described. The main difficulty is that we do not have the Krust property, which is used strongly in the case $H = 0$, plus there is no available description of H -surfaces with finite total curvature.

The asymptotic Plateau problem in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.

Another problem treated during the last years in the theory of minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, and later in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, is the so-called *asymptotic Plateau Problem*. For a given curve Γ in the asymptotic boundary with possibly a finite number of connected components which are simple and closed, the asymptotic Plateau problem is to decide if there exists an area-minimizing surface or a minimal surface with asymptotic boundary Γ . This problem has been well studied in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, motivated by the results of Anderson [3, 4] about the same problem in \mathbb{H}^3 .

The first result obtained in this theory was the Radó type theorem given by Nelli and Rosenberg in [71]. Recall that they show that for a simply closed curve Γ which projects graphically over $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ there exists a unique complete minimal surface with asymptotic boundary Γ . Such a surface is also a vertical graph, and therefore area-minimizing. This result extends easily to $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ as Folha and Peñafiel showed in [29].

On the other hand, if Γ is the union of two disjoint circles in the asymptotic boundary of \mathbb{H}^2 at vertical distance less than π , then Nelli and Rosenberg showed in [71, 72] that there exists a rotational catenoid with asymptotic boundary Γ . The same happens in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ when the distance is less or equal than $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$. This constant also appears in the surfaces known as *Tall Rectangles*, which receive this name since their asymptotic boundary is a rectangle of height bigger than π in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and bigger than $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$ in the half-space model of $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, see (1.25). Note that the shapes in the ideal boundary of $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ essentially depend on the model.

This motivates the following notion of height of a curve in the asymptotic boundary of $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ which also applies to $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ when $\tau = 0$. Given a curve Γ in $\partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ possibly disconnected, let $\Omega = \partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) \setminus \Gamma$. For each $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, let $h_\Gamma(p)$ be the length of the shortest connected component of $(\{p\} \times \mathbb{R}) \cap \Omega$.

We define the height of Γ as (see [45, Definition 1.1])

$$h_\Gamma = \inf_{p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2} h_\Gamma(p).$$

We say that Γ is *tall* if $h_\Gamma(p) > \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$ for all $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$.

Coskunuzer in [15], using the Tall Rectangles as barriers in a limit process, proved that, for any tall curve Γ , there exists an area-minimizing surface in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (possibly disconnected) with asymptotic boundary Γ . Moreover, he gave a non-existence result for area-minimizing surfaces when the height of a curve is less than π in an open arc. He also studied a more general problem when the curve Γ has components in $\mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$. Kloeckner and Mazzeo in [44] have also considered the problem in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ for curves Γ with components in $\mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$, showing that they must be geodesics. They have also given an example of a curve Γ in the asymptotic boundary of $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ whose height is smaller than π such that there are not area-minimizing surfaces with asymptotic boundary Γ , but there is a minimal surface with asymptotic boundary Γ .

Sa Earp and Toubiana proved in [88] a general non-existence result for minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, showing that there are not minimal surfaces properly immersed in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ that have a *thin tail*, that is, there is a vertical line L in $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ and a subarc $\Gamma' \subset \Gamma$ such that $\Gamma' \cap L \neq \emptyset$ and $\partial\Gamma' \cap L = \emptyset$ that Γ' is in one side of L , and Γ' is contained in a slab of height π . As consequence, they proved that there are not minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with asymptotic boundary a Jordan curve homologous to zero in $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ strictly contained in a slab of height π .

Ferrer, Martín, Mazzeo and Rodríguez in [27] proved existence and non-existence results for minimal annuli in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ having two curves in the asymptotic boundary projecting graphically onto $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Klaser, Menezes and Ramos in a recent work [45] extend some of these results to $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Using the Tall Rectangles in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ they prove that for any tall curve Γ in $\partial_\infty(\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}))$ there is an area-minimizing surface in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ (possibly disconnected) with asymptotic boundary Γ . They also obtain a non-existence result when the height of the curve is less than $(\sqrt{1 + 4\tau^2} - 4\tau)\pi$ in an open arc. Their estimate is only valid when $|\tau| < \frac{1}{\sqrt{12}}$, because following the ideas of Coskunuzer and Sa Earp y Toubiana, they send to infinity a compact piece of the rotational catenoid in order to compare the translated catenoid with the possibly area-minimizing surface. The curves in the boundary of

this piece of the catenoid are contained in the minimal surface known as *umbrella* (the union of all horizontal geodesics through a point, see Example 1.8), which is not invariant by hyperbolic translations, unlike in the case of $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. This entails that the gap between the boundary components does not remain constant when we translate the piece of the catenoid, not leading the expected optimal estimate.

In Chapter 4 we will extend the non-existence results for minimal surfaces of Sa Earp and Toubiana [88] to the case of $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ and we will improve the non-existence result for area-minimizing surfaces of Klaser, Menezes and Ramos [45] obtaining the expected estimate $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$. We would like to remark that Theorems 4.6 and 4.11, in which these results are proved, are local in the sense that the hypothesis on the curve are only needed in a neighbourhood.

In the proof of Theorem 4.6 we cannot use rotational catenoids as Sa Earp and Toubiana did because of the above reasons. To overcome this problem, we construct a family of compact minimal annuli in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ in the half-space model whose boundary curves are contained in a minimal surface invariant by hyperbolic translations, that we call *Slice* and we denote by \mathcal{S} . In the half-space model of $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ this surface has equation $\{t = t_0\}$, where t is the third coordinate. Moreover, we take advantage of the fact that in this model there are some hyperbolic translations with a simple expression, that keep the third coordinate constant, see Section 1.2 for the details about the space $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. These annuli are constructed by the Douglas criteria, by comparing an annulus that is defined using the height function of the rotational catenoid in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, with two compact disks of the Slices $\{t = 0\}$ and $\{t = h\}$ with the same boundary, see Section 4.1. Moreover, we will use these annuli to extend the non-existence results for area-minimizing surfaces of Klaser, Menezes and Ramos when the height of the curve is less than the expected constant $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, see Theorem 4.11. The estimate of the height is sharp in both Theorems except for maybe the critical value $h_\Gamma = \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, being this problem still open in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

The Slab Theorem. Another important problem in the theory of minimal surfaces is to classify such surfaces by their topological type. Collin, Hauswirth and Rosenberg proved in [12] that a properly immersed minimal surface in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ of finite topology inside a slab of width strictly less than π has

multigraphical ends. Moreover, if the surface is embedded, it has graphical ends; and if in addition it is simply connected, then it is an entire graph. This result is known as the Slab Theorem. Lima in [48] extended this result to the case $\tau \neq 0$ by replacing the slab region by a *generalized slab region*, see Definition 4.12. In Section 4.3 we prove a Slab Theorem in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ in the region between an entire minimal graph G_1 in the cylinder model whose asymptotic boundary is a closed graphical curve over $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ and it is bounded away from the vertical (see Definition 4.12), and its translated copy $G_2 := G_1 + (0, 0, \sqrt{1 + 4\tau^2\pi} - \epsilon)$, where ϵ is any positive number less than $\sqrt{1 + 4\tau^2\pi}$, see Theorem 4.13.

To this end, we use again the family of annuli constructed in Section 4.1. The main idea is to prove that we can move around the asymptotic boundary of the entire graphs in such a way the annuli separate the two entire graphs near the asymptotic boundary. That is possible thanks to the nice properties of the annuli. After that, one can follow the same ideas of Collin, Hauswirth and Rosenberg [12] and Lima [48] in order to prove the result using the Dragging Lemma of Collin, Hauswirth and Rosenberg, see Lemma 4.16.

Jenkins-Serrin constructions and the Scherk helicoidal examples. Related to the asymptotic Plateau problem are the constructions of minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ in [83] and the counterparts in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ of the Section 2.2.1. They solve the asymptotic Plateau problem for some special curves Γ composed of vertical straight lines in $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and horizontal geodesics in $\mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$.

Similar techniques as in [83] are used in [84] to construct complete embedded minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ which are non proper. These surfaces are interesting in relation to the Calabi-Yau conjecture for embedded minimal surfaces. This conjecture says that any complete embedded minimal surface in \mathbb{R}^3 is necessarily proper. Colding and Minicozzi in [8] showed that any complete minimal surface embedded in \mathbb{R}^3 with finite topology is proper. Meeks, Pérez and Ros in [66] weakened the hypothesis of finite topology to finite genus and a countable number of limit ends. The examples constructed by Rodríguez and Tinaglia in [84] show that the conjecture does not hold in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ even for simply connected surfaces. We construct the analogous examples in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ in Section 4.4 showing that the con-

ture does not hold either, as it was expected.

Introducción

La teoría de superficies mínimas y de curvatura media constante en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 es un área clásica de la Geometría Diferencial que ha sabido aunar fructíferamente técnicas puramente geométricas con otras de naturaleza analítica como la variable compleja, la teoría geométrica de la medida y la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, así como con otros campos de la Topología y del Álgebra. Hoy en día sigue siendo un campo de intensa investigación y desarrollo, con aplicaciones no solo en Geometría Diferencial, sino también en otras ramas de las matemáticas, la biología y la ingeniería.

Los orígenes de las superficies mínimas se remontan a 1760 con un problema propuesto por Lagrange anteriormente estudiado por Euler para el caso de superficies de revolución. Este problema consistía en encontrar una superficie de área mínima que tuviera por frontera una curva cerrada y sin auto-intersecciones fijada a priori. Este planteamiento se corresponde con el posterior modelo experimental ideado por el físico Plateau, que consistía en introducir una curva cerrada de alambre fino en una disolución de agua y jabón. Retirando el alambre cuidadosamente, aparece (si existe) una solución a este problema formada por una película de jabón, que tiene en general la forma de una superficie regular y se mantiene en equilibrio por la acción de la tensión superficial del líquido. Según la ley de Laplace-Young dicha superficie tiene curvatura media nula. A las superficies con curvatura media nula se les conoce como *superficies mínimas*.

Este problema de Lagrange aparecía como un ejemplo de un método que hoy en día se conoce como el Cálculo de Variaciones. Así, las superficies *área-minimizantes*, es decir, aquellas que resuelven el problema de minimización, son puntos críticos del funcional Área (que equivale a ser superficie mínima). Aunque no todos los puntos críticos de este funcional resuelven el problema de minimización, las superficies mínimas observa-

bles son además mínimos locales del funcional Área. En particular, son estables, es decir, la segunda derivada del funcional Área es mayor o igual que cero para cualquier variación de la superficie con soporte compacto.

El concepto de superficie de curvatura media constante $H \in \mathbb{R}$ o H -superficie se extendió a cualquier 3-variedad riemanniana como punto crítico del funcional

$$\text{Area} - 2H \cdot \text{Volumen},$$

donde $2H$ coincide con la traza del operador de Weingarten, véase por ejemplo [5].

Es natural estudiar esta clase de superficies en las 3-variedades riemannianas con mayor grupo de isometrías, donde la teoría es más rica e interesante. En este sentido los espacios más simétricos son los *espacios homogéneos*, donde para cada par de puntos del espacio existe una isometría que lleva un punto en el otro. Los espacios homogéneos 3-dimensionales simplemente conexos están clasificados y todos ellos son isométricos a un grupo de Lie de dimensión 3 con cierta métrica invariante izquierda, salvo los productos riemannianos $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ con $\kappa > 0$, véase [65, Theorem 2.4]. De entre ellos, los más simétricos son los espacios forma $\mathbb{M}^3(\kappa)$, que son las 3-variedades simplemente conexas con curvatura seccional constante $\kappa \in \mathbb{R}$, con grupo de isometrías de dimensión 6. Tras los espacios forma, los más simétricos son los que tienen un grupo de isometrías de dimensión 4 que se pueden clasificar como una familia 2-parámetrica de espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, donde $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$, véase [17]. Estos son los espacios homogéneos donde centraremos nuestro estudio.

La familia $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ contiene a los espacios producto $\mathbb{E}(-1, 0) \equiv \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{E}(1, 0) \equiv \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, así como a los grupos de Lie $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, Nil_3 y $\text{SU}(2)$ con métricas invariantes izquierda que tienen un campo de Killing unitario ξ , véase [17, 50]. En este sentido, los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ admiten una submersión riemanniana $\Pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ con curvatura constante del fibrado τ sobre $\mathbb{M}^2(\kappa)$, la superficie simplemente conexa de curvatura constante κ , y cuyas fibras son las curvas integrales de un campo de Killing unitario ξ . Esta estructura se conoce como *submersión de Killing*, véase [50]. El campo de Killing ξ representa pues un campo destacado que nos permite definir los conceptos de dirección *vertical*, como aquella tangente a ξ , y de dirección *horizontal*, como aquella ortogonal a ξ . Además, esta estructura nos permite hablar de *cilindro sobre una curva* y de *multigrafo*, conceptos que

serán de gran importancia a lo largo de toda esta memoria. Definimos el *cilindro sobre una curva* diferenciable $\alpha \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$ como $\Pi^{-1}(\alpha) \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$; se tiene que $\Pi^{-1}(\alpha)$ es una superficie llana cuya curvatura media coincide con la mitad de la curvatura de α . Así los H -cilindros, se proyectan sobre una curva de curvatura constante en $\mathbb{M}^2(\kappa)$. En el caso $H = 0$, a los H -cilindros también los llamaremos planos verticales, si bien no son superficies totalmente geodésicas cuando $\tau \neq 0$. Una inmersión isométrica $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ se dice un *multigrafo* si $\phi(\Sigma)$ es transversa al campo de Killing ξ , véase el epígrafe "Grafos y multigrafos" de la Sección 1.1.2.

En los espacios $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, que se corresponden con $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ para $\kappa < 0$, hay una noción de frontera asintótica que definimos a continuación. Para ello identificamos topológicamente $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de forma natural (eligiendo una sección global de Π e identificándola con $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$) y consideraremos la compactificación producto en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. De esta forma, la frontera asintótica de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ es homeomorfa a la *frontera vertical* $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ junto con las *fronteras horizontales* $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ y $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$, donde $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ denota la frontera asintótica de \mathbb{H}^2 . Esto además nos permite entender mejor el comportamiento asintótico en infinito de una superficie Σ inmersa en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Diremos que un punto $p \in \partial_\infty(\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}))$ pertenece a la frontera asintótica de una superficie Σ , que denotaremos por $\partial_\infty \Sigma$, si existe una sucesión divergente de puntos $p_n \in \Sigma$ que converge a p en la compactificación producto.

El estudio de superficies de curvatura media constante en los espacios homogéneos ha tenido una considerable importancia durante los últimos años, siendo este estudio un paso natural en la generalización de los resultados clásicos en los espacios forma. Esto se pone de manifiesto por ejemplo en los resultados de clasificación de esferas en los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ de Abresch y Rosenberg en [1, 2], en la reciente clasificación de esferas en grupos de Lie métricos de Meeks, Pérez, Mira y Ros en [64], en los Teoremas de semi-espacio obtenidos por Mazet en [60], Daniel y Hauswirth en [20], Hauswirth, Rosenberg y Spruck en [37] y Hauswirth, Menezes y Rodríguez en [34] y en el trabajo de Daniel [17, 19] donde se generaliza tanto la correspondencia de Lawson entre superficies mínimas de \mathbb{S}^3 y 1-superficies de \mathbb{R}^3 como el concepto de familia asociada de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 . Esto último se materializa en una correspondencia isométrica entre H -superficies en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, que estudiaremos en detalle en el Capítu-

lo 3. También han sido de especial relevancia en la teoría los trabajos de Fernández y Mira [24, 25, 26], donde muestran la existencia de una aplicación de Gauss armónica para superficies de curvatura media constante $H = \frac{1}{2}$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y superficies mínimas en Nil_3 , trabajos que llevaron a la solución del problema de Bernstein (esto es, a la clasificación de los grafos enteros mínimos) en Nil_3 .

Uno de los casos más investigados de la teoría de H -superficies en los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ son las superficies mínimas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a raíz del trabajo de Rosenberg en [85]. Después de esto hubo varios trabajos entre los que destacamos el trabajo de Nelli y Rosenberg [71], donde muestran que el Teorema de Bernstein falla en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ resolviendo el problema de Radó para curvas en la frontera asintótica que se proyectan gráficamente (véase también en el epígrafe "El problema de Plateau Asintótico en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ "), el trabajo de Sa Earp y Toubiana [87], donde clasifican superficies mínimas invariantes por un grupo de isometrías, y el trabajo de Hauswirth [31], donde se construyen y clasifican las superficies mínimas foliadas por curvas horizontales de curvatura constante. Destacamos también el trabajo de Hauswirth, Sa Earp y Toubiana en [39] donde extienden el concepto de familia asociada e inmersiones mínimas conjugadas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, así como los artículos de Daniel [17, 18] citados anteriormente.

Uno de los artículos más celebrados en la teoría fue el artículo de Collin y Rosenberg [14], donde resuelven un problema de Dirichlet en dominios no acotados para la ecuación de los grafos mínimos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con valores asintóticos $\pm\infty$ sobre lados geodésicos de un polígono ideal \mathbb{H}^2 , conocido como *problema de Jenkins-Serrin*, también tratado anteriormente por Nelli y Rosenberg en [71] en el caso acotado, que toma el nombre del mismo problema en el espacio \mathbb{R}^3 tratado en [41] por Jenkins y Serrin. Collin y Rosenberg usan estos ejemplos para construir grafos enteros mínimos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que son conformemente equivalentes al plano complejo \mathbb{C} . Considerando la proyección natural de estos grafos sobre \mathbb{H}^2 , se obtiene un difeomorfismo armónico entre \mathbb{C} y \mathbb{H}^2 , refutando así una conjetura de Schoen y Yau. Más tarde en [61] Mazet, Rodríguez y Rosenberg resolvieron el problema de Jenkins-Serrin para dominios mucho más generales. Algunos casos particulares del problema de Jenkins-Serrin fueron estudiados en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ por Younes en [94] y Melo en [69] y en Nil_3 por Pinheiro en [80]. En la Sección 1.3 recopilamos estos resultados y resolvemos el problema de Jenkins-

Serrin para unos dominios particulares en $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ y Nil_3 . Usaremos estos grafos en la Sección 3.3 para construir por conjugación H -superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Este problema también ha sido estudiado para el caso de curvatura media constante $0 < H < \frac{1}{2}$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ en dominios acotados por Hauswirth, Rosenberg y Spruck en [38] y en dominios no acotados por Folha y Melo en [28]. En este caso los H -grafos toman valores asintóticos $\pm\infty$ sobre curvas de curvatura constante $\pm 2H$.

Superficies con curvatura total finita.

Otro problema que ha recibido una atención importante en la teoría de superficies mínimas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es la construcción y clasificación de superficies mínimas con curvatura total finita, esto es, aquellas cuya curvatura de Gauss es una función integrable sobre la superficie. En el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 las superficies mínimas con curvatura total finita son una de las familias mejor conocidas gracias al trabajo de Osserman [76]. Usando que la aplicación de Gauss de una superficie mínima de \mathbb{R}^3 es conforme, si su curvatura total es finita, se prueba que esta debe ser un múltiplo de -4π y la superficie es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta menos k puntos por el resultado de Huber [40].

Es natural esperar que en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ la familia de superficies con curvatura total finita tenga propiedades destacadas. De hecho, el trabajo combinado de Hauswirth y Rosenberg [36], Hauswirth, Nelli, Sa Earp y Toubiana [35] y Hauswirth, Menezes y Rodríguez [33] muestra que una superficie mínima inmersa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tiene curvatura total finita si y solo si es propia, tiene topología finita y cada uno de sus finales es asintótico a una *poligonal admisible en infinito* (ver Definición 2.2 y Teorema 2.4). Combinando esta clasificación con el ya mencionado trabajo previo de Hauswirth y Rosenberg [36] se tiene que una superficie mínima completa y orientable con curvatura total finita en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta menos k puntos que se corresponde con los finales de la superficie. Además, la curvatura satisface una fórmula de tipo Gauss-Bonnet como expresa la fórmula (2.1) y es un múltiplo de -2π , véase el Teorema 2.1. El estudio de superficies mínimas con curvatura total finita en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es más sencillo que en el resto de espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ en parte debido a que la curvatura de Gauss K es negativa, como muestra la ecuación de Gauss $K = \det A - \nu^2$, véase la Ecuación (1.8).

Aunque esta caracterización geométrica de las superficies con curvatura total finita es muy satisfactoria desde el punto de vista teórico, es difícil, en general, determinar cuándo una familia concreta de poligonales admisibles en infinito bordean realmente una superficie mínima, o si hay ejemplos para una topología concreta. De hecho, no hay muchos ejemplos con curvatura total finita en la literatura. Damos a continuación algunas de las construcciones más destacadas.

- Los planos verticales son el caso más sencillo y son los únicos que tienen curvatura total 0, véase [39, Corollary 5].
- Los grafos de Scherk son grafos mínimos sobre un polígono ideal en \mathbb{H}^2 con $2a$ lados geodésicos ($a \geq 2$), donde toman alternativamente los valores $+\infty$ y $-\infty$. Son solución del problema de Jenkins-Serrin más sencillo sobre un dominio no acotado, resuelto en [71, 14]. Estos tienen género cero y un final asintótico a una poligonal admisible en el infinito con a geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$. Tienen curvatura total finita $-2(a-1)\pi$. En el caso de $a = 2$, Pyo y Rodríguez probaron en [83] que son la únicas superficies mínimas completas con curvatura total -2π .
- Los ejemplos *Twisted Scherk* construidos por Pyo y Rodríguez en [83] con género cero, un final y curvatura total $-4b\pi$ para cada $b > 0$. Algunos de estos son embebidos y son los únicos ejemplos conocidos hasta ahora que no son grafos ni bigrafos, esto es, la unión de dos grafos verticales siendo uno el reflejado de otro por una simetría especular respecto a un plano horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$.
- Los k -noides mínimos construidos por Rodríguez y Morabito en [70] y también por Pyo en [81]. Estos tienen género cero y k finales, con cada final asintótico a un plano vertical. Dentro de esta familia se encuentran las *catenoides horizontales* cuando $k = 2$, que fueron caracterizadas por Hauswirth, Nelli, Sa Earp y Toubiana en [35] como la únicas superficies mínimas completas (conexa) con curvatura total finita y dos finales, cada uno asintótico a un plano vertical, véase el Teorema 2.7. Para el caso de tres o más finales asintóticos a planos verticales no hay un resultado de este estilo, incluso cuando el género es cero.
- Para género distinto de cero, Martín, Mazzeo y Rodríguez construyeron en [58] superficies mínimas propiamente embebidas con curvatu-

ra total finita en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de género $g \geq 0$ y k finales asintóticos a planos verticales, siendo k suficientemente grande dependiendo de g .

En la Sección 3.2 ampliaremos esta lista de ejemplos construyendo superficies mínimas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura total finita, género 1 y $k \geq 3$ finales, cada uno asintótico a un plano vertical.

En el caso de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ no se conocen muchos ejemplos con curvatura total finita, en la Sección 2.2.1, siguiendo las técnicas de Pyo y Rodríguez [83] construimos los ejemplos análogos a las superficies Twisted Scherk. Estas pueden verse como solución al problema de Plateau asintótico cuando Γ es una poligonal admisible en el infinito (ver epígrafe "El Problema de Plateau Asintótico en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ "). Estas tienen curvatura total finita por un resultado de Hauswirth, Menezes y Rodríguez en [33], véase el Teorema 2.12.

Superficies mínimas con curvatura total finita -4π en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Según el resultado de Pyo y Rodríguez [83] anteriormente citado, el siguiente valor de la curvatura total para el cual no están clasificadas las superficies mínimas completas con curvatura total finita es -4π . Con esta curvatura solo se conocen los grafos de Scherk sobre un polígono ideal de 6 lados, las superficies Twisted Scherk con $b = 1$ y la catenoide horizontal. En la Sección 2.1, analizamos las superficies mínimas propiamente embebidas con curvatura total finita -4π . Probamos que tal superficie es una catenoide horizontal o una superficie simplemente conexa con un solo final asintótico a cierta poligonal admisible en el infinito (véase el Teorema 2.9 y la Figura 2.1).

La clasificación completa de las superficies mínimas completas, embebidas y con curvatura total -4π sigue siendo un problema abierto. Esperamos que los únicos ejemplos posibles sean la catenoide horizontal, los grafos de Scherk y las superficies Twisted Scherk.

Construcciones conjugadas en los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Daniel en [17] reveló la existencia de una correspondencia isométrica de tipo Lawson para H -superficies en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Dados los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ y $\mathbb{E}(\kappa^*, \tau^*)$, donde $\kappa - 4\tau^2 = \kappa^* - 4(\tau^*)^2$, y dados $\theta, H, H^* \in \mathbb{R}$ verificando $iH + \tau = e^{i\theta}(iH^* + \tau^*)$, Daniel probó que existe una correspondencia isométrica entre H -superficies de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ y H^* -superficies de $\mathbb{E}(\kappa^*, \tau^*)$, véase el Teorema 3.1. Esta correspondencia es particularmente relevante cuando la

aplicamos entre superficies mínimas de un espacio $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ y H -superficies en $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ para $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$, esto se corresponde con tomar $\theta = \frac{\pi}{2}$ en el Teorema 3.1. Las inmersiones (resp. superficies) se conocen como inmersiones (resp. superficies) conjugadas. En este caso los parámetros están unívocamente determinados por $\kappa = 4H^2 + \epsilon$ y $\tau = H$. El caso $\kappa = 4\tau^2$ (y, por tanto, $\epsilon = 0$) se reduce a la correspondencia de Lawson entre superficies mínimas de \mathbb{S}^3 y superficies de curvatura media constante 1 en \mathbb{R}^3 .

Esta correspondencia pone de manifiesto el papel destacado de la curvatura media crítica $H = \frac{1}{2}$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, siendo el comportamiento de las H -superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ muy distinto para $0 < H < \frac{1}{2}$, $H = \frac{1}{2}$ y $H > \frac{1}{2}$. Se tiene que una H -superficie con $0 < H < \frac{1}{2}$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es localmente isométrica a una superficie mínima en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$, una $\frac{1}{2}$ -superficie en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es localmente isométrica a una superficie mínima en $\text{Nil}_3 = \mathbb{E}(0, 1/2)$ y una H -superficie con $H > \frac{1}{2}$ es localmente isométrica a una superficie mínima en la esfera de Berger $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$, véase la tabla 3.1.

El hecho de que la conjugación goce de propiedades destacadas en este tipo de construcción se debe a la siguiente correspondencia entre curvas probada por Manzano y Torralbo en [54] y por Plehnert en [77] independientemente: Sean $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ y $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ inmersiones conjugadas y $\alpha \subset \Sigma$ una curva diferenciable. Si $\gamma = \phi(\alpha)$ es una geodésica horizontal (resp. vertical) de $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$, entonces $\gamma^* = \phi^*(\alpha)$ está contenida en un plano vertical (resp. horizontal) de $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$. Además $\phi^*(\Sigma)$ corta ortogonalmente a dicho plano a lo largo de γ^* , véase el Lema 3.6. Además hay una correspondencia entre simetrías axiales respecto a geodésicas horizontales (resp. verticales) y simetrías especulares respecto a planos verticales (resp. horizontales), véase la Proposición 3.7.

Esto permite seguir la siguiente hoja de ruta para construir H -superficies en los espacios producto, conocida como construcción conjugada, que se basa en las ideas originales de Lawson [46] y Karcher [43] para construir H -superficies en los espacios forma: primero consideramos una superficie mínima en $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ cuya frontera esté compuesta por geodésicas horizontales y verticales, después consideramos la superficie conjugada en el espacio producto y finalmente extendemos esta por simetría hasta obtener una superficie completa en $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$. Esta técnica ha sido empleada en diversas construcciones de superficies mínimas y de curvatura media constante, como por ejemplo en [54, 55, 56, 57, 59, 62, 70, 77, 78, 81]. En

este trabajo se ha puesto especial interés y se han proporcionado nuevas técnicas para abordar el caso en que la superficie contiene geodésicas verticales ideales (solo es posible en $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ o $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$) o geodésicas horizontales ideales, donde a menudo la superficie inicial viene dada como solución a un problema de Jenkins-Serrin.

A lo largo de la Sección 3.1 estudiaremos en detalle las propiedades de la construcción conjugada, donde destacamos el análisis pormenorizado de la curva conjugada de un segmento vertical contenido en la frontera de un multigrafo Σ . Mostramos que, para el caso $H > 0$, la dirección de giro del vector normal a lo largo de este segmento juega un papel determinante debido a la presencia de curvatura del fibrado en el espacio inicial $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$. Nótese que la curvatura del fibrado depende a su vez de la orientación del ambiente. Si $\Gamma \subset \partial\Sigma$ es un segmento vertical, y $\Gamma^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$ denota su curva conjugada contenida en la frontera de la superficie conjugada Σ^* , definimos θ , el *ángulo de rotación a lo largo de Γ* , como el ángulo que forma el normal N con los campos horizontales $\{E_1, E_2\}$ en una base ortonormal $\{E_1, E_2, \xi\}$ orientada positivamente. Llamamos $\Omega \subset \mathbb{M}^2(4H^2 - 1)$ al dominio donde se proyecta Σ , N^* al normal de Σ^* y Ω^* al dominio donde se proyecta Σ^* . Entonces se deducen las siguientes propiedades:

- Si $\theta' > 0$ (resp. $\theta' < 0$) entonces, N^* apunta hacia el interior (resp. exterior) de Ω^* a lo largo de Γ^* con $\kappa_g < 2H$ (resp. $\kappa_g > 2H$), y Σ^* está localmente contenido en $\mathbb{H}^2 \times (-\infty, z_0]$ (resp. $\mathbb{H}^2 \times [z_0, +\infty)$) alrededor de Γ^* .
- Si $4H^2 - 1 < 0$, $\theta' > 0$ y la rotación total del normal N es menor o igual que π , entonces Γ^* es embebida.

Esto se pone de manifiesto en la fórmula (3.10) y en el Teorema 3.10 (véase también la Figura 3.2), donde se explica en detalle la diferencia de un sentido de giro con respecto a otro. Esto hará que las H -superficies obtenidas por conjugación sean muy distintas, como se verá en los ejemplos construidos en la Sección 3.3 que comentaremos más adelante, y pone de manifiesto el papel fundamental que tiene la orientación en los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, como se ha mencionado anteriormente

Construcción de k -noides y Saddle Towers con género 1 mínimos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Utilizaremos la correspondencia de Daniel en el caso $H = 0$ pa-

ra construir superficies mínimas propiamente Alexandrov-embebidas con curvatura total $-4k\pi$, género 1 y $k \geq 3$ finales. Son conformemente equivalentes a un toro menos k puntos. Se pueden ver como los análogos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a los k -noides de género 1 construidos por Mazet en [59] en \mathbb{R}^3 . De hecho, nuestra construcción está inspirada en este trabajo de Mazet, y en la construcción de $\frac{1}{2}$ -superficies con género 1 en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de Plehnert [77].

Fuera de un conjunto compacto, los k -noides mínimos con género 1 se parecen a los k -noides mínimos citados anteriormente construidos por Morabito y Rodríguez [70] y Pyo [81] ya que son asintóticas a k planos verticales, simétricas con respecto a un plano horizontal y k planos verticales equiangulares con una geodésica vertical común, véase el Teorema 3.17. Aunque cada final es embebido, estos k -noides de género 1 no son globalmente embebidos en general. No se puede realizar una construcción similar para $k = 2$ ya que como comentamos anteriormente las únicas superficies mínimas completas y conexas con curvatura total finita asintóticas a dos planos verticales son las catenoides horizontales por el resultado de Hauswirth, Nelli, Sa Earp y Toubiana, véase el Teorema 2.7.

Para construir estas superficies comenzamos considerando la solución de un problema de Jenkins-Serrin en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ sobre un triángulo con dos vértices interiores y uno ideal. Fijando un vértice interior y el vértice ideal (por ejemplo, en $(0, 0)$ y en $(1, 0)$ en el modelo del disco para \mathbb{H}^2), el triángulo queda determinado por la longitud $a > 0$ del lado finito y el ángulo $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ en el vértice interior fijado. Llamaremos $\Sigma(a, \varphi, b)$ a la solución del problema de Jenkins-Serrin que toma el valor $+\infty$ sobre el lado opuesto al vértice interior fijado, $b \in \mathbb{R}$ sobre el lado de longitud a y 0 en el lado restante, véase la Figura 3.4.

La superficie conjugada $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ es otro grafo mínimo en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ debido al resultado de tipo Krust de Hauswirth, Sa Earp y Toubiana [39] que comentaremos en la siguiente sección. Las dos geodésicas horizontales contenidas en la frontera de $\Sigma(a, \varphi, b)$, se corresponden por conjugación con dos curvas de simetría en $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ contenidas en planos verticales. La media geodésica vertical y el segmento vertical de longitud $|b|$ contenidos en la frontera de $\Sigma(a, \varphi, b)$ se corresponden por conjugación con curvas de simetría en $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ contenidas en planos horizontales, véase la Figura 3.4.

El objetivo será encontrar valores de los parámetros (a, φ, b) que aseguren que, después de que se refleje $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ mediante simetrías especulares

respecto a los planos verticales y horizontales de simetría, se obtenga una superficie completa de género 1 y $k \geq 3$ finales. Más concretamente, probaremos que para cada valor $\frac{\pi}{k} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ existen valores a_φ y b_φ , cumpliendo esto.

De forma análoga al trabajo de Plehnert [77], definimos dos problemas de periodos de forma que al resolver ambos obtengamos la superficie completa de género 1 deseada, véase la Sección 3.2.1. El primer problema de periodos se resolverá cuando las curvas de simetría horizontales contenidas en la frontera de $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ caigan en el mismo plano horizontal. El segundo problema de periodos se resolverá cuando los planos verticales que contienen a las curvas de simetría se corten formando un ángulo $\frac{\pi}{k}$. Observamos que cuando $\varphi = \frac{\pi}{k}$ y $b = 0$ se recuperan los k -noides mínimos de género 0 (simétricos) de Morabito y Rodríguez [70] y de Pyo [81].

El valor b_φ está unívocamente determinado por φ y a_φ . Sin embargo, nuestro análisis del segundo periodo no nos permite probar la unicidad del valor a_φ ya que no es clara la dependencia del ángulo que forman los planos verticales de simetría con respecto a los parámetros. Aunque es esperable que haya valores del parámetro φ para los cuales la superficie completa sea embebida, parece complicado probarlo. Aunque la pieza fundamental es un grafo contenido en un semi-espacio, se puede perder el embebimiento después de reflejar la pieza fundamental respecto a los planos verticales. Podemos asegurar que la superficie obtenida es embebida si el valor de a_φ que resuelve ambos problemas de periodos es mayor que cierta cantidad $a_{\text{emb}}(\varphi)$, véase la Ecuación 3.21.

Por un argumento similar al de Collin y Rosenberg en [14] usando el Lema de Fatou probamos que las superficies obtenidas tienen curvatura total finita. No obstante, esto también se deduce de la caracterización de superficies mínimas con curvatura total finita de Hauswirth, Menezes y Rodríguez en [33], ya que las superficies son propias, tiene topología finita y el borde asintótico de cada uno de sus finales coincide con el borde asintótico de un plano vertical. El estudio de las superficies con curvatura total finita de [36, 35, 33] nos permite controlar el comportamiento asintótico de los finales de los k -noides con género 1.

Además podemos adaptar la construcción para producir superficies mínimas invariantes por una traslación vertical que llamamos Saddle Towers con género 1, por la similitud a los Saddle Towers de Morabito y

Rodríguez [70] y Pyo [82]. Estos tienen género 1 en el cociente de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por la traslación vertical y no son embebidas en general, véase el Teorema 3.18. De forma análoga al caso de los k -noides con género 1 se puede ver que los Saddle Towers con género 1 tienen curvatura total $-4k\pi$ en el cociente de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por la traslación vertical, usando en este caso la caracterización de superficies mínimas con curvatura total finita en espacios cociente de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de Hauswirth y Menezes en [32]. Estos son, de hecho, los primeros ejemplos donde se aplican dichos resultados de Hauswirth y Menezes.

El análisis de los problemas de periodos nos permite además encontrar superficies que ya no son invariantes por un grupo discreto de rotaciones sino por un grupo discreto de traslaciones parabólicas o hiperbólicas, que llamaremos ∞ -noides parabólicos o hiperbólicos respectivamente, véase la Figura 3.10. Estas se obtienen cuando los planos verticales de simetría de $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ son asintóticos (∞ -noides parabólicos) o no se intersecan (∞ -noides hiperbólicos). Estas superficies tienen infinitos finales, y además podremos garantizar el embebimiento de algunos ∞ -noides en el caso hiperbólico ya que podemos elegir el parámetro $a_\varphi > a_{\text{emb}}(\varphi)$, véase el Teorema 3.25.

Construcción de H -Superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y la propiedad de Krust. En las secciones previas se han dado diversos motivos de por qué la técnica de conjugación ha sido especialmente relevante en el caso $H = 0$. Uno de los motivos es que Hauswirth, Sa Earp y Toubiana en [39] extendieron un teorema de Krust (no publicado, véase [43, Theorem 2.4.1]) demostrando que la superficie mínima conjugada de un grafo mínimo en el espacio producto $M \times \mathbb{R}$, donde M es una superficie riemanniana con curvatura de Gauss constante no positiva, definido sobre un dominio convexo, debe ser un grafo, véase el Teorema 3.15. Este resultado es muy útil a la hora de probar el embebimiento de la superficie conjugada como en el caso de los k -noides mínimos de Morabito y Rodríguez [70] y Pyo [81], o en la prueba de que los finales de los k -noides mínimos con género 1 de la sección anterior son embebidos, así como en otras muchas construcciones. Sin embargo, a pesar de que se esperaba que esta propiedad se extendiera para los casos $0 < H < \frac{1}{2}$, ya que a menudo las H -superficies de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ para estos valores por debajo de la curvatura media crítica $H = \frac{1}{2}$ tienen comportamientos

similares a las superficies mínimas de \mathbb{R}^3 , en la Sección 3.3 mostramos que no se cumple para ningún $H > 0$, véase el Teorema 3.37. Sería muy interesante encontrar hipótesis extra para probar un teorema de tipo Krust para $0 < H < \frac{1}{2}$, ya que el embebimiento suele ser uno de los problemas más difíciles en este tipo de construcciones conjugadas. Manzano y Torralbo recientemente han conseguido probar el embebimiento en algunos casos particulares para $H > \frac{1}{2}$ mediante técnicas que requieren identificar y analizar funciones con contenido geométrico en el núcleo del operador de estabilidad común que tienen las superficies conjugadas, véase [56].

Los contraejemplos que construimos para ver que la propiedad de Krust no se cumple para $0 < H \leq \frac{1}{2}$ pertenecen a una familia más amplia 2-paramétrica de H -superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con género 0 y k finales. Estas superficies incluyen a los Saddle Towers y k -noides mínimos simétricos de Morabito y Rodríguez [70] y Pyo [81, 82] cuando $H = 0$. Sin embargo, para $0 < H \leq \frac{1}{2}$ su comportamiento es bastante diferente; por ejemplo, destacamos que hay ejemplos no embebidos con 2 finales para cualquier valor de $0 < H \leq \frac{1}{2}$, a diferencia del caso $H = 0$ en el que todas las catenoides horizontales son embebidas.

Más concretamente, para cada $0 \leq H \leq \frac{1}{2}$ y $k \geq 2$ entero, construimos mediante conjugación una familia 2-paramétrica de H -superficies propias Alexandrov-embebidas que denotamos por $\bar{\Sigma}_{a,b}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con $a, b \in (0, \infty]$ no ambos igual a ∞ . Estas superficies son invariantes por simetrías especulares respecto a un plano horizontal y respecto a k planos verticales equiangulares que contienen una geodésica vertical común. Nos encontramos con los casos descritos a continuación (ver la Figura 1 y el Teorema 3.28).

- (a) Si $a, b < \infty$, entonces a $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ los llamamos *Saddle Towers*. Son simplemente periódicos en la dirección vertical, tienen género 0 y $2k$ finales en el cociente de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por una traslación vertical. Cada uno de sus finales es asintótico en el cociente a la mitad de un H -cilindro. Su estudio lo haremos en la Sección 3.3.1.
- (b) Si $a = \infty$ y $b < \infty$, entonces a $\bar{\Sigma}_{\infty,b}^*$ los llamamos (H, k) -*noides* (o H -catenoides si $k = 2$) y tienen género 0 y k finales. Si $H \in [0, \frac{1}{2})$, entonces cada final es embebido y está contenido en la parte concava del H -cilindro vertical al que es asintótico. Si $H = \frac{1}{2}$, entonces cada final es tangente a la frontera asintótica $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a lo largo de una geodésica

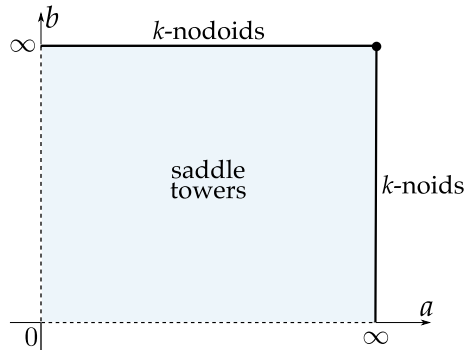


Figura 1: Espacio moduli de las superficies $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ para $H \in [0, \frac{1}{2}]$ y $k \geq 2$ fijo. El punto negro representa el límite $\bar{\Sigma}_{\infty,\infty}^*$, el H -grafo de Scherk sobre un polígono ideal de $2k$ curvas de curvatura $\pm 2H$ (si $0 \leq H < \frac{1}{2}$), y las líneas discontinuas indican los k -noides mínimos de \mathbb{R}^3 obtenidos en el límite después de reescalar la métrica.

vertical ideal. Estudiaremos este caso en la Sección 3.3.2.

- (c) Si $a < \infty$ y $b = \infty$, entonces a $\bar{\Sigma}_{a,\infty}^*$ los llamamos (H, k) -noides (o H -catenoides si $k = 2$) y tienen género 0 y k finales. Si $H \in [0, \frac{1}{2})$, entonces cada final es embebido y está contenido en la parte convexa del H -cilindro vertical al que es asintótico. Si $H = \frac{1}{2}$, entonces el correspondiente $\frac{1}{2}$ -cilindro desaparece en infinito. Estudiaremos este caso en la Sección 3.3.3.

Si $0 \leq H \leq \frac{1}{2}$, los (H, k) -noides $\bar{\Sigma}_{\infty,b}^*$ coinciden con los construidos por Plehnert en [78] mediante conjugación. Además, las $\frac{1}{2}$ -catenoides fueron originalmente descubiertas por Daniel y Hauswirth en [20] por medio del análisis de sus aplicaciones de Gauss armónicas, como superficies de curvatura media crítica. Si $H = 0$, las superficies $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ y $\bar{\Sigma}_{b,a}^*$ son congruentes para todo $a, b \in (0, \infty]$ y, por tanto, las subfamilias de $(0, k)$ -noides y $(0, k)$ -noides son la misma (véase la Nota 1.14). Los contraejemplos a la propiedad de Krust aparecen en la familia de H -catenoides en la que encontramos superficies no embebidas que provienen por conjugación de un grafo mínimo en $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ sobre un dominio convexo en $\mathbb{M}^2(4H^2 - 1)$.

La pieza fundamental de la superficie mínima inicial $\Sigma_{a,b}$ es un grafo mínimo en $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ sobre un triángulo $T_{a,b} \subset \mathbb{M}^2(4H^2 - 1)$ determinado

por el ángulo $\frac{\pi}{k}$ en uno de sus vértices (que podemos suponer el punto $(0, 0)$) y las longitudes $a, b \in (0, \infty]$, no ambas iguales a ∞ , de los lados adyacentes a dicho vértice. Esta pieza fundamental de $\Sigma_{a,b}$ es solución a un problema de Jenkins-Serrin con los valores 0 sobre los lados de longitud a y b y $+\infty$ en el otro lado. Cuando $a = \infty$ o $b = \infty$, el triángulo se convierte en un triángulo no acotado de $\mathbb{H}^2(4H^2 - 1)$ cuando $0 \leq H < \frac{1}{2}$ o en una semi-banda de \mathbb{R}^2 con un ángulo $\frac{\pi}{k}$ si $H = \frac{1}{2}$, véase la Figura 3.11. La frontera de la superficie conjugada de la pieza fundamental inicial está formada por dos curvas de simetría contenida en planos verticales que forman un ángulo $\frac{\pi}{k}$ y dos curvas de simetría contenidas en planos horizontales, si bien eventualmente una de ellas podría ser ideal en los casos límite $a = \infty$ o $b = \infty$. Mediante sucesivas reflexiones respecto a estos planos verticales y horizontales se obtienen las superficies $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$.

En el caso de que a y b sean ambos finitos la solución del problema de Jenkins-Serrin se deduce de los resultados de Younes en [94] para $0 < H < \frac{1}{2}$ y de Pinheiro en [80] para $H = \frac{1}{2}$. Sin embargo, cuando $a = \infty$ o $b = \infty$, estos resultados deben adaptarse ligeramente para garantizar la existencia de solución, véase la sección 1.3.1. Es especialmente relevante el caso en que $b = \infty$ y $H = \frac{1}{2}$, ya que para garantizar la existencia de solución al problema de Jenkins-Serrin construimos una nueva familia de superficies mínimas en Nil_3 que actúan como barrera. Estas pertenecen a una familia de helicoides horizontales en Nil_3 que denotamos por \mathcal{H}_μ , foliadas por rectas euclídias, véase la Figura 1.10. Observamos que estas rectas no son geodésicas en Nil_3 en el modelo estándar (1.2). La familia \mathcal{H}_μ incluye a los helicoides dados por Daniel y Hauswirth en [20, Section 7] con diferentes técnicas, así como otros helicoides con diferente dirección de rotación y también grafos enteros (entre los que se encuentran los grafos invariantes de Figueroa, Mercuri y Pedrosa [30]). También Daniel en [19, Examples 8.4] da otra familia de grafos enteros foliados por líneas rectas no incluidos en nuestra familia \mathcal{H}_μ .

La unicidad en este tipo de problemas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ para dominios no acotados se puede probar usando los principios del máximo generales de Mazet Rodríguez y Rosenberg [61], véase el Teorema 1.12. La unicidad en el problema que tratamos se extiende fácilmente a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ ya que el espacio base sigue siendo \mathbb{H}^2 y hay una noción de frontera asintótica, lo cual permite seguir argumentos similares al caso de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Sin embargo, parece

difícil extenderlo a Nil_3 donde no hay una frontera asintótica bien definida. De hecho no está claro si la solución que damos sobre la semi-banda de \mathbb{R}^2 (incluso para el ángulo $\frac{\pi}{2}$) es única. Más aún, para el caso límite $a = b = \infty$, Nelli, Sa Earp y Toubiana probaron que la solución al problema de Jenkins-Serrin no es única, véase [74].

Como H es distinto de cero, diferentes direcciones de rotación del normal θ a lo largo de geodésicas verticales $\Gamma \subset \Sigma_{a,b}$ implican diferentes estimaciones de curvatura para la curva conjugada $\Gamma^* \subset \Sigma_{a,b}^*$ como notamos anteriormente, véase la Ecuación (3.10) y el Teorema 3.10. De esta forma, aprovechamos que cambiar $+\infty$ por $-\infty$ en el problema de Jenkins-Serrin (o equivalentemente, cambiar a por b en la construcción) produce H -superficies muy diferentes. Tenemos los (H, k) -noides (resp. (H, k) -nodoides) cuando $a = \infty$ (resp. $b = \infty$) y la rotación a lo largo de las geodésicas verticales contenidas en $\Sigma_{\infty,b}$ (resp. $\Sigma_{a,\infty}$) es en sentido positivo (resp. negativo), véase la Figura 3.11.

Esta diferencia puede verse también en el caso de los helicoides esféricos en las esferas de Berger, donde diferentes direcciones de rotación de los helicoides producen las superficies de rotación tipo onduloide o tipo nodoide en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con $H > \frac{1}{2}$, como observaron Manzano y Torralbo en [54, Proposition 1], de aquí el nombre de (\widetilde{H}, k) -nodoide o H -catenodoide. Igualmente, los helicoides verticales en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ o en Nil_3 se corresponden por conjugación con H -superficies de rotación en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ embebidas y no embebidas, que son descritas por ejemplo en [73, Proposition 5.2].

El límite de $\overline{\Sigma}_{a,b}^*$ cuando $a \rightarrow 0$ o $b \rightarrow 0$ es la unión de sus H -cilindros asintóticos, que produce, después de reescalar la métrica, los k -noides mínimos simétricos de \mathbb{R}^3 , véase la Nota 3.30. Se tiene, de hecho, que para valores pequeños de los parámetros, las H -catenoides y las H -catenodoides desingularizan dos H -cilindros verticales tangentes por el lado cóncavo y por el lado convexo, respectivamente. En el Lema 3.29, mostraremos que hay una única H -catenoide o H -catenodoide para cada distancia prescrita (en el rango admisible) entre los dos H -cilindros verticales asintóticos. También discutiremos, como en el caso $H = \frac{1}{2}$, los posibles horocilindros asintóticos de los $(\frac{1}{2}, k)$ -noides o de los $(\frac{1}{2}, k)$ -nodoides desaparecen en infinito.

Tras la descripción de las simetrías y el comportamiento asintótico de las superficies $\overline{\Sigma}_{a,b}^*$, uno de los problemas más interesantes que tratamos

en la Sección 3.3 es su embebimiento. A diferencia de los Saddle Towers mínimos, el embebimiento de $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ puede fallar para $H > 0$ incluso cuando la pieza fundamental es embebida, ya que esta podría salirse de la banda horizontal de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ delimitada por los planos horizontales de simetría que contienen a las curvas de la frontera y generar autointersecciones después de reflejar la pieza fundamental respecto a estos planos. Haciendo un análisis de la función ángulo de la superficie $\Sigma_{a,b}$ en el Lema 3.31 y la Proposición 3.33 probamos que $\Sigma_{a,b}^*$ se queda en dicha banda para $k = 2$, pero no en general para valores de los parámetros a , b y $k \geq 3$.

El embebimiento de la pieza fundamental se analiza estudiando el embebimiento de las curvas conjugadas de las rectas verticales Γ_i contenidas en $\Sigma_{a,b}$, momento en el que el ángulo de rotación θ_i a lo largo de Γ_i vuelve a ser determinante. De hecho, cuando $\theta'_i > 0$ a lo largo de Γ_i se puede garantizar el embebimiento de las curvas conjugadas si la rotación total del normal es menor o igual que π , véase el apartado (c) del Teorema 3.10. Esto junto con el estudio del de la superficie límite, $\bar{\Sigma}_{\infty,\infty}^*$ que es igual a un H -grafo de Scherk ideal si $0 < H < \frac{1}{2}$ o un grafo entero si $H = \frac{1}{2}$, nos permite dar resultados donde se garantice el embebimiento de algunos (H, k) -noides y (H, k) -nodoides, véanse las Proposiciones 3.34 y 3.35. Destacamos que para $0 < H < \frac{1}{2}$, todas las H -catenoides son embebidas y en la familia de las H -catenodoides encontramos ejemplos embebidos y no embebidos (véase la Figura 3.12). Para $H = \frac{1}{2}$, los posibles horocilindros asintóticos de los $(\frac{1}{2}, k)$ -noides o de los $(\frac{1}{2}, k)$ -nodoides desaparecen en infinito y se tiene que las $\frac{1}{2}$ -catenoides son embebidas, mientras que las $\frac{1}{2}$ -catenodoides son no embebidas. El dominio de \mathbb{H}^2 sobre que el se proyectan estas catenoides y catenodoides se ha dibujado numéricamente en la Figura 3.13.

Sería interesante probar que las H -catenoides y las H -catenodoides tienen curvatura total finita y demostrar un teorema de unicidad de tipo Schoen similar al probado por Hauswirth, Nelli, Sa Earp y Toubiana en [35] anteriormente explicado sobre la unicidad de las catenoides horizontales.

Otro problema interesante sería construir H -superficies completas con género 1 en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, para $0 < H < \frac{1}{2}$ similares al caso $H = 0$ anteriormente descrito, si bien aquí no contamos con la propiedad de Krust que se utiliza fuertemente en el caso $H = 0$.

El problema de Plateau asintótico en $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$.

Otro de los problemas que se ha tratado durante los últimos años en la teoría de superficies mínimas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, y posteriormente en $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, es el llamado *problema de Plateau asintótico*. Dada una curva Γ en la frontera asintótica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o de $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, que permitimos que tenga un número finito de componentes conexas simples y cerradas, el problema de Plateau asintótico consiste en decidir si existe una superficie área-minimizante o una superficie mínima con frontera asintótica Γ . Este problema ha sido ampliamente estudiado en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, motivado en parte por los resultados de Anderson [3, 4] sobre problemas similares en \mathbb{H}^3 y por el hecho de que $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tenga una frontera asintótica bien definida.

El primer resultado obtenido en esta teoría fue el teorema de tipo Radó dado por Nelli y Rosenberg en [71], donde probaron que para una curva cerrada y simple Γ que se proyecta gráficamente en $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, existe un única superficie mínima completa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con borde asintótico Γ . Dicha superficie es además un grafo vertical y, por tanto, área-minimizante. Este resultado se extiende fácilmente a $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, como probaron Folha y Peñafiel en [29].

Por otro lado, si Γ es la unión de dos círculos disjuntos en la frontera asintótica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ en el modelo del cilindro y separados por una distancia vertical menor que π , entonces Nelli y Rosenberg en [71, 72] probaron que existe una catenoide rotacionalmente invariante con frontera asintótica Γ . Esto mismo ocurre en $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ cuando la distancia es menor que $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$. Este valor aparece también en ciertas superficies invariantes conocidas como *Tall Rectangles*, llamados así ya que su frontera asintótica es un rectángulo de altura mayor que π en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y un rectángulo (en el modelo del semi-espacio de $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$) de altura mayor que $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$ en $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, véase (1.22).

Esto motiva la noción de altura de una curva en la frontera asintótica de $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, válida en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cuando $\tau = 0$:

Dada una curva $\Gamma \subset \partial_\infty \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, posiblemente con distintas componentes conexas, y sea $\Omega = \partial_\infty \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \Gamma$. Para cada $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, sea $h_\Gamma(p)$ la longitud de la componente más corta de $(\{p\} \times \mathbb{R}) \cap \Omega$. Se define la altura de Γ según [45, Definition 1.1] como

$$h_\Gamma = \inf_{p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2} h_\Gamma(p).$$

Diremos que Γ es *alta* si $h_\Gamma(p) > \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$ para cada $p \in \partial_\infty\mathbb{H}^2$.

Coskunuzer en [15], usando los Tall Rectangles como barrera en un proceso de límite, probó que, para toda curva alta Γ , existe una superficie área-minimizante en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (posiblemente desconexa) con frontera asintótica Γ . Además, dio un resultado de no existencia para superficies área-minimizantes cuando la altura de la curva es menor que π en un arco abierto. También estudió un problema más general cuando Γ tiene componentes en las fronteras asintóticas $\mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$ en [16]. Kloeckner y Mazzeo consideraron en [44] también el problema para curvas Γ con partes en la fronteras asintóticas $\mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$, mostrando que las componentes de Γ en estas fronteras asintóticas horizontales deben ser geodésicas. También dieron ejemplos de una curva Γ en la frontera asintótica cuya altura es menor que π , para la cual hay una superficie mínima con frontera asintótica Γ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y no hay ninguna superficie área-minimizante con esta frontera asintótica.

Sa Earp y Toubiana probaron en [88] un resultado general de no existencia para superficies mínimas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, probando que no hay superficies mínimas propiamente inmersas que admitan *thin tail*, esto es, que existan una recta vertical L en $\partial_\infty\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y un subarco $\Gamma' \subset \Gamma$ tales que $\Gamma' \cap L \neq \emptyset$ y $\partial\Gamma' \cap L = \emptyset$, de modo que Γ' se queda a un lado de L y está contenida en una banda de altura menor que π . Como consecuencia, obtuvieron que no hay superficies mínimas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con frontera asintótica una curva de Jordan homóloga a cero en $\partial_\infty\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ estrictamente contenida en una banda de altura π .

Ferrer, Martín, Mazzeo y Rodríguez probaron en [27] resultados de existencia y no existencia para anillos mínimos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ para curvas con dos componentes en la frontera asintótica que se proyectan cada una gráficamente sobre $\partial_\infty\mathbb{H}^2$. Klaser, Menezes y Ramos en un trabajo reciente [45] extendieron algunos de estos resultados al espacio $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Usando los Tall Rectangles en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ probaron que para toda curva alta Γ , existe una superficie área-minimizante en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ (posiblemente desconexa) con frontera asintótica Γ . También obtuvieron un resultado de no existencia para superficies área-minimizantes cuando la altura de la curva es menor que $(\sqrt{1 + 4\tau^2} - 4\tau)\pi$ en un arco abierto. Esta cota es solo válida cuando $|\tau| < \frac{1}{\sqrt{12}}$, lo que se debe a que es necesario siguiendo las ideas de Coskunuzer y de Sa Earp y Toubiana, enviar un trozo compacto de la catenoide ro-

tacional a un entorno de un punto ideal de la frontera asintótica para comparar la catenoide trasladada con la posible superficie área-minimizante. Las curvas de la frontera del trozo de la catenoide están contenidas en una superficie mínima conocida como *paraguas* (la unión de geodésicas horizontales pasando por un mismo punto, véase el Ejemplo 1.8), que no es una superficie invariante por traslaciones hiperbólicas en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, a diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, en donde los paraguas son planos horizontales. Esto supone que la diferencia de altura entre el máximo de una componente y el mínimo de otra componente de la frontera de la catenoide no se mantenga invariante por traslaciones hiperbólicas y en consecuencia no se pueda alcanzar la cota esperada.

En el Capítulo 4 se extenderán los resultados de no existencia de superficies mínimas de Sa Earp y Toubiana [88] para el caso de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y se mejorará el resultado de no existencia para superficies área-minimizantes de Klaser, Menezes y Ramos [45] obteniendo la cota óptima esperada $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$. Los Teoremas 4.6 y 4.11 en los que probamos estos resultados son locales en el sentido de que las hipótesis sobre la curva solo son necesarias en un entorno.

Para probar el Teorema 4.6 no se pueden usar catenoides rotacionalmente invariantes como hacen Sa Earp y Toubiana, debido al mismo problema que se comentaba anteriormente. Para solucionar este problema, construiremos una familia de anillos mínimos compactos en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ en el modelo del semi-espacio, cuyas curvas de la frontera están contenidas en una superficie mínima invariante por traslaciones hiperbólicas que llamaremos Slice y denotamos por \mathcal{S} . En el modelo del semi-espacio de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ esta superficie está dada por la ecuación $t = t_0$, donde t es la tercera coordenada. Además, aprovechamos que en este modelo algunas traslaciones hiperbólicas tienen una expresión sencilla, ya que conservan la tercera coordenada, véase la Sección 1.2 para los detalles sobre el espacio $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Estos anillos se construyen mediante el criterio de Douglas, comparando un anillo que se define usando la función altura de la catenoide en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, con los dos trozos compactos de los Slices $\{t = 0\}$ y $\{t = h\}$ que bordean sus curvas de la frontera, véase la Sección 4.1. Además usaremos estos anillos para extender el resultado de no existencia de Klaser, Menezes, y Ramos cuando la altura de la curva es menor que la constante esperada $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, véase el Teorema 4.11. La estimación que hacemos de la altura es óptima

en ambos teoremas salvo posiblemente para el valor crítico $h_\Gamma = \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, problema también abierto en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

El Teorema de la Banda. Otro problema importante en la teoría de superficies mínimas es clasificar estas superficies por su tipo topológico. Collin, Hauswirth y Rosenberg probaron en [33] que una superficie mínima Σ propiamente inmersa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con topología finita dentro de una banda de anchura menor que π tiene finales multigráficos. Si además, Σ es embebida, esta tiene finales gráficos; si también suponemos que es simplemente conexa, entonces es un grafo entero. Este resultado se conoce como el Teorema de la Banda de Collin, Hauswirth y Rosenberg. Más tarde, Lima, extiende en [48] este resultado a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ reemplazando la banda por una *banda generalizada*, véase la definición 4.12. Sin embargo, no es sencillo probar que una región es una *banda generalizada*. En la Sección 4.3 probaremos el Teorema de la Banda viendo que \mathcal{R} , la región encerrada entre un grafo entero mínimo G_1 en el modelo del cilindro cuya frontera asintótica es una curva cerrada que se proyecta gráficamente sobre $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ y cuyos planos tangentes están separados de la vertical (ver Definición 4.12), junto con una copia trasladada $G_2 := G_1 + (0, 0, \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi - \epsilon)$, donde ϵ es un número positivo menor que $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, es una banda generalizada, véase el Teorema 4.13.

Para probarlo, usaremos de nuevo la familia de anillos construida en la Sección 4.1. La idea es probar que podemos recorrer la frontera asintótica de los grafos enteros de forma que los anillos separen a los dos grafos enteros cerca de esta frontera asintótica, lo cual es posible de nuevo gracias a las buenas propiedades de los anillos. Teniendo esto, se pueden seguir las mismas ideas de Collin, Hauswirth y Rosenberg [12] y Lima [48] para probar el resultado usando el Dragging Lemma de Collin, Hauswirth y Rosenberg, véase el Lema 4.16.

Construcciones de Jenkins-Serrin y los ejemplos Scherk helicoidales.

Las construcciones de superficies mínimas Twisted Scherk en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de Pyo y Rodríguez en [83] y la de las superficies análogas en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ de la Sección 2.2.1 pueden verse como solución al problema de Plateau asintótico cuando Γ es una poligonal admisible en infinito, es decir, Γ está compuesta por geodésicas verticales en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y geodésicas horizontales en

$\mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$.

En [84], Rodríguez y Tinaglia utilizan técnicas similares a las de [83] para construir ejemplos mínimos embebidos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que no son propios. Estas superficies son interesantes en relación con la conjetura de Calabi-Yau para superficies mínimas embebidas. Esta dice que una superficie mínima embebida y completa en \mathbb{R}^3 tiene que ser propia. Colding y Minicozzi mostraron en [11] que una superficie completa, mínima y embebida en \mathbb{R}^3 con topología finita es propia. Meeks, Pérez y Ros [66] rebajaron la hipótesis de topología finita a que la superficie tuviese género finito y una cantidad numerable de finales límite. Los ejemplos construidos en [84] muestran que la conjetura no es cierta en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. En la Sección 4.4 construiremos los ejemplos análogos en $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, mostrando que aquí tampoco es cierta la conjetura, como era de esperar.

Publicaciones

Las ideas presentes en esta memoria han dado lugar a las siguientes publicaciones científicas:

1. J. Castro-Infantes. On the asymptotic Plateau Problem in $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$. *J. Math. Anal. Appl.*, **507** (2022), no. 2, Paper No. 125831, 23 pp.
2. J. Castro-Infantes, J. M. Manzano. Genus one minimal k -noids and saddle towers in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1–21. doi:10.1017/S1474748021000591.
3. J. Castro-Infantes, J. M. Manzano, M. Rodríguez. A construction of constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and the Krust property. *Int. Math. Res. Not. rnab353*, (2021) doi:10.1093/imrn/rnab353.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Como se ha puesto de manifiesto en la introducción, la teoría de superficies se ha desarrollado en más profundidad en los espacios 3-dimensionales con un mayor número de simetrías, considerando que los espacios son más simétricos cuanto mayor sea la dimensión de sus grupos de isometrías. En este sentido los espacios más simétricos son los *espacios homogéneos*, donde para cada par de puntos del espacio existe una isometría que lleva un punto en el otro. Los espacios homogéneos riemannianos simplemente conexos 3-dimensionales están clasificados y todos ellos son isométricos a grupos de Lie equipados con métricas invariantes a izquierda, salvo los productos riemannianos $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ con $\kappa > 0$, véase [65, Theorem 2.4]. De entre ellos, los más simétricos son los espacios forma $\mathbb{M}^3(\kappa)$, que son las 3-variedades simplemente conexas con curvatura seccional constante κ , cuyo grupo de isometrías tiene dimensión 6. Tras los espacios forma, y dado que no existen 3-variedades riemannianas con grupo de isometrías de dimensión 5, tenemos aquellos que tienen un grupo de isometrías de dimensión 4, que se pueden clasificar como una familia 2-parámetrica de espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, donde $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$, véase [17]. Esta contiene a los espacios producto $\mathbb{E}(-1, 0) \equiv \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{E}(1, 0) \equiv \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, así como a los grupos de Lie $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, Nil_3 y $\text{SU}(2)$ con ciertas métricas invariantes izquierda, véase [17, 50, 64].

Dados $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$, el espacio $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ es la única 3-variedad simplemente co-

nexa que admite una submersión de Killing con curvatura del fibrado constante τ sobre $\mathbb{M}^2(\kappa)$, la superficie completa simplemente conexa con curvatura constante κ , y cuyas fibras son las curvas integrales de un campo de Killing unitario ξ . Este campo de Killing nos permite definir los conceptos de dirección *vertical* como aquella tangente a ξ y de dirección *horizontal* como aquella ortogonal a ξ . La curvatura del fibrado se caracteriza por la ecuación:

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \times \xi, \quad (1.1)$$

para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$, donde, $\bar{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ y \times su producto vectorial, que determina el signo de τ dependiendo de la orientación elegida en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Solo para $\tau = 0$ la distribución horizontal se puede integrar y el espacio se escribe entonces como un producto riemanniano. La curvatura del fibrado τ se puede interpretar también de forma geométrica en términos de la holonomía de levantamientos horizontales de curvas en $\mathbb{M}^2(\kappa)$. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ es una curva diferenciable, podemos considerar su levantamiento horizontal $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$, esto es, $\tilde{\alpha}'$ es horizontal y se cumple que $\Pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Este levantamiento es único si prefijamos el valor de $\tilde{\alpha}(a)$ en la fibra $\Pi^{-1}(\alpha(a))$. En el caso de que α sea una curva diferenciable a trozos que encierra una región $U \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$ podemos unir los extremos de su levantamiento horizontal con segmentos verticales de longitud (con signo) $2\tau \text{Área}(U)$, véase [50, Proposition 3.3].

Vamos a describir el espacio $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ con el llamado *modelo del cilindro*, esto es, consideramos el abierto de \mathbb{R}^3 dado por

$$\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2) > 0\}, \quad (1.2)$$

con la métrica riemanianna:

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (dz + \lambda\tau(ydx - xdy))^2,$$

donde $\lambda = (1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2))^{-1}$. Además elegimos la orientación de forma que:

$$E_1 = \frac{\partial_x}{\lambda} - \tau y \partial_z, \quad E_2 = \frac{\partial_y}{\lambda} + \tau x \partial_z \quad \text{y} \quad E_3 = \partial_z \quad (1.3)$$

definen una base ortonormal de campos positivamente orientada. La submersión de Killing se expresa como:

$$\Pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa), \quad \Pi(x, y, z) = (x, y), \quad (1.4)$$

donde $\mathbb{M}^2(\kappa)$ se identifica con el disco de radio $\frac{2}{\sqrt{-\kappa}}$ y centro el origen si $\kappa < 0$, o con todo el plano (x, y) si $\kappa = 0$. En el caso $\kappa > 0$, este modelo es localmente isométrico a una esfera de Berger y las coordenadas (x, y) representan la proyección estereográfica de $S^2(\kappa)$ menos un punto sobre el plano. Por tanto, en este caso el modelo no es completo. Nótese que en todos los casos la métrica riemanianna $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$ tiene curvatura constante κ y el campo de Killing es $\xi = E_3$.

Si $\kappa < 0$, tenemos el espacio $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, que incluye al espacio producto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cuando $\tau = 0$. En este caso, se puede hablar de la frontera asintótica de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Para ello, identificamos topológicamente a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y consideramos la compactificación producto para $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Esto es, elegimos una sección global diferenciable $F_0 : \mathbb{H}^2(\kappa) \rightarrow \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ de Π (esto es $\Pi \circ F_0$ es la identidad y F_0 es transversa a las fibras) y construimos el difeomorfismo $R : \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ dado por $R(x, t) = \phi_t(F_0(x))$, donde ϕ_t es el flujo asociado al campo de Killing ξ . A nivel topológico, la compactificación a través de R no depende de la elección de F_0 ni del modelo de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ elegido. De esta forma la frontera asintótica de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, que denotaremos por $\partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, es homeomorfa a la frontera vertical $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ unión con las fronteras horizontales $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ y $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$ en infinito. Esto además, nos permite definir rigurosamente el comportamiento asintótico de una superficie en la frontera ideal.

Definición 1.1. Diremos que un punto $p \in \partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ pertenece a la frontera asintótica de una superficie Σ , que denotaremos por $\partial_\infty \Sigma$, si existe una sucesión divergente de puntos $p_n \in \Sigma$ que converge a p en la compactificación producto.

Nótese que en el caso $\tau = 0$, $\partial_\infty(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ es la propia compactificación producto que ha sido utilizada en trabajos previos como [44, 15, 16, 27].

Cuando se estudien propiedades específicas del espacio $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, podremos suponer sin perder generalidad que $\kappa = -1$ ya que existe una homotecia entre $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ y $\mathbb{E}(\lambda^2\kappa, \lambda\tau)$ para todo $\lambda \neq 0$. Aunque el modelo del cilindro (1.2) induce una métrica para \mathbb{H}^2 en el disco de radio 2, podremos pasar al disco de radio 1 (disco de Poincare) mediante un sencillo rescalamiento en las coordenadas x e y . También utilizaremos el modelo del semi-espacio, pues facilitará algunos resultados contenidos en esta memoria. Podemos

describir los dos modelos considerados a la vez como.

$$\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : \lambda(x, y) > 0\}, \quad (1.5)$$

con la métrica riemanianna $\lambda^2(dx^2 + dy^2) + \left(2\tau\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}dx - \frac{\lambda_x}{\lambda}dy\right) + dt\right)^2$, donde λ se define como:

- $\lambda(x, y) = \frac{1}{y}$, en cuyo caso se tiene el modelo del semi-espacio que denotamos en lo sucesivo \mathcal{H} . En este modelo identificamos la frontera asintótica vertical con $(\{y = 0\} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{R} \equiv (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{R}$.
- $\lambda(x, y) = \frac{2}{1-x^2-y^2}$, obteniendo el modelo del cilindro \mathcal{C} (con un rescalamiento en las dos primeras coordenadas), donde identificamos la frontera asintótica vertical con $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

En este caso, cambiamos la notación de la tercera coordenada por la variable t , ya que z se reservará a menudo para el parámetro complejo $z = x + iy$. De nuevo, la submersión de Killing queda como $\Pi(x, y, t) = (x, y)$ y el campo de Killing esta dado por $\xi = \partial_t$.

A continuación, damos una isometría entre los dos modelos, que usaremos a lo largo de la memoria (recordamos que $z = x + iy$).

Proposición 1.2. *Las aplicaciones $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$ y $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$ dadas por*

$$\phi(z, t) = \left(\frac{z - i}{z + i}, t - 4\tau \arctan\left(\frac{x}{y + 1}\right) \right), \quad (1.6)$$

$$\psi(z, t) = \left(\frac{i + iz}{1 - z}, t - 4\tau \arctan\left(\frac{y}{1 - x}\right) \right), \quad (1.7)$$

son isometrías entre el modelo del semi-espacio y el modelo del cilindro de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.

Nótese que estas isometrías se extienden a la frontera asintótica. En la Figura 1.1 mostramos cómo la línea horizontal $\{y = t = 0\}$ en la frontera asintótica del modelo \mathcal{H} se transforma por la isometría ϕ en un trozo de hélice cuyos extremos pueden unirse por un segmento vertical de longitud $4\tau\pi$, y cómo el círculo $(\cos(s), \sin(s), 0)$, $s \in [0, 2\pi]$ en la frontera asintótica del modelo \mathcal{C} se transforman por la isometría ψ en una curva que se quedan en una banda de altura $4\tau\pi$.

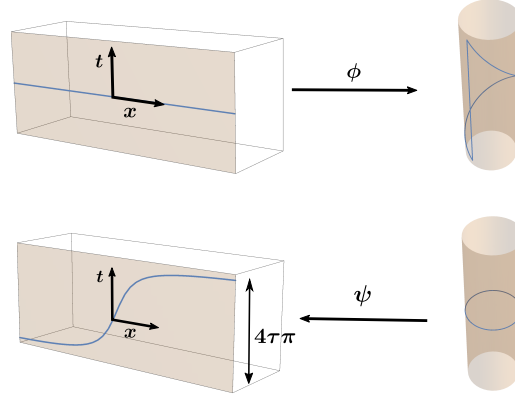


Figura 1.1: Arriba, la imagen por ϕ de una línea horizontal en la frontera asintótica de \mathcal{H} . Abajo, la imagen por ψ de un círculo en la frontera asintótica de \mathcal{C} .

Si $\kappa = 0$ y $\tau \neq 0$ el espacio $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ no es más que el grupo de Heisenberg Nil_3 , en cuyo caso tenemos un modelo completo donde $\mathbb{M}^2(\kappa)$ se identifica con todo \mathbb{R}^2 .

Finalmente si $\kappa > 0$, tenemos las esferas de Berger cuando $\tau \neq 0$ y el espacio producto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ cuando $\tau = 0$. Para dar un modelo completo de la esfera de Berger $\mathbb{S}^3(\kappa, \tau)$, consideramos coordenadas complejas en la que la 3-esfera $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ y la métrica de Berger está dada por

$$g(X, Y) = \frac{4}{\kappa}[\langle X, Y \rangle + \left(\frac{4\tau^2}{\kappa} - 1\right) \langle X, V \rangle \langle Y, V \rangle],$$

donde V es el campo de vectores definido como $V_{(z,w)} = (iz, iw)$. La fibración de Hopf $\Pi : \mathbb{S}^3(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{S}^3(\kappa)$ dada por

$$\Pi(z, w) = \frac{2}{\sqrt{\kappa}}(z\bar{w}, \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2))$$

es la submersión de Killing, y el campo de Killing es $\frac{\kappa}{4\tau}V$, véase [93]. El modelo dado por (1.2) es localmente isométrico a una esfera de Berger. Podemos dar una aplicación recubridora $\Theta : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{S}^3(\kappa, \tau) - \{(e^{i\theta}, 0) : \theta \in$

\mathbb{R} como

$$\Theta(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)}} \left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2}(x + iy) \exp\left(i \frac{\kappa}{4\tau}\right), \exp\left(i \frac{\kappa}{4\tau}\right) \right).$$

Como Θ es además una isometría local, el modelo de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ presentado en (1.2) es el recubridor universal riemanniano de $\mathbb{S}^3(\kappa, \tau)$ menos una fibra vertical. Véase por ejemplo [56] para los detalles.

1.1.1. Geodésicas e isometrías de los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. La primera observación es que las fibras son geodésicas de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ que llamaremos geodésicas verticales y también es claro que las traslaciones a lo largo de estas son isometrías de este espacio (pues forman el grupo 1-paramétrico de isometrías asociado al campo de Killing ξ), que llamaremos traslaciones verticales.

Los levantamientos horizontales de geodésicas de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ son geodésicas (horizontales) de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Para describir el resto de geodésicas, dada una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$, podemos considerar la curva diferenciable

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau), \quad \gamma(t) = \phi_{\mu t}(\tilde{\alpha}(t)),$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\{\phi_t\}$ es el grupo uniparamétrico de traslaciones verticales y $\tilde{\alpha}$ es el levantamiento horizontal de α . La curva γ forma un ángulo constante con ξ y, por tanto tenemos el siguiente resultado que nos dice cuáles son las geodésicas de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Proposición 1.3. [50, Proposition 3.6] *Dado $p \in \mathbb{E}(\kappa, \tau)$, las geodésicas que pasan por p son, salvo reparametrizaciones, de uno de estos tipos:*

- (a) *Geodésicas verticales: fibras de la submersión $\Pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$.*
- (b) *Geodésicas horizontales: levantamientos horizontales de geodésicas de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ que pasan por $\Pi(p)$.*
- (c) *Geodésicas oblicuas: curvas de la forma $\gamma(t) = \phi_{\mu t}(\tilde{\alpha}(t))$ donde $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ es una curva con velocidad constante y de curvatura geodésica constante tal que $\alpha(0) = \Pi(p)$.*

De forma análoga se pueden levantar las isometrías de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ a $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$: Si $f : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ es una isometría, diremos que una aplicación $\tilde{f} :$

$\mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ es un levantamiento de f si cumple $f \circ \Pi = \Pi \circ \tilde{f}$. En el caso de requerir que \tilde{f} sea isometría, este levantamiento es único salvo composición con traslaciones verticales.

Proposición 1.4. [50, Lemma 2.10]

- (a) Toda isometría f de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ se puede levantar a una isometría \tilde{f} de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ que conserva la orientación.
- (b) Si $\tau = 0$ toda isometría f de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ se puede levantar a una isometría \tilde{f} de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ que invierte la orientación.

Además estos levantamientos son únicos salvo composición con traslaciones verticales.

En el caso $\tau = 0$ ($\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$) podemos definir las siguientes isometrías:

- Reflexión respecto a un plano horizontal: el levantamiento de $\text{Id}_{\mathbb{M}^2(\kappa)}$ que invierte orientación.
- Reflexión respecto a un plano vertical: Levantamiento (con puntos fijos) de una simetría axial respecto a una geodésica $\alpha \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$, que invierte la orientación.

Los planos horizontales (resp. verticales) son los puntos fijos de las reflexiones con respecto a planos horizontales (resp. planos verticales) y por tanto son superficies totalmente geodésicas.

En el resto de espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, esto es, para $\tau \neq 0$ no existen superficies totalmente geodésicas, véase [91], y todas las isometrías conservan la orientación y por tanto no existen este tipo de reflexiones. Es cierto que se puede hablar de planos verticales de la misma forma como $\Pi^{-1}(\alpha)$, donde α es una geodésica de $\mathbb{M}^2(\kappa)$, pero no existen superficies horizontales (ortogonales al campo de Killing en todo punto), puesto que la distribución horizontal no es integrable.

Sin embargo, en todo espacio $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ existen reflexiones respecto geodésicas horizontales, es decir, dada una geodésica horizontal γ de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ existe una única isometría de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ que deja fijo los puntos de γ e invierte

la orientación de las fibras. Estas se definen como un levantamiento de la simetría axial respecto a $\Pi(\gamma) \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$. También existen rotaciones (de cualquier ángulo) respecto de una geodésica vertical (que se queda fija por la isometría), estas se definen como un levantamiento de una rotación en $\mathbb{M}^2(\kappa)$.

1.1.2. Superficies en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Datos fundamentales de Daniel. Vamos a considerar en lo que sigue Σ una superficie riemannianna orientada isométricamente inmersa en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ y supondremos que existe un campo unitario N normal a Σ . Definimos la *función ángulo* como $\nu = \langle N, \xi \rangle$. Definimos, asimismo, el operador de Weingarten de esta inmersión como $A_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ dado por $Au = -\bar{\nabla}_u N$, para todo $u \in T_p\Sigma$ y $p \in \sigma$, $H = \frac{1}{2}\text{Traza}(A)$ la curvatura media y K la curvatura de Gauss de Σ dada por la fórmula de Gauss (1.8). Llamamos T al campo tangente a Σ que bajo la inmersión es la parte tangente del campo de Killing, esto es $d\phi(T) = \xi - \nu N$. A la terna (T, ν, A) se le conoce como los datos fundamentales de la inmersión y son objetos intrínsecos a Σ una vez fijada la inmersión en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. En estas condiciones se cumplen las ecuaciones:

$$K = \det(A) + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2, \quad (1.8)$$

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle X, T \rangle Y - \langle Y, T \rangle X), \quad (1.9)$$

$$\|T\|^2 = 1 - \nu^2, \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \nabla_X T = \nu(AX - \tau JT), \\ \nabla \nu = -AT - \tau JT, \end{cases} \quad (1.11)$$

dónde $JX = N \times X$ es una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en el plano tangente. La primera y segunda ecuación son las ecuaciones de Gauss y Codazzi, respectivamente. El siguiente resultado de Daniel en [17] muestra que la terna (T, ν, A) junto con estas ecuaciones determina la inmersión:

Teorema 1.5.[17] *Sea Σ una superficie riemanniana en cuyo fibrado tangente hay definida una rotación J de ángulo $\frac{\pi}{2}$. Sea la terna (T, ν, A) donde $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, $\nu \in C^\infty(\Sigma)$ y $A \in \mathcal{T}_1^1(\Sigma)$ un operador autoajunto, cumpliendo las ecuaciones (1.8), (1.9), (1.10) y (1.11). Entonces existe una inmersión isométrica $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ con $\xi = T - \nu N$, función ángulo ν y operador de*

Weingarten A para el normal N y tal que $\{u, Ju, N\}$ es una base ortonormal positivamente orientada para todo $u \in T_p\Sigma$. Además, esta inmersión es única salvo isometrías que preserven la orientación global y la orientación de las fibras.

Nota 1.6. Se puede ver que las ecuaciones (1.11) son equivalentes a la ecuación siguiente:

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \times \xi = -\tau(\langle X, JT \rangle N + \nu JX)$$

Grafos y multigrafos verticales. En la teoría de superficies en los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ una familia importante son los multigrafos verticales, y en particular, los grafos. Diremos que una superficie inmersa Σ es un *multigrafo* si se cumple alguna de las siguientes afirmaciones equivalentes:

1. Σ es transversa en todo punto al campo de Killing ξ ,
2. la función ángulo ν nunca se anula,
3. la proyección $\Pi_{|\Sigma} \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ es un difeomorfismo local.

Diremos que la superficie Σ es un grafo cuando sea un multigrafo y corte a cada fibra vertical a lo sumo una vez. En particular, todo grafo es una superficie embebida. Para ver que las condiciones 1 y 2 son equivalentes a la condición 3, basta observar que el jacobiano de la proyección $\Pi_{|\Sigma} : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ cumple

$$|\text{Jac}(\Pi_{|\Sigma})| = |\nu|. \quad (1.12)$$

Vamos a ver en la siguiente proposición como es el conjunto de ceros de la función ángulo en una superficie mínima.

Proposición 1.7. Sea Ω un dominio relativamente compacto de una superficie mínima M en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

1. Si $\nu \geq 0$ en Ω , entonces o bien $\nu > 0$ en Ω o bien ν se anula idénticamente en Ω .
2. Supongamos que ν no es idénticamente cero. Un punto $p \in \Omega$ cumple $\nu = 0$ y $|\nabla \nu|(p) = 0$, si y solo si en un entorno de p existen al menos

dos curvas intersecándose de forma transversa en p a lo largo de las cuales $\nu = 0$.

Demostración. Se tiene que la función ángulo es una función de Jacobi para el operador de estabilidad. Esto es $L\nu = 0$ donde L es el operador elíptico $L = \nabla + |A|^2 + \text{Ric}(N)$, donde N es un normal a la superficie M . El apartado 1 se puede ver por ejemplo en [62, Assertion 2.2]. El apartado 2 es consecuencia del estudio del comportamiento de la función ν cerca de un cero de orden finito, véase por ejemplo [49] y las referencias allí citadas. \square

Esto nos dice que los ceros de ν de una superficies mínima no pueden ser aislados.

Vamos a ver ahora cómo podemos identificar grafos con funciones definidas sobre la superficie base $\mathbb{M}^2(\kappa)$. Podemos ver un grafo como una sección de la submersión $\Pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ definida sobre cierto dominio $\Omega \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$. En el modelo del cilindro dado por (1.2), si consideramos la sección cero $F_0(x, y) = (x, y, 0)$, podemos parametrizar un grafo en términos de una cierta función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$F_u(x, y) = (x, y, u(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1.13)$$

Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, se puede calcular la curvatura media del grafo F_u como:

$$2H = \text{div} \left(\frac{Gu}{\sqrt{1 + \|Gu\|^2}} \right), \quad (1.14)$$

donde Gu representa al gradiente generalizado $Gu = (u_x + \tau y \lambda^{-1})\partial_x + (u_y - \tau x \lambda^{-1})\partial_y$ y $\text{div}(\cdot)$ y $\|\cdot\|$ son la divergencia y la norma respecto de la métrica de $\mathbb{M}^2(\kappa)$, véase [51, Lema 1.37].

Ejemplo 1.8. El paraguas y la superficie \mathcal{I} .

- El paraguas \mathcal{U}_p : El *paraguas o umbrella* en p , \mathcal{U}_p , consiste en la superficie formada por todas las geodésicas horizontales partiendo de p . Como las reflexiones respecto a las geodésicas horizontales son isometrías se deduce fácilmente que estas superficies son mínimas. En el modelo del cilindro para $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, \mathcal{U}_{p_0} , con p_0 el origen, se puede parametrizar como el grafo de la función $u(x, y) = 0$. Nótese que esta

parametrización no es global cuando $\kappa > 0$. Si $\kappa \leq 0$ estas superficies son grafos enteros y si, $\kappa > 0$, se corresponden con esferas mínimas (en particular \mathcal{U}_p es embebido en todo los casos). En el caso de los espacios producto ($\tau = 0$) estas superficies se conocen como planos horizontales ya que son ortogonales al campo de Killing ξ , es decir, $\nu^2 = 1$ en todo punto. En el caso de $\tau \neq 0$, \mathcal{U}_p es horizontal solamente en su centro p .

- La superficie \mathcal{I} : La superficie \mathcal{I} consiste en la superficie formada por una geodésica horizontal Γ que llamaremos eje y todas las geodésicas horizontales ortogonales a Γ . En el modelo del cilindro de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ para $\kappa \leq 0$ se puede parametrizar como:

$$u(x, y) = \begin{cases} \tau xy & \text{si } \kappa = 0, \\ \frac{2\tau}{\kappa} \arctan \frac{2xy}{\frac{4}{\kappa} + x^2 - y^2} & \text{si } \kappa < 0. \end{cases}$$

En ambos casos, cuando $\tau = 0$, la superficie \mathcal{I} coincide con los planos horizontales, mientras que para $\tau \neq 0$ la superficie es un grafo entero mínimo y se tiene que su función ángulo es igual a 1 solamente a lo largo del eje Γ .

Para $\kappa > 0$ y $\tau = 0$ ($\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$) coincide con el plano horizontal. Si $\kappa > 0$ y $\tau \neq 0$ es congruente con la superficie $\mathcal{I} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x \tan(-\frac{\kappa}{2\tau} z)\}$. En el modelo global $\mathbb{S}^3(\kappa, \tau)$ para la esfera de Berger la superficie \mathcal{I} forma parte (para $c = 1$) de la familia helicoides de Lawson \mathcal{H}_{-c} que se parametrizan como $\Phi_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$, $\Phi(t, s) = (e^{cis} \cos t, e^{is} \sin t)$, véase [92]. Además es un toro mínimo y embebido que no es congruente con el toro de Clifford \mathcal{H}_1 para $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ ya que no es llano. Nótese que, cuando la métrica en \mathbb{S}^3 es la métrica redonda, \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_{-1} son congruentes, si bien esto no es cierto cuando $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$.

1.2. El espacio $\widetilde{\mathbb{S}\mathbb{L}_2(\mathbb{R})}$.

En esta sección vamos a hacer un estudio más detallado de las propiedades específicas del espacio $\widetilde{\mathbb{S}\mathbb{L}_2(\mathbb{R})}$. Estas propiedades nos serán útiles para el Capítulo 4.

Vamos a identificar topológicamente $\widetilde{\mathbb{S}\mathbb{L}_2(\mathbb{R})}$ con $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como se ha indicado anteriormente, y consideraremos el modelo del semi-espacio y el modelo del cilindro dados en (1.5).

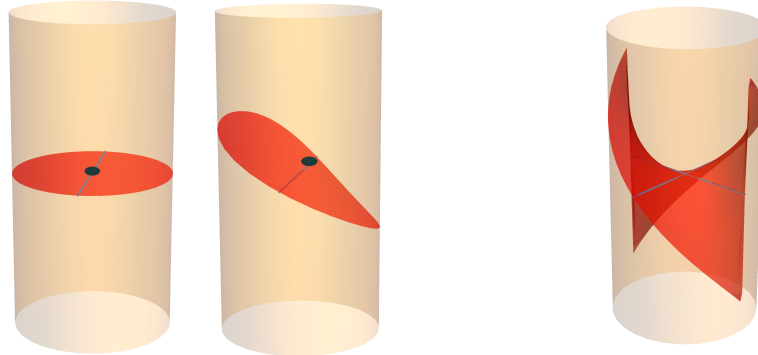


Figura 1.2: A la izquierda, el paraguas centrado en el origen y en otro punto distinto para $\kappa < 0$ y $\tau \neq 0$ en el modelo del cilindro y, a la derecha, la superficie \mathcal{I} con eje una geodésica horizontal pasando por el origen para $\kappa < 0$ y $\tau \neq 0$ en el modelo del cilindro.

1.2.1. Isometrías en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Elegimos el parámetro complejo $z = x + iy$ y vamos a dar expresiones explícitas de las isometrías del modelo del semi-espacio \mathcal{H} . Sea $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ una isometría positiva de \mathbb{H}^2 en el modelo del semi-espacio. Según la Proposición 1.4, f se puede levantar a una isometría \tilde{f} de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y esta está dada por

$$\tilde{f}(z, t) = (f(z), t - 2\tau \arg f'(x)) \quad (1.15)$$

véase [79, Proposition 2.1] y [94]. Aquí damos expresiones para estas isometrías que no involucran al argumento del número complejo $f'(z)$ en términos de los parámetros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Para obtener expresiones en el modelo \mathcal{C} bastaría componer con la aplicaciones ϕ y ψ dadas por la Proposición 1.2.

1. Si $c = 0$ ($ad = 1$), tenemos las isometrías de \mathbb{H}^2 que fijan el punto del infinito, y se levantan a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ como:

$$\tilde{f}(z, t) = \left(\frac{az + b}{d}, t + t_0 \right), \quad (1.16)$$

para cierto $t_0 \in \mathbb{R}$ (que representa una traslación vertical). Eligiendo $t_0 = 0$, esta isometría extiende a la frontera asintótica vertical como

$$\tilde{f}(x, 0, t) = \left(\frac{ax + b}{d}, 0, t \right).$$

2. Si $c \neq 0$, tenemos las isometrías de \mathbb{H}^2 que envían el punto ideal $z = -\frac{d}{c}$ al punto del infinito. Estas se levantan a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ como

$$\tilde{f}(z, t) = \left(\frac{az + b}{cz + d}, t - 4\tau \arctan \left(\frac{cx + d}{cy} \right) + t_0 \right). \quad (1.17)$$

Eligiendo $t_0 = 0$, \tilde{f} se extiende a la frontera asintótica como

$$\tilde{f}(x, 0, t) = \begin{cases} \left(\frac{ax+b}{cx+d}, 0, t + 2\tau\pi \right) & \text{si } x < \frac{-d}{c}, \\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}, 0, t - 2\tau\pi \right) & \text{si } x > \frac{-d}{c}. \end{cases}$$

Nótese que la isometría extendida \tilde{f} no es una función continua como función de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , ya que tiene una discontinuidad de salto cuando $x = \frac{-d}{c}$. Este salto es debido a que en este modelo se identifican los puntos ideales $(-\infty, 0, t_0)$ y $(+\infty, 0, t_0 + 4\tau\pi)$ y no los puntos $(-\infty, 0, t_0)$ y $(+\infty, 0, t_0)$ como ocurre cuando $\tau = 0$. Vamos a destacar algunos casos particulares que se pueden expresar de una forma sencilla:

1. **Traslaciones verticales:** $(x, y, t) \mapsto (x, y, t + t_0)$ en ambos modelos.
2. **Traslaciones hiperbólicas:** En el modelo del semi-espacio los levantamientos (salvo traslaciones verticales) de las traslaciones hiperbólicas a lo largo de las geodésicas $\{x = c\}$ vienen dados por las aplicaciones $(x, y, t) \mapsto (c + \lambda(x - c), \lambda y, t)$, $\lambda > 0$. A estas isometrías las llamaremos traslaciones hiperbólicas a lo largo de las geodésicas horizontales de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.
3. **Traslaciones parabólicas:** En el modelo del semi-espacio el levantamiento (salvo traslaciones verticales) de las traslaciones parabólicas a lo largo de los horociclos $\{y = c^2\}$ viene dado por la aplicación $(x, y, t) \mapsto (x + a, y, t)$, $a \in \mathbb{R}$. A estas isometrías las llamaremos traslaciones parabólicas en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.
4. **Rotaciones:** En el modelo del cilindro las rotaciones euclídeas con respecto al eje t son el levantamiento (salvo traslación vertical) de las rotaciones de \mathbb{H}^2 con respecto al origen. Las llamaremos rotaciones con respecto al eje t .

Vamos a destacar dos superficies mínimas que se expresan como grafos enteros de manera trivial y son invariantes por alguna de las isometrías anteriores.

- El paraguas \mathcal{U}_p centrado en p , véase el Ejemplo 1.8. En el modelo del cilindro \mathcal{C} , cuando está centrado en el origen es el grafo entero $\{t = 0\}$. Esta superficie es invariante por rotaciones.
- La superficie \mathcal{I} (véase el Ejemplo 1.8) es invariante por traslaciones hiperbólicas.
- El slice mínimo \mathcal{S} . En el modelo del semi-espacio \mathcal{H} es el grafo entero $\{t = 0\}$. Esta superficie es invariante por las traslaciones hiperbólicas y por traslaciones parabólicas descritas anteriormente. Salvo para $\tau = 0$ esta superficie no es congruente con la superficie \mathcal{I} del Ejemplo 1.8, ya que \mathcal{I} no es invariante por traslaciones parabólicas. Esta puede ser caracterizada como la única superficie homogénea completa de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ junto con los H -cilindros verticales, véase [22] o como la única H -superficie completa con función ν constante, junto con los H -cilindros verticales véase [23].

Nótese que en el caso de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ($\tau = 0$) las superficies \mathcal{U} , \mathcal{I} y \mathcal{S} coinciden.

En la Figura 1.3 vemos la imagen del slice mínimo \mathcal{S} de ecuación $\{t = 0\}$ por una isometría de \mathcal{H} que es un levantamiento de una isometría de \mathbb{H}^2 que envía $(0, 0)$ a ∞ . Esta copia isométrica se puede parametrizar como el grafo de la función $(x, y) \mapsto 4\tau \arctan(\frac{x}{y})$. Vemos que la frontera asintótica consiste en este caso en dos semi-rectas horizontales unidas con un segmento vertical de longitud $4\tau\pi$.

La siguiente Proposición nos relaciona estas dos superficies viendo una como límite de la otra.

Proposición 1.9. *El slice mínimo \mathcal{S} es límite de un paraguas bajo la acción de un grupo uniparamétrico de traslaciones hiperbólicas.*

Demostración. Consideramos el paraguas $\{t = 0\}$ en el modelo del cilindro parametrizado como

$$X(x, y) = \left(\frac{-1 + x^2 + y^2}{x^2 + (1 + y)^2}, \frac{-2x}{x^2 + (1 + y)^2}, 0 \right), \quad x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

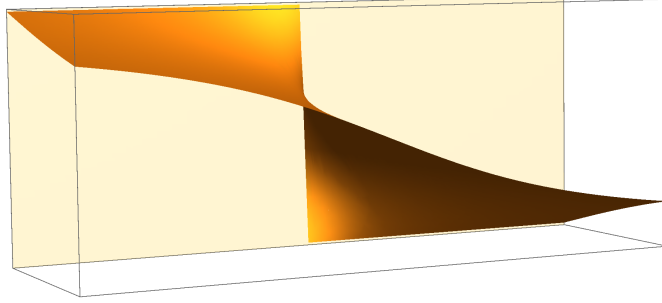


Figura 1.3: La imagen del slice \mathcal{S} por la isometría con parámetros $a = 0$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 1$ y $\tau = 1/2$, en el modelo \mathcal{H} para $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$

La imagen por la isometría ψ dada en (1.7) es la superficie

$$(\psi \circ X)(x, y) = (x, y, 4\tau \arctan(\frac{x}{y+1})).$$

Aplicamos las traslaciones hiperbólicas $(x, y, t) \mapsto (\lambda x, \lambda y, t)$ a $\psi \circ X$ y obtenemos las superficies reparametrizadas $Y_\lambda(x, y) = (x, y, 4\tau \arctan(\frac{x}{y+\lambda}))$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Entonces los límites de Y_λ cuando $\lambda \rightarrow 0$ y $\lambda \rightarrow +\infty$ son respectivamente: $Y_0(x, y) = (x, y, 4\tau \arctan(\frac{x}{y}))$ e $Y_\infty(x, y) = (x, y, 0)$. Entonces Y_0 es la imagen por una isometría del slice $\{t = 0\}$ en el modelo \mathcal{H} , véase la Figura 1.3, e Y_∞ es el slice mínimo \mathcal{S} . \square

1.2.2. Grafos mínimos invariantes. En esta Sección vamos a describir algunas superficies mínimas invariantes dando expresiones explícitas como grafos o como unión de grafos de funciones $u : \Omega \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en el modelo del semi-espacio \mathcal{H} . Estas superficies son los ejemplos más sencillos de superficies mínimas y nos dan una idea de cómo se comportan las superficies mínimas en este espacio, algunas de las cuales serán interesantes como barreras. Estas han sido descritas también mediante técnicas similares en [29] y en [79] y en [94].

La ecuación de los grafos mínimos (1.14) se puede escribir en el modelo del semi-espacio como:

$$yu_y^3 - (1 + 4\tau^2 + yu_x(-4\tau + yu_x))u_{yy} + u_y(-2\tau + yu_x)(u_x + 2yu_{xy}) - u_{xx} - y^2u_y^2u_{xx} = 0. \quad (1.18)$$

Vamos a resolver esta ecuación en algunos casos particulares obteniendo superficies mínimas con ciertas simetrías que reducen (1.14) a una EDO.

En la mayoría de los casos las soluciones de dicha EDO están determinadas salvo una constante aditiva que se traduce en una traslación vertical. Elegiremos esta constante de integración como 0 por simplicidad.

1. Si $u(x, y) = u(y)$, entonces podemos resolver la Ecuación (1.18) obteniendo una familia uniparamétrica de superficies mínimas completas que se obtienen como unión de dos grafos mínimos, dados por las soluciones

$$u_d^\pm(x, y) = \pm \sqrt{1 + 4\tau^2} \arcsin(dy), \quad (1.19)$$

como vemos en la Figura 1.4. La frontera asintótica de estas superficies consiste en dos líneas horizontales a distancia $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$ una de la otra. El parámetro d refleja una traslación hiperbólica de la superficie. El límite de esta superficie cuando $d \rightarrow +\infty$ consiste en dos slices separados por una distancia vertical $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, y el límite cuando $d \rightarrow 0$ es el conjunto abierto de la frontera ideal dada por $\{(x, 0, t), x \in \mathbb{R}, 0 < t < \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi\}$. Estas superficies son invariantes por traslaciones parabólicas y se conocen en la literatura por *catenoides parabólicas*.

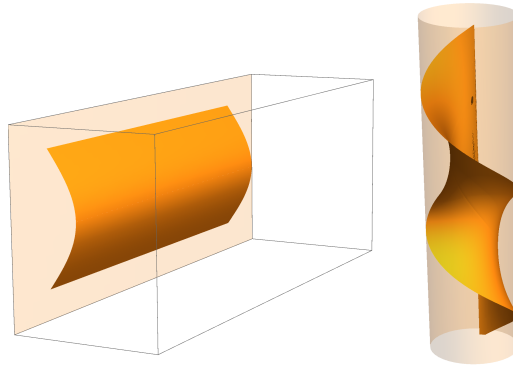


Figura 1.4: La superficie u_d^\pm dada por (1.19) para $d = 1$ y $\tau = 1/2$ en el modelo del semi-espacio (izquierda) y en el modelo del cilindro (derecha).

2. Si $u(x, y) = u(y) + lx$ para algún $l \in \mathbb{R}$, la EDP (1.18) reduce a la ODE

$$yu'(y)^3 - (1 + (ly - 2\tau)^2)u''(y) + l(ly - 2\tau)u'(y) = 0. \quad (1.20)$$

Tenemos la solución trivial $u(x, y) = lx$, que llamamos *plano inclinado*. Así como una familia 2-paramétrica de superficies completas que se

obtiene como la unión de los grafos $v_{dl}^{\pm}(x, y) = v_d^{\pm}(y) + lx$, donde

$$v_d^{\pm}(y) = \pm \int_0^y \frac{\sqrt{1 + (lt - 2\tau)^2}}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt, \quad 0 < y < d. \quad (1.21)$$

Salvo traslaciones verticales, su frontera asintótica consiste en las dos líneas de ecuaciones $t = lx$ y $t = lx + 2v_d^+(d)$ en el plano $y = 0$, véase la Figura 1.5. Tenemos la siguiente estimación para $v_d^+(d)$:

$$v_d^+(d) = \int_0^d \frac{\sqrt{1 + (lt - 2\tau)^2}}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt \geq \int_0^d \frac{1}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Tenemos información adicional en los siguientes casos:

a) Si $l\tau \leq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} v_d^+(d) &= \int_0^d \frac{\sqrt{1 + (lt - 2\tau)^2}}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt \geq \int_0^d \frac{\sqrt{1 + (2\tau)^2}}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt = \frac{\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi}{2}, \\ v_d^+(d) &= \int_0^d \frac{\sqrt{1 + (lt - 2\tau)^2}}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt \leq \int_0^d \frac{\sqrt{1 + (ld - 2\tau)^2}}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{1 + (ld - 2\tau)^2}\pi}{2}. \end{aligned}$$

b) Si $l\tau > 0$, entonces:

- Si $0 < l\tau < \frac{4\tau^2}{d}$, entonces como $0 < t < d$ tenemos que $l\tau < \frac{4\tau^2}{d} < \frac{4\tau^2}{t}$, de donde $l^2t^2 - 4lt\tau < 0$ y consecuentemente $(lt - 2\tau)^2 < 4\tau^2$. Esto nos da:

$$v_d^+(d) = \int_0^d \frac{\sqrt{1 + (lt - 2\tau)^2}}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt \leq \int_0^d \frac{\sqrt{1 + 4\tau^2}}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt = \frac{\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi}{2}.$$

- Si $|ld| < 2|\tau|$, entonces $(lt - 2\tau)^2 > (ld - 2\tau)^2$, y por tanto:

$$\begin{aligned} v_d^+(d) &= \int_0^d \frac{\sqrt{1 + (lt - 2\tau)^2}}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt \geq \int_0^d \frac{\sqrt{1 + (ld - 2\tau)^2}}{\sqrt{d^2 - t^2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{1 + (ld - 2\tau)^2}\pi}{2}. \end{aligned}$$

Fijado $l \in \mathbb{R}$, el límite de la superficie cuando $d \rightarrow 0$ es la región de la frontera asintótica $\{(x, 0, t) : x < t < lx + d_0\}$ con $d_0 = \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$. Todas estas superficies son invariantes por un cierto movimiento helicoidal parabólico (la isometría que consiste en la composición de

una traslación parabólica y una traslación vertical). Nótese que se tienen diferentes comportamientos dependiendo del signo de τ . Esto se puede entender considerando la isometría entre los modelos del semi-espacio de $\mathbb{E}(-1, \tau)$ y $\mathbb{E}(-1, -\tau)$ dado por $(x, y, t) \mapsto (x, y, -t)$.

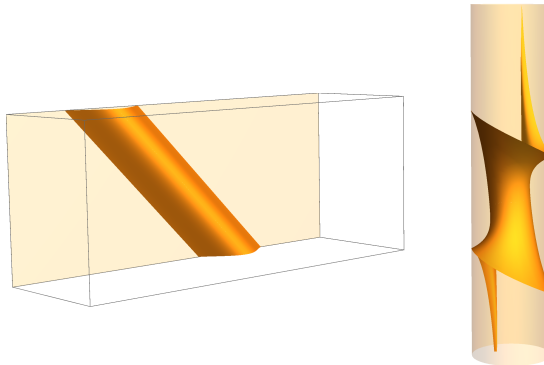


Figura 1.5: La superficie v_d^\pm dada por (1.21) para $d = 1$, $l = 1$ y $\tau = 1/2$ en el modelo del semi-espacio (izquierda) y el modelo del cilindro (derecha).

3. Si $u(x, y) = u(\frac{x}{y})$ y llamamos $s = \frac{x}{y}$, entonces la EDP (1.18) reduce a:

$$2s(1+4\tau^2)u'(s) - 6s\tau u'(s)^2 + (s^3 + s)u'(s)^3 + (1+s^2(1+4\tau^2))u''(s) = 0, \quad (1.22)$$

cuyas soluciones vienen dadas en función de un parámetro $c \in \mathbb{R}$ por

$$u_c^\pm(s) = 2\tau \arctan(s) \pm \int_{c_0}^s \frac{\sqrt{1 + (1 + 4\tau^2)t^2}}{(t^2 + 1)\sqrt{c(t^2 + 1) - 1}} dt, \quad s \in I(c), \quad (1.23)$$

donde $I(c) \subset \mathbb{R}$ es un intervalo maximal que depende de c . Todas estas superficies son invariantes por traslaciones hiperbólicas. Tenemos los siguientes tres casos:

- Si $c > 1$, entonces $I(c) = \mathbb{R}$ y obtenemos grafos enteros cuya frontera asintótica consiste en dos líneas horizontales unidas por un segmento vertical contenido en $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Cuando $c = \frac{1+4\tau^2}{4\tau^2}$ se tienen, salvo traslaciones verticales, las soluciones $u_c^-(s) = 0$ y $u_c^+(s) = 4\tau \arctan(s)$, que son el slice mínimo \mathcal{S} y una copia isométrica suya, véase la Figura 1.3. Se tiene también el caso límite $c \rightarrow \infty$, $u_\infty(s) = 2\tau \arctan(s)$, que es la superficie \mathcal{I} del Ejemplo 1.8, que está compuesta de la geodésica $\{(0, y, 0) : y > 0\}$ y todas las geodésicas horizontales ortogonales a esta.

- Si $c = 1$, entonces $I(c) = \mathbb{R}^+$ y tenemos las dos soluciones:

$$u_1^\pm(s) = 2\tau \arctan(s) \pm \int_1^s \frac{\sqrt{1 + (1 + 4\tau^2)t^2}}{(t^2 + 1)t} dt \quad s > 0. \quad (1.24)$$

La frontera asintótica de u_1^+ (salvo una traslación vertical) consiste en la semi-recta $\{(x, 0, 0) : x > 0\}$ y en la semi-recta vertical $\{(0, 0, t) : t < 0\}$ en la frontera asintótica vertical del modelo \mathcal{H} , y la geodésica horizontal completa $\{(0, y, -\infty) : y > 0\}$ en la frontera asintótica horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$ del modelo \mathcal{H} , véase la Figura 1.6. La frontera asintótica de u_1^- es análoga, pero con la geodésica horizontal asintótica $\{(0, y, +\infty) : y > 0\}$ en $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$.

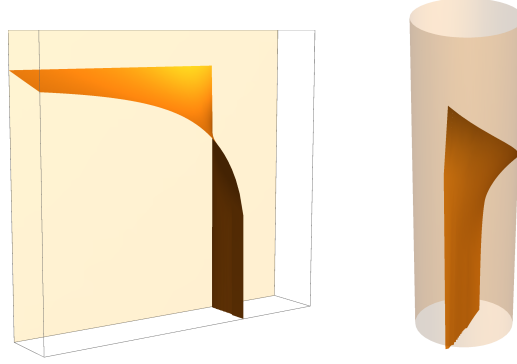


Figura 1.6: La superficie u_1^+ para $\tau = \frac{1}{2}$ en el modelo del semi-espacio (izquierda) y el modelo del cilindro (derecha).

- Si $0 < c < 1$, entonces $I(c) = (\sqrt{\frac{1-c}{c}}, +\infty)$ y las soluciones vienen dadas por:

$$u_c^\pm(s) = 2\tau \arctan(s) \pm \int_{\sqrt{\frac{1-c}{c}}}^s \frac{\sqrt{1 + (1 + 4\tau^2)t^2}}{(t^2 + 1)\sqrt{c(t^2 + 1) - 1}} dt, \quad s > \sqrt{\frac{1-c}{c}}. \quad (1.25)$$

Se tiene que $(u_c^\pm)'(\sqrt{\frac{1-c}{c}}) = \pm\infty$, y entonces podemos completar la superficie como la unión de las dos soluciones, véase la Figura 1.7. La frontera asintótica, salvo una traslación vertical, son las líneas $\{(x, 0, u_c^\pm(+\infty)) : x > 0\}$ y el segmento vertical $\{(0, 0, t) : u_c^-(+\infty) < t < u_c^+(+\infty)\}$. Esta frontera asintótica se puede enviar

mediante isometrías a un rectángulo. Por esta razón, estas superficies se conocen en la literatura como *tall rectangles*, ya que su frontera asintótica son rectángulos de altura $h > \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, véase [29, 48]. Este valor tiene un significado especial como veremos en el Capítulo 4.

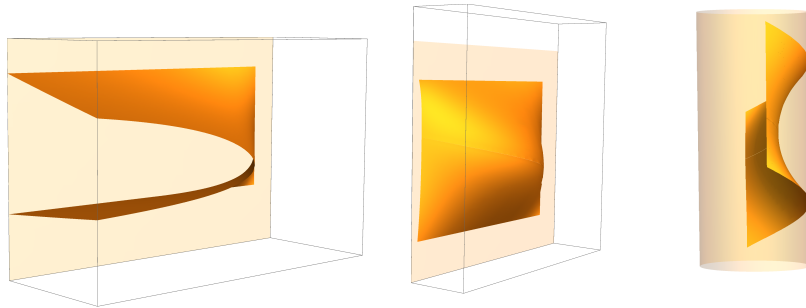


Figura 1.7: El Tall Rectangle dado por (1.25) para $\tau = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{1}{2}$ (izquierda), una copia isométrica con frontera asintótica un rectángulo en el modelo del semi-espacio (centro) y el Tall Rectangle en el modelo del cilindro (derecha).

4. Si $u(x, y) = h(r) + 4\tau \arctan\left(\frac{x}{y+1}\right)$, donde $r = \frac{(y-1)^2 + x^2}{x^2 + (y+1)^2}$, la Ecuación (1.18) se reduce a:

$$(1 + 2\tau^2 r)h'(r) + \frac{1}{2}(r - 3)(r - 1)rh'(r)^3 + (1 + 4\tau^2 r)rh''(r) = 0. \quad (1.26)$$

La solución trivial $h \equiv 0$ se corresponde con $u(x, y) = 4\tau \arctan\left(\frac{x}{y+1}\right)$ que es el paraguas centrado en el punto $(0, 1, 0) \in \mathcal{H}$. El resto de soluciones vienen dadas por

$$h_c^\pm(r) = \pm \int_{r_0(c)}^r \frac{\sqrt{1 + 4t\tau^2}}{\sqrt{t(-3 + t^2 + ct - 4t \log(t))}} dt, \quad r \in (r_0(c), 1), \quad (1.27)$$

donde $r_0(c)$, es la única solución real de $-3 + t^2 + ct - 4t \log(t) = 0$ en $(0, 1)$. Nótese que $(h_c^\pm)'(r_0(c)) = \pm\infty$, y por tanto podemos completar la superficie como la unión de las dos superficies. Estas superficies se conocen en la literatura como *catenoides*, véase [79]. La frontera asintótica de estas superficies consiste en las curvas $\{x, 0, 4\tau \arctan(x) + h^+(1)\}$ y $\{x, 0, 4\tau \arctan(x) - h^+(1)\}$, donde $h^+(1) < \sqrt{1 + 4\tau^2}\frac{\pi}{2}$. Estas superficies son invariantes por rotaciones.

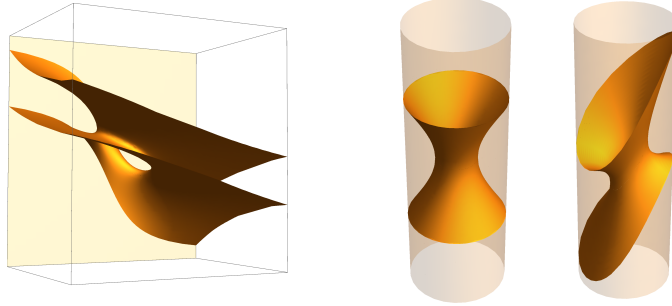


Figura 1.8: La catenoide dada por (1.27) para $\tau = 1/2$ y $c = 10$ en el modelo del semi-espacio (izquierda) y la catenoide centrada en el origen y una traslación hiperbólica de esta en el modelo del cilindro (derecha).

1.3. El problema de Jenkins-Serrin en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Llamaremos *problema de Jenkins-Serrin* al problema de Dirichlet para la ecuación de los grafos mínimos (1.14), donde Ω es un dominio de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ con frontera diferenciable a trozos y donde prescribimos valores frontera no necesariamente acotados sobre arcos geodésicos contenidos en Ω . Este problema ha sido ampliamente estudiado en los espacios producto $M \times \mathbb{R}$, en especial en el caso de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ donde se permite que el dominio Ω sea no acotado, véase [14, 61, 71]. Algunos de estos resultados se han extendido al caso de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ [94, 69] y de Nil_3 [80]. En esta sección vamos a recopilar algunos de estos resultados para el caso de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y Nil_3 y resolveremos un caso particular en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y Nil_3 que nos será útil en la Sección 3.3.

Consideramos primero el caso de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Sea $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ un dominio diferenciable a trozos cuya frontera consiste en un número finito de arcos geodésicos A_i y B_i , un número finito de arcos convexos con respecto a Ω , C_i , y un número finito de arcos abiertos $D_i \subset \partial_\infty \mathbb{H}^2$. Vamos a prescribir los valores frontera $+\infty$ en los lados A_i , $-\infty$ en los lados B_i y datos continuos f_i y g_i en los lados C_i y D_i respectivamente. Además vamos a asumir que cualesquiera dos lados A_i (o B_i) no tienen un extremo común.

Una poligonal \mathcal{P} en \mathbb{H}^2 es un dominio cuya frontera es un número finito de geodésicas en \mathbb{H}^2 de longitud finita o infinita de forma que dos geodésicas consecutivas compartan un extremo en \mathbb{H}^2 o en $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, llamado vértice (o

vértice ideal) de la poligonal. Diremos que \mathcal{P} está inscrita en Ω si $\mathcal{P} \subset \Omega$ y sus vértices están entre los vértices de Ω . Obsérvese que esta poligonal puede contener algunos de los lados A_i , B_i , o C_i en caso de que estos últimos sean geodésicas.

Para cada vértice ideal p_i de Ω vamos a considerar un horociclo H_i en p_i suficientemente pequeño de forma que este no interseque a los lados acotados de $\partial\Omega$ y $H_i \cap H_j = \emptyset$ para cualesquiera dos vértices ideales distintos. Dada una poligonal \mathcal{P} inscrita en Ω , llamaremos $\Gamma(\mathcal{P})$ a la parte de \mathcal{P} en el lado cóncavo de todos los horociclos y definimos las cantidades:

$$\gamma = |\Gamma(\mathcal{P})|, \quad \alpha = \sum_i |A_i \cap \Gamma(\mathcal{P})| \quad \text{y} \quad \beta = \sum_i |B_i \cap \Gamma(\mathcal{P})|,$$

donde $|\cdot|$ denota la longitud de una curva en \mathbb{H}^2 . En estas condiciones se tiene el siguiente resultado general:

Teorema 1.10. [61, Theorem 4.9 y Theorem 4.11]

- Si hay al menos un lado C_i o un lado D_i en la frontera de Ω entonces existe solución al problema de Jenkins-Serrin si y solo si los horociclos pueden elegirse de forma que $2\alpha < \gamma$ y $2\beta < \gamma$ para cualquier poligonal \mathcal{P} inscrita en Ω .
- Si las dos familias $\{C_i\}$ y $\{D_i\}$ son vacías existe solución al problema de Jenkins-Serrin si y solo si se pueden elegir los horociclos de forma que $\alpha = \beta$ cuando $\mathcal{P} = \Omega$ y $2\alpha < \gamma$ y $2\beta < \gamma$ para cualquier otra poligonal \mathcal{P} inscrita en Ω . Dicha solución es única salvo traslaciones verticales.

Este teorema tiene sus orígenes en un resultado clásico de Jenkins y Serrin [41] en \mathbb{R}^3 cuando el dominio es compacto. Sin embargo, como hemos indicado en el Teorema 1.10, en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es posible extenderlo hasta dominios no acotados e incluso prefijar valores sobre arcos en la frontera asintótica $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Por ejemplo, podemos considerar un polígono ideal en \mathbb{H}^2 con $2a$ lados geodésicos ($a \geq 2$) cumpliendo las condiciones del Teorema 1.10 y prescribimos alternativamente los valores $+\infty$ y $-\infty$ sobre los lados geodésicos. Las soluciones de este problema de Jenkins-Serrin se conocen como *grafos de Scherk*, que son ampliamente utilizados en la teoría

de superficies mínimas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ especialmente como barreras. Otro ejemplo sencillo se obtiene considerando el dominio formado por una geodésica completa en \mathbb{H}^2 y un arco en $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ uniendo los extremos ideales de la geodésica. Prescribimos el valor $\pm\infty$ sobre la geodésica y un dato continuo en el arco de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, obteniendo otro grafo mínimo completo también usado a menudo como barrera.

El Teorema 1.10 se ha sido extendido a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y a Nil_3 en algunos casos particulares. Younes en [94] resuelve el problema en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ cuando $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ es un dominio acotado. Melo en [69] resuelve el problema en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ cuando $\Omega \subset \mathbb{H}^2(\kappa)$ es un dominio no acotado bordeado solo por geodésicas A_i y B_i completas. Pinheiro en [80] resuelve el problema en Nil_3 cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado.

Principios del máximo generales. El estudio de la unicidad del problema de Jenkins-Serrin depende de principios del máximo generales para grafos. Para los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ se tiene el siguiente principio del máximo para grafos en dominios acotados.

Teorema 1.11. *[Principio del máximo para dominios acotados][80, 94] Sea $\Omega \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$ un dominio acotado. Sean $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que sus grafos son superficies mínimas en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Sea $E \subset \partial\Omega$ un conjunto finito de puntos tales que $\partial\Omega \setminus E$ consiste en un conjunto de arcos diferenciables y supongamos que u y v extienden de forma continua a cada arco de $\partial\Omega \setminus E$. Si $u \leq v$ en $\partial\Omega \setminus E$ entonces $u \leq v$ en Ω .*

Para el caso de dominios no acotados en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ vamos a enunciar el principio del máximo general de Collin y Rosenberg [14], en el que consideran un dominio Ω (no necesariamente simplemente conexo) cuya frontera consiste en un número finito de geodésicas completas y un número finito de arcos convexos con respecto a Ω junto con sus extremos en $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ que cumplen que si $C \subset \partial\Omega$ es un arco convexo con extremo $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, entonces el otro arco γ de $\partial\Omega$ que comparte el extremo p es asintótico a C , esto es, si $\{x_n\}$ es una sucesión en γ convergiendo a p , entonces $\text{dist}_{\mathbb{H}^2}(x_n, C) \rightarrow 0$. Nótese que por esta razón no se van a permitir lados D_i en este caso.

Teorema 1.12. *[Principio del máximo para dominios no acotados] Sea un dominio $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ en las condiciones anteriores. Sea un dominio $\mathcal{O} \subset \Omega$ y dos*

grafos mínimos u, v en \mathcal{O} que extienden continuamente a $\overline{\mathcal{O}}$. Si $u \leq v$ en $\partial\mathcal{O}$, entonces $u \leq v$ en \mathcal{O} .

En esta tesis usaremos este principio del máximo. Sin embargo en [61] hay un principio del máximo más general que permite probar la unicidad de la solución al problema de Jenkins-Serrin en unas condiciones más amplias, no obstante, la unicidad en general del apartado primero del Teorema 1.10 no es posible como se muestra en [61].

Sería interesante ver qué se puede decir del caso no acotado en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Es esperable que los resultado de Mazet, Rodríguez y Rosenberg [61] en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ se extiendan a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ ya que se tiene la misma geometría en la superficie base \mathbb{H}^2 y, por tanto, los conceptos necesarios tienen sentido en ambos espacios. Sin embargo, el caso de Nil_3 es más complicado puesto que no hay un concepto de frontera asintótica.

Límites radiales de un grafo de tipo Jenkins-Serrin. Vamos ahora a probar un resultado útil para comparar dos superficies dadas como soluciones a problemas de tipo Jenkins-Serrin. Este resultado lo usaremos más adelante en la Sección 3.2.

Lema 1.13. *Sea $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ un dominio regular a trozos. Supongamos que β_1 y β_2 son dos componentes regulares de $\partial\Omega$ tales que coinciden en un vértice común $p \in \partial\Omega$ con un ángulo interior $0 < \alpha < 2\pi$. Supongamos que $u \in C^\infty(\Omega)$ es una solución de la ecuación de los grafos mínimos en Ω con valores acotados continuos en β_1 y valores asintóticos $+\infty$ o $-\infty$ en β_2 . Entonces u tiene límites radiales continuos en p a lo largo de cualquier segmento geodésico en el interior de Ω que no sea tangente a β_1 o β_2 .*

Demostración. Sea γ el segmento vertical que se proyecta en p y está en la frontera de Σ , la superficie mínima grafo de u . Obsérvese que Σ se extiende analíticamente más allá de γ mediante simetría axial, véase el resultado de Sa Earp y Toubiana en [90]. Por tanto, el normal N (con $\nu > 0$ en el interior de Σ) extiende de forma diferenciable a γ . Además, N rota de forma monótona a lo largo de γ por el principio del máximo en la frontera para superficies mínimas. Por tanto, el conormal $J\gamma' = N \times \gamma'$ también rota de forma monótona a lo largo de γ . Como $J\gamma'$ es horizontal y tangente a las curvas de nivel de la función altura de Σ , deducimos que la proyección de

tales curvas de nivel forma una foliación de un entorno de p de $\bar{\Omega}$.

Esto implica que, cuando nos aproximamos a p a lo largo de una geodésica interior σ que no es tangente a β_1 o β_2 , el límite de u es justamente el valor de u en la única curva de nivel (de la foliación) tangente a σ en p , y por tanto el límite existe y es finito. \square

1.3.1. Problema de Jenkins-Serrin sobre polígonos simétricos. Aquí vamos a tratar con un caso particular de problema de Jenkins-Serrin en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y Nil_3 donde usaremos los resultados anteriores.

Supondremos que $\kappa \leq 0$ y fijaremos un número entero $k \geq 2$ en lo sucesivo y vamos a trabajar en el modelo del cilindro para $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Dado $a, b \in (0, \infty)$, definimos $T_{a,b} \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$ como el triángulo geodésico de vértices $p_0 = (0, 0)$, p_1 y p_2 ordenados en sentido antihorario de forma que los segmentos $\overline{p_0 p_1}$ y $\overline{p_0 p_2}$ tienen longitudes a y b respectivamente, y el ángulo en p_0 es igual a $\frac{\pi}{k}$. Salvo una isometría que conserve la orientación, podemos suponer que p_1 queda en el eje x . Usando trigonometría hiperbólica (para $\kappa < 0$) o trigonometría euclídea (para $\kappa = 0$), la longitud del tercer lado $\overline{p_1 p_2}$ es:

$$\begin{aligned} \cosh(\ell\delta) &= \cosh(a\delta)\cosh(b\delta) - \sinh(a\delta)\sinh(b\delta)\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) & \text{si } \kappa < 0, \\ \ell^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) & \text{si } \kappa = 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

dónde $\delta = \sqrt{-\kappa}$.

También consideraremos los casos límite $T_{a,\infty} = \overline{\cup_{b>0} T_{a,b}}$ y $T_{\infty,b} = \overline{\cup_{a>0} T_{a,b}}$ que son triángulos con un vértice ideal si $\kappa < 0$, o bandas truncadas si $\kappa = 0$. Los puntos p_1 (resp. p_2) deben ser entendidos como un punto ideal si $a = \infty$ (resp. $b = \infty$). Después de sucesivas reflexiones axiales sobre $\overline{p_0 p_1}$ y $\overline{p_0 p_2}$, obtenemos un dominio poligonal $\Omega_{a,b} \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$ que consiste en $2k$ copias de $T_{a,b}$, cuyos vértices nombramos p_1, p_2, \dots, p_{2k} en sentido antihorario, véase la Figura 1.9. Podemos levantar estos puntos a $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ mediante la sección cero como $q_i = F_0(p_i) = (p_i, 0) \in \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ para todo $i \in \{0, \dots, 2k\}$.

Estamos interesados en el problema de Jenkins-Serrin en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ sobre el dominio $\Omega_{a,b} \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$ con valores frontera $+\infty$ en $\overline{p_{2i-1} p_{2i}}$ y $-\infty$ en $\overline{p_{2i} p_{2i+1}}$, para cada i (entendiendo los subíndices módulo $2n$). La soluciones deseadas de este problema conteniendo el punto q_0 vendrán dadas por los Lemas 1.15 y 1.19 y las llamaremos $\Sigma_{a,b}$.

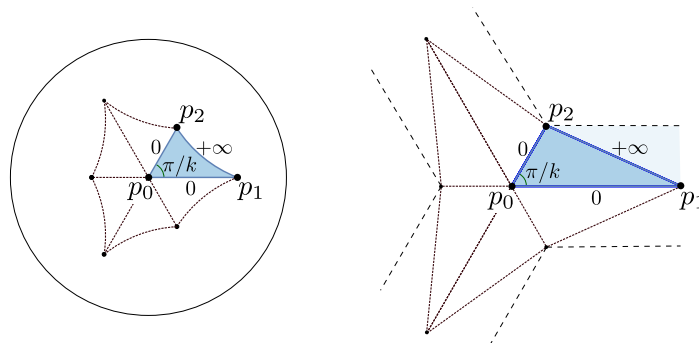


Figura 1.9: El dominio $\Omega_{a,b}$ con $a, b \in (0, \infty)$ está representado a la izquierda (caso de $\kappa < 0$) y en el centro ($\kappa = 0$) para $k = 3$. El triángulo $T_{a,b}$ es la región sombreada y la banda límite aparece en color mas claro.

Nota 1.14. Obsérvese que si $\tau \neq 0$ entonces $\Sigma_{a,b}$ y $\Sigma_{b,a}$ no son congruentes si $a \neq b$ a pesar de proyectarse en dominios congruentes, ya que no hay isometrías que inviertan la orientación en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Esto implica además que las superficies $\Sigma_{a,b}$ no serán congruentes entre ellas para diferentes valores del par (a, b) . Por otro lado, si $\tau = 0$, las superficies $\Sigma_{a,b}$ y $\Sigma_{b,a}$ sí son congruentes mediante una simetría especular respecto a un plano vertical. Observamos también que, la superficie $\Sigma_{b,a}$ se puede obtener sustituyendo el valor $+\infty$ con $-\infty$ en el problema de Jenkins-Serrin sobre $T_{a,b}$.

El caso de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Vamos a comenzar adaptando los resultados antes mencionados para resolver el problema para $\kappa < 0$, incluyendo el problema límite sobre $T_{\infty, \infty} = \overline{\cup_{a,b>0} T_{a,b}}$.

Lema 1.15. Sean $\kappa < 0$ y $\tau \neq 0$. Dados $k \geq 2$ y $a, b \in (0, \infty]$, el problema de Jenkins-Serrin en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ sobre $\Omega_{a,b} \subset \mathbb{H}^2(\kappa)$ con valores frontera $+\infty$ en $\overline{p_{2i-1}p_{2i}}$ y $-\infty$ en $\overline{p_{2i}p_{2i+1}}$ para todo i , tiene una única solución $\Sigma_{a,b}$ salvo traslaciones verticales.

Demostración. Si $a, b \in (0, \infty)$, entonces la existencia y unicidad se siguen del Teorema de Jenkins-Serrin probado por Younes en [94]. De la misma manera, si $a = b = \infty$, la existencia de solución fue dada por Melo en [69].

Vamos a discutir la existencia cuando solo uno de los parámetros a o

b son infinitos, esto es, solo uno de los puntos p_1 o p_2 son ideales. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $a = \infty$, y por tanto p_1 es ideal. Sea $\gamma \subset \mathbb{H}^2(\kappa)$ la geodésica completa conteniendo $\overline{p_1 p_2}$. Consideramos una sucesión de grafos de Jenkins-Serrin sobre triángulos compactos con vértices p_0 , $p_{1,n}$ y p_2 , siendo $p_{1,n} \in \gamma$ puntos divergiendo a p_1 . El principio del máximo para grafos mínimos sobre dominios compactos probado en [94] (Teorema 1.11) implica que la sucesión de grafos es creciente, y solo necesitamos encontrar una barrera apropiada para ver que la sucesión no sea divergente en ningún lugar. Para esto, consideramos un triángulo geodésico $T' \subset \mathbb{H}^2(\kappa)$ con tres vértices ideales y un lado igual a γ de forma que $T_{a,b} \subset T'$. Por los resultados de [69] sabemos que que existe un grafo mínimo Σ' sobre T' con valores frontera $+\infty$ en γ y 0 en los otros dos lados de T' . La superficie Σ' queda por encima de cualquier grafo de la sucesión por el principio del máximo (Teorema 1.11). Por tanto, la sucesión de grafos converge, después de pasar a una subsucesión, a un grafo mínimo Σ_∞ tomando los valores frontera deseados ya que Σ' es una barrera por arriba, y además para cualquier conjunto compacto de $T_{a,b}$, podemos tomar un término de la sucesión como barrera por debajo. Para obtener la solución sobre $\Omega_{a,b}$, extendemos el grafo sobre $T_{a,b}$ mediante sucesivas simetrías sobre las geodésicas horizontales $\overline{q_0 q_2}$.

La unicidad de solución de los casos no acotados se puede probar siguiendo argumentos similares a los de [14, 47]. \square

Se sigue que el problema de Jenkins-Serrin sobre $\Omega_{a,b}$ es equivalente al problema de Jenkins-Serrin sobre $T_{a,b} \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$ con valores frontera 0 en $\overline{p_0 p_1} \cup \overline{p_0 p_2}$ y $+\infty$ en $\overline{p_1 p_2}$ por unicidad, ya que mediante simetrías en el segundo problema podemos generar todas las soluciones del primero salvo traslaciones verticales. Nótese que el valor 0 implica que $\overline{q_i q_{k+i}} = F_0(\overline{p_i p_{k+i}})$ es una geodésica horizontal para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

El caso de Nil_3 . La existencia de solución en Nil_3 para el caso acotado $(a, b) \in (0, \infty)$ se sigue de los resultados de Pinheiro [80]. Para resolver el problema de Jenkins-Serrin en Nil_3 en el caso no acotado con $a = \infty$ o bien $b = \infty$ vamos a construir de manera explícita una familia de superficies mínimas en Nil_3 que son solución del problema para $k = 2$ y que usaremos como barrera para probar la existencia de solución en el caso $k \geq 3$. Esta

solución explícita era conocida para el caso de $a = \infty$ y se corresponde con la familia de helicoides horizontales dada por Daniel y Hauswirth en [20].

La Familia de Helicoides \mathcal{H}_μ en Nil_3 . Consideraremos una superficie foliada por líneas rectas (no necesariamente geodésicas de Nil_3) que intersecan ortogonalmente a una geodésica horizontal $\Gamma \subset \text{Nil}_3$. Vamos a suponer que esta geodésica es el eje y y, por tanto, la superficie queda parametrizada como:

$$X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3, \quad X(u, v) = (u, v, u h(v)), \quad (1.29)$$

siendo $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ una cierta función diferenciable que representa la pendiente de la línea recta que pasa por $(0, v, 0)$. Vamos a escribir $h(v) = \frac{1}{2}(v - f(v))$, lo cual simplificará los cálculos. Dado que las traslaciones a lo largo de Γ se corresponden con añadir una constante aditiva a f vamos a suponer que $0 \in I$ y $h(0) = 0$, lo cual implicará que X es axialmente simétrica con respecto al eje x , es decir, las funciones f y h serán funciones impares. La curvatura media de la parametrización viene dada por:

$$H(u, v) = \frac{u \left((4 + f(v)^2) f''(v) - 2f(v) (f'(v) - 1) (f'(v) - 2) \right)}{2 \left(u^2 f'(v)^2 - 4u^2 f'(v) + f(v)^2 + 4u^2 + 4 \right)^{3/2}}.$$

Por tanto X define una superficie mínima si y solo si se satisface la ecuación diferencial de segundo orden:

$$(4 + f(v)^2) f''(v) = 2f(v) (f'(v) - 1) (f'(v) - 2). \quad (1.30)$$

La Ecuación (1.30) admite una primera integral

$$f'(v) = \frac{2\sqrt{4 + c^2 f(v)^2}}{\sqrt{4 + c^2 f(v)^2} + c\sqrt{4 + f(v)^2}}, \quad (1.31)$$

que depende de la constante de integración $c \neq -1$. Dado $\mu \in \mathbb{R}$, la solución de (1.30) con condiciones iniciales $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1 - 2\mu$ (esto es, $h'(0) = \mu$) definida en un intervalo maximal $(-t_\mu, t_\mu) \subseteq \mathbb{R}$ es la inversa de la siguiente función impar:

$$g_\mu(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left(1 + \frac{(1 + 2\mu)\sqrt{4 + y^2}}{(1 - 2\mu)\sqrt{4 + \left(\frac{1+2\mu}{1-2\mu}\right)^2 y^2}} \right) dy. \quad (1.32)$$

Esto se sigue de una integración elemental de la ecuación (1.31) llamando $c = \frac{1+2\mu}{1-2\mu}$ y cubre todos los valores iniciales de la primera derivada excepto $\mu = \frac{1}{2}$. Si $\mu \rightarrow \frac{1}{2}$ por arriba o por abajo, el integrando de (1.32) converge monótonamente a una función no integrable en un entorno de 0. Sin embargo, en el caso $\mu = \frac{1}{2}$ tenemos la solución constante $f(v) = 0$, que no tiene inversa, y se corresponde con la superficie \mathcal{I} , véase el Ejemplo 1.8 y la nota 1.17. Los resultados de dependencia continua de soluciones respecto de las condiciones iniciales implican, no obstante, la continuidad respecto de μ .

Lema 1.16. *Hay una familia uniparamétrica continua \mathcal{H}_μ , $\mu \in \mathbb{R}$, de superficies completas propiamente embebidas en el Nil_3 foliadas por líneas rectas ortogonales a una geodésica horizontal Γ que además contienen a una geodésica horizontal ortogonal a Γ .*

- Si $|\mu| < \frac{1}{2}$, entonces \mathcal{H}_μ es un grafo mínimo entero.
- Si $|\mu| > \frac{1}{2}$, entonces \mathcal{H}_μ es una superficie mínima tipo helicoides horizontal de eje Γ . Las subfamilias con $\mu > \frac{1}{2}$ o $\mu < -\frac{1}{2}$ difieren en el sentido de rotación del normal a lo largo de Γ , y se pueden reparametrizar en términos de la distancia entre geodésicas verticales consecutivas contenidas en \mathcal{H}_μ , que varía desde 0 (cuando $|\mu|$ tiende a $+\infty$) hasta $+\infty$ (cuando $|\mu|$ converge a $\frac{1}{2}$).

Demostración. Si $\mu = \frac{1}{2}$, tenemos que $f(v) = 0$ y X parametriza globalmente al grafo invariante entero mínimo \mathcal{I} . Si $-\frac{1}{2} \leq \mu < \frac{1}{2}$, entonces $c = \frac{1+2\mu}{1-2\mu} \geq 0$ y el integrando en (1.32) es mayor o igual que 1, de donde g_μ es un difeomorfismo de \mathbb{R} a \mathbb{R} , y su inversa $f = g_\mu^{-1}$ también. Esto significa que X define un grafo mínimo entero.

Supongamos que $\mu > \frac{1}{2}$ (resp. $\mu < -\frac{1}{2}$). El integrando en (1.32) es estrictamente negativo (resp. estrictamente positivo). En particular, g_μ es estrictamente monótono, luego es un difeomorfismo de \mathbb{R} sobre su imagen. Nótese que $c = \frac{1+2\mu}{1-2\mu} \neq -1$ es negativo, luego una simple manipulación de la expresión nos permite reescribir la Ecuación (1.32) como

$$g_\mu(x) = \int_0^x \frac{2(1-c^2) dy}{4 + c^2 y^2 + \sqrt{(4 + c^2 y^2)(4c^2 + c^2 y^2)}}.$$

Por tanto, el límite $t_\mu = \lim_{x \rightarrow \infty} |g_\mu(x)|$ es un número real distinto de cero tal que $f = g_\mu^{-1} : (-t_\mu, t_\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ es un difeomorfismo. Como $h(v)$ diverge cuando v se aproxima a $\pm t_\mu$, las líneas rectas que folian la superficie rotan monótonamente teniendo las geodésicas verticales $s \mapsto (0, \pm t_\mu, s)$ como límites, véase la Figura 1.10. La superficie tipo helicoides \mathcal{H}_μ se obtiene después de sucesivas reflexiones respecto de estas geodésicas verticales. Sin embargo, el argumento anterior establece una monotonía distinta para g_μ (y por tanto por h) según $\mu > \frac{1}{2}$ y $\mu < \frac{-1}{2}$, lo cual refleja un sentido de rotación diferente.

Para la última frase del Lema 1.16, hemos visto que dos rectas verticales sucesivas contenidas en \mathcal{H}_μ son $s \mapsto (0, -t_\mu, s)$ y $s \mapsto (0, t_\mu, s)$, cuya distancia es $2t_\mu$ (cualesquiera otras dos geodésicas verticales difieren en la misma distancia por simetría). Vamos a terminar viendo que $\mu \mapsto t_\mu$ induce una biyección creciente de $(-\infty, \frac{-1}{2})$ a $(0, +\infty)$ y una biyección decreciente de $(\frac{1}{2}, +\infty)$ a $(0, +\infty)$. El integrando en la Ecuación (1.32), como función de $\mu \in (-\infty, \frac{-1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ satisface

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(1 + \frac{(1+2\mu)\sqrt{4+y^2}}{(1-2\mu)\sqrt{4 + (\frac{1+2\mu}{1-2\mu})^2 y^2}} \right) = \frac{8\sqrt{4+y^2}}{(1-2\mu)^2 (4 + (\frac{1+2\mu}{1-2\mu})^2 y^2)^{3/2}} > 0.$$

Teniendo en cuenta el valor absoluto en la definición de t_μ , se sigue que $\mu \mapsto t_\mu$ es estrictamente creciente (resp. decreciente) cuando nos restringimos a $(-\infty, \frac{-1}{2})$ (resp. $(\frac{1}{2}, +\infty)$). Tomando límites en (1.32) por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que $\lim_{\mu \rightarrow \pm\infty} t_\mu = 0$ y $\lim_{\mu \rightarrow \pm 1/2} t_\mu = +\infty$, y con esto finaliza la prueba. \square

Nota 1.17. Si $\mu = \pm \frac{1}{2}$, tenemos que $h(v) = \pm \frac{1}{2}v$, y ambos casos son congruentes con la superficie invariante \mathcal{I} del Ejemplo 1.8. Si $\mu = 0$, entonces $h(v) = 0$, y por tanto \mathcal{H}_0 es el paraguas \mathcal{U}_0 centrado en el origen. Daniel y Hauswirth [20, Section 7] dieron una familia de helicoides que se corresponde con el caso $\mu < \frac{-1}{2}$, ver [77, Lemma 5.1]. Daniel [19, Examples 8.4 and 8.5] también construyó dos grafos enteros foliados por líneas rectas pero que no contienen la geodésica horizontal ortogonal al eje. Esto revela que la suposición $h(0) = 0$ excluye algunos casos entre todas las soluciones de (1.30).

Nota 1.18. Ninguna de las superficies \mathcal{H}_μ son congruentes entre ellas en

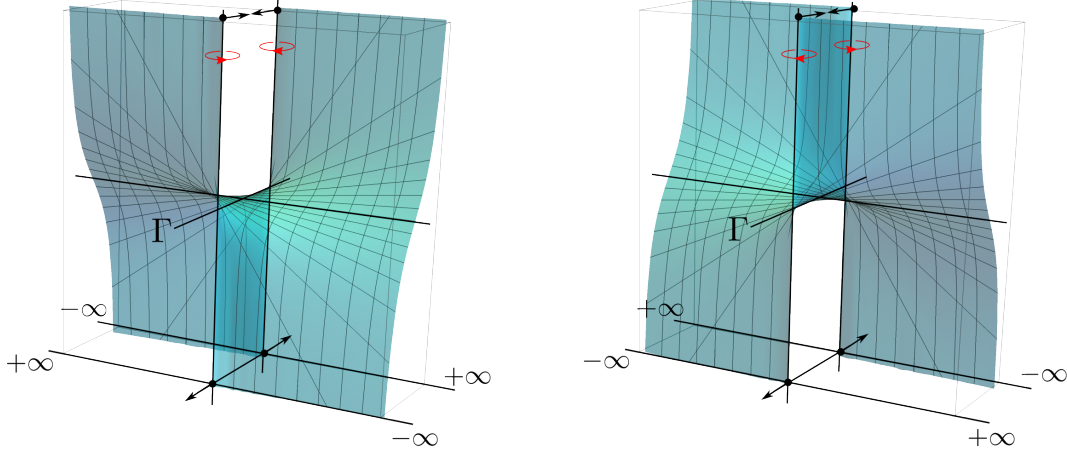


Figura 1.10: Rotación del normal de los helicoides horizontales \mathcal{H}_μ en los casos $\mu < -\frac{1}{2}$ (izquierda) y $\mu > \frac{1}{2}$ (derecha). En la parte inferior se indican los problema de Jenkins-Serrin que resuelven las superficies \mathcal{H}_μ sobre bandas de \mathbb{R}^2 . Recuérdese que los casos $\mu > \frac{1}{2}$ y $\mu < -\frac{1}{2}$ producen superficies no congruentes.

Nil_3 , salvo para $\mathcal{H}_{1/2}$ y $\mathcal{H}_{-1/2}$. Entre las superficies con $\mu \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$, esto se sigue del hecho que las isometrías de Nil_3 preservan las geodésicas verticales, la distancia y orientación. Además, estas superficies tipo helicoides no son congruentes a ningún \mathcal{H}_μ con $\mu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ya que no son grafos enteros. Para el caso $\mu \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, la función ángulo de \mathcal{H}_μ en la parametrización (1.29) vienen dada por

$$\nu(u, v) = \frac{2}{\sqrt{u^2(1 - 2h'(v))^2 + (2h(v) + v)^2 + 4}}, \quad (1.33)$$

por tanto el origen es el único punto de \mathcal{H}_μ con función ángulo igual a 1. Como las isometrías preservan la función ángulo, el origen debería quedar fijo por una isometría entre dos de estas superficies. Se deduce también de (1.33) que la geodésica horizontal Γ debe quedar fija también, y por tanto la dirección de rotación a lo largo de esta. Como la curvatura de Gauss de \mathcal{H}_μ en el origen es $\frac{-3}{4} - \mu^2$ y la dirección de rotación es diferente para $\mu > 0$ y $\mu < 0$, concluimos que ninguna de las superficies \mathcal{H}_μ son congruentes entre ellas si $\mu \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Lema 1.19. Supongamos que $\kappa = 0$ y $\tau \neq 0$. Dado $k \geq 2$ y $a, b \in (0, \infty]$ no

ambos iguales a ∞ , el problema de Jenkins-Serrin en $\mathbb{E}(0, \tau)$ sobre $T_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$ con valores frontera 0 en $\overline{p_0 p_1} \cup \overline{p_0 p_2}$ y $+\infty$ en $\overline{p_1 p_2}$ tiene solución.

Demostración. Vamos a suponer que $\tau = \frac{1}{2}$ salvo una homotecia en la métrica. Si $a, b < \infty$, entonces $\Omega_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$ es un triángulo acotado, y Pinheiro [80] probó que existe una única solución al problema de Jenkins-Serrin en esta situación.

Para el caso infinito, empezamos suponiendo que $k = 2$. Si $a = \infty$, existe un $\mu > \frac{1}{2}$ tal que $t_\mu = b$ por el Lema 1.16, y una parte de \mathcal{H}_μ es un grafo sobre el interior de la media banda $T_{\infty,b} = [0, +\infty) \times [0, b]$ que resuelve el problema de Jenkins-Serrin. De igual manera, si $b = \infty$, podemos encontrar $\mu' < \frac{1}{2}$ tal que $t_{\mu'} = a$, y por tanto una parte de $\mathcal{H}_{\mu'}$ es un grafo sobre el interior de $T_{a,\infty} = [0, a] \times [0, +\infty)$ después de rotarlo un ángulo de amplitud $\frac{\pi}{2}$.

Supongamos ahora que $k \geq 3$ y $a = \infty$ (el caso $b = \infty$ es similar). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\Sigma_{n,b}$ la solución del correspondiente problema de Jenkins-Serrin sobre $T_{n,b}$, cuya existencia se sigue de los resultados de [80], véase el Teorema 1.11. Se tiene que $\Sigma_{n,b}$ es una sucesión decreciente de grafos mínimos, por el principio del máximo para grafos sobre dominios acotados probado en [80]. Sea Σ' el grafo sobre la banda $[b \cos \frac{\pi}{k}, +\infty) \times [0, b \sin \frac{\pi}{k}]$ tomando valores $+\infty$ sobre $[b \cos \frac{\pi}{k}, +\infty) \times \{b \sin \frac{\pi}{k}\}$ y 0 en el resto de la frontera. La superficie Σ' no es más que parte del helicoides trasladado \mathcal{H}_μ . De nuevo, por el principio del máximo, todas las superficies $\Sigma_{n,b}$ están acotadas por debajo por Σ' . Esto implica la convergencia de una subsucesión en conjuntos compactos de $\Sigma_{n,b}$ a un grafo mínimo sobre $T_{\infty,b}$, tomando los valores frontera deseados. \square

Mediante sucesivas reflexiones sobre la frontera horizontal de la superficie obtenida en el Lema 1.19, se obtiene la solución $\Sigma_{a,b}$ al problema de Jenkins-Serrin en $\Omega_{a,b}$.

Nota 1.20. En el caso $a = b = \infty$ (no considerado en el Lema 1.19), el segmento $\overline{p_1 p_2}$ desaparece y la solución al problema de Jenkins-Serrin no es única, véase [74]. Sin embargo, podemos definir $\Sigma_{\infty,\infty}$ como el límite de $\Sigma_{a,b}$ cuando $a, b \rightarrow \infty$. Cartier [6, Corollary 3.8] obtuvo grafos enteros en Nil_3 con valores 0 en $\partial T_{\infty,\infty}$ y asintóticamente positivos en el interior de $T_{\infty,\infty}$. Usando estos grafos enteros como barrera por abajo junto con el paraguas \mathcal{U}_0 , se sigue que $\Sigma_{\infty,\infty} \subset \text{Nil}_3$ es un grafo entero mínimo cuya restricción

al interior de $T_{\infty, \infty}$ es estrictamente positiva. Si $k = 2$, entonces $\Sigma_{\infty, \infty}$ es la superficie invariante \mathcal{I} debido a la continuidad de la familia \mathcal{H}_μ (véase el Lema 1.16).

Capítulo 2

Superficies mínimas con curvatura total finita

Se dice que una superficie Σ de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ tiene curvatura total finita si su curvatura de Gauss K es una función integrable en la superficie, en cuyo caso se define la curvatura total de Σ como

$$C(\Sigma) = \int_{\Sigma} K.$$

Para una superficie mínima de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (cuando $\tau = 0$) la ecuación de Gauss (1.8) muestra que $K \leq 0$ y por tanto $C(\Sigma) \leq 0$. Vamos a centrarnos en primer lugar en el caso de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ resaltando los principales resultados conocidos.

Consideramos el modelo del disco de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ con la métrica $g = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} |dz|^2$. Sea $X = (\mathcal{F}, h) : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ una inmersión conforme y mínima. Se tiene que $\mathcal{F} : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ es una aplicación armónica y $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica. Dado un parámetro conforme $\omega \in \Sigma$, Sa Earp y Toubiana probaron en [87] que $(h_{\omega})^2 = -Q$ donde Q es la diferencial de Hopf asociada a \mathcal{F} y se tiene que

$$h = -2\Re\left(i \int \sqrt{Q} d\omega\right).$$

En este contexto se tiene el siguiente resultado para una superficie mínima con curvatura total finita:

Teorema 2.1.[36, 35] Sea Σ una superficie mínima, completa, orientable, inmersa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y con curvatura total finita. Entonces, se cumple:

1. Σ es conformemente equivalente a $\mathbb{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$, donde \mathbb{M} es una superficie de Riemann compacta y $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{M}$, $r \geq 1$, es una cantidad finita de puntos que se corresponden con los finales de M .
2. La función ángulo ν tiende a cero en los finales.
3. Q es holomorfa en Σ y extiende de manera meromorfa a los finales.
4. Cada final de Σ es asintótico a una poligonal admisible en el infinito formada por $m_i + 1$ geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ y $m_i + 1$ geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$, unidas con rectas verticales contenidas en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ para cierto número entero $m_i \geq 0$, ver Definición 2.2 y 2.3.
5. La curvatura total de M viene dada por:

$$\int_M K = 2\pi \left(2 - 2g - 2r - \sum_{i=1}^r m_i \right), \quad (2.1)$$

donde g es el género de \mathbb{M} y r y m_i son los descritos anteriormente.

Destacamos la noción de *poligonal admisible en el infinito*, que se define como:

Definición 2.2. Decimos que $\mathcal{P} \subset \partial_\infty(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ es una poligonal admisible en el infinito si es una poligonal cerrada compuesta por k geodésicas completas en $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$, k geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$ y $2k$ geodésicas verticales en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uniendo los extremos de las geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ y $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$.

Vamos a dar a continuación una descripción de los finales de las superficies mínimas con curvatura total finita dada por [35] y [33]. Sea $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ una inmersión propia, de un final de una superficie mínima con curvatura total finita, y llamemos $F = X(\Sigma)$. Sabemos que F es asintótico a una poligonal en infinito \mathcal{P} con m geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ y m geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$. Se prueba que para $c > 0$ suficientemente grande $F \cap \{t = c\}$ y $F \cap \{t = -c\}$ consisten cada uno de ellos en un conjunto de m curvas. Cada una de estas curvas converge cuando $c \rightarrow \infty$ a una de las geodésicas

de \mathcal{P} en $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ o $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$. Además, si el final F es embebido estas curvas son disjuntas.

Consideremos ahora un horodisco H suficientemente pequeño en p , esto es la región convexa de \mathbb{H}^2 menos un horociclo en p , donde p es un punto ideal de \mathbb{H}^2 sobre el que se proyecta una recta vertical de \mathcal{P} , y sean \bar{l}_1 y \bar{l}_2 dos geodésicas horizontales ideales de \mathcal{P} que tienen un extremo en $\{p\} \times \{+\infty\}$ y $\{p\} \times \{-\infty\}$, respectivamente. Decimos que E es una hoja horizontal de $F \cap (H \times \mathbb{R})$ si existe una componente conexa U de $X^{-1}(F \cap (H \times \mathbb{R}))$ tal que $E = X(U)$. En [33] probaron que cada hoja horizontal E de $F \cap (H \times \mathbb{R})$ es un grafo horizontal (geodésico) sobre $l_1 \times \mathbb{R}$ y sobre $l_2 \times \mathbb{R}$ donde $l_i = \Pi(\bar{l}_i)$.

Se dice que E es una hoja vertical de $F \cap \{t > c\}$ (resp. $F \cap \{t < -c\}$) para $c > 0$ suficientemente grande si existe una componente conexa V de $X^{-1}(F \cap \{t > c\})$ tal que $E = X(V)$. También en [33] probaron que cada hoja vertical E de $F \cap \{t > c\}$ (resp. $F \cap \{t < -c\}$) es un grafo horizontal (geodésico) sobre cierto dominio de $l_1 \times \mathbb{R}$ (resp. $l_2 \times \mathbb{R}$). Además, cuando el final es embebido todas las hojas horizontales (respectivamente verticales) son disjuntas.

Definición 2.3. [33, Definition 5] Decimos que una superficie Σ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es asintótica a una poligonal en infinito \mathcal{P} embebida si $\partial_\infty \Sigma \subset \mathcal{P}$. Si la poligonal en infinito no es embebida además exigimos que exista $t_0 > 0$ tal que para toda hoja vertical E de $\Sigma \cap \{t > t_0\}$ (resp. $\Sigma \cap \{t < -t_0\}$) existe alguna geodésica $\bar{l} \in \mathcal{P}$ en $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ (resp. $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$) tal que $\partial_\infty E \subset \partial_\infty(\Pi(\bar{l}) \times \mathbb{R})$.

En el caso de que la poligonal admisible en infinito sea embebida la noción de asintótico al polígono admisible del Teorema 2.4 coincide con la dada en la Definición 1.1, es decir, $\partial \Sigma \subset \mathcal{P}$ si para toda sucesión divergente de puntos $p_n \in \Sigma$ convergiendo a $p \in \partial_\infty(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ en la compactificación producto se tiene que $p \in \mathcal{P}$.

Teorema 2.4.[33, Theorem 4] Una superficie mínima completa de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tiene curvatura total finita si, y solo si, es propia tiene topología finita y cada uno de sus finales es asintótico a una poligonal admisible en el infinito.

El Teorema 2.4 relaciona las superficies con curvatura total finita con el problema de Plateau asintótico en el infinito, ya que si se resuelve el

problema de Plateau en el infinito para una poligonal admisible en el infinito y se prueba que la superficie es propia entonces automáticamente la solución tendrá curvatura total finita.

Los ejemplos más sencillos con curvatura total finita son los planos verticales que son los únicos con curvatura total nula, véase [39, Corollary 5].

Los grafos de Scherk son grafos mínimos sobre un polígono ideal en \mathbb{H}^2 con $2a$ lados geodésicos ($a \geq 2$) que toman alternativamente los valores $+\infty$ y $-\infty$ sobre los lados geodésicos. Se obtienen como solución a un problema de Jenkins-Serrin, véase la Sección 1.3. Los grafos de Scherk tienen género 0 y 1 final asintótico a una poligonal admisible en el infinito con $m_1 = a - 1$. Por el Teorema 2.4 y la formula (2.1), tienen curvatura total finita $-2(a-1)\pi$. El caso $a = 2$ da las únicas superficies mínimas completas con curvatura total finita -2π como probaron Pyo y Rodríguez en [83].

Teorema 2.5.[83] *Una superficie mínima completa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura total finita -2π es el grafo de Scherk sobre un cuadrilátero ideal.*

Hauswirth, Menezes y Rodríguez en [33] probaron la siguiente caracterización de estas superficies:

Teorema 2.6.[33, Theorem 7] *Sea M un disco mínimo propiamente embebido asintótico a una poligonal en infinito que se proyecta en \mathbb{H}^2 sobre el borde de un dominio convexo. Entonces, M es un grafo Scherk.*

También están los ejemplos Twisted Scherk construidos por Pyo y Rodríguez en [83] con género cero, un final y $m_1 = 2b$ para cierto $b \geq 1$, que tienen curvatura total finita $-4b\pi$. Estos son los únicos ejemplos conocidos hasta ahora que no son grafos ni bigrafos. En la Sección 2.2.1 se construirán los ejemplos homólogos en $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$.

Otros ejemplos conocidos son los llamados k -noides mínimos construidos por Rodríguez y Morabito en [70]. Los más simétricos de esta familia fueron construidos independientemente por Pyo en [81] y se corresponden con las superficies obtenidas en la Sección 3.3 para el caso $H = 0$. Todos los k -noides mínimos tienen género cero y k finales con $m_i = 0$, es decir, cada final es asintótico a un plano vertical. Dentro de esta familia se encuentra la *catenoide horizontal* cuando $k = 2$, véase el Ejemplo 3.16. Esta

fue caracterizada por Hauswirth, Nelli, Sa Earp y Toubiana en [35] con un resultado tipo Schoen.

Teorema 2.7.[35] *Una superficie mínima, completa y conexa de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura total finita y dos finales, cada uno asintótico a un plano vertical, es una catenoide horizontal.*

El concepto de final asintótico a un plano considerado en [35] es más restrictivo que el definido en esta memoria, pero en [33] se probó que en este contexto ambas nociones son equivalentes.

Martín, Mazzeo y Rodríguez en [58] construyeron superficies mínimas propiamente embebidas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura total finita y con género positivo usando una técnica de pegado. Para cada $g > 0$, obtuvieron ejemplos con k finales, cada uno asintótico a un plano vertical, siendo $k > 0$ cualquier número suficientemente grande dependiendo de g . En la Sección 3.2 se construirán ejemplos con género 1 y $k \geq 3$ finales con $m_i = 0$, que llamaremos k -noides con género 1. Tanto los ejemplos de [58] como los de la Sección 3.2 son bigrafos.

2.1. Superficies con curvatura total -4π en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

En esta sección vamos a estudiar las superficies mínimas con curvatura total -4π , que es el siguiente valor de la curvatura total para el cual no hay una clasificación de exhaustiva, ni siquiera en el caso embebido. Probaremos que deben tener género cero y uno o dos finales. En el caso de dos finales, se tiene que deben ser catenoides horizontales por el Teorema 2.7. Finalmente describiremos las posibles configuraciones de la poligonal asintótica en el infinito de los ejemplos embebidos simplemente conexos y probaremos un resultado de unicidad para las superficies Twisted Scherk con $b = 1$ construidas por Pyo y Rodríguez en [83].

Proposición 2.8. *Toda superficie mínima M completa inmersa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura total finita -4π tiene género 0.*

Demostración. De la fórmula 2.1, deducimos que:

$$2g + 2r + \sum_{i=1}^r m_i = 4$$

Esta condición implica que $g \leq 2$. Si $g = 2$ entonces el número de finales es 0, que es una contradicción ya que M no puede ser compacta. Si $g = 1$ se deduce entonces que $r = 1$ y $m_1 = 0$. Esto quiere decir que M es asintótica a un plano vertical. Podemos encontrar un plano vertical P suficientemente lejos de forma que este no interseque a M . Trasladando P a lo largo de la geodésica perpendicular a P y al plano asintótico hasta llegar al primer punto de contacto con M encontramos un plano vertical tangente a M que se queda a una lado de M , lo cual es una contradicción con el principio del máximo, ya que M no puede ser un plano vertical. \square

Solo son por tanto posibles los dos casos siguientes:

1. M tiene 2 finales y $m_1 = m_2 = 0$, en cuyo caso M es un anillo con dos finales asintóticos a planos verticales.
2. M tiene un final y $m_1 = 2$, es decir, M es un disco asintótico a una poligonal admisible en el infinito con 3 geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ y 3 geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$.

En el primer caso, por el Teorema 2.7 deducimos que M es una catenoi-de horizontal. Nos vamos a centrar entonces en el segundo caso cuando además la superficie es propiamente embebida.

Sea M un disco propiamente embebido en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura total -4π . Sabemos que M es asintótico a una poligonal admisible en el infinito \mathcal{P} formada por 3 geodésicas $\bar{l}_1, \bar{l}_3, \bar{l}_5$ en $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$, 3 geodésicas $\bar{l}_2, \bar{l}_4, \bar{l}_6$ en $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$ y las correspondientes rectas verticales en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uniéndolas. Llamamos $l_i = \Pi(\bar{l}_i)$ a sus proyecciones en \mathbb{H}^2 y asumimos que están ordenadas siguiendo una orientación fija en \mathcal{P} . Denotamos por $p_i, p_{i+1} \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ los extremos ideales de l_i , usando notación cíclica, es decir, $p_0 = p_6$ y $p_7 = p_1$. Llamaremos $v_i = \{p_i\} \times \mathbb{R}$ a las rectas verticales contenidas en \mathcal{P} . Salvo una isometría del ambiente podemos suponer que $p_1 = (1, 0) \equiv 1$ en el modelo del disco de Poincaré que veníamos usando. Sea $\theta_j \in [0, 2\pi)$ tales que $p_j = e^{i\theta_j}$. Obsérvese que estos θ_j no están necesariamente ordenados y podrían incluso coincidir. Consideramos la orientación en \mathcal{P} de forma que $\theta_2 \leq \theta_6$. En el siguiente resultado describimos las posibles configuraciones de la frontera asintótica de M .

Teorema 2.9. Sea $M \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie mínima propiamente embebida con un final y curvatura total -4π . Con la notación anterior, salvo un posible reordenamiento, su poligonal asintótica en el infinito se corresponde con alguno de los siguientes casos:

1. $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_6 < 2\pi$ (los puntos ideales están cíclicamente ordenados).
2. $0 = \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_6 < \theta_5 < \theta_4 < 2\pi$.
3. $0 = \theta_1 = \theta_4 < \theta_2 < \theta_3 = \theta_6 < \theta_5 < 2\pi$.
4. $0 = \theta_1 = \theta_4 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_6 < \theta_5 < 2\pi$.

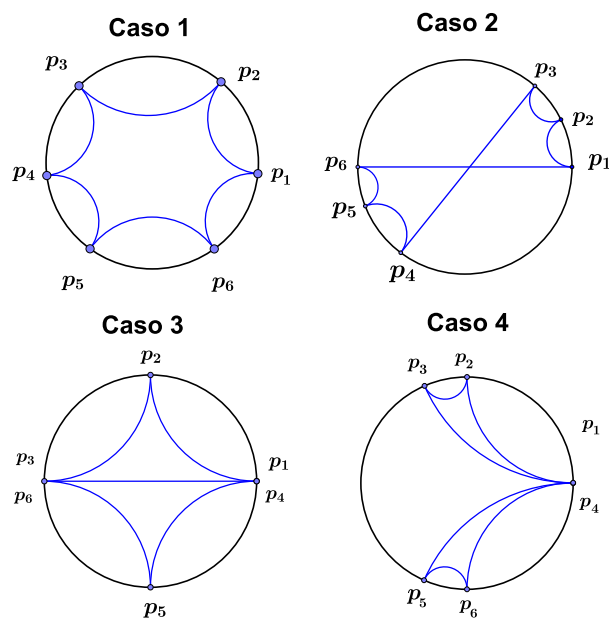


Figura 2.1: Proyecciones de las posibles poligonales admisibles en el infinito del Teorema 2.9.

Demostración. Primero obsérvese que, por el principio del máximo con respecto a planos verticales, no todas las geodésicas l_i pueden coincidir ya que M sería un plano vertical. A continuación vamos a probar dos afirmacio-

nes que nos restringirán las posibilidades para la poligonal admisible en el infinito \mathcal{P} .

Afirmación 2.10. Dos geodésicas horizontales de \mathcal{P} no pueden intersectarse en un punto salvo posiblemente en sus extremos.

Supongamos por reducción al absurdo que \bar{l}_1 y \bar{l}_3 se intersecan transversalmente (el resto de casos se razona de forma similar). Sabemos que, para todo $c > 0$ suficientemente grande, $M \cap \mathbb{H}^2 \times \{c\}$ consiste en tres curvas disjuntas $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ tales que cada α_i se proyecta horizontalmente sobre $l_i \times \{c\}$ y su proyección comparte extremos con l_i , para $i = 1, 3, 5$. Además las proyecciones $\Pi(\alpha_i)$ convergen a l_i cuando $c \rightarrow \infty$. Como l_1 y l_3 se intersecan, entonces para c suficientemente grande las curvas α_1 y α_3 también se deben intersectar lo cual contradice el hecho de que la superficie M sea embebida. Esto prueba la Afirmación 2.10.

Afirmación 2.11. En la proyección de \mathcal{P} no pueden coincidir dos vértices ideales con índice de la misma paridad.

Razonando por reducción al absurdo, podemos suponer que $p_1 = p_3$ (el resto de casos son similares), y por tanto $l_1 = l_2$. Supongamos además que $p_1 = (1, 0)$, $p_2 = (-1, 0)$ y que l_3 o coincide con l_1 o se queda por debajo de l_1 , es decir, en la región de \mathbb{H}^2 con $y < 0$. Por la Afirmación 2.10, el resto de geodésicas l_4, l_5 y l_6 también podemos suponer, salvo reordenamiento, que se quedan por debajo de l_1 . Supongamos primero que $l_1 \neq l_3$. Observamos que l_1 y l_3 son geodésicas con un extremo común. Sea $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ una geodésica perpendicular a l_1 que interseque a l_3 y l_6 . Llamamos q_1, q_3 y q_6 a los puntos de intersección $l_1 \cap \gamma, l_3 \cap \gamma$ y $l_6 \cap \gamma$ en \mathbb{H}^2 respectivamente. Sea H_1 un horodisco suficientemente pequeño en p_1 y sea M_1 la hoja horizontal de la superficie $M \cap (H_1 \times \mathbb{R})$ cuya frontera asintótica está contenida en $\bar{l}_1 \cup (v_1) \cup \bar{l}_6$. Para γ suficientemente cerca de p_1 , $(\gamma \times \mathbb{R}) \cap M_0$ contiene una curva completa con un extremo en $(q_1, +\infty)$ y otro $(q_6, -\infty)$ ya que M_1 es un grafo horizontal sobre $l_1 \times \mathbb{R}$ para H_1 un horodisco pequeño en p_1 . Análogamente, $M \cap (\gamma \times \mathbb{R})$ contiene otra curva que va de $(q_1, -\infty)$ a $(q_3, +\infty)$ por un argumento similar. Ambas curvas están contenidas en diferentes hojas horizontales de $M \cap (H_1 \times \mathbb{R})$ (grafos horizontales sobre $l_1 \times \mathbb{R}$). Obtenemos una contradicción ya que estas curvas necesariamente se tienen que intersectar (véase la Figura 2.2) y esto no puede ocurrir ya que M es embebida y están en hojas horizontales distintas.

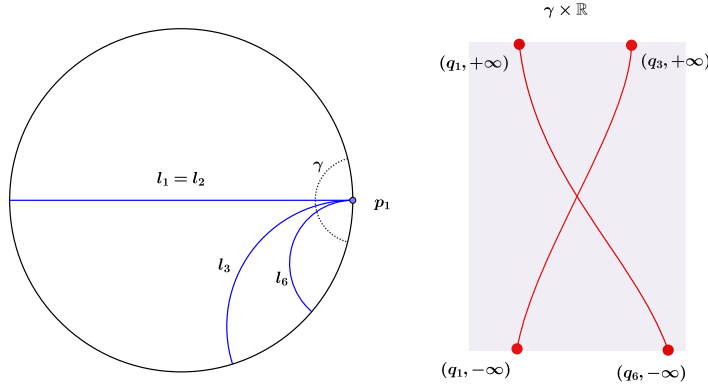


Figura 2.2: Esquema representativo del caso $l_1 = l_2$ en el plano $\gamma \times \mathbb{R}$.

Veamos ahora el caso $l_1 = l_2 = l_3$. Las únicas posibilidades, salvo reordenamiento de las geodésicas son que $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$ y $l_5 = l_6$ o $l_1 = l_2 = l_3$ y l_4, l_5 y l_6 distintas y a un lado de l_1 por la Afirmación 2.10. En el primer caso se llega a contradicción con un argumento similar a los casos anteriores ya que se pueden encontrar curvas de distintas hojas de $M \cap (H_1 \times \mathbb{R})$ que se cortan. Para el segundo caso, suponemos igual que antes que $p_1 = (1, 0)$ y $p_2 = (-1, 0)$ y que las geodésicas l_4, l_5 y l_6 quedan por debajo de l_1 . Sean M_1 y M_3 las hojas verticales de $M \cap \{t > c\}$, para c suficientemente grande, asintóticas a $\bar{l}_1 = \bar{l}_3$. Consideramos un horodisco H_1 en p_1 . En $H_1 \times \mathbb{R}$, M_1 y M_3 tienen su borde asintótico contenido en $\bar{l}_1 \cup v_1$ y en $\bar{l}_3 \cup v_1$ respectivamente. Vamos a ver que M_1 se queda a un lado de M_3 en $H_1 \times \mathbb{R}$, quedando más lejos del plano $l_1 \times \mathbb{R}$ en la región $(\mathbb{H}^2 \cap \{y < 0\}) \times \mathbb{R}$. En efecto, si consideramos las hojas verticales M_2 y M_6 de $M \cap \{t < -c\}$ asintóticas a \bar{l}_2 y \bar{l}_6 respectivamente, la hoja M_6 se queda a un lado de M_2 en $H_1 \times \mathbb{R}$ (más lejos del plano $l_1 \times \mathbb{R}$ en la región $(\mathbb{H}^2 \cap \{y < 0\}) \times \mathbb{R}$). Como las hojas M_1 y M_6 están conectadas en $H_1 \times \mathbb{R}$ por una hoja horizontal y lo mismo ocurre para M_2 y M_3 , usando que la superficie M es embebida, deducimos que la hoja M_1 también se quede a este mismo lado de M_3 . Consideramos ahora un horodisco pequeño H_2 en p_2 . Por un razonamiento análogo al anterior, deducimos que la hoja M_1 se queda ahora al otro lado de M_3 en $H_2 \times \mathbb{R}$ (más cerca del plano $l_1 \times \mathbb{R}$ en la región $(\mathbb{H}^2 \cap \{y < 0\}) \times \mathbb{R}$), llegando a una contradicción. Con esto se termina de probar la Afirmación 2.11.

De la Afirmación 2.11 deducimos que no hay dos geodésicas l_i con in-

dice de la misma paridad ni consecutivas en la proyección de \mathcal{P} que coincidan. En particular podemos suponer que $0 = \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$ y que l_3 no puede coincidir con l_2 . Además, l_3 no puede intersectar a l_1 por la afirmación 2.10. Tenemos por tanto las siguientes tres posibilidades para el punto p_4 :

- $\theta_3 < \theta_4 < 2\pi$. Si además, $\theta_4 < \theta_5$ llegamos necesariamente al caso 1 del enunciado, ya que en otro caso siempre habría geodésicas con la misma paridad cortándose en contradicción con la Afirmación 2.10. En otro caso, si $\theta_5 < \theta_4$ entonces la única forma de cerrar la poligonal es que $\theta_1 < \theta_6 < \theta_5 < \theta_2$ o $\theta_3 < \theta_6 < \theta_5 < \theta_4$ llegando así al caso 2 del enunciado (salvo posiblemente reordenamiento de los vértices ideales).
- $\theta_4 = \theta_1 = 0$. Si $\theta_5 > \theta_3$, tenemos entonces que o bien $\theta_6 = \theta_3$, llegando al caso 3 del enunciado, o bien $\theta_3 < \theta_6 < \theta_5$ (caso 4 del enunciado) ya que el caso $\theta_3 < \theta_5 < \theta_6$ no es posible por un argumento similar al de la Afirmación 2.11. En efecto, si $\theta_3 < \theta_5 < \theta_6$, para un horodisco suficientemente pequeño H_1 en p_1 , se podrían encontrar en $M \cap (H_1 \times \mathbb{R})$ curvas de distintas hojas horizontales que se cortarían. Para el caso, $\theta_5 < \theta_3$, llegamos a que $\theta_1 < \theta_6 < \theta_5 < \theta_2$ razonando de forma análoga, lo que se corresponde con el caso 4 del enunciado salvo reordenamiento de los vértices.
- $\theta_2 < \theta_4 < \theta_3$. Usando razonamientos similares a los de los párrafos anteriores, se tiene que $\theta_2 \leq \theta_5 < \theta_4$ y la única posibilidad entonces es $\theta_1 < \theta_2 \leq \theta_5 < \theta_4 < \theta_3 \leq \theta_6$, análogos, salvo reordenar los puntos ideales, a los casos 2, 3 o 4 del enunciado, dependiendo de si las desigualdades son estrictas o son igualdades.

□

Para el caso 1 del Teorema 2.9, por el Teorema 2.6 la superficie debe ser un grafo de Scherk sobre un hexágono ideal. Las superficies Twisted Scherk embebidas construidas en [83] con $m_1 = 2$ (ver la Sección 2.2.1 para una construcción similar en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$) son ejemplos de los casos 2 y 3 del Teorema 2.9 cuando los puntos ideales están dispuestos simétricamente de forma que, salvo una isometría de \mathbb{H}^2 , cumplen que $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \alpha$, $\theta_3 = \pi + \alpha$, $\theta_4 = \pi$, $\theta_5 = \pi - \alpha$ y $\theta_6 = 2\pi - \alpha$ con $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

2.2. Superficies con curvatura total finita en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.

En el caso de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ el estudio de superficies mínimas con curvatura total finita es más complicado y no hay un resultado como el Teorema 2.1, en parte porque la curvatura de una superficie mínima en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ no tiene signo sino que cumple $K \leq \tau^2$. Sin embargo, en [33] usando un resultado de Nguyen [75], probaron el siguiente resultado:

Teorema 2.12. [Theorem 8 [33]] *Sea Σ un anillo mínimo propiamente inmerso en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con una única componente compacta en la frontera $\partial\Sigma$, y asintótica a una poligonal admisible en el infinito \mathcal{P} . Entonces Σ tiene curvatura total finita.*

Este teorema implica, por ejemplo, que los grafos completos soluciones del problema de Jenkins-Serrin construidos por Melo en [69] tienen curvatura total finita.

2.2.1. Los ejemplos Twisted Scherk. En esta sección seguiremos las ideas desarrolladas en [83] y haremos una construcción similar para superficies propiamente embebidas con curvatura total finita en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Estas superficies pueden verse como la solución para un problema de Plateau asintótico para una poligonal específica Γ en $\partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ compuesto por geodésicas verticales en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y geodésicas horizontales en $\mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$.

Vamos a considerar el modelo del cilindro para $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Sea 0 el origen en el disco para \mathbb{H}^2 , y denotemos por \overline{pq} al segmento geodésico uniendo los puntos (posiblemente ideales) $p, q \in \mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$. Sean $\theta_1, \dots, \theta_{2n+1}$, $n \geq 1$ puntos ideales en $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ cíclicamente ordenados y sea $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ el polígono con lados $\overline{0\theta_1}$, $\overline{\theta_1\theta_2}$, \dots , $\overline{\theta_{2n}\theta_{2n+1}}$ y $\overline{\theta_{2n+1}0}$.

Consideramos el problema de Jenkins-Serrin para la ecuación de los grafos mínimos (véase la Sección 1.3) con valores frontera $+\infty$ sobre $A_1 = \overline{0\theta_1}$ y sobre $A_{i+1} = \overline{\theta_{2i}\theta_{2i+1}}$ para $i = 1, \dots, n$, y $-\infty$ sobre $B_i = \overline{\theta_{2i-1}\theta_{2i}}$ para $i = 1, \dots, n$ y $B_{n+1} = \overline{\theta_{2n+1}0}$. Supongamos que los puntos ideales están dispuestos de manera que el problema de Jenkins-Serrin tiene solución, y sea Σ el grafo solución del problema.

Entonces, después de considerar la rotación de ángulo π sobre la recta vertical $\{0\} \times \mathbb{R} \subset \partial\Sigma$, podemos extender Σ a una superficie mínima completa, véase [90]. Esta superficie tiene como frontera asintótica una poligonal

admisibles en el infinito, compuesta por $2n + 1$ geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$, $2n + 1$ geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$ y $4n + 2$ rectas verticales uniendo los puntos ideales de las geodésicas en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, véase la Figura 2.3. Por el Teorema 2.12, estas superficies tienen curvatura total finita. Además, si el ángulo que forman $\overline{0\theta_1}$ y $\overline{\theta_{2n+1}0}$ en el origen es menor o igual que π , entonces estas superficies son embebidas, ya que son la unión de dos grafos mínimos verticales que solo se intersectan en su frontera común $\{0\} \times \mathbb{R}$.

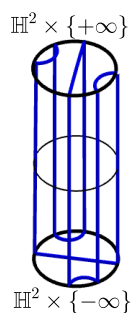


Figura 2.3: La poligonal admisible en infinito para $n = 1$.

Capítulo 3

Construcciones Conjugadas en los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

3.1. La correspondencia de Daniel y sus propiedades.

La correspondencia de Lawson es un resultado clásico que establece una correspondencia localmente isométrica entre superficies de curvatura media constante en espacios de curvatura seccional constante (véase [46, Section 14]). En este capítulo nos centraremos en la generalización de Daniel de la correspondencia de Lawson al contexto de los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ tratando de explicar sus propiedades y luego usar esta correspondencia para construir H -superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. En el caso de $\kappa = 4\tau^2$ se recupera un caso particular de la correspondencia de Lawson entre superficies mínimas en \mathbb{S}^3 y superficies de curvatura media constante 1 en \mathbb{R}^3 , así como la familia de Bonnet de superficies mínimas asociadas en \mathbb{R}^3 . Por este motivo, nuestras construcciones generalizan en algunos casos a construcciones de superficies mínimas y CMC en \mathbb{R}^3 .

Sean $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ y $\mathbb{E}^* = \mathbb{E}(\kappa^*, \tau^*)$, tales que $\kappa - 4\tau^2 = \kappa^* - 4(\tau^*)^2$ y $\theta, H, H^* \in \mathbb{R}$ verificando $iH + \tau = e^{i\theta}(iH^* + \tau^*)$.

Teorema 3.1.[17, Theorem 5.2] *Dada una superficie riemanniana orientada y simplemente conexa Σ y dada una inmersión isométrica $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}$ con curvatura media constante H , existe una inmersión isométrica $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}^*$ de curvatura media constante H^* tal que los datos fundamentales de las inmersiones se relacionan como:*

$$(a) \nu^* = \nu,$$

$$(b) T^* = \text{Rot}_\theta(T),$$

$$(c) A^*v = \text{Rot}_\theta(Av - Hv) + H^*v \text{ para todo } v \in T\Sigma,$$

donde $\nu = \langle N, \xi \rangle$, $T = \xi - \nu N$ y A son la función ángulo, la parte tangente del campo de Killing vertical y el operador de Weingarten de ϕ , respectivamente. Los símbolos ν^* , T^* y A^* representan los correspondientes elementos de ϕ^* .

Nota 3.2. El operador Rot_θ es la rotación de ángulo θ en $T\Sigma$, esto es,

$$\text{Rot}_\theta(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)Jv, \quad \text{donde } Jv = N \wedge v.$$

Recordamos que la orientación de Σ dada por la rotación $J = \text{Rot}_{\pi/2}$ debe ser compatible con las orientaciones de \mathbb{E} y \mathbb{E}^* , en el sentido de que las bases $\{d\phi_p(v), d\phi_p(Jv), N_{\phi(p)}\}$ y $\{d\phi_p^*(v), d\phi_p^*(Jv), N_{\phi^*(p)}^*\}$ son orientadas positivas en los espacios tangentes a las inmersiones para todo $v \in T_p\Sigma$ no nulo.

Este resultado define una familia 1-paramétrica con parámetro θ de inmersiones de curvatura media constante, cuyos miembros se conocen como *inmersiones hermanas* y son únicos salvo isometrías del ambiente que preservan la orientación de la base y la orientación de las fibras. Esto es consecuencia de la unicidad en el Teorema 1.5. Observemos que H , κ y τ varían respecto de $\theta \in \mathbb{R}$, salvo en el caso $\tau = H = 0$, en el que se recupera la familia de superficies asociadas en $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ (véase [39]).

Si $\theta = \pi$ se tiene que $\mathbb{E}^* = \mathbb{E}(\kappa, -\tau)$ y $H^* = -H$. Los datos fundamentales de la inmersión ϕ^* son $(T^*, \nu^*, A^*) = (-T, \nu, -A)$, que coinciden con los datos fundamentales de la inmersión $R \circ \phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, -\tau)$ donde $R : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, -\tau)$ es la isometría $(x, y, t) \mapsto (x, y, -t)$ entre los modelos de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ y $\mathbb{E}(\kappa, -\tau)$ dados en (1.2). Por la unicidad del Teorema 1.5, las inmersiones ϕ^* y $R \circ \phi$ coinciden salvo una isometría del ambiente que conserve la orientación de la base y de las fibras. Cuando $\theta = 2\pi$, se tiene que $\mathbb{E} = \mathbb{E}^*$ y $\phi = \phi^*$.

Estamos interesados en aplicar esta correspondencia entre superficies mínimas en algún espacio $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ y una superficie de curvatura media constante H en $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R} = \mathbb{E}(\epsilon, 0)$ $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$, de donde $\theta = \frac{\pi}{2}$. El caso $\epsilon = 0$

se reduce a la correspondencia de Lawson como se ha mencionado anteriormente. A las superficies hermanas con $\theta = \frac{\pi}{2}$ se les llama *superficies conjugadas* y satisfacen propiedades geométricas adicionales. En este caso, los parámetros κ y τ están unívocamente determinados por $\kappa = 4H^2 + \epsilon$ y $\tau = H$ y tenemos que las relaciones dadas por el Teorema 3.1 se escriben como.

$$\nu^* = \nu, \quad T^* = JT, \quad A^* = JA + H \cdot \text{id}, \quad (3.1)$$

entre inmersiones conjugadas.

Nota 3.3. A menudo se identificará a Σ con $\phi(\Sigma)$ y el campo T con $d\phi(T)$. Esto no supone una pérdida de generalidad ya que podemos suponer que localmente la superficie es embebida.

De la igualdad $T^* = JT$ fácilmente se deduce que

$$\langle d\phi_p(v), \xi \rangle = \langle d\phi_p^*(Jv), \xi \rangle, \quad \forall v \in T_p\Sigma. \quad (3.2)$$

En la figura 3.1, podemos encontrar un esquema de las diferentes superficies que se pueden obtener tomando una inmersión mínima en el ambiente $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ inicial. Aquí vemos cómo aparece el valor crítico para la curvatura media $H = \frac{1}{2}$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, poniendo de manifiesto que las superficies tienen una geometría distinta dependiendo de la curvatura media. Por ejemplo para $0 \leq H \leq \frac{1}{2}$ no hay H -superficies completas compactas, y para $H > 1/2$ tenemos H -esferas compactas. El caso $H = \frac{1}{2}$ es un caso límite donde aparecen horoesferas con curvatura media $H = \frac{1}{2}$.

	$\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ inicial	Superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	Superficies en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
$\kappa > 0$	$\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$	$H > 1/2$	$H \geq 0$
$\kappa = 0$	$\mathbb{E}(0, 1/2)$	$H = 1/2$	—
$\kappa < 0$	$\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$	$0 \leq H < 1/2$	—

Figura 3.1: Tabla de configuraciones para obtener una H -superficie conjugada en $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ a partir de una superficie mínima en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Dada una inmersión $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$, la aplicación $\pi \circ \phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ entre superficies tiene valor absoluto del jacobiano $|\text{Jac}(\pi \circ \phi)| = |\nu|$ véase

la Ecuación (1.12), luego $\int_{\Sigma} |\nu|$ representa el área de la proyección de la inmersión contada con multiplicidad. Si $\int_{\Sigma} |\nu| < \infty$ (esto es $\nu \in L^1(\Sigma)$), entonces también puede definirse $\int_{\Sigma} \nu$, que representa el área algebraica (con signo según la función ángulo) de la inmersión. Como la conjugación es isométrica y conserva ν , deducimos que el área con multiplicidad y el área algebraica de superficies conjugadas coinciden. Si ν tiene signo, entonces ambas inmersiones son multigrafos (ver Sección 1.1.2) y los dos conceptos de área coinciden.

A continuación daremos un resultado de continuidad para la conjugación. Diremos que una sucesión de inmersiones $\phi_n : (\Sigma, ds_n^2) \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ converge a Σ en la topología \mathcal{C}^m sobre compactos para todo $m \in \mathbb{N}$ si cada punto $p \in \Sigma$ tiene un entorno compacto donde los elementos de la sucesión $\{\phi_n(\Sigma)\}$ se expresan localmente como grafos sobre el plano tangente $T_p\Sigma$ y las funciones que definen estos grafos y todas sus derivadas convergen uniformemente. Para garantizar que una parcial de la sucesión es convergente es suficiente con que el ambiente tenga geometría acotada (curvatura seccional uniformemente acotada, condición que se satisface trivialmente en un espacio homogéneo), que la segunda forma fundamental A_n de las inmersiones $\{\phi_n\}$ esté uniformemente acotada y que haya un punto de acumulación p_{∞} en las inmersiones $\{\phi_n\}$. La condición sobre la segunda forma fundamental se satisface, por ejemplo, si todas las superficies son multigrafos pues en particular son estables y podemos aplicar las estimaciones de Rosenberg, Souam y Toubiana [86].

Proposición 3.4. *[Continuidad de la conjugación] Sea Σ una superficie diferenciable y supongamos que $\phi_n : (\Sigma, ds_n^2) \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ es una sucesión de inmersiones isométricas mínimas que convergen en la topología \mathcal{C}^m sobre compactos (para todo $m \geq 0$) a una inmersión isométrica mínima $\phi_{\infty} : (\Sigma, ds_{\infty}^2) \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$. Entonces la H -inmersiones conjugadas ϕ_n^* (salvo una isometría adecuada de $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$) converge en la misma topología a la H -inmersión conjugada ϕ_{∞}^* .*

Demostración. Los datos fundamentales (ν_n, T_n, A_n) y la métrica inducida ds_n^2 están definidos en términos de las derivadas de ϕ_n , y por lo tanto convergen uniformemente sobre compactos de Σ a los datos fundamentales $(\nu_{\infty}, T_{\infty}, A_{\infty})$ y a la métrica de ϕ_{∞} . Para ver que las superficies conjugadas convergen necesitamos adaptar estas mediante isometrías del ambiente.

Si ν_∞ es constante ± 1 , entonces ϕ_∞ es un plano horizontal (en particular $H = 0$) y las funciones ν_n convergen uniformemente a ± 1 en subconjuntos compactos, lo cual implica que ϕ_∞^* es también un plano horizontal, y la proposición se sigue de forma sencilla. Por tanto, vamos a asumir que que hay cierto $x \in \Sigma$ tal que $\nu_\infty(x) \neq \pm 1$ y consideramos una base orientada fija $\{e_1, e_2\}$ del plano tangente $T_x \Sigma$ tal que e_1 (resp. e_2) es colineal a T_∞^* (resp. JT_∞^*) en x . Obsérvese que T_∞^* y JT_∞^* no se anulan en x ya que $\nu_\infty(x) \neq \pm 1$. Definimos $q_n = \phi_n^*(x)$, $u_n = (d\phi_n^*)_x(e_1)$ y $v_n = (d\phi_n^*)_x(e_2)$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Como $(T_n)_x \rightarrow (T_\infty)_x$ cuando $n \rightarrow \infty$, podemos encontrar isometrías R_n preservando la orientación y la orientación de las fibras tales que $R_n(q_n) = q_\infty$, $(dR_n)_{q_n}(u_n) \rightarrow u_\infty$ y $(dR_n)_{q_n}(v_n) \rightarrow v_\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, esto es, cada R_n es la composición de una traslación (llevando q_n a q_∞) y una rotación adecuada sobre el eje vertical que contiene a q_∞ . Como $\{e_1, e_2\}$ está positivamente orientada y cada R_n preserva la orientación, también los normales satisfacen $(dR_n)_x(N_n^*) \rightarrow N_\infty^*$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como la correspondencia de Daniel está definida salvo isometrías, podemos sustituir ϕ_n^* por $R_n \circ \phi_n^*$ y asumir por tanto que

$$\phi_n^*(x) = \phi_\infty^*(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (d\phi_n^*)_x = (d\phi_\infty^*)_x \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (N_n^*)_x = (N_\infty^*)_x. \quad (3.3)$$

Los datos fundamentales $(\nu_n, JT_n, JA_n + H \text{ id})$ de ϕ_n^* dados por (3.1) también convergen sobre subconjuntos compactos de Σ a $(\nu_\infty, JT_\infty, JA_\infty + H \text{ id})$, los datos fundamentales de ϕ_∞^* . Además, dado un conjunto abierto relativamente compacto $U \subset \Sigma$, la convergencia uniforme de A_n^* en U implica que las inmersiones ϕ_n^* tienen segunda forma fundamental acotada en U . Si U contiene a x , entonces todas las inmersiones ϕ_n^* tienen a p_∞ como punto de acumulación, y los argumentos estándar de convergencia ya mencionados dan la existencia de una subsucesión de ϕ_n^* convergiendo en la topología C^m para todo $m \geq 0$ a una H -inmersión $\phi^* : U \rightarrow \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ (obsérvese que $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ tiene geometría acotada). Como ϕ^* tiene los mismos datos fundamentales que ϕ_∞^* , ambas inmersiones difieren en una isometría del ambiente por la unicidad de la correspondencia de Daniel. En vista de las relaciones dadas por (3.3), se tiene que $\phi^*(x) = \phi_\infty^*(x)$ y $(d\phi^*)_x = (d\phi_\infty^*)_x$, además ϕ^* y ϕ_∞^* tienen el mismo normal en x , por tanto esta isometría debe ser la identidad, de donde $\phi^* = \phi_\infty^*$ en U . Mediante extensión analítica se tiene una subsucesión de ϕ_n^* convergiendo a ϕ_∞^* en todo Σ .

Este argumento implica que cada subsucesión de la sucesión original ϕ_n^* tiene otra subsucesión que converge a ϕ^* en Σ . Esto concluye la conver-

gencia de la sucesión original ϕ_∞^* . \square

3.1.1. Correspondencia entre curvas. En esta sección nos centraremos en cómo se comportan las geodésicas horizontales y verticales (y sus curvas conjugadas) contenidas en las superficies conjugadas. Dada una superficie orientable Σ y una inmersión isométrica $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ con aplicación de Gauss N y endomorfismo de Weingarten A y dada una curva regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ de forma que $\gamma = \phi \circ \alpha$ esté parametrizada por el arco, consideraremos las cantidades

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma', J\gamma' \rangle, \\ \kappa_n &= \langle \gamma', A\gamma' \rangle = -\langle \gamma', \bar{\nabla}_{\gamma'} N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma', N \rangle, \\ \tau_n &= \langle J\gamma', A\gamma' \rangle = -\langle J\gamma', \bar{\nabla}_{\gamma'} N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\gamma'} J\gamma', N \rangle.\end{aligned}\tag{3.4}$$

A κ_g se le conoce como curvatura geodésica de γ en $\phi(\Sigma)$ respecto del conormal unitario $J\gamma'$ y κ_n y τ_n son la *curvatura normal* y la *torsión normal* de γ , respectivamente. Al suponer que Σ es orientable, tenemos una rotación J , definida en la Nota 3.2, de forma que $\{\gamma', J\gamma', N\}$ es una base ortonormal del fibrado tangente de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ a lo largo de γ . Así, podemos expresar los campos $\gamma'' = \bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma'$, $(J\gamma')' = \bar{\nabla}_{\gamma'} J\gamma'$ y $N' = \bar{\nabla}_{\gamma'} N$ en esta base en términos de κ_g , κ_n y τ_n . Usando (3.4), se obtienen las ecuaciones de Darboux:

$$\begin{cases} \gamma'' = & \kappa_g J\gamma' + \kappa_n N, \\ (J\gamma')' = & -\kappa_g \gamma' + \tau_n N, \\ N' = & -\kappa_n \gamma' - \tau_n J\gamma'. \end{cases}\tag{3.5}$$

Supongamos ahora que Σ es simplemente conexa y que $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ es una inmersión isométrica de curvatura media constante H y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$ una curva en Σ . Si $\gamma = \phi \circ \alpha$ es una curva con datos asociados κ_g , κ_n y τ_n , y tomamos la inmersión hermana $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa^*, \tau^*)$ de curvatura media H^* , la curva $\gamma^* = \phi^* \circ \alpha$ tendrá unos nuevos datos, κ_g^* , κ_n^* y τ_n^* , respecto de ϕ^* . Estas curvaturas se relacionan de la siguiente forma:

Lema 3.5. [51, Lema 3.1] *En las condiciones anteriores, se satisfacen las siguientes identidades:*

- a) $\kappa_g^* = \kappa_g$ (la curvatura geodésica es intrínseca a Σ).
- b) $\kappa_n^* = \kappa_n \cos \theta - \tau_n \sin \theta + H^* - H \cos \theta$.

$$c) \tau_n^* = \tau_n \cos \theta + \kappa_n \sin \theta - H \sin \theta.$$

En el caso de una superficie mínima en $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ y su H -superficie conjugada en $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ (recordamos que $\theta = \frac{\pi}{2}$), las ecuaciones anteriores se leen como

$$\kappa_g^* = \kappa_g, \quad \kappa_n^* = H - \tau_n, \quad \tau_n^* = \kappa_n.$$

Obsérvese que cuando la curva γ es una geodésica de $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$, un caso que aparecerá a menudo, entonces $\kappa_g = 0$ y $\kappa_n = 0$, lo que se traduce en que $\kappa_g^* = 0$ y $\tau_n^* = 0$. Cuando γ es una geodésica vertical u horizontal esto implica que γ^* cae dentro de una superficie totalmente geodésica de $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ como indicamos a continuación. Este resultado puede encontrarse, para el caso $H = 0$, en el trabajo de Daniel [18, Section 4] y el apartado (a) fue probado previamente por Torralbo [92, Lemma 3].

Lema 3.6.[54, 77] *Dados $\epsilon \in \{-1, 1\}$ y $H \geq 0$, sea $\phi : \Sigma \looparrowright \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ una inmersión isométrica mínima de una superficie riemanniana simplemente conexa Σ y consideremos su H -inmersión conjugada $\phi^* : \Sigma \looparrowright \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$. Dada una curva regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$, sean $\gamma = \phi \circ \alpha$ y $\gamma^* = \phi^* \circ \alpha$.*

- a) *Si γ es una geodésica horizontal de $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$, entonces γ^* está contenida en un plano vertical de $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$.*
- b) *Si γ es una geodésica vertical de $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$, entonces γ^* está contenida en un plano horizontal de $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$.*

En ambos casos, $\phi^(\Sigma)$ corta ortogonalmente a dichos planos a lo largo de γ^* .*

3.1.2. Correspondencia entre simetrías. Supongamos que $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ es una inmersión isométrica mínima de una superficie simplemente conexa Σ con borde de clase C^1 a trozos y que existe un arco regular $\alpha \subset \partial\Sigma$ tal que $\gamma = \phi(\alpha)$ es una geodésica vertical u horizontal de $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$. Como existe una reflexión isométrica R respecto de γ en $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$, podemos extender $\phi(\Sigma)$ de forma analítica más allá de γ mediante R (véase [21, Section 7.3], o [89, Theorem 1]). Más concretamente, tomando el disco unidad $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, podemos suponer que $\Sigma = \{z \in D : \text{Im}(z) > 0\}$ con cierta métrica riemanniana y $\alpha = \{z \in D : \text{Im}(z) = 0\}$, luego podemos extender la métrica de Σ a todo D de forma que $z \mapsto \bar{z}$ sea una isometría y

extender analíticamente $\phi : D \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ tal que $\phi(\bar{z}) = R(\phi(z))$ para todo $z \in D$.

Para justificar que la pieza conjugada se puede extender mediante simetría especular, podemos usar la correspondencia: El lema 3.6 nos dice que la inmersión conjugada $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ es tal que $\gamma^* = \phi^*(\alpha)$ está contenida en un plano horizontal o vertical, y la simetría S respecto de dicho plano nos permite considerar la superficie reflejada $S(\phi^*(\Sigma))$. Es fácil comprobar que las inmersiones $S \circ \phi^*$ y $(R \circ \phi)^*$ tienen los mismos datos fundamentales, y por tanto son inmersiones conjugadas. Como ϕ pega con $R \circ \phi$ de forma analítica por los resultados mencionados anteriormente y ϕ^* y $S \circ \phi^*$ son inmersiones conjugadas de ϕ y de $R \circ \phi$ respectivamente, se deduce que ϕ^* también pega de forma analítica con $S \circ \phi^*$. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Proposición 3.7. *Sea $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ una inmersión isométrica y mínima de una superficie riemanniana simplemente conexa Σ y consideremos $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ su H -inmersión conjugada.*

- (a) *Si $\phi(\Sigma)$ es invariante por una reflexión respecto de una geodésica horizontal (resp. vertical) contenida en $\phi(\Sigma)$, entonces $\phi^*(\Sigma)$ es invariante por una reflexión respecto de un plano vertical (resp. horizontal) P .*
- (b) *La geodésica que juega el papel de eje de reflexión se corresponde con la curva de la superficie conjugada contenida en P respecto de la que se refleja.*

En lo sucesivo aparecerán frecuentemente vértices en la frontera de la superficie $\phi(\Sigma)$ donde se intersecan dos geodésicas contenidas en dicha frontera. Entonces, será posible reflejar respecto de ambas y, en cada reflexión, aparecerá una nueva geodésica que pasará por un tal vértice p . Si el ángulo que forman la geodésicas es $\frac{\pi}{k}$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, se formará una superficie después de reflejar $2k$ veces, que será regular en todo punto según los resultados citados anteriormente salvo, eventualmente, en p . No obstante, que $\phi(\Sigma)$ es una superficie diferenciable en p es consecuencia de un teorema general de eliminación de singularidades aisladas siempre que la superficie reflejada sea localmente embebida en un entorno punteado de p (véase [10, Proposition 1]), hipótesis que en esta situación se satisface claramente.

Proposición 3.8. *Supongamos que $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ es una H -superficie invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías. Entonces, cualquier inmersión hermana de ϕ también es invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías.*

Demostración. Sea $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ el grupo uniparamétrico de isometrías tal que $\phi(\Sigma) = f_t(\phi(\Sigma))$, como $\{f_t\}$ es un grupo continuo, entonces f_t conserva la orientación de las fibras y de la base. Esto induce un grupo uniparamétrico de isometrías $\{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ en Σ tal $f_t \circ \phi = \phi \circ g_t$. Los datos fundamentales de $\phi^* \circ g_t$ son todos los mismos luego por la unicidad de la correspondencia para cada $t \in \mathbb{R}$ existe una isometría f_t^* de \mathbb{E}^* que preserve la orientación y las fibras y que cumple que $f_t^* \circ \phi^* = \phi^* \circ g_t$. De donde se tiene que

$$f_{t+s}^* \circ \phi^* = \phi^* \circ g_{t+s} = \phi^* \circ g_t \circ g_s = f_t^* \circ \phi^* \circ g_s = f_t^* \circ f_s^* \circ \phi^*.$$

De aquí deducimos que $f_{t+s}^* = f_t^* \circ f_s^*$ salvo que ϕ^* sea un trozo de cilindro vertical o un plano horizontal, en cuyo caso el resultado sigue siendo cierto ya que ϕ es también un cilindro vertical o un plano horizontal. Esto prueba que ϕ^* es invariante por el grupo uniparamétrico $\{f_t^*\}_{t \in \mathbb{R}}$. \square

3.1.3. Polígonos geodésicos. Vamos a considerar una poligonal de Jordan cerrada $\Gamma \subset \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ formada por una cantidad finita de segmentos geodésicos horizontales y verticales, en cuyos vértices tenemos ángulos divisores enteros de π .

Permitiremos que dichos segmentos tengan longitud infinita y que sean ideales cuando $4H^2 + \epsilon < 0$. Si no hay dos geodésicas horizontales ideales adyacentes en Γ , diremos que Γ es una *poligonal geodésica admisible*. Diremos que la inmersión isométrica y mínima $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ tiene frontera (finita) Γ si podemos encontrar una extensión continua $\bar{\phi} : \bar{\Sigma} \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ tal que $\bar{\phi}|_{\partial\Sigma}$ es un homeomorfismo de $\partial\Sigma$ en Γ .

Lema 3.9. *Supongamos que una inmersión mínima $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ de una superficie simplemente conexa Σ tiene frontera una poligonal geodésica admisible. Entonces, tanto ϕ como su H -inmersión conjugada $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ pueden extenderse a inmersiones completas mediante reflexión respecto de sus fronteras.*

Demostración. Según las consideraciones de la sección anterior, ϕ puede extenderse analíticamente a una inmersión completa $\tilde{\phi}$ por tratarse de una poligonal admisible. Esto nos asegura que la conjugada $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ es isométrica a ϕ y la isometría se extiende a través de la frontera (no ideal) mediante reflexiones. En particular, el Lema 3.6 nos asegura que cada segmento geodésico horizontal (resp. vertical) en $\partial\Sigma \subset \Gamma$ se transforma en una curva contenida en un plano vertical (resp. horizontal) y se conservan los ángulos de corte. Además, en el punto de corte de dos segmentos horizontales de $\partial\Sigma$ se tiene necesariamente que $|\nu| = 1$, luego Σ^* es horizontal en el vértice correspondiente en $\partial\Sigma^*$ y las curvas correspondientes están en planos verticales que forman un ángulo diedral divisor entero de π . Por tanto, usando el resultado de eliminación de singularidades aisladas, ϕ^* también se puede extender por reflexión respecto de su frontera a una superficie completa. \square

A continuación vamos a analizar propiedades específicas de las curvas conjugadas de segmentos horizontales y segmentos verticales.

Segmentos horizontales. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \partial\Sigma$ tal que $h = \phi \circ \alpha$ es un segmento horizontal parametrizado por el arco en $\mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$. Vamos a obtener dos informaciones complementarias sobre la curva conjugada $h^* = \phi^* \circ \alpha$

Por un lado, escribamos $h^* = (\beta, z)$, siendo $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ y $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sus componentes. Como h^* está también parametrizada por el arco y $\mathbb{M}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ tiene la métrica producto, tenemos que $1 = \|\beta'\|^2 + |z'|^2$. Ahora bien, como h^* está contenida en un plano vertical, se sigue que $(h^*)' = \pm \frac{T^*}{\|T^*\|}$, y dado que $\|T^*\|^* = 1 - \nu^2$, obtenemos que

$$\begin{aligned} |z'| &= \langle h'_*, \xi^* \rangle = \|T^*\|^{-1} \langle T^*, \xi^* \rangle = \sqrt{1 - \nu^2}, \\ \|\beta'\| &= \sqrt{1 - |z'|^2} = |\nu|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

De aquí se puede extraer información acerca de la monotonía de β y z si se conocen restricciones adicionales sobre ν , como por ejemplo sus ceros.

Por otro lado, podemos escribir el vector normal a lo largo de h como

$$N_{h(s)} = \cos(\varphi(s))\xi_{h(s)} + \sin(\varphi(s))\eta(s), \tag{3.7}$$

siendo $\{h', \xi, \eta\}$ una base ortonormal y orientada positiva de campos a lo largo de h . Entonces, la curva $h^* = \phi^* \circ \alpha$ está contenida en un plano verti-

cal P , donde tiene a N^* por vector conormal. La curvatura geodésica κ_g^P de h^* como curva en P respecto de N^* cumple que

$$\varphi' = -\kappa_g^P. \quad (3.8)$$

Demostración. El campo ξ es paralelo a lo largo de h por ser de Killing y el campo h' también, por ser h geodésica, luego $\eta = h' \wedge \xi$ también es paralelo. Tomando derivadas covariantes en (3.7) y usando dicho paralelismo,

$$\bar{\nabla}_{h'} N = \varphi' (-\sin(\varphi)\xi + \cos(\varphi)\eta) = \varphi' h' \wedge N = -\varphi' Jh',$$

luego podemos calcular

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\langle \bar{\nabla}_{h'} N, Jh' \rangle = \langle A\alpha', J\alpha' \rangle = -\langle JA^*\alpha' + H\alpha', J\alpha' \rangle \\ &= -\langle A^*\alpha', \alpha' \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{h'_*} h'_*, N^* \rangle = -\kappa_g^P. \end{aligned} \quad \square$$

Segmentos verticales. Vamos ahora a describir el caso en el que $\Gamma = \phi(\alpha)$ es un segmento vertical, donde $\alpha : (a, b) \rightarrow \partial\Sigma$. Por conveniencia vamos a suponer que el segmento está recorrido de forma que $\Gamma' = \xi$ y siempre tomaremos esta orientación en el análisis de segmentos verticales. Vamos a considerar la base ortonormal de campos $\{E_1, E_2, E_3 = \xi\}$ dada por (1.3). Podemos expresar el normal a lo largo de Γ como:

$$N_{\gamma(t)} = \cos(\theta(t))E_1 + \sin(\theta(t))E_2, \quad (3.9)$$

para cierta función $\theta \in C^\infty(a, b)$ que llamaremos *el ángulo de rotación del normal N a lo largo de Γ* . Como $\phi^*(\Sigma)$ es ortogonal al plano horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$ en el cual $\Gamma^* = \phi^* \circ \alpha$ está contenida, deducimos que el vector N^* se convierte en un vector conormal unitario a Γ^* en $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$. Como $[E_1, \xi] = 0$, se tiene que $\bar{\nabla}_\xi E_1 = \bar{\nabla}_{E_1} \xi = HE_1 \times E_3 = -HE_2$, y $\bar{\nabla}_\xi E_2 = HE_1$ análogamente. Tomando derivadas en la Ecuación (3.9) llegamos a

$$\bar{\nabla}_{\gamma'} N = (H - \theta')(\sin(\theta)E_1 - \cos(\theta)E_2) = (H - \theta')N \times \gamma'.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} H - \theta' &= \langle \bar{\nabla}_{\gamma'} N, N \times \gamma' \rangle = -\langle A\alpha', J\alpha' \rangle = \langle JA^*\alpha', J\alpha' \rangle - H\langle J\alpha', J\alpha' \rangle \\ &= \langle A^*\alpha', \alpha' \rangle - H = -\langle \bar{\nabla}_{\gamma'_*} N^*, \gamma'_* \rangle - H = \kappa_g - H, \end{aligned}$$

donde κ_g es la curvatura geodésica de Γ^* con respecto al conormal N^* , esto nos da la siguiente formula, también probada por Plehnert [77]:

$$\theta' = 2H - \kappa_g. \quad (3.10)$$

La dirección de rotación de N (esto es el signo de θ') es geoméricamente relevante, y será esencial en las construcciones de (H, k) -noides y (H, k) -nodoides de la Sección 3.3. Así, el signo de θ' determina si la curva Γ^* se queda por el lado cóncavo o convexo de las curvas de curvatura geodésica $2H$ tangentes.

Vamos a obtener propiedades adicionales en el caso $\epsilon = -1$, cuando la superficie conjugada está en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, es decir, $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ y $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Consideramos por un momento el modelo del semi-espacio para \mathbb{H}^2 , $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ cuya métrica viene dada por $y^{-2}(dx^2 + dy^2) + dt^2$, siendo $\{E_1, E_2, \xi\}$ una base ortonormal de campos donde $E_1 = y\partial_x$ y $E_2 = y\partial_y$, véase 1.5 para $\tau = 0$. Obsérvese que E_1 es tangente a la foliación por horociclos de \mathbb{H}^2 de ecuación $y = y_0$ con $y_0 > 0$. Como Γ es vertical y Γ^* cae en un plano horizontal, entonces existe una función diferenciable $\psi \in \mathcal{C}^\infty(a, b)$ tal que:

$$\Gamma^{*'}(t) = \cos(\psi(t))E_1 + \sin(\psi(t))E_2, \quad (3.11)$$

que llamamos *ángulo de rotación de Γ^* con respecto a la foliación por horociclos*. Vamos a relacionar esta cantidad con θ , el ángulo de rotación de N , y obtener algunas propiedades adicionales de la curva conjugada Γ^* . Para ello vamos a suponer que el interior de $\phi(\Sigma)$ es un multigrafo, que se proyecta sobre un dominio Ω posiblemente no embebido. Esta condición no es realmente restrictiva ya que podemos aplicar este razonamiento localmente. En el siguiente resultado recogemos toda la información adicional sobre la curva conjugada de un segmento vertical (el apartado (d) fue probado previamente en [77]).

Teorema 3.10. Sean $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ y $\phi^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ multigrafos conjugados sobre los dominios $\Omega \subset \mathbb{M}^2(4H^2 - 1)$ y $\Omega^* \subset \mathbb{H}^2$, respectivamente, con $0 \leq H \leq \frac{1}{2}$. Supongamos que α es una curva en $\partial\Sigma$ tal que $\Gamma = \phi \circ \alpha$ cumple que $\Gamma' = \xi$ y que $\Gamma^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$ después de una traslación vertical.

- (a) Si $\theta' > 0$, entonces $J\Gamma'$ (resp. $J\Gamma^{*'} = \xi$) es un vector conormal unitario a Σ (resp. Σ^*) a lo largo de Γ (resp. Γ^*), N^* apunta al interior de Ω^* a lo largo de Γ^* , y Σ^* queda en $\mathbb{H}^2 \times (-\infty, 0]$ localmente alrededor de Γ^* (véase la Figura 3.2, arriba).
- (b) Si $\theta' < 0$, entonces $J\Gamma'$ (resp. $J\Gamma^{*'} = \xi$) es un vector conormal unitario a Σ (resp. Σ^*) a lo largo de Γ (resp. Γ^*), N^* apunta al exterior de Ω^* a lo largo de Γ^* , y Σ^* queda en $\mathbb{H}^2 \times [0, +\infty]$ localmente alrededor de Γ^* (véase, Figura 3.2, abajo).
- (c) Si $\theta' > 0$ y $\int_{\Gamma} \theta' \leq \pi$, entonces Γ^* es embebida.
- (d) Se cumple la igualdad $\psi' + \cos(\psi) = \theta' - 2H$.

Demostración. Vamos a probar el apartado (a) ya que (b) es análogo. Supongamos que $\theta' > 0$. Como $\{\Gamma', J\Gamma', N\}$ es una base orientada positivamente y $\nu > 0$, se sigue que N apunta hacia arriba en el interior de Σ . Por continuidad, el vector normal N es un vector horizontal que coincide con la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ del conormal exterior unitario a Σ a lo largo de Γ en sentido antihorario, que es el que marca $\theta' > 0$. Por tanto, $J\Gamma' = N \times \Gamma'$ está determinado y apunta hacia el exterior de $\phi(\Sigma)$ a lo largo de Γ (véase la Figura 3.2, arriba izquierda). Como la rotación J es intrínseca, deducimos que $J\Gamma^{*'}$ apunta hacia el exterior de $\phi^*(\Sigma)$ a lo largo de Γ^* , y $N^* = \Gamma^{*' } \times J\Gamma^{*'}$ queda determinado por la orientación.

Supongamos por reducción al absurdo que N^* apunta hacia el exterior de Ω^* en cierto punto p de Γ^* . Como $\kappa_g < 2H$ con respecto al conormal N^* y $\nu > 0$, podemos encontrar un H -cilindro que comparte el mismo normal que $\Gamma^{*'}$ en p y queda localmente fuera de $\Omega^* \times \mathbb{R} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, lo cual produce una contradicción con el principio del máximo en la frontera para H -superficies. Nótese que $J\Gamma^{*'}$ no puede ser igual a $-\xi$ (por tanto tiene que ser $J\Gamma^{*' } = \xi$) ya que este apunta hacia fuera de $\phi^*(\Sigma)$ a lo largo de Γ^* y la función ángulo es positiva. Como consecuencia, tenemos que un entorno de Γ^* en $\phi^*(\Sigma)$ está contenido en $\mathbb{H}^2 \times (-\infty, 0]$.

Para el apartado (c), supongamos por reducción al absurdo que $\theta' > 0$ y que $\int_{\Gamma} \theta' \leq \pi$ pero la curva Γ^* no es embebida. Empezando en un punto de no autointersección de Γ^* y extendiendo en ambas direcciones hasta alcanzar el primer punto de autointersección, obtenemos un subarco de Γ^*

que encierra un disco topológico $D \subset \mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$ con un vértice de ángulo interior $0 < \alpha \leq 2\pi$ (correspondiente al punto de autointersección). Como $\theta' > 0$, deducimos que $\kappa_g < 2H$ de la Ecuación (3.10) y que N^* apunta hacia Ω^* a lo largo de Γ^* por el apartado (a). Por tanto, N^* apunta hacia el exterior de D y la curvatura geodésica de ∂D viene dada por $-\kappa_g$. La fórmula de Gauss-Bonnet y la Ecuación (3.10) establecen:

$$-\text{Area}(D) = \pi + \alpha + \int_{\partial D} \kappa_g > \pi + 2H \text{Longitud}(\partial D) - \int_{\partial D} \theta' > \pi - \int_{\Gamma} \theta'.$$

Esto contradice el hecho de que el término de la derecha es no negativo por hipótesis.

Para el apartado (c), usando las expresiones de $E_1 = y\partial_x$ y $E_2 = y\partial_y$ y la fórmula de Koszul, se tiene que

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_1 = E_2, \quad \bar{\nabla}_{E_1} E_2 = -E_1 \quad \text{y} \quad \bar{\nabla}_{E_2} E_1 = \bar{\nabla}_{E_2} E_2 = 0.$$

Por un lado, esto permite derivar la Ecuación (3.11) para obtener que $\bar{\nabla}_{\Gamma^{*'}} \Gamma^{*'} = (\psi' + \cos(\psi))(-\sin(\psi)E_1 + \cos(\psi)E_2)$. Por otro lado, se tiene que que $N^* = \Gamma^{*'} \times J\Gamma^{*'} = \Gamma^{*'} \times \xi = \sin(\psi)E_1 - \cos(\psi)E_2$, por tanto la identidad del apartado (d) se obtiene juntando estos cálculos en la expresión $-\theta' + 2H = \kappa_g = \langle \bar{\nabla}_{\Gamma^{*'}} \Gamma^{*'}, N^* \rangle$. \square

Nota 3.11. La orientación es esencial en el Teorema 3.10 cuando $H > 0$. Para el caso $H = 0$, las condiciones $\theta' > 0$ y $\theta' < 0$ son equivalentes, ya que en este caso existe una isometría de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que invierte la orientación y lleva un caso en el otro. Por esta razón, el apartado (c) se cumple también para $\theta' < 0$ cuando $H = 0$. Esto no ocurre para $H > 0$ ya que estas isometrías no existen en $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$, lo cual produce grandes diferencias dependiendo del signo de θ' .

Nota 3.12. La cantidad $\int_{\Gamma} \theta'$ representa la variación total del ángulo de rotación a lo largo de la curva Γ , y esto coincide con el ángulo interior de Ω en $\Pi(\Gamma)$.

Nota 3.13. Si Γ es una geodésica vertical completa y Σ es un grafo, se sigue que θ' converge a cero cuando nos acercamos a los extremos de Γ . Esto nos dice que la curvatura geodésica de Γ^* es asintótica a $2H$ en ambos extremos, y por tanto es una curva divergente en el plano horizontal en el que está contenido.

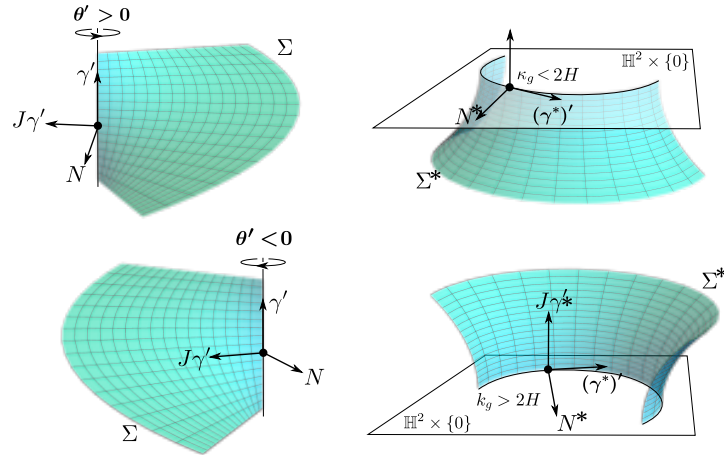


Figura 3.2: Orientación de las superficies conjugadas $\phi(\Sigma)$ y $\phi^*(\Sigma)$ atendiendo a la dirección de rotación de N a lo largo de la geodésica vertical Γ .

3.1.4. Conjugación de grafos verticales. En muchas de las construcciones en las que estamos interesados, la inmersión $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(4H^2 + \epsilon, H)$ será un grafo vertical y en particular un grafo que resuelve un problema de Jenkins-Serrin cuando $\epsilon = -1$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$ un polígono convexo cuyos lados son arcos geodésicos A_i , B_i , un número finito de arcos convexos con respecto a Ω , C_i con vértices en ciertos puntos de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ o en la frontera ideal $\partial_\infty \mathbb{H}^2(\kappa)$ (solo cuando $\kappa < 0$), de forma que no haya dos de los A_i y dos de los B_i con un extremo común. Prescribimos el valor $+\infty$ en los lados A_i y $-\infty$ en los lados B_i y datos continuos f_i en C_i . Consideramos este problema de Jenkins-Serrin sobre Ω y suponemos que se cumplen las condiciones para garantizar la existencia de solución, véase el Teorema 1.10. Sea $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ el grafo sobre Ω que es solución del problema. La frontera de Σ consiste en las geodésicas verticales proyectándose en los vértices interiores de Ω (si hay) y curvas que se proyectan sobre los arcos C_i . Si $\kappa < 0$, la frontera asintótica de Σ consiste en las geodésicas verticales ideales que se proyectan en los posibles vértices

ideales de Ω , y las geodésicas ideales horizontales que se proyectan en los arcos A_i y B_i .

Como Σ se obtiene como límite de grafos definidos sobre polígonos acotados con valores frontera constantes, por Proposición 3.4 podemos extender al caso de la frontera ideal el comportamiento de geodésicas verticales y horizontales de los epígrafes precedentes, lo que nos da el comportamiento asintótico de la H -superficie conjugada Σ^* .

Corolario 3.14. *[Conjugación de un grafo de Jenkins-Serrin] Sea $\Sigma \subset \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ la solución del problema de Jenkins-Serrin descrito anteriormente. La H -superficie conjugada $\Sigma^* \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es un multigrafo posiblemente no embebido tal que:*

- (a) *Las geodésicas verticales ideales en $\partial_\infty \Sigma$, se convierten en curvas ideales en $\partial_\infty \Sigma^*$ de curvatura constante $2H$ a altura $+\infty$ ($-\infty$) cuando $\theta' < 0$ ($\theta' > 0$).*
- (b) *Las geodésicas horizontales ideales en $\partial_\infty \Sigma$ se convierten en geodésicas ideales verticales en $\partial_\infty \Sigma^*$.*

Señalamos además que, si Σ es un grafo completo, entonces Σ^* es un multigrafo completo, y esto implica que Σ^* es también un grafo, véase [53, Theorem 1]. No obstante, en las construcciones de Jenkins-Serrin, se tienen usualmente vértices no ideales, que hacen que la superficie inicial Σ no sea un multigrafo tras extenderla por reflexiones.

A pesar de la descripción detallada de las curvas en la frontera que hemos dado en esta sección, uno de los problemas más difíciles en estas construcciones es el análisis del embebimiento de la superficie conjugada. En general no es fácil saber cuándo, en este tipo de construcciones, la superficie conjugada es embebida, ya que en general las superficies mínimas iniciales en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ no son explícitas, lo que impide que haya un control de la curva conjugada de un segmento vertical. La herramienta más usada es la conocida como *Propiedad de Krust* probada por Krust (en un artículo no publicado, véase [43, Theorem 2.4.1]) en el caso de \mathbb{R}^3 y por Hauswirth, Sa Earp y Toubiana en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ en [39].

Teorema 3.15. [Propiedad de Krust][39] Dado $\kappa \leq 0$, la superficie mínima conjugada de un grafo mínimo en $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ sobre un dominio convexo de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ es un grafo mínimo en $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$.

Este caso se corresponde con superficies mínimas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ mediante la correspondencia de Daniel. En la Sección 3.3 veremos que este resultado no puede extenderse para $H > 0$ para la correspondencia entre superficies mínimas de $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ y H -superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, véase el Teorema 3.37.

Ejemplo 3.16. La catenoide horizontal en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Con el objetivo de ilustrar esta técnica de construcción de superficies vamos a describir sin entrar en algunos detalles cómo construir una catenoide horizontal de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ mediante conjugación, construcción que fue descrita en [81, 70]. Consideramos el modelo del cilindro para $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con radio 1, y el dominio $\Omega_a \subset \mathbb{H}^2$, $0 < a < 1$ que consiste en el cuadrilátero con vértices, recorridos en sentido antihorario, en los puntos $p_1 = (1, 0)$, $p_2 = (0, a)$, $p_3 = (-1, 0)$ y $p_4 = (0, -a)$. Nótese que los vértices p_1 y p_3 son puntos ideales. Sea Σ_a la solución al problema de Jenkins-Serrin en Ω_a con valores frontera $+\infty$ en $\overline{p_1 p_2}$ y $\overline{p_3 p_4}$ y $-\infty$ en $\overline{p_2 p_3}$ y $\overline{p_4 p_1}$, véase la Figura 3.3. Es fácil ver por unicidad del problema de Jenkins-Serrin que Σ_a contiene dos geodésicas horizontales perpendiculares cortándose en un punto que se proyectan sobre $\overline{p_1 p_3}$ y $\overline{p_2 p_4}$, y además ese punto es el único donde $\nu = 1$. La superficie Σ_a además contiene las geodésicas verticales $\Gamma_i = \Pi^{-1}(p_i)$ (luego Γ_1 y Γ_3 son ideales). Como la función ángulo ν es positiva en el interior de Σ_a se tiene que el ángulo de rotación θ_{2i} a lo largo de las geodésicas verticales Γ_{2i} cumple que $\theta'_{2i} > 0$ a lo largo de Γ_{2i} para $i \in \{1, 2\}$. Se tiene que Σ_a^* es un grafo vertical mínimo en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por la propiedad de Krust 3.15, cuya frontera finita consiste en las curvas de simetría Γ_{2i}^* contenidas en el mismo plano horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ salvo traslaciones verticales (es sencillo ver esto por la simetría de la superficie). Por el Teorema 3.10, se tiene que Σ_a^* está contenida en $\mathbb{H}^2 \times (-\infty, 0]$ y las curvas de simetría contenidas en $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ cumplen $\kappa_g < 0$ con respecto al normal que apunta hacia el interior de Ω_a^* . Por el Corolario 3.14, la frontera ideal de Σ_a^* consiste en cuatro medias geodésicas verticales ideales contenidas en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y dos geodésicas horizontales ideales $\Gamma_1^*, \Gamma_3^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$. Además, como Σ_a contiene dos geodésicas horizontales perpendiculares, se sigue que Σ_a^* tiene simetría diédrica respecto a dos planos verticales perpendiculares que se cortan en una geodésica vertical. Extendiendo Σ_a^* mediante la simetría especular respecto al plano

horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ obtenemos una superficie completa embebida con género 0 y 2 finales, cada uno asintótico a un plano vertical. Esta superficie es conocida como *catenoide horizontal*. Los Teoremas 2.4 y 2.1 garantizan que tiene curvatura total -4π .

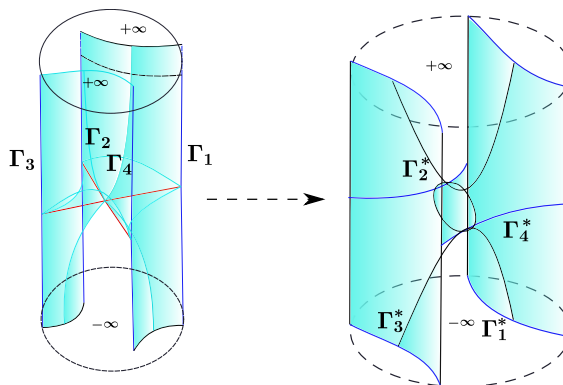


Figura 3.3: Esquema de la construcción de la catenoide horizontal representando las curvas $\Gamma_i \subset \Sigma_a$ y sus curvas conjugadas $\Gamma_i^* \subset \Sigma_a^*$.

3.2. Construcción de k -noides y Saddle Towers mínimos con género 1 en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

En esta sección vamos a construir ejemplos simétricos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura total finita y género 1, que son conformemente equivalentes a un toro menos $k \geq 3$ puntos y cada uno de sus finales es asintótico a un plano vertical. Pueden ser entendidos como los homólogos a los k -noides mínimos de género 1 en \mathbb{R}^3 construidos por Mazet en [59]. Fuera de un compacto estas superficie se parecen a los k -noides mínimos de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ construidos en [70, 81], y no son embebidos en general puesto que los k planos asintóticos pueden tener intersección no vacía. Obsérvese que no puede haber ejemplos de este tipo con $k = 2$ debido a la unicidad de las catenoides horizontales en [35], véase el Teorema 2.7. La construcción se resume en el siguiente resultado:

Teorema 3.17. *Para cada $k \geq 3$, existe una familia de superficies mínimas propiamente Alexandrov-embebidas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con género 1 y k finales, simétricas con respecto a un plano horizontal y k planos verticales*

equiangulares con una geodésica vertical común. Estas tienen curvatura total finita $-4k\pi$ y cada final es embebido y asintótico a un plano vertical.

Vamos a usar los resultados de la Sección 3.1 para construir estos ejemplos como una construcción conjugada para el caso de $H = 0$. Además, esta construcción puede ser adaptada para producir ejemplos completos que adicionalmente son invariantes por una traslación vertical arbitraria, similares a los Saddle Towers de [70]:

Teorema 3.18. *Para cada $k \geq 3$ y toda traslación vertical T , existe una familia uniparamétrica de superficies mínimas Alexandrov-embebidas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ invariantes por T y simétricas con respecto a un plano horizontal y k planos verticales equiangulares con una geodésica vertical común. Estas tienen curvatura total finita $-4k\pi$, género 1 y $2k$ finales verticales en el cociente de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por T .*

La primera parte de esta sección está destinada a probar los Teoremas 3.17 y 3.18. La construcción conjugada depende de un parámetro $0 < l \leq \infty$ que quedará fijo en el argumento. El caso $0 < l < \infty$ nos da las superficies de tipo Saddle Tower cuya pieza fundamental quedará en la banda $\mathbb{H}^2 \times [-l, 0]$ de altura l , mientras que el caso $l = \infty$ nos dará los k -noides de género 1. Aunque un argumento de límite para $l \rightarrow \infty$ como en [70] nos daría el caso $l = \infty$, trataremos los dos casos simultáneamente.

3.2.1. La construcción conjugada. Sea Δ un triángulo geodésico en \mathbb{H}^2 con lados ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 y vértices opuestos p_1 , p_2 y p_3 . Supongamos que Δ es acutángulo y la longitud de ℓ_2 viene dada por el parámetro $l \in (0, \infty]$, de forma que si $l = \infty$ entonces p_1 es un punto ideal. El triángulo Δ queda determinado por la longitud a de ℓ_1 y por el ángulo φ en p_2 . Dado $b \in \mathbb{R}$, consideramos la única solución $\Sigma(a, \varphi, b)$ al problema de Jenkins–Serrin sobre Δ con valores frontera b sobre ℓ_1 , $+\infty$ sobre ℓ_2 , y 0 sobre ℓ_3 , véase el Teorema 1.10. El interior de $\Sigma(a, \varphi, b)$ es un grafo mínimo sobre Δ cuya frontera consiste en dos geodésicas horizontales h_1 y h_3 que caen en $\mathbb{H}^2 \times \{b\}$ y $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$, respectivamente, y tres geodésicas verticales v_1 , v_2 y v_3 que se proyectan en p_1 , p_2 y p_3 , respectivamente. Obsérvese que v_1 es una geodésica vertical ideal cuando $l = \infty$. Además, la frontera asintótica de $\Sigma(a, \varphi, b)$ también contiene la geodésica horizontal $h_2 \subset \mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ que se proyecta sobre ℓ_2 .

Como $\Delta \subset \mathbb{H}^2$ es convexo, la superficie conjugada $\Sigma^*(a, \varphi, b) \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es un grafo sobre un dominio $\Delta^* \subset \mathbb{H}^2$ debido a la propiedad de Krust (Teorema 3.15). El normal N a lo largo de v_2 o v_3 rota en sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que las curvas conjugadas v_2^* y v_3^* caen en planos horizontales y son convexas con respecto al exterior del dominio Δ^* por el Teorema 3.10. Además, el teorema también implica que $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ queda localmente por debajo de los planos horizontales que contienen a v_2^* y v_3^* . Supondremos a partir de ahora que $v_3^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$. Los puntos donde ν toma el valor 0 o ± 1 son la clave para entender el comportamiento de h_i^* , según indican las ecuaciones (3.6).

Lema 3.19. *La función ángulo ν de $\Sigma(a, \varphi, b)$ es cero solo en $v_2 \cup v_3$ si $l = \infty$ o en $v_1 \cup v_2 \cup v_3$ si $l < \infty$. Además, existe un único punto de $\Sigma(a, \varphi, b)$ con $\nu = 1$ y este está en h_1 .*

Demostración. Vamos a llamar $\Sigma = \Sigma(a, \varphi, b)$ por simplicidad. El interior de Σ es un grafo, luego no hay puntos interiores con $\nu = 0$. Además, tampoco puede haber puntos con $\nu = 0$ en el interior de h_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, ya que esto contradice el principio del máximo en la frontera comparando Σ y el plano vertical mínimo $l_i \times \mathbb{R}$.

Si $\nu(p) = 1$ en algún punto interior p , entonces la intersección de Σ y P , el plano horizontal conteniendo a p es la intersección de dos superficies mínimas y, por tanto, es un sistema equiangular de al menos dos curvas que pasan por p . Estas curvas no pueden bordear un dominio relativamente compacto en el interior de Σ por el principio del máximo. Viendo cómo es la frontera Σ , se deduce fácilmente que dos de las curvas empezando en p deben alcanzar algún h_i o tener un extremo común en algún v_i . Nótese que Σ se extiende analíticamente mediante simetrías axiales a lo largo de la frontera, por lo que este conjunto de curvas es parte de la (también equiangular) intersección de P y la extensión de Σ . En particular, no puede haber dos curvas partiendo de p que alcancen el mismo v_i ya que estas se intersecarían en el mismo punto, en contradicción con el hecho de que P no es tangente a Σ en ningún punto de v_i . Como $P \cap \Sigma$ no puede alcanzar los interiores de v_2 y v_3 simultáneamente (ya que están a diferentes alturas), se sigue que dos de las curvas partiendo de p deben alcanzar algún h_i . Entonces, el segmento de h_i uniendo los dos correspondientes extremos está también en la intersección $P \cap \Sigma$, produciendo una contradicción similar

con el principio del máximo.

Si $l = \infty$ y los extremos están en v_1 , entonces el principio del máximo general (Teorema 1.12) se aplica en este caso ya que los lados ℓ_2 y ℓ_3 son asintóticos en $p_1 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, llegando a una contradicción.

Finalmente, vamos a tratar los puntos de la frontera con $\nu = 1$. Estos no pueden estar en h_3 por el principio del máximo en la frontera (comparando Σ con el plano $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$). Para h_1 , nótese que Σ se puede extender analíticamente a una superficie completa mediante simetrías axiales a lo largo de las componentes de la frontera. Por tanto, el normal N (con la suposición $\nu > 0$) apunta hacia Δ en el extremo $h_1 \cap v_2$ y hacia la dirección opuesta en el extremo $h_1 \cap v_3$, luego los ángulos interiores en las esquinas $h_1 \cap v_2$ y $h_1 \cap v_3$ son iguales a $\frac{\pi}{2}$ ya que Σ no se puede aproximar a h_1 desde fuera de Δ . Esto nos dice que N rota un ángulo de amplitud π a lo largo de h_1 como se representa en la Figura 3.4, lo cual implica que hay al menos un punto en h_1 con $\nu = 1$ (cuando N ha rotado justamente $\frac{\pi}{2}$). Si hubiera más de un punto, entonces en la intersección de Σ y el plano horizontal conteniendo a h_1 habría dos curvas interiores partiendo de dichos puntos y encontraríamos una región bordeada por curvas horizontales llegando de nuevo a una contradicción con el principio del máximo como en los casos anteriores. \square

Con esto deducimos que h_3^* se proyecta inyectivamente sobre los factores \mathbb{H}^2 y \mathbb{R} , así como h_1^* se proyecta inyectivamente sobre \mathbb{H}^2 . Sin embargo, la componente de h_1^* en el factor \mathbb{R} tiene un mínimo en el único punto donde $\nu = 1$. Por otro lado, la curva conjugada h_2^* se puede ver como un segmento vertical ideal de longitud l en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, véase el Corolario 3.14. Como $\Sigma(a, \varphi, b)$ se hace vertical cuando nos acercamos al lado ℓ_2 , la longitud del segmento vertical ideal h_2^* es l , luego $v_1^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{-l\}$. Si $l < \infty$, entonces N rota en sentido de las agujas del reloj a lo largo de v_1 , por lo que la curva conjugada v_1^* está contenida en un plano horizontal al que $\Sigma(a, \varphi, b)$ se acerca por arriba y v_1^* es convexa hacia el exterior de Δ^* por el Teorema 3.10. Si $l = \infty$, entonces v_1^* es una geodésica ideal en $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$, véase el Corolario 3.14. En la Figura 3.4 puede verse una descripción de las superficies conjugadas.

Nos gustaría que v_2^* y v_3^* estuvieran contenidas en el mismo plano horizontal, así como que las geodésicas completas de \mathbb{H}^2 que contienen a $\Pi(h_1^*)$

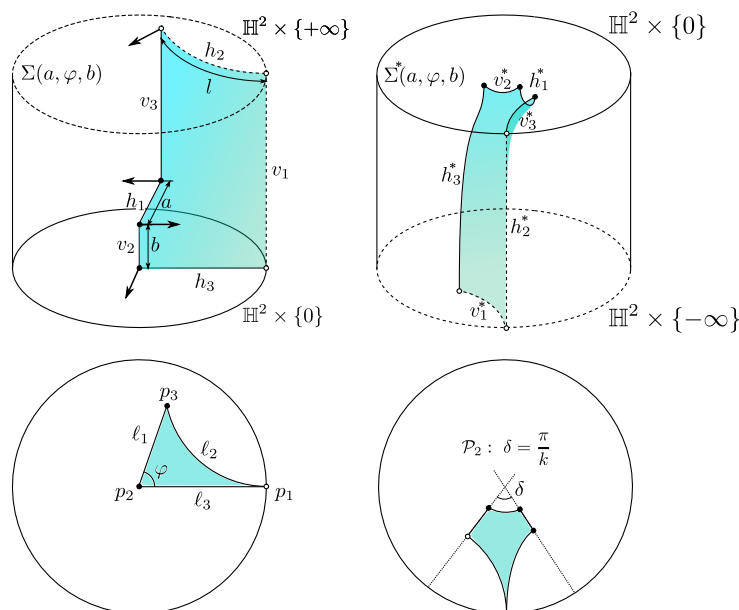


Figura 3.4: Las superficies conjugadas $\Sigma(a, \varphi, b)$ y $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ y sus dominios Δ y Δ^* en \mathbb{H}^2 en el caso $l = \infty$. Las líneas discontinuas representan geodésicas ideales, y los puntos blancos representan vértices ideales. Las flechas en $\Sigma(a, \varphi, b)$ representan al normal N en los extremos de v_2 y v_3 , el cual rota en sentido contrario de las agujas del reloj en ambas geodésicas verticales.

y $\Pi(h_3^*)$ se corten con un ángulo de amplitud $\frac{\pi}{k}$ como se muestra en la Figura 3.4 (problemas de periodos \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2). Esta configuración daría como resultado la construcción deseada de los Saddle Towers y k -noides. Por tanto, necesitamos encontrar valores de (a, φ, b) que resuelvan dichos problemas de periodos. Inspirados por los argumentos de [77], los formalizaremos de la siguiente forma:

1. **Primer problema de periodos.** Definimos $\mathcal{P}_1(a, \varphi, b)$ como la diferencia de alturas de las curvas horizontales v_2^* y v_3^* , es decir, la diferencia de altura de los extremos de la curva h_1^* . Si parametrizamos por el arco $h_1^* : [0, a] \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con $h_1^*(0) \in v_2^*$, $h_1^*(a) \in v_3^*$, usando la ecuación (3.2),

podemos expresar

$$\mathcal{P}_1(a, \varphi, b) = \int_{h_1^*} \langle h_1^{*'}, \partial_t \rangle = \int_{h_1} \langle \eta, \partial_t \rangle. \quad (3.12)$$

donde $\eta = -Jh_1'$ es el conormal interior unitario a $\Sigma(a, \varphi, b)$ a lo largo de h_1 .

2. **Segundo problema de periodos.** Consideremos ahora el modelo del semi-espacio para $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Salvo una isometría del ambiente, podemos asumir que h_3^* está contenida en el plano vertical $\{x = 0\}$ y que $v_2^* : [0, b] \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ está contenida en el plano horizontal $\mathbb{H}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{H}^2$ con extremos $v_2^*(0) \in h_3^*$ y $v_2^*(b) \in h_1^*$. Expresamos en coordenadas $v_2^*(t) = (x(t), y(t), 0)$ y suponemos que $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ y $x(t) < 0$ cuando t está cerca de 0 (ya que v_2^* y h_3^* son ortogonales), véase la Figura 3.5. Recordamos que esta parametrización viene (vía conjugación) de la orientación elegida en la que $v_2' = \xi = \partial_t$.

Sea $\psi \in C^\infty[0, b]$ el ángulo de rotación de v_2^* con respecto a la foliación por horociclos dada por la Ecuación (3.11), donde elegimos el ángulo inicial $\psi(0) = \pi$. Llamaremos $\psi_0 = \psi(b)$ y asumiremos en lo que sigue que $\pi < \psi(t) < 2\pi$, $x(t) < 0$ y $0 < t \leq b$ (estas desigualdades serán probadas en el Lema 3.23). La geodésica completa $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ que contiene a $\Pi(h_1^*)$ se puede parametrizar como

$$\gamma : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{H}^2, \quad \gamma(t) = \left(x_0 - y_0 \frac{\cos(t) + \cos(\psi_0)}{\sin(\psi_0)}, -y_0 \frac{\sin(t)}{\sin(\psi_0)} \right). \quad (3.13)$$

Nótese que $\gamma(\psi_0 - \pi) = (x_0, y_0)$ y $\gamma'(\psi_0 - \pi) = \frac{-1}{\sin(\psi_0)}(\sin(\psi_0)E_1 - \cos(\psi_0)E_2)$.

Si γ toca al eje y en el punto $\gamma(t_*)$, definimos el segundo problema de periodos como el coseno del ángulo (no orientado) δ en $\gamma(t_*)$ entre γ y el eje y , véase la Figura 3.5. Usando la parametrización (3.13) para γ podemos calcular este ángulo y definir \mathcal{P}_2 como

$$\mathcal{P}_2(a, \varphi, b) = \cos(\delta) = \frac{\langle \gamma'(t_*), E_2 \rangle}{|\gamma'(t_*)|} = \cos(t_*) = \frac{x_0 \sin(\psi_0)}{y_0} - \cos(\psi_0). \quad (3.14)$$

Obsérvese que el término de la derecha de (3.14) tiene sentido incluso cuando no hay intersección entre γ y el eje y , por lo que nos motiva a tomar como definición del segundo problema de periodos esta cantidad.

El Lema 3.23 mostrará que si $\mathcal{P}_1(a, \varphi, b) = 0$ y $\mathcal{P}_2(a, \varphi, b) = \cos(\frac{\pi}{k})$ para algún $k \geq 3$, entonces γ y la parte positiva del eje y se cortan con un ángulo $\delta = \frac{\pi}{k}$, como se muestra en la Figura 3.5

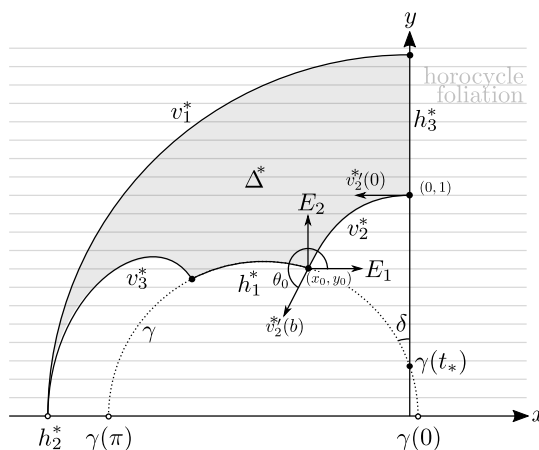


Figura 3.5: El ángulo de rotación ψ_0 de v_2^* con respecto a la foliación de horociclos en $v_2^*(b)$, donde identificamos $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ y \mathbb{H}^2 . La superficie $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ se proyecta en la región sombreada Δ^* . La geodésica completa γ que contiene a $\Pi(h_1^*)$ aparece en línea punteada.

La unicidad de solución del problema de Jenkins-Serrin implica que $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ depende de forma continua de los parámetros (a, φ, b) en el siguiente sentido: dada una sucesión (a_n, φ_n, b_n) convergiendo a (a, φ, b) , la sucesión de superficies con frontera $\Sigma^*(a_n, \varphi_n, b_n)$ converge en la topología \mathcal{C}^m sobre compactos a $\Sigma^*(a, \varphi, b)$ para todo $m \geq 0$. Esto se sigue de argumentos estándares para convergencia de grafos mínimos junto con la continuidad de la conjugación Proposición 3.4.

3.2.2. Resolviendo los problemas de periodos. En lo que sigue vamos a asumir que b es un número real no negativo y que (a, φ) está dentro del dominio

$$\Omega = \left\{ (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < a < a_{\max}(\varphi) \right\}, \quad (3.15)$$

donde

$$a_{\max}(\varphi) = 2 \operatorname{arctanh}(\tanh(l) \cos(\varphi)), \quad (3.16)$$

entendiendo que $\tanh(l) = 1$ cuando $l = \infty$. La condición $0 < a < a_{\max}(\varphi)$ nos dice que el ángulo de Δ en p_3 es siempre mayor que φ , y entonces un triángulo isósceles Δ_0 con vértices p_2, p_3 y p_4 , con $d(p_2, p_4) = d(p_3, p_4) = l$ intersecaría Δ como en la Figura 3.6 (el vértice v_4 es ideal cuando $l = \infty$). Se tiene que $a_{\max}(\varphi)$ es la longitud del lado desigual del triángulo isósceles cuyos lados iguales tienen longitud l y cuyos ángulos iguales tienen amplitud φ . Por tanto, la fórmula (3.16) se sigue del hecho de que el coseno del ángulo de un triángulo hiperbólico recto es el cociente entre las tangentes hiperbólicas de las longitudes del lado adyacente y la hipotenusa.

Nota 3.20. La restricción $(a, \varphi) \in \Omega$ la usaremos en el Lema 3.22 para comparar $\Sigma(a, \varphi, b)$ con la solución del problema de Jenkins-Serrin sobre Δ_0 y resolver así el primer problema de periodos. Los mismos argumentos del Lema 3.22 permiten concluir fácilmente que, si $a > a_{\max}(\varphi)$, entonces el primer problema de periodos no tiene solución, por lo que la condición $(a, \varphi) \in \Omega$ es natural.

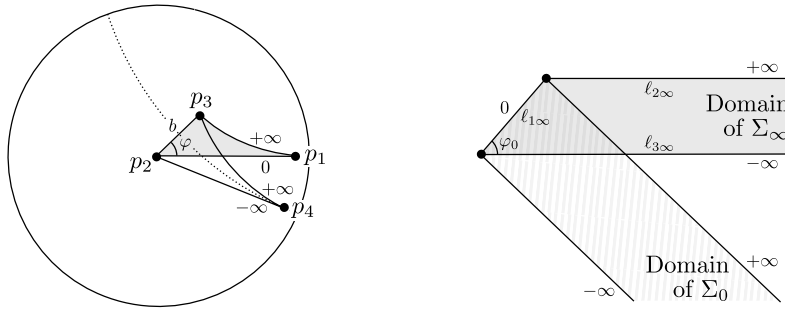


Figura 3.6: A la izquierda, los valores frontera para los problemas de Jenkins-Serrin en \mathbb{H}^2 resueltos por $\Sigma(a, \varphi, b)$ y $\Sigma_0(b)$, donde la mediatriz de ℓ_1 esta representada en una línea punteada y $l < \infty$. A la derecha, la superficie límite $\Sigma_\infty \subset \mathbb{R}^3$ después de reescalar (fijando la longitud de ℓ_1 como 1) y el helicoides $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^3$ que aparece en la prueba del Lema 3.22.

Lema 3.21. La función $\mathcal{P}_1 : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y estrictamente decreciente con respecto al tercer argumento b .

Demostración. Consideremos dos superficies $\Sigma_1 = \Sigma(a, \varphi, b_1)$ y $\Sigma_2 = \Sigma(a, \varphi, b_2)$ con $0 < b_1 < b_2$. Trasladamos ambas superficies verticalmente para que tomen el valor 0 a en ℓ_1 de forma que Σ_i toma el valor $-b_i$ en ℓ_3 . Se tiene que

Σ_1 está por encima de Σ_2 y, por tanto, podemos comparar la componente vertical de los conormales interiores η_1 y η_2 , que satisfacen $\langle \eta_2, \partial_t \rangle < \langle \eta_1, \partial_t \rangle$ en el interior de h_1 por el principio del máximo en la frontera. En particular, tenemos que:

$$\mathcal{P}_1(a, \varphi, b_2) = \int_{h_1} \langle \eta_2, \partial_t \rangle < \int_{h_1} \langle \eta_1, \partial_t \rangle = \mathcal{P}_1(a, \varphi, b_1). \quad \square$$

Lema 3.22. *Existe una única función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\mathcal{P}_1(a, \varphi, f(a, \varphi)) = 0$ para todo $(a, \varphi) \in \Omega$. Además,*

(a) *f es una función continua;*

(b) *dado $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$,*

$$\lim_{a \rightarrow a_{\max}(\varphi_0)} f(a, \varphi_0) = +\infty, \quad \lim_{(a, \varphi) \rightarrow (0, \varphi_0)} f(a, \varphi) = 0.$$

Demostración. Fijemos $(a, \varphi) \in \Omega$. Sea p_4 el punto en la mediatriz del segmento ℓ_1 con $d(p_2, p_4) = d(p_3, p_4) = l$, de forma que el triángulo Δ_0 con vértices p_1, p_2 y p_4 quede al mismo lado de ℓ_1 que Δ , véase la Figura 3.6. Sea $\Sigma_0(b)$ la única solución del problema de Jenkins–Serrin sobre el triángulo Δ_0 con valores b en $\overline{p_2 p_3}$, $+\infty$ en $\overline{p_3 p_4}$, y $-\infty$ en $\overline{p_2 p_4}$. Como $(a, \varphi) \in \Omega$, entonces $\Delta \cap \Delta_0 \subset \mathbb{H}^2$ es un triángulo geodésico acotado con vértices p_2, p_3 y $q \in \ell_3$. Por el Lema 1.13 tenemos que $\Sigma_0(b)$ tiene un límite finito radial en p_2 a lo largo de ℓ_3 como grafo sobre Δ_0 . Por tanto, si b es suficientemente grande, entonces $\Sigma_0(b)$ está por encima de $\Sigma(a, \varphi, b)$ en la frontera de $\Delta \cap \Delta_0$. Por el principio del máximo, tenemos que también está por encima en el interior de $\Delta \cap \Delta_0$. En particular, tenemos que $\Sigma \cap \Sigma_0(b) = h_1 \cup v_2 \cup v_3$ cuando b es suficientemente grande.

Con esto podemos comparar la componente vertical de los conormales interiores η y η_0 de $\Sigma(a, \varphi, b)$ y $\Sigma_0(b)$ respectivamente, a lo largo de h_1 (como en el Lema 3.21). Por el principio del máximo en la frontera, tenemos la desigualdad estricta $\langle \eta, \partial_t \rangle < \langle \eta_0, \partial_t \rangle$ en el interior de h_1 y, por tanto,

$$\mathcal{P}_1(a, \varphi, b) = \int_{h_1} \langle \eta, \partial_t \rangle < \int_{h_1} \langle \eta_0, \partial_t \rangle = 0, \quad (3.17)$$

cuando b es suficientemente grande. Observemos que la integral de la derecha en (3.17) se anula ya que $\Sigma_0(b)$ es axialmente simétrico con respecto a la mediatriz de h_1 en $\mathbb{H}^2 \times \{b\}$.

Debido a la continuidad de $\Sigma(a, \varphi, b)$ con respecto a los parámetros (a, φ, b) , la superficie $\Sigma(a, \varphi, b)$ converge a $\Sigma(a, \varphi, 0)$ cuando $b \rightarrow 0$. Se tiene entonces que $\mathcal{P}_1(a, \varphi, 0) > 0$ ya que $\Sigma(a, \varphi, 0)$ queda por encima de la superficie mínima horizontal $\Delta \times \{0\}$ por el principio del máximo, y podemos comparar la tercera componente de sus conormales interiores a lo largo de la frontera común h_1 por el principio del máximo en la frontera. Obsérvese que la tercera coordenada del conormal interior de $\Delta \times \{0\}$ es idénticamente cero. Tenemos entonces por la continuidad y monotonía de \mathcal{P}_1 con respecto a b probada en el Lema 3.21, que existe un único $b_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathcal{P}_1(a, \varphi, b_0) = 0$. Esto define unívocamente a $f(a, \varphi) = b_0$.

La continuidad de f es consecuencia de su unicidad. En efecto, si (a_n, φ_n) y (a'_n, φ'_n) son dos sucesiones en Ω convergiendo a algún $(a_\infty, \varphi_\infty) \in \Omega$ tales que después de pasar a una subsucesión, $f(a_n, \varphi_n) \rightarrow b_\infty$ y $f(a'_n, \varphi'_n) \rightarrow b'_\infty$, se tiene que $\mathcal{P}_1(a_\infty, \varphi_\infty, b_\infty) = \mathcal{P}_1(a_\infty, \varphi_\infty, b'_\infty) = 0$, y por tanto $b_\infty = b'_\infty$. Esto termina de probar el apartado (a).

Para el primer límite en el apartado (b), supongamos por reducción al absurdo que hay una sucesión $a_n \rightarrow a_{\max}(\varphi_0)$ de forma que $f(a_n, \varphi_0)$ converge, después de pasar a una subsucesión, a algún $b_\infty \in [0, +\infty)$. La superficie $\Sigma_0(b_\infty)$ queda por debajo de $\Sigma(a_{\max}(\varphi_0), \varphi, b_\infty)$ como grafos sobre su dominio común $\Delta = \Delta_0$ por el principio del máximo ya que sus valores frontera están ordenados. Nótese que tienen el valor común b_∞ a lo largo de ℓ_1 , luego de nuevo podemos comparar la tercera coordenada de los conormales interiores a lo largo de h_1 . Como $\Sigma_0(b_\infty)$ tiene primer periodo cero debido a su simetría llegamos a una contradicción pues $\Sigma(a_{\max}(\varphi_0), \varphi, b_\infty)$ tiene también primer periodo cero.

Vamos a calcular el límite cuando (a, φ) tiende a $(0, \varphi_0)$. De nuevo, supongamos por reducción al absurdo que hay una sucesión $\{(a_n, \varphi_n)\}$ en Ω convergiendo a $(0, \varphi_0)$ de forma que (después de pasar a una subsucesión) $f(a_n, \varphi_n) \rightarrow b_\infty$, con $b_\infty \in (0, +\infty]$. Podemos trasladar las superficies $\Sigma(a_n, \varphi_n, f(a_n, \varphi_n))$ verticalmente de forma que tomen el valor cero en ℓ_1 y $-f(a_n, \varphi_n)$ en ℓ_3 . Como $a_n \rightarrow 0$, podemos reescalar la métrica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de forma que a_n sea igual a 1. La nueva sucesión de superficies reescaladas converge en la topología \mathcal{C}^m sobre compactos para todo m a una superficie mínima Σ_∞ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 por argumentos estándar de rescalamiento. Esta superficie es un grafo mínimo sobre un dominio de \mathbb{R}^2 bordeado por tres líneas $\ell_{1\infty}$, $\ell_{2\infty}$ y $\ell_{3\infty}$ de forma que $\ell_{2\infty}$ y $\ell_{3\infty}$ son paralelas

y $\ell_{1\infty}$ las corta con un ángulo de amplitud φ_0 . Además, Σ_∞ toma los valores $+\infty$ en $\ell_{2\infty}$, $-\infty$ en $\ell_{3\infty}$ (ya que $b_\infty > 0$), y 0 en $\ell_{1\infty}$. Consideramos el helicoides $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^3$ con eje $\ell_{1\infty}$, que es un grafo sobre la media banda de \mathbb{R}^2 como aparece en la Figura 3.6 (derecha). Como $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, la intersección de los dominios de Σ_0 y Σ_∞ es un triángulo en cuyos lados los valores de Σ_0 son mayores o iguales a los de Σ_∞ . Por el principio del máximo, deducimos que Σ_0 queda por encima de Σ_∞ también en el interior del dominio común. De nuevo podemos comparar los conormales interiores de ambas superficies a lo largo de $\ell_{1\infty}$ concluyendo que el primer periodo de Σ_∞ no es cero, lo que contradice que cada superficie $\Sigma(a_n, \varphi_n, f(a_n, \varphi_n))$ tenga primer periodo cero. \square

Esto resuelve el primer problema de periodos. Ahora nos centraremos en resolver el segundo. Para esto, usaremos la notación y las normalizaciones descritas en la Sección 3.2.1, véase también la Figura 3.5.

Lema 3.23. Sean $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ y $a \in (0, a_{\max}(\varphi_0))$.

- (a) Las desigualdades $x(t) < 0$ y $\pi < \psi(t) < 2\pi$ son ciertas para todo $t \in (0, b]$.
- (b) Si la curva γ interseca la parte positiva del eje y con ángulo δ , entonces $\delta < \varphi_0$, en cuyo caso $\mathcal{P}_2(a, \varphi_0, f(a, \varphi_0)) = \cos(\delta)$.
- (c) Si $\mathcal{P}_2(a, \varphi_0, f(a, \varphi_0)) = \cos(\delta)$ para algún $\delta \in (0, \varphi_0)$, entonces γ interseca la parte positiva del eje y con ángulo δ .
- (d) Si $\mathcal{P}_2(a, \varphi_0, f(a, \varphi_0)) = 1$, entonces γ y el eje y son geodésicas asintóticas intersecándose en el punto ideal $(0, 0)$.

Además,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{P}_2(a, \varphi_0, f(a, \varphi_0)) = \cos(\varphi_0), \quad \lim_{a \rightarrow a_{\max}(\varphi_0)} \mathcal{P}_2(a, \varphi_0, f(a, \varphi_0)) = +\infty.$$

Demostración. Para simplificar la notación vamos a identificar v_2^* con su proyección sobre \mathbb{H}^2 . Por el Teorema 3.10, se tiene que v_2^* es estrictamente convexa (en sentido hiperbólico) hacia el exterior del dominio Δ^* . Esto implica que toda geodésica tangente a v_2^* queda localmente en el interior de Δ^* salvo en el punto de tangencia. En particular, tenemos que $\psi(t) > \pi$ para t cercano a 0, simplemente comparando v_2^* con la geodésica tangente

en $v_2^*(0) = (0, 1)$ (véase Figura 3.7 a la izquierda). Además, si $\psi(t) > \pi$ no fuera cierto para todo $t \in (0, b]$, entonces en el instante más pequeño $t_0 > 0$ tal que $\psi(t_0) = \pi$, la geodésica tangente tendría puntos fuera de Δ^* arbitrariamente cerca de $v_2^*(t_0)$, lo cual es una contradicción (véase Figura 3.7, a la izquierda). Supongamos, también por reducción al absurdo, que $x(t) < 0$

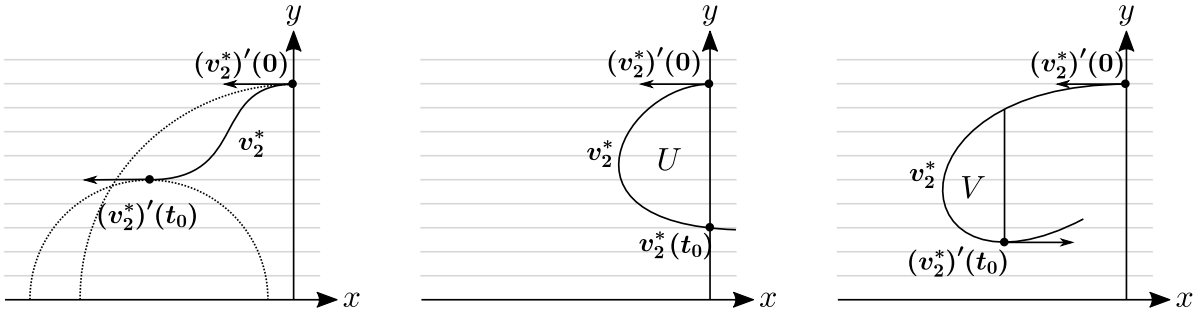


Figura 3.7: Geodésicas tangentes en $v_2^*(0)$ y en el primer instante $t_0 \in (0, b]$ tal que $\theta(t_0) = \pi$ (izquierda). El primer $t_0 \in (0, b]$ tal que $x(t_0) = 0$ (centro). El primer $t_0 \in (0, b]$ tal que $\psi(t_0) = 2\pi$ (derecha). Los dominios U y V son a los que se le aplica la fórmula de Gauss-Bonnet en el Lema 3.23.

no es cierto en general, y sea $t_0 \in (0, b]$ el primer instante tal que $x(t_0) = 0$. En esta situación, la curva v_2^* entre 0 y t_0 junto con el segmento del eje y encierran un dominio $U \subset \mathbb{H}^2$ (véase Figura 3.7, centro). La curva v_2^* es convexa hacia el interior de U y tiene dos ángulos interiores iguales a $\frac{\pi}{2}$ y a $\alpha = \psi(t_0) - \frac{3\pi}{2} \in (0, \pi)$. Aplicando la fórmula de Gauss-Bonnet se tiene

$$\begin{aligned} 0 > -\text{area}(U) &= 2\pi + \int_0^{t_0} \kappa_g(t) dt - \left(\frac{\pi}{2} + \pi - \alpha\right) \\ &> \frac{\pi}{2} + \int_0^b \kappa_g(t) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^b \theta'(t) dt = \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $\kappa_g < 0$ es la curvatura geodésica con respecto al conormal unitario N^* que apunta hacia el exterior de Δ^* , véase el Teorema 3.10. También se ha usado que el ángulo θ del normal N a lo largo de v_2 definido en (3.9), rota en sentido contrario a la agujas del reloj con $\theta' = -\kappa_g > 0$ y $\theta(b) - \theta(0) = \varphi_0$. La desigualdad (3.18) contradice el hecho de que $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Supongamos por reducción al absurdo de nuevo que hay un primer instante $t_0 \in (0, b]$ tal que $\psi(t_0) = 2\pi$. Esto implica que la geodésica perpendicular a v_2^* en t_0 es una línea recta paralela al eje y . Sea $V \subset \mathbb{H}^2$ el dominio

encerrado por esta línea junto con el arco de v_2^* (véase la Figura 3.7, derecha). Entonces V tiene dos ángulos interiores $\alpha \in (0, \pi)$ y $\frac{\pi}{2}$ y v_2^* es convexa hacia el interior de V . Razonando igual que en (3.18), tenemos la misma contradicción $0 > -\text{area}(V) > \frac{\pi}{2} - \varphi_0$, lo que termina la prueba del apartado (a).

Para el apartado (b), si γ interseca el eje y con un ángulo δ , entonces hay una región $W \subset \mathbb{H}^2$ bordeada por γ , v_2^* y el eje y . Aplicando la fórmula de Gauss-Bonnet de la misma forma que en la ecuación (3.18), obtenemos la desigualdad $0 > -\text{area}(W) > \delta - \varphi_0$, o equivalentemente $\delta < \varphi_0$. La igualdad $\mathcal{P}_2(a, \varphi, f(a, \varphi)) = \cos(\delta)$ se cumple según los argumentos que llevaron a la Ecuación (3.14).

Discutiremos ahora los apartados (c) y (d). Nótese que la primera coordenada de $\gamma(\pi)$ es negativa por el anterior análisis, por lo que γ cortará al eje y si y solo si la primera coordenada de

$$\gamma(0) = \left(x_0 - y_0 \frac{1 + \cos(\psi_0)}{\sin(\psi_0)}, 0 \right) \quad (3.19)$$

es positiva (aquí, $\sin(\psi_0) < 0$ ya que $\pi < \theta_0 < 2\pi$). Si existe $\delta \in (0, \varphi_0)$ tal que $\mathcal{P}_2(a, \varphi_0, f(a, \varphi_0)) = \frac{x_0 \sin(\theta_0)}{y_0} - \cos(\theta_0) = \cos(\delta) \in (0, 1)$, entonces la primera coordenada de (3.19) es positiva, y se sigue de (b) que el ángulo en la intersección es precisamente δ . Si $\mathcal{P}_2(a, \varphi_0, f(a, \varphi_0)) = 1$, entonces la primera coordenada de (3.19) se anula y, por tanto, γ y el eje y son asintóticos en el punto ideal $(0, 0)$.

Para finalizar la prueba, vamos a analizar los límites. Integrando desde 0 a b la igualdad $\theta' = \psi' - \cos(\theta)$ del Teorema 3.10 aplicada a v_2 , y teniendo en cuenta que $\psi(b) - \psi(0) = \psi_0 - \pi$ y $\theta(b) - \theta(0) = \varphi_0$, se tiene la relación

$$\psi_0 = \varphi_0 + \pi - \int_0^b \cos(\psi(s)) \, ds. \quad (3.20)$$

En particular, $\psi_0 \rightarrow \varphi_0 + \pi$ y $(x_0, y_0) \rightarrow (0, 1)$ cuando $b \rightarrow 0$ (se tiene que la longitud de v_2^* se va a cero). Esto implica que la primera componente de (3.19) es positiva, es decir, $\gamma(0)$ y $\gamma(\pi)$ quedan a lados distintos del eje y cuando b es suficientemente pequeña, por lo que en este caso γ interseca el eje y en algún punto. Por el Lema 3.22, si $a \in (0, a_{\max}(\varphi_0))$ tiende a cero, entonces $b = f(a, \varphi_0)$ también tiende a cero y, por tanto,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{P}_2(a, \varphi_0, f(a, \varphi_0)) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{x_0 \sin(\psi_0)}{y_0} - \cos(\psi_0) \right) = \cos(\varphi_0).$$

Para el límite $a \rightarrow a_{\max}(\varphi_0)$, sea $\{(a_n, \varphi_0)\}$ una sucesión en Ω con $a_n \rightarrow a_{\max}(\varphi_0)$. Escribiendo $b_n = f(a_n, \varphi_n)$, el Lema 3.22 nos dice que las superficies $\Sigma(a_n, \varphi_0, b_n)$ convergen, salvo considerar una subsucesión y una traslación vertical (de forma que h_1 sea un segmento a altura cero), a la solución del problema de Jenkins-Serrin sobre el triángulo isósceles con valores frontera 0 a lo largo del lado desigual y $+\infty$ y $-\infty$ sobre los otros lados. Denotaremos en lo que sigue los distintos elementos de la superficie $\Sigma(a_n, \varphi_0, b_n)$ mediante un subíndice n .

- Si $l < \infty$, la superficie conjugada converge a Σ_∞^* , dos veces la pieza fundamental de un Saddle Tower con cuatro finales en el cociente de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por una traslación vertical de longitud l . Esta construcción conjugada ha sido analizada en [70, 82]. Si fijamos $v_{2n}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$, entonces las curvas v_{1n}^* convergen a una curva horizontal completa $v_{1\infty}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{-l\}$ convexa hacia el exterior del dominio, y las curvas h_{3n}^* tienden al segmento vertical ideal $h_{3\infty}^*$, véase la Figura 3.8. Sin embargo, estamos trasladando y rotando la superficie primero para que $v_{2n}^*(0) = (0, 1, 0)$ y $(v_{2n}^*)'(0) = -\partial_x$ en el modelo del semi-espacio para poder analizar la rotación del ángulo ψ_{0n} de $(v_{2n}^*)'$ con respecto a la foliación por horociclos, es decir, adaptamos la sucesión a la disposición de la Figura 3.5. Con esto, se tiene que esta sucesión de superficies ya no converge al Saddle Tower sino a un subconjunto del plano vertical $x^2 + y^2 = 1$. Por tanto, $\psi_{0n} \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ y $v_{2n}^*(b_n) = (x_{0n}, y_{0n}) \rightarrow (-1, 0)$ cuando $n \rightarrow \infty$. En vista de (3.19), deducimos que γ_n no interseca la parte positiva del eje y para n suficientemente grande, y (3.14) implica que $\mathcal{P}_2(a_n, \varphi_0, b_n) \rightarrow +\infty$.
- Si $l = \infty$, entonces es también conocido por los resultados de [70, 81] y del Ejemplo 3.16 que la superficie conjugada converge a Σ_∞^* , un cuarto de una catenoide horizontal cuando mantenemos fijo el punto $v_{2n}^*(b_n)$ (y por tanto las curvas v_{1n}^* convergen a la geodésica horizontal completa $v_{1\infty}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$). Sin embargo, si fijamos $v_{2n}^*(0) = (0, 1, 0)$ y $(v_{2n}^*)'(0) = -\partial_x$, entonces la subsucesión converge a un subconjunto del plano plano vertical $x^2 + y^2 = 1$ como en el caso de $l < \infty$, y podemos razonar de forma análoga. \square

Demostración de los Toremás 3.17 y 3.18. Sea $k \geq 3$. Para cada $\frac{\pi}{k} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ el Lema 3.23 asegura que $\mathcal{P}_2(a, \varphi, f(a, \varphi))$ tiende a $\cos(\varphi)$ cuando $a \rightarrow 0$ y

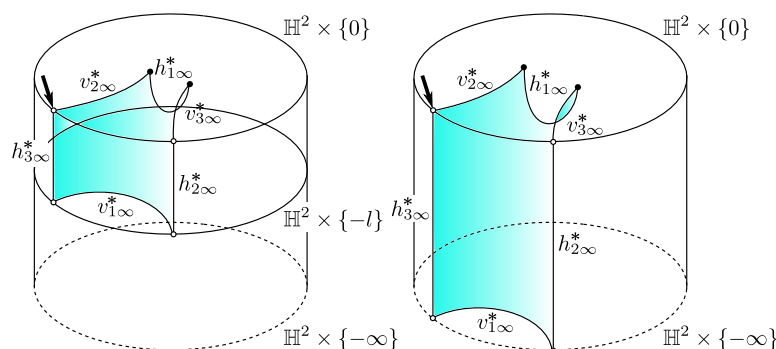


Figura 3.8: El límite Saddle Tower ($l < \infty$) y la catenoide horizontal ($l = \infty$) cuando $a \rightarrow a_{\max}(\varphi_0)$. En la prueba del Lema 3.23 mantenemos fijos los puntos señalados con flechas, de forma que tienen de límite el plano vertical (en lugar del Saddle Tower o la catenoide horizontal).

tiende a $+\infty$ cuando $a \rightarrow a_{\max}(\varphi)$. Como $\cos(\varphi) < \cos(\frac{\pi}{k})$ y \mathcal{P}_2 es continua, existe algún $a_\varphi \in (0, a_{\max}(\varphi))$ tal que $\mathcal{P}_2(a_\varphi, \varphi, f(a_\varphi, \varphi)) = \cos(\frac{\pi}{k})$, que podría no ser único. Por tanto, deducimos del apartado (c) del Lema 3.23 que $\Sigma_\varphi^* = \Sigma^*(a_\varphi, \varphi, f(a_\varphi, \varphi))$ resuelve los dos problemas de periodos. Vamos a probar que $\Sigma_\varphi = \Sigma(a_\varphi, \varphi, f(a_\varphi, \varphi))$, y por tanto Σ_φ^* tiene curvatura total finita adaptando el argumento de Collin y Rosenberg en [14, Remark 7].

Para esto, consideramos primero el caso $l = \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $p_1(k) \in \ell_3$ de forma que $d(p_1(k), p_3) = k$, y sea $\ell_2(k)$ (resp. $\ell_3(k)$) el segmento geodésico uniendo p_3 y $p_1(k)$ (resp. p_2 y $p_1(k)$). Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq f(a_\varphi, \varphi)$, consideramos el problema de Dirichlet sobre el triángulo de vértices $p_1(k)$, p_2 y p_3 con valores frontera $f(a_\varphi, \varphi)$ en ℓ_1 , n en $\ell_2(k)$ y 0 en $\ell_3(k)$. En estas condiciones hay un único disco mínimo $\Sigma_\varphi^{k,n}$ con estas condiciones de frontera el cual es un grafo sobre el interior del triángulo (en este caso se trata de un problema de Plateau que puede resolverse de forma estándar con la técnica de Meeks-Yau [68]). La superficie $\Sigma_\varphi^{k,n}$ tiene la frontera compuesta por geodésicas y tiene seis ángulos internos, todos ellos iguales a $\frac{\pi}{2}$, luego la fórmula de Gauss-Bonnet nos da una curvatura total igual a $-\pi$ para $\Sigma_\varphi^{k,n}$. Cuando $k \rightarrow \infty$, las superficies $\Sigma_\varphi^{k,n}$ convergen uniformemente sobre compactos (como grafos) al grafo Σ_φ^n sobre Δ con valores frontera $f(a_\varphi, \varphi)$ en ℓ_1 , n en ℓ_2 , y 0 en ℓ_3 (de hecho las funciones que definen los grafos convergen monótonamente por el principio del máximo,

aunque esto no es necesario para el argumento). Por tanto, el Lema de Fatou implica que la curvatura total de Σ_φ^n es al menos $-\pi$. Finalmente, cuando $n \rightarrow \infty$, Σ_φ^n converge a Σ_φ sobre compactos, y el mismo argumento implica que Σ_φ tiene curvatura total finita mayor o igual que $-\pi$ (obsérvese que la curvatura de Gauss de una superficie mínima en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ nunca es positiva por la ecuación de Gauss (1.8)). Si $l < \infty$, el mismo argumento funciona simplemente quedándonos a altura n .

Mediante sucesivas simetrías sobre los planos que contienen las componentes de $\partial\Sigma_\varphi^*$, obtenemos una superficie propia y Alexandrov-embedida $\bar{\Sigma}_\varphi^* \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Describimos a continuación su geometría distinguiendo casos:

- Si $l = \infty$, entonces la curva v_1^* es una geodésica horizontal ideal, y solo necesitamos reflejar una vez respecto del plano horizontal que contiene a v_2^* y v_3^* . Así, $\bar{\Sigma}_\varphi^*$ consiste en $4k$ copias de Σ_φ^* . Por tanto, la curvatura total es mayor o igual que $-4k\pi$, y el Teorema 2.4 asegura que $\bar{\Sigma}_\varphi^*$ es asintótico a cierta poligonal en el infinito. Por el anterior análisis, cada final de $\bar{\Sigma}_\varphi^*$ tiene la frontera asintótica compuesta por cuatro geodésicas ideales: dos horizontales y dos verticales. Teniendo en cuenta que $\bar{\Sigma}_\varphi^*$ tiene género $g = 1$, la Ecuación (2.1) para $m_i = 0$ nos dice que la curvatura total es exactamente $-4k\pi$.

Cada final de $\bar{\Sigma}_\varphi^*$ es asintótico a un plano vertical y está contenido en cuatro copias de Σ_φ^* . Se tiene que el conjunto formado por estas cuatro copias es un bigrafo simétrico, y en particular embebido. Esto se sigue del hecho de que dos de estas cuatro piezas vienen de Σ_φ y su simetría axial respecto a h_2 , que se proyectan sobre un cuadrilátero de \mathbb{H}^2 . Como este cuadrilátero es convexo, la propiedad de Krust 3.15 asegura que la superficie conjugada Σ_φ^* y su copia simétrica a lo largo de h_3^* forman un grafo. Las otras dos copias necesarias para producir el bigrafo deseado son las simétricas con respecto al plano horizontal que contiene a v_2^* y v_3^* . Concluimos que los finales de $\bar{\Sigma}_\varphi^*$ son anillos embebidos.

- Si $l < \infty$, entonces la composición de reflexiones con respecto a los planos horizontales conteniendo v_1^* y v_3^* es una traslación vertical T de longitud $2l$. En este caso, $\bar{\Sigma}_\varphi^*$ induce una superficie en el cociente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por T con curvatura total finita mayor o igual que $-4k\pi$. Esta superficie tiene género $g = 1$ y $2k$ finales (cada final de $\bar{\Sigma}_\varphi^*$ induce dos

finales en el cociente), luego se sigue del teorema principal en [32] que la curvatura total es exactamente $-4k\pi$. Además este resultado también implica que cada final de $\bar{\Sigma}_\varphi^*$ es asintótico a un plano vertical en el cociente. \square

Nota 3.24. Es importante resaltar que no se ha probado la unicidad de la superficie Σ_φ . Esto se podría conseguir si se probara que el segundo periodo $\mathcal{P}_2(a, \varphi, f(a, \varphi))$ es estrictamente creciente en la variable a . Sin embargo una comparación entre estas superficies para diferentes valores de a parece complicada, ya que ni siquiera se sabe si la función f que resuelve el primer problema de periodos es monótona.

Cuando φ se acerca a $\frac{\pi}{k}$, el valor a_φ que resuelve los dos problemas de periodos en la prueba de los Teoremas 3.17 y 3.18 se va a cero, y la superficie Σ_φ^* converge, después de ser reescalada, a un k -noide en \mathbb{R}^3 con género 1 (como en el apartado (b) del Lema 3.22). Además, cuando φ se acerca a $\frac{\pi}{2}$, la superficie Σ_φ converge a un subconjunto abierto del helicoido reglado de \mathbb{R}^3 después de reescalar, y se sigue que la superficie conjugada Σ_φ^* debe converger a una catenoide de \mathbb{R}^3 (la curva h_1^* converge a medio cuello de esta catenoide).

3.2.3. El problema del embebimiento. En la prueba de los Teoremas 3.17 y 3.18, hemos visto que la pieza conjugada Σ_φ^* es un grafo sobre el dominio $\Delta^* \subset \mathbb{H}^2$. Sin embargo, podría ocurrir que al reflejar Σ_φ^* sobre el plano vertical que contiene a h_1^* , la superficie resultante ya no fuera embebida ya que la curva reflejada de v_3^* podría intersectar a la curva v_3^* original. Obsérvese que, como la familia de ejemplos con k finales converge a un k -noide mínimo de género 1 en \mathbb{R}^3 tras reescalar, véase también [59], deben existir ejemplos no embebidos de k -noides con género 1 en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ para todo $k \geq 3$.

Podemos garantizar el embebimiento si la superficie extendida por reflexión sobre el plano vertical que contiene a h_1^* es embebida. La propiedad de Krust 3.15 nos asegura que esto es así si la pieza inicial Σ_φ extendida mediante simetría axial respecto la geodésica h_1 sigue siendo un grafo sobre un dominio convexo, o equivalentemente si el ángulo de Δ en p_3 es como mucho $\frac{\pi}{2}$. Usando trigonometría hiperbólica se tiene que esto es equivalente a $a \geq a_{\text{emb}}(\varphi)$, donde

$$a_{\text{emb}}(\varphi) = \text{arcsinh}(\tanh(l) \cot(\varphi)), \quad (3.21)$$

entendiendo que $\tanh(l) = 1$ si $l = \infty$. Por tanto, las superficies de los Teoremas 3.17 y 3.18 serían propiamente embebidas si fuésemos capaces de asegurar que $a_{\text{emb}}(\varphi) \leq a_\varphi < a_{\text{max}}(\varphi)$. Observemos que, si $l = \infty$, entonces $a_{\text{emb}}(\varphi) < a_{\text{max}}(\varphi)$ para todo $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$; si $l < \infty$, existen $\varphi_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $a_{\text{emb}}(\varphi) < a_{\text{max}}(\varphi)$ si y solo si $\varphi \in (\varphi_1, \frac{\pi}{2})$, véase la Figura 3.9.

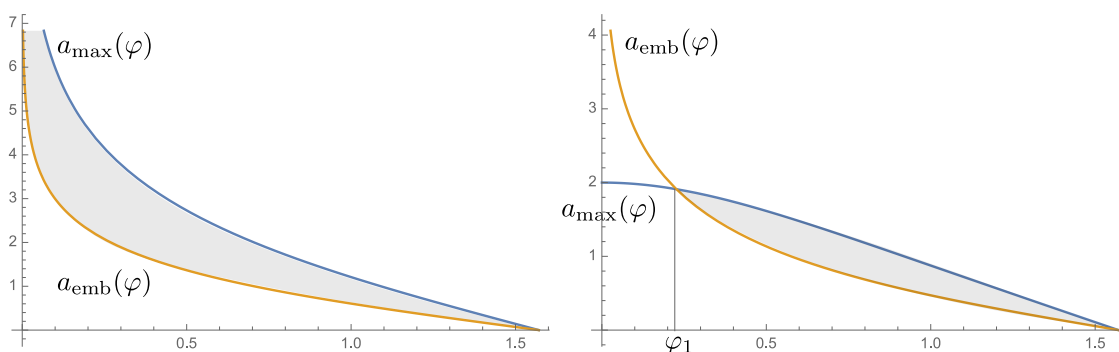


Figura 3.9: Gráficas de las funciones $\varphi \mapsto a_{\text{max}}(\varphi)$ y $\varphi \mapsto a_{\text{emb}}(\varphi)$ con $l = \infty$ (izquierda) y $l = 1$ (derecha). En las regiones sombreadas, el embebimiento está garantizado por la propiedad de Krust.

Sin embargo, por un lado, parece difícil saber si el valor de a_φ que resuelve los dos problemas de periodos queda en este intervalo; por otro lado el embebimiento puede ocurrir incluso cuando $a \geq a_{\text{emb}}(\varphi)$ no se cumpla. Se espera que haya siempre valores de (a, φ) produciendo ejemplos embebidos para todos los valores de $k \geq 3$, y parece razonable que estos aparezcan cuando φ está cerca de $\frac{\pi}{2}$.

3.2.4. Ejemplos con infinitos finales. El análisis de los problemas de periodos nos permite encontrar superficies con infinitos finales que son invariantes por un grupo discreto de traslaciones parabólicas o hiperbólicas, que llamaremos ∞ -noides parabólicos o ∞ -noides hiperbólicos, respectivamente. Estas superficies tienen infinitos finales, y podemos garantizar el embebimiento de algunas de ellas en el caso hiperbólico. El siguiente resultado es un caso particular de la construcción para $l = \infty$ (la prueba puede ser fácilmente adaptada para el caso $l < \infty$)

Teorema 3.25. *Existe una familia 2-paramétrica (resp. 1 paramétrica) de superficies mínimas propiamente embebidas (resp. Alexandrov-embebidas) con género 0 e infinitos finales, invariante por un grupo discreto de traslaciones hiperbólicas (resp. parabólicas). Cada final es embebido, asintótico a un plano vertical, y tiene curvatura total finita.*

Demostración. . El Lema 3.23 y la continuidad de \mathcal{P}_2 implican que, para todo $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, hay valores de $a \in (0, a_{\max}(\varphi))$ tal que $\mathcal{P}_2(a, \varphi, f(a, \varphi))$ es igual a 1 o mayor que 1 (de hecho \mathcal{P}_2 toma cualquier valor mayor o igual que 1). Vamos a analizar estos dos casos:

- Si $\mathcal{P}_2(a, \varphi, f(a, \varphi)) = 1$, entonces h_1^* y h_3^* están contenidos en planos verticales sobre geodésicas asintóticas de \mathbb{H}^2 por el apartado (d) del Lema 3.23. Esto significa que la proyección de $\Sigma^*(a, \varphi, f(a, \varphi))$ está contenida en la región entre estas dos geodésicas, véase figura 3.10 (centro). Las simetrías especulares respecto a los correspondientes planos verticales nos dan un grupo de isometrías que fijan el punto común del infinito. Este grupo contiene a un grupo discreto de traslaciones parabólicas, y nos da la familia 1-paramétrica de ∞ -noides parabólicos, véase la Figura 3.10 (centro).
- El caso $\mathcal{P}_2(a, \varphi, f(a, \varphi)) > 1$ ocurre en una región abierta de Ω , y nos da la familia 2-paramétrica de ∞ -noides hiperbólicos. En este caso las dos geodésicas que contienen las proyecciones de h_1^* y h_3^* no se intersecan y sucesivas reflexiones sobre los planos verticales asociados conforman un grupo de isometrías conteniendo un grupo discreto de traslaciones hiperbólicas, véase Figura 3.10 (derecha).

Repetiendo el mismo argumento que en la prueba de los Teoremas 3.17 y 3.18 (usando la descripción de superficies mínimas periódicas con curvatura total finita en [32]) se muestra que cada final de la superficie es embebido y tiene curvatura total finita. Además, las superficies son Alexandrov-embebidas. Más aún, en el caso de los ∞ -noides hiperbólicos, podemos elegir $a \geq a_{\text{emb}}(\varphi)$, lo que garantiza que para estos casos la superficie reflejada es propiamente embebida. En el caso de los ∞ -noides parabólicos no podemos garantizar el embebimiento de la superficie. \square

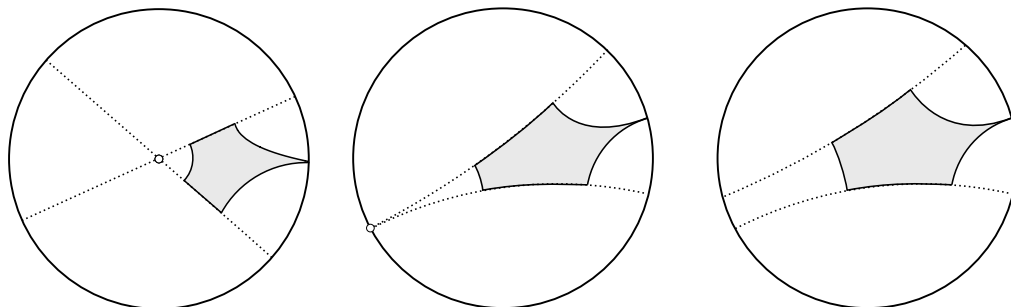


Figura 3.10: El dominio fundamental de un 3-noide (izquierda), ∞ -noide parabólico (centro), y un ∞ -noide hiperbólico (derecha). Las curvas punteadas representan a las geodesics conteniendo las proyecciones de h_1^* y h_3^* .

Nota 3.26. Aunque $\mathcal{P}_2(a, \varphi_0, f(a, \varphi_0))$ toma todos los valores entre $\cos(\varphi_0)$ y $+\infty$ esto no parece suficiente para asegurar que para cualquier traslación hiperbólica haya un ejemplo en la familia de ∞ -noides hiperbólicos invariante por dicha traslación hiperbólica, ya que no es claro como depende \mathcal{P}_2 del parámetro a ni tampoco la posición relativa de los planos verticales que contienen a las curvas h_1^* y h_3^* cuando estos no se cortan.

Nota 3.27. Esta construcción se adapta fácilmente para el caso $l < \infty$ obteniendo en este caso superficies doblemente periódicas por una traslación hiperbólica (parabólica) y una traslación vertical de longitud l . Todos estos ejemplos tienen curvatura total finita en el cociente por una traslación hiperbólica (parabólica) y una traslación vertical debido al teorema principal de [32].

3.3. Construcción de H -superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y la propiedad de Krust.

En esta sección vamos a tratar con una construcción conjugada para el caso $0 \leq H \leq 1/2$. Resumimos la construcción con el siguiente teorema.

Teorema 3.28. *Dados $H \in [0, \frac{1}{2}]$ y $k \geq 2$ un número entero, hay una familia continua 2-paramétrica de H -superficies propias y Alexandrov-embebidas $\bar{\Sigma}_{a,b}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, siendo los parámetros $a, b \in (0, \infty]$ no ambos igual a ∞ . Estas superficies son invariantes por simetrías especulares respecto de un plano*

horizontal y respecto una familia de k planos equiangulares conteniendo una geodésica vertical común.

- (a) Si $a, b < \infty$, entonces la superficie $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ se llamará Saddle Tower. Es simplemente periódica en la dirección vertical, tiene género 0 y $2k$ finales en el cociente $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por una traslación vertical, siendo cada uno de ellos asintótico en el cociente a la mitad de un H -cilindro.
- (b) Si $a = \infty$ y $b < \infty$, entonces la $\bar{\Sigma}_{\infty,b}^*$ se llamará (H, k) -noide (o H -catenoide si $k = 2$) y tiene género 0 y k finales. Si $H \in [0, \frac{1}{2})$, entonces cada final es embebido y asintótico a un H -cilindro vertical (contenido en su lado cóncavo). Si $H = \frac{1}{2}$, entonces cada final es tangente a la frontera asintótica $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a lo largo de una geodésica vertical ideal.
- (c) Si $a < \infty$ y $b = \infty$, entonces la superficie $\bar{\Sigma}_{a,\infty}^*$ se llamará (H, k) -nodoide (o H -catenodoide si $k = 2$) y tiene género 0 y k finales. Si $H \in [0, \frac{1}{2})$, entonces cada final es embebido y asintótico a un H -cilindro vertical (contenido en su lado convexo). Si $H = \frac{1}{2}$, entonces el correspondiente $\frac{1}{2}$ -cilindro desaparece en infinito.

Para el caso $H = 0$ los ejemplos coinciden con los Saddle Towers y k -noides mínimos simétricos de [70, 81, 82] y no hay distinción entre el caso $a = \infty$ y $b = \infty$ ya que $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ y $\bar{\Sigma}_{b,a}^*$ son congruentes. El caso $0 < H \leq \frac{1}{2}$ con $a = \infty$ y $b < \infty$ coincide con los k -noides construidos en [78] y en [20] cuando $k = 2$. Para esta construcción usaremos los resultados desarrollados en la Sección 3.1 mostrando el papel crucial que juega la orientación en el caso $H > 0$. Esto nos permitirá dar una descripción más detallada de los k -noides dados en [78]. Además de la construcción analizaremos, en detalle el embebimiento de estas superficies a lo largo de toda la sección y concluiremos que, dentro de esta familia, hay ejemplos que prueban que no se cumple la propiedad de Krust 3.15 para $0 < H \leq 1/2$. También daremos una construcción similar para $H > 1/2$ que mostrará que la propiedad tampoco se extiende a este caso en general.

Vamos a fijar $0 < H \leq 1/2$ y k un número entero en lo que sigue. Consideraremos los grafos mínimos $\Sigma_{a,b} \subset \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ dados por los Lemas 1.15 y 1.19 para $0 < H < 1/2$ y $H = 1/2$, respectivamente, como solución al problema de Jenkins-Serrin tratado en la sección 1.3.1.

Las componentes de la frontera de $\Sigma_{a,b}$ son $2k$ geodésicas verticales completas $\Gamma_i = \Pi^{-1}(p_i)$ para $i \in \{1, \dots, 2k\}$, más $2k$ geodésicas ideales completas en $\mathbb{H}^2(4H^2 - 1) \times \{\pm\infty\}$. Las curvas Γ_i deben ser entendidas como geodésicas ideales verticales si $a = \infty$ o $b = \infty$, y serán usadas heurísticamente si $H = \frac{1}{2}$ ya que en este caso no tenemos una frontera asintótica de \mathbb{R}^2 bien definida. Nuestro objetivo es describir la H -superficie conjugada $\Sigma_{a,b}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Aunque hay algunas diferencias entre los casos que vamos a tratar, vamos primero a explicar las características comunes. Como la función ángulo se preserva mediante la conjugación, sabemos que $\Sigma_{a,b}^*$ es un multigrafo sobre un dominio posiblemente no embebido $\Omega^* \subset \mathbb{H}^2$. Además, $\Sigma_{a,b}$ es invariante bajo las reflexiones respecto de las geodésicas $\overline{q_i q_{k+i}}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Por tanto, $\Sigma_{a,b}^*$ es invariante respecto de las reflexiones especulares con respecto a k planos verticales que se intersecan en una geodésica vertical común a todos los planos, que podemos suponer como el eje z en el modelo del cilindro. El Corolario 3.14 muestra que las componentes de la frontera de $\Sigma_{a,b}^*$ son $2k$ curvas horizontales $\Gamma_1^*, \dots, \Gamma_{2k}^*$ (posiblemente ideales) junto con $2k$ segmentos ideales verticales uniendo los extremos de Γ_i^* y Γ_{i+1}^* para $i \in \{1, \dots, 2k\}$, ver también la nota 3.13.

1. Si Γ_i no es una geodésica ideal, sea θ_i el ángulo de rotación a lo largo de Γ_i definido por (3.9). Se tiene que este cumple que $\theta'_i < 0$ (resp. $\theta'_i > 0$) si i es impar (resp. par), ver Figura 3.11. Recordemos que el vector normal N de $\Sigma_{a,b}$ está elegido de forma que la función ángulo $\nu = \langle N, \xi \rangle$ es positiva. La ecuación (3.10) nos da la desigualdad $\kappa_g > 2H$ (resp. $\kappa_g < 2H$) para la curvatura geodésica de Γ_i^* como curva en el plano horizontal correspondiente con respecto al normal unitario N^* de $\Sigma_{a,b}^*$. El Teorema 3.10 muestra que N^* apunta hacia el exterior (resp. interior) de $\Omega^* \subset \mathbb{H}^2$ si i es impar (resp. par).
2. Si Γ_i es ideal, podemos razonar considerando una sucesión de grafos sobre triángulos finitos T_{a_n, b_n} , con $a_n, b_n < \infty$, convergiendo a $T_{a,b}$. En el límite, θ'_i converge uniformemente a cero, y la ecuación (3.10) nos da que $\kappa_g = 2H$ con respecto a N^* . Como límite de curvas en las hipótesis del apartado (1), se tiene que N^* apunta al exterior (resp. interior) del dominio Ω^* a lo largo de Γ_i^* si i es impar (resp. par). Por tanto, la curvatura geodésica de Γ_i^* con respecto a Ω^* es $-2H$ (resp. $2H$) si i es impar (resp. par).

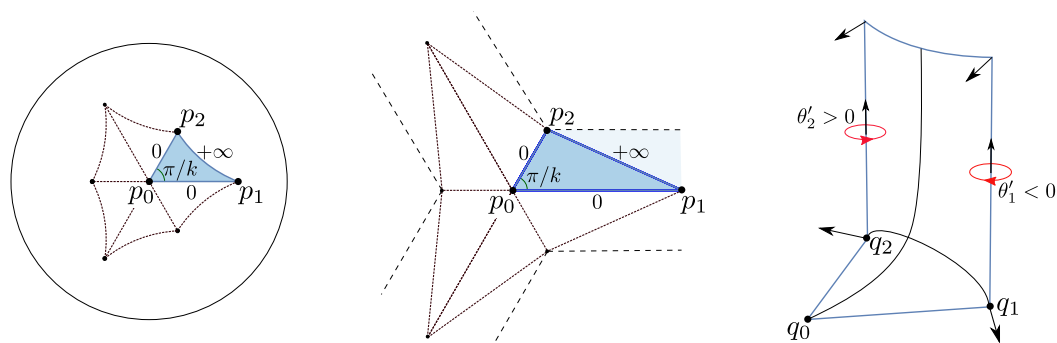


Figura 3.11: El dominio $\Omega_{a,b} \subset \mathbb{H}^2(4H^2 - 1)$ con $a, b \in (0, \infty)$ esta representado a la izquierda (caso de $\kappa < 0$) y en el centro ($\kappa = 0$) para $k = 3$. El triángulo $T_{a,b}$ es la región sombreada y la banda límite aparece en color mas claro. A la derecha, tenemos una figura esquemática de $\Sigma_{a,b}$ y la dirección de rotación del normal a lo largo de Γ_1 y Γ_2 . Recordemos que $q_i = (p_i, 0) \in \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$

Con el objetivo de entender la dependencia respecto de los parámetros a y b , consideraremos la función $\rho = \rho(a, b)$ (resp. $d = d(a, b)$), definida como la distancia en \mathbb{H}^2 desde el centro $\Pi(q_0^*)$ de Ω^* a las curvas $\Pi(\Gamma_{2i-1}^*)$ (resp. $\Pi(\Gamma_{2i}^*)$) en la proyección de la frontera (posiblemente asíntota) de $\Sigma_{a,b}^*$. Por la simetría de la superficie $\Sigma_{a,b}^*$, estas definiciones no dependen de $i \in \{1, \dots, k\}$. Vamos a calcular $\rho_\infty = \rho(\infty, \infty)$ y $d_\infty = d(\infty, \infty)$:

- Si $0 < H < \frac{1}{2}$, entonces $\Sigma_{\infty, \infty}$ es un grafo mínimo de Scherk completo sobre un polígono geodésico regular ideal de $2k$ lados, cuya superficie conjugada es el H -grafo de Scherk en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ sobre el dominio $\Omega_{\infty, \infty}^*$ bordeado por k curvas de curvatura geodésica $2H$ y k curvas de curvatura geodésica $-2H$ (con respecto a Ω^*), véase [52, Corollary 1]. Por tanto ρ_∞ (resp. d_∞) es la distancia (finita) de las curvas de curvatura geodésica $-2H$ (resp. $2H$) al centro de $\Omega_{\infty, \infty}^*$.
- Si $H = \frac{1}{2}$, entonces ya hemos discutido en la nota 1.20 que la superficie límite $\Sigma_{\infty, \infty}$ es un grafo entero, y por tanto $\Sigma_{\infty, \infty}^*$ es un $\frac{1}{2}$ -grafo entero, véase [37, Theorem 1.2]. Esto nos da el valor $\rho_\infty = d_\infty = +\infty$.

Lema 3.29. *La función d es estrictamente creciente en las dos variables*

$a, b \in (0, \infty)$.

(a) Si $0 < H < \frac{1}{2}$, entonces d está acotada. Además, las funciones $a \mapsto d(a, \infty)$ y $b \mapsto d(\infty, b)$ son estrictamente crecientes y varían desde 0 hasta d_∞ .

(b) Si $H = \frac{1}{2}$, entonces $d(a, \infty) = \rho(\infty, b) = \infty$ para todo $a, b \in (0, \infty)$.

Demostración. Se puede expresar $d(a, b) = \int_{\gamma_{a,b}} \nu_{a,b}$, donde $\gamma_{a,b} \subset \Sigma_{a,b}$ denota la geodésica horizontal uniendo q_0 y q_2 y $\nu_{a,b}$ es la función ángulo de $\Sigma_{a,b}$. Nótese que $\nu_{a,b}$ no toma el valor cero en $\gamma_{a,b}$ por el principio del máximo en la frontera aplicado al cilindro vertical $\Pi^{-1}(\overline{p_0 p_2})$ y la región de $\Sigma_{a,b}$ que se proyecta en $T_{a,b}$. Tampoco toma el valor 1 excepto en q_0 por el Lema 3.31 que probaremos más adelante.

Si $0 < a_1 < a_2 \leq \infty$, entonces tenemos que $\Sigma_{a_1,b}$ queda por debajo de $\Sigma_{a_2,b}$ como grafo sobre $T_{a_1,b}$. Por el principio del máximo en la frontera tenemos la desigualdad estricta $0 < \nu_{a_1,b} < \nu_{a_2,b} < 1$ en $\gamma_{a_1,b} - \{q_0\}$. Como $\gamma_{a_1,b} \subseteq \gamma_{a_2,b}$ deducimos que

$$d(a_1, b) = \int_{\gamma_{a_1,b}} \nu_{a_1,b} < \int_{\gamma_{a_1,b}} \nu_{a_2,b} \leq \int_{\gamma_{a_2,b}} \nu_{a_2,b} = d(a_2, b).$$

Un argumento similar muestra que $b \mapsto d(a, b)$ es estrictamente creciente. Si $0 < H < \frac{1}{2}$, entonces usando el grafo mínimo de Scherk como barrera por encima, se tiene que $d(a, b) \leq d_\infty < +\infty$ para todo $a, b \in (0, \infty]$, luego la monotonía se extiende para los casos $a = \infty$ o $b = \infty$. La última afirmación del apartado (a) se sigue de la continuidad.

Supongamos ahora que $H = \frac{1}{2}$. Si $k = 2$, entonces $\Sigma_{a,\infty}$ y $\Sigma_{\infty,b}$ pertenecen a la familia de superficies \mathcal{H}_μ con $|\mu| > \frac{1}{2}$ descrita en la Sección 1.3.1. De la ecuación (1.33), se tiene que la integral de la función ángulo de \mathcal{H}_μ a lo largo de el eje x viene dada por

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{1 + \lambda^2 s^2}} = \infty,$$

para cierta constante λ dependiendo de μ , y por tanto se tiene que $d(a, \infty) = \rho(\infty, b) = \infty$. Si $k \geq 3$ y $a = \infty$ (el caso $b = \infty$ es análogo), entonces $\Sigma_{\infty,b}$ queda entre dos superficies de la familia \mathcal{H}_μ . La barrera por abajo (resp. la barrera por arriba) es un grafo sobre la banda $[b \cos \frac{\pi}{k}, +\infty) \times [0, b \sin \frac{\pi}{k}]$ (resp. $[0, +\infty) \times [0, b \sin \frac{\pi}{k}]$) con valores frontera $+\infty$ sobre $[b \cos \frac{\pi}{k}, +\infty) \times \{b \sin \frac{\pi}{k}\}$

(resp. $[0, +\infty) \times \{b \sin \frac{\pi}{k}\}$) y 0 en otro caso. Entonces el principio del máximo en la frontera implica que la función ángulo de $\Sigma_{\infty, b}$ está acotada entre dos funciones cuya integral es divergente a lo largo del eje x . y por lo tanto esta también es divergente y concluimos que $\rho(\infty, b) = \infty$. \square

- Si $H = \frac{1}{2}$, la igualdad $\rho(\infty, b) = \infty$ (resp. $d(a, \infty) = \infty$) implica que las curvas Γ_{2i-1}^* (resp. Γ_{2i}^*) desaparecen en $\partial_{\infty} \mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$ en el límite de $\Sigma_{a,b}^*$ cuando $a \rightarrow \infty$ (resp. $b \rightarrow \infty$). Observemos que el Corolario 3.14 no se puede aplicar ya que Γ_{2i-1}^* (resp. Γ_{2i}^*) no es en realidad una geodésica vertical ideal. Además, si ocurriera que $\rho(\infty, b) < \infty$ o $d(a, \infty) < \infty$, entonces estas superficies contradirían el Teorema de semi-espacio para $\frac{1}{2}$ -superficies de Hauswirth, Rosenberg y Spruck en [37].
- Si $0 < H < \frac{1}{2}$, entonces $d \in (0, d_{\infty})$, se puede tomar como parámetro de la familia de (H, k) -noides y (H, k) -nodoides. Este parámetro es también válido en el caso mínimo, siendo igual a la distancia de $\{0\} \times \mathbb{R}$ a los planos mínimos asintóticos, y que varía desde 0 hasta la apotema de un polígono geodésico ideal de $2k$ -lados. Esto fue probado por Martín, Mazzeo y Rodríguez para las catenoides mínimas horizontales en [58].

3.3.1. Construcción de los Saddle Towers. Vamos a comenzar analizando el caso $a, b < \infty$ en el cual ninguna de las curvas $\Gamma_1^*, \dots, \Gamma_{2k}^*$ es ideal. La distancia entre los planos horizontales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que contienen a las curvas Γ_i^* y Γ_{i+1}^* , para cada i , es la distancia hiperbólica ℓ entre p_1 y p_2 en $\mathbb{H}^2(4H^2 - 1)$, dada por (1.28). Teniendo en cuenta que la función ángulo $\nu = \langle N^*, \xi \rangle$ es positiva y que N^* apunta al exterior (resp. interior) del dominio Ω^* a lo largo de Γ_i^* si i es impar (resp. par), podemos asumir, después de aplicar una traslación vertical, que $\Gamma_{2i}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$ y $\Gamma_{2i-1}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{-\ell\}$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Después de sucesivas reflexiones de $\Sigma_{a,b}^*$ sobre los planos horizontales $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ y $\mathbb{H}^2 \times \{-\ell\}$ se obtiene una H -superficie completa Alexandrov-embebida $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ que es invariante por una traslación vertical de longitud 2ℓ , lo cual prueba el apartado (a) del Teorema 3.28.

Nota 3.30. Para cada $\ell > 0$, la Ecuación (1.28) nos dice que hay una curva continua de parámetros (a, b) para la cual la diferencia de alturas de las

componentes de la frontera de $\Sigma_{a,b}$ es ℓ . Los extremos de esta curva corresponden a los parámetros $(a, b) = (\ell, 0)$ y $(a, b) = (0, \ell)$, no incluidos en la familia. Se puede ver que después de un reescalamiento en el métrica manteniendo el punto q_0 fijo, el límite de $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ cuando $a \rightarrow 0$ para un $b > 0$ fijo (o $b \rightarrow 0$ para $a > 0$ fijo) es un k -noide simétrico mínimo de \mathbb{R}^3 , el cual no es embebido salvo para el caso $k = 2$, en el que se recupera la catenoide. Esto revela que para todo $k \geq 3$ existen ejemplos no embebidos en la familia $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$. Nótese que el reescalamiento y la conjugación conmutan, ya que reescalar la métrica de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ por un factor λ^2 equivale a la transformación de los parámetros $(\kappa, \tau, H) \mapsto (\lambda^2\kappa, \lambda\tau, \lambda H)$.

En el resto de la sección vamos a discutir algunas cuestiones relacionadas con el embebimiento de los Saddle Towers que los diferencian del caso mínimo. Por el principio del máximo con respecto a la foliación por planos horizontales viniendo desde arriba, se sigue que $\Sigma_{a,b}^* \subset \mathbb{H}^2 \times (-\infty, 0)$ mientras que $\partial\Sigma_{a,b}^*$ se queda a alturas 0 y $-\ell$. Por tanto, tenemos que $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ es embebida si y solo si $\Sigma_{a,b}^*$ es embebida y se queda en la banda $\mathbb{H}^2 \times (-\ell, 0)$. Por un lado, $\Sigma_{a,b}^*$ es embebida si se proyecta inyectivamente sobre \mathbb{H}^2 . Debido a las simetrías de la superficie y que está debe proyectarse sobre un dominio (no necesariamente embebido), todas las componentes Γ_i^* de la frontera son embebidas cuando la superficie conjugada R^* de la pieza fundamental R proyectándose sobre el triángulo $T_{a,b}$, está contenida en un sector circular de ángulo $\frac{\pi}{k}$. Por tanto, $\Sigma_{a,b}^*$ es embebida si y solo si todas las componentes Γ_i^* son embebidas.

Por un lado el Teorema 3.10 garantiza el embebimiento de las curvas Γ_{2i}^* cuando el ángulo interior de $\Omega_{a,b}$ en p_2 es como mucho π . En la Sección 3.3.2, veremos que en el caso límite $a = \infty$ las curvas Γ_{2i-1}^* (en $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$) son embebidas. Como la curvatura geodésica de Γ_{2i-1}^* está acotada y por encima de $2H$ por la Ecuación (3.10), la Proposición 3.4 asegura que Γ_{2i-1}^* es embebida cuando a es suficientemente grande. Por otro lado, el Lema 3.31 implica que $\Sigma_{a,b}^*$ se queda en la banda $\mathbb{H}^2 \times (-\ell, 0)$ cuando $k = 2$. También se queda en la banda en el caso de $H = 0$ (el principio del máximo se aplica también con planos horizontales viniendo desde abajo, véase [70, 81, 82]). Sin embargo, esto no es cierto en general para todo $H > 0$ si $k \geq 3$, como veremos a continuación.

Lema 3.31. *Fijados $H \in (0, \frac{1}{2}]$ y $a, b \in (0, \infty)$, sea ν la función ángulo de $\Sigma_{a,b} \subset \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$, que asumiremos que es positiva en el interior de $\Sigma_{a,b}$.*

- (a) Si $k = 2$, entonces ν solo toma el valor 1 en q_0 .
- (b) Si $k \geq 3$, entonces ν solo toma el valor 1 en q_0 y en k puntos $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k$ tales que $\hat{q}_i \in \overline{q_0 q_{2i-1}}$ para cada i .

Demostración. Por la simetría de $\Sigma_{a,b}$, vamos a restringirnos a la región cerrada fundamental $R \subset \Sigma_{a,b}$ que se proyecta en $T_{a,b}$. Se tiene que $\nu(q_0) = 1$ ya que $\Sigma_{a,b}$ contiene al menos dos geodésicas horizontales pasando por q_0 . Sea $q \in R$ un punto tal que $\nu(q) = 1$, $q \neq q_0$, y vamos a distinguir tres casos.

En primer lugar, supongamos que $\Pi(q)$ queda en el interior de $T_{a,b}$ y vamos a llegar a una contradicción considerando \mathcal{U}_q , el paraguas centrado en q . Como \mathcal{U}_q es tangente a R en q entonces $\mathcal{U}_q \cap R$, localmente alrededor de q , consiste en un sistema equiangular de curvas (al menos dos de ellas) pasando por q . Por el principio del máximo, $\mathcal{U}_q \cap R$ no pueden encerrar un dominio compacto en el interior de \mathcal{U}_q . Además, como \mathcal{U}_q está contenido en una banda horizontal (tiene altura acotada), una curva de la intersección no puede llegar a un punto que se proyecta sobre un punto interior de $\overline{p_1 p_2}$, donde R toma el valor infinito. Como \mathcal{U}_q es un grafo entero, si dos curvas de la intersección llegaran a Γ_1 o Γ_2 , entonces deberían compartir los extremos y bordearían un dominio compacto. Además, si dos de estas curvas llegan a Γ_1 (o Γ_2), estas deben compartir extremos ya que \mathcal{U}_q es un grafo entero y encerrarían de nuevo un dominio compacto contenido en \mathcal{U}_q .

Por tanto hay como mucho dos extremos en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, y por tanto al menos dos extremos x_1, x_2 de las curvas de la intersección caen en $\overline{q_0 q_1} \cup \overline{q_0 q_2} - \{q_1, q_2\}$. Las geodésicas horizontales (contenidas en \mathcal{U}_q) desde q a x_1 y x_2 , junto con un subconjunto de $\overline{q_0 q_1} \cup \overline{q_0 q_2}$, forman un triángulo geodésico o un cuadrilátero geodésico proyectándose inyectivamente sobre $\mathbb{H}^2(4H^2 - 1)$, que contradice la propiedad de la holonomía de las curvas ya que la curvatura del fibrado no es cero [50, Proposition 3.3], como se vio en la Sección 1.1.

En segundo lugar, supondremos que $q \in \overline{q_0 q_2}$ y llegaremos a una contradicción usando de nuevo el paraguas \mathcal{U}_q . Debido a que \mathcal{U}_q y $\Sigma_{a,b}$ son tangentes en q , existe al menos una curva $\mathcal{U}_q \cap R$ que parte de q y se proyecta (localmente alrededor de q) en el interior de $T_{a,b}$. Como no pueden encerrar regiones compactas en \mathcal{U}_q o polígonos geodésicos cerrados como en el primer caso, esta curva debe tener un extremo en $\partial R \cap \Gamma_1 = \{(p_1, t) : t \geq 0\}$. Sin embargo, esto no es posible ya que el grafo \mathcal{U}_q (y por tanto α , la geodésica horizontal uniendo q y Γ_1) interseca a Γ_1 en un punto cuya tercera coor-

denada es negativa. Esto es una consecuencia de nuevo de la mencionada propiedad de la holonomía ([50, Proposition 3.3]), debido a que la poligonal horizontal $\overline{q_1 q_0} \cup \overline{q_0, q} \cup \alpha$ se proyecta en un triángulo de $\mathbb{H}^2(4H^2 - 1)$ y produce un incremento positivo de la tercera coordenada cuando nos movemos en esta dejando el interior de triángulo a la izquierda.

En tercer lugar, supongamos que $q \in \overline{q_0 q_1}$. Vamos a considerar la superficie invariante \mathcal{I} con eje en $\overline{q_0 q_1}$ descrita en el Ejemplo 1.8. Si $k = 2$ entonces, ambas R e \mathcal{I} contienen a $\overline{q_0 q_2}$ y R queda por encima de \mathcal{I} en $T_{a,b}$. Como la función ángulo de \mathcal{I} es constante 1 a lo largo de $\overline{q_0 q_1}$, el principio del máximo en la frontera asegura que la función ángulo de R no puede ser igual a 1 en ningún punto interior de $\overline{q_0 q_1}$, lo que concluye la prueba del apartado (a).

Para el caso $k \geq 3$, sea η un vector horizontal unitario a lo largo de $\overline{q_0 q_1}$ apuntando hacia el exterior de $T_{a,b}$ y consideramos la función diferenciable $\varphi = \langle N, \eta \rangle$ en $\overline{q_0 q_1}$ i.e., el coseno del ángulo entre N y η . Es fácil darse cuenta que $\varphi(q_0) = 0$ y $\lim_{q \rightarrow q_1} \varphi(q) = 1$.

- Primero, probaremos que $\varphi < 0$ en un entorno de q_0 . Por tanto, por la continuidad de φ se tiene que hay un punto interior \hat{q} de $\overline{q_0 q_1}$ con $\varphi(\hat{q}) = 0$, lo que es lo mismo que $\nu(\hat{q}) = 1$.

Se tiene que $\Sigma_{a,b}$, la superficie invariante \mathcal{I} y el paraguas \mathcal{U}_0 centrado en el origen son tres grafos mínimos tangentes en q_0 . Por un lado, $\Sigma_{a,b} \cap \mathcal{U}_0$ contiene al menos k geodésicas horizontales $\overline{q_i q_{k+i}}$, por lo que todas las derivadas de $\Sigma_{a,b}$ y \mathcal{U}_0 (como grafos) coinciden en p_0 hasta al menos el orden $k - 1$. Por otro lado, la segunda derivada de \mathcal{I} y \mathcal{U}_0 no coinciden en p_0 ya que $\mathcal{I} \cap \mathcal{U}_0$ consiste en solo dos curvas cortándose en q_0 . Como $k \geq 3$, esto implica que $\Sigma_{a,b}$ y \mathcal{I} coinciden en p_0 solo hasta la primera derivada, y por tanto $\Sigma_{a,b} \cap \mathcal{I}$ consiste en dos curvas ortogonales pasando por q_0 (en un entorno de q_0). Esto permite la comparación entre \mathcal{I} y R a lo largo de su frontera común $\overline{q_0 q_1}$ cerca de q_0 usando el principio del máximo en la frontera. Como \mathcal{I} tiene función ángulo constante igual a 1 a lo largo de $\overline{q_0 q_1}$, deducimos que $\varphi(q) < 0$ cuando $q \in \overline{q_0 q_1}$ está cerca de q_0 .

- Vamos a probar que el punto \hat{q} es único. Supongamos por reducción al absurdo que hay dos puntos distintos $\hat{q}, \hat{q}' \in \overline{q_0 q_1} - \{q_0\}$ con $\nu(\hat{q}) = \nu(\hat{q}') = 1$. Por tanto, hay dos curvas en $\mathcal{I} \cap R$ proyectándose en el

interior de $T_{a,b}$ y partiendo de \hat{q} y \hat{q}' , respectivamente. Estas curvas no pueden encerrar regiones compactas, por tanto deben alcanzar la geodésica vertical Γ_2 . Como \mathcal{I} es un grafo entero, ambas deben tener el mismo extremo en Γ_2 , produciendo así una región compacta, lo cual es una contradicción. \square

Nota 3.32. Los puntos de $\Sigma_{a,b}^*$ con $\nu = 1$ son los puntos críticos de la función altura h dada por la proyección sobre el factor \mathbb{R} , lo que se sigue de la identidad $\|\nabla h\|^2 = 1 - \nu^2$, véase las ecuaciones (3.6). El punto conjugado q_0^* de q_0 es un mínimo local de h si $k \geq 3$ o un punto de silla si $k = 2$, véase el Lema 3.31. En el caso $k \geq 3$, los puntos conjugados $\hat{q}_1^*, \dots, \hat{q}_k^*$ de los puntos $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k$ dados por el Lema 3.31 son puntos de silla de h . Esto difiere con el caso $H = 0$, donde el único punto crítico para h es q_0 para todo $k \geq 2$, véase [70, 81].

Proposición 3.33. Sea $0 < H \leq \frac{1}{2}$.

- (a) Si $k = 2$, el interior de $\Sigma_{a,b}^*$ queda en la banda de $\mathbb{H}^2 \times (-\ell, 0)$ para todo $a, b \in (0, \infty)$.
- (b) Para cada $\ell > 0$, existen (infinitos) valores de $k \geq 3$ y $a, b \in (0, \infty)$ satisfaciendo (1.28) para los que $\Sigma_{a,b}^* \not\subset \mathbb{H}^2 \times [-\ell, 0]$.

Demostración. Sea $k = 2$ y supongamos por reducción al absurdo que el interior de $\Sigma_{a,b}^*$ se escapa de la banda abierta $\mathbb{H}^2 \times (-\ell, 0)$. Como $\partial\Sigma_{a,b}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{-\ell, 0\}$ y $\Sigma_{a,b}^* \subset \mathbb{H}^2 \times (-\infty, 0)$, se tiene que hay algún punto interior $q^* \in \Sigma_{a,b}^*$ donde la función altura h alcanza un mínimo local. Por el Lema 3.31, la única posibilidad es que ese punto sea q_0^* y el mínimo sea global. Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow \overline{q_0 q_1} \subset \Sigma_{a,b}$ una parametrización con $\gamma(0) = q_0$ y $\gamma(a) = q_1$ y sea γ^* su curva conjugada en $\Sigma_{a,b}^*$. Entonces $h \circ \gamma^* : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ varía desde el mínimo global hasta $-\ell$, y su derivada es negativa en un entorno de a (ya que q_1^* está en Γ_1^* , donde el normal N^* apunta hacia el exterior de Ω^*). Esto daría la existencia de otro punto crítico de $h \circ \gamma^*$ en $(0, a)$. Como $\Sigma_{a,b}^*$ es ortogonal al plano vertical que contiene a γ^* , deducimos que el punto crítico de $h \circ \gamma^*$ es un punto crítico interior de h , lo cual es una contradicción.

Para el apartado (b), para cada $n \in \mathbb{N}$ sea Σ_n la superficie mínima Σ_{a_n, b_n} tomando $k = n$ y ciertos $a_n, b_n \in (0, \infty)$ divergiendo y satisfaciendo la Ecuación (1.28) para $k_n = 2^n$ y ℓ fijo. Obsérvese que $q_0 \in \Sigma_n$ para todo n y que

$\text{dist}(q_0, \partial\Sigma_n)$ diverge cuando $n \rightarrow +\infty$ ya que estamos incrementando k_n mientras que ℓ se mantiene constante. En particular, $\Sigma_n \subset \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ es una sucesión de grafos mínimos con un punto común q_0 . Como los grafos son estables, las superficies Σ_n tienen segunda forma fundamental acotada, y por los argumentos estándar de convergencia comentados en la Sección 3.1 se tiene la existencia de una parcial (que seguimos denotando por Σ_n) que converge uniformemente sobre compactos en la topología C^m para todo m a una superficie mínima completa $\Sigma_\infty \subset \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$. Como Σ_n son grafos, entonces Σ_∞ es o un multigrafo o un plano vertical, pero este último lo podemos descartar ya que la función ángulo en q_0 es 1 en toda la sucesión. Como Σ_∞ es un multigrafo completo, en [53] se probó que debe ser un grafo. Para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que todas las superficies Σ_n para $n \geq n_1$ comparten las mismas 2^{n_0} geodésicas horizontales pasando por q_0 . Esto implica que Σ_∞ también contiene 2^{n_0} geodésicas horizontales pasando por q_0 y por tanto una familia densa de geodésicas horizontales. Esto implica que el límite debe ser el paraguas compuesto por todas las geodésicas horizontales que pasan por el punto q_0 . Como Σ_∞ está foliada por geodésicas horizontales se sigue que la superficie conjugada es un H -grafo entero rotacionalmente invariante. Como un tal grafo no tiene altura acotada (véase la clasificación de las H superficies rotacionales de [87]), entonces debe existir algún n_2 tal que Σ_n^* no está contenido en la banda $\mathbb{H}^2 \times [-\ell, 0]$ para todo $n \geq n_2$. \square

3.3.2. La construcción de (H, k) -noides. Vamos ahora a tratar el caso $a = \infty$ y $b \in (0, \infty)$. Esto significa que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, los vértices p_{2i-1} de $\Omega_{\infty, b}$ se convierten en ideales, y por tanto Γ_{2i-1} es un geodésica vertical ideal (cuando $0 < H < \frac{1}{2}$)).

Como $\Sigma_{\infty, b}^*$ es límite de superficies $\Sigma_{a, b}^*$ cuando $a \rightarrow \infty$, se tiene que todas las curvas Γ_{2i}^* caen el mismo plano horizontal, que supondremos que es $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$. El principio del máximo con respecto a planos horizontales garantiza que $\Sigma_{\infty, b}^* \subset \mathbb{H}^2 \times (-\infty, 0)$. Podemos extender $\Sigma_{\infty, b}^*$ mediante simetría especular respecto de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ para obtener una H -superficie completa propia Alexandrov-embebida $\bar{\Sigma}_{\infty, b}^*$. Estas superficies serán los (H, k) -noides o H -catenoides si $k = 2$.

Si $0 < H < \frac{1}{2}$, entonces la frontera asintótica de $\Sigma_{\infty, b}^*$ consiste en $2k$ medias geodésicas verticales en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ junto con k curvas completas

$\Gamma_{2i-1}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$. Por lo tanto, Γ_{2i-1}^* se proyecta en una curva de curvatura geodésica constante $-2H$ en \mathbb{H}^2 con respecto a N^* , que apunta hacia el interior de Ω^* , de donde $\bar{\Sigma}_{\infty,b}^*$ tiene k finales asintóticos a H -cilindros verticales y la superficie queda (localmente) en el lado cóncavo de estos (el caso $k = 2$ se muestra en la figura 3.12 izquierda).

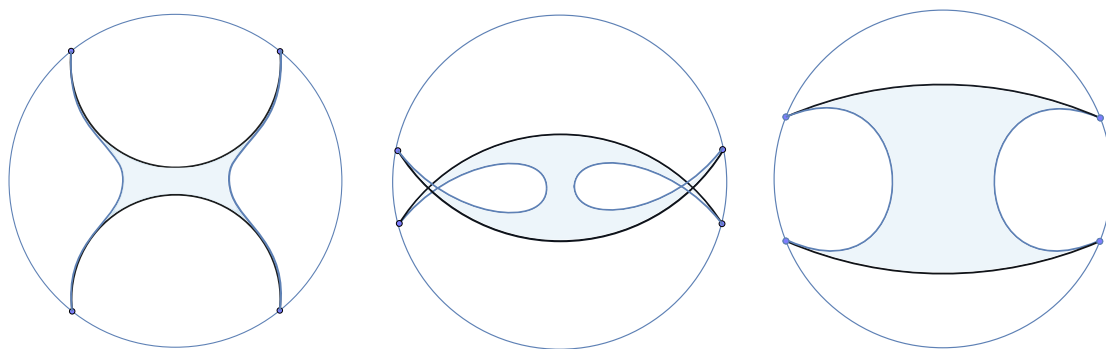


Figura 3.12: Dibujo esquemático de los dominios de una H -catenoide (izquierda), una H -catenodoide no embebida (centro), y una H -catenodoide embebida (derecha), con $0 < H < \frac{1}{2}$.

El caso $H = \frac{1}{2}$ es similar, salvo que las curvas Γ_{2i-1}^* no existen por el Lema 3.29. El apartado (b) del Teorema 3.28 será probado después de analizar los finales en el caso $H = \frac{1}{2}$. Si $k = 2$, entonces $\Sigma_{\infty,b}$ pertenece a la familia \mathcal{H}_μ para $\mu < \frac{-1}{2}$, véase el Lema 1.16. La superficie \mathcal{H}_μ se puede también parametrizar como

$$(s, v) \mapsto (s \cos \alpha(v), v, s \sin \alpha(v)),$$

donde $\alpha(v) = \arctan(h(v))$ para $v \in (-t_\mu, t_\mu)$ (véase (1.29) y (1.31)), en lugar de la parametrización (1.29). Esta parametrización nos permite calcular un normal unitario y su rotación a lo largo de la geodésica vertical $s \mapsto (0, t_\mu, s)$ como:

$$N = \frac{-1}{\sqrt{1 + \sigma^2 s^2}} E_1 - \frac{\sigma s}{\sqrt{1 + \sigma^2 s^2}} E_2, \quad \theta'(s) = \frac{d}{ds} \arccos \langle N, E_1 \rangle = \frac{-\sigma}{1 + \sigma^2 s^2}, \quad (3.22)$$

donde

$$\sigma = \alpha'(t_\mu) = \lim_{v \rightarrow t_\mu} \frac{h'(v)}{1 + h(v)^2} = \frac{(1 + 2\mu)^2}{4\mu}.$$

Esta última afirmación se sigue de escribir $h(v) = \frac{1}{2}(v - f(v))$ y sustituir $f'(v)$ mediante la ecuación (1.31) usando que $\lim_{v \rightarrow t_\mu} f(v) = \pm\infty$ cuando se toma límite.

Las Ecuaciones (3.10) y (3.22) muestran que Γ_1^* tiene curvatura geodésica

$$\kappa_g = 2H - \theta'_1 = 1 + \frac{4\mu(1 + 2\mu)^2}{16\mu^2 + (1 + 2\mu)^4 s^2}. \quad (3.23)$$

Aunque el Teorema 3.10 ya implica el embebimiento de las $\frac{1}{2}$ -catenoides ($\mu < \frac{-1}{2}$), la Ecuación (3.23) junto con el apartado (d) del Teorema 3.10 nos permite integrar ψ , el ángulo de rotación de Γ_1^* , y recuperar la curva mediante la Ecuación (3.11) resolviendo así numéricamente la EDO que define a la curva Γ_1^* (véase Figura 3.13, izquierda). El caso $k \geq 3$ ya no es explícito, pero su comportamiento asintótico debería ser similar. Como $\Sigma_{\infty, b}$ está por encima del grafo Σ_- sobre la semi-banda $[b \cos \frac{\pi}{k}, +\infty) \times [0, b \sin \frac{\pi}{k}]$ con valores frontera $+\infty$ sobre $[b \cos \frac{\pi}{k}, +\infty) \times \{b \sin \frac{\pi}{k}\}$ y 0 en otro caso, y queda por debajo de Σ_+ , una traslación vertical de Σ_- . Las rotaciones de los normales de Σ_+ y Σ_- difieren en una traslación del parámetro, luego la rotación del normal tiene un comportamiento asintótico equivalente al de Σ_+ y Σ_- .

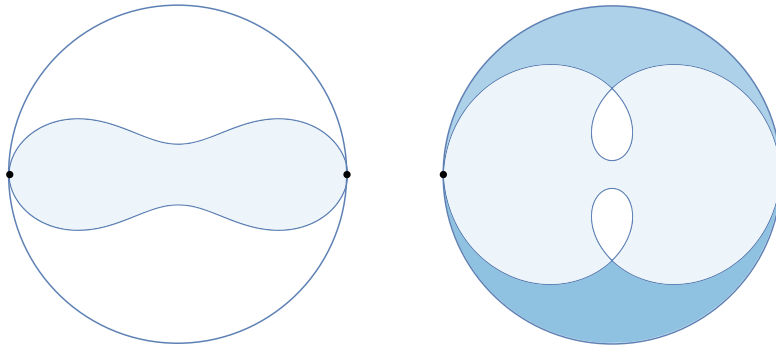


Figura 3.13: Representación numérica de los dominios de las $\frac{1}{2}$ -catenoides (izquierda) y las $\frac{1}{2}$ -catenodoides (derecha), que se corresponden con \mathcal{H}_μ con $\mu = -3$ y $\mu = 3$, respectivamente. La región oscura es cubierta dos veces y esto ilustra por qué las $\frac{1}{2}$ -catenodoides no son nunca embebidas

Para el embebimiento en general (para $0 < H \leq 1/2$ y $k \geq 2$), el principio del máximo con respecto a planos verticales prueba que $\Sigma_{a,b}^* \subset \mathbb{H}^2 \times (-\infty, 0]$.

Por tanto, $\bar{\Sigma}_{\infty,b}$ es embebida si y solo $\Sigma_{\infty,b}^*$ es embebida. Como cada curva Γ_{2i-1}^* es embebida (como curva en $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$ para $0 \leq H < \frac{1}{2}$) y $\Sigma_{\infty,b}^*$ es un multigrafo, deducimos de nuevo por las simetrías de la superficie (como en el caso de los Saddle Towers) que $\bar{\Sigma}_{\infty,b}^*$ es embebida si y solo si las curvas Γ_{2i}^* son embebidas, lo cual podemos garantizar si el ángulo interior de $\Omega_{\infty,b}$ en p_2 es como mucho π , véase el Teorema 3.10. Si $0 < H < \frac{1}{2}$ y el ángulo en p_2 es π , usando trigonometría hiperbólica obtenemos el valor $b = \frac{1}{\sqrt{1-4H^2}} \operatorname{arccosh}(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}})$ que equivale a la distancia de p_0 al punto intersección $\bar{p}_1 \bar{p}_3 \cap \bar{p}_0 \bar{p}_2$. Obsérvese que esto no produce una contradicción con la propiedad de Krust, ya que Ω es convexo bajo estas hipótesis. Sin embargo vamos a ver que la propiedad de Krust no se cumple en general (véase el Teorema 3.37). Si $H = \frac{1}{2}$, no existe ese valor de b para $k > 2$. El siguiente resultado resume la discusión realizada:

Proposición 3.34.

(a) Si $0 < H < \frac{1}{2}$ y $b \geq \frac{1}{\sqrt{1-4H^2}} \operatorname{arccosh}(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}})$, entonces $\bar{\Sigma}_{\infty,b}^*$ es embebida.

(b) Si $0 < H \leq \frac{1}{2}$ y $k = 2$, entonces $\bar{\Sigma}_{\infty,b}^*$ es embebida para todo $b \in (0, \infty)$.

3.3.3. La construcción de (H, k) -noides. Por último, vamos a considerar el caso $b = \infty$ para $a < \infty$, que nos dará la familia de (H, k) -noides (o H -catenoides si $k = 2$). Estos no son congruentes con los (H, k) -noides ya que estamos asumiendo que $H \neq 0$ (véase nota 1.14).

Por la construcción general sabemos que la frontera del grafo mínimo $\Sigma_{a,\infty} \subset \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ consiste en las geodésicas verticales Γ_{2i-1} , mientras que las geodésicas verticales ideales Γ_{2i} quedan en la frontera asintótica (si $0 < H < \frac{1}{2}$). La frontera del H -multigrafo conjugado $\Sigma_{a,\infty}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ está compuesta por las curvas horizontales de simetría Γ_{2i-1}^* , que podemos suponer que están contenidas en $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ salvo una traslación vertical. Como curvas contenidas en el plano horizontal (copia de \mathbb{H}^2), satisfacen $\kappa_g > 2H$ con respecto a N^* que apunta hacia el exterior del dominio Ω^* del multigrafo. Si $0 < H < \frac{1}{2}$, entonces la frontera asintótica de $\Sigma_{a,\infty}^*$ también contiene las k curvas ideales $\Gamma_{2i}^* \subset \mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ cuya proyección en \mathbb{H}^2 tiene curvatura geodésica constante $2H$ con respecto al conormal N^* , que apunta hacia el interior de Ω^* . En otras palabras, la superficie $\bar{\Sigma}_{a,\infty}^*$ obtenida de $\Sigma_{a,\infty}^*$ mediante una simetría especular respecto a $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ queda localmente

en la parte convexa de $\Pi^{-1}(\Gamma_{2i}^*)$, a diferencia del caso de los (H, k) -noides (en la Figura 3.12 se ha dibujado el caso $k = 2$). Si $H = \frac{1}{2}$, entonces los horocilindros asintóticos desaparecen en infinito por el Lema 3.29 y con esto se prueba el apartado (c) del Teorema 3.28.

No podemos deducir en general la inclusión $\Sigma_{a,\infty}^* \subset \mathbb{H}^2 \times (0, +\infty)$, ya que el principio del máximo no se aplica en este caso, pues el normal N^* apunta hacia arriba.

Si $0 < H < \frac{1}{2}$, la superficie $\Sigma_{a,\infty}^*$ converge al H -grafo de Scherk ideal cuando $a \rightarrow \infty$ (ver la sección 3.3.4). En este límite, la curvatura geodésica de las curvas Γ_{2i-1}^* converge a $-2H$, por lo que la inclusión $\Sigma_{a,\infty}^* \subset \mathbb{H}^2 \times (0, +\infty)$ es cierta cuando a es suficientemente grande. Por otro lado el Lema 3.29 muestra que la distancia de $\Pi(\Gamma_2^*)$ al origen varía desde 0 a d_∞ cuando a se mueve desde 0 a ∞ . Como $\bar{\Sigma}_{a,\infty}^*$ queda en el lado convexo de los cilindros sobre Γ_{2i}^* , existe $a_1 > 0$, dependiendo de k y H , tal que las curvas equidistantes asintóticas Γ_2^* y Γ_4^* en $\Sigma_{a_1,\infty}^*$ comparten un extremo en infinito. Esto implica que los extremos de la curva Γ_3^* coinciden cuando $a = a_1$ y Γ_3^* tiene auto-intersecciones si y solo si $a < a_1$ (por simetría, lo mismo ocurre para cada curva Γ_{2i-1}^*). Por tanto, $\Sigma_{a,\infty}^*$ (y consecuentemente $\bar{\Sigma}_{a,\infty}^*$) no es embebida en estos casos (véase la Figura 3.12, centro).

Si $H = \frac{1}{2}$, entonces las curvas $\Gamma_{2i}^* \subset \bar{\Sigma}_{a,b}^*$ se acercan a horociclos a la vez que divergen en el infinito por el Lema 3.29. Sin embargo, $\bar{\Sigma}_{a,b}^*$ queda en la parte convexa de estos horocilindros (N^* apunta hacia el interior de Ω^* a lo largo de Γ_{2i}^*). Por tanto, las curvas Γ_{2i-1}^* no pueden ser embebidas, y por tanto tampoco lo es $\Sigma_{a,\infty}^*$, véase la Figura 3.13. Todo junto deducimos:

Proposición 3.35.

- (a) Si $0 < H < \frac{1}{2}$, existen constantes a_1, a_2 (dependiendo de k y H) tal que $\bar{\Sigma}_{a,\infty}^*$ no es embebida para todo $a < a_1$ y es embebida para todo $a > a_2$.
- (b) Si $H = \frac{1}{2}$, entonces $\bar{\Sigma}_{a,\infty}^*$ no es embebida para ningún $a > 0$.

Nota 3.36. Si $k = 2$, entonces $a_1 = a_2$ en el apartado (a) por la Proposición 3.33, ya que los (H, k) -nodoides se obtienen como límite de los correspondientes Saddle Towers. En el caso $k \geq 3$ sabemos que $\Sigma_{a,\infty}^*$ es embebido si y solo si $a \geq a_1$ pero en general no podemos asegurar que esté contenido en $\mathbb{H}^2 \times (0, +\infty)$.

3.3.4. La propiedad de Krust. Vamos a ver ahora que dentro de la familia de las catenoides hay ejemplos que muestran que la propiedad de Krust no se cumple en general.

Teorema 3.37. *Para cada $H > 0$, hay grafos mínimos sobre dominios convexos en $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ cuyas H -superficies conjugada en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ no son embebidas.*

Demostración. Vamos a considerar primero $0 < H \leq \frac{1}{2}$. Dados $k = 2$ y $a \in (0, \infty)$, el dominio $\Omega_{a, \infty}$ es o un cuadrilátero con dos vértices ideales en $\mathbb{H}^2(4H^2 - 1)$ o una banda en \mathbb{R}^2 , luego es un dominio convexo. Sin embargo, la Proposición 3.35 nos dice que $\Sigma_{a, \infty}^*$ es no embebida cuando $H = \frac{1}{2}$ o $a < a_1$ y $0 < H < \frac{1}{2}$, por lo que $\Sigma_{a, \infty}$ nos da el contraejemplo deseado en este caso.

Supongamos ahora que $H > \frac{1}{2}$. Sea $T \subset \mathbb{S}^2(4H^2 - 1)$ el triángulo equilátero convexo de vértices p_0, p_1 y p_2 nombrados en sentido antihorario. Consideramos la poligonal geodésica en $\mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ que consiste en tres segmentos geodésicos horizontales proyectándose en los lados de T y segmentos de rectas verticales Γ_1 y Γ_2 proyectándose en p_1 y en p_2 respectivamente. Salvo isometrías del ambiente, este pentágono solo depende de la longitud a de Γ_1 una vez que el triángulo T está fijado. Como $\Pi^{-1}(T) \subset \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$ es un cuerpo *mean convexo* en el sentido de Meeks y Yau, se puede encontrar un grafo mínimo $\Sigma \subset \mathbb{E}(4H^2 - 1, H)$, que es un grafo sobre el interior de T y tiene como frontera el pentágono, véase [54, Proposition 2]. Aquí estamos usando el modelo dado por (1.2) cuyas fibras verticales tienen longitud infinita, localmente isométrico a una esfera de Berger. El ángulo de rotación del normal que apunta hacia arriba de Σ a lo largo de Γ_1 (resp. Γ_2) es creciente (resp. decreciente), de una forma similar a la Figura 3.11. La curva conjugada Γ_1^* (resp. Γ_2^*) tiene curvatura geodésica más grande (resp. más pequeña) que $2H$ por la Ecuación (3.10). Haciendo a suficientemente grande, se obtiene una región $R \subset \Sigma$ bordeada por dos curvas casi horizontales y dos arcos verticales de Γ_1 y Γ_2 de longitudes arbitrariamente grandes. Esta es la región sombreada en la Figura 3.14, foliada por curvas próximas a geodésicas horizontales con la función ángulo próxima a cero cuando a es suficientemente grande. Sus curvas conjugadas son casi geodésicas verticales uniendo Γ_1^* y Γ_2^* (que quedan a diferentes alturas).

Supongamos por reducción al absurdo que la propiedad de Krust se

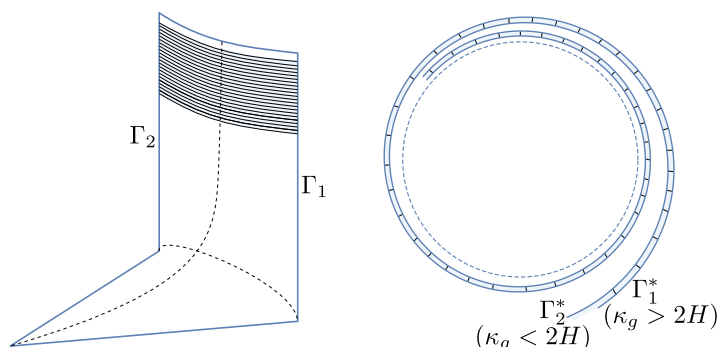


Figura 3.14: La poligonal geodésica que produce un contraejemplo a la propiedad de Krust para $H > \frac{1}{2}$ (izquierda) y la proyección de la superficie conjugada de la región sombreada (derecha). El círculo de \mathbb{H}^2 de curvatura geodésica $2H$ está representado en línea discontinua.

cumple. Entonces la región conjugada $R^* \subset \Sigma^*$ es un grafo. Entonces Γ_1^* se proyecta en una curva muy cercana a un H -cilindro sobre un círculo de \mathbb{H}^2 y su subarco en ∂R^* se aproxima al círculo desde fuera ya que su curvatura geodésica es mayor que $2H$. Si se elige a suficientemente grande de forma que el subarco dé varias vueltas alrededor del círculo, entonces la condición de ser gráfico implica que $\Gamma_2^* \cap \partial R^*$ está entrelazada con el subarco de Γ_1^* , por lo que las proyecciones de ambas curvas giran en espiral desde fuera del círculo como se muestra en la Figura 3.14 a la derecha. Esto contradice el hecho de que Γ_2^* tenga curvatura geodésica más pequeña que $2H$. \square

Capítulo 4

El problema de Plateau asintótico en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$

Vamos a considerar el modelo del semi-espacio y el modelo del cilindro para $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ que fueron definidos en la Sección 1.2. En lo que sigue utilizaremos la compactificación producto de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ donde identificamos a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ topológicamente. Recordamos que la frontera asintótica de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ se puede indentificar con una componente vertical $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y las componentes horizontales $\mathbb{H}^2 \times \{+\infty\}$ y $\mathbb{H}^2 \times \{-\infty\}$. Denotamos por $\partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ a dicha frontera asintótica. *El problema de Plateau asintótico* consiste en: Dada Γ , una curva cuyas componentes conexas son simples y cerradas en la frontera asintótica de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, decidir si hay una superficie mínima o área-minimizante con frontera asintótica Γ , véase la Definición 1.1. A lo largo del capítulo, cuando nos refiramos a curvas en la frontera asintótica de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ entenderemos que puede tener un número finito de componentes conexas cerradas y simples.

Los resultados más relevantes de este capítulo son resultados de no existencia de superficies mínimas y área-minimizantes en términos de la frontera asintótica. Además son resultados locales, en el sentido de que las hipótesis sobre la curva de la frontera asintótica son solo necesarias en un entorno. Vamos a introducir la noción de altura de una curva:

Definición 4.1. [Definition 1.1 en [45]] Sea Γ una curva en $\partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, y $\Omega = \partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) \setminus \Gamma$. Para cada $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, sea $h_\Gamma(p)$ la longitud de la compo-

nente más corta de $(\{p\} \times \mathbb{R}) \cap \Omega$, se define la altura de Γ como

$$h_\Gamma = \inf_{p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2} h_\Gamma(p).$$

Diremos que Γ es *alta* si $h_\Gamma(p) > \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$ para cada $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$.

El número $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$ es relevante ya que si consideramos el modelo del cilindro de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y Γ es la unión disjunta de dos círculos en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a distancia vertical h_Γ , entonces existe una catenoide rotacionalmente invariante con frontera asintótica Γ si y solo si $h_\Gamma < \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, tal y como se ha discutido en el apartado 4 de la Sección 1.2.2.

En este capítulo, mostraremos cómo adaptar los resultado de no existencia para superficies mínimas de Sa Earp y Toubiana en [88] y los resultados de no existencia para superficies área-minimizantes de Coskunuzer [15] para el Problema de Plateau asintótico en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, véanse los Teoremas 4.6 y 4.11 dónde se completa el resultado de no existencia de Klaser, Menezes Ramos [45]. Además en la Sección 4.3 usaremos el Teorema de la Banda de Lima para probar que ciertas regiones de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ son bandas generalizadas, véanse el Teorema 4.13 y la Definición 4.12. La idea principal es usar unos anillos compactos área-minimizantes, que serán construidos mediante el *criterio de Douglas* y que jugarán el papel de las catenoides en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Estos anillos compactos son especiales ya que cada una de las componentes de su frontera está contenida en un slice \mathcal{S} , que es una superficie invariante por traslaciones hiperbólicas, véase la Sección 1.2. Esto nos permite controlar sus curvas de la frontera cuando enviamos el anillo mediante traslaciones hiperbólicas suficientemente cerca de la frontera asintótica vertical de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, lo que nos permitirá adaptar los resultados de [88, 15, 45] a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, siguiendo ideas similares a los resultados de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

4.1. Anillos área minimizantes en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.

En esta Sección usaremos el criterio de Douglas para probar que existen anillos compactos mínimos (área-minimizantes) con frontera dos circunferencias en los slices mínimos paralelos $\{t = 0\}$ y $\{t = h\}$ centradas en $(0, 1, 0)$ y $(0, 1, h)$ con radio hiperbólico suficientemente grande en el modelo del semi-espacio de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ para $h < \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$ próximo a $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$. Estos anillos jugarán el papel de las catenoides ya que serán usados para pro-

bar los Teoremas 4.6, 4.11 y 4.13 adaptando las ideas de los resultados conocidos de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema 4.2. [Criterio de Douglas, [42]] Sean γ_1 y γ_2 dos curvas compactas en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ embebidas y disjuntas. Supongamos que para cualesquiera dos discos mínimos D_1 y D_2 en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con borde γ_1 y γ_2 respectivamente existe un anillo A con frontera $\gamma_1 \cup \gamma_2$ tal que $\text{Area}(D_1) + \text{Area}(D_2) > \text{Area}(A)$. Entonces existe un anillo área-minimizante con frontera $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Proposición 4.3. Si $h < \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, entonces existe un anillo compacto área-minimizante A_h con frontera dos curvas contenidas en slices paralelos separados por una distancia vertical h en el modelo del semi-espacio de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.

Demostración. Sea $\gamma_1 \subset \{t = 0\}$ la curva que se proyecta sobre la circunferencia centrada en $(0, 1) \in \mathbb{H}^2$ en el modelo del semi-plano, con radio hiperbólico ρ , y sea γ_2 su copia trasladada verticalmente a altura h . El disco $D \subset \{t = 0\}$ (resp. $D \subset \{t = h\}$) bordeado por γ_1 (respectivamente γ_2) es la única superficie mínima con frontera γ_1 (resp. γ_2) por el principio del máximo, y de igual manera para γ_2 . Por el Criterio de Douglas, si existe un anillo A tal que $2\text{Area}(D) > \text{Area}(A)$, entonces existirá un anillo área-minimizante con frontera $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

La circunferencia de \mathbb{H}^2 con radio hiperbólico ρ centrada en $(1, 0)$ en el modelo del semi-plano viene dada por la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 2y \cosh(\rho)$. Por tanto, podemos parametrizar D como $X(x, y) = (x, y, 0)$, donde $(x, y) \in U = \{x^2 + y^2 + 1 < 2y \cosh(\rho)\}$. Si denotamos por \hat{g} la métrica pullback por X en el abierto U , los coeficientes de \hat{g} en coordenadas (x, y) vienen dados por:

$$\hat{g}_{11} = \frac{1 + 4\tau^2}{y^2}, \quad \hat{g}_{12} = 0 \quad \text{y} \quad \hat{g}_{22} = \frac{1}{y^2}.$$

Podemos entonces calcular el área:

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \int_U \sqrt{\det \hat{g}} \, dx \, dy = \int_{\cosh(\rho) - \sinh(\rho)}^{\cosh(\rho) + \sinh(\rho)} \int_{-\sqrt{2 \cosh(\rho)y - y^2 - 1}}^{\sqrt{2 \cosh(\rho)y - y^2 - 1}} \frac{\sqrt{1 + 4\tau^2}}{y^2} \, dx \, dy \\ &= 2\pi \sqrt{1 + 4\tau^2} (\cosh(\rho) - 1). \end{aligned}$$

Por otro lado, para el siguiente razonamiento, en el modelo del cilindro de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ consideramos las coordenadas cilíndricas (r, θ, t) dadas por

$$(x(r, \theta), y(r, \theta), t) = (\tanh(r/2) \cos \theta, \tanh(r/2) \sin \theta, t),$$

la métrica de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ se escribe en estas coordenadas como

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2 + (-4\tau \sinh^2(\frac{r}{2}) d\theta + dt)^2.$$

Consideramos el anillo parametrizado en coordenadas polares como

$$Y(r, \theta) = (r, \theta, \pm u(r) + v(\theta)), \quad r \in (\bar{\rho}, \rho), \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

(el anillo es la unión de los dos trozos cuando consideramos el signo positivo y negativo) donde $v : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por

$$v(\theta) = 4\tau \arctan\left(\frac{\tanh(\frac{\rho}{2}) \sin \theta}{1 - \tanh(\frac{\rho}{2}) \cos \theta}\right)$$

y $u, U : [\bar{\rho}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ están dadas por

$$U(r) = \int_{\bar{\rho}}^r \frac{\sinh(\bar{\rho})}{\sqrt{\sinh^2(s) - \sinh^2(\bar{\rho})}} ds, \quad u(r) = U(r) \sqrt{1 + 4\tau^2}.$$

Obsérvese que U es la función altura de una catenoide mínima en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ($\tau = 0$) donde $\bar{\rho}$ es el parámetro de la familia de catenoides, véase por ejemplo la Proposición 3.6 en [79]. Por tanto, $\lim_{\bar{\rho} \rightarrow \infty} U(\infty) = \frac{\pi}{2}$. Además, la tercera coordenada de $\psi(Y(\rho, \theta))$ es $u(\rho)$ donde ψ es la isometría entre el modelo \mathcal{C} y \mathcal{H} de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, véase la Proposición 1.7. Esto nos dice que las curvas frontera de este anillo parametrizado por y están contenidas en dos slices mínimos y se proyectan sobre una circunferencia hiperbólica de radio ρ .

Afirmación 4.4. Supongamos que $\tau > 0$. Las funciones U y v cumplen las siguientes propiedades:

1. $2\pi \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \sqrt{1 + U_r^2} \sinh(r) dr \leq 2\pi \sqrt{\cosh^2(\rho) - \cosh^2(\bar{\rho})}$.
2. $-2\tau < v'(\theta) < 2\tau e^{\rho} - 2\tau$.
3. Si $2e^{-\rho/2} < \theta < 2\pi - 2e^{-\rho/2}$ entonces $-2\tau < v'(\theta) < 0$.

Para probar (1), tenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \sqrt{1 + U_r^2} \sinh r dr &= 2\pi \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \frac{\sinh^2(r)}{\sqrt{\sinh^2(r) - \sinh(\bar{\rho})^2}} dr \\ &= 2\pi \cosh \bar{\rho} \int_1^{\frac{\cosh \rho}{\cosh \bar{\rho}}} \frac{\sqrt{s^2 - \frac{1}{\cosh^2 \bar{\rho}}}}{\sqrt{s^2 - 1}} ds < 2\pi \cosh \bar{\rho} \int_1^{\frac{\cosh \rho}{\cosh \bar{\rho}}} \frac{s}{s^2 - 1} ds \\ &= 2\pi \sqrt{\cosh^2 \rho - \cosh^2 \bar{\rho}}. \end{aligned}$$

Para probar (2), se calcula

$$v'(\theta) = \frac{4\tau \tanh(\frac{\rho}{2})(\cos(\theta) - \tanh(\frac{\rho}{2}))}{1 - 2\cos(\theta) \tanh(\frac{\rho}{2}) + \tanh^2(\frac{\rho}{2})},$$

la cual tiene simetría par respecto a $\theta = \pi$. Se tiene que v' es decreciente desde 0 a π y creciente desde π a 2π . Por tanto:

$$-2\tau < v'(\pi) < v'(\theta) < v'(0) = 2\tau e^{\rho} - 2\tau.$$

Para (3), veamos primero que $v'(2e^{-\rho/2}) < 0$. Usando el desarrollo de Taylor de la función $x \mapsto \cos(2x)$ en $x = 0$ se tiene que:

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} x^{2n} < 1 - 2x^2 + x^4 = (1 - x^2)^2. \quad (4.1)$$

Usando (4.1) se prueba que $\cos(2x) < \frac{1-x^2}{1+x^2}$ para $0 < x < 1$, luego para $x = e^{-\rho/2}$ se tiene que

$$\cos(2e^{-\rho/2}) < \tanh(\frac{\rho}{2}), \quad \rho > 0. \quad (4.2)$$

De (4.2) fácilmente se deduce que $v'(2e^{-\rho/2}) < 0$. Finalmente usando de nuevo la monotonía se prueba que $-2\tau < v'(\theta) < v'(2e^{-\rho/2}) < 0$. Con esto se prueba la afirmación.

A continuación, vamos a estimar el área del anillo Y para aplicar el criterio de Douglas. Sea \tilde{g} la métrica inducida por Y , los coeficientes de \tilde{g} en coordenadas (r, θ) son $\tilde{g}_{11} = 1 + u'(r)^2$, $\tilde{g}_{22} = \sinh^2 r + (v'(\theta) - 4\tau \sinh^2(\frac{r}{2}))^2$ y $\tilde{g}_{12} = u'(r) (v'(\theta) - 4\tau \sinh^2(\frac{r}{2}))$. El elemento de área W cumple:

$$W^2 = \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 = \sinh^2(r) (u'(r)^2 + 1) + (v'(\theta) + 2\tau - 2\tau \cosh(r))^2.$$

Supongamos que $\tau > 0$ (esto no es restrictivo puesto que el área del anillo es la misma en el caso de $\mathbb{E}(-1, -\tau)$). Se tiene que:

$$\begin{aligned} W^2 &= \sinh^2(r) (u'(r)^2 + 1) + (v'(\theta) + 2\tau - 2\tau \cosh(r))^2 \\ &\leq \sinh^2(r) (u'(r)^2 + 1) + (v'(\theta) + 2\tau)^2 + 4\tau \cosh^2(r). \end{aligned}$$

Si $2e^{-\rho/2} < \theta < 2\pi - 2e^{-\rho/2}$, entonces la cota es:

$$\begin{aligned} W^2 &\leq \sinh^2(r) (u'(r)^2 + 1) + 4\tau \cosh^2(r) + 4\tau^2 \\ &= 4\tau^2 \cosh^2(r) + \sinh^2(r) ((1 + 4\tau^2) U_r^2 + 1) + 4\tau^2 \\ &= (1 + 4\tau^2) (U_r^2 + 1) \sinh^2(r) + 4\tau^2 + 4\tau^2. \end{aligned}$$

En otro caso, la cota es:

$$\begin{aligned} W^2 &\leq \sinh^2(r) (u'(r)^2 + 1) + 4\tau \cosh^2(r) + 4\tau^2 e^{2\rho} \\ &= 4\tau^2 \cosh^2(r) + \sinh^2(r) ((1 + 4\tau^2) U_r^2 + 1) + 4\tau^2 e^{2\rho} \\ &= (1 + 4\tau^2) (U_r^2 + 1) \sinh^2(r) + 4\tau^2 + 4\tau^2 e^{2\rho}. \end{aligned}$$

Con esto podemos estimar el área de la mitad del anillo Y como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Area}(Y) &= \int_0^{2\pi} \int_{\bar{\rho}}^{\rho} W dr d\theta \\ &\leq \int_0^{2e^{-\rho/2}} \int_{\bar{\rho}}^{\rho} W dr d\theta + \int_{2e^{-\rho/2}}^{2\pi - 2e^{-\rho/2}} \int_{\bar{\rho}}^{\rho} W dr d\theta + \int_{2\pi - 2e^{-\rho/2}}^{2\pi} \int_{\bar{\rho}}^{\rho} W dr d\theta \\ &\leq 2\pi \int_{\bar{\rho}}^{\rho} (\sqrt{1 + 4\tau^2} \sqrt{1 + U_r^2} \sinh(r) + \sqrt{8\tau}) dr + 8\tau(\rho - \bar{\rho})e^{\rho/2} \\ &\leq 2\pi \sqrt{1 + 4\tau^2} \sqrt{\cosh^2(\rho) - \cosh^2(\bar{\rho})} + 2\sqrt{8\pi}\tau(\rho - \bar{\rho}) + 8\tau(\rho - \bar{\rho})e^{\rho/2}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Queremos ver cuándo se cumple que $\text{Area}(Y) < 2\text{Area}(D)$, lo que equivale a comparar (4.3) con $\text{Area}(D) = 2\pi\sqrt{1 + 4\tau^2}(\cosh \rho - 1)$. Eligiendo $\rho = 5/4\bar{\rho}$ y usando el desarrollo de Taylor de la función $t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$ en $t = 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\cosh^2(5/4\bar{\rho}) - \cosh^2(\bar{\rho})} &= \cosh(5/4\bar{\rho}) \left(1 - \frac{\cosh^2(\bar{\rho})}{\cosh^2(5/4\bar{\rho})}\right)^{1/2} \\ &= \cosh(5/4\bar{\rho}) \left(1 - 1/2 \frac{\cosh^2(\bar{\rho})}{\cosh^2(5/4\bar{\rho})} - 1/8 \frac{\cosh^4(\bar{\rho})}{\cosh^4(5/4\bar{\rho})} + \dots\right) \\ &= \cosh(5/4\bar{\rho}) - \frac{1}{4} e^{3/4\bar{\rho}} + o(e^{1/4\bar{\rho}}). \end{aligned}$$

Así, estimamos el área dada en (4.3) como

$$\frac{1}{2}\text{Area}(Y) < 2\pi\sqrt{1+4\tau^2}(\cosh(5/4\bar{\rho}) - \frac{1}{4}e^{3/4\bar{\rho}}) + o(\bar{\rho}e^{5\bar{\rho}/8}),$$

que es menor que $2\pi\sqrt{1+4\tau^2}(\cosh(5/4\bar{\rho}) - 1)$ cuando $\bar{\rho}$ es suficientemente grande. Además, la distancia vertical entre las circunferencias de la frontera tiende a $\sqrt{1+4\tau^2}\pi$ cuando $\bar{\rho} \rightarrow \infty$. Por el criterio de Douglas existe un anillo A área minimizante con frontera $\gamma_1 \cup \gamma_2$ para toda distancia vertical $h \in (h_0, \sqrt{1+4\tau^2}\pi)$. Llamaremos A_h , a la intersección del anillo A con una banda acotada por dos slices paralelos (véase la sección 1.2) separados por una distancia vertical h . \square

La cantidad $\sqrt{1+4\tau^2}\pi$ es óptima, ya que usando las superficies u_d^\pm descritas en el apartado 1 de la Sección 1.2.2, podemos probar que los anillos A_h no existen para $h \geq \sqrt{1+4\tau^2}\pi$.

Proposición 4.5. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas cerradas en el modelo del semiespacio de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y supongamos que la región $\{(x, y, t), h_0 < t < h_0 + \sqrt{1+4\tau^2}\pi\}$, para algún $h_0 \in \mathbb{R}$, separa γ_1 y γ_2 . Entonces, no hay superficies mínimas, compactas, conexas y propiamente inmersas en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con frontera $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que existe tal superficie M . Entonces consideramos la familia de superficies u_d^\pm para $d > 0$, con frontera asintótica las dos líneas horizontales $\{(x, 0, h_0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $\{(x, 0, h_0 + \sqrt{1+4\tau^2}\pi) : x \in \mathbb{R}\}$ en $\partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ (véase (1.19)). Obsérvese que u_d^\pm no puede intersectar la frontera de M . Por un lado, tenemos que para d suficientemente pequeño u_d^\pm no interseca a M y, por otro lado, para d suficientemente grande, u_d^\pm interseca a M . Por continuidad, existe $d_0 > 0$ de forma que $u_{d_0}^\pm$ y M son tangentes en un punto interior de M y $u_{d_0}^\pm$ queda localmente a un lado M , lo cual contradice el principio del máximo. \square

4.2. Teoremas asintóticos.

En esta sección vamos a probar los principales resultados de no existencia para el problema de Plateau asintótico en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.

4.2.1. El problema de Plateau asintótico para superficies mínimas.

Teorema 4.6. *Sea Γ una curva en $\partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y supongamos que existe una línea recta vertical L en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y un sub-arco $\Gamma' \subset \Gamma$ de forma que:*

1. $\Gamma' \cap L \neq \emptyset$ y $\partial\Gamma' \cap L = \emptyset$,
2. Γ' queda a un lado L ,
3. Γ' está contenido en $\{(x, 0, t), t_0 < t < t_0 + \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi\}$.

Entonces, no hay superficies mínimas propiamente inmersas en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con frontera asintótica Γ (con posible frontera finita).

Demostración. Consideramos el modelo del semi-espacio \mathcal{H} para $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Sea p_0 un punto en $\Gamma' \cap L$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $\Pi(p_0)$ no es el punto del infinito de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Si hay un segmento vertical contenido en $\Gamma' \cap L$, elegimos p_0 como el punto medio de este segmento. Salvo una isometría del ambiente, podemos suponer que $p_0 = (0, 0, 0)$. Se tiene que Γ' está contenido en la región $\{(x, 0, t) : a < t < b\}$, con $-\sqrt{1 + 4\tau^2}\frac{\pi}{2} < a < b < \sqrt{1 + 4\tau^2}\frac{\pi}{2}$. Consideramos los puntos $q_1 = (-\epsilon, 0, 0)$ y $q_2 = (\epsilon, 0, 0)$ para cierto $\epsilon > 0$ tal que $\Pi(q_1) \in \Pi(\Gamma')$ y $\Pi(q_2) \notin \Pi(\Gamma')$, véase la Figura 4.1 (podemos asumir que Γ' se queda a ese lado). Llamemos c a la geodésica de \mathbb{H}^2 que une los puntos ideales $\Pi(q_1)$ y $\Pi(q_2)$. Sean P el plano vertical mínimo $\Pi^{-1}(c)$, y S_1 y S_2 los slices mínimos $\{t = a\}$ y $\{t = b\}$, respectivamente. Sea G_ϵ la región de $\mathcal{H} \setminus (P \cup S_1 \cup S_2)$ que contiene a p_0 en su frontera asintótica. Sea c_1 la geodésica de \mathbb{H}^2 que une dos puntos del interior del segmento abierto de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ con extremos $\Pi(p_0) = (0, 0)$ y $\Pi(q_2)$, y sea U la región de $\mathcal{H} \setminus (\Pi^{-1}(c_1) \cup S_2 \cup S_3)$ entre los slices S_1 y S_2 que no contiene a p_0 en su frontera asintótica.

Supongamos por reducción al absurdo que existe una superficie mínima M propiamente inmersa en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con frontera asintótica Γ y llamemos $M_0 = M \cap G_\epsilon$. Para ϵ suficientemente pequeño, podemos asegurar que:

- La frontera asintótica de M_0 es un sub-arco $\Gamma_0 \subset \Gamma'$ que contiene a p_0 .
- El sub-arco Γ_0 está contenido en la región $\{(x, 0, t) : \bar{a} < t < \bar{b}\}$, con $a < \bar{a} < \bar{b} < b$, y M_0 está estrictamente contenido en la región $\{(x, 0, t) : \bar{a} \leq t \leq \bar{b}\}$.

- $\partial M_0 \subset P$ (obsérvese que para ϵ suficientemente pequeño M_0 no interseca a los slices S_1 y S_2).
- $M_0 \cap U = \emptyset$.

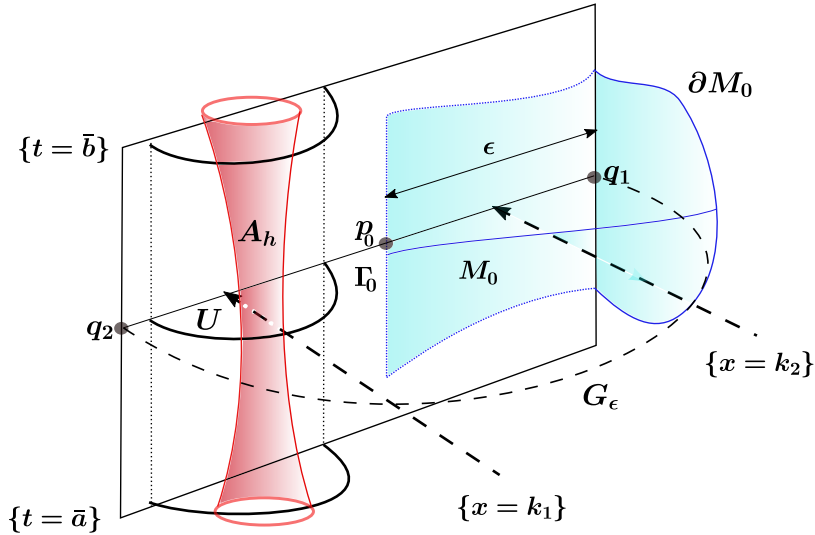


Figura 4.1: Un esquema gráfico de la prueba. En rojo el anillo A_h contenido en U y en azul la superficie M_0 .

Usando la Proposición 4.3, consideramos el anillo compacto A_h con $h = b - a$ y frontera dos curvas contenidas en los slices S_1 y S_2 a alturas a y b , respectivamente. Mediante traslaciones hiperbólicas a lo largo de la geodésica horizontal $\{(k_1, y, 0), y > 0\} \subset \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, donde $(k_1, 0)$ es un punto interior en la frontera asintótica de $\Pi(U)$, podemos enviar A_h a la región U . Nótese que estas isometrías preservan la coordenada t (véase la Sección 1.2.1), y la frontera de A_h queda fuera de la región $\{(x, 0, t) : \bar{a} < t < \bar{b}\}$. Esto nos dice que el anillo $A_h \subset U$ no interseca a M_0 . Considérese otra geodésica $\{(k_2, y, 0), y > 0\} \subset \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con $-\epsilon < k_2 < 0$, y la traslación hiperbólica a lo largo de ella (en este modelo, las dos primeras coordenadas de la isometría son homotecia euclídea con centro $(k_2, 0)$). Trasladando A_h de esta forma hacia la recta ideal $\{(k_2, 0, t), t \in \mathbb{R}\}$, tenemos que que todas las copias resultantes de A_h están contenidas en las copias trasladadas de U y por tanto en G_ϵ . Esto nos dice que que los anillos trasladados no cortan a la frontera de M_0 , y sus curvas frontera no cortan a M_0 . Por tanto, en cierto instante se alcanzaría un primer punto de contacto interior que

contradice el principio del máximo. \square

Nota 4.7. El Teorema 4.6 es local y, por tanto, no depende del modelo de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Si Γ es una curva en $\partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ como en el Teorema 4.6 en el modelo del cilindro, consideramos la imagen de esta curva por la isometría extendida al borde asintótico $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$ dada por la Proposición 1.2. Sabemos que si hay una línea recta L contenida en el sub-arco Γ' y este queda a un lado de L , entonces $\psi(\Gamma')$ contiene una línea recta de igual longitud y sigue quedando a un lado de esta. Además, se puede elegir un sub-arco $\Gamma'' \subset \Gamma'$ de forma que $\psi(\Gamma'')$ esté contenido en $\{(x, 0, t), t_0 < t < t_0 + \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi\}$.

Usando el Teorema 4.6 se pueden deducir fácilmente los siguientes Corolarios.

Corolario 4.8. Sea $\Gamma_1 : \partial_\infty \mathbb{H}^2 \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \subset \partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ una curva gráfica completa parametrizada como $\Gamma_1(\theta) = (\theta, t(\theta))$ y consideramos la copia trasladada $\Gamma_2(\theta) = (\theta, t(\theta) + \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi)$.

1. No hay superficies mínimas propiamente inmersas con frontera asintótica $\Gamma \subset \partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, siendo Γ una curva de Jordan homóloga a cero, estrictamente contenida entre Γ_1 y Γ_2 .
2. No hay superficies mínimas propiamente inmersas con frontera asintótica Γ , siendo Γ una curva estrictamente contenida entre Γ_1 y Γ_2 cuya proyección omite un arco abierto en $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.

Nota 4.9. Este corolario es independiente del modelo. Si tenemos una curva en esta situación en el modelo del cilindro entonces su imagen por la isometría ψ dada por la Proposición 1.2 cumple las hipótesis del Corolario 4.8 en el modelo del semi-espacio. Además, obsérvese que Γ_2 puede ser reemplazada por otra curva gráfica de forma que la distancia vertical punto a punto sea menor que $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$.

Enunciamos a continuación un caso particular cuando las curvas Γ_1 y Γ_2 son círculos en el modelo del cilindro.

Corolario 4.10. No hay superficies mínimas propiamente inmersas en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con frontera asintótica una curva de Jordan $\Gamma \subset \partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ homóloga a cero,

estrictamente contenida entre dos círculos en $\partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ en el modelo del cilindro separados por una distancia menor que $\sqrt{1 + 4\tau^2\pi}$.

4.2.2. El problema de Plateau asintótico para superficies área-minimizantes.

Teorema 4.11. *Sea Γ una curva en $\partial_\infty \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y supongamos que existe un intervalo $I \subset \partial_\infty \mathbb{H}^2$ tal que $h_\Gamma(p) < \sqrt{1 + 4\tau^2\pi}$ para todo $p \in I$. Entonces, no hay superficies área-minimizantes en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con frontera asintótica Γ (con posible frontera finita).*

Demostración. Primero, nótese que de igual forma que se hacía en la Nota 4.7, este teorema es local, y por tanto no depende del modelo elegido. Trabajaremos en el modelo del semi-espacio. Asumimos por reducción al absurdo que existe tal superficie M en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.

Como $h_\Gamma(p) < \sqrt{1 + 4\tau^2\pi}$ para todo $p \in I \subset \partial_\infty \mathbb{H}^2$, salvo una isometría del ambiente podemos suponer que hay un subintervalo suficientemente pequeño $I' = (-\epsilon, \epsilon) \subset I$ tal que la frontera asintótica de M en la región $R = \{(x, 0, t) : |x| < \epsilon, a < t < b\}$ consiste en dos curvas disjuntas, donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $h_\Gamma(p) < b - a < \sqrt{1 + 4\tau^2\pi}$ para todo $p \in I'$. Sea $p_0 = (0, 0, t_0)$ un punto en la región R estrictamente contenido entre las dos curvas que componen la frontera asintótica de M en la región R .

Sea c la geodésica de \mathbb{H}^2 que une los puntos ideales $(-\epsilon, 0)$ y $(\epsilon, 0)$ de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ y sea P el plano vertical mínimo $\Pi^{-1}(c)$. Sean S_1 y S_2 los slices $\{t = a\}$ y $\{t = b\}$ y G_ϵ la región de $\mathcal{H} \setminus (P \cup S_1 \cup S_2)$ que contiene a p en su frontera asintótica. Sea V un entorno simplemente conexo de p_0 contenido en G_ϵ tal que $M \cap V = \emptyset$. Llamemos $M_0 = M \cap G_\epsilon$, cuya frontera asintótica está contenida en la frontera asintótica de G_ϵ . Como M es propia, eligiendo ϵ suficientemente pequeño, podemos asegurar que existen $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}$ con $a < \bar{a} < \bar{b} < b$ tales que:

1. La frontera asintótica de M_0 en la región $\bar{R} = \{(x, 0, t) : |x| < \epsilon, \bar{a} < t < \bar{b}\}$ consiste en dos curvas disjuntas que no cortan a $\partial_\infty V$. Además M_0 está contenida en la región $\{(x, y, t) : \bar{a} < t < \bar{b}\}$.
2. $\partial M_0 \subset P$.

Considérese el anillo área-minimizante A_h , siendo $h = b - a$, con frontera dos curvas contenidas en los slices a alturas a y b dado por la Proposición 4.3. Trasladamos el anillo A_h mediante traslaciones hiperbólicas a lo largo de la geodésica $\{(0, y, 0), y > 0\}$ de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, que deja la coordenada t fija. Podemos asegurar que existe un anillo trasladado \bar{A}_h tal que:

- $\Pi(\bar{A}_h) \subset \Pi(V)$,
- $\partial\bar{A}_h \cap M_0 = \emptyset$, y
- \bar{A}_h corta a M_0 en un entorno de cada curva que compone la frontera asintótica de M_0 en la región \bar{R} , véase la Figura 4.2.

En esta situación, como V separa a \bar{A}_h , existen al menos dos curvas compactas $\gamma_1, \gamma_2 \subset \bar{A}_h \cap M_0$, una por encima de V y otra por debajo. Supongamos primero que las curvas son no nulhomotópicas en el anillo \bar{A}_h . En tal caso, existe una superficie área-minimizante $\mathcal{A} \subset \bar{A}_h$ con frontera $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Un argumento estándar para superficies área-minimizantes (véase por ejemplo [15, 45]) nos dice que podemos construir entonces una nueva superficie área-minimizante no diferenciable pegando parte de la superficie M_0 con \mathcal{A} a lo largo de las curvas γ_1 y γ_2 , lo cual es una contradicción ya que una superficie área-minimizante tiene que ser diferenciable, véase la Figura 4.2 (izquierda).

Supongamos ahora que γ_1 es nulhomotópica en \bar{A}_h , esto es, γ_1 bordea un disco en \bar{A}_h . Si γ_1 también bordea un disco en M_0 , entonces reemplazando un disco por el otro tenemos una contradicción al igual que antes. Si γ_1 no bordea un disco en M_0 , entonces existe un número finito de curvas $\gamma_1^i \subset \bar{A}_h \cap M_0$, $i = 1, \dots, n$, por encima de V y una superficie área-minimizante $\mathcal{M}_0 \subset M_0$ con frontera $\gamma_1 \cup \gamma_1^1 \cup \dots \cup \gamma_1^n$. Entonces, repetimos el argumento de reemplazamiento, pegando parte de la superficie \bar{A}_h con \mathcal{M}_0 a largo de $\gamma_1, \gamma_1^1, \dots, \gamma_1^n$, véase la Figura 4.2 (derecha). \square

4.3. El Teorema de la Banda.

En esta sección probaremos el Teorema 4.13, para lo cual usaremos el Teorema de la Banda de Lima [48], que afirma que una superficie mínima propiamente inmersa en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con topología finita y estrictamente

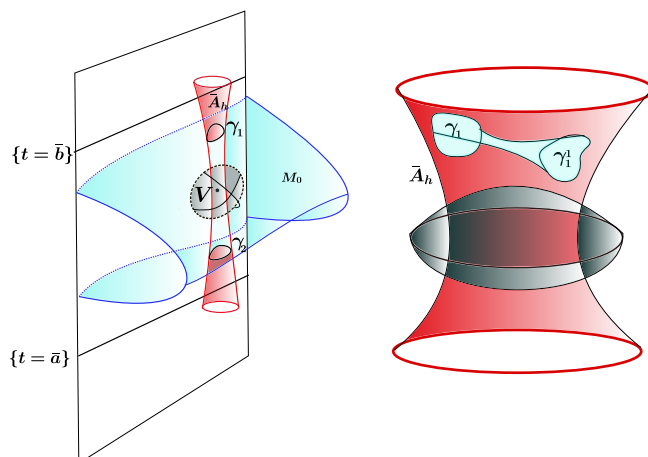


Figura 4.2: Un dibujo dentro de la región G_ϵ , en azul la superficie M_0 , en rojo el anillo \bar{A}_h y en gris el entorno V . A la izquierda el caso de que γ_1 y γ_2 no son nulhomotópica en \bar{A}_h . A la derecha el caso de que γ_1 es nulhomotópica en \bar{A}_h .

contenida en una *banda generalizada* tiene finales multigráficos, según la siguiente definición:

Definición 4.12. [Definition 1 [48]] Decimos que una región \mathcal{R} en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ es una banda generalizada si las siguientes condiciones se cumplen:

1. \mathcal{R} es un dominio acotado por dos grafos verticales enteros S_1 y S_2 con altura acotada, y los planos tangentes de S_1 y S_2 no se acercan a un plano vertical, esto es, existe una constante $c > 0$ tal que $\nu_i^2 > c$, siendo ν_i la función ángulo de S_i .
2. Hay una aplicación $\Psi : \mathcal{R} \times (\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]) \rightarrow \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ con regularidad \mathcal{C}^1 tal que, para cada $p \in \mathcal{R}$, tenemos que $C(p) = \Psi(p, \mathbb{S}^1 \times [-1, 1])$ es un anillo mínimo conteniendo a p y sus curvas de la frontera quedan una por encima de \mathcal{R} y otra por debajo de \mathcal{R} . Además, cualquiera dos anillos de la familia $\{C(p) : p \in \mathcal{R}\}$ son isométricos entre ellos.

El objetivo será probar que la región \mathcal{R} , siendo \mathcal{R} la región entre el grafo entero mínimo G_1 en el modelo del cilindro cuya frontera asintótica es una curva cerrada que se proyecta gráficamente sobre $\partial\mathbb{H}^2$ y cuya función ángulo-

lo no se acerca a 0, y su copia trasladada $G_2 := G_1 + (0, 0, \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi - \epsilon$ con $\epsilon < \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, es una banda generalizada salvo en un conjunto compacto. Probaremos entonces el siguiente resultado:

Teorema 4.13. *Sea M una superficie mínima propiamente inmersa con topología finita en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y contenida en la región entre G_1 y G_2 . Entonces, cada final de M es un multigrafo. Además:*

1. *Si M es embebida, cada final tiene un entorno que es un grafo sobre el complementario de un disco en \mathbb{H}^2*
2. *Si M es embebida y tiene un único final, entonces es un grafo entero.*

Consideraremos ahora el modelo del cilindro, por lo que identificamos $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \equiv \mathbb{S}^1 \equiv \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Para dos puntos $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ denotaremos por $(\theta_1, \theta_2) \subset \partial_\infty \mathbb{H}^2$ al arco $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ que une $e^{i\theta_1}$ con $e^{i\theta_2}$ en sentido antihorario, dónde identificaremos $\theta \in \mathbb{R}$ con $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{H}^2$.

Lema 4.14. *Dados $\theta_1, \theta_2 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$, sea $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ la geodésica que une θ_1 y θ_2 , y D la componente conexa de $\mathbb{H}^2 \setminus \gamma$ tal que $(\theta_1, \theta_2) \subset \partial D$. Entonces hay un anillo compacto mínimo $A \subset \Pi^{-1}(D)$ tal que la región $\{a < t < b\}$, con $b - a < \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$, separa las dos componentes de la frontera de A . Además, si $p \in \Pi^{-1}(D) \cap \{a < t < b\}$ está suficientemente cerca de la frontera asintótica $\partial_\infty D \times (a, b)$ en distancia euclídea, podemos elegir A conteniendo a p .*

Demostración. Consideramos el anillo compacto mínimo A_h en el modelo del semi-espacio con frontera dos curvas contenidas en slices a alturas 0 y h con $b - a < h < \pi\sqrt{1 + 4\tau^2}$ dado por la Proposición 4.3. Las curvas de la frontera trasladadas hiperbólicamente a lo largo de la geodésica horizontal de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ $\{(0, y, 0), y > 0\}$ pueden ser parametrizadas como:

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda &= (\lambda x_1, \lambda y_1, 0), & (x_1, y_1) &\in \gamma_1 \subset \mathbb{H}^2, \\ \beta_\lambda &= (\lambda x_2, \lambda y_2, h), & (x_2, y_2) &\in \gamma_2 \subset \mathbb{H}^2. \end{aligned}$$

Consideramos la imagen de estas curvas por la isometría ϕ de la Proposición 1.2 entre los modelos obteniendo:

$$\begin{aligned}\phi \circ \alpha_\lambda &= \\ &\left(1 - \frac{2(1 + \lambda y_1)}{1 + 2\lambda y_1 + \lambda^2(x_1^2 + y_1^2)}, \frac{-2\lambda x_1}{\lambda^2 x_1^2 + (1 + \lambda y_1)^2}, -4\tau \arctan\left(\frac{\lambda x_1}{1 + \lambda y_1}\right)\right), \\ \phi \circ \beta_\lambda &= \\ &\left(1 - \frac{2(1 + \lambda y_2)}{1 + 2\lambda y_2 + \lambda^2(x_2^2 + y_2^2)}, \frac{-2\lambda x_2}{\lambda^2 x_2^2 + (1 + \lambda y_2)^2}, -4\tau \arctan\left(\frac{\lambda x_2}{1 + \lambda y_2}\right) + h\right).\end{aligned}$$

Tenemos que la separación vertical entre las curvas α_λ y β_λ es igual a:

$$v_\lambda = \max_{(x_1, y_1) \in \gamma_1} \left\{ -4\tau \arctan\left(\frac{\lambda x_2}{1 + \lambda y_2}\right) + h \right\} - \min_{(x_2, y_2) \in \gamma_2} \left\{ -4\tau \arctan\left(\frac{\lambda x_1}{1 + \lambda y_1}\right) \right\}.$$

Como γ_1 y γ_2 son curvas compactas, existen constantes M_1 , m_2 y M_2 tales que $|x_i| < M_1$ y $0 < m_2 < y_i < M_2$ para $i = 1, 2$. En consecuencia, v_λ tiende a h cuando λ tiende a 0. Dado $\epsilon > 0$, existe $\lambda_0 > 0$ de forma que, para todo $\lambda < \lambda_0$, tenemos que $h - \epsilon < v_\lambda < h + \epsilon$. Para todo $\epsilon > 0$, podemos elegir $\lambda > 0$ suficientemente pequeño de forma que $\Pi(A_h)$ esté contenido en un entorno pequeño del punto $(-1, 0)$, y $\phi \circ \alpha_\lambda$ y $\phi \circ \beta_\lambda$ estén contenidas en las regiones $\{-\epsilon < t < \epsilon\}$ y $\{h - \epsilon < t < h + \epsilon\}$, respectivamente. Por tanto, podemos enviar el anillo A_h a la región $\Pi^{-1}(D)$ mediante rotaciones alrededor de $\{0, 0\} \times \mathbb{R}$ (que conservan la coordenada t), y después trasladar verticalmente el anillo resultante de forma que la región $\{a < t < b\}$ separe las curvas de la frontera de A_h . Obsérvese que si el punto p está suficientemente cerca de $\partial_\infty D \times (a, b)$, entonces eligiendo λ_0 y la rotación alrededor de $\{0, 0\} \times \mathbb{R}$ de forma apropiada podemos asegurar que $p \in A_h$. \square

Demostración del Teorema 4.13. Identificamos la frontera asintótica de \mathbb{H}^2 con \mathbb{S}^1 como se ha indicado anteriormente. La frontera asintótica de los grafos G_1 y $G_2 = G_1 + (0, 0, \sqrt{1 + 4\tau^2}\pi - \epsilon)$ son curvas que pueden ser expresadas como gráficas de funciones continuas $g_1, g_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$. En particular son uniformemente continuas puesto que \mathbb{S}^1 es compacto. Sea M una superficie mínima propiamente inmersa entre G_1 y G_2 con posiblemente frontera finita contenida en un conjunto compacto de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$.

Afirmamos lo siguiente:

Afirmación 4.15. Para todo $0 < \epsilon_1 < \frac{\epsilon}{4}$ existen un número finito de regiones $D_i \subset \mathbb{H}^2$ y puntos $\theta_i \in \partial_\infty D_i$ cíclicamente ordenados, tales que:

1. $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$,
2. $|g_j(\theta_i) - g_j(\theta)| < \epsilon_1$, para todo $\theta \in \partial_\infty D_i$, $j = 1, 2$,
3. $M \cap \Pi^{-1}(D_i) \subset \Pi^{-1}(D_i) \cap \{g_1(\theta_i) - 2\epsilon_1 < t < g_2(\theta_i) + 2\epsilon_1\}$,
4. $\bigcup_i \partial_\infty D_i = \partial_\infty \mathbb{H}^2$ y
5. $\partial M \subset \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) \setminus (\bigcup_i \Pi^{-1}(D_i))$.

Elegimos θ_1 un punto arbitrario en $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Se tiene que existe $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeño tal que, si γ_1 es la geodésica que une los puntos $\theta_1 - \delta_1$ y $\theta_1 + \delta_1$, y D_1 es la región de $\mathbb{H}^2 \setminus \gamma_1$ que contiene a θ_1 , entonces $|g_j(\theta_1) - g_j(\theta)| < \epsilon_1$ para todo θ en el arco $(\theta_1 - \delta_1, \theta_1 + \delta_1)$ y $j = 1, 2$. Eligiendo δ_1 más pequeño si es necesario, podemos asegurar que $M \cap \Pi^{-1}(D_1) \subset \Pi^{-1}(D_1) \cap \{g_1(\theta_1) - 2\epsilon_1 < t < g_2(\theta_1) + 2\epsilon_1\}$ y $\partial M \subset \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) \setminus \Pi^{-1}(D_1)$.

Después de esto, elegimos $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\delta_1}{2}$, podemos encontrar otro $\delta_2 > 0$ tal que, si γ_2 es la geodésica que une los puntos $\theta_2 - \delta_2$, $\theta_2 + \delta_2$, y D_2 es la región de $\mathbb{H}^2 \setminus \gamma_2$ que contiene a θ_2 , entonces $|g_j(\theta_2) - g_j(\theta)| < \epsilon_1$ para todo θ en el arco $(\theta_2 - \delta_2, \theta_2 + \delta_2)$ y $j = 1, 2$ y además $M \cap \Pi^{-1}(D_2) \subset \Pi^{-1}(D_2) \cap \{g_1(\theta_2) - 2\epsilon_1 < t < g_2(\theta_2) + 2\epsilon_1\}$, y $\partial M \subset \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) \setminus \Pi^{-1}(D_2)$.

Continuando este proceso, construimos las sucesiones de regiones D_i y puntos θ_i . Como las funciones g_1 y g_2 son uniformemente continuas, podemos elegir todos los $\delta_i > \delta_0$, para cierto $\delta_0 > 0$. Como $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \cong \mathbb{S}^1$, es compacto podemos asegurar entonces que existe un número finito de regiones D_1, \dots, D_n y puntos $\theta_1, \dots, \theta_n$ tales que $\bigcup_i \partial_\infty D_i = \partial_\infty \mathbb{H}^2$ y la afirmación queda probada.

Consideramos el disco \mathcal{D} de \mathbb{H}^2 centrado en el origen con radio suficientemente grande de forma que $\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{D} \subset \bigcup_i D_i$. Usando el Lema 4.14, tenemos que existe un anillo A_1 contenido en la región $\Pi^{-1}(D_1 \setminus \mathcal{D})$ y cuyas curvas de la frontera están una por encima de $\{t = g_2(\theta_1) + 2\epsilon_1\}$ y la otra por debajo de $\{t = g_1(\theta_1) - 2\epsilon_1\}$. Podemos rotar A_1 alrededor de $\{0, 0\} \times \mathbb{R}$, quedando este dentro de la región $\Pi^{-1}(D_1 \setminus \mathcal{D})$, hasta llegar a la región $\Pi^{-1}((D_1 \cap D_2) \setminus \mathcal{D})$. Nótese que las curvas de la frontera de los anillos rotados no cortan a $M \cap \Pi^{-1}(D_1)$. Ahora aplicamos la traslación vertical

$$(x, y, t) \mapsto (x, y, t + (g_j(\theta_2) - g_j(\theta_1)))$$

a este anillo. Tenemos que una de las curvas frontera del anillo trasladado está por encima de $\{t = g_2(\theta_2) + 2\epsilon_1\}$ y la otra está por debajo de $\{t =$

$g_1(\theta_2) - 2\epsilon_1\}$. Además estas curvas no cortan a M ya que $|(g_j(\theta_2) - g_j(\theta_1))| < \epsilon_1$, $j = 1, 2$. De forma análoga al Lema 4.14, si $p \in M \cap \Pi^{-1}(D_2)$ es un punto suficientemente cerca de la frontera asintótica $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ en distancia euclídea, podemos trasladar dicho anillo hacia un punto en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y rotarlo alrededor de $\{0, 0\} \times \mathbb{R}$ hasta que este contenga al punto p . De nuevo las curvas frontera de todos los anillos trasladados y rotados no intersecan a M ya que la separación entre estas curvas está controlada.

Llamamos A_2 a este anillo que se obtiene de A_1 mediante las isometrías referidas. Iterando estos pasos obtenemos una familia de anillos A_i , $i = 1, \dots, n$, tal que:

1. $A_i \subset \Pi^{-1}(D_i \setminus \mathcal{D})$,
2. $\partial A_i \cap M = \emptyset$,
3. todos los anillos A_i son isométricos y existen aplicaciones diferenciables

$$H_i : [0, 1] \rightarrow \{A : A \text{ anillos mínimos en } \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\text{tales que } H_i(0) = A_i, \quad H_i(1) = A_{i+1} \text{ y } \partial H_i(t) \cap M = \emptyset.$$

Para concluir la prueba adaptaremos las ideas de Lima en [48] y de Collin, Hauswirth y Rosenberg en [12]. Para ello utilizaremos un resultado conocido como el "Dragging Lemma":

Lema 4.16. [Dragging Lemma [12]] *Sea M una superficie propiamente inmersa en una 3-variedad riemanniana completa N . Sea A una superficie con frontera y $f : A \times [0, 1] \rightarrow N$ una aplicación \mathcal{C}^1 tal que para todo $0 \leq t \leq 1$ $S(t) := f(A \times \{t\})$ es una superficie mínima que cumple:*

- $\partial S(t) \cap M = \emptyset$ para todo $0 \leq t \leq 1$,
- $S(0) \cap M \neq \emptyset$.

Entonces, existe un camino continuo $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ de clase \mathcal{C}^1 en casi todo punto, tal que $\alpha(t) \in S(t) \cap M$ para todo $t \in [0, 1]$. Además se puede prescribir el valor inicial $\alpha(0) \in S(0) \cap M$.

La idea va a ser usar la familia de anillos A_i y el Dragging Lemma para reconstruir la prueba de Lima en [48].

Sea M una superficie propiamente inmersa contenida entre G_1 y G_2 con posible frontera finita contenida en un conjunto compacto. Como M tiene topología finita y estamos interesados en los finales de M , podemos suponer que M es o bien simplemente conexa ($\partial M = \emptyset$) o bien un anillo con frontera ($\partial M \neq \emptyset$).

Elegimos un conjunto compacto B (puede ser una bola métrica de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$) tal que:

1. $\partial M \subset B$,
2. $A_i \subset B$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$,
3. $M \setminus B \subset \bigcup_i \Pi^{-1}(D_i \setminus \mathcal{D})$,
4. $M \cap B$ tiene un número finito de componentes conexas (esto es cierto puesto que M es propia).

Sea p_0 un punto en $A_1 \subset B$. Consideramos un conjunto compacto $K \supset B$ tal que cualesquiera dos puntos de $M \cap B$ pueden unirse por un camino en K . Mostraremos que, si $p \in M$ esta suficientemente lejos de K , entonces el plano tangente $T_p M$ no puede ser vertical y por tanto M , es un multigrafo. Para ello vamos a probar los dos siguientes pasos:

- Paso 1: Si $T_p M$ es vertical y \mathcal{M} es un Tall Rectangle (véase (1.25)) tangente a M en p , entonces $\mathcal{M} \cap K \neq \emptyset$.
- Paso 2: Existe $c > 0$ tal que, si la distancia de p al compacto K en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ es mayor que c , entonces $\mathcal{M} \cap K = \emptyset$.

Demostración del Paso 1. Sea \mathcal{M} un Tall Rectangle tangente a M en p . Supongamos por reducción al absurdo que $\mathcal{M} \cap K = \emptyset$. Podemos suponer, aplicando las ideas de Lima (véase [48, Proposition 4 y Remark 3]), que \mathcal{M} separa la región entre los dos grafos enteros en dos componentes conexas, $\mathcal{M}(+)$ y $\mathcal{M}(-)$, donde asumiremos que $K \subset \mathcal{M}(+)$. Existe un entorno U de p en M , tal que $U \cap \mathcal{M}$ consiste en un sistema equiangular de al menos dos curvas pasando por p . Sean σ_1 y σ_2 distintas componentes conexas de $U \setminus \mathcal{M}$, contenidas en $\mathcal{M}(+)$.

Afirmación 4.17. Las componentes conexas σ_1 y σ_2 están contenidas en diferentes componentes conexas de $M \cap \mathcal{M}(+)$, que llamaremos M_1 y M_2 .

Supongamos por reducción al absurdo que σ_1 y σ_2 están contenidas en la misma componente conexa de $M \cap \mathcal{M}(+)$. Entonces existe un camino α contenido en $M \cap \mathcal{M}(+)$ uniendo un punto $q_1 \in \sigma_1$ con otro punto $q_2 \in \sigma_2$. Además, podemos unir q_1 con q_2 por un camino $\bar{\alpha}$ en U que pasa por el punto p , tal que $\bar{\alpha} \setminus \{p\} \subset \mathcal{M}(+)$. Sea $\Lambda = \alpha \cup \bar{\alpha} \subset \overline{\mathcal{M}(+)}$. Tenemos que Λ bordea un disco en M o bien $\Lambda \cup \partial M$ bordea un anillo en M . Denotamos por D al disco o el anillo que bordea Λ o $\Lambda \cup \partial M$ según el caso. Por la construcción de Λ , D contiene puntos en $\mathcal{M}(-)$ y $\partial D \subset \mathcal{M}(+)$. Como D es compacto hay un punto que es el más alejado de \mathcal{M} en $\mathcal{M}(-)$, y por tanto podemos trasladar hiperbólicamente \mathcal{M} hasta alcanzar el último punto de contacto, donde ambas superficies serán tangentes y el Tall Rectangle trasladado de M quedará a un lado, llegando a contradicción con el principio del máximo. Esto prueba la afirmación.

Sea \mathcal{M}_0 una pequeña traslación hiperbólica de \mathcal{M} de forma que \mathcal{M}_0 interseque a σ_i en $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$.

Afirmación 4.18. Las componentes conexas $S_{x_i} = M_i \cap \mathcal{M}_0$ no son compactas.

Supongamos primero que las dos son compactas. En este caso, si S_{x_i} bordea un disco, usando la misma idea que en la afirmación anterior llegamos a una contradicción con el principio del máximo. Supongamos entonces $S_{x_1} \cup S_{x_2}$ bordea un anillo compacto disjunto de la frontera ∂M cuya frontera está contenida en \mathcal{M}_0 . Esto no es posible ya que de nuevo encontraríamos un Tall Rectangle \mathcal{M}_t tangente al anillo y que se queda a un lado de este, llegando a así a contradicción con el principio del máximo de nuevo.

Supongamos ahora que S_{x_1} no es compacta pero S_{x_2} sí es compacta. Como S_{x_2} no puede bordear un disco en M , entonces $S_{x_2} \cup \partial M$ bordea un anillo. Además, por el principio del máximo, dicho anillo está contenido en $\mathcal{M}(+)$. En este caso, podemos encontrar un punto $z \in S_{x_1}$ arbitrariamente lejos de \mathcal{M} y suficientemente cerca de la frontera asintótica en distancia euclídea. Se tiene que $z \in \Pi^{-1}(D_i \setminus \mathcal{D})$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Eligiendo z suficientemente cerca de la frontera asintótica, podemos tomar el anillo A_i conteniendo a z y contenido en $\mathcal{M}(+)$ y llamamos a este anillo A_z . Usan-

do las propiedades de la familia de anillos A_k , podemos encontrar una aplicación continua $f : [0, l] \rightarrow \{A : A \text{ anillos mínimos en } \widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})\}$ tal que $f(0) = A_z$, $f(l) = A_1$ y $\partial f(t) \cap M = \emptyset$. Por el Dragging Lemma encontramos un camino en $M \cap \mathcal{M}(+)$ uniendo z con un punto $q \in M \cap B$. Unimos ahora q con ∂M por un camino en $M \cap K$. Sea β la unión de estos caminos. Como $K \subset \mathcal{M}(+)$, entonces $\beta \subset M \cap \mathcal{M}(+)$, lo que contradice que S_{x_1} y S_{x_2} estén en diferentes componentes conexas de $M \cap \mathcal{M}(+)$. Esto prueba la afirmación.

Para concluir el paso 1, como S_{x_j} , $j = 1, 2$, son no compactas, como antes consideramos puntos $z_j \in S_{x_j}$ suficientemente cerca de la frontera asintótica euclídeamente, de forma que z_j esté contenido en algún $\Pi^{-1}(D_{i_j} \setminus \mathcal{D})$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$, el anillo A_{z_j} contenga al punto z_j y $A_{z_j} \subset \mathcal{M}(+)$. De nuevo usando las propiedades de los anillos A_k y aplicando el Dragging Lemma, encontramos un camino en $M \cap \mathcal{M}(+)$ conectando z_j con un punto $q_j \in M \cap B$. Conectando ahora q_1 con q_2 por un camino en $M \cap K$ tenemos una contradicción puesto que z_1 y z_2 pertenecen a diferentes componentes conexas de $M \cap \mathcal{M}(+)$.

La prueba del paso 2 es idéntica a la prueba del paso 2 de Lima en la prueba del Teorema de la Banda en [48] y se sigue directamente con las mismas ideas, por lo que la omitiremos. El paso 1 junto con el paso 2 muestran que cada final de Σ es un multigrafo. Para el caso embebido se concluye con la misma demostración que Lima, véase Claim 3 y Claim 4 en la prueba del Teorema de la Banda en [48]. \square

Nota 4.19. La prueba es también válida cuando $\tau = 0$. Aquí vemos que esta cota es también válida cuando los dos grafos enteros mínimos no son necesariamente planos horizontales mínimos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, extendiendo así el Teorema de la Banda de Collin Hauswirth y Rosenberg [12] a este tipo de regiones.

Nota 4.20. El apartado (b) en las superficies invariantes de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ (1.21) muestra que existen ejemplos de superficies mínimas tal que la altura de la curva asintótica, ver Definición 4.1, es menor que $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$ en cada punto. Por el Teorema 4.11, estas superficies no son área-minimizantes. Además están contenidas entre dos grafos enteros (dos planos inclinados) a distancia menor que $\sqrt{1 + 4\tau^2}\pi$ en algunos casos y no son grafos enteros. Esto muestra que la hipótesis de ser un grafo acotado en el Teorema 4.13

es necesaria.

4.4. Ejemplos de Scherk helicoidales.

Vamos a construir algunos ejemplos interesantes extendiendo las técnicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. Estos ejemplos se pueden ver como soluciones de un problema de Plateau asintótico con componentes en las fronteras horizontales $\mathbb{H}^2 \times \{\pm\infty\}$. La idea es considerar la solución de un problema de Jenkins-Serrin sobre cierto dominio y luego extender la superficie mediante reflexiones respecto a geodésicas horizontales y verticales, de forma similar a como se hizo en la Sección 2.2.1.

Mostramos que la misma construcción en [84] para superficies mínimas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ puede ser adaptada a $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$, probando que la conjetura de Calabi-Yau para superficies mínimas embebidas no se cumple en $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ como era de esperar.

Consideramos el modelo del cilindro para $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y coordenadas complejas para \mathbb{H}^2 . Consideramos los puntos $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = e^{\frac{i\pi}{2n}}$ y 0 el origen. Sea $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ el triángulo con lados los arcos geodésicos $\overline{0\theta_1}$, $\overline{\theta_1\theta_2}$ y $\overline{0\theta_2}$. Consideramos la única solución al problema de Jenkins-Serrin con valores frontera 0 sobre $\overline{0\theta_1}$, $+\infty$ sobre $\overline{\theta_1\theta_2}$ y h sobre $\overline{0\theta_2}$ para un cierto $h > 0$ (aquí las condiciones de Jenkins-Serrin se cumplen trivialmente por ser Ω un triángulo). Como las reflexiones sobre geodésicas horizontales son isometrías de $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ y la solución contiene dos geodésicas horizontales que se proyectan sobre los segmentos $\overline{\theta_1\theta_2}$ y $\overline{0\theta_2}$ de \mathbb{H}_2 , podemos extender la superficie mediante sucesivas reflexiones sobre las geodésicas horizontales hasta obtener una superficie simplemente conexa \widetilde{M}_{nh} cuya única frontera es la recta vertical $\{0\} \times \mathbb{R}$. Considerando la rotación de ángulo π a lo largo de esta recta vertical, podemos extender \widetilde{M}_{nh} a una superficie mínima completa M_{nh} que es invariante por la traslación vertical de longitud $4nh$ y el movimiento helicoidal compuesto por la rotación de ángulo $\frac{\pi}{n}$ alrededor de 0 y la traslación vertical de longitud $2h$.

Proposición 4.21. *Dados $n \geq 1$ y $h > 0$, M_{nh} es una superficie mínima completa y embebida que no es propia.*

Demostración. Llamemos Ω_i al dominio obtenido rotando Ω un ángulo $\frac{\pi}{2n}(i-1)$ alrededor del origen, y sea $U_i = \overline{\Omega_i} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4n$. Probaremos que

$M_{nh} \cap U_1$ no tiene auto-intersecciones. Se tiene que $\widetilde{M}_{nh} \cap U_1$ consiste en una unión de grafos con valores frontera:

$$\begin{cases} 4knh, & \text{sobre } \overline{0\theta_1}, \\ h + 4knh, & \text{sobre } \overline{0\theta_2}, \\ +\infty, & \text{sobre } \overline{\theta_1\theta_2}, \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Consideramos ahora la unión de estos grafos que forman $\widetilde{M}_{nh} \cap U_1$ rotados por un ángulo π respecto de la línea recta $\{0\} \times \mathbb{R}$ intersecados con U_1 , que consiste en la unión de los grafos con valores frontera

$$\begin{cases} 2nh + 4knh, & \text{sobre } \overline{0\theta_1}, \\ (2n + 1)h + 4knh, & \text{sobre } \overline{0\theta_2}, \\ +\infty & \text{sobre } \overline{\theta_1\theta_2}, \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $M_{nh} \cap U_1$ está formado por la pieza fundamental y por traslaciones verticales de longitud $2knh$, $k \in \mathbb{Z}$. Esto nos dice que $M_{nh} \cap U_1$ no tiene auto-intersecciones. Repitiendo este argumento, se tiene lo mismo para $M_{nh} \cap U_i$. Esto prueba que M_{nh} es embebida. Obsérvese que M_{nh} se acumula en el plano vertical $\overline{\theta_1\theta_2} \times \mathbb{R}$, y por tanto no es propia. \square

Se puede generalizar esta construcción de la siguiente manera: Sea $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 = e^{\frac{i\pi}{2n}}$, sea c el arco más corto en $\partial_\infty \mathbb{H}$ uniendo θ_1 y θ_2 , y sean q_i, \dots, q_m puntos en el arco c cíclicamente ordenados. Sea Ω la región bordeada por los arcos geodésicos $\overline{0\theta_1}$, $\overline{\theta_1 q_1}, \dots, \overline{q_i q_{i+q}}, \dots, \overline{q_m \theta_2}$, $\overline{\theta_2 0}$. Supongamos que Ω satisface la condición de Jenkins-Serrin con valores frontera 0 sobre $\overline{0\theta_1}$, h sobre $\overline{\theta_2 0}$ y alternadamente $\pm\infty$ sobre el resto de los lados. Entonces, después de considerar sucesivas simetrías sobre las geodésicas horizontales y la recta vertical $\{0\} \times \mathbb{R}$ como en el ejemplo anterior, obtenemos una superficie completa, mínima, embebida, simplemente conexa que no es propia.

Bibliografía

- [1] U. Abresch, H. Rosenberg. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Acta Math.*, **193** (2004), no. 2, 141–174.
- [2] U. Abresch, H. Rosenberg. Generalized Hopf differentials *Mat. Contemp.*, **28** (2005), no. 28, 1–28.
- [3] M. Anderson. Complete minimal varieties in hyperbolic space. *Invent. Math.*, **69** (1982), no. 3, 477–494.
- [4] M. Anderson. Complete minimal hypersurfaces in hyperbolic manifolds. *Comment. Math. Helv.*, **58** (1983), no. 2, 264–290.
- [5] J. Barbosa, M. do Carmo, J. Eschenburg. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.*, **197** (1988), no. 1, 123–138.
- [6] S. Cartier. Saddle towers in Heisenberg space. *Asian J. Math.*, **20** (2016), no. 4, 629–644.
- [7] J. Castro-Infantes. On the asymptotic Plateau Problem in $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$. *J. Math. Anal. Appl.*, **507** (2022), no. 2, Paper No. 125831, 23 pp.
- [8] J. Castro-Infantes, J. M. Manzano. Genus one minimal k -noids and saddle towers in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1–21. doi:10.1017/S1474748021000591.
- [9] J. Castro-Infantes, J. M. Manzano, M. Rodríguez. A construction of constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and the Krust property. *Int. Math. Res. Not. r nab353*, (2021) doi:10.1093/imrn/r nab353.
- [10] H. Choi, R. Schoen. The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature. *Invent. Math.*, **81** (1985), no. 3, 387–394.

-
- [11] T. H. Colding, W. P. Minicozzi II. The Calabi-Yau conjectures for embedded surfaces. *Ann. of Math.*, **167** (2008), no. 1, 211–243.
- [12] P. Collin, L. Hauswirth, H. Rosenberg. Properly immersed minimal surfaces in a slab of $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$, \mathbb{H} the hyperbolic plane. *Arch. Math.* **104** (2015), no. 5, 471–484.
- [13] P. Collin, L. Hauswirth, M. Nguyen. Construction of minimal annuli in $\widehat{\text{PSL}}_2(\mathbb{R}, \tau)$ via a variational method. Preprint available at arXiv:2109.13136 [math.DG].
- [14] P. Collin, H. Rosenberg. Construction of harmonic diffeomorphisms and minimal graphs. *Ann. of Math. (2)*, **172** (2010), no. 3, 1879–1906.
- [15] B. Coskunuzer. Minimal surfaces with arbitrary topology in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Preprint available at arXiv:1404.0214v2 [math.DG].
- [16] B. Coskunuzer. Asymptotic plateau problem in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *Selecta Math. (N.S.)*, **24** (2018), no. 5, 4811–4838
- [17] B. Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, **82** (2007), no. 1, 87–131.
- [18] B. Daniel. Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361** (2009), no. 12, 6255–6282.
- [19] B. Daniel. The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg group. *Int. Math. Res. Not.*, **2011** (2011), no. 3, 674–695.
- [20] B. Daniel, L. Hauswirth. Half-space theorem, embedded minimal annuli and minimal graphs in the Heisenberg group. *Proc. London Math. Soc.*, **98** (2009), no. 3, 445–470.
- [21] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab. *Minimal Surfaces II: Boundary Regularity*. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften, **295–296** (1992), Springer-Verlag. ISBN: 9780387531700.
- [22] M. Domínguez-Vázquez, J. M. Manzano. Isoparametric surfaces in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ -spaces. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, **22** (2021), no. 1, 269–285.

- [23] J.M. Espinar, H. Rosenberg. Complete constant mean curvature surfaces in homogeneous spaces. *Comment. Math. Helv.*, **86** (2011), no. 3, 659–674.
- [24] I. Fernández, P. Mira. A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Differential Geom. Appl.*, **25** (2007), no. 3, 281–289.
- [25] I. Fernández, P. Mira. Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Amer. J. Math.*, **129** (2007), no. 4, 1145–1181.
- [26] I. Fernández, P. Mira. Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361** (2009), no. 11, 5737–5752.
- [27] L. Ferrer, F. Martín, R. Mazzeo, M. Rodríguez. Properly embedded minimal annuli in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Math. Ann.*, **375** (2019), no. 1-2, 541–594.
- [28] A. Folha, S. Melo. The Dirichlet problem for constant mean curvature graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ over unbounded domains. *Pacific J. Math.*, **251** (2011), no. 1, 37–65.
- [29] A. Folha, C. Peñafiel. Minimal graphs in $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R}, \tau)$. *Mat. Contemp.*, **43** (2014), 111–132.
- [30] C. Figueroa, F. Mercuri, R. Pedrosa. Invariant surfaces of the Heisenberg groups. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **177** (1999), 173–194.
- [31] L. Hauswirth. Minimal surfaces of Riemann type in three-dimensional product manifolds. *Pacific J. Math.*, **224** (2006), no. 1, 91–117.
- [32] L. Hauswirth, A. Menezes. On doubly periodic minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with finite total curvature in the quotient space. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **195** (2016), no. 5, 1491–1512.
- [33] L. Hauswirth, A. Menezes, M. Rodríguez. On the characterization of minimal surfaces with finite total curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **58** (2019), no. 2, Paper No. 80, 24 pp.
- [34] L. Hauswirth, A. Menezes, M. Rodríguez. Slab Theorem and Halfspace Theorem for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Preprint available at arXiv:2105.11428 [math.DG].

-
- [35] L. Hauswirth, B. Nelli, R. Sa Earp, E. Toubiana. Minimal ends in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with finite total curvature and a Schoen type theorem. *Adv. Math.*, **274** (2015), 199–240.
- [36] L. Hauswirth, H. Rosenberg. Minimal surfaces of finite total curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Mat. Contemp.*, **31** (2006), 65–80.
- [37] L. Hauswirth, H. Rosenberg, J. Spruck. On complete mean curvature $\frac{1}{2}$ surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Comm. Anal. Geom.*, **16** (2008), no. 5, 989–1005.
- [38] L. Hauswirth, H. Rosenberg, J. Spruck. Infinite boundary value problems for constant mean curvature graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. *Amer. J. Math.*, **131** (2009), no. 1, 195–226.
- [39] L. Hauswirth, R. Sa Earp, E. Toubiana. Associate and conjugate minimal immersions in $M \times \mathbb{R}$. *Tohoku Math. J.*, **60** (2008), 267–286.
- [40] A. Huber. On subharmonic functions and differential geometry in the large. *Comment. Math. Helv.*, **32** (1957), 13–72.
- [41] H. Jenkins, J. Serrin. The Dirichlet problem for the minimal surface equation, with infinite data. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 102–106.
- [42] J. Jürgen. Conformal mappings and the Plateau-Douglas problem in Riemannian manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, **359** (1985), 37–54.
- [43] H. Karcher. Construction of minimal surfaces. *Surveys in Geometry*, 1–96. University of Tokyo, 1989, and Lecture Notes No.12, SFB256, Bonn, 1989.
- [44] B. Kloeckner, R. Mazzeo. On the asymptotic behavior of minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Indiana Univ. Math. J.*, **66** (2017), no. 2, 631–658.
- [45] P. Klaser, A. Menezes, A. Ramos. On the asymptotic Plateau Problem for area minimizing surfaces in $\mathbb{E}(-1, \tau)$. *Ann. Global Anal. Geom.*, **58** (2020), no. 1, 1–17.
- [46] H.B. Lawson. Complete minimal surfaces in \mathbb{S}^3 . *Ann. of Math. (2)*, **92** (1970), no. 3, 335–374.

- [47] C. Leandro, H. Rosenberg. Removable singularities for sections of Riemannian submersions of prescribed mean curvature. *Bull. Sci. Math.*, **133** (2009), no. 4, 445–452.
- [48] V. Lima. The slab theorem for minimal surfaces in $\mathbb{E}(-1, \tau)$. *Ann. Global Anal. Geom.*, **51** (2017), no. 2, 189–208.
- [49] B. Lipman. Survey of local properties of solutions of elliptic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **9** (1956), 339–350.
- [50] J. M. Manzano. On the classification of Killing submersions and their isometries. *Pac. J. Math.* **270** (2014), no. 2, 367–692.
- [51] J. M. Manzano. Superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos. *PhD. Thesis Universidad de Granada*, (2013) ISBN: 9788490282694
- [52] J. M. Manzano, B. Nelli. Height and area estimates for constant mean curvature graphs in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ -spaces. *J. Geom. Anal.*, **27** (2017), no. 4, 3441–3473.
- [53] J. M. Manzano, M. Rodríguez. On complete constant mean curvature vertical multigraphs in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. *J. Geom. Anal.*, **25** (2015), no. 1, 336–346.
- [54] J. M. Manzano, F. Torralbo. New examples of constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Michigan Math. J.*, **63** (2014), no. 4, 701–723.
- [55] J. M. Manzano, F. Torralbo. Compact embedded surfaces with constant mean curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. *Amer. J. Math.*, **142** (2020), no. 4, 1981–1994.
- [56] J. M. Manzano, F. Torralbo. Horizontal Delaunay surfaces with constant mean curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Preprint available at <https://arxiv.org/abs/2007.06882>arXiv:2007.06882.
- [57] J. M. Manzano, J. Plehnert, F. Torralbo. Compact embedded minimal surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ *Comm. Anal. Geom.*, **24** (2016), no. 2, 409–429.
- [58] F. Martín, R. Mazzeo, M. Rodríguez. Minimal surfaces with positive genus and finite total curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Geom. Top.*, **18** (2014), 141–177.

-
- [59] L. Mazet. The Plateau problem at infinity for horizontal ends and genus 1. *Indiana Univ. Math. J.*, **55** (2006), no. 1, 15–64.
- [60] L. Mazet. The half space property for cmc $1/2$ graphs in $E(-1, \tau)$. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **52** (2015), no. 3–4, 661–680.
- [61] L. Mazet, M. Rodríguez, H. Rosenberg. The Dirichlet problem for the minimal surface equation –with possible infinite boundary data– over domains in a Riemannian surface. *Proc. London Math. Soc. (3)*, **102** (2011), no. 6, 985–1023.
- [62] L. Mazet, M. Rodríguez, H. Rosenberg. Periodic constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Asian J. Math.*, **18** (2014), no. 5, 829–858.
- [63] L. Mazet, M. Rodríguez, M. Traizet. Saddle towers with infinitely many ends. *Indiana Univ. Math. J.*, **56** (2007), no. 6, 2821–2838.
- [64] W. H. Meeks III, P. Mira, J. Pérez, A. Ros, Constant mean curvature spheres in homogeneous three-manifolds. *Invent. Math.*, **224** (2021), no. 1, 147–244.
- [65] W. H. Meeks III, J. Pérez. Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups. *Contemporary Mathematics* vol. 570, pages 25–110. Geometric Analysis, edited by J. A. Gálvez and J. Pérez.
- [66] W. H. Meeks III, J. Pérez, A. Ros. The embedded Calabi-Yau Conjecture for finite genus. *Duke Math. J.*, **170** (2021), no. 13, 2891–2956.
- [67] W. H. Meeks III, J. Pérez, A. Ros. Stable constant mean curvature surfaces. *Handbook of geometric analysis*. No. 1, 301–380 *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 7, Int. Press, Somerville, MA, 2008.
- [68] W. H. Meeks III, S.-T. Yau. The existence of embedded minimal surfaces and the problem of uniqueness. *Math. Z.* **179** (1982), 151–168.
- [69] S. Melo. Minimal graphs in $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ over unbounded domains. *Bull. Braz. Math. Soc.*, **45** (2014), no. 1, 91–116.
- [70] F. Morabito, M. Rodríguez. Saddle Towers and minimal k -noids in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *J. Inst. Math. Jussieu*, **11** (2012), no. 2, 333–349.
- [71] B. Nelli, H. Rosenberg. Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Bull. Braz. Math. Soc.*, **33** (2002), no. 2, 263–292.

- [72] B. Nelli, H. Rosenberg. Errata: "Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$." [*Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **33** (2002), no. 2, 263–292] *Bull. Braz. Math. Soc.*, **38** (2007), no. 4, 661–664.
- [73] B. Nelli, R. Sa Earp, W. Santos, E. Toubiana. Uniqueness of H -surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $|H| \leq 1/2$, with boundary one or two parallel horizontal circles. *Ann. Global Anal. Geom.*, **33** (2008), no. 4, 307–321.
- [74] B. Nelli, R. Sa Earp, E. Toubiana. Minimal Surfaces in Nil_3 : existence and non existence results. *Calc. Var.*, **56** (2017), no. 2, Paper No. 27, 21 pp.
- [75] M. Nguyen. On existence of surfaces with total finite curvature in $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R}, \tau)$. Preprint.
- [76] R. Osserman. Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n . *Ann. of Math. (2)* **80** (1964), 340–364.
- [77] J. Plehnert. Surfaces with constant mean curvature $\frac{1}{2}$ and genus one in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Preprint available at <https://arxiv.org/abs/1212.2796> arXiv:1212.2796.
- [78] J. Plehnert. Constant mean curvature k -noids in homogeneous manifolds. *Illinois J. Math.*, **58** (2014), no. 1, 233–249.
- [79] C. Peñafiel. Invariant surfaces in $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R}, \tau)$ and applications. *Bull. Braz. Math. Soc.(N.S.)*, **43** (2012), no. 4, 545–578.
- [80] A. L. Pinheiro. Minimal vertical graphs in Heisenberg space. Preprint.
- [81] J. Pyo. New complete embedded minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Ann. Global Anal. Geom.*, **40** (2011), no. 2, 167–176.
- [82] J. Pyo. Singly-periodic minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Bull. Korean Math. Soc.*, **49** (2012), no. 5, 1089–1099.
- [83] J. Pyo, M. Rodríguez. Simply Connected Minimal Surfaces with Finite Total Curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (2014), no. 11, 2944–2954.

-
- [84] M. Rodríguez, G. Tinaglia. Non-proper complete minimal surfaces embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2015), no. 12, 4322–4334.
- [85] H. Rosenberg. Minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$. *Illinois J. Math.*, **46** (2002), no. 4, 1177–1195.
- [86] H. Rosenberg, R. Souam, E. Toubiana. General curvature estimates for stable H-surfaces in 3-manifolds and applications. *J. Differential Geom.*, **84** (2010), no. 3, 623–648.
- [87] R. Sa Earp, E. Toubiana. Screw motion surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. *Illinois J. Math.*, **49** (2005), 1323–1362.
- [88] R. Sa Earp, E. Toubiana. An asymptotic theorem for minimal surfaces and existence results for minimal graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Math. Ann.*, **342** (2008), no. 2, 309–331.
- [89] R. Sa Earp, E. Toubiana. A reflection principle for minimal surfaces in smooth three manifolds Preprint available at <https://arxiv.org/abs/1711.00759> arXiv:1711.00759.
- [90] R. Sa Earp, E. Toubiana. Classical Schwarz reflection principle for Jenkins-Serrin type minimal surfaces. *Ann. Global Anal. Geom.*, **57** (2020), no.2, 365–379.
- [91] R. Souam, E. Toubiana. Totally umbilic surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Comment. Math. Helv.*, **84** (2009), no. 3, 673–704.
- [92] F. Torralbo. Compact minimal surfaces in the Berger spheres. *Ann. Global Anal. Geom.*, **41** (2012), 391–405.
- [93] F. Torralbo, F. Urbano. Compact stable constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, **61** (2012), 1129–1156.
- [94] R. Younes. Minimal surfaces in $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R}, \tau)$. *Illinois J. Math.*, **54** (2010), no. 2, 671–712.

Esta tesis está parcialmente financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación vía el proyecto PID2020-117868GB-I00 y a través de la beca predoctoral FPU16/03096.