

# EL RECUENTO Y LAS REPRESENTACIONES MANIPULATIVAS: LOS PRIMEROS PASOS DE LA ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA

Luis J. Rodríguez-Muñiz, Laura Muñiz-Rodríguez y Álvaro Aguilar-González

*Los procesos estadísticos comienzan con la selección de la variable de estudio y la recogida de los datos. Para organizar los datos recogidos es esencial llevar a cabo un recuento de los valores observados. En este artículo se propone una aproximación al recuento mediante el análisis de las categorías observadas y se discuten distintas técnicas de recuento, sus formas de representación manipulativa o pictórica y su conexión con las tablas de frecuencias. Por último, se refiere un experimento didáctico llevado a cabo con estudiantes para maestros sobre el manejo de las representaciones manipulativas de los recuentos como paso previo a las gráficas estadísticas manipulativas.*

**Términos clave:** Alfabetización Estadística; Educación Infantil; Representaciones Estadísticas; Recuento

Tally and Manipulative representations: The First Steps of Statistical Literacy

*Statistical processes start with selecting the studied variable and collecting data. For organizing data, it is essential to carry out the tally of the observed values. In this paper, an approach based on the observed categories is considered, and different manipulative and pictorial strategies for the tally are analyzed, as well as their connection with frequency tables. Finally, an experience with pre-service teachers consisting of using manipulative charts of tallies as a previous step to statistical manipulative graphs is presented.*

**Keywords:** Early Childhood Education; Statistical Literacy; Statistical Representations; Tally

La alfabetización estadística tiene una introducción reciente en la educación infantil en España (Alsina, 2019a, 2019b). Tradicionalmente, los primeros pasos

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar González, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas. Los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA*, 15(4), 311-338.

matemáticos en este nivel educativo se encaminaban al sentido numérico y, en menor medida, al sentido geométrico. Sin embargo, en el contexto internacional la introducción de la estadística y la probabilidad en los currículos de Primaria a partir de las reformas curriculares surgidas en los años 90 (Australian Education Council, 1994; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000; School Curriculum and Assessment Authority & Curriculum and Assessment Authority for Wales, 1996) y la investigación publicada a finales del XX y principios del XXI (Alsina, 2006; Baroody, 1987; Batanero, 2009, 2013; Cobb, 1999; Curcio, 1987; Franklin y Garfield, 2006; Lehrer y Schauble, 2007) han contribuido a introducir el embrión del sentido estadístico en el contexto español (Batanero, 2013; Batanero y Chernoff, 2018) en educación infantil.

En los últimos años se está produciendo, tanto en el ámbito científico como social, un mayor reconocimiento de la importancia de la estadística, vinculada a la explosión de la ciencia de datos. De este modo, han surgido nociones como la alfabetización de datos, acuñada por Schield (2004), que ha sido asumida por organizaciones como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE, 2019) como una de las competencias necesarias, junto con la alfabetización lingüística, para la ciudadanía en el Horizonte 2030. La relevancia que está adquiriendo la alfabetización de datos como un paso más allá de la alfabetización estadística refuerza la importancia de asentar las bases de esta desde las primeras etapas educativas.

Aunque no es aún abundante la investigación respecto a la alfabetización estadística en Infantil, la mayor parte de los estudios se han centrado en analizar la representación gráfica (por ejemplo, Vásquez et al., 2018) o la interpretación de los datos (por ejemplo, Mulligan, 2015), pero es escasa la investigación experimental sobre su organización, segundo paso en todo proceso estadístico tras su recolección.

Alsina (2017, 2018, 2019a) justifica la introducción de la estadística en Infantil basándose en tres argumentos: su contribución a que la educación se adapte a los cambios sociales; su importancia en el desarrollo integral de la infancia; y la relevancia de la alfabetización estadística en el mundo actual. Partiendo de estos argumentos, en distintos trabajos sintetizados en Alsina (2019a) se proponen contenidos de estadística y probabilidad que pueden ser considerados en educación infantil, organizados por edades y en torno a tres ejes: identificación de datos y hechos, comparación de datos y hechos, y operaciones con datos.

Los objetivos del presente artículo son tres: (1) proponer una aproximación al recuento mediante el análisis de las categorías observadas centrada en los dos primeros ejes (identificación y comparación de datos y hechos); (2) analizar distintas técnicas de recuento, sus formas de representación manipulativa o pictórica, y su conexión con las tablas de frecuencias; y (3) estudiar cómo maestros en formación manejan las representaciones manipulativas de los recuentos como paso previo a las gráficas estadísticas manipulativas.

Se ha organizado el presente artículo en cuatro apartados. Tras la introducción, en el segundo apartado se abordan los fundamentos teóricos, en concreto, la alfabetización estadística y gráfica en la educación infantil. En el tercer apartado se analiza el recuento como elemento clave de la estadística en Infantil. El siguiente apartado incluye un experimento didáctico con estudiantes para maestros que tiene como objetivo evidenciar la necesidad de prestar atención al paso del recuento a la frecuencia no sólo numéricamente sino gráficamente. Finalmente, se aportan unas conclusiones.

## LAS ALFABETIZACIONES ESTADÍSTICA Y GRÁFICA EN LA EDUCACIÓN INFANTIL

### **Alfabetización estadística**

Gal (2002) define la alfabetización estadística mediante dos dimensiones: la capacidad de interpretar correctamente los datos y la información estadística, y la capacidad de discutir o comunicar las opiniones al respecto. Es obvio que se trata de competencias muy ambiciosas para ser adquiridas durante la etapa de Infantil, no obstante, es posible sentar las bases para el desarrollo progresivo de estas competencias. Así, se pueden poner a disposición del alumnado herramientas que le ayuden a enfrentarse a lo impredecible, en términos de aleatoriedad, iniciándose en la estadística a través del manejo de proyectos sencillos, y que le permita manejar situaciones cuyo resultado no sea seguro; de este modo, se comienza a manejar la incertidumbre de manera intuitiva, mediante un lenguaje probabilístico elemental (Alsina, 2019b). En Wild y Pfannkuch (1999) y Pfannkuch y Wild (2004) se desarrolla el concepto de razonamiento estadístico, que recoge el modo en el que las personas razonan con ideas estadísticas y dan sentido a la información, distinguiendo cinco tipos de razonamiento: reconocimiento de la importancia de los datos; trasnumeración (cambios de representación que facilitan la comprensión); asunción de la variabilidad; razonamiento con modelos estadísticos; e integración de la estadística en el contexto. Por su parte, el razonamiento estadístico y las distintas definiciones y niveles de competencia de la alfabetización estadística son integradas bajo la noción de sentido estadístico, respecto al cual Batanero (2013) distingue tres componentes: la comprensión de las ideas fundamentales en la estadística, el análisis de datos y el razonamiento y la toma de decisiones a partir de ellos.

El paradigma para sentar las bases de la alfabetización estadística en Infantil ha de ser, en coherencia con el resto de las matemáticas, informal (Baroody, 1987). Como se evidencia en los numerosos trabajos de Alsina (2006, 2012), el alumnado de Infantil tiene intuiciones y es capaz de alcanzar un conocimiento informal sobre la recolección de datos, su organización y su representación, e incluso es capaz de alcanzar cotas de interpretación adaptadas a su desarrollo evolutivo. Esto, como en toda la actividad matemática que se desarrolla en Infantil, se consigue cuando

se potencia la conexión entre lo utilizado en el aula y la vivencia y el contexto cotidiano del alumnado. Pero especialmente la existencia de un contexto debe caracterizar la actividad estadística, ya que ese contexto es el que da sentido al razonamiento estadístico (Cobb y Moore, 1997).

En Alsina (2019a), se recoge la síntesis de una propuesta de distribución de contenidos para la educación infantil de 3 a 6 años, a partir de las orientaciones del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) y de diversos trabajos del autor. En ella se identifican tres ejes organizadores de la actividad estadística y probabilística y dentro de cada uno de ellos se introducen, avanzando progresivamente en complejidad, contenidos en cada curso de esta etapa. En lo que respecta a los aspectos tratados en el presente artículo, nuestra aproximación encaja con lo definido dentro de los dos primeros ejes. En el eje relativo a la identificación de datos y hechos, consideramos la identificación de datos (más o menos sencillos) de variables principalmente cualitativas y procedentes del entorno cercano, y la representación de datos identificados (manipulativa o gráficamente) llegando a identificar la frecuencia. En el eje correspondiente a la comparación de datos y hechos consideramos la organización de datos mediante su clasificación, con el objetivo de identificar categorías similares.

English (2012) defiende la necesidad de revisar experiencias estadísticas de las primeras edades escolares, para poner el foco sobre el modelado de datos con varias experiencias llevadas a cabo con alumnado de 3 a 6 años. A su vez, esta autora, se inspira en uno de los cinco tipos de razonamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), el razonamiento con modelos. Sin embargo, en nuestro caso, dado que se reflexiona sobre las primeras etapas del proceso estadístico, aparecen involucrados otros principios como la transnumeración, la necesidad de los datos o la integración del contexto y se reduce el peso del modelo estadístico. Así, asumimos la idea de Jones et al. (2000, p. 271) sobre la “necesidad [para que el alumnado piense estadísticamente] de que entienda conceptos relacionados con el manejo de datos que tienen múltiples facetas y se desarrollan a lo largo del tiempo”. Por lo tanto, nuestra premisa supone atender principalmente los procesos de clasificación de los datos recogidos y elaboración de las categorías y del recuento, como constitutivos del proceso estadístico en educación infantil.

La construcción de un modelo estadístico propiamente dicho no suele tener lugar en la educación infantil; no obstante, el desarrollo temprano de modelos matemáticos puede comenzar en esta etapa. En todo caso, para que se asienten las bases de la futura construcción de modelos estadísticos en edades más avanzadas, tanto la estructura como la representación de los datos son elementos fundamentales (English, 2012), ya que con frecuencia los niños en edades tempranas tienen dificultades en seleccionar la información relevante y desechar aquella redundante (Lehrer y Schauble, 2007).

Jones et al. (2000) proponen y validan un modelo para caracterizar el pensamiento estadístico infantil. El modelo consta de cuatro constructos que, a su vez, alcanzan cuatro niveles de desarrollo (idiosincrático, transicional, cuantitativo

y analítico). Los cuatro constructos son: describir datos, organizar y reducir datos, representar datos, y analizar e interpretar datos. La propuesta del presente artículo se relaciona con estos constructos, aunque con más énfasis en el segundo y el tercero. El primer constructo (describir datos) se relaciona más con los niveles iniciales de lectura de gráficos (Arteaga et al., 2011; Curcio, 1987) y la identificación de la información fundamental en soporte gráfico (en auge a través de recientes sitios web de actividades ricas como *What's going on in this graph* (<https://www.nytimes.com/column/whats-going-on-in-this-graph>) o *Slow reveal graphs* (<https://slowrevealgraphs.com/>)). El segundo constructo (organizar y reducir datos) se refiere a acciones como la ordenación, el agrupamiento y el resumen de los datos, reconociendo la pérdida de información que este pueda suponer. Jones et al. (2000) apuntan a la necesidad de más estudios sobre cómo en las primeras etapas escolares se desarrollan estos procesos. Así, en este artículo, el segundo constructo se refleja en la aproximación al recuento mediante el análisis de las categorías observadas y el análisis de técnicas de recuento, sus formas de representación manipulativa o pictórica, y su conexión con las tablas de frecuencias. El tercer constructo (representar datos) está presente a través de la representación manipulativa en la experiencia llevada a cabo con estudiantes para maestros. Por último, el cuarto constructo (analizar e interpretar datos) se corresponde con los niveles más altos de la lectura de gráficos y con la obtención de parámetros estadísticos y es el que menos relación directa tiene con la propuesta de este artículo.

### **Alfabetización gráfica**

Intrínsecamente vinculado a las alfabetizaciones estadística y matemática se encuentra el concepto de alfabetización gráfica (*graphicacy* en inglés). Se define como la capacidad de interpretar y representar información en forma de esquemas, fotografías, diagramas, mapas, planos, gráficas y otros formatos no textuales en dos dimensiones (Aldrich y Sheppard, 2001). Aunque la definición no se restringe a la matemática ni a la estadística, las primeras manifestaciones gráficas especialmente en educación infantil sí están íntimamente ligadas al desarrollo del sentido numérico (Carruthers y Worthington, 2011) pues, además de producirse simultáneamente, se retroalimentan entre sí.

Por otra parte, desde el punto de vista de la educación matemática, se ha señalado la importancia de la competencia metarrepresentativa (DiSessa et al., 1991) como una base en el desarrollo de los procesos de representación. No se trata tanto de enseñar cómo se dibuja o se representa, como de hacer explícitos los objetivos del gráfico y entender sus convenios para darle sentido a lo que se representa.

English (2013) señala que los procesos de agrupación de objetos, primero manipulativamente y después gráficamente, son los que permiten ir aprendiendo a distinguir características que los hacen diferentes o similares. Mulligan (2015) defiende que para conectar adecuadamente la alfabetización numérica y la

alfabetización estadística en los primeros años escolares es necesario involucrar al alumnado en la búsqueda de patrones y estructuras en los datos, apoyándose en una adecuada representación gráfica. En este sentido, cabe señalar que lo que caracteriza a un gráfico estadístico es la representación de información estadística, que pasa por clasificar, organizar y, en su caso, agrupar los datos y resumirlos; en otras palabras, la generación de información a partir de datos (Cleveland, 1994). Representar estadísticamente la información forma parte sustancial de la transnumeración, una de las componentes del razonamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999), ya que incluye los cambios de representación en los datos (tablas, gráficos, texto, etc.) encaminados a obtener información.

A partir de estas experiencias de clasificación y recuento, mediante la manipulación se accede a las primeras experiencias estadísticas, se avanza en la sustitución de los objetos por algún tipo de marca de cuenta física (policubos, fichas, autoadhesivos, etc.) o gráfica (rayas, cruces, puntos, etc.), y se aprende a aplicar criterios de clasificación (Alsina y Planas, 2008; Alsina, 2019b; Watson et al., 2018). Reforzando estas prácticas mediante procesos comunicativos en las que los niños tengan que explicar lo que han hecho o preguntar por producciones ajenas, se logra profundizar tanto en la construcción y lectura de gráficos como en su interpretación en contexto (Konold y Higgins, 2003).

## EL RECUENTO COMO BASE DE LA ESTADÍSTICA EN INFANTIL

Para iniciar en educación infantil la alfabetización estadística como cimiento de un futuro razonamiento estadístico, es necesario que los niños experimenten de primera mano los procesos de recogida de datos y de exploración de su naturaleza (delMas, 2004). A menudo tanto en educación infantil como también en Primaria, se ha caído en lo denunciado por DiSessa et al. (1991) de comenzar por el cómo representar los datos, prestando poca atención a los procesos previos de recolección, clasificación y organización. Este tipo de práctica priva al alumnado de una experiencia que enriquece por dos vías diferentes. Primero, porque se subraya la vivencia del proceso estadístico en su conjunto dotándolo de sentido y desarrollándose en paralelo al sentido numérico mediante el conteo y, segundo, porque se experimentan situaciones donde la variabilidad implica tomar decisiones para clasificar y organizar.

En otras palabras, las situaciones cotidianas del alumnado en infantil (y las del alumnado de otra edad) no están formadas por elementos categóricos de clasificación inmediata e inequívoca, sino que, al contrario, aprender a clasificar supone reconocer las diferencias y las similitudes entre objetos y, a partir de ellas, definir categorías. Apreciar características comunes y singulares e inferir categorías a partir de ellas es un proceso complejo, que requiere un nivel de abstracción al que se debe prestar atención y que, además, necesita tomar decisiones respecto al proceso en sí mismo y respecto a la clasificación de futuras

observaciones. Es más, a menudo, la categorización inicial debe ser revisada a la vista de nuevas observaciones.

Cuando hablamos de recuento incluimos, por lo tanto, además del proceso de conteo propiamente dicho, los procesos anteriores y paralelos que son necesarios para llevarlo a cabo, en concreto, la comparación de los objetos, la clasificación en categorías y la asignación de las observaciones a las categorías seleccionadas. En el apartado siguiente nos centraremos en la clasificación y asignación de categorías.

### **Las categorías**

El tipo de variables que se aconseja utilizar en Infantil de acuerdo con Alsina (2019a) son las cualitativas y algunas cuantitativas discretas no muy complicadas. Si bien la exclusión de las cuantitativas continuas está obviamente justificada en esta etapa, dentro de las variables cualitativas nos podemos encontrar con ejemplos de la vida cotidiana que pueden albergar mayor dificultad que la que, a priori, se espera o se sospecha.

Hay una serie de variables comúnmente utilizadas en Infantil porque ayudan al desarrollo del conocimiento personal y del entorno. Una variable de este tipo es el color. En Infantil se suele trabajar con los colores básicos, y cuando el material está estructurado es relativamente fácil que los colores estén bien definidos. Sin embargo, la escala cromática se complica cuando pasamos a analizar situaciones contextualizadas en la vida cotidiana. Por ejemplo, en Alsina (2017) se presentan actividades consistentes en responder a preguntas como ¿cuál es tu color favorito?, ¿cuántos coches hay de cada color?, o ¿cuántos animales hay de cada color? (referidas a coches o animales de juguete). Aunque las tres preguntas se refieren al color, es mucho más probable que las respuestas de los niños a la primera sean los colores básicos (rojo, azul, amarillo, verde, etc.). Pero con las otras dos preguntas nos podemos encontrar coches o animales de juguete que no encajen claramente en uno de los colores básicos (granate, turquesa, fucsia, magenta, etc.). Análogamente puede suceder si se utilizan colores de objetos que admiten gamas cromáticas intermedias o denominaciones confusas, como el color del pelo.

A menudo el color está presente en los recursos didácticos porque los hace llamativos y porque su aprendizaje e identificación es propio de esta etapa. Hay que tener en cuenta que no se trata de un contenido específicamente matemático y, en ocasiones, podría llegar a ser irrelevante o distractor, pero sí es un elemento muy utilizado para trabajar contenidos matemáticos en educación infantil. De hecho, existen materiales manipulativos en los que el color sí es un elemento clave y lleva asociado, a su vez, un valor numérico en función del tipo de elemento (como las regletas de Cuisenaire, los bloques lógicos de Dienes, el escalado de colores de Montessori, etc.).

El caso del color es aplicable a otras variables cualitativas cuyas categorías o modalidades pueden estar imprecisamente definidas y son habituales en Infantil. Por ejemplo, la comprobación del tiempo meteorológico. Muchas actividades de

Infantil pasan por comprobar el tiempo que hace cada día y crear un registro que luego puede ser utilizado o no, con fines estadísticos (véase un ejemplo en Alsina, 2012). Son, como las del color, tareas idóneas para trabajar la estadística en el contexto próximo del alumnado y, al tiempo, darle sentido a la matemática como un instrumento para promover el desarrollo del conocimiento del entorno. No obstante, categorías como nublado o cubierto pueden resultar confusas, porque definiciones muy estrictas (por ejemplo, soleado solamente cuando no hay ninguna nube en el cielo) pueden llevar a aplicaciones muy rígidas de la interpretación del entorno.

Como se señala en Blanco-Fernández et al. (2016), también la discretización de variables continuas puede dar lugar a estas ambigüedades, por ejemplo, si se trabaja con la variable edad dividida en categorías como joven, maduro o anciano. Asimismo, la introducción de cuantificadores lógicos, que pueden surgir de la utilización del lenguaje natural por parte del alumnado, puede generar estas situaciones de imprecisión. Por ejemplo, si se considera la variable altura dividida en categorías, pueden surgir expresiones como “muy alto”, “ni muy alto ni muy bajo”, etc.

También se debe tener en cuenta que el conocimiento numérico se inicia desde un enfoque cualitativo e impreciso, por ejemplo, asumiendo “tener dos años” como una cualidad personal y dejando para más adelante el establecimiento cuantitativo o cardinal, puesto que se requiere de un dominio del carácter ordinal previo (Clements, 2004).

Para evitar los problemas que puedan surgir a la hora de definir las categorías se proponen dos estrategias, cuya aplicación depende de la actividad (y de las variables involucradas), del contexto del aula y de la madurez cognitiva del alumnado. La primera estrategia pasa por intentar definir unas categorías o modalidades con anterioridad a la recogida de los datos, y discutir los posibles casos ambiguos sobre la escala ya definida (en este caso, estaríamos aplicando de manera subyacente una técnica estadística de clasificación supervisada). La segunda estrategia, más dialógica, pasa por realizar previamente una observación de los datos recogidos y, sobre ellos, realizar la discusión de las posibles categorías, clasificando al tiempo los valores ambiguos (sería el análogo a una clasificación no supervisada). La segunda es más constructiva que la primera, que necesitaría de un alumnado ya entrenado en este tipo de razonamiento. Además, la clasificación a posteriori permite tratar de manera individualizada los posibles valores ambiguos.

La finalidad de ambas estrategias es profundizar hacia el nivel analítico del constructo organizar y reducir datos del modelo de Jones et al. (2000), que tiene como indicador: “agrupa u ordena datos en categorías de más de una manera y puede explicar las causas de estas diferentes agrupaciones” (p. 286), trascendiendo así el nivel transicional, cuyo indicador recoge: “proporciona una agrupación u ordenamiento que no es consistente o agrupa los datos en categorías que no es capaz de explicar” (p. 286).

Este trabajo de discusión y toma de decisiones está alineado también con la propuesta de Alsina (2019a) sobre la relevancia de la alfabetización estadística en la formación crítica, el fomento de la argumentación y la comunicación entre el alumnado (refiriéndonos a los procesos del NCTM, 2000) y, además, la reproducción a una escala adaptada a la educación infantil el trabajo previo necesario en todo estudio estadístico.

En Alsina et al. (2020) se apunta también otra posible fuente de ambigüedad en la categorización, aunque en este caso no se deriva de la imprecisión en las categorías, sino de la definición de la pregunta, es decir, del objetivo del estudio estadístico en sí mismo. En ocasiones se pueden plantear al alumnado cuestiones a las que puede responder con distintas respuestas, y en ese caso, el convenio que se debe alcanzar pasa por definir si se tiene solo en cuenta una respuesta por individuo (desde el punto de vista estadístico es lo más adecuado) o si se admitirá más de una respuesta por alumno y, en ese caso, cuántas (todas las que proporcione, o un número máximo por alumno). Lo ilustramos con el ejemplo de Alsina et al. (2020), si preguntamos: “¿con qué personas has hablado por videoconferencia durante el confinamiento [causado por la COVID-19]?” (p. 114). Es obvio que el alumnado recuerde haber hablado con más de una persona, por lo tanto, podemos decidir considerar solo aquella persona con quien ha hablado más (en este caso, estaríamos matizando la pregunta del estudio) o considerar todas las respuestas que nos den. En esta misma propuesta de Alsina et al. (2020) se incluye también una respuesta ambigua o difícil de clasificar: frente a abuelos, tíos, primos, amigos, etc., aparece una persona denominada por un niño “la Tata”, que podría ser otro familiar o una persona cercana, pero cuya relación de parentesco nos impide clasificarla en las categorías familiares más claras. Esta fuente de ambigüedad fue apuntada por Mulligan (2015) con experimentos con niños de 6 años, aunque sin llegar a desarrollarla.

En todos los casos descritos, no debemos perder de vista que, en palabras de Watson (2006), el horizonte de todo estudio estadístico es “manejar la variabilidad y establecer conclusiones relacionadas con preguntas sobre fenómenos que varían” (p. 21), por lo que debemos considerar todas las fuentes posibles de variabilidad, así como la ambigüedad y la imprecisión.

### **El recuento**

El segundo proceso que estudiamos es el recuento, que se trata de la comprobación del número de valores observados en cada una de las categorías (modalidades o valores) de la variable analizada. Tiene, por lo tanto, una naturaleza intrínsecamente ligada al desarrollo del sentido numérico y, concretamente, al conteo. Como se señaló anteriormente, es preciso indicar que el proceso de recuento puede ser paralelo o posterior a la discusión de las categorías de la variable estudiada.

Las estrategias de recuento se pueden abordar desde distintas perspectivas, manipulativas o pictóricas. Pero si algo debe caracterizar el recuento, desde el

punto de vista estadístico, es que debe dar facilidades para contar. Esto es, el recuento estadísticamente se entiende como un paso intermedio hacia la tabla de frecuencias; mientras que esta es un objeto matemático esencialmente estadístico, el recuento no está vinculado necesariamente a la estadística. De hecho, una de las primeras manifestaciones de las denominadas marcas de cuenta es el célebre hueso de Ishango, al margen de otras discutidas interpretaciones matemáticas (véase Santos, 2019).

A pesar de su importancia, y de constituir un andamiaje para la construcción de la tabla de frecuencias, el recuento es a menudo ignorado, con alguna referencia a las marcas de cuenta, y se pasa directamente de los datos en bruto a la tabla de frecuencias, incluso en informes como el GAISE (Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education, 2005), el recuento apenas aparece mencionado.

En el presente estudio nos acercamos al recuento desde una perspectiva basada en la secuencia CPA: Concreto-Pictórico-Abstracto (Hoong et al., 2015), que es una reinterpretación de los modos de representación enactivo, icónico y simbólico de Bruner (1966).

Alsina (2012, 2017) propone recuentos donde los propios objetos son utilizados como marcas de cuenta, estaríamos, entonces, en la etapa manipulativa o concreta. Así, se apilan coches de juguete o se agrupan ositos de colores (figura 1). Otra estrategia para recontar una variable en el alumnado (por ejemplo, la inicial de su nombre) sería hacer grupos con los niños que compartan un valor de esa variable, por lo tanto, no serían tanto los objetos observados los que se manipulan, como los individuos que comparten esa característica. En otros casos, lo manipulativo es una representación simplificada de la realidad observada, por ejemplo, se utilizan coches de juguete para representar coches reales observados en el exterior de la escuela. Siguiendo a Kamii (1990), la manipulación de los objetos debe estar asociada a la experimentación ya que esta permite que el alumnado observe y perciba de manera activa.



Figura 1. *Recuento manipulativo utilizando el objeto observado: ositos de juguete, clasificados en función de su color (Alsina, 2019b, p. 254).*

Un nivel adicional de abstracción se produce cuando representamos los elementos observados mediante algún otro objeto manipulativo que lo simboliza, por ejemplo, policubos, regletas de Cuisenaire, autoadhesivos, clips, pinzas, lápices, etc. Así, en Alsina (2017) se utilizan policubos de colores para realizar el recuento del número de caramelos, relacionando el color de la pieza con el sabor al que

responde el caramelo. En este caso, se realiza un salto conceptual que debe tenerse en cuenta para no perder el conjunto referencial. Además, se deben considerar los problemas basados en la dificultad de la abstracción representativa.

El uso de materiales manipulativos en el aula de educación infantil abre una puerta para el desarrollo cognitivo del alumnado ya que, si los conoce y tiene libertad para emplearlos, podrá utilizarlos en diferentes situaciones. Hay que considerar que dentro de los distintos materiales manipulativos existen, a su vez, diferentes niveles de abstracción (Flores et al., 2011). Por ejemplo, los policubos son representaciones unitarias y discretas de algún objeto que se tome en consideración, sin embargo, las regletas de Cuisenaire suponen un mayor grado de abstracción, puesto que cada regleta es una unidad perceptiva que expresa la noción de cantidad mediante una magnitud continua de longitud. Por ello, se hace necesario que cuando se trabaje con los policubos se haga desde una progresión en el uso: primero utilizando los colores de manera indistinta, y después escogiendo policubos del mismo color que permitan crear recuentos que se puedan asociar al objeto numérico de manera discreta. En un último paso, podríamos manejar las regletas para representar las marcas de cuenta.

En la fase pictórica se añade otro factor que debe considerarse: las posibles variantes en las marcas de cuenta dibujadas. De nuevo, remontándonos al hueso de Ishango, las primeras marcas conocidas son simples trazos (incisos en el caso del hueso, dibujados en el caso pictórico) de longitud aproximadamente regular y alineados paralelamente a lo largo de una horizontal (González-Redondo et al., 2010). Esta marca se hace más compleja en otras estructuras habitualmente utilizadas como puntos, cruces, aspas, o con distintas formas de apilamiento o alineación (figura 2).

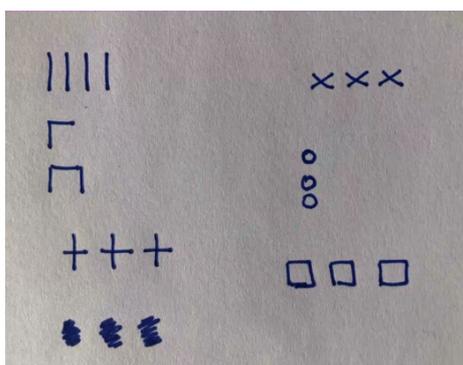


Figura 2. *Diferentes marcas de cuenta pictóricas.*

Es muy importante dar libertad al alumnado en la expresión de sus propias marcas de cuenta, ya que el desarrollo de la alfabetización gráfica va paralelo al del sentido numérico. Esa libertad para elegir el significante tiene que ir acompañada de una interpretación adecuada del significado, siendo flexibles, pero fomentando los procesos de comunicación y de representación, permitiendo que se transite de unos registros de representación a otros y se intente comprender la representación ajena



a través de rejillas o de un alineamiento reforzado con líneas que favorezcan el posterior recuento.

Es importante hacer notar que, tanto cuando se utilizan marcas de cuenta homogéneas y apiladas vertical u horizontalmente, como cuando se utilizan iconos con la misma disposición, se está realizando una protorrepresentación gráfica que se vincula directamente al caso de los llamados diagramas de puntos o *dotplots*, o de pictogramas rudimentarios (si bien el pictograma en estadística suele asociar a cada icono la representación de un número de observaciones superior a la unidad, que se define en la leyenda del gráfico). En la figura 5 se aprecia que, usando puntos como marcas de cuenta apiladas verticalmente, estamos dibujando un diagrama de puntos (en este caso se responde a la pregunta “¿en qué mes del año has nacido?”).



Figura 5. Recuento pictórico usando puntos como marcas de cuenta, que genera directamente un diagrama de puntos (Vásquez et al., 2018, p. 169).

El trabajo llevado a cabo por el alumnado de Infantil, como se puede observar en las figuras anteriores, requiere de la utilización de unos mediadores (o representaciones) para hacer tangibles los conceptos matemáticos involucrados, y que a su vez ayudan al alumnado a exteriorizar y expresar sus razonamientos matemáticos (Lesh et al., 1987).

El número natural aparece de forma espontánea al realizar recuentos de elementos de un conjunto. El aprendizaje del número, organizado en su secuencia numérica, pasa por la comprensión de relaciones lógicas (no se ordenan al azar) y necesariamente por el establecimiento de las relaciones de clasificación y seriación: la clasificación entendida como que cada número sirve de etiqueta para todos aquellos conjuntos con la cantidad que designa (el cardinal), y la seriación (el ordinal) porque tienen que descubrir que cada número posee una unidad más que el anterior (Muñoz-Catalán y Liñán-García, 2018). El desarrollo de estas relaciones lógicas permite agrupar objetos con características comunes, establecer un orden, y es el requisito para poder identificar numéricamente el resultado del conteo.

### La tabla de frecuencias

Con la secuencia CPA que se ha seguido para la introducción del recuento, la tabla de frecuencias se puede entender como la fase abstracta que culmina el proceso

seguido en las fases concreta y pictórica. De este modo, su construcción se realiza de manera mucho menos abrupta, tras haber manipulado y representado el conteo. Se trata ya solamente de realizar el proceso de abstracción de pasar de la cantidad al número (Baroody, 1988). Este proceso consiste en adjudicar a cada elemento representado un valor distinto (y solo uno) de la secuencia numérica siguiendo un orden estable. Realizado lo anterior, según el principio de cardinalidad definido por Gelman y Gallistel (1978), el valor o número asignado al último elemento representado designa el cardinal de la colección, es decir, el número de elementos representados. Este proceso se puede llevar a cabo siguiendo diversas técnicas de recuento (Cid et al., 2003). Según Gelman y Gallistel (1978), la tarea más compleja supone la aplicación del principio de correspondencia término a término, es decir, la asignación de un número a cada elemento representado de manera unívoca, puesto que requiere coordinación entre la etiqueta numérica que se asigna al elemento y la mano o la vista de quien realiza el conteo. Esta complejidad implica que, en ocasiones, se utilicen técnicas auxiliares, de manera física o mental, tales como marcar (con puntos, círculos, líneas, etc.) o desplazar los elementos ya contados para diferenciarlos de los que quedan por contar. Otra estrategia para facilitar esta labor supone agrupar las marcas de cuenta de modo que se favorezca la identificación de la cantidad (como en la figura 3). De este modo, será más sencillo pasar al número, evitando que el alumnado de Infantil recuente una a una las marcas utilizadas, y también es una oportunidad de reforzar el recitado en un contexto concreto. El uso de una u otra técnica depende, según Cid et al. (2003) del número de elementos a contar, de la configuración geométrica del conjunto (elementos alineados o agrupados), de la tipología de los elementos (puntos, cruces, aspas), de su accesibilidad (concretos, pictóricos o abstractos), y de la capacidad de movilidad de los objetos.

La figura 6 representa un paso de recuento manipulativo a tabla de frecuencias mostrado en Alsina (2012), respondiendo a la pregunta “¿de qué forma son los platos que hay en la cocina de tu casa?”. La figura 7 representa un paso de recuento pictórico a tabla de frecuencias en Alsina et al. (2020), en ella se conjugan diferentes formas de representación de las marcas de cuenta, con agrupaciones separadas cada 5 ítems, con *five-bar gate*, con el cuadrado más su diagonal, y con símbolos (X o |) consecutivos representando las respuestas a la pregunta “¿con qué personas has hablado por videoconferencia durante el confinamiento?”.

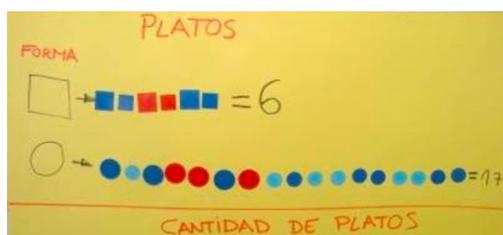


Figura 6. Transformación de un recuento manipulativo a representación pictórica (Alsina, 2012, p. 20).

Abuelos	12	Persona	Frecuencia
Primos	□   6	Abuelos	12
Tíos	5	Primos	6
Amigos	7	Tíos	5
Mi profe	XXXXXXXXXXXXXXXXX 14	Amigos	7
“La Tata”	1	Mi profe	14
		“La Tata”	1

Figura 7. Transformación de la tabla de recuento pictórica con diferentes marcas de cuenta a la tabla de frecuencias (Alsina et al., 2020, p. 115).

## EL PASO MANIPULATIVO DE LOS RECUENTOS A LAS GRÁFICAS ESTADÍSTICAS: UN EXPERIMENTO DIDÁCTICO CON ESTUDIANTES PARA MAESTROS

La formación de los estudiantes para maestros (EPM, en lo que sigue) en el uso de manipulativos les capacita para aproximarse de manera concreta a los conceptos matemáticos (Alsina, 2019b; Kamii, 1990). Estos materiales proveen al profesorado de un gran potencial para aproximarse a la enseñanza desde esta perspectiva. Cuando se enseñan matemáticas en educación infantil y en los primeros años de Primaria, el profesorado debe utilizar materiales concretos de manipulación para recorrer el ciclo CPA que mencionamos arriba.

En esta sección se muestra una experiencia llevada a cabo en la Universidad de Oviedo con N=219 EPM de educación infantil, en el curso 2020-2021, organizados en 4 grupos dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III, del tercer curso del grado. En esta asignatura se abordan, por primera vez, tanto la estadística como su didáctica. Como se comprueba a continuación, las actividades realizadas son extrapolables a los últimos años de educación infantil, puesto que se plantearon para los primeros cursos de Primaria. En todo caso, conviene señalar que el objetivo del trabajo no es analizar el conocimiento de los EPM como futuros docentes, sino que los EPM sean el sujeto del experimento didáctico consistente

en analizar el tipo de representación manipulativa que producen, partiendo de una formación básica en estadística. No obstante, en el futuro se pretende replicar el experimento con EPM de Infantil, para comparar los resultados obtenidos.

Es importante señalar que la situación derivada de la COVID-19 obligó a que toda la docencia se realizara a través de la plataforma *Microsoft Teams*<sup>®</sup>, por lo que los recursos manipulativos fueron buscados y seleccionados por los EPM con lo que disponían en sus domicilios. Asimismo, se debe indicar que las normas de la Universidad de Oviedo respecto a la docencia online impiden obligar a que el alumnado utilice su cámara web o suba material gráfico, por lo que no fue posible recoger producciones de la totalidad de los EPM, sino solo de aquellos que accedieron a compartirlas (150 en total).

El experimento consistió en plantear una situación y pedir que los EPM realizaran una representación manipulativa. La situación que se planteó fue la siguiente: “En una clase hay 3 niños sin hermanos, 5 niños con 1 hermano, 4 niños con 2 y 2 con 4 hermanos. Representa la situación con algún material que encuentres por casa”. Para ello, los EPM disponían de 15 minutos. A partir de esta situación, el objetivo era analizar qué tipo de representaciones realizaban los EPM, sin dar ninguna indicación previa. En concreto, y sobre la base de experiencias similares de representación manipulativa llevadas a cabo en cursos anteriores con otros EPM, la hipótesis de partida era que los EPM optarían por llevar a cabo representaciones manipulativas del recuento, y no realmente gráficas estadísticas manipulativas, para los datos de la situación planteada. Es preciso aclarar que, la tarea se aborda al comienzo de la unidad de estadística, por lo que en el momento de realización no se había tratado aún la representación gráfica de manera explícita. En las clases anteriores solo se trataron distintos tipos de variables estadísticas y, con carácter previo, a los EPM se les había pedido que leyeran la sección sobre representaciones gráficas del manual de la asignatura (Batanero y Godino, 2002), pero no se comprobó que realmente lo hubieran leído.

La metodología de análisis consistió en identificar características comunes en las producciones de los EPM, que permitieran categorizar las diferentes respuestas, no siendo objetivo del experimento didáctico estudiar su representatividad. Dado el tamaño de la muestra, y la limitación antes señalada que impidió tener acceso a todas las producciones, se incluyen aquí solo las producciones representativas de cada categoría.

A pesar de que los EPM habían estudiado las gráficas estadísticas desde el punto de vista pictórico, una primera categoría de producciones tiende a representar figuradamente el recuento y no un gráfico estadístico, y normalmente sin explicación sobre la naturaleza de cada uno de los objetos utilizados (omite las etiquetas, que son parte de la semiótica de los gráficos, según Curcio, 1987). Por ejemplo, en la figura 8, podemos entender que los botones representan el número de niños y los macarrones el número de hermanos y que la ausencia de macarrones en la segunda fila simboliza la ausencia de hermanos de los tres niños representados por los botones de esa fila. Por otro lado, se evidencia una falta de

sentido estadístico, ya que los datos se ordenan siguiendo el resultado del recuento (las frecuencias: los botones) y no los valores de la variable o característica observada (el número de hermanos de cada niño: los macarrones).



Figura 8. *Recuento manipulativo utilizando dos objetos: macarrones y botones.*

Una segunda categoría, ilustrada en la figura 9, supone también una representación manipulativa del recuento, pero, a diferencia de la anterior, el EPM establece como criterio de ordenación el número de hermanos, lo que supone un avance en el sentido estadístico de la representación.

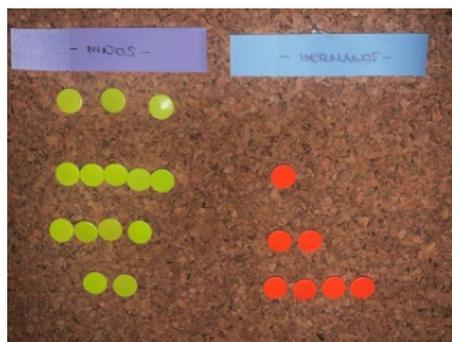


Figura 9. *Recuento manipulativo utilizando un objeto de dos colores: pegatinas verdes y rojas.*

En la tercera categoría encontramos representaciones, como la de la figura 10, que establecen los valores de la variable como entes independientes unos de otros, manteniendo cierto orden, pero sin alinearlos.



Figura 10. *Recuento manipulativo con número de hermanos, utilizando autoadhesivos y chinchetas.*

Aunque de modo minoritario, podemos identificar otra categoría que consistió en la representación no ya del recuento, sino del conjunto de elementos involucrados (en la figura 11 se aprecian 14 piezas de pasta en la base, que representan los 14 niños del ejemplo y, sobre cada uno de ellos, hay tantas piezas de pasta como hermanos tienen). En este caso, se evidencia un desconocimiento del objeto estadístico de una representación gráfica.



Figura 11. *Recuento de la totalidad de casos con manipulativos utilizando pasta de colores.*

Mostrando un mayor sentido estadístico, identificamos un grupo de producciones en las que el color se utilizó como criterio organizador (figura 12), con diferentes objetos. En estas producciones, el EPM comprende los valores establecidos para la variable número de hermanos, los identifica y clasifica mediante el uso del color y lo explica verbalmente o con etiquetas, utilizando los manipulativos para representar la frecuencia en una representación ya estadística.



Figura 12. Recuento con manipulativos utilizando el color como elemento diferenciador y utilizando ceras.

Algunos de los EPM trascendieron completamente la representación del recuento e intentaron reproducir manipulativamente la idea de tabla de frecuencias. En esta categoría consideramos las producciones que manifiestan una adecuada selección de la variable. Por ejemplo, en la figura 13, cabe destacar la utilización de las monedas como elementos de la cantidad variable (número de hermanos), aunque sin correspondencia con el valor numérico (por ejemplo, para 3 hermanos se usa una moneda de 1€, pero para 4 hermanos una de 20 céntimos). Aunque sí es reseñable la utilización de monedas del mismo valor para la frecuencia de cada categoría. Por otro lado, se intentan ordenar los valores de la variable y, aunque se comete un error con “0 hermanos”, se percibe la necesidad de establecer un orden (aunque frustrado) al introducir el valor “3 hermanos”, que no había sido observado en la muestra, para mantener la escala en la representación.

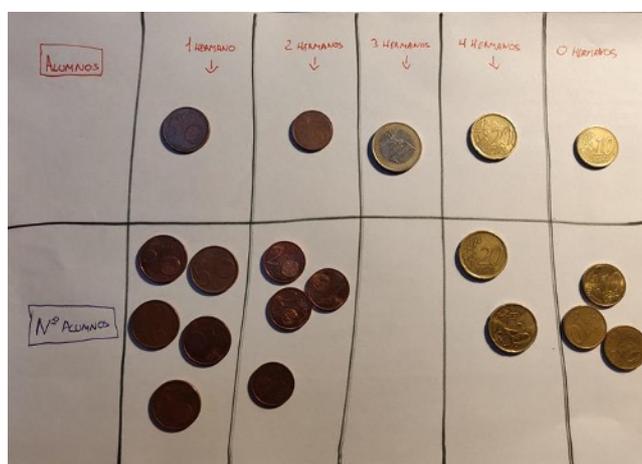


Figura 13. Representación con manipulativos utilizando monedas.

Una vez realizadas estas primeras representaciones, se realizó una discusión en gran grupo con intervención del profesorado. Esto permitió a los EPM darse cuenta de que, mayoritariamente, realizaban representaciones del recuento y no representaciones estadísticas. Estas, al representar gráficamente una variable, tienen como finalidad la organización y la estructuración de los datos y, en su caso, el resumen. Por ello, la representación del recuento puede servir como paso

intermedio, pero no contribuye a la organización o el resumen de la información de la muestra como lo hace una gráfica estadística.

Tras la intervención, se pidió que los EPM manejaran manipulativamente con una situación bivalente, por ello, se añadió nueva información a la original, matizando el género. Así se pasó a: “En una clase hay 1 niña y 2 niños sin hermanos, 3 niños y 2 niñas con 1 hermano, 2 niños y 2 niñas con 2 hermanos, y 2 niñas con 4 hermanos. Representa manipulativamente esta situación”. A continuación, se caracterizan diferentes tipos de producciones.

Como fruto de la discusión e intervención, las producciones mejoraron notablemente, abandonando el recuento y representando estadísticamente la situación. En esta ocasión se recogieron 124 producciones. Muchos EPM recurrieron al color para diferenciar entre cada uno de los géneros del enunciado. Así, en la figura 14 observamos que el EPM consigue una representación manipulativa con el material, diferenciando entre niños y niñas (aunque no se muestra la leyenda para comprender a qué corresponde cada uno de los colores), dejando la categoría de “3 hermanos” sin elementos para mantener la serie.



Figura 14. *Representación con manipulativos utilizando lápices de dos colores.*

En otra categoría agrupamos las producciones que no recurren al color, sino que utilizan el mismo material con diferentes disposiciones espaciales. Así, en la figura 15 podemos observar que la diferencia entre géneros se lleva a cabo con un criterio de orientación (vertical u horizontal) y de ordenación (los niños en la parte superior y las niñas en la inferior de cada apilamiento). Es interesante apreciar la leyenda en la parte inferior, que evidencia un alto sentido estadístico. También es importante recordar que los EPM recurrieron de manera imaginativa a los objetos que pudieron encontrar en sus domicilios.

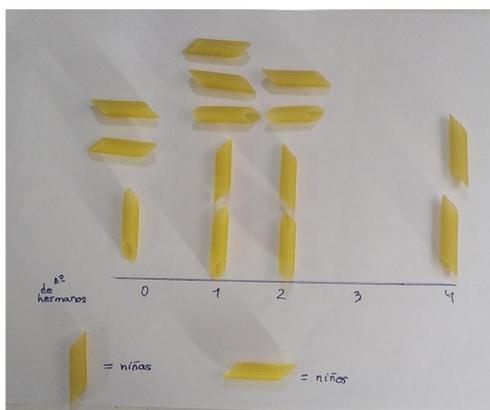


Figura 15. Representación con manipulativos utilizando macarrones.

No todas las producciones fueron tan avanzadas. En la figura 16 se utiliza un código de color para la variable género y una disposición en tabla de doble entrada para la variable número de hermanos, utilizando autoadhesivos como manipulativo, aunque no hay correspondencia entre la cantidad del manipulativo y la variable número de hermanos.



Figura 16. Representación bivariada con manipulativos utilizando autoadhesivos.

Otros EPM decidieron que no era posible representar con manipulativos el segundo enunciado y optaron por una representación pictórica. En la figura 17, por ejemplo, no se respetó la escala, ya que se omite el valor “3 hermanos”.

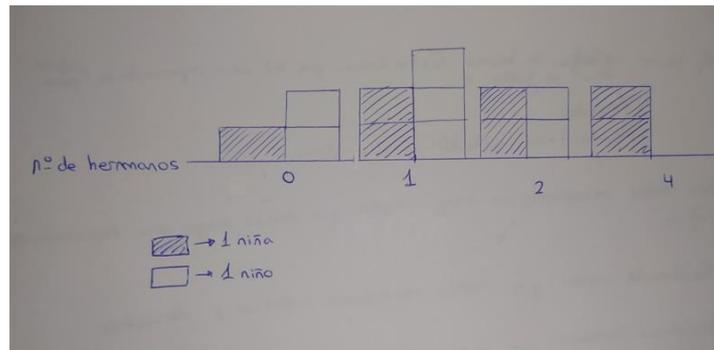


Figura 17. Representación de un gráfico de barras del número de hermanos según el género.

Por último, gran parte de los EPM realizaron representaciones similares a gráficos de barras. En algunos casos barras apiladas y, en otros, barras agrupadas, diferenciando el género mediante el uso de diferentes colores (figura 18). En este caso, se evidencia la conexión entre la tarea y el conocimiento previo sobre representaciones gráficas.

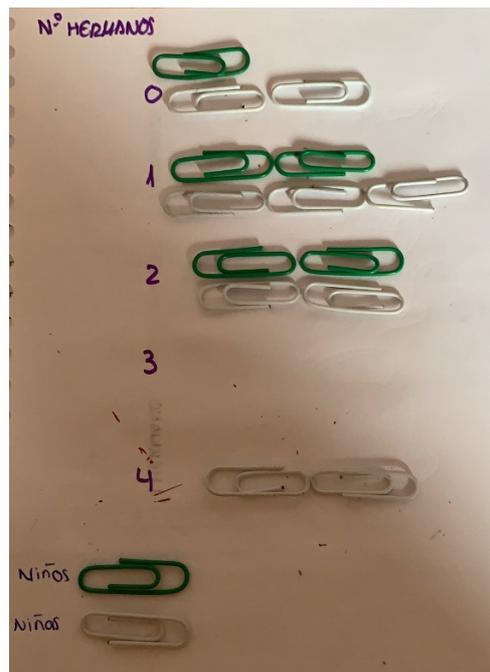


Figura 18. Gráfica estadística con manipulativos utilizando clips.

A modo de síntesis, planteada la situación inicial observamos que se verifica la hipótesis de investigación, y predominan las representaciones que reproducen el recuento, ordenando respecto a las frecuencias (figura 8) o respecto a los valores de la variable (figura 9), o segregando u ordenando las categorías de modo no convencional (figura 10), aunque también aparecen representaciones de la totalidad (figura 11) y representaciones con mayor sentido estadístico, utilizando colores para las categorías (figura 12) o intentando reproducir tablas de frecuencias

(figura 13). Una vez realizada la discusión y la intervención, las representaciones bivariadas mostraron un mayor sentido estadístico, manteniendo la escala y sirviéndose de los colores (figura 14) o las disposiciones (figura 15) para representar las categorías o reproduciendo barras apiladas (figura 18), aunque todavía algunas producciones contenían errores de correspondencia (figura 16) o escala (figura 17).

## CONSIDERACIONES FINALES

La experiencia con EPM descrita evidencia que, incluso habiendo recibido formación estadística durante su etapa escolar, el paso de los datos en bruto a la representación estadística no es evidente, y el recuento supone una estrategia intermedia de andamiaje en la construcción de la representación estadística. Este hallazgo permite encontrar una vía de aplicación de la secuencia CPA en la construcción de gráficas estadísticas, que es consistente con la investigación desarrollada en otros ámbitos de la matemática (Hoong et al., 2015). Además, respalda la necesidad de dar libertad al alumnado para que busque sus propias formas de expresión estadística (English, 2013), canalizadas en este caso a través de los materiales manipulativos (Alsina, 2017).

Obviamente, el experimento didáctico está limitado por la selección no aleatoria de la muestra y por la imposibilidad de aislar a los EPM de su conocimiento estadístico anterior (la mayoría han estudiado estadística al menos en Secundaria).

A modo de conclusión, entendemos que este trabajo justifica el interés de analizar qué dificultades y obstáculos se puede encontrar el alumnado de educación infantil durante los procesos de categorización y recuento de los valores observados en un estudio estadístico elemental, relacionados con la definición de las categorías, la progresión entre las representaciones discretas y continuas, y la aplicación de los principios y técnicas de conteo, y propone utilizar la representación manipulativa del recuento como elemento de andamiaje en la construcción de la representación estadística manipulativa, como paso previo a la pictórica. Además, estas aproximaciones manipulativas y pictóricas permiten el tratamiento del entorno personal y cotidiano del alumnado, compartiendo sus vivencias y subrayando así el razonamiento estadístico fundado sobre un contexto (Cobb y Moore, 1997). Por último, fomentar estas actividades en la formación inicial del profesorado contribuye a la reflexión sobre los procesos matemáticos (NCTM, 2000) que giran alrededor de algo tan aparentemente sencillo como el recuento: favoreciendo la comunicación sobre las producciones propias, promoviendo la argumentación a partir de las producciones propias y ajenas y trabajando de manera explícita la representación, además de la conexión con las matemáticas y con los contextos cotidianos del alumnado.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren expresar su agradecimiento al editor de este número especial y los revisores anónimos por sus valiosas observaciones, y a los EPM participantes en la experiencia por su colaboración. Este artículo ha sido parcialmente sufragado por el proyecto TIN2017-87600P, del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

## REFERENCIAS

- Aldrich, F. y Sheppard, L. (2001). Tactile graphics in school education: perspectives from pupils. *British Journal of Visual Impairment*, 19(2), 69-73. <https://doi.org/10.1177%2F026461960101900204>
- Alsina, Á. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea Ediciones.
- Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en educación infantil conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas Específicas*, 7, 4-22. <https://doi.org/10.15366/didacticas2012.7>
- Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, 95, 25-48.
- Alsina, Á. (2018). El número natural para organizar, representar e interpretar la información (estadística, azar y probabilidad). En M. C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación infantil* (pp. 173-211). Paraninfo.
- Alsina, Á. (2019a). La estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario de enseñanza. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Universidad de Granada. <https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/55032/alsina.pdf>
- Alsina, Á. (2019b). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.
- Alsina, Á., Vásquez, C. A., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez Muñiz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para educación infantil. *Épsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, 104, 99-128.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 76, 55-67.
- Australian Education Council (1994). *Mathematics: A curriculum profile for Australian schools*. Curriculum Corporation.

- Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Teachers College Press.
- Baroody, A. J. (1988). A cognitive approach to writing instruction for children classified as mentally handicapped. *Arithmetic Teacher*, 36(2), 7-11. <https://doi.org/10.5951/at.36.2.0007>
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2002). Estocástica para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 694-766). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. [https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6\\_Estocastica.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf)
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. En J. A. Fernandes, M. H. Martinho, F. Viseu y P. F. Correia (Eds.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 52-71). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho. [https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9913/1/Actas\\_IIEncontroProbabilidadesEstatisticaEscola.pdf#%5B%7B%22num%22%3A17%2C%22gen%22%3A0%7D%2C%7B%22name%22%3A%22FitH%22%7D%2C845%5D](https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9913/1/Actas_IIEncontroProbabilidadesEstatisticaEscola.pdf#%5B%7B%22num%22%3A17%2C%22gen%22%3A0%7D%2C%7B%22name%22%3A%22FitH%22%7D%2C845%5D)
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: componentes y desarrollo. *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 55-61. Universidad de Granada. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Sentidoestad%C3%ADstico.pdf>
- Batanero, C. y Chernoff, E. (2018). *Teaching and learning stochastic: Advances in probability education research*. Springer.
- Blanco-Fernández, Á., Díaz-Díaz, P., García-Honrado, I., Ramos-Guajardo, A. B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2016). A proposal for assessing imprecise concepts in Spanish primary and secondary schools. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 24 (suppl. 2), 71-91. <https://doi.org/10.1142/s0218488516400110>
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Harvard University Press.
- Carruthers, E. y Worthington, M. (2011). *Understanding children's mathematical graphics: Beginnings in Play*. Open University Press.
- Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 5-162). Universidad de Granada. [https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2\\_Sistemas\\_numericos.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf)
- Clements, D. H. (2004). Part 1: Major themes and recommendations. En D. H. Clements, J. Sarama y A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics* (pp. 7-72). Lawrence Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9781410609236>

- Cleveland, W. S. (1994). *The elements of graphing data*. Hobart Press. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0258\(19970228\)16:4%3C481::AID-SIM413%3E3.0.CO;2-7](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0258(19970228)16:4%3C481::AID-SIM413%3E3.0.CO;2-7)
- Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, statistics and teaching. *American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823. <https://doi.org/10.2307/2975286>
- Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 5-4. [https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0101\\_1](https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0101_1)
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 382-393. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.18.5.0382>
- delMas, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 79-96). Springer. [https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6\\_4](https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_4)
- DiSessa, A. A., Hammer, D., Sherin, B. y Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-Representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behaviour*, 10, 117-160.
- English, L. D. (2012). Data modelling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 15-30. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9377-3>
- English, L. D. (2013). Reconceptualizing statistical learning in the early years. En L. English y J. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 67-82). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8\\_5](https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_5)
- Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Universidad de Granada. [https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/21964/libro\\_MATREC\\_2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/21964/libro_MATREC_2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Franklin, C. A. y Garfield, J. (2006). The GAISE project: Developing statistics education guidelines for grades pre-K-12 and college courses. En G. Burrill y P. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning with data and chance (68th Yearbook)* (pp. 345-376). NCTM.
- Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (2005). *Pre K-12 and college report*. American Statistical Association.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x>
- Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.
- González-Redondo, F. A., Martín-Loeches, M. y Silván Pobes, E. (2010). Prehistoria de la matemática y mente moderna: pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico franco-cantábrico. *Dynamis*, 30, 167-195. <https://doi.org/10.4321/s0211-95362010000100007>

- Hoong, L. Y., Kin, H. W. y Pien, C. L. (2015). Concrete-pictorial-abstract: Surveying its origins and charting its future. *The Mathematics Educator*, 16(1), 1-18. <http://hdl.handle.net/10497/18889>
- Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S., Perry, B. y Putt, I. J. (2000). A framework for characterizing children's statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(4), 269-307. [https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0204\\_3](https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0204_3)
- Kamii, C. K. (1990). ¿Qué aprenden los niños con la manipulación de objetos? *Infancia*, (2), 7-10.
- Konold, C. y Higgins, T. (2003). Reasoning about data. En J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 193-215). NCTM.
- Lehrer, R. y Schauble, L. (2007). Contrasting emerging conceptions of distribution in contexts of error and natural variation. En M. C. Lovett y P. Shah (Eds.), *Thinking with data* (pp. 149-176). Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.
- Livio, M. (2003). *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni*. Rizzoli.
- Mulligan, J. (2015). Moving beyond basic numeracy: data modeling in the early years of schooling. *ZDM Mathematics Education*, 47, 653-663. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0687-2>
- Muñoz-Catalán, M. C. y Liñán-García, M. (2018). La construcción del número natural y su uso para contar. En M.C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo-Yáñez (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación infantil* (pp. 21-80). Paraninfo.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2019). *OECD Future of Education and Skills 2030: OECD Learning Compass 2030*. OECD.
- Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17-46). Springer. [https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6\\_2](https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_2)
- Santos, C. (2019). Os números primos de Ishango. *Revista Brasileira Multidisciplinar*, 22(2), 120-130. <https://doi.org/10.25061/2527-2675/rebram/2019.v22i2.638>
- Schild, M. (2004). Information literacy, statistical literacy and data literacy. *Iassist Quarterly*, 28, 6-11. <https://doi.org/10.29173/iq790>

- School Curriculum and Assessment Authority & Curriculum and Assessment Authority for Wales. (1996). *A guide to the national curriculum*. Author.
- Vásquez, C., Díaz-Levicoy, D., Coronata, C. y Alsina, Á. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la educación infantil. *Cadernos Cenpec*, 8(1), 154-179. <https://doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v8i1.393>
- Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Lawrence Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9780203053898>
- Watson, J. M., Fitzallen, N., Fielding-Wells, J. y Madden, S. (2018). The Practice of Statistics. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 105-138). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_4)
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>

Luis J. Rodríguez-Muñiz  
Universidad de Oviedo, España  
luisj@uniovi.es

Laura Muñiz-Rodríguez  
Universidad de Oviedo, España  
munizlaura@uniovi.es

Álvaro Aguilar-González  
Universidad de Oviedo, España  
aguilaralvaro@uniovi.es

Recibido: Diciembre de 2020. Aceptado: Marzo de 2021  
doi: 10.30827/pna.v15i4.22511



ISSN: 1887-3987