POTENCIAL DEL MODELO DE TAREAS TECNO-PEDAGÓGICAS PARA PROMOVER PROCESOS DE CONJETURACIÓN EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Luis C. Romero y Leonor Camargo

En este artículo examinamos la influencia de tareas de geometría en el desarrollo de procesos de conjeturación, dirigidas a estudiantes de primer semestre de arquitectura. El diseño de las tareas se fundamentó en el Modelo de Tareas Tecno-Pedagógicas (MTT). Seguimos la pauta de una investigación de diseño y realizamos el análisis tomando como herramienta analítica el conjunto de fases del proceso de conjeturación propuestas por Cañadas y colaboradores (2008) en articulación con los patrones de variación sugeridos por Marton et al. (2004). Concluimos que el MTT ofrece una alternativa útil para estructurar el diseño de tareas mediadas por un software de geometría dinámica cuyo propósito sea promover procesos de conjeturación.

Términos clave: Conjeturación; Discernimiento; Diseño de tareas; Tareas tecno-pedagógicas; Teoría de la Variación; Teselación

Potential of the Techno-Pedagogical Tasks Model to Promote Conjecture Processes in University Students

In this article we examine the influence of geometry tasks on the development of conjecturing processes, aimed at first-semester architecture students. The design of the tasks was based on the Techno-Pedagogical Task Model (TTM). We used as an analytical tool the set of phases of the conjecturing process proposed by Cañadas et al. (2008), articulated with the patterns of variation suggested by Marton et al. (2004). We conclude that the TTM offers a useful alternative to structure the design of tasks mediated by a dynamic geometry software, the purpose of which is to promote conjecturing processes.

Keywords: Conjecture processes; Discernment; Task design; Techno-Pedagogical Tasks; Tessellation; Variation Theory

Romero, L. C. y Camargo, L. (2022). Potencial del modelo de tareas tecno-pedagógicas para promover procesos de conjeturación en estudiantes universitarios. *PNA, 16*(2), 141-166.

La capacidad argumentativa es reconocida hoy en día como una competencia esencial en la formación de los estudiantes universitarios de cualquier campo del conocimiento. Esto se debe, entre otros, a que la adquisición de esta competencia permite a los futuros profesionales defender sus ideas en procesos de diálogo con sus pares (Alfonso-Cuellar et al., 2018; Garcia-Barrera, 2015). Sin embargo, en el caso particular de Colombia, se ha identificado la deficiencia de habilidades argumentativas como uno de los fenómenos que más impactan en la deserción universitaria en los distintos programas académicos ofrecidos por las instituciones de educación superior (Bravo-Castillo y Mejía-Giraldo, 2010).

En el contexto particular de las matemáticas universitarias esta competencia adquiere especial importancia, ya que se espera que los estudiantes tengan la capacidad de participar en discursos argumentativos en su campo del conocimiento (Weinberger et al., 2005). En ese sentido, los procesos argumentativos deben enfocarse en las aplicaciones del conocimiento matemático a los problemas propios de la correspondiente profesión. En el contexto colombiano, dicha necesidad ha sido reconocida por entidades oficiales en algunos documentos en los cuales mencionan la importancia de la argumentación en la actividad matemática universitaria (Toro y Villaveces, 2008).

En el centro de la actividad argumentativa en matemáticas se encuentran los procesos de conjeturación y demostración (Arzarello et al., 1998; Cañadas et al., 2008). En este artículo nos centramos en el proceso de conjeturación y entendemos que una conjetura es una afirmación de la que se tienen indicios de ser verdadera, a pesar de no haber sido demostrada (Cañadas et al, 2008).

Investigaciones recientes (Baccaglini-Frank, 2019; Kovacs et al., 2018) han identificado la importancia del software de geometría dinámica para generar ambientes que permiten a los estudiantes formular conjeturas acerca de las características de ciertas construcciones geométricas. Baccaglini-Frank (2019), por ejemplo, identifica la utilidad de las modalidades de arrastre para llevar a los estudiantes a la formulación de conjeturas, generando una especie de puente entre la evidencia fenomenológica que los estudiantes perciben a través de las construcciones en el software, y la evidencia teórica requerida en la geometría euclideana para validar proposiciones. Kovacs et al. (2018), por otra parte, han identificado algunas características de ciertas herramientas de razonamiento automatizado inmersas en el software para promover actividades de exploración, conjeturación y justificación en estudiantes de geometría elemental.

Es importante aclarar que el uso del término justificación en este artículo hace referencia a la búsqueda de razones para convencer a otros de la certeza de las conjeturas formuladas más que a un interés en desarrollar procesos de validación para demostrar dichas conjeturas (Marrades y Gutiérrez, 2000). En ese sentido nuestro trabajo se alinea con la postura de Bell (1976) acerca de la existencia de dos tipos de justificación; las justificaciones empíricas*,* las cuales se caracterizan por el uso de ejemplos para convencer a los demás de la certeza de las afirmaciones, y las justificaciones deductivas, en las cuales es fundamental el uso de deducciones para conectar datos con conclusiones en el proceso de validación. Una investigación reciente de Lynch y Lockwood (2017) en ese sentido reconoce la importancia del papel que juegan los ejemplos en la producción y verificación de conjeturas en el aprendizaje de las matemáticas.

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente, afirmamos, como lo señalan Stylianides y Ball (2008) y Boero et al., (2018) que, para desarrollar la competencia argumentativa en los estudiantes, los profesores necesitan disponer de un conocimiento didáctico matemático especializado que les permita diseñar y proponer tareas diferentes a pedir realizar una demostración. Los estudiantes deberían verse en la necesidad de plantear sus propias conjeturas acerca de los fenómenos que observan y proponer argumentos para justificarlas empíricamente, como paso previo a validarlas deductivamente. Este planteamiento nos ubica en el interés por el diseño de tareas apropiadas para favorecer la argumentación.

El diseño de tareas ha sido un aspecto central en el campo de la enseñanza de las matemáticas casi desde sus orígenes, pero no fue sino hasta mediados de la década de los 70 del siglo XX que se convirtió en un tema de interés teórico por parte de la comunidad de investigadores en Educación Matemática (Kieran et al., 2015). Es a partir de esa época, en el marco del tercer Congreso Internacional de Psicología y Educación Matemática (PME), que empieza a considerarse la necesidad de construir marcos teóricos que fundamenten el diseño de tareas cuyo propósito sea promover el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes de distintos niveles educativos (Kieran et al., 2015). Desde entonces, diversos modelos para el diseño de tareas han sido propuestos por varios investigadores (Fahlgren y Brunstrom, 2014; Leung, 2011). En particular, en algunos de estos estudios se asume como foco de interés el papel de las herramientas tecnológicas en el aprendizaje de los estudiantes y se hacen propuestas para el diseño de tareas que incorporan tales recursos. El Modelo de Tareas Tecno-Pedagógicas, sugerido por Leung (2011), llamó nuestra atención para fundamentar tareas que favorecieran la competencia argumentativa por lo que nos preguntamos por su influencia en fomentar procesos de conjeturación en estudiantes universitarios de primer semestre de arquitectura.

El propósito del artículo es examinar la influencia de tareas de geometría en el desarrollo de procesos de conjeturación, en las cuales juega un papel importante el software de geometría dinámica GeoGebra versión 5.0 (Hohenwarter, 2002). Este se usa como mediador para la identificación, por parte de los estudiantes, de ciertos invariantes que les permitan formular y justificar empíricamente conjeturas.

Con este artículo esperamos aportar elementos, derivados de nuestro estudio, para estructurar el diseño de tareas con la mediación de software de geometría dinámica, que permitan promover el proceso de conjeturación de estudiantes universitarios e incluso de enseñanza media. En particular, nos interesa destacar que el software puede ser aprovechado como herramienta para la identificación, por parte de los estudiantes, de patrones de variación que guíen hacia el discernimiento de invariantes.

MARCO TEÓRICO

Teniendo en cuenta que este trabajo se enfoca en el proceso de conjeturación, consideramos pertinente estructurarlo a partir de ciertas fases que sean consistentes con la definición de conjetura que hemos establecido para nuestro trabajo, la cual presentamos en la introducción. En ese sentido, a continuación, describimos el referente teórico que tuvimos en cuenta, el cual corresponde al modelo propuesto por Cañadas et al. (2008). Posteriormente, describimos la teoría que sustenta el Modelo de Tareas Tecno-Pedagógicas (Leung, 2011), con el que fundamentamos las tareas propuestas a los estudiantes, y describimos las etapas que se deben considerar al momento de diseñar dichas tareas.

Conjeturación y patrones de variación

Un rasgo característico de las conjeturas, de acuerdo con la definición que hemos establecido anteriormente, es la certeza que tiene quien la plantea, acerca de su veracidad. Es decir, una conjetura no es una afirmación lanzada al azar, sino que esta surge de un proceso previo de identificación de propiedades invariantes de los fenómenos que son objeto de estudio. En ese sentido, el proceso de conjeturación, en el contexto del aprendizaje de las matemáticas, se estructura en torno a situaciones que promuevan la exploración de objetos matemáticos que permitan a los estudiantes ganar certeza empírica para plantear sus propias afirmaciones acerca de propiedades de dichos objetos (Boero et al., 2018; Cañadas et al., 2008).

En el caso específico del aprendizaje de la geometría, el proceso de exploración se ve favorecido si la actividad propuesta se media por un software de geometría dinámica. Este programa ofrece la posibilidad de transformar dinámicamente la apariencia de los objetos geométricos mientras se preservan las propiedades invariantes que los caracterizan, lo cual puede ser una fuente de conjeturas acerca de los objetos involucrados (Santos-Trigo y Espinosa-Pérez, 2002).

Con el fin de describir el proceso de conjeturación que puede surgir cuando los estudiantes trabajan con la mediación de un software de geomería dinámica, Cañadas et al (2008) sugieren un conjunto de fases que van desde la exploración de una situación a través de las herramientas del software, hasta la formulación de una conjetura y la adquisición de la certeza acerca de su veracidad por parte de quien la formula. Una caracterización de cada una de las fases se presenta en la tabla 1.

Tabla 1
Fases del proceso de conjeturación (Cañadas et al., 2008)

Fases	Descripción
Fase 1. Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos	Se usan herramientas del software para generar las distintas instancias del objeto geométrico que permitan apreciar la variación continua de la apariencia de este.
Fase 2. Observación de una propiedad invariante de la situación	Se identifica algún invariante durante la manipulación descrita en el paso anterior. Esta identificación es la base para descubrir una regla general.
Fase 3. Formulación de la conjetura	Se comunica, mediante una expresión discursiva oral o escrita el invariante obtenido, preferiblemente en formato condicional.
Fase 4. Verificación de la conjetura	Se verifica la conjetura enunciada a partir de la observación de la propiedad invariante en casos distintos a los que han sido estudiados inicialmente y se justifica empíricamente su certeza.
Fase 5. Generalización de la conjetura	Se adquiere la certeza de que la conjetura es cierta en todos los posibles casos relacionados con el objeto en cuestión. Una conjetura, que se logra en este proceso, así no haya sido validada dentro de un sistema teórico, se denomina una conjetura generalizada.

Al analizar las fases sugeridas por Cañadas et al. (2008) podemos identificar que uno de los pasos clave es el que describe la observación de una propiedad invariante que da lugar a la formulación de la conjetura. Para lograrlo, debe suceder un proceso de discernimiento; es decir, una diferenciación entre las propiedades que son inherentes al objeto de estudio, y aquellas cualidades que son susceptibles de variar, que llamamos dimensiones de variación. De acuerdo con Marton et al. (2004) y Marton y Booth (1997), el discernimiento emerge a partir de que el estudiante experimente la variación de diversos aspectos del objeto.

Con el fin de determinar cuándo una experiencia es efectivamente una experiencia de discernimiento en el sentido mencionado en el párrafo anterior, Marton et al. (2004) describen cuatro patrones que son condiciones escenciales para ello. En la tabla 2, describimos tales patrones.

Tabla 2
Patrones de variación propuestos por Marton et al. (2004)

Patrón	Descripción
Contraste	Una experiencia de variación debe permitir a los estudiantes reconocer que no todos los objetos tienen la propiedad que se pretende que ellos disciernan.
Separación	En una experiencia de variación se debe lograr que los estudiantes identifiquen que mientras algunos aspectos del objeto permanecen invariantes al mismo y lo caracterizan, hay otros aspectos que son susceptibles a variar.
Generalización	Una experiencia de variación debe permitir a los estudiantes identificar una cualidad invariante del objeto o fenómeno, en diferentes instancias de este, en donde varían otras cualidades.
Fusión	En una experiencia de variación en la que dos o más cualidades invariantes del objeto en cuestión están relacionadas, es necesario que los estudiantes experimenten las dos cualidades simultáneamente.

Modelo de Tareas Tecno-pedagógicas

Teniendo en cuenta que nuestro estudio se interesa por el diseño de tareas para promover la conjeturación, es necesario clarificar conceptualmente las características de las tareas que se desarrollan empleando un programa de geometría dinámica. Para ello nos valemos de los planteamientos de Leung (2011).

Las tareas tecno-pedagógicas son descritas por Leung (2011) como aquellas que tienen como finalidad facultar a los estudiantes con recursos para "explorar, reconstruir y explicar conceptos matemáticos en ambientes pedagógicos tecnológicamente ricos" (p. 327). Con ese propósito, de acuerdo con Leung, es necesario que los estudiantes transiten por ciertos estados de adquisición del conocimiento, o modos epistémicos, que les permita observar y explorar invariantes de los objetos o fenómenos que estén interesados en estudiar. A continuación, describimos los modos sugeridos por el investigador.

Modo de Establecimiento de Prácticas (PM)

Según Leung (2011), las tareas propuestas deben, en primera instancia, incentivar un proceso de exploración de las herramientas que hacen parte del ambiente en el que se va a trabajar, con el fin de que los estudiantes puedan determinar cómo usarlas para resolver las tareas. En este modo epistémico se desarrolla por parte de los estudiantes un proceso de instrumentación e instrumentalización, en el sentido de la teoría de la Génesis Instrumental (Rabardel, 1995), por medio del cual identifican cuáles son las características del software que les permite resolver las tareas propuestas.

Modo de Discernimiento Crítico (CDM)
Uno de los objetivos de las tareas diseñadas usando el Modelo de Tareas Tecno-pedagógicas es permitir construir significados matemáticos a partir de la mediación de las herramientas del software. Dicho proceso, de acuerdo la teoría de la variación, requiere que los estudiantes adquieran la capacidad de experimentar los patrones de variación descritos en la tabla 2.

Modo de Establecimiento de Discurso Situado (SDM)
De acuerdo con Leung (2011), las tareas deben involucrar actividades de conjeturación y explicación. Las conjeturas y explicaciones están situadas en el ambiente generado por el uso del software de geometría dinámica, por lo cual las tareas deben incentivar razonamientos inductivos que lleven a los estudiantes a formular conjeturas y discursos para explicarlas o justificarlas empíricamente.

Metodología

En esta sección presentamos los aspectos que describen la metodología utilizada en nuestro trabajo. En el primer apartado describimos la estrategia investigativa seleccionada, presentando de manera general las fases que constituyen dicha estrategia. Los apartados subsiguientes corresponden al desarrollo de estas fases dentro de nuestra investigación, describiendo en cada una de ellas los aspectos metodológicos que se tuvieron en cuenta para la estructuración de este trabajo.

Estrategia investigativa

Este trabajo se caracteriza por ser una investigación de diseño. Tiene como objetivo “analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, de la enseñanza y de la evaluación” (Molina et al., 2011, p. 2). La estrategia seleccionada dentro de este paradigma es la de Experimento de Enseñanza, ya que esta conduce a “conocimiento empíricamente fundado, útil en la toma de decisiones de decisiones instructivas dirigidas a promover y mejorar el aprendizaje de los estudiantes” (Molina et al., 2011, p. 2).

De acuerdo con Camargo (2021), un experimento de enseñanza consiste en el diseño, implementación y evaluación de tareas para la enseñanza, organizadas con el fin de poner en juego una hipótesis acerca de un aprendizaje específico. En nuestro caso, dicho aprendizaje consiste en la caracterización de los polígonos regulares que permiten teselar el plano. De acuerdo con la estrategia, diseñamos dos tareas, de acuerdo con el Modelo de Tareas Tecno-pedagógicas, en las cuales los estudiantes deben manipular ciertas construcciones geométricas realizadas en GeoGebra, con el fin de identificar los invariantes que caracterizan dichos polígonos.

Para desarrollar nuestra investigación, tomamos como referencia la ruta de un experimento de enseñanza propuesta por Camargo (2021), la cual presentamos en la figura 1. Este tuvo una duración de dos sesiones de clase, en cada una de las cuales los estudiantes trabajaron una tarea. En consonancia con la estrategia, realizamos un proceso de análisis en el intervalo de tiempo transcurrido entre las dos sesiones, tiempo en el cual hicimos un ajuste a la segunda tarea, a partir de las conclusiones obtenidas de la implementación de la primera tarea.

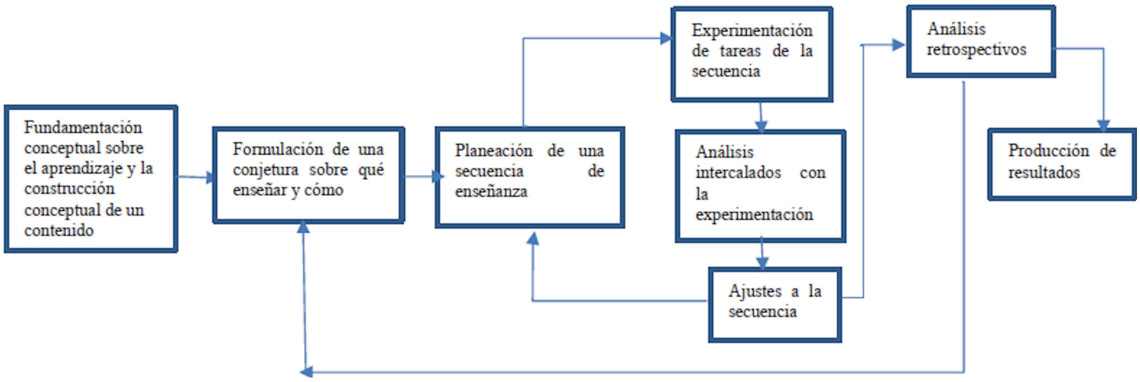

Figura 1. Fases del experimento de enseñanza (Camargo, 2021)

Trayectoria hipotética de aprendizaje

La hipótesis que guió el diseño de las tareas está basada en la relación que proponemos (Romero, 2018) entre los dos principales referentes teóricos considerados (la caracterización del proceso de conjeturación de Cañadas et al. (2008) y el Modelo de Tareas Tecno-pedagógicas de Leung (2011). Estos marcos evocan la dialéctica entre los procesos de enseñanza y aprendizaje, en el marco del proceso de conjeturación, en los que la Génesis Instrumental juega un papel central. El modelo propuesto por Leung (2011) provee los elementos para el diseño de las tareas para promover el proceso de conjeturación, y el modelo de Cañadas et al. (2008) brinda una herramienta análitica para rastrear este proceso.

La relación que sugerimos (Romero, 2018) se puede evidenciar de manera específica en la tabla 3. Allí, exhibimos un paralelo entre las fases del proceso de conjeturación, y los modos epistémicos. Teniendo en cuenta lo anterior**,** una posible ruta de avance en el proceso de conjeturación incluye los siguientes momentos.

Un primer momento de familiarización con el software de geometría dinámica, puesto que los estudiantes con los cuales se implementaron las tareas no tenían experiencia previa con el uso de GeoGebra. El objetivo era que ellos instrumentalizaran las herramientas necesarias para identificar invariantes. Por ejemplo, herramientas de medidas de ángulos y de lados, usos de deslizadores, herramientas que permiten construir rotaciones de polígonos para generar las teselas, entre otros.

Un segundo momento, en el que los estudiantes identifican propiedades específicas de los polígonos regulares que les permiten hacer una teselación. En particular, deben establecer la relación que existe entre las medidas de los ángulos internos y el ángulo en el que se debe rotar un polígono para poder generar un teselado. Para ello, los estudiantes deben discernir propiedades invariantes de los polígonos regulares, como el hecho que la medida de sus ángulos internos debe ser divisor de 360, en el caso que solo se quiera usar un polígono.

Un tercer momento, en el que los estudiantes formulan sus conjeturas en un lenguaje relativamente formalizado, que les permita compartir con sus compañeros y con el profesor lo que ha encontrado en su exploración.

Tabla 3
Relación entre el Modelo de Conjeturación de Cañadas et al (2008) y el Modelo de Tareas Tecno-pedagógicas (Leung, 2011)

Proceso de conjeturación (Cañadas et al., 2008)	Modelo de Tareas Tecno-pedagógicas (Leung, 2011)
Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos.	Modo de establecimiento de prácticas.
Observación de una propiedad invariante de la situación.	Modo de discernimiento crítico.
Formulación de la conjetura.	Modo de discurso situado.
Verificación de la conjetura.	Iteración de los modos descritos anteriormente, sobre nuevas instancias del objeto.

Planeación de las tareas

Teniendo en cuenta que el contenido específico de las dichas tareas era el de teselación con polígonos regulares, decidimos preparar un archivo en GeoGebra con una construcción que consistía originalmente de un triángulo equilátero y dos deslizadores: a y α (figura 2).

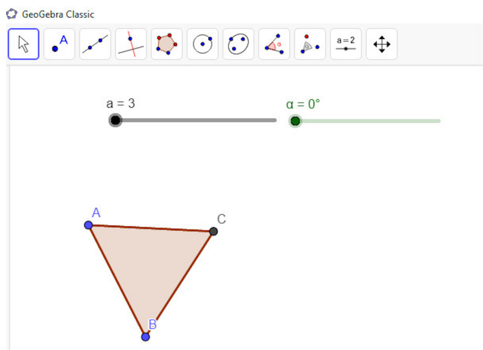

Figura 2. Construcción original en GeoGebra presentada a los estudiantes

El arrastre del deslizador α genera la aparición de un segundo triángulo equilátero que rota alrededor de uno de los vértices del triángulo original a medida que se arrastra el punto que está en el deslizador (figura 3). El efecto del arrastre del deslizador a es modificar el número de lados del polígono regular (figura 4).

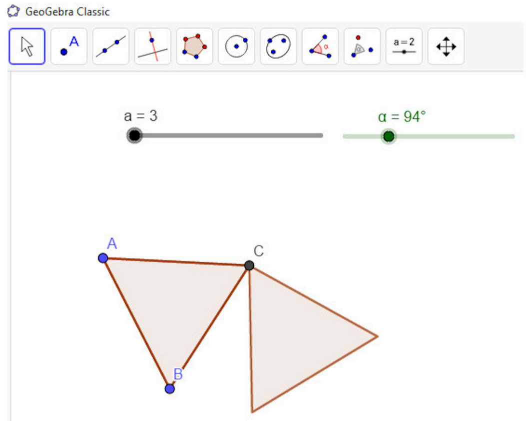

Figura 3. Efecto del arrastre del deslizador α en la construcción

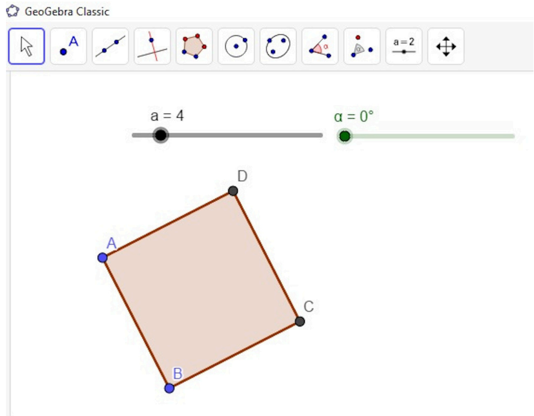

Figura 4. Efecto del arrastre del deslizador a en la construcción

En los enunciados de las tareas propuestas les solicitamos a los estudiantes construir teselados con polígonos regulares de diversos números de lados, utilizando los deslizadores incluidos en los archivos que les entregamos. Para ello, los estudiantes deben identificar cómo yuxtaponer dos polígonos regulares del mismo número de lados, rotando uno de ellos con respecto a uno de los vértices del otro polígono. En la tabla 4 hacemos una presentación sintética de las preguntas que hacen parte de las tareas propuestas.

Tabla 4
Descripción sintética de las preguntas que hacen parte de las tareas propuestas

	Tarea 1
Pregunta 1	Identificar las características del triángulo que se presenta en la construcción y explorar el efecto del deslizador α en dicha construcción.
Pregunta 2	Identificar el valor específico del ángulo de rotación α que permite la yuxtaposición de los triángulos.
Pregunta 3	Construir, haciendo uso de la herramienta Rotación, un conjunto de triángulos equiláteros que se yuxtapongan de tal forma que el último triángulo construido sea adyacente al triángulo original.
Pregunta 4	Identificar el número de triángulos y el ángulo de rotación necesarios para realizar la construcción mencionada en la pregunta 3.
Pregunta 5	Formular una conjetura acerca de la relación identificada entre el número de triángulos y el ángulo de rotación necesarios para realizar la construcción mencionada en la pregunta 3.
	Tarea 2
Pregunta 6	Identificar el efecto del deslizador a en la construcción presentada originalmente.
Pregunta 7	Construir, teniendo en cuenta las instrucciones presentadas en la pregunta 3, teselaciones con polígonos regulares de diferentes números de lados.
Pregunta 8	Consignar en una tabla prediseñada la información correspondiente al número de polígonos regulares y el ángulo de rotación necesario para realizar la teselación, dependiendo del número de lados del polígono.
Pregunta 9	Identificar la relación existente entre el número de lados y el ángulo de rotación en la construcción de una teselación.
Pregunta 10	Formular una conjetura acerca de las características de los polígonos que teselan el plano.

En la primera tarea, los estudiantes deben construir un teselado con triángulos equiláteros, haciendo uso de la herramienta rotación de GeoGebra. Con este propósito, los estudiantes son motivados a experimentar con la construcción presentada en la figura 2, para identificar las características de los deslizadores y la influencia de su manipulación en la construcción. En la segunda tarea, se les solicita intentar realizar el teselado con polígonos regulares de distinto número de lados, con el fin de que identifiquen en cuáles de dichos polígonos el teselado es posible y cuáles son las propiedades que los caracterizan.

Las tareas fueron estructuradas en torno a los modos epistémicos del Modelo de Tareas Tecno-Pedagógicas con el propósito de garantizar que durante la resolución los estudiantes transitaran por ellos. En las tablas 5 y 6 sintetizamos las acciones del modelo que hipotetizamos deberían suceder al resolver las tareas. Al final presentamos la conjetura que esperamos formulen los estudiantes al finalizar las tareas.

Tabla 5
Modos epistémicos del Modelo de Tareas Tecno-Pedagógicas por los que deben transitar los estudiantes al solucionar la tarea 1

Modos epistémicos	Acciones probables
Establecimiento de prácticas	Instrumentalización del deslizador α
	Los estudiantes instrumentalizan el uso del deslizador α operando con este de dos formas, con el fin de mover el punto que se encuentra en el deslizador:
	Forma 1. Los estudiantes ponen el cursor del ratón sobre el punto, hacen clic izquierdo en el ratón, y mueven el ratón.
	Forma 2. Los estudiantes ponen el cursor del ratón sobre el punto, hacen clic izquierdo en el ratón, y utilizan las teclas de desplazamiento derecha e izquierda.
	Los estudiantes instrumentan el deslizador α reconociendo el efecto que tiene el arrastre del deslizador en la construcción, es decir, verifican que el deslizador α genera una rotación en el triángulo imagen.
	Instrumentalización de la herramienta rotación
	Los estudiantes instrumentalizan la herramienta rotación al operar de la siguiente forma.
	Primero, hacen clic izquierdo sobre la herramienta rotación. A continuación, los estudiantes hacen clic izquierdo sobre el triángulo que se pretende rotar y posteriormente sobre el punto con respecto al cual se produce la rotación. Posteriormente, en la ventana que se abre a continuación, escriben el ángulo de rotación deseado y el sentido de rotación (horario o anti-horario).
	Los estudiantes instrumentan la herramienta rotación cuando la usan para completar la construcción de triángulos equiláteros que se yuxtaponen.

Tabla 5
Modos epistémicos del Modelo de Tareas Tecno-Pedagógicas por los que deben transitar los estudiantes al solucionar la tarea 1

Discernimiento crítico	Los estudiantes experimentan los patrones de variación de la siguiente manera:
	Contraste. Hay valores de α donde los polígonos regulares se yuxtaponen y hay valores donde no.
	Separación. Se puede aumentar el número de triángulos en la construcción manteniendo la yuxtaposición. La separación se hace evidente al construir triángulos adicionales a los que fueron preconstruidos de tal manera que no se solapen ni dejen huecos entre ellos.
	Generalización. Para cualquier nuevo triángulo que se construya manteniendo la yuxtaposición, el ángulo de rotación con respecto al triángulo original debe ser múltiplo de 60.
Discurso situado	Los estudiantes describen los cambios percibidos en la construcción al hacer arrastre en el deslizador.
	Los estudiantes describen las propiedades de los triángulos que aparecen en la construcción y la relación entre ellos y los objetos en el deslizador.
Conjetura prevista	Si el ángulo de rotación de cualquier triángulo con respecto al vértice de otro triángulo es múltiplo de la medida del ángulo interno del triángulo entonces se produce un teselado con triángulos equiláteros.

Implementación de la secuencia de enseñanza

La secuencia diseñada se implementó en dos sesiones de clase del curso de geometría para estudiantes de primer semestre de arquitectura de una universidad privada colombiana. En la clase estaban inscritos 21 estudiantes, los cuales fueron divididos en grupos de tres personas para resolver cada tarea. Durante la implementación, el primer autor, que era el profesor del curso, iba de grupo en grupo revisando el avance del trabajo y discutiendo con los estudiantes acerca de las dudas que se fueran presentando.

En cada sesión los estudiantes resolvieron una de las tareas propuestas en la secuencia, y consignaron sus respuestas en una hoja que se les entregó, que contenía el enunciado y las preguntas para apoyar el proceso de conjeturación.

Tabla 6

Modos epistémicos del Modelo de Tareas Tecno-Pedagógicas por los que deben transitar los estudiantes al solucionar la tarea 2

Modos epistémicos	Acciones probables
Establecimiento de prácticas	Los estudiantes instrumentalizan el deslizador a, identificando que su manipulación produce el efecto de modificar el número de lados del polígono que aparece en la construcción.
Discernimiento crítico	Los estudiantes experimentan los patrones de variación de la siguiente manera:
	Contraste. Hay polígonos con los que se puede construir la teselación y hay polígonos con los que no.
	Separación. Los polígonos con los que se puede producir la teselación son de varios números de lados y varios ángulos de rotación.
	Generalización. La cantidad de polígonos que se requiere para teselar por rotación corresponde al cociente entre 360 y la medida del ángulo interno del polígono.
Discurso situado	Se formula una conjetura acerca de las características que deben presentar los polígonos regulares para poder construir la teselación.
Conjeturas previstas	Si un polígono regular permite realizar una teselación entonces la medida de sus ángulos internos es divisor de 360.
	Si se usa una cantidad de polígonos regulares del mismo que resulta de dividir 360 entre la medida de los ángulos internos del polígono se produce una teselación con dichos polígonos.

Construcción de los datos y análisis retrospectivo

La información para el análisis se obtuvo a partir de la recopilación del material correspondiente a la producción escrita de cada uno de los grupos de trabajo, la transcripción de las grabaciones de audio de las conversaciones sostenidas por el profesor con los integrantes de cada grupo y la captura de pantallas de las grabaciones de video del trabajo realizado en GeoGebra. Los datos investigativos corresponden a episodios de interacción, elaborados por nosotros a partir de los registros, en donde apreciamos un trabajo autónomo por parte del grupo de estudiantes y riqueza en la actividad de conjeturación. Lo anterior porque buscábamos evidencias del tránsito de los estudiantes por alguno de los modos epistémicos que describe el Modelo de Tareas Tecno-pedagógicas.

La herramienta analítica que se usó para el análisis de los datos es pre-estructurada, y tiene en cuenta tanto los modos epistémicos del Modelo de Tareas Tecno-Pedagógicas como el Modelo de Conjeturación que plantean Cañadas et al.

(2008) (tabla 7). En ese sentido, en cada dato identificamos el modo o los modos epistémicos por los que transitaron los estudiantes en el desarrollo de la tarea y la fase del proceso de conjeturación que se promovió en el correspondiente episodio.

Tabla 7
Herramienta analítica de los datos investigativos

Modos epistémicos	Establecimiento de prácticas: Discernimiento crítico: Discurso situado:
Fases del proceso de conjeturación	Manipulación: Observación: Formulación: Verificación: Generalización:

Resultados y discusión

Para presentar los resultados, hemos dividido esta sección en tres subsecciones. En cada una de ellas, discutimos acerca de la relación identificada en el análisis de la información recolectada entre cada uno de los modos epistémicos del Modelo de Tareas Tecno-Pedagógicas y las fases del Modelo de Conjeturación de Cañadas et al. (2008). Ejemplificamos la discusión con producciones de los grupos 1 y 2 cuya riqueza ilustra los resultados. Una presentación exhaustiva de los resultados se encuentra en Romero (2018).

Establecimiento de prácticas: de la instrumentalización de las herramientas a la manipulación dinámica de los objetos

En la descripción de los referentes conceptuales de este artículo enfatizamos en la importancia de manipular los objetos sobre los cuales se pretenden formular las conjeturas, para que los estudiantes experimenten los patrones de variación. Naturalmente, esa manipulación se tiene que hacer en el contexto del programa de geometría dinámica en el cual estén trabajando, y por lo tanto es fundamental que estén familiarizados con las herramientas que ofrece este para poder realizar la manipulación de tal forma que puedan identificar los invariantes.

De acuerdo con lo mencionado previamente, en cuanto al establecimiento de prácticas, el proceso de instrumentalización de las herramientas, en el sentido de Rabardel (1995), es un aspecto clave que hace parte del desarrollo del proceso de conjeturación. En el análisis del trabajo realizado por los estudiantes pudimos evidenciar que el tipo de esquema de utilización (Rabardel, 1995) desarrollado por ellos influye en su capacidad para reconocer los aspectos críticos del objeto o fenómeno que pretenden estudiar.

Un ejemplo de lo anterior es la manera como algunos grupos utilizaron la herramienta rotación para generar la teselación con triángulos equiláteros. Por ejemplo, en el grupo 1, inicialmente, este proceso se realizó rotando solo uno de los vértices del triángulo para posteriormente construir el triángulo (figura 5).

El anterior esquema de utilización influyó en que para ellos fuera más difícil generalizar el proceso de teselación a otro tipo de polígonos regulares, porque cuando el polígono regular tenía más de cuatro lados, la teselación no podría ser generada a partir de la rotación de un solo vértice. Lo anterior los llevó en la tarea 2 a replantear la manera de utilizar la herramienta. En cambio, en el grupo 2, la instrumentalización los condujo a rotar el triángulo completo (figura 6).

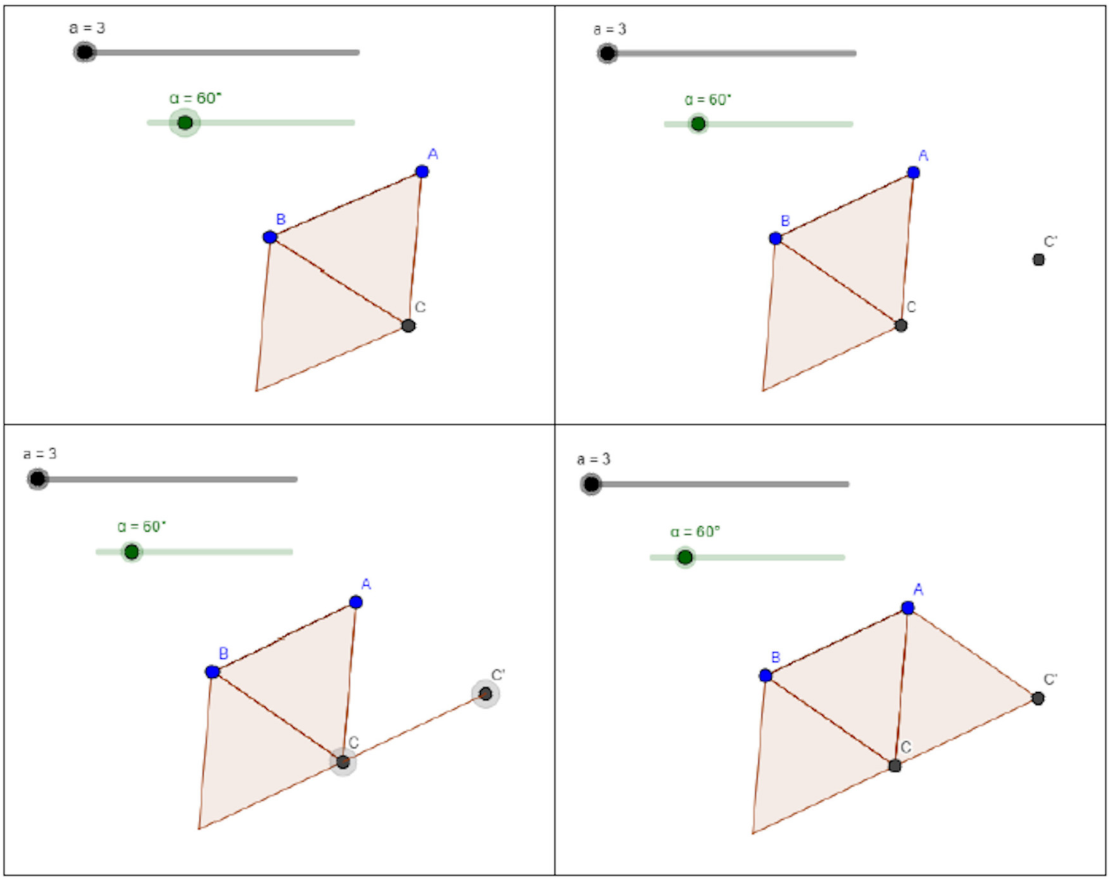

Figura 5. Proceso de teselación con triángulos equiláteros desarrollado por el grupo 1

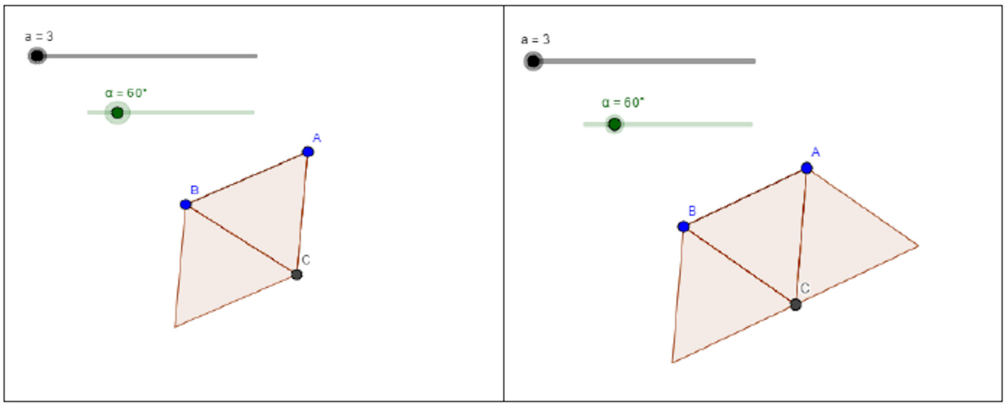

Figura 6. Proceso de teselación con triángulos equiláteros desarrollado por el grupo 2

Lo anterior nos permite inferir que la fase de manipulación dinámica planteada por Cañadas et al. (2008), debe venir precedida de un proceso de establecimiento de prácticas adecuado, en el sentido que Leung (2011) propone, para que esa manipulación esté dirigida hacia la generación de patrones de variación. Sin ello, la identificación de invariantes por parte de los estudiantes puede convertirse en un callejón sin salida, donde no pueden avanzar mas allá de la experimentación de unos casos particulares que pueden hacer improbable el discernimiento crítico de las dimensiones de variación del objeto estudiado.

Discernimiento crítico: de los patrones de variación a la identificación de invariantes

El planteamiento central de la teoría de la variación se puede parafrasear de una manera que puede llegar a sonar como un oxímoron: para identificar los invariantes de un objeto, es fundamental reconocer qué es lo que varía en él. El autor Lo lo sintetiza bastante bien con su aforismo "*He cannot, England know, who knows England only*" (Lo, 2012, p. 1) con el cual ilustra su afirmación "para saber lo que algo es, es absolutamente necesario saber lo que no es". Este principio, que puede parecer evidente hasta cierto punto, es infortunadamente poco aplicado en las prácticas de enseñanza en la clase de matemáticas. No es inusual, y de hecho parece ser más la regla que la excepción, que un profesor de matemáticas, con el propósito de ilustrar una definición, utilice exclusivamente ejemplos que cumplan con ella, y rara vez exhiba un no ejemplo, es decir algo que no satisfaga dicha definición.

Lo que afirmamos en el párrafo previo es especialmente importante en el caso de la conjeturación. La formulación de una conjetura acerca de un objeto tiene como base fundamental la identificación de sus invariantes y por lo tanto de sus dimensiones de variación en el momento del discernimiento crítico. En la resolución de las tareas observamos que los estudiantes pudieron llegar a la caracterización de los polígonos regulares que teselan el plano, a partir de la manipulación de las construcciones de forma que les permitiera experimentar los patrones de variación subyacentes a ellas.

En ese sentido, es importante llamar la atención sobre lo significativo que fue para los estudiantes la experimentación de esos patrones. Al intentar resolver una pregunta de la segunda tarea, en la cual se se solicitaba reconstruir el proceso de teselación desarrollado con los triángulos equiláteros en otros polígonos regulares, los estudiantes del grupo 2 se mostraron especialmente inquietos cuando no pudieron hacerlo en el caso del pentágono (figura 7). Incluso intentaron replantear la construcción con el fin de poder generar la teselación, evidenciando que para ellos estaba internalizada la idea de que la construcción se debería poder realizar con cualquier polígono regular.

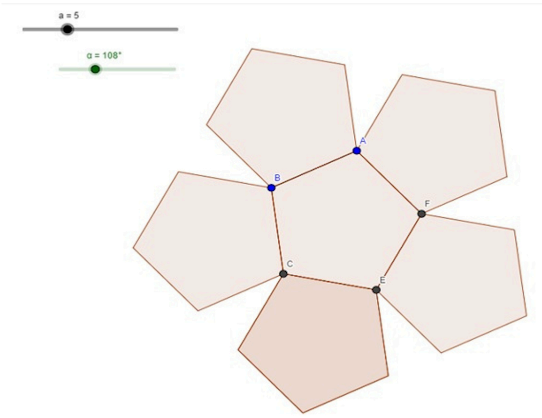

Figura 7. Construcción realizada por los estudiantes del grupo 2 al intentar teselar con pentágonos regulares

Para los estudiantes fue realmente sorprendente identificar el número de lados de un polígono regular como una dimensión de variación de una teselación. La experimentación del contraste entre polígonos con los cuales sí se podía teselar y otros con los que no era posible hacerlo, junto con la experimentación de otros patrones de variación que surgieron en la manipulación de la construcción, fue lo que llevó a los estudiantes a dirigir su atención hacia las características invariantes de aquellos polígonos que permitían realizar la construcción solicitada, cubriendo así la fase de observación del proceso de conjeturación.

Aquí es pertinente resaltar que, en en el curso de la resolución de las tareas, el ambiente de geometría dinámica no fue el único generador de los patrones de variación que permitieron a los estudiantes identificar los invariantes. Una tabla en la que los estudiantes consignaron la información que obtenían sobre el ángulo de rotación y el número de polígonos necesarios para realizar la teselación a partir del número de lados del polígono regular, a partir de la experimentación, les permitió reconocer la relación aritmética existente entre el número de lados y la medida de los ángulos interiores de los polígonos regulares que permiten la teselación; a partir de ello, obtuvieron una forma de caracterizar dichos polígonos.

Resumiendo lo anterior, podemos afirmar que los patrones de variación pueden ser un puente que conecta los procesos de manipulación y observación de invariantes propuestos por Cañadas et al. (2008) para estructurar el proceso de conjeturación. El análisis de los datos correspondientes a episodios donde el proceso de observación de invariantes fue identificado nos permite evidenciar que este proceso en general estuvo precedido de la experimentación de patrones de contraste, separación o generalización por parte de los estudiantes.

Discurso situado: de la construcción del discurso a la formulación de conjeturas

Una de las debilidades del proceso de resolución de las tareas, que pudimos identificar en el análisis de la producción de los estudiantes, fue la escasez de conjeturas formuladas por los estudiantes en formato condicional, ya fuera de manera verbal o escrita. Si nos atenemos a la descripción del proceso de formulación de conjeturas en el modelo de Cañadas et al. (2008), se podría presuponer que esta fase no fue exitosa y que el experimento no condujo al resultado esperado. Sin embargo, en algunos grupos, como en el 2, pudimos observar un trabajo que consideramos rico, en el sentido que llevó a la explicitación de una propiedad, aunque expresada en un lenguaje situado en el ambiente en el cual estaban trabajando. Este trabajo se desarrolló mientras los grupos intentaban diligenciar una tabla en la que tenían que escribir, según el número de lados del polígono, cuántos polígonos son necesarios para hacer la teselación y cuál es el ángulo de rotación aplicado al polígono para logar la teselación (ver ejemplo en la tabla 8).

Tabla 8

Consignación de resultados del grupo 2 referido a las características de las teselaciones con polígonos regulares

Número de lados del polígono	Polígonos necesarios para hacer la teselación	Ángulo de rotación (aplicado al polígono o a sus imágenes) necesario para la teselación
3	6	60
4	4	90
5	No se puede	No se puede
6	7	120
7	No se puede	No se puede
8	No se puede	No se puede

Al intentar identificar la relación entre el número de polígonos y el ángulo de rotación indicada en la pregunta 9, inicialmente los estudiantes del grupo 2 se encontraban confundidos sobre lo que tenían que hacer. Llamaron al profesor para pedir su ayuda. El profesor les dijo que debían mirar qué relación observaban entre los números de la segunda y la tercera columna de la tabla, para los polígonos donde sí pudieron realizar la teselación y formular una conjetura. En ese momento se presentó el siguiente episodio, que comienza cuando Alejandra propuso una posible respuesta en el diálogo que se muestra a continuación.

Alejandra: [...] Cuando (...) la suma de todos los ángulos de [igual a] 360 (...) porque se supone que tiene que dar la (...) vuelta entera.

Camila: Mira el hexágono.

Manuel procede a realizar la teselación con el hexágono nuevamente, obteniendo la representación de la figura 8. Al ver esto, Alejandra se retracta de la afirmación hecha. Afirma que como son seis las rotaciones que se hicieron para realizar la construcción, la suma de los ángulos internos de los polígonos da 720 y no 360 grados.

En el episodio presentado anteriormente es importante resaltar qué, a pesar de que la construcción no fue realizada de la manera presupuestada (ya que el propósito era que la construcción concluyera en el momento que se obtuviera la yuxtaposición a partir de la rotación del polígono), se evidencia un proceso de formulación de una afirmación acerca de la relación entre la cantidad de polígonos en la construcción y la medida de sus ángulos internos. A pesar de que esta afirmación no plantea de manera precisa la relación entre estas magnitudes, como era lo pretendido, sí describe la relación geométrica que se esperaba que fuera identificada por los estudiantes. Esto sucede al mencionar que la construcción tiene que "dar la vuelta entera", haciendo alusión a que las sucesivas rotaciones deben, eventualmente, generar el polígono original.

Ahora, el hecho que la mencionada conjetura fuera rechazada por la misma Alejandra al ver la construcción con el hexágono que se exhibe en la Figura 8, evidencia que el discurso está fuertemente situado en el ambiente de geometría dinámica utilizado. Es decir, este discurso no está inmerso en un proceso de demostración, sino que emerge de la observación de las construcciones realizadas. Es más, la justificación que utiliza para sustentar su afirmación ("porque se supone que tiene que dar la vuelta entera") esta formulada en un lenguaje que refleja una constatación visual empírica, y no tanto en la información aritmética contenida en la tabla.

Las conjeturas formuladas por los estudiantes de este grupo están situadas en un contexto eminentemente gráfico. Este planteamiento se ve reforzado por lo que sucedió después en el grupo 2. Al indagar el profesor acerca del proceso desarrollado por los estudiantes, se presentó el siguiente diálogo.

Profesor: ¿Que encontraron en esa tabla [tabla 8] ustedes?

Alejandra: Que no se podían hacer unas teselaciones (...).

Profesor: ¿Cuáles no?

Alejandra:	Pentágono, heptágono y…octógono.
Profesor:	¿Y en cuáles sí se puede?
Manuel:	Triángulo, cuadrado y hexágono.
Profesor:	¿Y cuál es el ángulo (…)? Por ejemplo, en el (…) hexágono, ¿cuál es el ángulo [de rotación]?
Todos:	120 [grados].
Profesor:	¿Y cuántos hexágonos necesitaron? (…) (Mira la tabla) ¿Siete?
Alejandra:	Sí.
Profesor:	Déjenme ver [cómo hicieron la construcción], por favor.

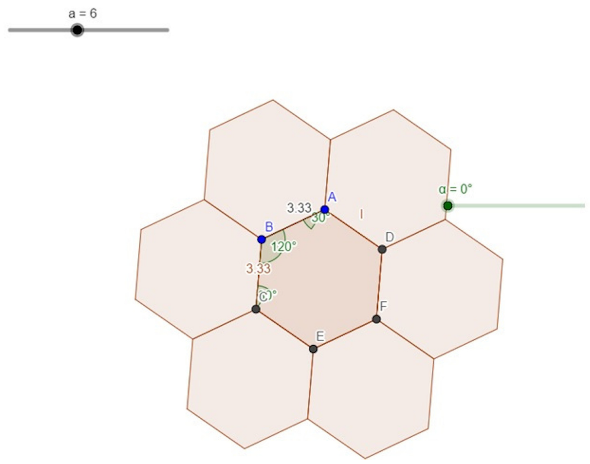

Figura 8. Construcción realizada por los estudiantes del grupo 2 al intentar teselar con hexágonos regulares

Manuel arrastra el deslizador a hasta que toma un valor de 6 y comienza a realizar la teselación. Cuando aparecen tres hexágonos en la pantalla, producto de dos rotaciones con relación al vértice C, como se muestra en la figura 9, el profesor le pide que suspenda lo que está haciendo e inicia el siguiente diálogo.

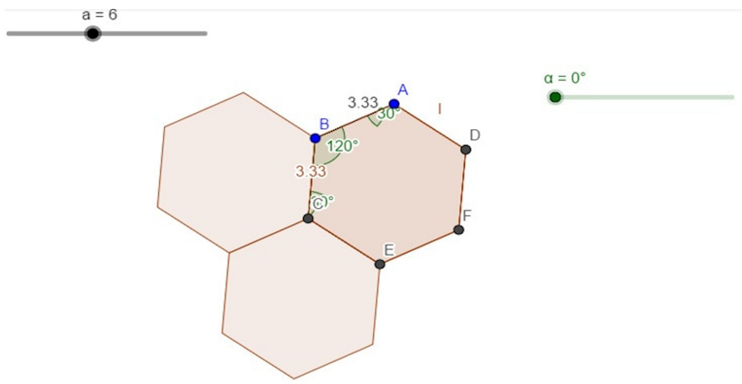

Figura 9. Construcción realizada por los estudiantes del grupo 2 de acuerdo con la sugerencia del profesor

Profesor:	¿Y para que más [hexágonos]? (…) ¿Ahí no se cumplió ya lo que queríamos?
Alejandra:	Pero se puede formar todo (…).
Profesor:	No. Pero yo les dije (...) yo lo cojo, y lo cierro [se refiere a que la rotación se haga hasta que el último polígono se yuxtaponga al primero].
Alejandra:	Mmm.
Profesor:	¿Sí o no? ¿Entonces, cuántos [polígonos] son en realidad?
Alejandra:	Tres [hexágonos].
Profesor:	[Mientras se retira del grupo]. Ya lo demás es pegarle las demás baldosas (…).
Manuel:	[Cuando el profesor ya se ha ido] Eso era lo que yo pensaba ¿Para qué le damos toda la vuelta (…)? Porque igual siempre es con respecto al punto C. (corrige el valor que aparece en la columna “Polígonos necesarios para hacer la teselación” correspondiente al hexágono, escribiendo 3 en vez de 7).
Camila:	Entonces la relación entre los polígonos necesarios y el ángulo (…). La relación es que (…).
Alejandra:	¡Ay! Entonces ahora sí (…) sí. Entonces sí estaba bien (…) se dan tantos polígonos como el ángulo alcance para llegar a 360 [grados].

En estos dos episodios que presentamos se observa que los estudiantes del grupo 2 transitan por las fases de formulación y verificación de una conjetura planteada por el modelo de Cañadas et al. (2008). Incluso, se observa que Alejandra adquiere la certeza de que su afirmación es correcta, después de haber corregido la construcción y los datos consignados en la tabla. Esto último evidencia que la conjetura ha sido generalizada, en el sentido que describe Cañadas et al. (2008).

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos establecer una relación entre la construcción de un discurso situado y la formulación de conjeturas. Podemos plantear esta relación desde dos puntos de vista. Uno de ellos es el causal, en el sentido en el que las preguntas que pretenden que los estudiantes establezcan un discurso acerca de lo que observan, promueven un proceso de formulación, verificación y generalización de la conjetura. El otro punto de vista tiene que ver con la naturaleza de ese discurso y la influencia de esa naturaleza sobre el tipo de conjeturas que son formuladas. En los episodios descritos, el hecho de que el discurso se encuentre situado en un ambiente específico, en este caso el de la geometría dinámica, determina que las conjeturas formuladas y sus justificaciones estén inmersas en un lenguaje predominantemente geométrico.

CONCLUSIONES

La discusión presentada anteriormente refuerza y ejemplifica nuestro planteamiento sobre laexistencia de una interacción entre las fases del Modelo de Conjeturación propuesto por Cañadas et al. (2008) y los modos epistémicos del Modelo de Tareas TecnoPedagógicas. De manera más específica, cada uno de los modos epistémicos promueve el tránsito por una de las fases del modelo de Cañadas et al. (2008), y estas a su vez se convierten en un paso previo para que los estudiantes transiten por el siguiente modo epistémico. Podemos ilustrar esta interacción como se muestra en la figura 10.

Este hecho nos permite reconocer el potencial del Modelo de Tareas Tecnopedagógicas como una herramienta para el diseño de tareas que promuevan el proceso de conjeturación en los estudiantes universitarios de la clase de matemáticas y, por esta vía, la argumentación. Aunque las tareas presentadas en este artículo están enfocadas en un campo específico de las matemáticas, y en una temática particular como lo es el caso de las teselaciones, los aspectos observados en el desarrollo de esta investigación nos permiten inferir que es posible usar el Modelo de Tareas TecnoPedagógicas para diseñar tareas que promuevan proceso de conjeturación en la enseñanza de cualquier campo de las matemáticas universitarias.

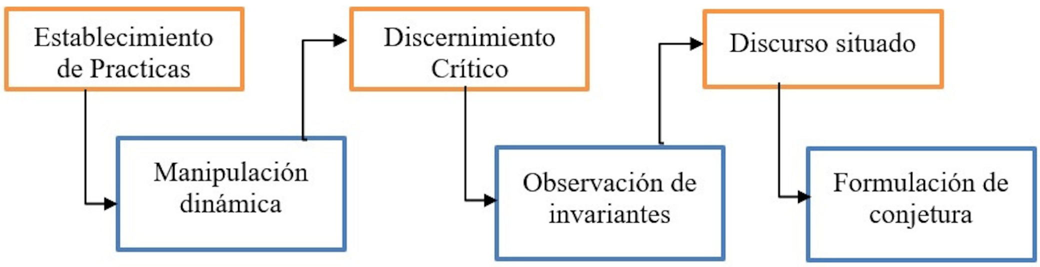

Figura 10. Interacción entre los modos epistémicos del Modelo de Tareas Tecnopedagógicas (Leung, 2011) y las fases del proceso de conjeturación (Cañadas et. al., 2008)

Es importante destacar la importancia del papel que jugó el software de geometría dinámica GeoGebra tanto en el diseño de las tareas como en la resolución de estas. La experimentación de los patrones de variación, el cual fue un paso clave para el discernimiento de los invariantes y por lo tanto para el proceso de conjeturación, hubiera sido un ejercicio mucho más complicado si no se hubiera contado con la posibilidad de variar las características de la construcción que nos ofreció el software. El software de geometría dinámica se convierte entonces en una herramienta muy importante para el diseño de tareas que tengan como propósito fomentar el proceso de conjeturación, tal como lo señalan Stylianides y Ball (2008) y Boero et al. (2018).

Finalmente quisiéramos llamar la atención sobre lo significativa que fue la experiencia para los estudiantes. El trabajo desarrollado permitió apreciar que lo que descubrieron es realmente novedoso para ellos. Es decir, el hecho que se requieren ciertas propiedades de los polígonos regulares para poder realizar teselaciones con ellos es algo que no era evidente para los estudiantes, antes de resolver las tareas e incluso durante su resolución.

Lo anterior nos lleva a reflexionar sobre la importancia de promover el proceso de conjeturación en la clase de matemáticas. En nuestra experiencia docente hemos observado que, en muchas ocasiones, los profesores universitarios preferimos simplemente exponer los hechos más relevantes de las temáticas que estamos enseñando, en lugar de motivar a nuestros estudiantes a que los descubran por ellos mismos. Al hacerlo, privamos a nuestros estudiantes de la posibilidad de desarrollar competencias argumentativas que les pueden ser de utilidad para su formación profesional.

Referencias

Alfonso-Cuellar, J. J., Mancera-Vaetts, L. P. y Cárdenas, Y. (2018). Trabajo colaborativo mediado por las TIC: estrategia para el fomento de la competencia argumentativa. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 1*(54), 41-55.

Arzarello, F., Andriano, V., Olivero, F. y Robutti, O. (1998). Abduction and conjecturing in mathematics. *Philosophica, 1*(61), 77-94.

Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry enviroment. *ZDM, 51*(5), 779-791. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01046-8

Bell, A. W. (1976) A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

Boero, P., Fenaroli, G. y Guala, E. (2018). Mathematical argumentation in elementary teacher education: The key role of the cultural analysis of the content. En A. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving: An international perspective* (pp. 49-67). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_4

Bravo-Castillo, M., y Mejía-Giraldo, A. (2010). Los retos de la Educación Superior en Colombia: una reflexión sobre el fenómeno de la deserción universitaria. *Revista Educación en Ingeniería, 5*(10), 85-98. http://dx.doi.org/10.26507/rei.v5n10.101

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis.* Fondo Editorial Universidad de Antioquia.

Cañadas, M. C., Deulofeu-Piquet, J., Figueiras, L., Reid, D. A. y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), 431-441.

Fahlgren, M., y Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning*, *19*(3), 287-315. http://dx.doi.org/10.1007/s10758-014-9213-9

Garcia-Barrera, A. (2015). Importancia de la competencia argumentativa en el ámbito educativo: una propuesta para su enseñanza a través del role playing online. *RED-Revista de Educación a Distancia, 1*(45), 1-20. http://dx.doi.org/10.6018/red/45/alba

Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra* (Versión 5.0) [Software de ordenador o App para móvil]. https://www.geogebra.org

Kieran, C., Doorman, M. y Ohtani, M. (2015). Frameworks and principles for task design. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education, an ICMI study 22* (pp. 19-81). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_2

Kovacs, Z., Recio, T. y Vélez, M. P. (2018). Using automated reasoning tools in GeoGebra in the teaching and learning of proving in geometry. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, *25*(2), 33-50. http://dx.doi.org/10.1564/tme_v25.2.03

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM*, *43*(3), 325-336. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-011-0329-2

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning.* Göteborgs Universitet.

Lynch, A. G. y Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 323-338. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.004

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics,* *44*(1), 87-125. https://doi.org/10.1023/A:1012785106627

Marton, F., y Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F., Runesson, U. y Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. En F. Marton y A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3-40). Lawrence Erlbaum Associates. http://dx.doi.org/10.4324/9781410609762

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Romero, L. (2018). *Tareas tecno-pedagógicas: un modelo para promover la conjeturación en la educación superior* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional-Universidad Pedagógica Nacional.

Santos-Trigo, M. y Espinosa-Pérez, H. (2002). Searching and exploring properties of geometric configurations using dynamic software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *33*(1), 37-50. http://dx.doi.org/10.1080/00207390110087129

Stylianides, A. J. y Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(4), 307-332. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9

Toro, J. R. y Villaveces, J. L. (2008). *El pensamiento matemático: una competencia emergente.* Ministerio de Educación Nacional de la Republica de Colombia. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-189357_archivo_pdf_matematica_1B.pdf

Weinberger, A., Fischer, F., y Stegmann, K. (2005). Computer-supported collaborative learning in higher education: Scripts for argumentative knowledge construction in distributed groups. En T. Koschman, D. D. Suthers y T-K. Chan (Eds.) *Proceedings of the International Conference on Computer Support for Collaborative Learning: The Next 10 Years!* (pp. 717-726). International Society of the Learning Sciences. https://doi.dx.org/10.22318/cscl2005.717

Luis C. Romero
Fundación Universidad de América, Colombia
luis.romero@profesores.uamerica.edu.co

Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

Recibido: Mayo de 2021. Aceptado: Enero de 2022
doi: 10.30827/pna.v16i2.21334

ISSN: 1887-3987