Universidad de Granada
Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

TESIS DOCTORAL

GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE 3º A 6º DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UN CONTEXTO FUNCIONAL DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

Eder Pinto Marín

Granada, septiembre de 2019

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Eder Pinto Marín
ISBN: 978-84-1117-155-7
URI: http://hdl.handle.net/10481/71860

El doctorando Eder Pinto Marín y la directora de la tesis María C. Cañadas Santiago, garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la guía y supervisión de la directora de esta tesis doctoral, y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización de este trabajo, se ha respetado el derecho de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, a 02 de septiembre de 2019.

Esta Tesis Doctoral ha sido realizada dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Asimismo, la tesis fue llevada a cabo en el seno del Grupo de Investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM 193).

Su autor ha sido becario del Programa “Becas Chile” de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), mediante su Programa de Formación de Capital Humano Avanzado, folio 72160307, desde el 01 de octubre de 2015 hasta el 30 de septiembre de 2019.

A Sara y Ernesto, mis padres.

A Lucas, mi hermano pequeño. En ti me inspiré al escribir esta tesis.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quisiera agradecer a la directora de esta Tesis Doctoral, María C. Cañadas, por guiarme y por confiar tanto en mi. María: estoy seguro que nos volveremos a encontrar, en cualquier "lado del charco".

Asimismo, quisiera agradecer a Bárbara M. Brizuela, de Tufts University, por abrirme las puertas a una de las experiencias más lindas y exigentes de mi vida. A Belén Giacomone (Università degli Studi della Repubblica di San Marino) y Pedro Gómez (Universidad de los Andes, Colombia) por aceptar ser los revisores internacionales de esta tesis y brindarnos sabias recomendaciones. A Alfredo Bautista (The Education University of Hong Kong) por su generosa ayuda. A Cristina Ayala (Universidad de Granada) y Lucía Donoso por sus minuciosos comentarios.

Por otra parte, agradezco a las estudiantes y a los estudiantes que forman parte de esta investigación, así como a las maestras y los maestros que gentilmente nos han brindado el apoyo para realizar las intervenciones. Del mismo modo, agradezco los comentarios y aportes de diferentes profesoras y profesores en el campo de la Educación Matemática, quienes me dedicaron valioso tiempo. En especial, a Encarnación Castro, Marta Molina, Aurora del Río, Antonio Moreno, Rafael Ramírez, Luis Rico y Enrique Castro del departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada. También agradezco los comentarios y sugerencias de Maria Blanton y de las compañeras de Boston.

Gracias a todas y todos los integrantes de los proyectos de investigación EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P por enseñarme tanto y dejarme compartir las ideas que me apasionan.

A los amigos y amigas que dejé en Chile y extrañé cada día, así como a los que nos han acompañado en España. A mi familia. A mis padres, Sara y Ernesto, por alentarme cada día. A mi hermanos, Francisco, Génesis y Lucas, por estar siempre para mí. A mis sobrinos, Francisco y Tomás, por regalarme las sonrisas más hermosas del mundo. A mis abuelas, Mercedes y Ana, que nunca he dejado de pensarlas. Y a Juan Luis, por todo.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

En esta memoria de investigación describimos la generalización de estudiantes de tercero a sexto de Educación Primaria (8-12 años), en el contexto del álgebra escolar. Actualmente, diferentes iniciativas promueven incorporar el pensamiento algebraico en Educación Primaria, donde la generalización es el aspecto central. Sin embargo, todavía faltan elementos que ayuden a incorporar el álgebra en este nivel educativo. Nos centramos en la generalización pues su consideración en estas edades permite enriquecer el conocimiento matemático de los estudiantes, favoreciendo que estos seleccionen información matemática relevante; adapten, ajusten y reorganicen experiencias previas; pongan atención a ideas, capacidades y propiedades involucradas en diferentes situaciones; mejoren su comprensión y herramientas para resolver problemas, entre otros. Con esta investigación proporcionamos evidencias que permiten comprender cómo un grupo de estudiantes atiende a las propiedades y relaciones en situaciones matemáticas específicas.

Conceptualmente, adoptamos las ideas de Kaput (2008) sobre su forma de entender el álgebra y el pensamiento algebraico; la generalización y su representación constituyen aspectos centrales. La generalización la entendemos como una actividad mental en la cual se comprimen múltiples instancias dentro de una única forma y la representación adquiere relevancia pues los símbolos permiten que las generalizaciones se expresen de forma estable y compacta. En esta memoria de investigación consideramos la perspectiva en la cual el álgebra y el pensamiento algebraico van más allá del uso de la notación algebraica, empleando representaciones tan variadas como el lenguaje natural, representaciones manipulativas, pictóricas, numéricas, tabulares, gráficas, entre otras. Nuestra actividad puede denominarse algebraica pues promovemos que los estudiantes atiendan a propiedades y relaciones entre cantidades, examinando su generalidad. Específicamente, nos basamos en un enfoque funcional al pensamiento algebraico (también conocido como pensamiento funcional), donde la función es el contenido matemático clave para este tipo de pensamiento y la generalización de relaciones funcionales, así como la representación de esas relaciones, nos ayudan a entender cómo los estudiantes relacionan cantidades que covarían. La pregunta

que dirige nuestra investigación es: ¿cómo generalizan estudiantes de tercero a sexto de primaria cuando trabajan con problemas que involucran funciones lineales? Para responder a esta pregunta, hemos establecido dos objetivos generales de investigación:

1. Describir y caracterizar la generalización de estudiantes de tercero y de quinto de Educación Primaria al resolver un problema que involucra una función lineal; y
2. Describir cómo varían las representaciones usadas por estudiantes de tercero a sexto de primaria al trabajar con diferentes problemas de generalización que involucran funciones lineales.

En el primer objetivo concebimos la generalización como un *producto*, ya que consideramos las respuestas escritas de los estudiantes al resolver un problema específico. En el segundo objetivo concebimos la generalización como *proceso*, considerando las respuestas orales y escritas de un grupo de estudiantes al responder a diferentes problemas que involucran funciones. Cada objetivo general trae consigo objetivos específicos, los cuales describimos al finalizar el primer capítulo.

Un creciente número de estudios reportan diversos aspectos asociados al pensamiento funcional, centrándose en cómo estudiantes de primaria: (a) evidencian relaciones funcionales y qué estrategias emplean; (b) usan diferentes tipos de representaciones matemáticas; (c) comparan funciones en un mismo problema; (d) atribuyen diversos significados a la notación algebraica; (e) evidencian dificultades y errores en el tratamiento con ciertos elementos de carácter algebraico, entre otros. Los estudios que hemos analizado destacan y concuerdan que la generalización entre cantidades que covarían es el elemento central del pensamiento funcional. Sin embargo, aún quedan líneas por explorar que ayudan a situar nuestro estudio y las describimos brevemente.

- ♦ *Relaciones funcionales*. Gran parte de la literatura que describe las relaciones funcionales de los estudiantes lo hace de manera general, brindando tendencias sobre lo que hace un determinado grupo de estudiantes. Evidenciamos la necesidad de profundizar e ilustrar, a través de ejemplos concretos, cómo los estudiantes relacionan las variables en diferentes problemas que involucran funciones.
- ♦ *Representaciones*. Nos interesa describir más allá de los cuatro tipos de representaciones clásicas descritas por la literatura: lenguaje natural, gráfica, tabular y notación algebraica. Esto nos ayuda a describir características del pensamiento

algebraico de estos estudiantes, así como nos entrega luces de qué tipo de representaciones son escogidas y usadas por los estudiantes al expresar las relaciones entre variables.

- *Formas directa e inversa de una función lineal.* La mayoría de los estudios que abordan elementos del pensamiento funcional en estudiantes de primaria consideran la forma directa de una función lineal (dado el valor de la variable independiente, determinar el valor de la dependiente) y son escasos los estudios que tratan ambas formas de la función.
- *Estructura.* Dada la diversidad de formas de abordar este concepto por la literatura, cobra sentido analizar las estructuras en las respuestas de los estudiantes para ver cómo estos organizan las regularidades percibidas.
- *Tipos de preguntas.* La literatura reporta que los estudiantes de diferentes cursos generalizan las relaciones involucradas en diversos problemas y muchas veces lo hacen sin que esto sea solicitado. Analizar el tipo de pregunta que lleva a los estudiantes a generalizar (e.g., casos particulares o caso general) permite profundizar en los caminos y elementos considerados por estos al generalizar.

Metodológicamente, seguimos las directrices de la investigación de diseño. En primer lugar, y abordando el objetivo general 1, consideramos las respuestas escritas de 24 estudiantes de tercero y 24 de quinto cuando trabajan con un mismo problema que involucra una función lineal, en el contexto de una sesión que forma parte de un experimento de enseñanza. Los estudiantes de ambos cursos no estaban acostumbrados a trabajar con situaciones matemáticas que involucraran generalizar. Luego, y relacionado al segundo objetivo general, seleccionamos a ocho estudiantes de cada uno de los grupos mencionados anteriormente y analizamos sus respuestas escritas a todas las sesiones del experimento de enseñanza y sus respuestas escritas y orales a entrevistas individuales semiestructuradas realizadas posteriormente, con la finalidad de profundizar en sus respuestas. Tanto el experimento de enseñanza como las entrevistas fueron implementadas en un mismo centro escolar de Granada (España).

Los resultados de esta tesis los organizamos a través de cinco estudios. Los cuatro primeros tributan al primer objetivo general y en ellos describimos la generalización de los estudiantes al responder a un mismo problema: el problema de las baldosas, el cual establece una relación entre baldosas grises (g) alrededor de baldosas blancas (b) y la relación entre ambas está dada por la función g=2b+6. En concreto, en los primeros tres estudios examinamos la generalización de las relaciones funcionales, las representaciones usadas y el tipo de pregunta en las que los estudiantes generalizan. Destacamos que tres estudiantes de tercero generalizaron la relación funcional involucrada en el problema, mientras que 19 lo hicieron en quinto. Sin embargo, y tal como lo reportan otros estudios, las experiencias matemáticas previas de los estudiantes parecen haber influido en cómo estos perciben reglas generales. Esto podría ser una explicación del porqué la mayoría de los estudiantes de quinto generalizaron, a diferencia del grupo de tercero.

En el cuarto estudio identificamos y describimos las estructuras en las respuestas de estudiantes de quinto para ilustrar cómo estos organizan, representan y generalizan las variables involucradas en el problema que considera preguntas para las formas directa (dado el valor de la variable independiente, calcular el valor de la variable dependiente) e inversa (dado el valor de la variable dependiente, calcular el valor de la variable independiente) de la función. Los principales resultados muestran que todos los estudiantes evidenciaron estructuras correctas para las preguntas que involucran la forma directa, mientras que aparece una variedad de estructuras incorrectas en las respuestas a las preguntas de la forma inversa. Adicionalmente, la mayoría de los estudiantes generalizaron la forma directa y la mitad de estos lo hizo con la forma inversa de la función, lo cual interpretamos como la dificultad que supone trabajar con la forma inversa. Aún así, algunos estudiantes generalizaron la relación involucrada en la forma inversa, lo que constituye un elemento sorpresivo, dado que gran parte de la literatura describe las múltiples dificultades que tienen los estudiantes de cursos posteriores de primaria al trabajar con las formas inversas. Los resultados nos proporcionan evidencias empíricas para promover este tipo de tareas con estudiantes de escolaridad primaria.

El quinto estudio responde al segundo objetivo general y en él analizamos la generalización como un proceso. Particularmente, describimos cómo varían las representaciones de los estudiantes cuando trabajan con problemas que involucran diferentes funciones lineales, tanto en sus respuestas al experimento de enseñanza como en las entrevistas. Los principales resultados asociados a este estudio dan cuenta que ambos grupos de estudiantes (tercero/cuarto y quinto/sexto) tienden a usar la misma representación introducida en el enunciado de cada problema. La situación anterior ocurre sin importar el tipo de función lineal o si estos están trabajando con casos particulares o generalizan. Esta situación podría interpretarse de dos formas. En primer lugar, durante las intervenciones realizadas (tanto en el experimento de enseñanza como en las entrevistas) los estudiantes exploran las características de cada tipo de representación y evalúan su uso, según las demandas específicas de cada situación. La situación anterior podría poner de manifiesto que los estudiantes se están apropiando de los diferentes tipos de representaciones matemáticas para luego usar espontáneamente aquellas que satisfagan sus necesidades al resolver un problema, por ejemplo. En segundo lugar, la forma en la cual formulamos las preguntas a los estudiantes (de manera escrita u oral) podría no favorecer el uso de representaciones diferentes a las introducidas.

Las oportunidades de aprendizaje basadas en estos hallazgos nos permiten resaltar la importancia de promover la generalización en los diferentes cursos de la Educación Primaria. Particularmente, el pensamiento funcional alienta naturalmente a que los estudiantes investiguen, ya que el foco es que estos atiendan a las relaciones y estructuras matemáticas involucradas, más que a centrarse en cálculos aislados. Asimismo, el trabajo con relaciones funcionales que involucran dos variables favorece que los estudiantes vayan más allá de encontrar el siguiente término en una secuencia de elementos y promueve el desarrollo de su razonamiento. En concreto, esta Tesis Doctoral tiene tres principales contribuciones al progreso y transferencia del conocimiento científico: (a) la forma de interpretar las relaciones funcionales en las respuestas de los estudiantes brinda significados sobre cómo estos relacionan las variables; (b) abordar el trabajo de los estudiantes de primaria con las formas directa e inversa de la función constituye un elemento original pues la mayoría de los estudios que tratan ambas formas de la función lo hacen con estudiantes de cursos posteriores a primaria y son escasos; y (c) la idea de estructura aportada en esta tesis aporta con otra forma de concebir este concepto, permitiendo profundizar en cómo los estudiantes relacionan las variables y los elementos que forman parte de dichas relaciones.

Esta investigación deja nuevas perspectivas y líneas de investigación abiertas. Por ejemplo, la formación de profesores se abre como un camino interesante. Son escasos los reportes de investigación que, desde la perspectiva del pensamiento algebraico, abordan el efecto que pueden tener estos profesionales en la mediación y construcción de los aprendizajes algebraicos de los estudiantes de primaria.

EXTENDED SUMMARY

THIRD TO SIXTH GRADERS' GENERALIZATION FROM A FUNCTIONAL APPROACH TO SCHOOL ALGEBRA[1]

In this dissertation[2], we describe third to sixth grade students' generalization (8-12 years old), in the context of school algebra. Currently, different initiatives promote the idea of incorporating algebraic thinking in the early grades, where generalization is a crucial element. However, there is still much to consider about incorporating algebraic ideas in the elementary school, as its adoption is relatively recent. Broadly speaking, we focus on a functional approach to early algebra, in which the function is the prime mathematical content and students should deal with two or more covarying quantities.

This work has been carried out with the scope of two R&D projects (with references EDU2013-41632-P and EDU2016-75771-P), funded by the State Research Agency (SRA) from Spain and European Regional Development Fund (ERDF). As part of these projects, the researchers collected data from: (a) Classroom Teaching Experiments (CTE, hereafter), which consisted of different sessions developed in a first grade class, a third grade class, and a fifth grade class; and (b) two semi-structured individual interviews developed with eight students from each group, which were intended to deepen their generalizations. The work that students carried out, which is analyzed in this dissertation, is organized considering the generalization as a *product* and a *process*. First, by considering generalization as a product, we describe generalization by 24 third-graders (8-9 years old) and 24 fifth-grade students (10-11 years old) from a specific session of a CTE developed in each grade, in which students worked with the same problem and answered different questions on a worksheet. Second, by focusing on generalization as a process, we analyze responses from eight students

[1] This document is part of the requirements to obtain the PhD in Mathematics Education, with international distinction. The original dissertation was mostly written in Spanish, while the results and conclusions are written in English.
[2] In this Summary, the terms "Dissertation", "Study", and "Thesis" are used as synonyms.

of each grade. Specifically, we analyze representations used by intermediate (8-10 years old) and upper (10-12 years old) elementary students when participating in a CTE and their responses to semi-structured individual interviews.

In the following six sections, we describe (1) the research objectives, (2) the theoretical perspective adopted, (3) a review of the literature, (4) the methodological framework adopted, (5) the main results, and finally (6) the discussion, conclusions, and implications of the study.

Research Problem and Objectives

Although definitions of generalization are varied in the field of Mathematics Education (e.g., Dörfler, 1991; Kaput, 2008; Krutetskii, 1976; Mason, 1996; Radford, 2003), there is a growing research effort to demonstrate the importance of elementary students' generalization. There are multiple reasons that justify the idea of including generalization in the early grades. Generalization promotes flexibility in students' mathematical thinking, allowing them to: (a) set aside irrelevant information; (b) adapt, adjust, and reorganize previous experiences; (c) pay attention to ideas, skills, and properties involved in different situations; (d) become a powerful tool to solve problems and understand different mathematical situations (Carpenter & Levi, 2000; Carraher & Schliemann, 2002, 2015; English & Warren, 1998; Warren, 2005). Broadly speaking, we consider that generalizing is "central to what distinguishes algebraic reasoning from other forms of reasoning. It involves noticing structure and relationships" (Blanton, 2017, p. 68). Therefore, in this dissertation, we consider generalization to be a central element of the mathematical experiences of elementary students, moving us away from positions that related this notion exclusively to algebraic notation (Kieran, 1989).

Some authors claim that young students are naturally predisposed to perceiving regularities and generalizing, even when they are unable to represent these processes clearly (Becker & Rivera, 2005; Mason, 1996; Schifter, Bastable, Russell, Seyferth, & Riddle, 2008). Based on the reasons above, algebraic thinking acquires relevance; it takes advantage of students' natural ability to generalize for teaching purposes (Mason, 1996). Algebraic thinking is necessary from the first grades and brings two essential ideas: (a) generalization; and (b) using symbols to represent these ideas, which allows problem solving, communicating, and articulating ideas (Carpenter & Levi, 2000; Kaput, 2008). Therefore, generalizing and expressing generalizations through different representations are considered to be core elements of the learning of algebra in the first grades (Cooper & Warren, 2011).

The mathematical content to describe students' generalization is the function. Specifically, we focus is on a functional approach to algebraic thinking, in which functions act as a gateway to algebra in the early grades, favoring the vision of arithmetic operations as functions and enabling students to explore the notion of variable as a variation between quantities (Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011). Based on this approach, we focus on how elementary students work with problems involving covarying quantities to connect, perceive, and represent relationships and structures underlying each situation.

Motivation

Part of the motivation for this dissertation grew out of my teaching experience with first graders (6-7 years old). On the one hand, different guidelines and teaching resources (e.g., mathematics textbooks) introduce different activities of patterns mainly requiring students to find the next element in a sequence of elements that follow a pattern. My experience showed me that first graders can go beyond finding the next element in a sequence. How to take advantage of students' knowledge when working with different types of patterns? How to promote their ability to generalize? These were some of the questions that triggered my motivation for this topic. On the other hand, I have perceived that different mathematics contexts could be the "platform" to generalize (e.g., commutative property of addition). This fact allowed me to reflect on the tools that teachers have to identify these platforms and take advantage of the students' "natural powers" (in terms of Mason) to generalize.

Rationale

Four main reasons justify the contribution, relevance, and originality of this dissertation.

From the research

Previous studies based on different theoretical perspectives have shown that elementary students—even kindergarteners—are able to generalize (e.g., Blanton & Kaput, 2004; Castro, Cañadas, & Molina, 2017; Cooper & Warren, 2011; Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi, 2014; Mason, 2008; Radford, 2006; Rivera, 2013). Similarly, and in the context of a functional approach to algebraic thinking, different authors focus on how students express and generalize relationships among variables in different ways (e.g. Blanton, Brizuela et al., 2015; Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008; Chimoni & Pitta-Pantazi, 2017; Marum, Isler, Stephens, Gardiner, Blanton, & Knuth, 2011; Morales, Cañadas, Brizuela, & Gómez, 2018; Radford, 2018). However, some aspects have not been addressed deeply in the literature:

- *Functional relationships*. Broadly speaking, some studies report how students consider the relationships among variables in different functional thinking tasks (e.g., Carraher & Schliemann, 2007; Cooper & Warren, 2011; Marum et al., 2011). Nonetheless, these studies provide evidence to describe more in depth the types of functional relationships evidenced by students, providing examples that show how they perceive and describe them when solving problems.
- *Representations*. We are interested in describing how students express the relationships among variables beyond the four traditional types representations described in school algebra studies: natural language, graphical, tabular, and algebraic notation (Brenner, Mayer, Moseley, Brar, Durán, Reed et al., 1997; Williams, 1993). This could help us to describe students' algebraic thinking and what types of representations are useful to them.
- *Direct and inverse forms of a linear function*. Most studies concerning functional thinking focus on the one-way (direct form) of the function. That is, given the value of the independent variable, calculate the value of the dependent variable. However, studies that focus on the inverse form of the function (given the value of the dependent variable, calculate the value of the independent variable) are scarce in primary school and are mainly focused on high school students and later grades (Paoletti, Stevens, Hobson, Moore, & LaForest, 2017).
- *Generalization as a process and as a product*. As noted by Ellis (2007), it is interesting to consider generalization as a product (generalization) and as a process (generalizing). In this sense, our research interest follows both ideas: we develop a CTE, composed of different sessions, from which we select a specific session and analyze how students express the general rules in a worksheet (generalization). Then, we focus on how they reason to generalize, through semi-structured individual

interviews (generalizing). Therefore, we focus on both generalization and generalizing.

From the mathematical content involved

Previously, we have emphasized the crucial role of functions as a mathematical content for algebraic thinking, which: (a) serves as a mathematical context to introduce algebra in the elementary grades; (b) can unite a wide range of isolated topics, such as arithmetic computations, fractions, ratio, and proportion, or formulas that relate quantities; (c) serves as a connection between students' daily experiences and mathematics; and (d) improves the organization of teaching and learning of algebra (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008; Chazan, 2000; Dubinsky & Harel, 1992; Freudenthal, 1992; Schwartz & Yerushalmy, 1992).

Different authors describe students' difficulties when they formally work with functions in high school (Bush & Karp, 2013; Knuth, 2000; Lobato, Ellis, & Muñoz, 2003). The incorporation of this content in the classroom of elementary school, as pointed out by Cañadas and Molina (2016),

> it is not about introducing functions in previous educational levels as much as it is working in secondary education, but to take advantage of the potential of this content to promote abilities in elementary students that are useful for reasoning in general and the mathematician in particular, both in the educational level in which they find themselves as in the successive ones. (p. 210)

Therefore, the concept of function is the mathematical background to describe how students of these grade levels generalize.

From the Curriculum

The idea of algebraic thinking is included in the curriculum guidelines of different countries, for example Australia, Canada, Chile, China, Spain, United States, Japan, United Kingdom, Singapore, for instance (Australian Curriculum, Assessment, and Reporting Authority, 2015; Cai & Knuth, 2011; Ministerio de Educación de Chile, 2012). The aforementioned countries share, mainly, the following aspects: (a) introduce ideas related to algebraic thinking from early childhood education (3-6 years), (b) the considerations of algebraic notions in the first grades do not imply the introduction of new topics, but rather new approaches to existing topics; (c) patterns are a central element of the mathematics curriculum; (d) the discovery of regularities is promoted through different activities; and (e) arithmetic is addressed for developing students' ideas about quantities and their relationships, representations, and use rather than isolated computations (Karp, 2014; Kilpatrick, 2011).

In the case of Spain, the *Ministerio de Educación, Cultura y Deporte* (2014) published a new curriculum for elementary education. Concerning mathematics, this curriculum promotes modelling, identifying, and relating structures, in order to find patterns in different types of contexts (numerical, geometric, and functional), regularities, and mathematical principles. The incorporation of algebra in the first grades and, in particular, the emphasis on situations of change in functional contexts (where the functional approach to early algebra makes sense) were not mentioned in previous curriculum guidelines. Therefore, in the Spanish context, it is important to contribute empirical data about elementary students' functional thinking, as well as describing teaching implications to address functional thinking in primary education classrooms.

From the Research Projects

This dissertation is part of a pioneering Spanish research project that addresses functional thinking in primary students, led by María C. Cañadas and Marta Molina and awarded in 2013 (Functional thinking in students at elementary education as an approximation to algebraic thinking, EDU2013-41632-P). By the end of 2016, the same research team was awarded a new research project that was a continuation of the first mentioned project (Functional thinking in primary education: functional relations, representations and generalization). Both projects are funded by the State Research Agency (SRA) from Spain and European Regional Development Fund (ERDF).

Dissertation objectives

In the previous sections, we pointed out that several initiatives promote the idea of incorporating algebraic thinking in the first grades, where generalization is the central element. Even so, there are still missing elements that help to incorporate algebra at the elementary school, since this is a relatively new area of scholarly inquiry. We focus on generalization because it is a way of approaching students' work with algebraic ideas. Generalization allows to enrich students' mathematical knowledge, because it focuses on relationships and structures that underlie different problems. Specifically, we adopt a functional approach to school algebra to describe the generalization of students, in which students need to attend to how two or more covarying quantities. The question we seek to answer is: How do students from third to sixth grade generalize when they answer problems involving linear functions?

Previous studies have documented how elementary students generalize and express functional relationships involved in different problems, and we consider that Spanish students could also do so. Therefore, we conjecture that Spanish elementary students will generalize the relationships in problems involving linear functions. This will allow them to: (a) evidence a variety of functional relationships; (b) use of one or more representations to express functional relationships; (c) perceive and organize regularities in different ways; (d) generalize the direct and inverse forms of a linear functions; and (e) generalize different types of questions, which may include particular values or a general rule.

We focus on third to sixth graders' generalization because these students: (a) are able to use and understand different types of representations, which can account for different ways of representing functional relationships; (b) the conceptual framework of the algebra adopted here has been built on algebraic work of students at these educational levels and ages; (c) the literature on functional thinking reports several studies with students of these ages, which could help to establish comparisons and discuss our findings; and (d) these students may have more tools to discuss and reflections on algebraic expressions they make or others have produced.

Based on the aforementioned elements, we pose two general objectives for this dissertation, which in turn contain more specific objectives.

1. Describe and characterize third-year students and fifth-grade elementary students' generalization when solving a problem that involves a linear function.

1.1. Describe the functional relationships evidenced in students' responses.

1.2. Identify and describe students' representations when expressing the relationship among variables involved in a given problem.

1.3. Identify and describe the structures identified in the students' responses to analyze how they organize regularities.

1.4. Identify the types of questions in which students generalize the relationship among variables.

1.5. Describe how students work with problems that involve the direct and inverse forms of a linear function.

2. Describe how third to sixth elementary students' representations vary when solving different problems that involve linear functions.

2.1. Describe the variations of representations used by students when working with different types of linear functions ($y=a+x$; $y=ax$; $y=ax+b$)

2.2. Describe the variations of representations used by students when working with particular cases and generalizing.

In sum, the first general objective focuses on generalization as a *product*, because we analyze the written students' answer working with a functional thinking task, while the second general objective adopts the idea of generalization as a *process*, analyzing students' oral and written responses when responding to different problems that involve linear functions.

Theoretical Perspective

The role of algebraic thinking in the early grades is crucial. However, there is not so much consensus about what this type of thinking is. Such differences have implications for the teaching of algebra in first grades (Castro, 2012; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Stephens, Ellis, Blanton, & Brizuela, 2017). In this dissertation, we adopt the idea of algebraic thinking as a particular type of mathematical thinking, which involves both variable and general (non-specific) quantities, attending to relationships between quantities, recognizing structures, studying changes, generalizing, solving problems, modelling, justifying, testing, and predicting (Bell, 1995; Kieran, 2006; Radford, 1999). This type of thinking could take place in the absence of algebraic notation (Carraher & Schliemann, 2010) and provides students with tools that allow a high degree of certain types of generality (Lins & Kaput, 2004), so that they can explore, establish and build general mathematical relationships (Soares, Blanton, & Kaput, 2006). In particular, the conceptual framework that directs our study is based on Kaput's theoretical proposals (2008). Kaput indicates that "the heart of algebraic reasoning is comprised of complex symbolization processes that serve purposeful generalization and reasoning with generalizations" (p. 9) and algebraic thinking is composed of two central aspects: (a) algebra as systematically symbolizing generalizations of regularities and constraints; and (b) algebra as syntactically guided reasoning and actions on generalizations expressed in conventional symbol systems.

Based on the ideas above, Blanton et al. (2011) also adopt this broad interpretation of symbol systems, along with the idea of incorporating such diverse representations throughout student work (e.g., pictorial representations, manipulative, numerical, among others), which would be a productive way to develop their algebraic thinking. In particular, the above-cited authors interpret and organize the central aspects of Kaput (2008) into four practices of algebraic thinking: (a) *generalization*, (b) *representation*, (c) *justification*, and (d) *reasoning*, with mathematical structures and relationships. The first two algebraic thinking practices emerge from first central aspect pointed out by Kaput (algebra as systematically symbolizing generalizations of regularities and constraints), and the last two practices emerge from second central aspect by Kaput (algebra as syntactically guided reasoning and actions on generalizations expressed in conventional symbol systems). Specifically, we focus on generalization and representation practices, which are closely related and together acquire great relevance within the context of algebraic thinking. Both practices, generalization and representation, are embodied in the different approaches to early algebra: (a) *generalized arithmetic*, which involves generalizing, representing, justifying, and reasoning with arithmetic relationships, including fundamental properties of operations as well as other types of relationships on classes of numbers; (b) *equivalence, expressions, equations, and inequalities*, which include developing a relational understanding of the equal sign and generalizing, representing, and reasoning with expressions, equations, and inequalities, including in their symbolic forms; and (c) *functional thinking*, which include generalizing relationships between co-varying quantities and representing, justifying, and reasoning with these generalizations through natural language, variable notation, drawings, tables, and graphs (Blanton, Brizuela, Stephens, Knuth, Isler, Gardiner et al., 2018, p. 32-33).

We focus on how third to sixth graders generalize and represent relationships in functional thinking tasks. In the following, we present the essential elements considered in this dissertation.

Generalization

We adopt the idea that generalizing, from a functional approach to early algebra, involves attending, perceiving, and expressing how one quantity varies with respect to the other *in general* (Blanton, 2008, 2017), identifying a pattern that is valid for more instances, from the observed regularity (Pólya, 1966). In connection with the previous ideas, Radford (1996) points out that considering generalization from a didactic or pedagogical point of view depends on the mathematical objects that we are generalizing. Within a functional approach to early algebra, generalization occurs when establishing and analyzing the relationships between variables and changes (Smith, 2003). Therefore, working with problems that involve functions becomes an optimal scenario for students to identify patterns and generalizations (Warren, 2005), as well as analyze the functional behavior through different representations (Blanton et al., 2011; Cañadas & Molina, 2016).

Representation

We assume representations[3] as conventional constructs that include systems of spoken and written symbols, models of figures and images, manipulative models, and situations of daily life (Goldin, 1998), that can be used in the expression of a mathematical idea (Carraher, Schliemann, et al., 2008; Castro & Castro, 1997). Representations are part of the real world and have a critical role in determination thinking structures, since they give access to the construction and understanding of a mathematical concept (Kaput, 1991). Specifically, and according to the perspective of this study, representations allow describing how students express the relationship between quantities co-varying. Functional thinking implies "the use of tables and graphs; and the reasoning with fluidity with these generalized representations in order to understand and predict the functional behavior" (Brizuela & Blanton, 2014, p. 40). Therefore, representations become the means by which students can organize and express the relationships found, in order to understand, analyze, explain, predict and justify the way in which the variables are related. Table I describes the main features of the different types of representations.

[3] In this dissertation, we focus on external representations to distinguish them from mental or internal ones. Therefore, every time we mention the term "representation" or "representations", we refer to external representations, made with pencil, paper or spoken, which are intentional, permanent, and have a spatial and temporal nature.

Table I. *Descriptions and Examples of Representations*

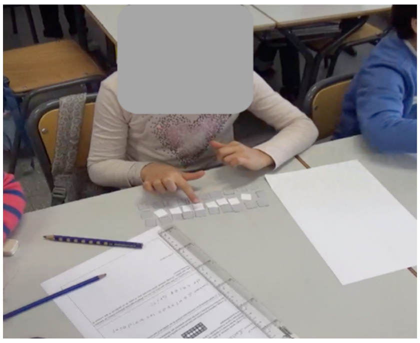
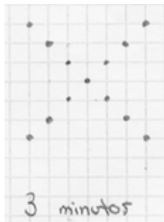
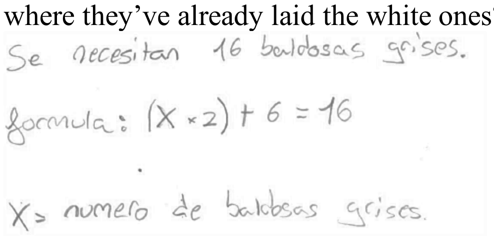
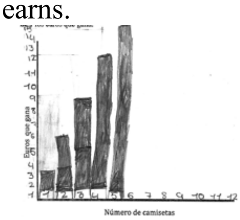
Type	Description	Examples from questions and students' responses
Natural language (written and oral)	Natural-spoken language includes a specialized sublanguage, with oral characteristics, which is related to domains of mathematics, while natural-written language involves the written production of sentences and phrases (Lesh, Behr, & Post, 1987).	4. We found a photo of Raul's birthday and all you can see are the candles on the cake. How could you know Maria's age? *We imagine that Raúl is 20 years old and María is 5 years older than Raúl. Therefore, María is 25.*
Manipulative	In manipulative or concrete representations—such as Cuisenaire rods, multibase blocks, fractional bars, or daily objects (e.g., buttons, stones, etc.)— the elements that make them up "have little meaning per se, but the relationships and integrated operations are adjusted to many everyday situations" (Lesh et al., 1987, p. 33).	3. How many grey tiles do they need for a corridor with 10 white tiles? How did you find your answer? 
Pictorial	Pictorial representations have visual characteristics (iconic, geometric or diagrammatic), in which there are graphic codes that allow us to propose the relationships between the quantities involved in a given situation (Fernández-García, 1997).	Interviewer: How can you know how many points there are after three minutes? Student: 
Numerical	For Scheuer, Sinclair, de Rivas, and Christinat (2000), numerical representations are "constructed using a very reduced set of forms (numerals 1 to 9) and organizing principles, since numbers are deeply conceptual and abstract entities, reducible to a few nuclear notions that, when combined, extend" (p. 32). In this representation, there are also arithmetic symbols (+, —, × or :) that represent actions.	2. When Raúl is 15 years old, how old is Maria?  *Note. 20 years old, because 15+5=20.*

Table I. *Descriptions and Examples of Representations*

Type	Description	Examples from questions and students' responses
Algebraic notation	Algebraic notation or algebraic symbolism is composed by letters and signs characteristic of arithmetic and algebra, characterized by being a representation with great precision (Molina, 2014).	5. The workers always lay the white tiles first and then the grey tiles. How can they calculate how many grey tiles they need in a corridor where they've already laid the white ones?  *Note. The need 16 grey tiles.* *Form = (Xx2)+6=16* *X=number of grey tiles.*
Tabular	Considering Martí's ideas (2009), tables involve a series of cognitive processes (such as the segmentation of information, identification of variables) that are expressed graphically by specific notations (rows, columns, in-headings, among others). In a tabular representation, the information is clearly separated to distinguish different elements.	Interviewer: How would you make a table to organize the data of the problem? Student: 
Graphical	Selden and Selden (1992) pointed out that "graphs are a widely used way of representing functions (…) They can provide an immediately accessible pictorial image useful in explaining increasing, decreasing, concavity, maxima, minima, and inflection points" (p. 3).	5. Draw a graph to show the relationship between the number of shirts Carlos sells and the euros he earns. 

Functional thinking

Generalizing relationships among covarying quantities, as well as representing these relationships, are considered key elements of functional thinking. Blanton and Kaput (2011) point out that functional thinking involves the "construction and generalization of patterns and relationships, using a diversity of representations and treating generalized relationships, or functions, as the result of useful mathematical objects" (p. 6-7). Smith (2008) indicates that functional thinking is "focused on the relationship between two (or more) variables; specifically, the types of thoughts that go from specific relationships to generalizations of relationships" (p. 143). Therefore, we assume that functional thinking involves functional relationships, which may be generalized or not, and may be expressed through different types of representations.

Function and linear function

We assume the concept of function as "a correspondence between two nonempty sets that assigns to every element in the first set (the domain) exactly one element in the second set (the codomain)" (Vinner & Dreyfus, 1989, p. 357). Specifically, we focus on linear functions because these are deemed suitable for the age and type of work expected in elementary school students within a functional approach to early algebra (Carraher & Schliemann, 2007). In this study, we focus on linear functions of the type $y=ax+b$, from which the forms $y=a+x$, and $y=ax$ arise, with natural numbers in domain and codomain.

Functional relationships

We adopt the idea that a functional relationship is "a lawful pattern involving two variables in which the value of one variable can be computed by applying the functional rule to the value of the other variable" (Brenner et al., 1997, p. 668). Recent research studies have described three types of approaches or relationships:

- *Recurrent patterns or recurrence*. This functional relationship involves finding the variation or pattern within a sequence of values (Smith, 2008), thereby describing the variation of values within a single variable. Figure I presents an example of this type of relationship.

x	y
1	8
2	10
3	12
…	…

"The value of the independent variable is increasing from 2 to 2".

Figure I. Example of recurrence

- *Correspondence*. It involves the development of a "closed form rule" to describe a relation between quantities (Confrey & Smith, 1994). In this type of relationship, a rule is constructed to determine the unique value of any given value (x), thus creating a correspondence between x and y (Ayalon, Watson, & Lerman, 2015). Figure II shows an example of correspondence.

x	y
1	8
2	10
3	12
…	…

"The relationship between x and y is described verbally here, for instance, as twice x plus six or algebraically as: *2x +6"*.

Figure II. Example of correspondence

- *Covariation.* Thompson and Carlson (2017) point out that covariation corresponds to the reasoning between two or more quantities, varying simultaneously. More specifically, Confrey and Smith (1994) indicate that this type of relationship involves "moving operationally from y_m to y_{m+1} coordinating with the movement from x_m to x_{m+1}. Figure III presents an example of this relationship.

"When x increases by 1, y increases by 2".

x	y
1	8
2	10
3	12
…	…

Figure III. Example of covariation

Specifically, in this dissertation, we consider the relationships that involve both variables and that are frequently discussed in the literature based on students' responses: correspondence and covariation.

Direct and inverse forms of a linear function

In the context of functional thinking, the dependent and independent variable can be arbitrarily chosen because this dependent relationship is derived from how we present the task (Blanton et al., 2011). Thus, the direct and inverse forms of a function are related to the roles of each variable. The independent variable in the direct form of the function is the dependent variable in the inverse form, and vice-versa.

Structures

Patterns and structures are conceptually related to one another. A pattern can be defined as a spatial or numerical regularity and structure as the elements that form the regularity, the computations that connect the elements, the order of the elements, and the connections between these elements (Kieran, 1989; Mason, Stephens, & Watson, 2009; Morris, 1999; Resnick & Ford, 1990; Warren, 2005). Several authors have argued that to be able to generalize, students must previously identify the structure of the relationships observed. In addition, when students identify structures in mathematical tasks, students experience mathematics more deeply (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008; Mason et al., 2009). For this reason, in this dissertation, we focus on structures that we identify in students' responses. We adopt the idea of structure as "a way of viewing an object or expression such that it is seen as a combination of recognizable parts along with recognizable patterns which connect those parts together" (Hewitt, 2019, p. 2). Thus, we identify the structures underlying students' responses and describe how students understand relationships between variables.

Literature Review

Research on generalization

Generalization is a central aspect of school algebra (e.g., Cooper & Warren, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2007; Mason, 1996; Radford, 2006). It has gained more attention in the last decades, specifically after different initiatives have proposed that generalization plays an important role in elementary mathematics (Cai, Fong, & Moyer, 2011). As mathematics education advances in its effort to highlight the role of generalization in the first grade levels, it is necessary to refine the understandings that the community has about what it really means to generalize (Strachota, 2016).

Various authors, from different theoretical perspectives, agree that generalize: (a) involves a way to see and express general statements; (b) allows students to generate mathematical knowledge, reflecting and reconstructing schemes; (c) extends specific values to a whole set of objects in a certain class; (d) requires time to be developed in the students' reasoning (Dienes, 1961; Krutetskii, 1976; Mason, Grahamn, Pimm, & Gowar, 1985; Pólya, 1957). In the last 20 years, the literature reports two mains ideas to conceive generalization: as an *individual cognitive action* (e.g., Dienes, 1961; Dubinsky, 1991) and as a *situated action*, distributed through multiple tools, resources and people (e.g., Carraher et al., 2008; Radford, 2003). Moreover, Ellis (2007) describes three broad ways by which generalization is conceptualized in the field of Mathematics Education: (a) the development of a rule that serves as a statement about relationships or properties; (b) the extension or expansion of one's range of reasoning beyond the case or cases considered; and (c) the identification of commonalities across cases. Ellis (2007) points out that generalization should be considered not only as a product (the production of a general rule), but also as a process (the elements that intervene in the production of that general rule). Conceptualizing generalization as a process (generalizing) involves referring to any of the three elements above, while generalization as a product refers to the result or outcome of the three elements described.

According to Strachota (2016), research on generalization within the context of elementary school has contributed to Mathematics Education in four specific areas: (a) in instruction, specifically the instruction which fosters generalization and the processes on which students are supported (e.g., Ellis, 2007; Kaput & Blanton, 2005); (b) regarding the different elements considered to describe student's generalization (e.g., Rivera, 2013); (c) to understand factors that construct generalizations, which are related to the role of iconic elements, gestures and semiotic elements, as well as different types of representations (e.g., Carraher & Schliemann, 2007; Radford, 2003); and (d) the intrinsic relationship between generalization and justification, since both elements are central to mathematical learning (e.g., Lannin, 2005; Stacey, 1989; Warren & Cooper, 2008). In addition, several contributions by John Mason (e.g., Mason, 1996, 2008; Mason et al., 1985) have emphasized that the algebra learned in school is a language and "is an ideal medium through which one can see and express general statements" (Mason et al., 1985, p. 1). Thus, a successful teaching of algebra requires attention, evocation and expression of algebraic thinking, a type of thinking that begins to emerge in the literature on school algebra.

Algebraic thinking in the early grades

Up to the early 1990s, algebra research focused on students' difficulties when they start working with algebra across the post-elementary grades (Lins & Kaput, 2004). These difficulties were related to the *arithmetic-then-algebra* approach, which implied a late and abrupt introduction to algebra. From the previous idea, different authors began to promote the idea of including algebra for everyone and from the first years of elementary school. There was compelling empirical evidence which indicated that students' early experiences with algebra could improve their academic and economic success, hence everyone should have the opportunity to work on algebraic elements (Moses & Cobb, 2001; Schoenfeld, 1995). In conclusion, several researchers concluded the idea of reformulating how algebra would be introduced in the early grades.

The new idea of understanding algebra—including this area at the elementary school—became a starting point to explore certain types of algebraic activities with students in the early years, focusing on what will be known as algebraic thinking (Kieran, Pang, Schifter, & Fong Ng, 2016). The idea of algebraic thinking was considered in different research agendas, accepting that algebra involves various perspectives. As a consequence, the incorporation of algebraic notions in the early grades modified what was understood by algebra, accepting that algebra encompasses different aspects. In this way, there was a movement centered on the incorporation of school algebra in the early years, which also assumes algebra from a multidimensional facet: the early algebra proposal.

Early algebra

The curricular proposal known as early algebra[4] seeks to *algebrafy* (in terms of Kaput, 2000) the mathematics presented in the elementary curriculum, promoting the development of algebraic thinking in students (Carraher & Schliemann, 2007, Kaput, 2000). The idea of early algebra offers multiple entry points to work on aspects associated with algebraic thinking, where algebraic activities should focus on the search for common points and the formation of general concepts followed by generalized expressions on the properties of numbers or quantities (Blanton et al., 2011; Brizuela, Schliemann, & Carraher, 2004; Radford, 2006). Figure IV shows the elements that are part of the early algebra proposal.

[4] *Early algebra* is not the same that *algebra early* (see Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008).

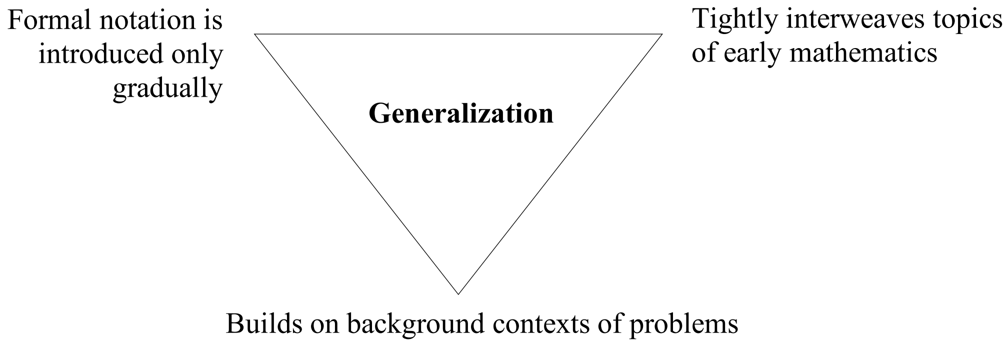


Figure IV. Early algebra elements (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008)

Regarding the central aspects of early algebra, Kaput (2008) indicates that the heart of this proposal is the generalization of mathematical ideas, representation, and justification of generalizations, using multiple ways. Several researchers have conducted or are conducting studies that consider early algebra in their contexts. In the following sections, we describe the main studies related to functional thinking.

Functional thinking

There are different definitions of functional thinking. In this dissertation, we focus on functional thinking as an approach to early algebra. The studies developed under this perspective introduce functions across contextualized problems. Table II presents and organizes different types of functional thinking studies.

Table II. *Functional Thinking Topics*

Topics	Examples of studies
Functional relationships evidenced by elementary students	♦ Blanton, Brizuela, et al. (2015) ♦ Cañadas, Brizuela, & Blanton (2016) ♦ Cooper & Warren (2011) ♦ Pinto & Cañadas (2018a)
Students' strategies	♦ Merino et al. (2013) ♦ Morales et al. (2018)
Comparison among different linear functions	♦ Brizuela & Martinez (2012) ♦ Moreno, Cañadas, Jaldo, & Bautista (2016)
Students' representations	♦ Brizuela & Earnest (2008) ♦ Carraher et al. (2008) ♦ Radford (2003) ♦ Rivera (2013) ♦ Warren & Cooper (2008)

Table II. *Functional Thinking Topics*

Topics	Examples of studies
Meaning related to algebraic notation	♦ Ayala-Altamirano (2017) ♦ Brizuela (2016) ♦ Molina, Ambrose, & del Río (2016) ♦ Marum et al. (2011)
Multiple representations	♦ Brizuela (2005) ♦ Brizuela & Earnest (2008)
Teacher's perspectives	♦ Bautista, Brizuela, & Ko (2013) ♦ Kaput & Blanton (2005) ♦ Kim & Son (2018) ♦ Malara (2016)
Teacher's interventions	♦ Mata-Pereira & da Ponte (2019) ♦ Morales (2018) ♦ Ureña, Ramírez, & Molina (2019)

A common aspect in the studies cited in Table II is that generalizing covarying quantities is a core aspect of functional thinking, describing how elementary students (and/or elementary teachers) generalize the relationships and structures involved in functional thinking tasks.

In the following sections, we briefly summarize different studies that are related to our research objectives.

Linear function and functional relationships

Two main research strands have investigated how students work with functions and the types of functional relationships evidenced by them.

Functional relationships identified in students' responses

Two perspectives are generally explored in the studies on functional relationships with elementary students: correspondence and covariation. In particular, several research reports show that elementary students are able to: (a) attend to two quantities that vary together, describing one quantity in relation to the other; (b) understand the rules of entry and exit, and (c) identify correspondence rules (Carraher, Martinez, et al., 2008; Martinez & Brizuela, 2006; Morales et al., 2018; Pinto & Cañadas, 2018a; Warren, Cooper, & Lamb, 2006).

Students' work with different types of linear functions

While most research on functional thinking have utilized problems that involve different types of linear functions ($y=y$; $y=x+a$; $y=ax$; $y=ax+b$), there are some studies focusing on non-linear functions. The main results of these type of studies describe students' responses when working with a single type of linear function (e.g., Blanton, Stephens, et al., 2015; Brizuela & Earnest, 2008; Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006).

Representations

Although algebraic notation is a traditional type of representation in algebra, there are other ways to represent functional relationships, especially among elementary students. Below, we present some studies that deal with different types of representations.

Natural language (written and oral)

In the context of functional thinking to early algebra, natural language is commonly introduced in problems that involve functions (e.g., Blanton, Brizuela, et al., 2015; Brizuela & Earnest, 2008, Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006; Morales et al., 2018; Moss, Beatty, Barkin, Shillolo, 2008; Pinto & Cañadas, 2017; Radford, 2018; Sawrey, Brizuela, & Blanton, 2015; Warren, Cooper, & Miller, 2013). Mainly, some authors emphasize the role of natural language as a useful tool to express generalizations. In fact, natural language is considered a necessary and useful scaffold for the development of more symbolic representations (Radford, 2003; 2006; 2018; Stephens et al., 2016).

Manipulative

Studies that consider manipulative representations are scarce, in comparison to the introduction or use of other types of representations (e.g., numerical, tabular, algebraic notation). The studies that provide manipulative representations to students do so, mainly, with first graders (e.g., Morales 2018; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2011). Fuentes (2014), for instance, analyzed how manipulative representations help first graders (6-7 years old) in their ways to organize variables, in comparison with other students that did not use this type of representation and evidenced difficulties relating variables and organizing variables.

Pictorial

The problems that introduce this type of representation are, generally, accompanied by a statement express through natural language. Among the investigations that introduce pictorial representations, we distinguish between those that use this type of representation as a geometric arrangement of elements (e.g., Cañadas et al., 2016; Cooper & Warren, 2008; Hidalgo, 2017; Moss & Beatty, 2006; Warren, 2005) as well as others that introduce it with the sole purpose of clarifying the problem statement (e.g., Blanton, 2008; Carraher & Schliemann, 2007).

Numerical

Literature reports a double perspective in the use of numerical representation. On one hand, there is research that indicates that students, from the regularities observed in the arithmetic calculation, generalize said regularities and extend them to any number involved (e.g., Ayala-Altamirano & Molina, in press; Cooper & Warren, 2008; Pinto, Brizuela, & Cañadas, 2019; Radford, 2006). In other words, students use numerical representation as a means to generalize functional relationships, or to justify such general expressions. On the other hand, some studies illustrate how students, when using numerical representation, focus on the details of arithmetic calculations without actually expressing the general rules (Blanton, Brizuela, et al., 2015).

Tabular

Studies report how elementary students represent data in tables. Specifically, and within the functional context, investigations describe students' work considering: (a) how they construct and complete tables (e.g., Brizuela & Lara-Roth, 2001; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2011) and/or (b) how they understand aspects of the function through this type of representation (e.g., Blanton & Kaput, 2004; Brizuela & Earnest, 2008; Martinez & Brizuela, 2006). Blanton and Kaput (2011), for instance, provide evidence of how table helps to students to organize variables and "look" and "observe" new relationships, identifying how one variable change in relation to another variable.

Algebraic notation

Different studies (e.g., Blanton, Brizuela et al. 2015; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens, & Murphy Gardiner, 2015) investigate how elementary students use different types of representations to express functional relationships, where students were introduced to use algebraic notation. For example, first graders working with specific values tend to use numerical representations but then, they use algebraic notation (using two arbitrary letters and explicitly indicated) and it allowed students to abstract the general relationship involved in the situation.

Multiple representations

Different Brizuela' studies (e.g., Brizuela, 2004, 2005; Brizuela & Earnest, 2008) describe the relationships among students' representations, analyzing the advantages to students connect different representations and describing the conceptual impact of the use of multiple representations. For instance, Brizuela and Earnest (2008) show how students work with a problem and, as they work on the problem, they explore the use of different types of representations (natural language, tabular, and graphical; in this order). Each type of representation illuminated the students towards one aspect of the problem, while the graphic representation allowed them to understand the functions involved and helped them to make sense of the representations used previously.

Direct and inverse forms of a linear function

Traditionally, literature reports the difficulties that post-primary students have when working with the inverse form of a function, which are due to several factors (Even, 1989; Teuscher, Palsky, & Palfreyman, 2018; Van Dyke, 1996; Wilson, Adamson, Cox, & O'Bryan, 2011). Given that functions constitute the prime mathematical content in functional thinking, some researchers recommend focusing on how students understand both direct and inverse forms of functional relationships (e.g., Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008). However, there are few studies that treat both forms (direct and inverse) in the literature on algebraic thinking with elementary students (e.g., Callejo, García-Reche, & Fernández, 2016; MacGregor & Stacey, 1995; Pinto & Cañadas, 2018a).

Structures

In an algebra context, and more particularly within functional thinking, the notion of structure has different meanings (Castro, Rico, & Romero, 1997; Kieran, 2018; Molina & Cañadas, 2018). Broadly speaking, functional thinking focuses on generalization of relationships and mathematical structures in problems that involve functions. According to Blanton and Kaput (2004), focusing on structures allows students to solve problems by promoting the analyses of changes rather than making arithmetic computations. Within a functional approach to early algebra, there are some studies that have the structure as a central element of their research (Mason, Stephens, & Watson, 2009; Mulligan, Prescott, & Mitchelmore, 2006; Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011).

Recent studies begin to focus on the analysis of structures identified in students' responses, more precisely analyzing how students understand, represent, and generalize the relationships among variables. Specifically, they are the works initiated by the author and director of this thesis that investigate the structures identified in the students' responses when responding to problems involving linear functions (e.g., Pinto & Cañadas 2017, 2018b), an idea that has been replicated in other studies (e.g., Torres, Cañadas, & Moreno, 2019).

Contextualized problems and types of questions

Carraher, Schliemann and Schwartz (2008) point out that one of the central characteristics of early algebra is that it is based, mainly, on the use of contextualized problems. These types of problems allow students to focus on what is really important: thinking more abstractly. As pointed out in Pinto (2016), we consider contextualized problems to be those that present activities close to students' familiar situations, where the resolvers require the use of skills, concepts and mathematical processes. In short, they are considered a tool that allows organizing, synthesizing and representing data, giving meaning to the decisions made (Blanco, 1991).

Most studies that analyze elements of functional thinking in elementary students present one problem accompanied by different types of questions, which in turn explore aspects associated to the context of the problem (for example, particular cases, general case, inverse relationships, exploration of relationships in tables) (Amit & Neria, 2008; Morales et al., 2018; Stacey, 1989).

Methods

This dissertation is part of a broader research project focusing on Spanish elementary students' functional thinking.

General context of our research

Data analyzed in this dissertation comes from a Classroom Teaching Experiment (CTE) and semi-structured individual interviews carried out with students from third to sixth grade of elementary education in a school located in Granada, in southern Spain. During the 2014/2015 academic year, four different sessions of a teaching experiment were developed with a third-grade and a fifth-grade students. In each of the sessions, a problem was presented to the students, which involved linear functions and introduced different types of representations. In the following classroom period, we interviewed a group of students who participated in the sessions of the CTEs, with the goal to deepen their generalization. Mainly, both the teaching experiment and the semi-structured individual interviews pursue the following proposals: (a) to explore how students relate variables in problems that involve different types of linear functions; and (b) to describe students' work when introducing different types of representations to express functional relationships. Both CTE and interviews consider generalization as a central aspect.

In this dissertation, we focus on the work of the third and fifth students, who during the interviews were in fourth and sixth, respectively. Figure V illustrates the work done with each group of students and highlights the main elements developed in each grade.

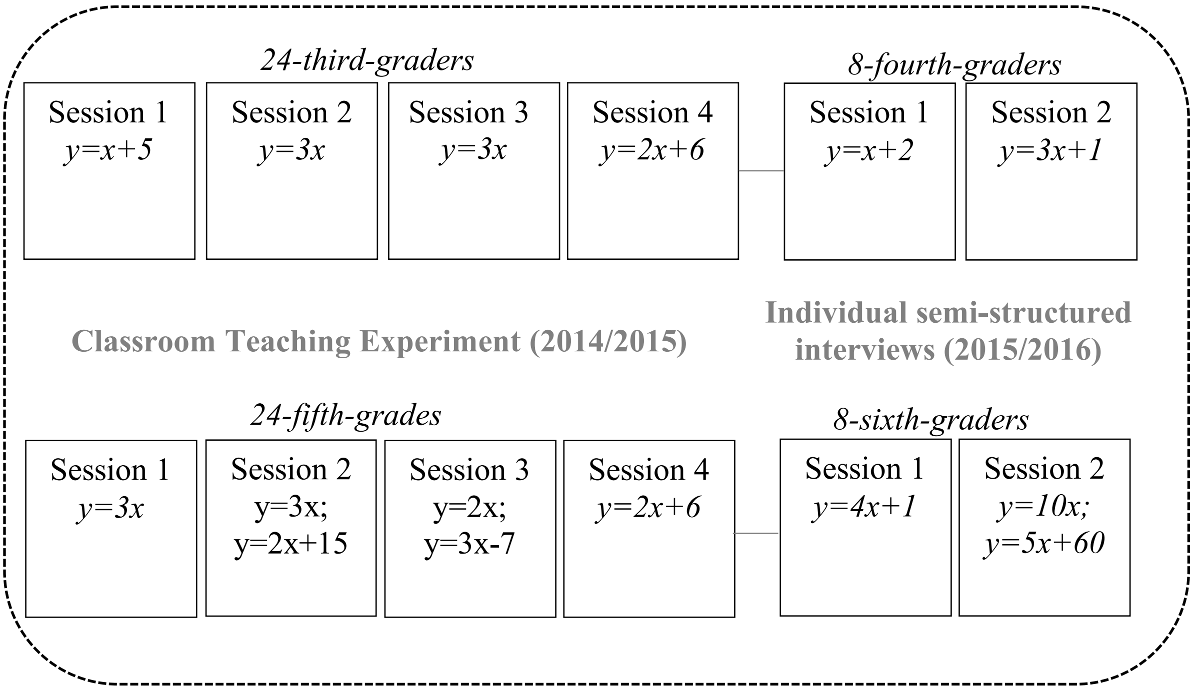


Figure V. CTEs and individual semi-structured individual interviews

Data analyzed in this dissertation are organized based on the general research objectives. Considering the first general objective (namely, to describe and characterize the generalization of 24 students of third and 24 students of fifth of elementary education to solve a problem that involves a linear function), we examine the written answers of the third and fifth students in the last session of each CTE. We analyze their answers with the purpose of describing the production of the students' generalization, as well as the work with particular cases. Therefore, we address the generalization of students as a product (in terms of Ellis, 2007). The second general objective (namely, to describe how the representations used by students from third to sixth grade vary when working with different generalization problems involving linear functions) arises from the need to go beyond the analysis of students' written answers. We analyzed the responses of a group of students to all sessions of CTE and their responses to semi-structured individual interviews. In the analysis of these responses, we consider generalization as a process (Ellis, 2007).

Paradigm and research design

Broadly speaking, this research follows the guidelines of design research, which is an emerging methodological paradigm that studies student learning in context. Design research is mainly used to explore educational improvements and to describe new ways of students learning (The Design-Based Research Collective [DBRC], 2003; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2007; Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011). Specifically, this research paradigm is adapted to our objectives, since: (a) it has a focus on design and exploration; (b) is "sensitive to the systemic nature of learning and teaching, perceiving to develop theoretical advances with a strong empirical basis that helps guide educational practice" (Cañadas & Molina, 2013, p. 15); (c) takes place through continuous cycles of implementation, analysis and redesign, which is done in parallel to the progress of the objectives; and (d) it is carried out for extended periods of time due to the advantage of examining gradual changes as students learn new ideas, concepts or strategies (DBRC, 2003; Molina et al., 2011; Prediger, Gravemeijer, & Confrey, 2015).

Design research has a field of application that varies in terms of the ages of the participating subjects, as well as the topics that can be addressed (Prediger, Gravemeijer, & Confrey, 2015). This multiplicity of contexts favors the emergence of different types of design research, from where teaching experiments arise, a type of study within design research (Molina et al., 2011).

In the following, we describe the essential elements of CTE and semi-structured individual interviews, the central methodological data collection tools of this dissertation.

CTE

Teaching experiments are a type of study within design research, which are characterized by understanding teaching learning processes when the researcher actively acts as a teacher, studying the nature of the development of ideas, tools or models in which they are contained students, teachers or groups (Cobb & Gravemeijer, 2008; Kelly, 2003; Kelly & Lesh, 2000). Some of the main characteristics of teaching experiments are: (a) the teacher/researcher experiments first-hand the learning and reasoning of students; (b) the characterization of the situation in all its complexity; (c) the presence of many uncontrolled variables; (d) what happens in real contexts; (e) the center of interest is the development of students, the development of teachers, and/or the development of teaching activities; (f) the duration of the experiment can be variable; and (g) they can be developed in small laboratory rooms for interviews, complete classes or even wider learning environments (Kelly & Lesh; 2000; Molina et al., 2011; Steffe & Thomspon, 2010).

Individual interviews

As Cohen, Manion and Morrison (2018) point out, interviews are “a flexible tool for data collection, enabling multi-sensory channels to be used: verbal, non-verbal, seen, spoken, heard and, indeed with online interviews, written. The order of the interview may be controlled while still giving space for spontaneity, and the interviewer can press not only for complete answers but for responses about complex and deep issues” (p. 506). According to these authors, interviews are flexible instruments for collecting information, which is characterized by having one or more explicit purposes.

In the context of qualitative research, interviews vary in the degree to which they are structured. Specifically, we focus on the semi-structured individual interview. One of the main characteristics of this type of interview is that “the same questions or general issues are exposed to each of the interviewees” (Bogdan & Biklen, 2007, p. 275). In this type of interview, the interviewer is free to modify, according to the students’ answers, the sequence of the questions, which are accommodated to the students' answers and allow obtaining more specific information (Ginsburg, 1997).

Data sources

In Table III, we describe the main elements of the data analyzed in this dissertation.

Table III. *CTE and Semi-Structured Individual Interviews*

CTE	Comparison criteria	Semi-structured individual interviews
24 third elementary students (whole group) and 24 fifth elementary students (whole group).	Participants	8 fourth graders (who participated in CTE) and 8 sixth graders (who participated in CTE).
The fourth and last session developed in each class (which include the same problem worked with both groups).	Data selection	Written students' responses to all CTE sessions, considering questions that involve an exploration of specific values and generalization, as well as which include the direct form of linear functions. Oral and written responses to interview.
The tiles problem (y=2x+6) on a worksheet.	Instruments	Different functional thinking tasks (y=a+x; y=ax; and y=ax+b).
Written responses to worksheets.	Data collection	Written students' responses to all worksheets during CTE. Oral and written students' responses to all tasks (video-recorded and work in worksheets).
Functional relationships evidenced in students' responses: correspondence and/or covariation. *Representations*: pictorial, natural language-written, numerical, and algebraic notation, for instance. *Generalization*: prompted or spontaneous. *Structures* underlying students'	Categories	[Spontaneous] *Representations* to work with different types of linear functions. *Representations* to work with different types of questions: specific values and generalization.

Table III. *CTE and Semi-Structured Individual Interviews*

CTE	Comparison criteria	Semi-structured individual interviews
responses to: direct and inverse forms of a linear function.		

Results

The results section of this dissertation is structured as five studies. Each study is a research paper, one is published and the others are under reviews. The first four studies are related to the first general objective; we describe the generalization by third and fifth graders when working with the same problem: the tiles problem (y=2x+6). The first three studies examine generalization considering functional relationships, representations, and the type of question in which students are able to generalize. The fourth study examines and identifies the structures underlying fifth-students' answers and describe how they interpreted the relationships involved in the problem, their representations, and generalizations. The fifth study, related to the second general objective, describes how students' representations vary when they worked with problems involving different types of linear functions.

In the following, we describe the main components of these studies.

Study 1. Pinto, E., Cañadas, M. C., & Moreno, A. (under review). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra.

Abstract

This study describes how 24 third-graders (8-9 years old) relate and represent the relationships among variables when working on a functional thinking task. This aspect contributes to provide insights about how students attend to properties and relationships between covarying quantities. From a functional approach to early algebra, we describe students' answers when working with specific values and when generalizing. Design research guidelines, specifically those set out for Classroom Teaching Experiment (CTE), were followed. This study addresses the fourth and last CTE session, which involved a function of the type $y=ax+b$, with which the students had no prior experience. The findings show that students identified primarily correspondence relationships, which they represented

numerically. Three students generalized the functional relationship while five students used more than one type of representation to express the relationships between variables.

Keywords

Functional relationships, representations, generalization, functional thinking, early algebra.

Study 2. Pinto, E. & Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA, 12*(3), 173-184.

Abstract

This article discusses evidence of 24 fifth graders' (10-11-year olds') ability to generalize when solving a problem that involves a linear function. Analyzed in the context of the functional approach of early algebra, the findings show that three students generalized both when solving specific values and when asked to provide the general formula; while 16 students generalized only when asked to define the general formula. The results are described in terms of the functional relationship identified, the types of representation used to express them, and the type of questions in which students generalized their answers. Most pupils who generalized did so based on the correspondence between pairs of values in the function at issue.

Keywords

Functional relationship; functional thinking; generalization; representations

Study 3. Pinto, E. & Cañadas, M. C. (under review). Generalizations of third and fifth graders from a functional approach to early algebra.

Abstract

Several studies show that elementary school students, and even kindergarten children, are able to generalize and represent relationships when working with problems that involve functions. This topic has been recognized as a way to introduce algebraic thinking in the early grades, also known as early algebra. In this paper, we describe generalizations by 24 third-grade (8-9 years old) and 24 fifth-grade (10-11 years old) students. Specifically, we examine ways of describing students' generalizations when they respond to the same problem, without prior instruction. The goal of the study is to explore and describe what (functional relationships), how (representations), and when (types of questions) third and fifth graders generalize. Theoretically, our work builds on a functional approach to early algebraic thinking, in which generalization and representation are core aspects. In our study, we describe students' responses drawn from a Classroom Teaching Experiment in each grade and we analyze the data coming from the last session in both grades. We analyzed their written responses to a series of questions designed to generalize the relationships in a problem, where the underlying function is y=2x+6. The main results provide evidence of functional relationships in both grades; three third graders and 19 fifth graders generalized providing evidence of correspondence in this generalization and using exclusively natural language. Of the fifth grader generalizers, three did so spontaneously using algebraic notation.

Keywords

Generalization, functional relationships, representations, functional thinking, early algebra

Study 4. Pinto, E., Cañadas, M. C., & Brizuela, B. M. (under review). Fifth graders working on direct and inverse forms of a function. A study within a functional approach to early algebra.

Abstract

We present an exploratory study that describes written responses of fifth grade students (10-11 years old) working with both direct and inverse forms of a linear function, a topic that has been scarcely addressed in recent literature on functional approaches to early algebra. The goal of the study is to describe how these students understand, represent, and generalize relationships between variables involved in a functional thinking task. We identify the structures underlying students' answers and describe how they interpret and understand the relationships involved in the problem, their representations, and generalizations. Our findings illustrate that the structures identified are more varied and incorrect when they work with the inverse form of the function. Our data help to clarify and confirm that: (a) students are able to generalize direct and inverse forms of linear functions and (b) natural language is an important feature of students' representations in both linear function forms.

Keywords:

Structure, generalization, direct functions, inverse functions, functional thinking.

Study 5. Pinto, E., Brizuela, B. M, & Cañadas, M. C. (under review). Variación de representaciones matemáticas de estudiantes en Educación Primaria [Mathematical representational variation among elementary school students].

Abstract

Students' representations have an important role in the construction of their mathematical knowledge and, specifically, representations constitute a core aspect in the development of algebraic thinking, which has recently been incorporated into the Spanish curriculum. In this study, we present a case study that analyzes representations used by eight-intermediate (8-10 years) and eight-upper (10-12 years) elementary school students when participating in a Classroom Teaching Experiment and their responses to semi-structured individual interviews. Specifically, we explore how these students work on problems that involve functions, which are considered a vehicle to introduce algebra in the early grades. Our research question is: How do students' representations vary when working on different generalization problems that involve linear functions? Based on this question, we analyze this variation according to the work of the students with: (a) different types of linear functions ($y=a+x;$ $y=ax+b$; $y=ax+b$); and (b) different types of questions that involve particular cases and generalization. Results illustrate that the types of linear function involved have no effect on the choice of students' representation. Specifically, results lead us to highlight the importance of natural language (oral and written) as a useful type of representation when expressing the relationship between variables, as well as the need to give access to different representations to the students from the first grades.

Keywords:

Representations, generalisation, linear function, functional thinking, early algebra

Conclusions

About research objectives

In this dissertation, students' generalization is the key element; specifically, we focus on a group from third to sixth Spanish elementary students. We assume generalization from the perspective of algebraic thinking, specifically within a functional approach. Related to the general research objectives, as well as their respective specific objectives, Table IV shows the relationship between these elements, as well as their connection with the studies that constitute the results of this thesis.

Table IV. *Relation between Research Objectives and Studies*

		Studies				
General Research Objective	Specific Research Objective	1	2	3	4	5
1. Describe and characterize third-year students and fifth-grade elementary students' generalization when solving a problem that involves a linear function.	1.1. Describe the functional relationships evidenced in students' responses.	✓	✓	✓		
	1.2. Identify and describe students' representations when expressing the relationship among variables involved in a given problem.	✓	✓	✓	✓	
	1.3. Identify and describe the structures identified in the students' responses to analyze how they organize regularities.				✓	
	1.4. Identify the types of questions in which students generalize the relationship among variables.	✓	✓	✓		
	1.5. Describe how students work with problems that involve the direct and inverse forms of a linear function.				✓	
2. Describe how third to sixth elementary students' representations vary when solving different problems that involve linear functions.	2.1. Describe the variations of representations used by students when working with different types of linear functions ($y=a+x$; $y=ax$; $y=ax+b$).					✓

2.2. Describe the variations of representations used by students when working with particular cases and generalizing.	✓

In the sections that follow, we describe the main conclusions associated with each objective of this research.

First general research objective

In this objective, students' generalization was considered as a cultural artifact (Kaput, 2008) or as a product (Ellis, 2007) due to the analysis of students' written answers to the questions to the tiles problem. The main results have shown that three third-graders generalized the relationship involved in the tiles problem, while 19 did so in the fifth. As previously described, students in both groups were not used to working with situations that involve generalizing. However, and as reported by other authors (e.g., Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008), students' prior mathematical experiences seem to have influenced how they perceive general rules. This could be an explanation of why most fifth grade students generalized, unlike the third graders. In the case of third-year students, they tended to focus on specific values (which involved numbers 5, 8, and 10). The arithmetical computations allowed third graders to answer the first questions that we asked them and did not see the need to find the relationship between the variables mentioned.

In the fourth study, we analyze the structures underlying in students' responses to describe how fifth graders understand, represent and generalize relationships among variables. The main results show that more students generalize the direct form than the inverse form of the function, which we interpret as the difficulty of working with the inverse form. Even so, some students generalized the relationship involved in the opposite way, which is a surprising finding, given that a large part of the literature describes the multiple difficulties that students in later elementary grades have when working with inverse forms. The results provide empirical evidence to promote this type of tasks (involving the direct and inverse forms of a function) with elementary students.

In the following, we describe the main conclusions related to each specific research objective.

1.1. Describe functional relationships evidenced by students' responses

The predominance of correspondence helps us to describe features of students' functional thinking; they tend to focus on the construction of a rule to determine the unique value of any given value (x), thus creating a correspondence between x and y (Ayalon et al., 2015). The predominance of correspondence could be related to the way in which we ask the students questions. For example, and considering the tile problem, the first four questions are intended for students to identify how many gray tiles can be placed around a number of white tiles. Students tend to find the functional relationship (which can be established for a particular case or for any case) that relates a certain pair of values for both variables.

1.2. Identify and describe students' representations when expressing the relationship among variables involved in a problem

Our idea of understanding the representations beyond the four indicated (natural language, graphical, tabular, and algebraic notation) is related to our way of understanding algebra. We consider that our activity can be conceived of as algebraic because students are asked to attend to properties and relationships between quantities, thereby examining their generality (Kaput, 2008). The results show differences among representations used by intermediate and upper elementary students, differentiating between those representations used to represent general functional relationships or for particular cases. However, the results obtained allow us to conclude that representations, in the context of the functional approach of school algebra, are considered a means to express the relationship between two or more quantities that conveying would and form an integral part of how students think about functions. The results obtained allow us to conclude that representations are considered a means to express the relationship among covarying quantities and form an integral part of how students think about the functions. The representations used by students, as Brizuela and Earnest (2008) pointed out, allow: (a) characterize students' algebraic thinking; and (b) structure and expand students' knowledge, capturing the meaning of established functional relationships and allowing students to perceive the structures and relationships in a situation, for example.

1.3. Identify and describe the structures identified in the students' responses to analyze how they organize regularities.

In the context of school algebra in general, and functional thinking in particular, previous literature has used the term structure in different ways. However, given our interest in describing how students organize and relate regularities, the notion of structure we have adopted has helped us to signify the responses of students, in order to describe how they work with direct forms and inverses of a linear function. The results we have obtained have helped us to reflect and conclude on some aspects that some authors had previously mentioned. For example, Kieran (1989) pointed out that the methods focused on "finding the answers" make the students manage to develop with intuitive and informal processes, avoiding the use and recognition of the structure, which is essential in the learning of algebra. Students' responses to the tile problem have helped us, on the one hand, to describe how they organize regularities. Also, it helped us to perceive how they recognize structures (which may be consistent or inconsistent in use) in the relationships found. The design of the tile problem, which involves non-consecutive particular cases such as 100 (which is quantitatively different from the previous particular case, which was 10), may have favored students having perceived the mathematical structure that underlies the situation at hand.

1.4. Identify the type of questions in which students generalize the relationship between variables

We knew that different authors described the students are naturally predisposed to perceiving regularities and generalizing (e.g., Mason, 1996; Schifter, Bastable, Russell, Seyferth, & Riddle, 2008), even when they are unable to represent these processes clearly. The differentiation of generalization, according to the type of question, allows us to conclude that in order to promote elementary students' generalization it is necessary to consider the design of different types of questions and tasks that "capture" the ability to generalize. In addition, the consideration of different types of questions helps in order to address the diversity of students and support those students who may perceive general relationships and could not represent them clearly yet.

1.5. Describe how students work with problems that involve the direct and inverse forms of a linear function

Focusing on both forms of a linear function promotes flexibility and reversibility in students' thinking. When working on the inverse form, students must "reverse" the process they do after working on the direct form, with the arithmetic operations involved, focusing attention on the underlying mathematical structures and relationships. This idea connects with the ideas of Freudenthal (1983) and Warren and Cooper (2005), who point out that the concept of function, central to functional thinking, helps to develop an understanding of the relationships between operations, in particular the inverse relationship, as well as with the ideas of Carraher and Schliemann (2007), who emphasize the need to recognize arithmetic operations as functions.

Second general research objective

This objective arises with the need to go beyond analyzing the written production of generalization; we analyze the generalization as a process. Specifically, we describe oral and written students' responses during the CTE and semi-structured individual interviews. The mains results related to this objective empathize the close relationship between generalization and representation, which allows us to conclude that both elements are needed to understand how students generalize. Representations are ways in which students generalize and relate variables, as well as helping us to understand the way in which they communicate, solve problems, create objects, procedures, among others. Two main results derive from this objective: (a) the types of linear functions involved have no effect on the choice of representation used by students, since there is a tendency in both groups to use mainly the representation given in the problem statement, instead of using other types of representations; and (b) the students showed a greater variety of representations when working with particular cases than when generalizing.

In the following, we describe the main conclusions related to each specific research objective.

2.1. Describe the variations of representations used by students when working with different types of linear functions

In the first place, given the predominance in the use of natural language (oral and written) in the ages and the types of linear functions examined, we emphasize the importance of this type of representation. In the everyday work of most classrooms, efforts are focused on introducing increasingly symbolic and sophisticated representations, forgetting the power of natural language as a type of mathematical representation. Second, the use of numerical representation arises in the students' responses when working on all the problems. This type of representation can be considered as a way to: (a) work with particularities and details of arithmetic computations; and (b) notice (general) regularities from computations. Third, the role of pictorial representations supports the work with the problems that involve the function of the type $y=mx+b$. The problem statements that included this type of function introduced the natural language and pictorial representations. Apparently, given the mathematical characteristics of this type of function, pictorial representation allowed students to understand the part that remained constant in each function, so this type of representation highlights an important aspect of the problem that may not be observed with other types of representation.

2.2. Describe the variations of representations used by students when working with particular cases and generalizing

Two main conclusions derive from this objective. First, intermediate and upper elementary students used numerical representations in questions involving specific values (making arithmetic computations). This makes sense, since the students were asked about specific values and not general ones. This could be an indicative element of the type of representation traditionally presented in the mathematics classes to these students: the numerical one. Second, algebraic notation is a type of representation which provides evidence of use by some students. Although the focus of our research is far from instructing on the use of this type of representation (given its exploratory and descriptive nature), our results show that students interact with this type of representation. These situations could show that some elementary students could incorporate algebraic notation in their work in different mathematical situations, rejecting those approaches that only propose their introduction in Secondary Education.

Teaching implications

Learning opportunities based on these findings can better support students' algebraic and functional thinking. First, functional thinking naturally encourages students to investigate (Yerushalmy, 2000), since the focus of introducing problems involving functions is for students to address the relationships and mathematical structures involved, rather than focusing on isolated calculations. The problems we have presented in this dissertation ("ages", "parking" or "tiles", for example) are contexts that can be useful to promote other types of thinking in students.

Second, working with patterns that involve two variables can become ideal scenarios to promote in students working go beyond finding the "next step" in a sequence of elements. Attending to the relationship between the two variables reinforces the idea of some authors (e.g., Mason et al., 1985; Stacey & MacGregor, 2001) about emphasizing activities with patterns to introduce students to algebra, since they are dynamic representations.

Third, we know that the teaching of different mathematical representations is a crucial element in the learning of elementary students, since each type of representation highlights a particular characteristic of the mathematical object to which they refer. Specifically, we emphasize the importance of natural language (written or spoken) in student learning. Encouraging this type of representation, in a profound way and through different mathematical situations, will favor that students can express different ideas in an increasingly spontaneous way and relate this type of representation with other more symbolic ones.

Limitations and next steps

The development of a doctoral dissertation in a period of three years brings with its different limitations. For example, the analysis of the responses of students who participated in the interviews could be addressed in many other ways (e.g., explore what meanings students provide to algebraic notation).

This study opens new perspectives and lines of research. During the analysis of the interviews, we analyzed the relationship between the inductive reasoning model proposed by Cañadas and Castro (2007), and the students' generalization working with functional thinking tasks. Both inductive reasoning model and generalization is a way that help to understand the process of how students generalize. Another line of inquiry relates to the comparison of the students' answers reported in this study, with students of the first grades of the same school (for example, Morales, 2018, reports work with first and second grade students) or from another school. These comparisons could more deeply characterize the algebraic thinking of some groups of Spanish students, who come from different contexts. Finally, the results and implications of this dissertation open the way to explore a new field: teachers education and professional development. We know that elementary students can do when working with content of algebraic nature. However, there are few research reports that, from the perspective of algebraic thinking, address the teachers' influence on elementary students.

Eder Pinto M.

PRESENTACIÓN

Este escrito constituye la Tesis Doctoral, que presenta el autor, para obtener el grado de Doctor en el Programa de Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada, durante el curso académico 2018/2019. Se trata de una memoria de investigación cuyo foco es la generalización de estudiantes[5] de Educación Primaria, en el contexto del álgebra escolar. La presente investigación ha comenzado en el curso académico 2016/2017 y durante el período anterior, el autor ha realizado un Trabajo de Fin de Máster titulado "Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria", el cual permitió iniciar el trabajo en esta área. En ambos escritos, el actual y el Trabajo de Fin de Máster, la doctora María C. Cañadas Santiago es la directora.

Inicialmente, esta Tesis Doctoral fue diseñada para su presentación mediante una "agrupación de estudios". Dados los procesos y tiempos involucrados en la elaboración de cada manuscrito, así como las respuestas de las revistas a los diferentes escritos enviados para evaluación, en esta memoria de investigación presentamos un estudio publicado y aceptado por una revista que cumple con los requisitos solicitados por la Escuela Internacional de Posgrado de la Universidad de Granada. Sin embargo, en los capítulos de resultados exponemos cuatro estudios más que, a la fecha de la escritura de esta memoria de investigación, se encuentran en diferentes procesos de revisión por diferentes revistas científicas afines a nuestro campo.

El propósito general de esta tesis es describir la generalización de estudiantes de Educación Primaria al responder problemas que involucran funciones, en el contexto del pensamiento funcional como aproximación al pensamiento algebraico. Los datos que analizamos forman parte de dos proyectos de investigación del Plan Nacional I+D (EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P) y provienen de: (a) un experimento de enseñanza

[5] En esta tesis utilizamos de manera inclusiva términos como "los estudiantes", "los investigadores", "los profesores" para aludir a hombres y mujeres. Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo nombrar conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando "o/a", "los/las" y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

compuesto por cuatro sesiones, el cual fue realizado con una clase completa de tercero y otra de quinto de primaria; y (b) dos entrevistas individuales semiestructuradas realizadas con algunos estudiantes de cada grupo. En primera instancia, nos centramos en la cuarta y última sesión del experimento de enseñanza realizada en ambos cursos para describir la generalización de 24 estudiantes de tercero (8-9 años) y de 24 estudiantes quinto de primaria (10-11 años) al resolver un mismo problema. Analizamos las respuestas escritas de los estudiantes a una hoja de trabajo. Posteriormente, seleccionamos a ocho estudiantes de cada grupo y los entrevistamos en dos oportunidades diferentes. Analizamos sus respuestas escritas a todas las sesiones del experimento de enseñanza y sus respuestas escritas y orales durante las entrevistas.

Estructura de la memoria

Esta memoria se estructura en siete capítulos. En el primero de ellos exponemos el problema de investigación. De manera amplia, en esta sección describimos el contexto en el cual se inserta el estudio, la motivación y justificación del mismo, la perspectiva conceptual que asumimos, así como el problema y los objetivos de investigación.

En el segundo capítulo presentamos el marco conceptual adoptado. Exponemos la idea de álgebra y pensamiento algebraico que asumimos para, posteriormente, describir las relaciones y conexiones entre los principales elementos, según los objetivos de investigación.

A la luz de los objetivos de investigación y del marco conceptual adoptado, en el capítulo tercero describimos la revisión de la literatura relacionada. En esta sección exponemos diferentes investigaciones que cobran relevancia pues nos ayudan a situar nuestra investigación.

El marco metodológico que rige nuestra investigación lo presentamos en el cuarto capítulo. En particular, justificamos y describimos los elementos que forman parte del diseño metodológico, presentamos y caracterizamos los estudiantes con los que trabajamos, el proceso de recogida de información, las categorías para el análisis de datos y los procedimientos para dicho análisis.

Los resultados los exponemos en el capítulo número cinco. Este capítulo lo conforman los resultados correspondientes a cinco estudios, los cuales están directamente relacionados con los objetivos generales de investigación. Los primeros cuatro estudios están relacionados con el primer objetivo, mientras que el quinto estudio responde al segundo objetivo.

En el sexto y séptimo capítulo establecemos las conclusiones de esta memoria en español e inglés, respectivamente. El capítulo escrito en inglés es parte de los requisitos para la obtención de la Mención Internacional del título de Doctor. En estos capítulos señalamos las principales conclusiones obtenidas de la investigación, considerando los objetivos diseñados y los cinco estudios que reportan los resultados. Asimismo, las conclusiones incorporan comparaciones con otras investigaciones, las contribuciones de esta memoria a la comunidad científica, implicaciones para la docencia, algunas limitaciones del trabajo y líneas abiertas. Finalmente, describimos las principales publicaciones derivadas de esta Tesis Doctoral, tanto en artículos, participación en congresos científicos y seminarios invitados.

Organización y relación entre los estudios que se presentan

Tal como lo señalamos anteriormente, cinco artículos forman parte de esta Tesis Doctoral. A continuación, presentamos el título de cada uno, así como los autores respectivos.

- Estudio 1. Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (en revisión). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra.
- Estudio 2. Pinto, E., y Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA, 12*(3), 173-184.
- Estudio 3. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (en revisión). Generalizations of third and fifth graders from a functional approach to early algebra.
- Estudio 4. Pinto, E., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (en revisión). Fifth graders working on direct and inverse forms of a function. A study within a functional approach to early algebra.
- Estudio 5. Pinto, E., Brizuela, B. M. y Cañadas, M. C. (en revisión). Variación de representaciones matemáticas de estudiantes en Educación Primaria.

En concreto, los cinco estudios están organizados según el orden en el que aparecen en esta memoria. A excepción del estudio 2 (que se encuentra publicado), los otros se encuentran en diferentes procesos de evaluación en revistas incluidas en las bases de datos científicas *The Social Sciences Citation Index* (SSCI) y/o Scopus. Los primeros cuatro estudios están relacionados con las respuestas escritas de estudiantes de tercero y quinto a un mismo problema. Estos estudios analizan diferentes aspectos de la generalización de los estudiantes de ambos cursos: relaciones funcionales, representaciones, tipo de pregunta, estructuras identificadas en sus respuestas y el trabajo con las formas directa e inversa de la función. Por otra parte, el quinto estudio atiende a las respuestas de un grupo de estudiantes a diferentes problemas, tanto en el contexto de un experimento de enseñanza como en entrevistas individuales semiestructuradas, realizadas posteriormente. En este último estudio abordamos la estrecha relación entre generalización y representación y estamos interesados en describir cómo varían las representaciones de los estudiantes al trabajar con problemas que involucran diferentes tipos de funciones lineales.

Formación del investigador

Esta memoria de investigación recoge un trabajo desarrollado en tres años. Durante este período participamos en once actividades científicas específicas de nuestra disciplina, las cuales detallamos en la figura 0-1.

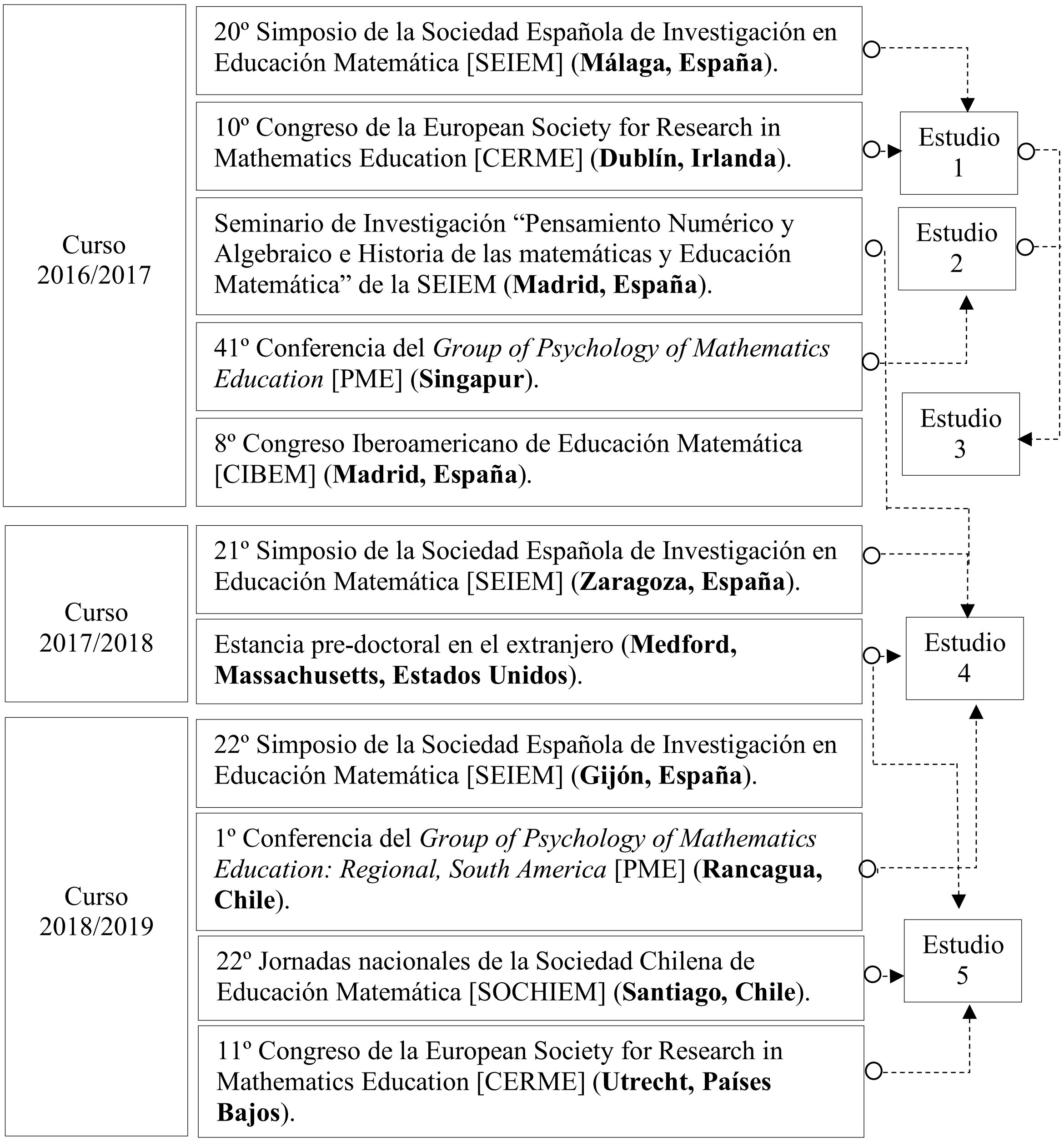


Figura 0-1. Participación en congresos, conferencia o simposios

En cada una de las instancias descritas en la figura 0-1 presentamos una o más contribuciones, las cuales han quedado registradas en las actas de cada actividad. Durante el período de formación doctoral, el autor de esta tesis y su directora han adoptado un enfoque progresivo de producción científica; la participación en cada congreso, conferencia o simposio ha servido de antesala a la elaboración de los cinco estudios que presentamos en esta memoria. Por otra parte, el autor ha realizado una estancia de tres meses, desde el 5 de marzo al 5 de junio de 2018, en Tufts University (Estados Unidos), con la profesora Bárbara

M. Brizuela. Dicha estancia es parte de los requisitos para obtener el grado de Doctor con Mención Internacional por la Universidad de Granada.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo exponemos los principales argumentos que sustentan esta investigación[6], así como la problemática y objetivos de la misma. En primer lugar, realizamos una aproximación inicial a la temática que abordamos en esta tesis: destacamos cuál es la importancia de la generalización en la escolaridad primaria (6-12 años) y su estrecho rol con el pensamiento algebraico. Posteriormente, describimos el origen y motivación del autor por este tema de investigación, así como las justificaciones que dan cuenta de su relevancia y pertinencia. En tercer lugar, situamos este trabajo como continuación de una línea que se viene desarrollando en el grupo de investigación "Didáctica de las Matemáticas. Pensamiento Numérico" (FQM-193) de la Universidad de Granada. Finalmente, describimos brevemente la perspectiva conceptual que asumimos en este trabajo, con la finalidad de introducir el problema y objetivos de investigación.

Contexto de la investigación: la importancia de la generalización y el rol del pensamiento algebraico en las primeras edades

La generalización es el aspecto central de esta investigación. Ha sido abordada y es de interés para diversas disciplinas como la Psicología, la Educación en general y, en particular, en el campo de la Didáctica de la Matemática. Si bien las definiciones y posturas sobre qué es la generalización son variadas en la Didáctica de la Matemática (en el tercer capítulo profundizamos en este aspecto), existen algunos acuerdos que la consideran, de manera amplia, como: (a) una actividad humana básica, la cual permite hacer explícito el pensamiento matemático; (b) la esencia de la actividad matemática, la cual transciende todas las ramas de esta disciplina; (c) uno de los procesos de pensamiento matemáticos más

[6] En este escrito empleamos como sinónimos las expresiones "investigación", "tesis" o "memoria de investigación".

fundamentales, el cual requiere ver detrás de una situación matemática para sacar una conclusión; y (d) un elemento central para entender el álgebra (Carpenter y Franke, 2001; Dienes, 1961; Dreyfus, 1991; Krutetskii, 1976; Lee, 1996; Mason, 1996).

En concreto, en este trabajo asumimos la generalización como un elemento central de las experiencias matemáticas que deben abordar estudiantes de Educación Primaria, alejándonos de las posturas que la relacionaban exclusivamente con el uso de la notación algebraica (Kieran, 1989). Diferentes razones sustentan la idea de incluir la generalización en los primeros cursos, ya que esta favorece la flexibilidad en el pensamiento matemático, permitiendo a los estudiantes: (a) apartar información irrelevante; (b) adaptar, ajustar y reorganizar un conjunto de experiencias previas; (c) poner atención a ideas, capacidades y propiedades involucradas en diferentes situaciones; y (d) mejorar su comprensión y herramientas para resolver problemas (Carpenter y Levi, 2000; Carraher y Schliemann, 2002, 2015; English y Warren, 1998; Warren, 2005). Por ejemplo, Russell, Schifter y Bastable (2011) promueven la idea de que al generalizar las relaciones y propiedades involucradas en las operaciones aritméticas, los estudiantes construyen una comprensión más profunda de las operaciones. Los autores citados anteriormente destacan que no se trata de incluir nuevos contenidos, sino que es optimizar lo que hay y encontrar nuevas oportunidades de pensamiento para los estudiantes.

En conexión a las ideas anteriores, parece existir un acuerdo en reconocer que los estudiantes de los primeros cursos están naturalmente predispuestos a percibir regularidades y generalizar (Mason, 1996; Schifter et al, 2008), aún cuando estos no tienen todas las representaciones para expresar dichas ideas generales. Considerando dichas capacidades innatas, adquiere relevancia la idea de pensamiento algebraico; un tipo de pensamiento que aprovecha la capacidad natural de generalizar que tienen los estudiantes con fines didácticos (Mason, 1996). Este tipo de pensamiento favorece que los estudiantes exploren relaciones entre cantidades, modelicen, establezcan predicciones, generalicen, resuelvan problemas, justifiquen, se comuniquen y articulen sus ideas (Cai y Moyer, 2008; Kaput y Blanton, 2005; Molina et al., 2009). La incorporación del pensamiento algebraico en los primeros cursos promueve en los estudiantes su capacidad para generalizar y expresar dicha generalización, a través de diferentes representaciones (Carpenter y Levi, 2000; Kaput, 2008). Por tanto, la relación entre pensamiento algebraico, generalización y representación es estrecha; son considerados elementos centrales del aprendizaje del álgebra en los primeros cursos (Carraher et al., 2006; Cooper y Warren, 2011).

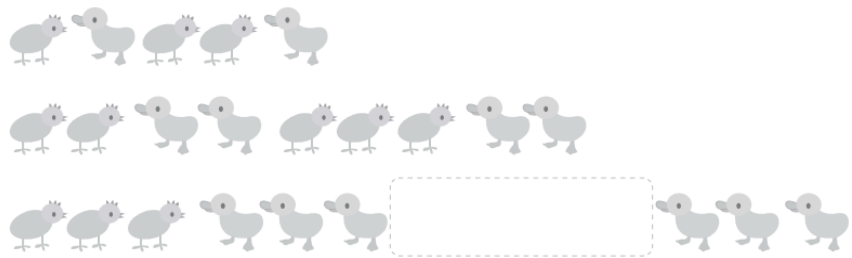
En esta tesis nos interesamos por una aproximación funcional al pensamiento algebraico, también conocido como pensamiento funcional (Carraher y Schliemann, 2007), el cual es considerado un vehículo para introducir álgebra en los primeros cursos. En este tipo de enfoque, la función es el contenido matemático clave ya que favorece que los estudiantes: (a) atiendan a las relaciones y estructuras que subyacen en problemas que involucran la variación entre cantidades, en vez de centrarse en cálculos aritméticos aislados; (b) unifiquen ideas y procedimientos que pueden no estar relacionados; (c) mejoren su capacidad para generalizar; (d) construyan conceptos matemáticos: y (e) relacionen e integren diferentes ramas de las matemáticas, como la aritmética, álgebra y geometría (Blanton, 2008; Carraher y Schliemann, 2015). Por tanto, este enfoque funcional es el contexto en el cual nos situamos para describir la generalización de los estudiantes. Específicamente, nos interesa observar cómo estudiantes de Educación Primaria trabajan con problemas que involucran cantidades que covarían, conectando los casos particulares presentados, percibiendo y representando las relaciones y estructuras subyacentes a cada situación. Tal como lo señala Blanton (2017), generalizar relaciones entre dos cantidades que covarían no solo es un componente crucial del pensamiento algebraico, sino que también es una característica importante de este tipo de pensamiento, distinguiéndolo de otros tipos de pensamiento.

Motivación y origen

Tres razones principales me impulsaron a realizar esta Tesis Doctoral. La primera razón tiene relación con mi experiencia como profesor de Educación Básica (o maestro, en España). Impartí docencia durante algunos años en un primer curso (6-7 años de edad) en Santiago de Chile. Dos situaciones llamaron mi atención: (a) el trabajo con patrones y (b) la identificación de contenidos matemáticos que permiten generalizar. La primera situación, observada en las orientaciones curriculares chilenas y textos escolares, fue foco de preocupación pues en el trabajo con patrones se generan los mismos tipos de preguntas a los estudiantes de diferentes cursos, variando el ámbito numérico involucrado, o bien, el tipo de representación. Por ejemplo, la figura 1-1 ilustra ejemplos de actividades propuestos por las orientaciones curriculares chilenas para los primeros cuatro cursos de la Educación Primaria (6-10 años).

(a) Primero (p. 171)

Dibujan los elementos que faltan en el patrón:



(b) Segundo (p. 149)

a Extienden el siguiente patrón numérico
10, 20, 30, 40, ___, ___, ___, ___, ___, ___,
b Escriben los cuatro números siguientes que continúan la serie.
2 - 4 - 6 - ___ - ___ - ___ - ___

(c) Tercero (p. 98)

Hallan una posible regla de un patrón a partir de los números indicados y la utilizan para continuar las secuencias siguientes:

a 5, 10, 15, 20, xxx, xxx, xxx, xxx,
b 21,18,15, xxx, xxx, xxx,
c 250, 300, 350, xxx, xxx, x xx, xxx,
d 99, 90, 81, 72, xxx, xxx, xxx, xxx,

(d) Cuarto (p. 87)

Descubren y explican la regularidad en sucesiones de números y las completan:

a	2	5	10	17	?	37	50	65	
b	0	3	8	15	24	35	?	?	?
c	1	2	4	7	11	16	?	?	?
d	1	0	1	0	1	?	?	?	?

Figura 1-1. Ejemplos de actividades con patrones en Programas de Estudio chilenos (Ministerio de Educación de Chile [Mineduc], 2012a, b, c y d)

A través de mi ejercicio docente, este tipo de actividades parecían insuficientes, considerando que los estudiantes de los primeros cursos perciben regularidades más allá de encontrar el siguiente término, así como generalizaban diferentes tipos de relaciones. La cuestión que surge es: ¿cómo aprovechar las habilidades de los estudiantes de estos cursos, al trabajar con diferentes tipos de patrones, para fomentar su capacidad de generalización? Por otra parte, he notado que diferentes conceptos matemáticos pueden ser adecuados para generalizar. Por ejemplo, la propiedad conmutativa de la adición —que trabajé sistemáticamente durante mi enseñanza a estudiantes de primero— es una "plataforma" que favorece que los estudiantes expresen una generalidad. Esto me ha llevado a reflexionar sobre cuáles son las herramientas que tienen los profesores para identificar estas plataformas y alejar a los estudiantes de enfoques exclusivamente computacionales, aprovechando las capacidades innatas que tienen los estudiantes para generalizar.

El segundo hecho que motiva el desarrollo de esta investigación tiene relación con la interacción que tuve con algunos miembros del proyecto de investigación en el cual se inserta esta Tesis Doctoral. Antes de comenzar mis estudios de posgrado, visité Granada y asistí a algunos seminarios del citado proyecto de investigación, los cuales se centraban en el trabajo de estudiantes de primaria frente a contenidos de carácter algebraico. Esta interacción reafirmó mi interés por profundizar en temáticas asociadas al álgebra escolar, esta vez desde la perspectiva de la investigación.

Finalmente, un tercer elemento que motiva esta investigación tiene relación con mi experiencia al realizar el Máster en Didáctica de las Matemáticas, en la Universidad de Granada, durante el curso 2015/2016. Esta experiencia me permitió "dar los primeros pasos" como investigador novel. En concreto, y respondiendo al proyecto de investigación en el cual se inserta dicho trabajo, describimos cómo estudiantes de tercero de primaria (8-9 años) identificaban relaciones funcionales en un problema que involucra una función lineal, así como su capacidad para generalizar y expresar sus ideas mediante diferentes representaciones. Como continuación de esta investigación, decidimos centrarnos en explorar la generalización de estudiantes de diferentes cursos de Educación Primaria al trabajar con problemas que involucran funciones.

Justificación

En este apartado presentamos cuatro razones que sustentan esta investigación, en las cuales resaltamos la relevancia, pertinencia y originalidad de esta tesis en el campo de la Didáctica de la Matemática.

Desde la investigación

Diversos autores describen y analizan la generalización de estudiantes de Educación Primaria, e incluso de Educación Infantil, desde diferentes perspectivas teóricas (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Castro, Cañadas y Molina, 2017; Cooper y Warren, 2011; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Mason, 2008; Radford, 2006; Rivera, 2013), así como desde diferentes aproximaciones al pensamiento algebraico (e.g., Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil y Stephens, 2017; Bastable y Schifter, 2008; Carpenter y Franke, 2001; Carraher y Schliemann, 2007; Molina, 2006; Pinto y Cañadas, 2018a). En esta investigación consideramos la generalización desde un enfoque funcional al álgebra escolar (Carraher y Schliemann, 2007). Desde este enfoque, la relación entre la generalización de relaciones funcionales y su representación son aspectos cruciales; ambas son partes que ayudan a entender cómo los estudiantes relacionan cantidades que covarían. Sabemos, según diversos estudios, que los estudiantes de primaria generalizan y expresan, mediante diferentes representaciones, las relaciones involucradas en problemas que involucran funciones lineales (e.g., Blanton, Stephens et al, 2015; Carraher, Martinez y Schliemann, 2008; Chimoni y Pitta-Pantazi, 2017; Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018). Sin embargo, evidenciamos una necesidad de investigar diferentes aspectos que no han sido tratados profundamente en la literatura y los exponemos a continuación.

En primer lugar, algunas investigaciones reportan, de manera general, cómo los estudiantes perciben y comprenden las relaciones entre variables en diferentes problemas que involucran funciones (e.g., Carraher y Schliemann, 2007; Cooper y Warren, 2011; Marum et al., 2011). Evidenciamos la necesidad de describir con mayor profundidad el o los tipos de relaciones funcionales que los estudiantes evidencian, aportando ejemplos que den cuenta de cómo estos las perciben y expresan al trabajar con diferentes problemas. Una forma de describir cómo los estudiantes relacionan las variables es a través de la estructura que identificamos en sus respuestas, las cuales nos ayudan a entender cómo estos perciben, organizan y relacionan las regularidades detectadas (Papic et al., 2011). Por tanto, la idea de identificar estructuras en las respuestas de los estudiantes nos entrega un camino para describir cómo estudiantes de primaria relacionan las variables en un determinado problema.

En segundo lugar, encontramos una necesidad de profundizar en cómo los estudiantes expresan las relaciones funcionales que evidencian en sus respuestas. Nos interesa describir más allá de los cuatro tipos de representaciones clásicas descritas por la literatura: (a) lenguaje natural; (b) gráfica; (c) tabular; y (d) notación algebraica (Brenner et al., 1997; Williams, 1993). Esto nos ayudará a describir características del pensamiento algebraico de los estudiantes de diferentes cursos, lo que nos entrega luces de qué tipo de representaciones son escogidas y usadas por los estudiantes al expresar las relaciones entre variables, así como describir cómo varían las representaciones de los estudiantes al trabajar con: (a) diferentes tipos de relaciones funcionales; (b) diferentes tipos de funciones lineales; (c) las formas directa e inversa de una función lineal; (d) casos particulares y el caso general, por ejemplo.

En tercer lugar, la mayoría de los estudios que abordan cómo los estudiantes comprenden elementos de la función en un determinado problema lo hacen desde la forma directa (dado el valor de la variable independiente, calcular el valor de la variable dependiente). Sin embargo, los estudios que tratan la forma inversa de la función (dado el valor de la variable dependiente, calcular el valor de la variable independiente) son escasos en primaria y están centrados principalmente en estudiantes de secundaria y cursos posteriores (Paoletti et al., 2017). Por tanto, cobra sentido investigar cómo estudiantes de Educación Primaria trabajan con problemas que involucran ambas formas de una función lineal; lo que se transforma en otro elemento relevante y original de esta Tesis Doctoral.

Finalmente está el rol de la generalización en los reportes de investigación desarrollados sobre pensamiento funcional. Tal como señala Ellis (2007), interesa ver la generalización como un producto (*generalization*) y como un proceso (*generalizing*). En este sentido, nuestro interés de investigación sigue ambos focos: desarrollamos un experimento de enseñanza, compuesto por diferentes sesiones, de las cuales seleccionamos una sesión específica y analizamos cómo los estudiantes expresan las reglas generales en una hoja de trabajo (*generalization*), para después profundizar en cómo estos estudiantes razonan hasta llegar a la generalización (*generalizing*), a través de entrevistas individuales semiestructuradas.

Desde el contenido matemático involucrado

Anteriormente hemos resaltado el rol central de la función como contenido matemático clave para el pensamiento funcional. Este contenido: (a) sirve como un contexto matemático para introducir elementos algebraicos en los primeros cursos; (b) puede unir una amplia gama de temas como operaciones aritméticas, razón y proporción, o fórmulas que relacionan cantidades; (c) sirve como una conexión entre las experiencias diarias de los estudiantes y las matemáticas; y (d) permite mejorar la organización de la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Carraher, Schliemann y Schwartz, 2008; Chazan, 2000; Dubinsky y Harel, 1992; Freudenthal, 1992; Schwartz y Yerushalmy, 1992).

Por otra parte, diversos reportes de investigación dan cuenta de las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria al trabajar formalmente las funciones (Bush y Karp, 2013; Knuth, 2000; Lobato, Ellis y Muñoz, 2003). Desde el enfoque funcional como aproximación al pensamiento algebraico, Cañadas y Molina (2016) señalan:

> no se trata de introducir las funciones en niveles educativos previos tal y como se trabajan en educación secundaria, sino de aprovechar el potencial de este contenido matemático para promover capacidades en los niños que les sean útiles para el razonamiento en general y el matemático en particular, tanto en el nivel educativo en el que se encuentran como en los sucesivos (p. 210).

Por tanto, la incorporación de la función como contenido matemático es un medio para describir cómo los estudiantes de estos cursos generalizan.

Desde el currículo

> Puede existir una gran resistencia a la idea de incluir álgebra en los primeros cursos, debido en gran parte a las investigaciones que se han desarrollado sobre álgebra y las dificultades que tienen los estudiantes (Carraher y Schliemann, 2007, p. 670).

La frase anterior explica, en parte, la razón por la cual la introducción del álgebra en el currículo de los primeros cursos es un hecho relativamente reciente. La presencia del pensamiento algebraico en estos cursos —donde la generalización es un elemento central— está inserto en las directrices curriculares de diferentes países: Australia, Canadá, Chile, China, España, Estados Unidos, Japón, Reino Unido, Singapur, entre otros[7] (Australian Curriculum, Assesment and Reporting Authority, 2015; Cai y Knuth, 2011; Cai, Fong y

[7] La mayoría de estos países lideran la producción científica sobre temáticas alusivas al pensamiento algebraico en los primeros cursos. En una reciente búsqueda en la base de datos científica de la Web of Science (marzo, 2019), los países que más publican en esta área son: Estados Unidos (237), Canadá (55), Reino Unido (53), Alemania (47), Francia (45), España (39), China (36), Italia (33), Turquía (30) y México (24). https://wcs.webofknowledge.com/RA/analyze.do?product=WOS&SID=F5ZE46vlqyEBFGYc8IN&field=CU_CountryTerritory_CountryTerritory_en&yearSort=false

Moyer, 2011; Merino, Cañadas y Molina, 2013; Mineduc, 2012a). Los países señalados comparten, principalmente, los siguientes aspectos: (a) introducen conceptos algebraicos o elementos de pensamiento algebraico desde Educación Infantil (3-6 años); (b) la consideraciones de nociones algebraicas en los cursos de primaria no implica la introducción de nuevos temas, sino más bien nuevos enfoques a los temas existentes; (c) los patrones son un elemento central del currículo de matemáticas; (d) se potencia el descubrimiento de regularidades a través de diferentes actividades; y (e) la aritmética se maneja en términos generales (Karp, 2014; Kilpatrick, 2011). A continuación, describimos el currículo matemático de dos países: el de Estados Unidos, por ser un pionero en la inclusión de ideas algebraicas en los primeros cursos y España, país en el que se desarrolla esta Tesis Doctoral.

A principios de los 2000, Estados Unidos fue uno de los primeros países en incluir ideas de pensamiento algebraico en sus orientaciones curriculares para primaria (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Diez años después, este país elabora una propuesta curricular nacional conocida como los *Common Core State Standards* (National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers [NGA Center y CCSSO], 2010). Esta propuesta propone al álgebra como un elemento central de las matemáticas escolares, la cual puede entregar la coherencia y profundidad necesarias para aprender matemáticas con comprensión. En lo que respecta al álgebra, el pensamiento algebraico se concibe como un elemento central, comenzando desde los cursos previos a primaria y puede ser una herramienta útil para representar conceptos, resolver problemas, fomentar las argumentaciones matemáticas y construir del conocimiento de los estudiantes, mediante el uso de principios algebraico y el lenguaje.

En el caso de España, durante el año 2014 se publicó un nuevo currículo básico para la Educación Primaria, a través del Real Decreto 126/2014 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014). Este currículo promueve que los estudiantes, en la asignatura de Matemáticas, obtengan modelos, identifiquen y relacionen estructuras, con la finalidad de encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas. Las nociones algebraicas se encuentran en el bloque Proceso, métodos y actitudes en Matemáticas, entre los cuales se destacan los siguientes estándares de aprendizaje evaluables (p. 19.388):

- ♦ Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales.

- ♦ Realiza predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen.

Los elementos anteriores buscan que los estudiantes trabajen con patrones en diferentes tipos de contextos (numéricos, geométricos y funcionales). La incorporación del álgebra en los primeros cursos y, en particular, el énfasis en las situaciones de cambio en contextos funcionales, donde el enfoque funcional al álgebra escolar cobra sentido, no había tenido cabida en los diseños curriculares anteriores. Por tanto, en la actualidad adquiere relevancia aportar resultados que den cuenta de la posibilidad de promover el pensamiento funcional en los estudiantes de los primeros cursos, así como diseñar propuestas que permitan abordarlo en las aulas de Educación Primaria.

Desde los proyectos de investigación en los cuales se inserta esta Tesis Doctoral

Las investigaciones españolas en álgebra, al igual que lo ocurría mundialmente, versaban sobre cómo estudiantes de cursos posteriores a primaria trabajan con diferentes contenidos algebraicos (e.g., Castro, 1995; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Socas, 2007). En el año 2013, María C. Cañadas y Marta Molina consiguieron y lideraron un Proyecto del Plan Nacional de Investigación: Pensamiento funcional en estudiantes de Educación Primaria como aproximación al pensamiento algebraico (EDU2013-41632-P), financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). Este proyecto fue pionero por poner su foco de atención en el pensamiento funcional, como aproximación al pensamiento algebraico, en estudiantes de Educación Primaria en España. Casi simultáneamente a la puesta en marcha de este proyecto, y tal como lo detallamos en la sección anterior, al año siguiente se publicó un nuevo currículo básico para la Educación Primaria, a través del Real Decreto 126/2014 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014). De esta forma, el proyecto de investigación anteriormente citado puede contribuir con nuevas recomendaciones para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, considerando la incorporación de elementos del álgebra en el currículo básico. La situación anterior reafirma el potencial interés del proyecto de investigación adjudicado en 2013.

Tres años más tarde, las mismas investigadoras lograron un segundo proyecto de investigación: Pensamiento funcional en Educación Primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización (EDU2016-75771-P). Este proyecto es continuación del anterior y pretende profundizar en elementos que se hicieron relevantes e interesantes para el pensamiento funcional de los estudiantes de Educación Primaria en el primer proyecto.

En consonancia a los proyectos de investigación citados, dentro de los cuales se gesta esta Tesis Doctoral, esperamos contribuir a la caracterización del pensamiento funcional de estos estudiantes. En particular, nos interesa describir cómo estudiantes de tercero a sexto de Educación Primaria generalizan al trabajar con problemas que involucran funciones.

Continuación de una línea de investigación

La Tesis Doctoral que presentamos se gesta dentro del Grupo de Investigación "FQM-193 Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" del Plan Andaluz de Investigación. En el seno de este grupo, diferentes autores han estudiado la generalización desde diversos enfoques teóricos y metodológicos. Destacamos cuatro tesis que sirven de antecedentes para nuestro estudio y nos ayudan a situar nuestra investigación. La Tesis Doctoral de Encarnación Castro (1995) se titula "Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales". Esta autora describe cómo estudiantes de 13-14 años comprenden la noción de estructura de un número, patrones y relaciones numéricas, sucesiones y términos general, describiendo las diferentes maneras en las cuales se puede concebir la generalización desde los números poligonales. La Tesis Doctoral de Marta Molina (2006) es la primera investigación española que se centra en elementos del pensamiento algebraico en Educación Primaria, específicamente en el pensamiento relacional. La autora describe la importancia de la generalización en el contexto del *early algebra* y la relación que tiene con el pensamiento relacional en su tesis de título "Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Educación Primaria". Por otra parte, la tesis de María C. Cañadas (2007), titulada "Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas", propone un modelo de razonamiento inductivo compuesto por siete pasos, siendo la generalización uno de ellos y el clave para el proceso. Las tesis de Cañadas y Molina fueron dirigidas por la Dra. Encarnación Castro y codirigidas por el Dr. Enrique Castro.

Finalmente, y dentro de los mismos proyectos de investigación en los que se inserta este trabajo, Morales (2018) desarrolla su Tesis Doctoral titulada “Resolución de tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos por estudiantes de 6-7 años”. Desde un enfoque funcional al álgebra escolar, el autor describe los tipos de patrones, generalización, estrategias y relaciones funcionales evidenciadas por los estudiantes, así como las intervenciones de la entrevistadora con un grupo de estudiantes.

Las cuatro tesis doctorales mencionadas anteriormente consideran la generalización; Castro y Cañadas la estudian en cursos posteriores a la Educación Primaria, mientras que Molina y Morales la consideran con estudiantes de primaria y como un elemento central del pensamiento algebraico. Nuestro estudio también considera la generalización como un elemento central del pensamiento algebraico y nos centramos en estudiantes de 8 a 12 años. Específicamente, en esta tesis situamos como componente central la generalización de estos estudiantes al trabajar con problemas que involucran funciones lineales. Abordamos la generalización de los estudiantes considerando diferentes aspectos que nos ayudan a describir características del pensamiento algebraico de los estudiantes de las edades descritas. Del mismo modo, nuestra investigación busca aportar propuestas que promuevan el desarrollo de pensamiento algebraico en estudiantes de estas edades, para que les sea útil abordar el estudio formal del álgebra en cursos de secundaria y para el uso de su competencia matemática en otras áreas.

La perspectiva conceptual que asumimos

Diferentes autores reportan la dificultad de definir qué es el álgebra escolar y, más específicamente, sobre qué trata el pensamiento algebraico (Arcavi, Drijvers y Stacey, 2017; Cañadas, Dooley, Hodgen y Oldenburg, 2012; Kieran, 2004; Lins y Kaput, 2004). Con la incorporación del álgebra en los primeros cursos, lograr un consenso para definir álgebra se ha hecho más difícil. Una de las dificultades radica en aquellos autores que consideran al álgebra ligado exclusivamente al uso de la notación algebraica, lo que es una mirada muy reducida de lo que realmente significa en la escuela (Kaput y Blanton, 2005). Según nuestra postura, y tal como lo señalan algunos autores, entendemos que esta investigación puede denominarse algebraica pues promovemos que los estudiantes atiendan a propiedades y relaciones entre cantidades, examinando su generalidad (Kaput, 2008). Por otra parte, asumimos que el pensamiento algebraico en los primeros cursos debe ir más allá del cálculo aritmético (el cual promueve centrarse en particularidades) para atender a las estructuras de las matemáticas (Cai y Knuth, 2005).

Específicamente, en este trabajo nos basamos en una interpretación de las ideas de Kaput (2008) sobre su perspectiva de álgebra escolar. Consideramos su análisis del álgebra, el cual está compuesto por dos aspectos centrales que están imbricados en varios hilos de contenido matemático. La figura 1-2 muestra la relación entre estos elementos.

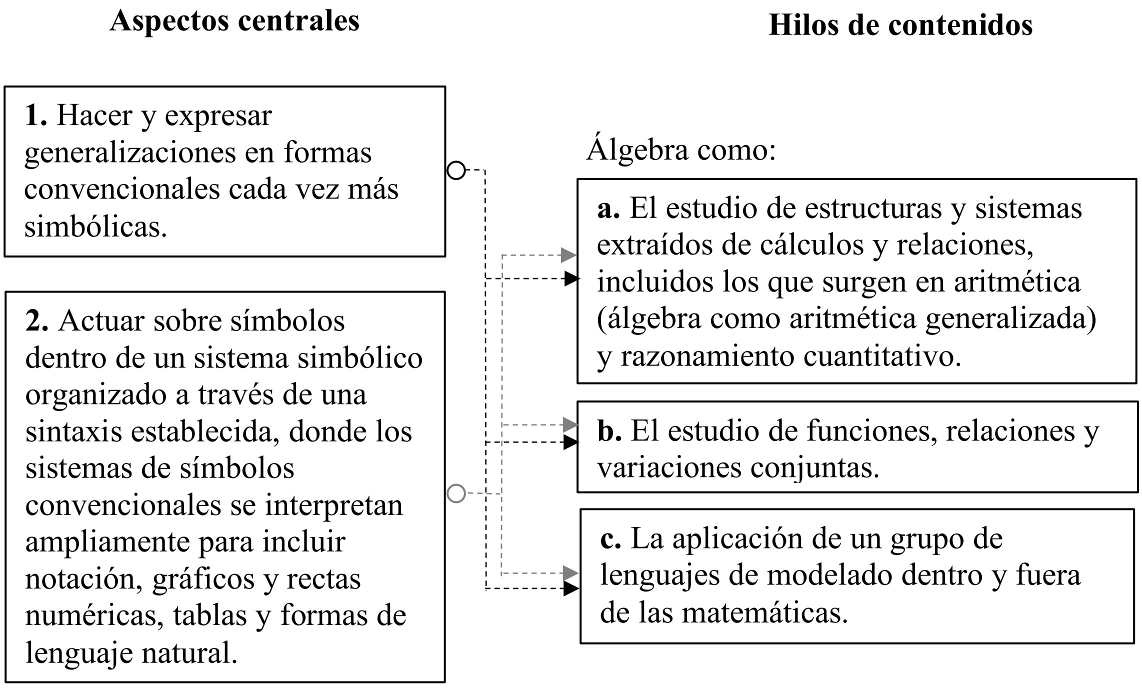


Figura 1-2. Aspectos centrales e hilos de contenidos del pensamiento algebraico (Kaput, 2008)

Desde el aspecto central 1 (ver figura 1-2) se desprenden la generalización y las representaciones. Por otra parte, desde los hilos de contenido b y c surge el enfoque funcional como aproximación al pensamiento algebraico. En el siguiente capítulo detallamos en profundidad los aspectos esenciales de esta perspectiva.

Problema y objetivos de investigación

En las secciones anteriores señalamos que varias iniciativas promueven la idea de incorporar el pensamiento algebraico en los primeros cursos, donde la generalización es el elemento central. Aún así, todavía faltan elementos que ayuden a incorporar el álgebra en Educación Primaria, ya que es un tema relativamente reciente. Nos centramos en la generalización pues es una forma de abordar el trabajo de los estudiantes con ideas algebraicas. La generalización permite enriquecer las matemáticas de los estudiantes, ya que se atiende a las relaciones y estructuras que subyacen en diferentes problemas. Específicamente, adoptamos un enfoque funcional al álgebra escolar para describir la generalización de los estudiantes, en el cual estos deben atender a cómo varían simultáneamente dos o más cantidades. La pregunta que buscamos responder es: ¿cómo generalizan estudiantes de tercero a sexto de primaria cuando responden problemas que involucran funciones lineales?

Estudios previos muestran cómo estudiantes de Educación Primaria generalizan y expresan las relaciones funcionales involucradas en problemas y consideramos que estudiantes españoles de Educación Primaria también podrían hacerlo. Con base en la idea anterior, conjeturamos que los estudiantes que forman parte de este estudio generalizan las relaciones en problemas que involucran funciones lineales, mediante: (a) la identificación de una variedad de relaciones funcionales; (b) el empleo de una o más representaciones; (c) la percepción y organización de regularidades en diferentes caminos; (d) el establecimiento de reglas para las formas directa e inversa de una función lineal; y (e) la identificación de regularidades en diferentes tipos de preguntas, las cuales pueden incluir casos particulares o casos generales.

Nos centramos en el trabajo de estudiantes de tercero a sexto de primaria, ya que estos estudiantes: (a) usan y conocen diferentes tipos de representaciones, las cuales pueden dar cuenta de diversas formas de representar relaciones funcionales; (b) el marco conceptual del álgebra que abordamos se ha construido sobre el trabajo algebraico de estudiantes con estas edades; (c) la literatura sobre pensamiento funcional reporta diversos estudios con estudiantes de estas edades, lo que podría ayudar a establecer comparaciones; y (d) estos estudiantes pueden tener más herramientas para discutir y reflexiones sobre expresiones algebraicas que ellos hacen u otros han producido.

A partir de los elementos anteriormente expuestos, en este estudio diseñamos dos objetivos generales (OGs), que se desglosan en sus respectivos objetivos específicos (OEs).

O.G.1. Describir y caracterizar la generalización de estudiantes de tercero y de quinto de Educación Primaria al resolver un problema que involucra una función lineal.

O.E. 1.1. Describir las relaciones funcionales que evidencian los estudiantes.

O.E.1.2. Identificar y describir las representaciones que usan los estudiantes al expresar la relación entre variables involucradas en un problema.

O.E.1.3. Identificar y describir las estructuras identificadas en las respuestas de los estudiantes para analizar cómo estos organizan las regularidades.

O.E.1.4. Identificar el tipo de preguntas en las cuales los estudiantes generalizan la relación entre variables.

O.E.1.5. Describir cómo los estudiantes trabajan con problemas que involucran las formas directas e inversas de una función lineal.

O.G.2. Describir cómo varían las representaciones usadas por estudiantes de tercero a sexto de primaria al trabajar con diferentes problemas de generalización que involucran funciones lineales.

O.E.2.1. Describir las variaciones de representaciones usadas por los estudiantes al trabajar con diferentes tipos de funciones lineales ($y=a+x$; $y=ax$; $y=ax+b$).

O.E.2.2. Describir las variaciones de representaciones usadas por los estudiantes al trabajar con diferentes tipos de preguntas, las cuales involucran casos particulares y al generalizar.

En el primer objetivo general concebimos la generalización como un producto, pues analizamos las respuestas escritas de los estudiantes al resolver un problema específico. Por otra parte, en el segundo objetivo general abordamos la generalización como proceso, analizando respuestas orales y escritas de los estudiantes al responder a diferentes problemas que involucran funciones lineales.

CAPÍTULO 2
MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo describimos los aspectos conceptuales que se relacionan con nuestra investigación. Abarcamos los elementos más generales hasta llegar a aquellos que están directamente relacionados con los objetivos propuestos. Iniciamos el capítulo presentando el marco del pensamiento algebraico adoptado para describir la posición desde donde consideramos la generalización y su relación estrecha con la representación, así como la idea del pensamiento funcional como una aproximación al pensamiento algebraico. Luego, describimos los principales elementos relacionados al pensamiento funcional, con la intención de clarificar lo que entendemos y asumimos por cada uno de ellos.

Pensamiento algebraico

Sabemos, a partir de lo expuesto en el capítulo anterior, que el rol del pensamiento algebraico en los primeros cursos de Educación Primaria es importante. Sin embargo, no existe tanto consenso sobre qué es el pensamiento algebraico y esas diferencias tienen implicaciones para la enseñanza del álgebra en los primeros cursos (Castro, 2012; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Stephens et al., 2017). En esta Tesis Doctoral asumimos el pensamiento algebraico como un tipo particular de pensamiento matemático, el cual involucra cantidades variables y generales (no específicas), atender a las relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, estudiar cambios, generalizar, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir (Bell, 1995; Kieran, 2006; Radford, 1999). Este tipo de pensamiento puede tomar lugar en ausencia de la notación algebraica (Carraher y Schliemann, 2010) y proporciona a los estudiantes herramientas que les permiten explorar, establecer y construir relaciones matemáticas generales (Lins y Kaput, 2004; Soares, Blanton y Kaput, 2006).

En concreto, el marco conceptual en el que se basa nuestro trabajo se basa en el análisis del álgebra escolar de Kaput (2008). Este autor señala que el pensamiento algebraico debe ser descrito desde dos perspectivas:

- como un *artefacto cultural*, en el cual están involucrados símbolos específicos; y

- desde la *perspectiva de acción*, el cual involucra una actividad humana de cómo los estudiantes aprenden y se desarrollan.

Considerando ambas perspectivas, Kaput indica que "el corazón del pensamiento algebraico está compuesto de un proceso de simbolización complejo que tiene como propósito la generalización y el razonamiento con dichas generalizaciones" (p. 9). Para este autor, el pensamiento algebraico está compuesto por dos aspectos centrales: (a) hacer y expresar generalizaciones en formas convencionales cada vez más simbólicas (el cual resalta el álgebra como un *artefacto cultural*); y (b) actuar sobre símbolos dentro de un sistema simbólico organizado a través de una sintaxis establecida, donde los sistemas de símbolos convencionales se interpretan ampliamente para incluir notación, gráficos y rectas numéricas, tablas y formas de lenguaje natural (el cual resalta la *perspectiva de acción*). Con base en las ideas anteriores, Blanton et al., (2011) también adoptan esta amplia interpretación de los sistemas de símbolos, junto con la idea de incorporar representaciones tan diversas a lo largo del trabajo de los estudiantes (e.g., representaciones pictóricas, manipulativas, numéricas, entre otras), lo cual sería un camino productivo para desarrollar su pensamiento algebraico. En concreto, las autoras citadas interpretan y organizan los aspectos centrales de Kaput (2008) en cuatro prácticas del pensamiento algebraico: (a) *generalización*, (b) *representación*, (c) *justificación* y (d) *razonamiento*, con estructuras matemáticas y relaciones. En la figura 2-1 mostramos cómo se relacionan los elementos anteriormente descritos.

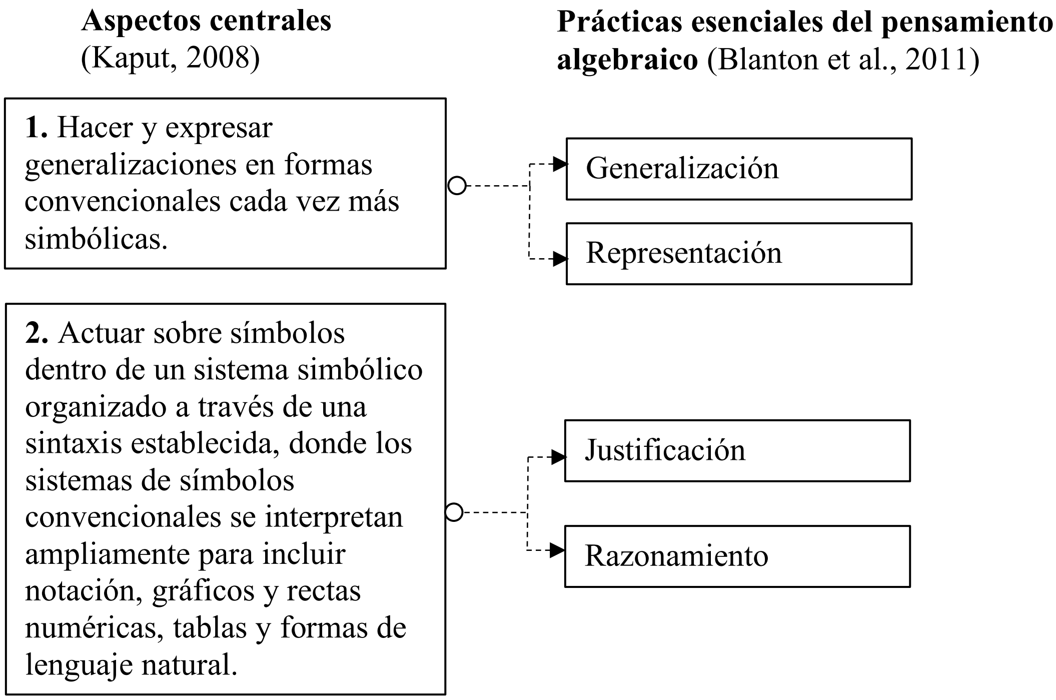


Figura 2-1. Aspectos centrales y prácticas esenciales del pensamiento algebraico

De las cuatro prácticas de pensamiento algebraico descritas en la figura 2-1, y según nuestros objetivos de investigación, en esta Tesis Doctoral nos centramos en las prácticas de generalización y representación, las cuales están estrechamente relacionadas y juntas adquieren gran relevancia dentro del contexto del pensamiento algebraico.

Por otra parte, la investigación en pensamiento algebraico ha madurado alrededor de tres principales áreas o enfoques al álgebra escolar: (a) aritmética generalizada; (b) equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones; y (c) pensamiento funcional (Blanton et al., 2011). Dichas áreas o enfoques son una evolución de los tres hilos de contenidos que define Kaput sobre su forma de entender el álgebra: (a) como el estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones, incluidos los que surgen en aritmética y razonamiento cuantitativo; (b) el estudio de funciones, relaciones y variaciones conjuntas; (c) y la aplicación de un grupo de lenguajes de modelado dentro y fuera de las matemáticas. En la figura 2-2 presentamos cómo se relacionan las ideas anteriores.

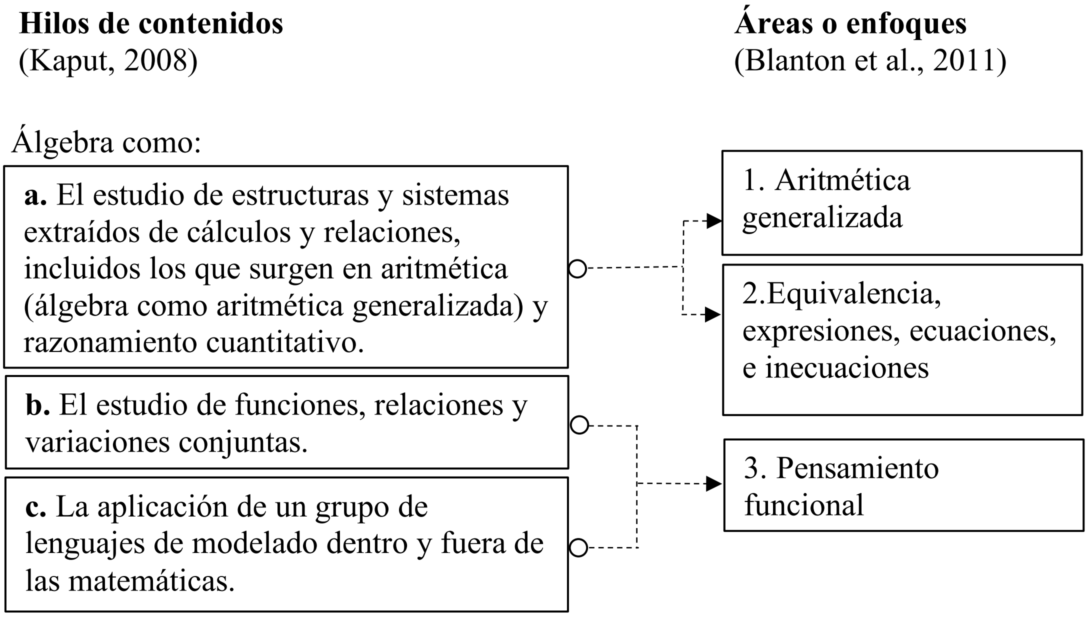


Figura 2-2. Hilos de contenidos y áreas del *early algebra*

En el caso de la aritmética generalizada[8], las operaciones aritméticas son usadas como un contexto para desarrollar pensamiento algebraico, focalizándose en sus propiedades fundamentales. En otras palabras, este enfoque implica generalizar, representar, justificar y razonar con diferentes relaciones y operaciones aritméticas, "incluidas las propiedades fundamentales de las operaciones (por ejemplo, la propiedad conmutativa de la multiplicación), así como otros tipos de relaciones en clases de números (por ejemplo, relaciones en las operaciones con números pares e impares)" (Blanton, Brizuela, et al., 2018, p. 32-33). En el caso de las equivalencias, expresiones, ecuaciones e inecuaciones[9], estas incluyen una comprensión relacional del signo igual, así como la generalización, representación y razonamiento con expresiones, ecuaciones, e inecuaciones, incluyendo formas simbólicas y favorece que los estudiantes vean las expresiones como objetos en vez de ver estas como una serie de cálculos aislados. Finalmente, el pensamiento funcional se

[8] Las investigaciones que tratan la aritmética generalizada han estudiado cómo los estudiantes trabajan con: (a) propiedades de la aritmética (e.g., Carpenter y Franke, 2001); (b) generalización y razonamiento con números de clases especiales (e.g., Bastable y Schifter, 2008); (c) el uso de la notación variable (e.g., Fujii y Stephens, 2008); y (d) justificación y argumentación (e.g., Isler, Stephens, Gardiner, Knuth y Blanton, 2013).

[9] Algunos estudios han estado centrados en: (a) el pensamiento relacional (e.g., Molina, 2006); (b) las concepciones sobre el signo igual y el trabajo con ecuaciones (e.g., Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil y Stephens, 2007); (c) sustitución y equivalencias (e.g., Jones y Pratt, 2012); y (d) preservación de la equivalencia con diferentes modelos físicos y contextos (e.g., Schliemann, Lins, Brito y Siqueira, 2011).

centra en la relación entre cantidades que covarían (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008) y es la aproximación al álgebra escolar que asumimos en este estudio.

A continuación, presentamos los principales conceptos relacionados con nuestra investigación. En la figura 2-3 presentamos la conexión entre los elementos involucrados en este estudio, que son descritos en las siguientes secciones.

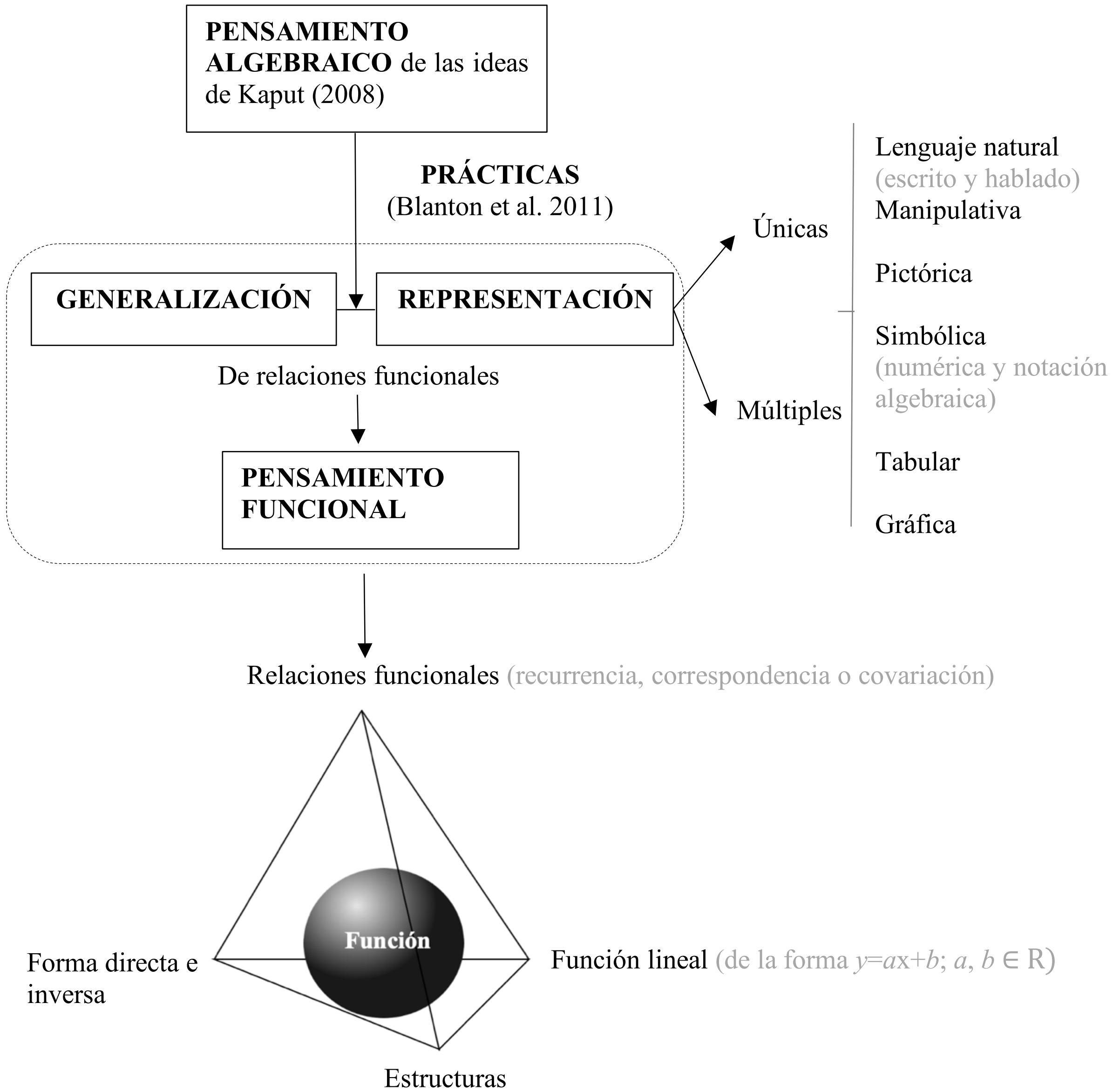


Figura 2-3. Elementos conceptuales de la investigación

Generalización

La generalización puede ser entendida como una actividad mental en la cual se comprimen múltiples instancias dentro de una única forma (Kaput, Blanton y Moreno, 2008). La actividad de generalizar no está restringida a situaciones numéricas; es una actividad mucho más fundamental y de gran alcance, ya que todo aprendizaje humano implica transformar experiencias individuales en principios generales más amplios (Mason, Grahamn, Pimm y Gowar, 1985). Numerosos autores concuerdan en que la generalización es un elemento central del álgebra, considerada como "un medio ideal a través del cual se puede ver y expresar una declaración general" (Mason et al., 1985, p. 1), permitiendo la generación de conocimiento matemático (Pólya, 1957). De manera amplia, Skemp (1986) describe a la generalización como un proceso sofisticado y potente que involucra reflexionar y reconstruir esquemas. Krutetskii (1976, p. 86) indica que, a través del proceso de generalización, "las características y propiedades de los objetos aislados por abstracción se generalizan; es decir, se extienden a todo un conjunto de objetos en una determinada clase. Las abstracciones y la generalización constituyen la esencia de las matemáticas y el pensamiento matemático, por lo tanto, es en gran parte pensamiento abstracto y generalizado". Estas ideas son retomadas de manera similar por Piaget (1985) y Dörfler (1991).

En esta tesis consideramos que generalizar, desde un enfoque funcional al álgebra escolar, implica atender, percibir y expresar cómo una cantidad varía con respecto a la otra *en general* (Blanton, 2008, 2017), identificando un patrón que sea válido para más casos, a partir de la regularidad observada (Pólya, 1966). En conexión con las ideas anteriores, Radford, (1996) señala que, al considerar la generalización desde un punto de vista didáctico, hay que entender que esta depende de los objetos matemáticos que estamos generalizando; la generalización no es una actividad libre de contexto. En el caso del pensamiento funcional, la generalización se da al establecer y analizar las relaciones entre variables (Smith, 2003). Por tanto, el trabajo con problemas que involucran funciones se transforma en un escenario óptimo para que los estudiantes identifiquen patrones y generalizaciones (Warren, 2005), así como analicen el comportamiento de la función mediante diferentes representaciones (Blanton et al., 2011; Cañadas y Molina, 2016). Por ejemplo, el problema de las baldosas involucra una función, relacionando baldosas grises y blancas (ver figura 2-4). Este problema lo presentamos a estudiantes de tercero y quinto de primaria.

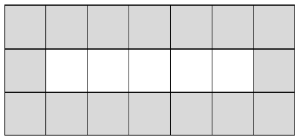


Figura 2-4. Imagen del problema de las baldosas

Los estudiantes de nuestra investigación, respondiendo a diferentes preguntas que buscan determinar la cantidad de baldosas grises dado el número de baldosas blancas, establecieron relaciones generales como: “el número de baldosas blancas se suma dos veces y se le añaden 6” o “fórmula = ($x \times 2$) + 6 = 16; x = número de baldosas blancas”. En ambas respuestas, expresadas mediante diferentes representaciones, los estudiantes aluden a la relación general, filtrando información matemática desde características comunes y concluye en forma de generalización, lo que podría indicar una presencia de flexibilidad en el pensamiento (Carpenter y Levi, 2000; Carraher y Schliemann, 2002, 2015; English y Warren, 1998).

Representación

En esta tesis nos centramos en lo que diferentes autores llaman representaciones externas para distinguirlas de las mentales o internas (e.g., Castro y Castro, 1997; Goldin y Kaput, 1996; Goldin y Shteingold, 2001). Por tanto, cada vez que mencionemos representación o representaciones, nos referiremos a las representaciones externas, realizadas con lápiz, papel o habladas, las cuales son intencionales, permanentes y tienen naturaleza espacial y temporal.

Nuestro interés está en describir cómo estudiantes de tercero a sexto de primaria usan representaciones al generalizar la relación entre cantidades que covarían, así como al trabajar con números específicos. Representar o simbolizar generalizaciones es descrito, en términos de Kaput et al. (2008), como un vehículo sociocultural utilizado para generalizar, permitiendo a los estudiantes desarrollar y completar las ideas que les ayudan a razonar sobre afirmaciones generales y comprimir múltiples instancias en la forma unitaria de una sola afirmación que simboliza la multiplicidad. Por lo tanto, la generalización es el "acto de crear ese objeto simbólico" (p. 20).

Los roles de la generalización y el de la representación son igualmente importantes y están directamente relacionados; los símbolos permiten que las generalizaciones se expresen de forma estable y compacta (Kaput et al., 2008). Morris (2009) indica que la práctica de representar generalizaciones constituye la comprensión de una acción que se aplica a un conjunto infinito de objetos, lo que apoya la comprensión de la naturaleza de una generalización.

En esta tesis asumimos que las representaciones son constructos convencionales que incluyen sistemas de símbolos hablados, símbolos escritos, modelos de figuras e imágenes, modelos manipulativos y situaciones de la vida cotidiana (Goldin, 1998) que pueden ser usadas en la expresión de una idea matemática (Carraher, Schliemann, et al., 2008; Castro y Castro, 1997). Las representaciones forman parte del mundo real y tienen un papel crítico en la determinación de la estructura del pensamiento, ya que también son dan acceso a la construcción y comprensión de un concepto matemático (Kaput, 1991). Estas se caracterizan por ser: (a) perceptibles, manipulables y con determinadas características; (b) objetos representativos que remiten a otra realidad; (c) intencionales, en la medida que su propósito es registrar y transmitir un significado que puede ser interpretado por otros; (d) permanentes; y (e) de naturaleza espacial/temporal (Duval, 2006; Goldin y Shteingold, 2001; Martí, 2005).

Diferentes autores enfatizan que las representaciones —las cuales son accesibles por la observación de cualquier persona con conocimientos adecuados— actúan como estímulos sobre los sentidos, favoreciendo la comprensión de determinados conceptos, así como resolver problemas, explicar, predecir y justificar sus ideas matemáticas (Goldin y Kaput, 1996; Janvier, Girardon y Morand, 1993; Perkins y Unger, 1994). Schoenfeld (1995) indica que el álgebra es el estudio de patrones, relaciones y funciones con el uso de una variedad de representaciones. Estas representaciones se construyen:

- Con el uso de herramientas tecnológicas efectivas.
- A través de la comunicación.
- Al analizar e interpretar información.
- Al formular y resolver problemas.
- Mediante la descripción de patrones en el desarrollo de familia de funciones, entre otros.

Las ideas anteriores nos permiten identificar los múltiples escenarios por los cuales los estudiantes, por ejemplo, identifican, interpretan, analizan y usan representaciones en contextos matemáticos. En concreto, y según la perspectiva de nuestro trabajo, las representaciones permiten describir cómo los estudiantes expresan la relación entre cantidades que varían simultáneamente, tanto para casos particulares como al generalizar. El pensamiento funcional implica, en parte, "el uso de tablas y gráficos; y el razonamiento con fluidez con estas representaciones generalizadas a fin de comprender y predecir el comportamiento funcional" (Brizuela y Blanton, 2014, p. 40). Por tanto, las representaciones se transforman en el medio por el cual los estudiantes pueden organizar y expresar las relaciones encontradas, con la finalidad de comprender, analizar, explicar, predecir y justificar la forma en la cual se relacionan las variables.

Entre los tipos[10] de representaciones usados por estudiantes al trabajar con problemas que involucran funciones se encuentran: (a) lenguaje natural-oral; (b) lenguaje natural-escrito; (c) pictórica; (d) numérica; (e) notación algebraica; (f) tabular; y (g) gráfica (e.g., Carraher, Schliemann y Schwartz, 2008). Tal como lo señalan diferentes autores (e.g., Castro y Castro, 1997), ninguna representación es superior a otra; cada representación resalta un atributo matemático específico. A continuación, describimos las principales características de cada tipo de representación, así como presentamos respuestas de estudiantes de esta tesis que ilustran diferentes tipos de representaciones.

Lenguaje natural

El lenguaje natural, tal como lo señala Molina (2014), se refiere al lenguaje del día a día, el cual involucra términos específicos como los del lenguaje matemático. El lenguaje natural-hablado incluye un sublenguaje especializado, de características orales, y que se relaciona con dominios de las matemáticas, mientras que el lenguaje natural-escrito, involucra la producción escrita de oraciones y frases (Lesh, Behr y Post, 1987).

Para diferentes autores, el rol del lenguaje natural es esencial, ya que es considerado un andamio útil para otros tipos de representaciones más simbólicas (Kaput, 1987; Radford, 2003). El lenguaje natural contribuye a la comprensión conceptual de las funciones y mejora sus capacidades de representar problemas (Bautista, Brizuela y Ko, 2013; MacGregor y Stacey, 1995). Otros autores destacan que el lenguaje natural ayuda a comprender el contexto de un problema, el cual enfatiza la conexión entre las matemáticas y otros dominios de la vida cotidiana (Friedlander y Tabach, 2001).

[10] Diferentes expresiones son usadas para referir al mismo tipo de representación. Por ejemplo, en el caso de la notación algebraica, en la literatura aparecen términos como "simbolismo algebraico" o "lenguaje algebraico" para referirse a lo mismo.

Por ejemplo, uno de los problemas presentados a los estudiantes involucra la edad de dos hermanos: "María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl". En la figura 2-5 presentamos la respuesta de un estudiante a una de las preguntas propuestas.

4. Encontramos una fotografía del cumpleaños de Raúl y lo único que se puede ver son las velas del pastel. ¿Cómo podrías saber la edad de María?

Nos imajinanos que raul tiene 20 Años y maria tiene 5 Años mas Que Raul pues Maria tiene 25.

Figura 2-5. Ejemplo del uso del lenguaje natural-escrito

Manipulativa

En las representaciones manipulativas o concretas —como las regletas Cuisenaire o bloques multibase— los elementos que las conforman "tienen poco significado per se, pero las relaciones y operaciones integradas se ajustan a muchas situaciones cotidianas" (Lesh et al., 1987, p. 33). Baroody (1990) señala que el uso de este tipo de representación no es garantía de una comprensión conceptual de los estudiantes, ni tampoco lleva automáticamente a los estudiantes a generalizar (Cai y Moyer, 2008)

Por ejemplo, y como lo hemos indicado en secciones anteriores, uno de los problemas propuestos fue el problema de las baldosas; se disponen baldosas grises alrededor de baldosas blancas y la relación entre ambas variables está dada por la función $y=2x+6$. En la figura 2-6 presentamos un ejemplo del uso de la representación manipulativa (losetas de papel blancas y grises) por una estudiante.

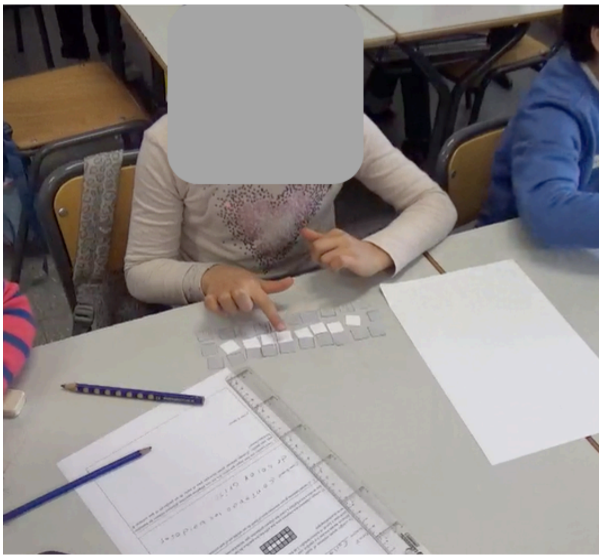


Figura 2-6. Ejemplo del uso de la representación manipulativa

Pictórica

Este tipo de representación tiene características visuales (icónicas, geométricas o diagramáticas), en la cuales hay códigos gráficos que permiten plantear las relaciones entre las cantidades involucradas en una determinada situación (Fernández-García, 1997). En otras palabras, las representaciones pictóricas se corresponden con figuras o modelos gráficos estáticos, que pueden ser internalizados como imágenes (Lesh et al., 1987).

Por ejemplo, uno de los problemas propuestos involucra una configuración puntual (en términos de Castro, 1995) e involucra la función $y=4x+1$. Tras presentar al estudiante los primeros tres casos particulares de la situación, este representa el cuarto caso usando una representación pictórica (figura 2-7).

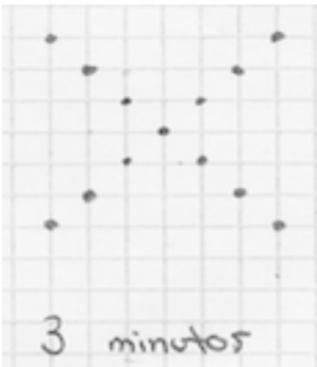


Figura 2-7. Ejemplo del uso de la representación pictórica

Numérica

Para Scheuer, Sinclair, de Rivas y Christinat (2000) las representaciones numéricas se "construyen empleando un conjunto muy reducido de formas (los numerales 1 a 9) y de principios organizadores, ya que los números son entidades profundamente conceptuales y abstractas, reducibles a unas pocas nociones nucleares que al combinarse se extienden" (p. 32). En este tipo de representación, dado su carácter simbólico, convergen símbolos aritméticos (+, -, *x* o :) que pueden representar acciones. Estos tipos de representaciones, en términos de Bednarz y Janvier (1988), representan ideas, en lugar de dimensiones de carácter más observable.

Por ejemplo, otro de los problemas propuestos a los estudiantes involucra un tren, el cual es conducido por una persona y en cada parada suben tres personas. Este problema considera la función *y=3x+1*. Durante el trabajo con casos particulares, un estudiante empleó la representación numérica al explorar la relación entre cantidades (figura 2-8).

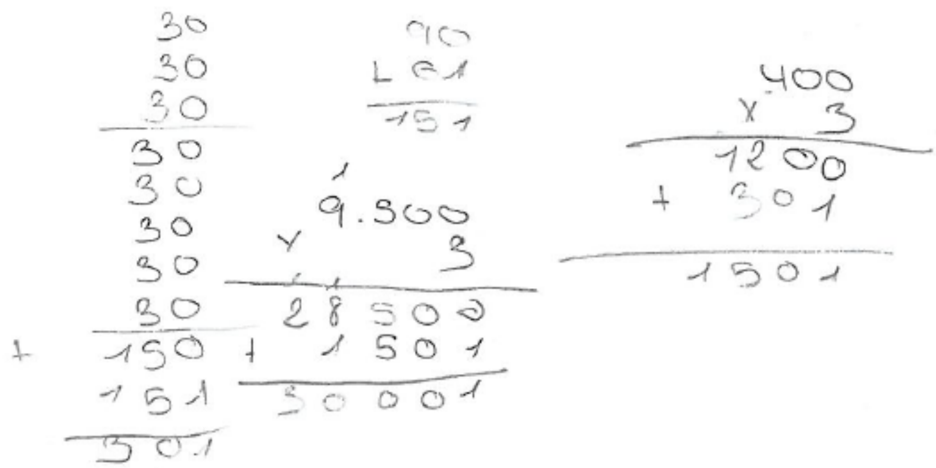


Figura 2-8. Ejemplo del uso de la representación numérica

Notación algebraica

La notación algebraica está compuesta por letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra, caracterizándose por ser una representación que tiene gran precisión (Molina, 2014). Este tipo de representación debe ser utilizado "con competencia, para dar sentido y significación a las letras y aplicar las reglas algebraicas para producir nuevas relaciones que lleven a la solución, es decir, hay que poner en juego la semántica y la sintaxis del lenguaje algebraico" (Fernández-García, 1997, p. 82).

En la figura 2-9 presentamos el uso de este tipo de representación por un estudiante, al responder a una de las preguntas del problema de las baldosas.

5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises hay si ya han colocado las baldosas blancas?

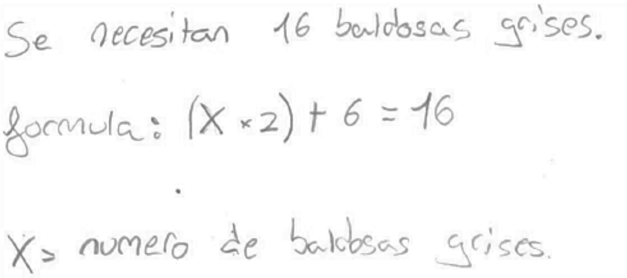


Figura 2-9. Ejemplo del uso de la notación algebraica

Tabular

Considerando las ideas de Martí (2009), las tablas involucran una serie de procesos cognitivos (tales como la segmentación de la información, identificación de variables) que son expresados gráficamente mediante notaciones específicas (filas, columnas, encabezados, entre otros). En una representación tabular, la información es claramente separada para facilitar la identificación de los elementos expuestos. Construir tablas requiere que los estudiantes segmenten y escojan unidades de información, así como los datos serán organizados (categorización, establecimiento de correspondencias) en un determinado diseño espacial.

El siguiente ejemplo, presentado en la figura 2-10, proviene de la respuesta de un estudiante que organiza los casos particulares durante el problema de la configuración puntual.

Minutos	Número punto
0	1
1	5
2	9
3	13
4	17
10	41

Figura 2-10. Ejemplo del uso de la representación tabular

Gráfica

Para Selden y Selden (1992), este tipo de representación es ampliamente utilizado para expresar funciones. Estas "pueden proporcionar una imagen pictórica de acceso inmediato útil para explicar el aumento, la disminución, la concavidad, los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión" (p. 3). La gráfica de una función está formada por un conjunto de puntos del plano a través de ejes cartesianos. Dar la gráfica de una función es una manera de definir la función, dando una visión geométrica de ella, de la cual se puede leer, identificar e interpretar las relaciones, tendencias o patrones en los datos que se presentan, lo que ayuda a la identificación de las reglas funcionales (Azcárate y Deulofeu, 1996).

En la figura 2-11 presentamos un ejemplo de una representación gráfica creada por un estudiante al explorar la relación en el problema de las camisetas: Carlos vende camisetas con el escudo de su colegio. Él gana 3 euros por cada camiseta que vende.

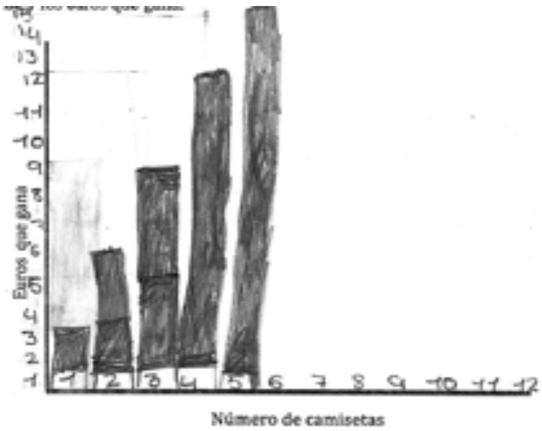


Figura 2-11. Ejemplo del uso de la representación gráfica

Representaciones múltiples

En las secciones previas describimos las características de cada tipo de representación, considerándolas por separadas. Sin embargo, en el contexto del pensamiento funcional la idea de analizar más de una representación al mismo tiempo adquiere relevancia; surge así la necesidad de profundizar en el concepto de representaciones múltiples.

La idea de representaciones múltiples trae consigo diferentes significados y aplicaciones. Un significado común de esta noción tiene relación con el uso de variadas representaciones de un mismo objeto matemático, las cuales pueden mejorar el aprendizaje de los estudiantes en comparación al uso de una única representación (Ainsworth, Bibby y Wood, 2002; Rau y Matthews, 2017). En una aproximación a la idea de representaciones múltiples, Özgün-Koca (1998) las describe como “la materialización de ideas matemáticas externas y conceptos que proporcionan la misma información en más de una forma” (p. 3). Para esta autora, las representaciones múltiples brindan un ambiente que permite a los estudiantes abstraer y establecer una comprensión de conceptos matemáticos, por lo que se hace necesario entender la manera en la que los estudiantes emplean estas representaciones. Entenderemos, de esta forma, que una representación múltiple es emplear conjuntamente dos o más representaciones, de manera simultánea.

Algunos investigadores destacan que las representaciones múltiples deben ser parte esencial del álgebra, pues permite un uso amplio de conocimiento de operaciones, lo que facilitará una comprensión más profunda y más rica de las matemáticas (Yerushalmy y Schwartz, 1993). Particularmente, nuestro interés está centrado en la relación que se puede establecer al coincidir, de manera simultánea, dos o más representaciones cuando los estudiantes resuelven problemas que involucran una función lineal.

En el contexto del pensamiento funcional, las representaciones múltiples: (a) permiten la conexión entre dos o más representaciones, las cuales se convierten en una herramienta para analizar una representación en particular, (b) permiten externalizar y visualizar diferentes y aspectos complementarios de la misma idea en caminos de significados, (c) brindan un ambiente que permite a los estudiantes abstraer y establecer una comprensión de conceptos matemáticos, por lo que se hace necesario entender la manera en la que los estudiantes emplean estas representaciones y las conexiones que realizan entre dichas representaciones, y (d) son un tópico que ha sido escasamente trabajado en los cursos elementales (e.g. Bautista et al., 2013; Brizuela, 2005; Confrey y Smith, 1994).

Por ejemplo, una de las estudiantes que responde al problema de las configuraciones puntuales usa simultáneamente dos representaciones: el lenguaje natural-escrito y la notación algebraica. La figura 2-12 presenta la respuesta de la estudiante.

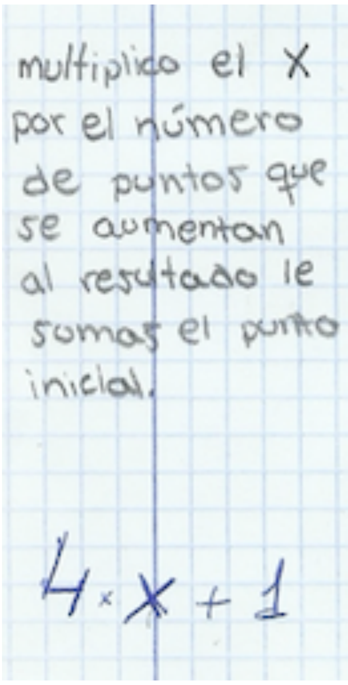


Figura 2-12. Ejemplo de representación múltiple

Pensamiento funcional

En el marco del pensamiento funcional, la generalización de relaciones funcionales, así como la representación de estas relaciones se consideran elementos claves. Blanton y Kaput (2011) señalan que el pensamiento funcional involucra la "construcción y generalización de patrones y relaciones, usando una diversidad de representaciones y tratando las relaciones generalizadas, o funciones, como el resultado de objetos matemáticos útiles" (p. 6-7). Complementando esta idea, Smith (2008) indica que el pensamiento funcional está "focalizado en la relación entre dos (o más) variables; específicamente los tipos de pensamientos que van desde relaciones específicas a generalizaciones de relaciones" (p. 143). Por tanto, asumimos este tipo de pensamiento como aquel que involucra la generalización de relaciones que covarían, las cuales pueden ser generalizadas o no, y son expresadas mediante diferentes representaciones. Cañadas y Molina (2016) indican que, dentro de los elementos claves del pensamiento funcional están "las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas" (p. 212).

Tal como lo señalan Carraher y Schliemann, (2015), el pensamiento funcional permite integrar el álgebra en el currículo matemático pues:

- ♦ Las operaciones aritméticas son un ejemplo de funciones,
- ♦ Las funciones ponen de manifiesto el dominio y codominio, lo que permite ampliar ámbitos numéricos, y
- ♦ Admiten múltiples representaciones.

Si bien la función no es un contenido matemático que se encuentra en los currículos de los primeros cursos, diferentes autores (e.g., Cañadas y Molina, 2016; Carraher y Schliemann, 2007) resaltan que este concepto es un contexto para este tipo de pensamiento. Por ejemplo, la multiplicación por tres puede verse como un subconjunto de la función $3n$. En lo que sigue, describimos el concepto que función que asumimos en este estudio, así como otros elementos asociados al pensamiento funcional.

Función y función lineal

El concepto de función ha evolucionado a través del tiempo y ha sido abordado por diferentes autores (e.g., Dubinsky y Harel, 1992; Even, 1989; Romberg, Fennema y Carpenter, 1993). En esta tesis no buscamos ser exhaustivos con una caracterización de este concepto; pretendemos informar qué entendemos por una función y cómo hemos abordado este concepto en los estudios que hemos realizado. La importancia de la función radica en que este concepto es el elemento matemático central del pensamiento funcional (Carraher y Schliemann, 2007), el cual permite: (a) tratar a las operaciones básicas como funciones, debido a las relaciones entre cantidades que pueden producirse; (b) mitigar las dificultades que los estudiantes pueden tener al trabajar con el concepto de función durante la Educación Secundaria; (d) fomentar la capacidad de generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas; y (d) ser una herramienta útil en la resolución de problemas (Carraher y Schliemann, 2007; Morales et al., 2018).

Asumimos el concepto de función como "una correspondencia entre dos conjuntos no vacíos que asigna cada elemento en el primer conjunto (el dominio) a exactamente un elemento en el segundo conjunto (codominio)" (Vinner y Dreyfus, 1989, p. 357). La idea anterior es conocida como la definición de Dirichlet-Bourbaki, en la cual una correspondencia entre dos conjuntos asigna a cada elemento del primer conjunto exactamente un elemento del segundo conjunto. En nuestro estudio, el trabajo con funciones se centra en las relaciones entre cantidades que covarían y es presentada a través de problemas. Uno de los problemas es el de las baldosas, el cual involucra la relación entre baldosas blancas (*b*) y baldosas grises (*g*) (ver figura 2-4). La función que relaciona estas variables es $g=2b+6$, con números naturales en el dominio y en el codominio. En este caso, una posible forma de organizar los valores de las variables es a través de una tabla, tal como presentamos en la figura 2-13.

b	**g**
1	8
2	10
3	12
4	14
5	16
6	18

Figura 2-13. Una tabla de función para representar el problema de las baldosas

Tal como indican Blanton et al. (2011), los datos en esta tabla representan un tipo especial de relación que describimos como una función. Cada elemento de un conjunto (*b* en este caso) se encuentra relacionado de forma única con un solo elemento del segundo conjunto (*g* en este caso). En la situación anterior, cada elemento del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, …} es llamado el *dominio* de una función, el cual está emparejado con un único elemento del segundo conjunto {8, 10, 12, 14, 16, 18, …}, llamado *codominio*. Resumiendo, como describe Azcárate y Deulofeu (1996, p. 24), una función está formada por: (a) un dominio; (b) un codominio o conjunto de llegada; y (c) una regla tal que a cada elemento del dominio le hace corresponder un elemento único del conjunto de llegada.

Existen diferentes tipos de funciones, entre las que se encuentran: (a) funciones de potencia; (b) funciones polinómicas; (c) funciones racionales; (d) funciones algebraicas; (e) funciones trigonométricas; (f) funciones exponenciales; (g) funciones logarítmicas; y (h) funciones transcendentes. Dentro de las funciones polinómicas encontramos las funciones lineales. Este tipo de funciones son el foco de nuestra investigación, por ser aquellas que se consideran adecuadas a la edad de los estudiantes con los cuales trabajamos y permiten abordar el concepto de función como una variación de cambio en contextos cercanos a los estudiantes (Carraher y Schliemann, 2015). Una función lineal es una regla que establece una relación entre dos variables, con el énfasis en cómo los cambios de una están relacionados con los cambios en la otra (Thompson, 1994). En esta memoria nos centramos en las funciones lineales del tipo $y=ax+b$, de la cual surgen los tipos $y=a+x$ y $y=ax$, $\forall\ a, x, b \in \mathbb{N}$. En la figura 2-14 presentamos algunos ejemplos de los problemas que analizamos en este estudio, donde cada uno involucra una función lineal diferente.

(a) $y=a+x$
El problema de las edades ($y=x+5$)
María y Raúl son dos hermanos que viven en La Zubia. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.
(b) $y=ax$
El problema de las camisetas ($y=3x$)
Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Gana 3 euros con cada camiseta que vende.
(c) $y=ax+b$
El problema del tren ($y=3x+1$)
Elsa quiere llevar a todos los amigos que tiene en el mundo a Arendelle para que estén con ella cuando sea nombrada reina. Para eso ha decidido conducir un tren que salga desde Granada y que pare en todos los pueblos en los que Elsa tiene amigos. El tren es conducido por Elsa. En cada pueblo que para el tren, ella recoge a 3 amigos.

Figura 2-14. Ejemplo de problemas que involucran diferentes tipos de funciones lineales

El trabajo con las funciones, a través de problemas, favorece que los estudiantes: (a) establezcan y comprendan relaciones en fenómenos de la vida cotidiana; (b) traten a las operaciones básicas como funciones, debido a las relaciones entre cantidades que pueden producirse; (c) mitiguen sus dificultades al trabajar con el concepto de función durante la Educación Secundaria; (d) fomenten su capacidad de generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas; y (e) resuelvan problemas (Carraher y Schliemann, 2007; Even, 1989; Freudenthal, 1983).

Relaciones funcionales

Una de las características de la función es que a cada elemento del dominio le hace corresponder un elemento único del conjunto de llegada (Confrey y Smith, 1991; Thompson, 1994; Vinner y Dreyfus, 1989). Esta regla, también conocida como relación funcional, "se refiere a un patrón que involucra dos variables en la cual el valor de una variable puede ser calculado mediante la aplicación de una regla funcional para el valor de la otra variable" (Brenner et al., 1997, p. 668). Las relaciones funcionales, a partir de las ideas anteriores, están relacionadas y organizadas por la forma en que se consideran las relaciones entre cantidades. En la literatura relacionada con el trabajo de los estudiantes al resolver problemas que involucran funciones lineales, se identifican tres tipos de enfoques o relaciones:

- *Patrones recursivos o recurrencia*. Este tipo de relación involucra encontrar la variación o el patrón dentro de una secuencia de valores (Smith, 2008), por lo que describe la variación de valores dentro de una única variable.
- *Correspondencia o correlación*. Involucra el desarrollo de una "regla de forma cerrada" para describir una relación entre cantidades (Confrey y Smith, 1994). En este tipo de relación se construye una regla para determinar el valor único de cualquier valor dado (x), creando así una correspondencia entre x e y (Ayalon et al., 2015).
- *Covariación*. Thompson y Carlson (2017) señalan que esta corresponde al razonamiento entre dos o más cantidades, variando simultáneamente. Más concretamente, Confrey y Smith (1994) indican que este tipo de relación involucra "moverse operacionalmente desde y_m a y_{m+1} coordinando con el movimiento de x_m a x_{m+1}. Para las tablas, implica la coordinación de la variación en dos o más columnas a medida que una se mueve hacia abajo (o hacia arriba) de la tabla" (p. 137).

Por ejemplo, en la figura 2-15 mostramos un ejemplo de las tres relaciones funcionales.

x	y
1	8
2	10
3	12
…	…

a. Patrones recursivos. El valor de la variable independiente aumenta de 2 en 2.

b. Correspondencia. La relación entre x e y puede ser descrita verbalmente como "si el valor de x es 1, el valor de y es el doble de x más seis".

c. Covariación. Cuando el valor de x aumenta en 1, el valor de y aumenta en 2.

Figura 2-15. Ejemplo de relaciones funcionales

En esta investigación, y siguiendo las ideas de Ayalon, Watson y Lerman (2015), consideramos las relaciones que involucran las dos variables: correspondencia y covariación. En síntesis, las funciones y las relaciones funcionales permiten clasificar, predecir y caracterizar varios tipos de relaciones atendiendo a la forma en que una cantidad varía con respecto a la otra (Cooney, Beckman, Lloyd, Wilson y Zbiek, 2010), siendo estos conceptos compatibles con el desarrollo temprano de la noción de variable (Blanton et al., 2011).

Formas directa e inversa de una función lineal

En el capítulo anterior describíamos que la literatura reporta, principalmente, el trabajo de estudiantes al trabajar con problemas que involucran funciones mediante la forma directa (dado el valor de la variable independiente, calcular el valor de la dependiente). Selden y Selden (1992) señalan que la idea de variable dependiente es ocasionalmente usada para expresar el concepto de función, lo que se da frecuentemente en el contexto de números y normalmente se refiere a una fórmula o expresión que involucra la variable independiente. En el contexto del pensamiento funcional, la variable dependiente e independiente se puede elegir arbitrariamente porque esta relación dependiente se deriva de cómo presentamos la tarea (Blanton et al., 2011) y los requerimientos a estas. Por lo tanto, las formas directa e inversa de una función están relacionadas con los roles desempeñados por cada variable involucrada. La variable independiente en la forma directa de la función es la variable dependiente en la forma inversa, y viceversa. Por ejemplo, uno de los problemas trabajados con los estudiantes es el problema del tren, el cual relaciona el número de parada y el número de pasajeros. La función que involucra esta relación es la función $y=3x+1$. Este este problema hay dos variables involucradas: número de paradas (x) y número de pasajeros (y). Si queremos saber el número de pasajeros que va en el tren luego de x paradas, y se expresa en términos de x. En este caso, x es la variable independiente e y la dependiente. Suponemos que esta es la forma directa de la función. En consecuencia, si estamos interesados en saber el número parada en el cual está el tren dado un número de personas, x se expresa en términos de y; consideramos que esta es la forma inversa de la función. Por lo tanto, la elección de las formas directas o inversas de una función es algo arbitraria. Por ejemplo, en la figura 2-16 ilustramos cuál es el foco en preguntas que involucran la forma directa y la forma inversa de la función involucrada en el problema del tren.

(a)

Número de parada *(x)*	Pasajeros *(y)*
1 →	
2 →	
3 →	
4 →	

(b)

Número de parada *(x)*	Pasajeros *(y)*
	← 4
	← 7
	← 10
	← 13

Figura 2-16. Ejemplo de formas directa e inversa de una función lineal

En el caso de la forma directa de la función (“a” en la figura 2-16), los estudiantes debieran calcular cuál es la cantidad de pasajeros que van en el tren y la función involucrada es $y=3x+1$. Por otra parte, en el caso de la forma inversa (“b” en la figura 2-16) los estudiantes debieran determinar el número de parada dado un número determinado de pasajeros y la función involucrada es $y=(x-1):3$. La elección de la forma directa e inversa de la función depende de tipo de relación que se presente primero a los estudiantes (por ejemplo, determinar el número de pasajeros dado un determinado número de paradas), ya que la forma inversa será la relación “inversa” de la dada inicialmente (en este caso, determinar el número de paradas dado un determinado número de pasajeros). En síntesis, y según las ideas de

Azcárate y Deulofeu (1996), la forma inversa de una función se caracteriza por invertir el orden de las variables.

Estructuras

La noción de estructura, tal como señalan algunos autores (e.g., Hoch y Dreyfus, 2004; Kieran, 2018), pareciera ser ampliamente conocido por todos, como si se existiese un acuerdo universal sobre su significado. La estructura está asociada a diferentes conceptos, tales como: (a) estructura matemática; (b) estructura aritmética y algebraica; (c) estructura interna y externa; (d) sentido estructural, entre otros (Castro, Rico y Romero, 1997; Kieran, 1989; Kirshner, 2001). Por ejemplo, la idea de sentido estructural está asociada a la capacidad de identificar todas las formas equivalentes de una expresión (Kieran, 1989). Sin embargo, pareciera existir un común acuerdo entre los investigadores que el concepto de estructura está relacionado con el aprendizaje significativo de las matemáticas. Por ejemplo, algunos autores destacan que la consideración de este concepto permite “comprender las interrelaciones entre los conceptos y las operaciones como las reglas por las que se pueden manipular y reorganizar para descubrir nuevos patrones y propiedades” (Resnick y Ford, 1990, p. 132). Por tanto, un primer elemento característico de la idea de estructura está relacionado con que esta permite centrarse en las relaciones entre los elementos que las componen, más que en solo encontrar una única respuesta.

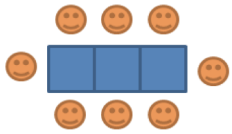
En el contexto del álgebra en general, y del pensamiento funcional en particular, la idea de estructura también tiene diferentes significados (Kieran, 2018; Molina y Cañadas, 2018). En una primera aproximación a lo que entendemos por estructura, en la figura 2-17 recogemos las definiciones de diferentes autores.

- "Sistema compuesto por un conjunto de números/variables, alguna(s) operación(es), y las propiedades de dichas operaciones (…) es la organización de partes de un todo; la totalidad de los elementos de una entidad en su relación con otros" (Kieran, 1989, p. 33-34).
- "Conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modo de componerlos y de unas relaciones mediante las que se comparan dichos objetos" (Castro, Rico y Romero, 1997, p. 362).
- "En matemáticas se puede ver como una visión amplia del análisis de la forma en que una entidad se compone de sus partes. Este análisis describe los sistemas de conexiones o relaciones entre las partes que lo componen" (Hoch y Dreyfus, 2004, p. 50).
- "Identificación de propiedades generales que se instancian en situaciones particulares como relaciones entre elementos" (Mason, Stephens y Watson, 2009, p. 10).
- "Términos que componen la expresión, a los signos que los relacionan, al orden de los diferentes elementos y las relaciones que existen entre ellos" (Molina, 2010, p. 9).
- "Una forma de ver un objeto o expresión de manera que se vea como una combinación de partes reconocibles junto con patrones reconocibles que conectan esas partes entre sí" (Hewitt, 2019, p. 2).

Figura 2-17. Diferentes definiciones del concepto de estructura

Las definiciones de estructura anteriores comparten ciertos aspectos, tales como: (a) una expresión matemática; (b) una entidad compuesta por elementos; (c) la relación entre los elementos que la componen (signos y operaciones que las relacionan); y (d) el orden de los elementos que componen dicha expresión. En concreto, y en base a las ideas anteriores, en nuestro trabajo estamos interesados en identificar y analizar las estructuras subyacentes en las respuestas de los estudiantes para describir cómo estos organizan las regularidades en problemas que involucran funciones lineales. Por ejemplo, para ilustrar cómo asumimos la idea de estructura en este trabajo consideremos el problema de la figura 2-18, tomado de Merino et al. (2013).

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegadas a otras debe haber un niño sentado.

Figura 2-18. Problema de las mesas y los comensales (p. 28)

Para expresar el número de personas (p) que pueden sentarse en varias mesas (t), los estudiantes pueden describir la relación general entre las variables como: (a) el número de personas es dos veces más 2 el número de mesas, (b) $p=2t+2$, o (c) $p=\square+\square+2$ ($\square$ = mesa). Estas expresiones, a través de diferentes representaciones, describen la estructura subyacente de las situaciones: (a) y (b) involucran las mismas operaciones aritméticas (multiplicación y suma) mientras que (c) solo usa la suma. Las tres expresiones representan la misma regularidad, por lo tanto, se consideran equivalentes (English y Warren, 1998). En conclusión, asumimos la idea de estructura como los elementos que forman la regularidad, los cálculos que conectan dichos elementos, el orden de los elementos y las conexiones entre ellos.

Eder Pinto M.

CAPÍTULO 3
REVISIÓN DE LA LITERATURA

> [Los estudiantes de primaria] pueden observar que sobre el tiempo y a través de diferentes circunstancias, las cantidades numéricas pueden variar en formas de principios (…) Ellos pueden aprender sobre funciones estudiando cómo el cambio en una variable es reflejado en el comportamiento de la otra (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001, p. 280).

La idea de Kilpatrick, Swafford y Findell, al día de hoy, parece no sorprendernos. Son variados los reportes de investigación que dan cuenta que los estudiantes de escolaridad primaria, e incluso de Educación Infantil[11], generalizan y relacionan las variables involucradas en problemas que incluyen diferentes tipos de funciones. En este capítulo ofrecemos una revisión de la literatura que aborda la perspectiva del estudiante considerando, principalmente, trabajos relacionados con las edades de los estudiantes comprendidos en esta investigación (8-12 años). Abordamos este capítulo desde aquellos estudios que tienen un carácter más general hasta llegar a describir aquellos antecedentes que se relacionan directamente con nuestros objetivos de investigación.

El capítulo lo organizamos en cuatro secciones. En primer lugar, presentamos una reseña general sobre las investigaciones que han tratado la generalización en el contexto del álgebra escolar. En segundo lugar, y con la incorporación de la generalización en las investigaciones de álgebra en los primeros cursos, destacamos el cambio de paradigma sobre las investigaciones en el área, resaltando la importancia del pensamiento algebraico y las diferentes maneras de entender el álgebra. En tercer lugar, y concibiendo al álgebra desde una faceta multidimensional, describimos cómo surge la propuesta curricular *early algebra*, la cual adquiere relevancia en las investigaciones que se han desarrollado sobre álgebra en la escuela y es el contexto general en el cual se sitúa este estudio. Finalmente, y desde el enfoque al pensamiento algebraico que asumimos en este trabajo, describimos los principales estudios realizados y que se encuentran estrechamente relacionados con nuestros objetivos de investigación: (a) funciones lineales y relaciones funcionales; (b) representaciones; (c)

[11] Por ejemplo, Castro et al. (2017) describen las relaciones funcionales y representaciones manifestadas por niños de 5-6 años al trabajar con situaciones cercanas, las cuales incluyen diferentes tipos de funciones ($y=x$, $y=2x$, y $y=x+1$).

formas directa e inversa de una función lineal; (d) estructuras; y (e) problemas contextualizados y tipos de preguntas.

Generalización

Gran parte de la literatura concibe la generalización como un aspecto central del álgebra (e.g., Cooper y Warren, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2007; Mason, 1996; Radford, 2006). Considerando la idea anterior, la generalización ha adquirido mayor atención dado que diferentes iniciativas proponen que esta tiene un importante rol en las matemáticas de primaria (Cai, Fong y Moyer, 2011). A medida que la Didáctica de la Matemática avanza en su esfuerzo por resaltar el rol de la generalización en los primeros cursos, se hace necesario refinar las nociones que la comunidad tiene sobre lo que realmente significa generalizar (Strachota, 2016).

En los últimos 20 años la literatura reporta dos principales tendencias sobre qué es la generalización. Una primera tendencia es aquella que la concibe como una acción cognitiva individual (e.g., Dienes, 1961; Dubinsky, 1991). La segunda tendencia concibe a la generalización como una acción situada, distribuida a través de múltiples herramientas, recursos y personas (e.g., Carraher et al., 2008; Radford, 2003). Consideramos que ambas perspectivas son importantes, ya que se centran en dos aspectos (el estudiante y las condiciones en las cuales se gesta la generalización) cruciales que intervienen en los procesos de generalización de los estudiantes.

Por otra parte, Ellis (2007) describe tres caminos por los cuales la generalización es descrita en el ámbito de la Didáctica de la Matemática: (a) como el desarrollo de una regla que sirve como una declaración sobre relaciones o propiedades (e.g., Carpenter y Franke, 2001; English y Warren, 1998); (b) la extensión o ampliación del rango de razonamiento más allá del caso o casos considerados (e.g., Dubinsky, 1991; Harel y Tall, 1991); y (c) la identificación de puntos comunes entre los casos involucrados (e.g., Dreyfus, 1991; Kaput, 1999). Ellis señala que la generalización debe ser considerada no solo como un producto (la producción de una regla general), sino que también como un proceso (los elementos que intervienen en la producción de esa regla general. Asumir la generalización como proceso supone referirse a cualquiera de los tres elementos anteriores, mientras que la generalización como producto se refiere al resultado de los tres elementos descritos.

En el contexto de la Educación Primaria, y considerando algunas de las ideas de Strachota (2016), la investigación sobre generalización se ha dirigido hacia cuatro principales líneas: (a) en la instrucción, específicamente en aquella que fomenta la generalización y los procesos en los cuales los estudiantes se apoyan (e.g., Blanton y Kaput, 2005; Ellis, 2007); (b) en los diferentes elementos considerados para caracterizar la generalización de los estudiantes, lo que tiene relación con una descripción para fomentar el desarrollo o refinar la generalización, así como definir formas de generalización (e.g., Rivera, 2013); (c) para comprender factores que construyen generalizaciones, las cuales están relacionados con el rol de los elementos icónicos, gestos y elementos semióticos, así como los diferentes tipos de representaciones (e.g., Carraher y Schliemann, 2007; Radford, 2003); y (d) en la relación intrínseca entre generalización y justificación, ya que ambos elementos son centrales para el aprendizaje matemático (e.g., English y Warren, 1998; Lannin, 2005; Stacey, 1989).

En conexión con las ideas anteriores, los diferentes trabajos de John Mason (e.g., Mason, 1996, 2008; Mason et al., 1985) enfatizan que el álgebra aprendido en la escuela es un lenguaje para la expresión y manipulación de la generalización, por lo que una exitosa enseñanza del álgebra requiere la atención, evocación y expresión del pensamiento algebraico, tipo de pensamiento que comienza a emerger en la literatura sobre álgebra escolar en los primeros cursos.

Pensamiento algebraico en los primeros cursos

Hasta principios de los años 90, la literatura que trató el álgebra en la escuela estuvo centrada en las dificultades que suponían diferentes contenidos algebraicos para los estudiantes durante la Educación Secundaria[12], nivel educativo en el que tradicionalmente se introducían. Gran parte de estas dificultades —que siguen siendo foco de interés en la actualidad (e.g., Molina, Rodríguez-Domingo, Cañadas y Castro, 2017)— son achacadas al enfoque "aritmética luego álgebra" (*arithmetic-then-algebra*), el cual fue adaptado por diversos países, situando al álgebra después del trabajo con aritmética. Este enfoque implicó una introducción tardía y abrupta al álgebra, ya que el enfoque aritmético previo estuvo basado en

[12] Entre los principales temas de investigación abordados se encuentran: (a) la comprensión del signo igual; (b) las propiedades de los números; (c) el uso del lenguaje simbólico; (d) el trabajo con ecuaciones; (e) la clausura para expresiones algebraicas; y (d) el trabajo con funciones (Castro, 2012; Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2011; Stacey y MacGregor, 1997).

cálculos, a lo que se añadió un carácter aislado y superficial del álgebra (Kaput, 2008). Junto a la idea anterior, diferentes autores promovieron la idea de incluir el álgebra para todos y desde los primeros cursos de primaria. Por ejemplo, Moses y Cobb (2001) y Schoenfeld (1995) señalan que las experiencias de los estudiantes con el álgebra pueden definir su éxito académico y económico y, por tanto, todos debieran tener la oportunidad de trabajar elementos algebraicos. En conclusión, diversos investigadores llegaron a la conclusión de reformular y "re-pensar" cómo se podía introducir el álgebra en los primeros cursos, de forma que fuera beneficiosa para los estudiantes.

De la nueva forma de ver el álgebra —que repercute en el diseño de propuestas curriculares (e.g., NCTM, 2000), así como en las investigaciones que trataron las dificultades de los estudiantes de 12-15 años al trabajar con elementos algebraicos— emerge la idea de pensamiento algebraico, como un tipo de pensamiento que "podría ser accesible para los estudiantes más jóvenes y, por lo tanto, ayudar a hacer la transición final al estudio más formal del álgebra" (Kieran, Pang, Schifter y Fong, 2016, p. 4). Es así como diferentes congresos científicos y grupos de trabajos comienzan a incluir ideas alusivas al pensamiento algebraico es sus agendas de investigación. En la tabla 3-1 hemos recopilado y seleccionado, a partir de algunas fuentes de información (Kieran et al., 2016; Kipatrick y Izsák, 2008; Stephens et al., 2017), las primeras instancias en las cuales emergió la idea de pensamiento algebraico con estudiantes de primaria.

Tabla 3-1. *Primeras conferencias y grupos de trabajos que tratan la idea de pensamiento algebraico*

Año	Lugar	Nombre de la conferencia/grupo de investigación
1992	Quebec, Canadá	The 7th International Congress on Mathematical Education.
1993	Washington, DC, Estados Unidos	The U.S. Department of Education Algebra Initiative Colloquium.
1997	Zamora, España	Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
1998	Washington, DC, Estados Unidos	The Nature and Role of Algebra in the K–14 Curriculum Conference.
1999	Osnabrück, Alemania	The First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME).
2001	Melbourne, Australia	The 12th International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra.

Por ejemplo, en el contexto del ICMI celebrado en Melbourne, Australia, se enfatizó y promovió que la generalización es clave en el pensamiento algebraico y se describió que, a la fecha de esa conferencia, las investigaciones estaban centradas en: (a) generalización y patrones; (b) generalización de relaciones con propiedades de operaciones y estructura numérica; (c) representación de relaciones entre cantidades; e (d) introducción de la notación simbólica (Kieran et al., 2016).

La presencia del pensamiento algebraico también comienza a observarse en los *Handbooks of the Research on Mathematics Teaching and Learning*. Tal como lo resumen Cai y Knuth (2011), en el primer *Handbook* de 1992 el énfasis estuvo puesto exclusivamente en el álgebra en la Educación Secundaria. En el segundo documento, el de 2007, el foco también estuvo puesto en secundaria, pero se incluyó un capítulo que considera el aprendizaje del algebra en los primeros cursos: *Early algebra and algebraic reasoning* (Carraher y Schliemann, 2007). El capítulo anteriormente citado fue el único con foco en el álgebra en los primeros cursos en las pasadas dos décadas. En conclusión, la incorporación de elementos algebraico en los primeros cursos de la Educación Primaria modifica lo que se había entendido por álgebra, aceptando que el álgebra engloba diferentes aspectos. De esta forma, surge un movimiento centrado en la incorporación del álgebra escolar en los primeros cursos, el cual también asume el álgebra desde una faceta multidimensional: la propuesta curricular *early algebra*.

Early algebra

Desde una faceta multidimensional al álgebra (donde el enfoque funcional es una de las facetas) emerge la propuesta curricular *early algebra*, la cual busca “algebrizar” las matemáticas tradicionales presentadas en el currículo de los niveles iniciales, promoviendo el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes (Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2000). Esta propuesta favorece que los estudiantes estructuren su conocimiento matemático desde el inicio de su educación, así como “promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas” (Molina, 2009, p. 136). En este contexto, el *early algebra* ofrece múltiples puntos de entrada para trabajar aspectos asociados al pensamiento algebraico, donde las actividades algebraicas deben centrarse en la búsqueda de puntos en común y en la formación de conceptos generales seguidos por expresiones generalizadas sobre las propiedades de números o cantidades (Blanton et al., 2011; Brizuela, Schliemann y Carraher, 2004; Radford, 2006). Esta propuesta se construye sobre tres elementos que se relacionan con los contenidos tratados en el currículo matemático. A partir de las ideas de Carraher y colaboradores (2008), en la figura 3-1 resumimos los principales elementos que forman parte de esta propuesta.

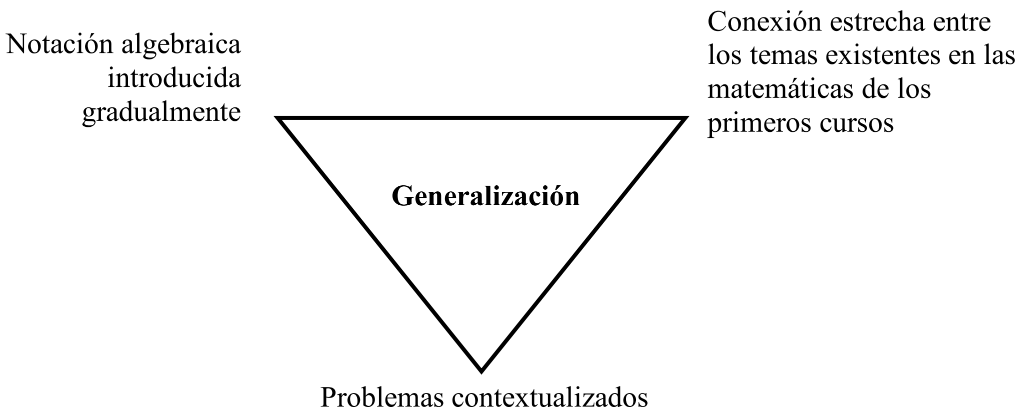


Figura 3-1. Componentes del *early algebra*

Sobre los aspectos centrales del *early algebra*, Kaput (2008) indica que el corazón de esta propuesta está centrado en la generalización de las ideas matemáticas, representación y justificación de las generalizaciones, empleando múltiples caminos. Asimismo, diferentes investigadores han trabajado o se encuentran desarrollando estudios que consideran al *early algebra* en sus contextos. Principalmente, dichas investigaciones se centran en las tres áreas o enfoques al pensamiento algebraico: (a) aritmética generalizada; (b) equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones; y (c) pensamiento funcional. En la siguiente sección detallamos los principales estudios desarrollados en el marco del pensamiento funcional, foco de nuestro estudio.

Pensamiento funcional

En el contexto de la Didáctica de las Matemáticas, la idea de pensamiento funcional adquiere diferentes significados[13]. En concreto, y desde el enfoque que adoptamos, las investigaciones que promueven pensamiento funcional en los primeros cursos introducen las funciones a través de problemas contextualizados. En un intento por sistematizar parte de la literatura que trata el pensamiento funcional en Educación Primaria, en la tabla 3-2 presentamos algunos estudios que consideran diferentes temáticas abordadas. (esta tabla recopila los hallazgos reportados en los estudios de Brizuela y Blanton, 2014; Pinto, 2016; Sawrey, 2018).

Tabla 3-2. *Temas abordados por estudios bajo un enfoque funcional al álgebra escolar*

Temas	Ejemplos de investigaciones
Relaciones funcionales	♦ Blanton, Brizuela et al. (2015) ♦ Cañadas et al., (2016) ♦ Cooper y Warren (2011) ♦ Pinto y Cañadas (2018a)
Estrategias de resolución de problemas	♦ Morales et al. (2018) ♦ Merino et al. (2013)
Comparación de funciones	♦ Brizuela y Martinez (2012) ♦ Moreno et al., (2016)
Uso de representaciones	♦ Brizuela y Earnest (2008) ♦ Carraher et al. (2008) ♦ Radford (2003) ♦ Rivera (2013) ♦ Warren y Cooper (2008)
Significados asociados a la notación algebraica	♦ Ayala-Altamirano (2017) ♦ Brizuela (2016) ♦ Molina et al., (2016) ♦ Marum et al. (2011)
Relaciones entre representaciones	♦ Brizuela y Earnest (2008) ♦ Brizuela (2005)

[13] Por ejemplo, ante las diferentes dificultades causadas por la introducción de las funciones en cursos posteriores a primaria, Felix Klein (1849-1925) promovió la idea de incluir el pensamiento funcional en todos los cursos (Mccallum, Menghini y Neubrand, 2019). Para este autor, la característica principal de este tipo de pensamiento es la incorporación de la función en el currículo, lo que permitiría mitigar las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con funciones. Su énfasis estuvo centrado en los cursos de matemática de secundaria, así como en las matemáticas avanzadas.

Tabla 3-2. *Temas abordados por estudios bajo un enfoque funcional al álgebra escolar*

Temas	Ejemplos de investigaciones
Formación de profesores	♦ Bautista et al. (2013) ♦ Kaput y Blanton (2005) ♦ Kim y Son (2018) ♦ Malara (2016)
Intervenciones docentes	♦ Mata-Pereira y da Ponte (2019) ♦ Ureña, Ramírez y Molina (2019)
Dificultades y errores de estudiantes	♦ Morales (2018) ♦ Hidalgo (2017)

Los diferentes estudios descritos (ver tabla 3-2) concuerdan que la generalización de cantidades que covarían es el elemento central de este tipo de pensamiento, describiendo cómo estudiantes de primaria (o profesores que enseñan a estos estudiantes) generalizan las relaciones y estructuras involucradas en los problemas trabajados. De manera más específica, y considerando nuestros objetivos de investigación, en las siguientes subsecciones describimos algunos estudios[14] que consideran los cinco principales aspectos involucrados en nuestra investigación: (a) aquellos que se centran en las relaciones funcionales que evidencian estudiantes de primaria; (b) las representaciones que emergen de las respuestas de los estudiantes, dando cuenta de cómo estos interactúan con los contenidos matemáticos trabajados; (c) el trabajo de estudiantes de primaria con las formas directa e inversa de la función; (d) la presencia de la idea de estructura en la literatura sobre pensamiento funcional; y (e) las investigaciones que describen el trabajo de estudiantes con problemas contextualizados, centrándose en los tipos de preguntas involucradas.

Funciones lineales y relaciones funcionales

La investigación que describe el trabajo de los estudiantes con funciones es abordado en la literatura a través de dos principales tendencias. En primer lugar, encontramos reportes de investigación que interpretan y describen relaciones funcionales en las respuestas de los estudiantes. En segundo lugar, la literatura reporta el trabajo de estudiantes con diferentes

[14] Los estudios que describimos pueden tratar uno o más aspectos del pensamiento funcional pero, para efecto de la presentación de los antecedentes, hemos seleccionado parte de sus principales resultados.

tipos de funciones lineales. A continuación, presentamos algunas investigaciones que siguen las tendencias descritas anteriormente.

Identificación de relaciones funcionales

Principalmente, la literatura reporta dos perspectivas sobre relaciones funcionales que evidencian estudiantes de primaria: correspondencia y covariación, las cuales varían a través de los cursos. En concreto, estas investigaciones dan cuenta que los estudiantes de primaria: (a) atienden a dos cantidades que varían conjuntamente, describiendo una cantidad en relación a la otra; (b) comprenden las reglas de entrada y salida, y (c) identifican reglas de correspondencia (Carraher, Martinez, et al., 2008; Martinez y Brizuela, 2006; Morales et al., 2018; Pinto y Cañadas, 2018a; Warren, Cooper y Lamb, 2006). Más específicamente, algunos estudios dan cuenta cómo estudiantes de primaria relacionan las variables, transitando desde el reconocer patrones recursivos al establecer relaciones funcionales (e.g., Blanton, Brizuela, et al., 2015; Cañadas et al., 2016; Moss y McNab, 2011; Rivera y Becker, 2011; Stephens, Isler, Marum, Blanton, Knuth y Gardiner, 2012). Por ejemplo, Blanton y Kaput (2004) describen y distinguen las relaciones funcionales identificadas por estudiantes de 5-12 años al responder a un mismo problema. En la figura 3-2 presentamos uno de los problemas trabajados con los estudiantes, el cual involucra la función $y=2x$.

Supongamos que estas en un refugio para perros y quieres contar todos los ojos de los perros que ves. Si hay un perro, ¿cuántos ojos hay? ¿Y en dos perros? ¿En tres perros? ¿En 100 perros? ¿Ves alguna relación entre el número de perros y el total número de ojos? ¿Cómo describirías esta relación? ¿Cómo lo sabes?

Figura 3-2. Problema de los perros y ojos

A partir de las respuestas de los estudiantes, los autores describen cómo estos desarrollan y expresan relaciones funcionales, analizando: (a) las formas de representar las funciones; (b) la progresión del lenguaje matemático; y (c) las operaciones aritméticas utilizadas. Los principales resultados de este estudio dan cuenta que los estudiantes de: (a) Educación Infantil evidenciaron patrones recursivos al momento de relacionar las variables; (b) primero de primaria mostraron reglas de correspondencia entre las variables involucradas, y (c) tercero, cuarto y quinto emplearon, fluidamente, tablas para organizar la información, expresando reglas multiplicativas con palabras y símbolos, llegando a generalizar relaciones como $2n$. Estos resultados ponen de relevancia que estudiantes de primaria pueden trabajar con problemas que involucran variables atendiendo a las dos variables, ya que el foco en una variable es poner obstáculos en el desarrollo de su razonamiento.

Los estudios que analizan las relaciones funcionales evidenciadas por estudiantes de Educación Primaria se pueden distinguir en aquellos que los hacen en contextos de instrucción (Blanton, Stephens, et al., 2015; Blanton, Brizuela, et al., 2015; Blanton y Kaput, 2004; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011) y aquellos que describen el trabajo de los estudiantes sin instrucción previa (Cañadas et al., 2016; Morales et al., 2018; Pinto y Cañadas, 2018a; Molina et al., 2016). En el caso de las investigaciones que se centran en la instrucción, estos tipos de investigaciones reportan el trabajo de los estudiantes luego de uno o más años de instrucción, con una intervención semanal de aproximadamente 50 minutos cada una. Por ejemplo, Blanton, Stephens et al. (2015) muestran y comparan la habilidad de grupos estudiantes de tercero de primaria (8-9 años) para identificar relaciones funcionales, tanto al inicio del curso como al finalizarlo. Específicamente, identifican la relación de covariación la identificación de la regla de función o correspondencia y el uso de variables para expresar la regla de la función. Estos autores, a su vez, comparan el trabajo de un grupo de estudiantes que reciben instrucción en *early algebra* (*intervention*) de aquellos que no reciben instrucción y se consideran el grupo control (*no intervention*). En la figura 3-3 presentamos uno de los gráficos que muestra la comparación entre los elementos descritos anteriormente.

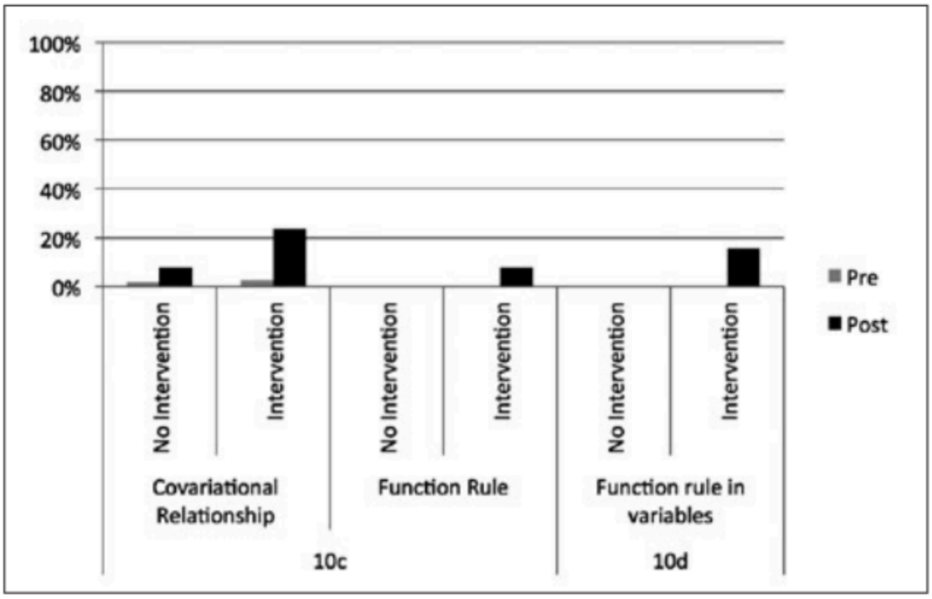


Figura 3-3. Comparación entre estudiantes al reconocer relaciones funcionales (p. 70)

Por otra parte, y tal como lo señalamos, hay otras investigaciones que se centran en contextos sin instrucción. Parte de estas investigaciones toman lugar en el grupo de investigación en el cual se inserta esta Tesis Doctoral. Por ejemplo, en el trabajo de Morales et al. (2018), los autores analizan las respuestas de 30 estudiantes de primero (6-7 años) durante un experimento de enseñanza y, posteriormente, entrevistas conducidas con cuatro de estos estudiantes. Esta investigación conecta las relaciones funcionales, generalización y estrategias que se evidencian en las respuestas de los estudiantes. En la figura 3-4 presentamos uno de los problemas usados.

Una cuidadora de animales debe comprar platos de comida y agua para los perros, de modo que cada perro debe tener su plato de comida, y cinco platos con agua en un sitio donde los perros puedan beber.

Figura 3-4. Problema de los perros y platos (p. 64)

Los principales resultados dan cuenta que los estudiantes, al resolver por primera vez un problema que involucra una función aditiva ($y=x+5$), evidencian con más frecuencia la relación funcional de correspondencia. Por ejemplo, durante una de las entrevistas individuales se produjo el siguiente diálogo entre la entrevistadora (I1) y un estudiante (codificado por los autores como S19):

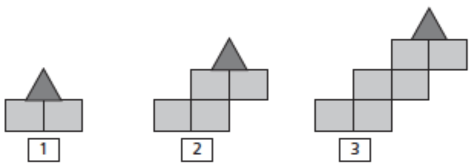
9. I1: […] si tenemos un perro ¿cuántos platos necesitamos? Tenéis que pensarlo. […]
10. S19: Seis.
11. I1: Seis, ¿por qué?
12. S19: Porque cinco de agua y uno de comida.

La respuesta anterior pone de manifiesto la manera en la cual el estudiante involucra las variables para describir la relación entre la cantidad de perros y la cantidad de platos. En otras palabras, el estudiante agrega la cantidad constante de la función (cinco platos de agua) a la cantidad de la variable independiente (línea 12). Por otra parte, los resultados de este estudio dan cuenta que un estudiante evidenció la relación de covariación al determinar la variación de los valores de la variable independiente (cantidad de perros) para establecer uno de los valores de la variable dependiente (cantidad de platos total). En síntesis, y dado nuestro interés por investigaciones que no se centran en la instrucción, este estudio sirve como un motor que permite comprender el trabajo de estudiantes de los primeros cursos de primaria para describir lo que ocurre con estudiantes de cursos intermedios y finales de la Educación Primaria, foco de esta investigación.

Trabajo con diferentes tipos de funciones lineales

Las investigaciones centradas en aspectos del pensamiento funcional consideran problemas que involucran diferentes tipos de funciones lineales[15] ($y=x$; $y=x+a$; $y=ax$; $y=ax+b$). Asimismo, estas investigaciones describen aspectos asociados al trabajo de los estudiantes con un único tipo de función lineal o bien, describen cómo estudiantes comparan el comportamiento de dos funciones en un mismo problema. Por ejemplo, en la tabla 3-3 presentamos los enunciados de algunos problemas que se han usado en diferentes investigaciones, las cuales describen y analizan el trabajo de los estudiantes de diferentes cursos. Hemos intentando presentar estudios que provienen de diferentes autores y grupos de investigación.

Tabla 3-3. *Ejemplos de problemas que involucran diferentes tipos de funciones lineales*

Fuente	Contexto del problema	Función involucrada
	Problemas que consideran un único tipo de función lineal	
Merino et al., (2013)	Mesas cuadradas y niños sentados alrededor de estas.  Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegadas a otras debe haber un niño sentado.	$y=2x+2$
Moss y Beatty (2006)	Hay una disposición geométrica de objetos: triángulos y cuadrados. 	$y=2x+1$
Blanton, Brizuela et al. (2015)	Una locomotora de tren recorre la misma ruta todos los días. A medida que avanza, recoge dos vagones en cada parada.	$y=2x$

[15] Sin embargo, existen algunos estudios que reportan el trabajo de estudiantes con funciones no lineales, como la cuadrática (Ellis, 2011).

Tabla 3-3. *Ejemplos de problemas que involucran diferentes tipos de funciones lineales*

Fuente	Contexto del problema	Función involucrada
	Problemas que consideran un único tipo de función lineal	
Warren, Miller y Cooper (2013)	En una máquina de funciones entran objetos y salen otros. Al entrar el número 3, sale el 5. Al entrar el número 5 sale el 7…	$y=x+2$
	Problema de comparación entre funciones	
Carraher y Schliemann, (2007)	Elizabeth y Darin tienen algo de dinero. Elizabeth tiene $40 en su billetera y el resto de su dinero está en su alcancía. Darin tiene, en total, exactamente cinco veces más dinero que Elizabeth en su alcancía.	$E=40+x$ $D=5x$
Moreno et al. (2016)	Juan tiene ahorrado algo de dinero (sólo tiene euros, no céntimos). Su abuela quiere recompensarle por un trabajo que le ha hecho. Le ofrece dos tratos: - Trato 1. Te doblo el dinero que tienes - Trato 2. Te doy el triple de tu dinero y tú me das 7 euros.	$y=2x$ $y=3x–7$

Los problemas anteriores (ver tabla 3-5) constituyen un medio para describir cómo estudiantes de primaria: (a) atienden a dos cantidades que varían simultáneamente; (b) describen una cantidad en relación a la otra; (c) comprenden reglas de entrada y salida; e (d) identifican reglas de correspondencia. Por ejemplo, y de manera similar al problema usado en el estudio de Merino et al. (2013), Blanton, Stephens et al. (2015) analizan la manera en que los estudiantes: (a) producen datos y los organizan en tablas de función; (b) identifican patrones recursivos y los describen en palabras, con la finalidad de encontrar casos particulares cercanos; (c) identifican una regla covariación y la describen en palabras; (d) identifican una regla de función y la describen con palabras y variables; y (e) usan una regla de función para predecir casos particulares lejanos.

En el caso de los estudios que reportan cómo estudiantes comparan dos o más funciones, Moreno et al. (2016) describen los contenidos funcionales involucrados en el trabajo de los estudiantes. Por ejemplo, todos los estudiantes usaron dos ideas claves en su trabajo con el problema: (a) identificación de intervalos para los valores de la variable independiente, y (b) la identificación del punto de intersección de ambas funciones. Estas evidencias ilustran cómo los estudiantes de quinto grado pueden usar temas relacionados con las funciones que emergen espontáneamente en una tarea matemática contextualizada.

Sin embargo, y considerando los antecedentes anteriores, existe una escasez de estudios que analicen el trabajo de un mismo grupo de estudiantes a problemas que involucran diferentes tipos de funciones lineales.

Representaciones

Aunque la notación algebraica es un tipo de representación característica en el álgebra, existen otras formas de representar las relaciones funcionales, especialmente cuando se trabaja con estudiantes de primaria. A continuación, presentamos algunos estudios que tratan con diferentes tipos de representaciones.

Lenguaje natural

El lenguaje natural es el que comúnmente está presente en los problemas que involucran funciones y que se presentan a los estudiantes (e.g., Blanton, Brizuela, et al., 2015; Brizuela y Earnest, 2008; Carraher et al., 2006; Morales et al., 2018; Moss et al., 2008; Pinto y Cañadas, 2017; Radford, 2018; Sawrey, Brizuela y Blanton, 2015; Warren, Cooper y Miller, 2013). Principalmente, los problemas que introducen este tipo de representación lo hacen en enunciados escritos (durante sesiones de trabajo con clases completas o parciales) y orales (mediante entrevistas), los que pueden ser acompañados por otros tipos de representación.

En el contexto del uso de este tipo de representación por los estudiantes, Mason y Pimm (1984) indican que el rol del lenguaje natural es esencial al momento de generalizar y su uso puede influir en la expresión algebraica de la generalización, tanto en contextos matemáticos u otros. Por ejemplo, los trabajos de Luis Radford (e.g., 2003, 2006, 2010) se sitúan en un marco teórico semiótico-cultural, centrando la atención en el rol que el cuerpo, discurso y signos juegan cuando los estudiantes se refieren a objetos matemáticos. Para el autor, el rol del lenguaje natural es esencial, ya que es considerado un andamio útil para otros tipos de representaciones más simbólicas. En uno de sus recientes estudios (Radford, 2018), el autor del autor investigó la transición de formas no simbólicas a formas simbólicas al trabajar con problemas que involucran funciones, centrando la atención en un mismo grupo de estudiantes canadienses de 4º a 6º curso de primaria (9-12 años). En la figura 3-5 presentamos el problema propuesto a los estudiantes.

Una hormiga recolectó dos migajas cada día, de modo que al final del día 1, la hormiga tenía 3 migajas en el recipiente; al final del día 2, tenía 5 migajas; Al final del día 3, tenía 7 migajas, etc.

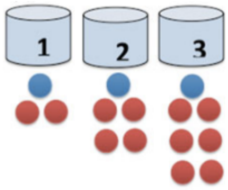


Figura 3-5. Problema de la hormiga y las migajas (p. 12)

Los principales resultados dan cuenta que, por ejemplo, estudiantes de 4º de primaria (9-10 años) generalizaron la relación, en una primera instancia, mediante lenguaje natural. Un estudiante, por ejemplo, expresó la regla general usando la palabra "siempre" para explicar su generalización. Luego y una vez que se pregunta por el uso de la relación general mediante notación algebraica, él representó la relación general por medio de la expresión "2xa=b+1=c". Las dos representaciones por las cuales el estudiante expresa la generalización (lenguaje natural y simbolismo algebraico), dan cuenta que los estudiantes pueden expresar relaciones generales mediante diferentes representaciones (incluso usando notación algebraica).

Manipulativa

Las investigaciones que consideran representaciones manipulativas son escasas, en comparación al uso de otros tipos de representación. Los estudios que proporcionan representaciones manipulativas a los estudiantes lo hacen, principalmente, con estudiantes de los primeros cursos de primaria[16] (e.g., Fuentes, 2014; Morales 2018; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011). Por ejemplo, Fuentes (2014) explora y describe las relaciones funcionales que evidencian estudiantes de primero de primaria (6-7 años) al responder a problemas que involucran funciones. La investigación reporta el trabajo de 32 estudiantes al responder a una hoja de trabajo durante una sesión, así como entrevistas realizadas a cuatro de estos. Los estudiantes usaron individualmente el material manipulativo durante las entrevistas. En la figura 3-6 presentamos algunos de los problemas usados.

[16] Hay algunos estudios que consideran este tipo de representación con estudiantes de cursos mayores (e.g., Pinto, 2016).

Tarea 1. Relación entre un número de niños y un número de gorros. Cada niño ocupa 1 gorro. $y=x$.
Tarea 2. Relación entre un número de niños y un número de piruletas que debe comprarse. Cada niño recibirá tres piruletas. $y=3x$.
Tarea 3. Relación entre número de niños y números de globos que deben comprarse. Cada niño recibirá 5 globos. $y=5x$.

Figura 3-6. Problema del cumpleaños (p. 12)

Los principales resultados reportados por la autora señalan que, durante las entrevistas, la representación manipulativa permitió a los estudiantes organizar las variables involucradas en los problemas y responder las preguntas que se plantearon. Por ejemplo, en la figura 3-7 mostramos el registro de cómo un estudiante organiza los elementos que forman parte de las diferentes tareas (niños-gorros; niños-piruletas; niños-globos).

Figura 3-7. Uso de la representación manipulativa por una estudiante durante la entrevista (p. 30)

El uso de este tipo de representación durante las entrevistas es confrontado con las respuestas de los 32 estudiantes que participaron de la sesión, quienes no manipularon individuamente este tipo de representación y tuvieron algunas dificultades al organizar las variables del problema.

Pictóricas

Los problemas que introducen este tipo de representación lo hacen, generalmente, acompañado de un enunciado expresado mediante lenguaje natural u oral. Entre las investigaciones que introducen representaciones pictóricas, distinguimos entre aquellas que: (a) las usan para entregar información específica del problema que no está presente en el enunciado del problema, por ejemplo, al usar una disposición geométrica de elementos (e.g., Cañadas et al., 2006; Cooper y Warren, 2008; Hidalgo, 2017; Moss et al., 2006; Warren, 2005); y (b) las introducen para clarificar el enunciado del problema (e.g., Blanton, 2008; Carraher y Schliemann, 2007).

En el contexto australiano, Cooper y Warren (2008) estudian la habilidad para generalizar de estudiantes de 3º a 5º de primaria (8-11 años), al trabajar con diferentes problemas que involucran funciones, entre los que se encuentran aquellos que introducen representaciones pictóricas. En la figura 3-8 presentamos algunos de los problemas presentados a los estudiantes.

Figura 3-8. Problemas que involucran funciones con representaciones pictóricas

Los resultados muestran que, por ejemplo, en el caso del problema (a), los estudiantes de quinto, sin usar tablas, encontraron la relación general entre el paso (*step*) y la cantidad de cubos directamente desde la disposición geométrica de los objetos. A partir de dicha disposición, los estudiantes identificaron el elemento que se mantiene constante en la regularidad detectada, así como la regularidad relacionada entre un paso y el otro. Por otra parte, en el problema de las máquinas de funciones en (b), los investigadores dan cuenta que los estudiantes identificaron reglas de cambio usando diferentes tipos de representaciones: lenguaje natural, figuras/diagramas, tablas, notación algebraica y gráficas.

Otros estudios han abordado las representaciones que usan los estudiantes al trabajar con problemas que involucran funciones a través de representaciones pictóricas; los problemas de mesas y comensales (e.g., Blanton, Stephens, et al., 2015; Callejo et al., 2016; Carraher et al., 2008; Merino et al., 2013; Moss et al., 2008; Vergel y Rojas, 2018). Por ejemplo, en la figura 3-9 presentamos algunas de las representaciones pictóricas introducidas a los estudiantes en dos problemas diferentes, en los cuales hay mesas y comensales alrededor (representados con círculos negros).

(a)

(b)

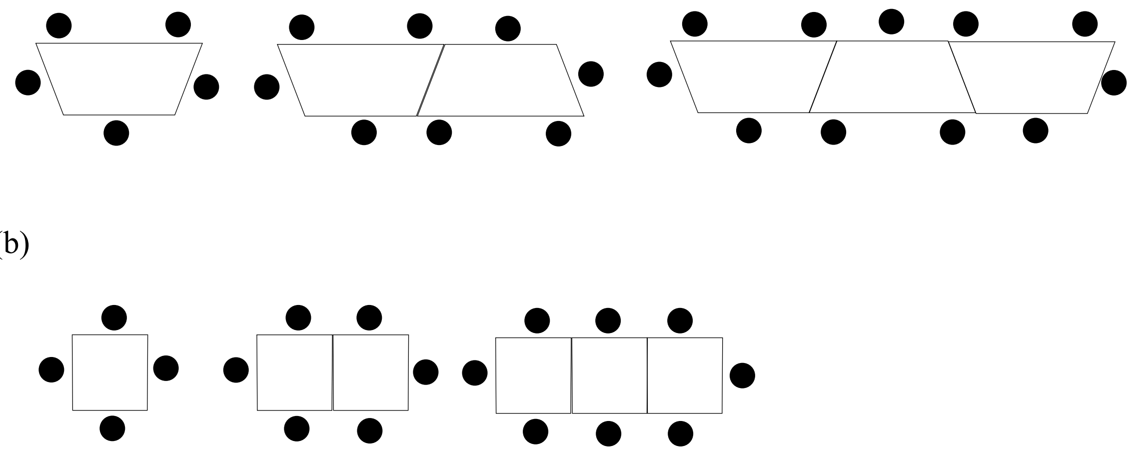


Figura 3-9. Problemas de las mesas y los comensales

En el caso del problema de las mesas señalado en (a) ($y=3x+2$), Moss et al. (2008) describen las representaciones que usan estudiantes estadounidenses de 4º de primaria (9-10) destacando que las representaciones de los estudiantes varían significativamente en niveles de sofisticación matemática que involucra sus respuestas, las cuales pueden expresar verbalmente como “por cada mesa hay tres sillas con dos adicionales a cada lado” o algebraicamente, como $f(x)=3x+2$.

Por otra parte, el problema de las mesas mostrado en (b) ($y=2x+2$) ha sido considerado por Merino et al. (2013). Los autores describen las representaciones que usan 20 estudiantes de 5º al responder a preguntas que involucran diferentes tipos de relaciones (casos particulares y general, por ejemplo). Los principales resultados evidencian que siendo la representación lenguaje natural-escrito la más utilizado, también se evidencia con frecuencia la pictórica. Por ejemplo, en la figura 3-10 presentamos la respuesta de un estudiante cuando se le pregunta por la cantidad de personas que pueden sentarse al ubicar 8 mesas.

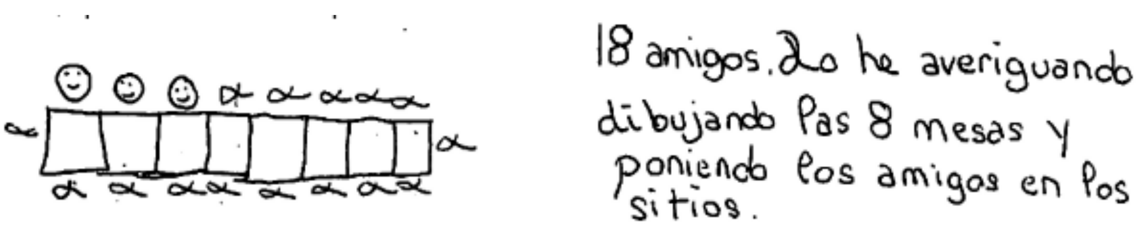


Figura 3-10. Uso de la representación pictórica

La representación pictórica, de la cual la figura 3-10 es un ejemplo, fue usado por 12 estudiantes y cinco de estos utilizaron este tipo de representación para contar la cantidad de comensales que pueden ubicarse en diferente número de mesas. Por otra parte, los investigadores señalan que a medida que los casos involucrados en las preguntas aumentan, así como aumenta el grado de complejidad y abstracción de las relaciones, los estudiantes dejaron de utilizar representaciones pictóricas y numéricas, usando más las verbales.

Numérica

La literatura reporta una doble perspectiva en el uso de este tipo de representación. Por una parte, hay investigaciones que señalan que los estudiantes, a partir de las regularidades observadas en el cálculo aritmético, generalizan dichas regularidades y las extienden a cualquier número involucrado (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, en prensa; Cooper y Warren, 2008; Pinto, Brizuela y Cañadas, 2019; Radford, 2006). En otras palabras, los estudiantes usan la representación numérica como un medio para generalizar relaciones funcionales o bien, para justificar dichas expresiones generales. Por ejemplo, Ureña et al., (2019) reportan cómo estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años) representan la generalización de una relación funcional. Mediante entrevistas individuales semiestructuradas, los investigadores presentan a ocho estudiantes un problema que involucra un parking, el cual tiene una tarifa de 2 euros al entrar y 1 euro por cada hora que está el coche aparcado. Al analizar las respuestas de los estudiantes, los autores establecen que "aunque la representación numérica podría ser considerada como ausencia de generalización, nuestra postura es que el alumno percibe lo general en un conjunto de casos particulares" (p. 30). Parte de los resultados muestra que todos los estudiantes usaron la representación numérica en las primeras preguntas del problema, las cuales refieren a casos particulares. Cinco de estos estudiantes generalizaron la relación sin ayuda del entrevistador, lo que sugiere que la representación numérica se transformó en un medio para generalizar.

Por otra parte, algunas investigaciones ilustran cómo estudiantes, al usar la representación numérica, se centran en los detalles de los cálculos aritméticos sin llegar a expresar lo general. De esta forma, y tal como señala Blanton, Brizuela et al. (2015), los estudiantes que usan este tipo de representación pueden conceptualizar una relación funcional "como un conjunto de relaciones particulares entre valores correspondientes específicos" (p. 530), en la cual estos pueden describir una relación dentro de ciertos casos específicos. Por ejemplo, los autores presentan a los estudiantes el problema de la altura con un sombrero:

ellos deben determinar la altura de una persona cuando esta: (a) no usa sombrero; (b) usa un sombrero que tiene una altura de 1 pie; y (c) usa un sombrero que tiene una altura de 2 pies. En la figura 3-11 presentamos la respuesta de una estudiante al relacionar, durante una entrevista, la altura de una persona y el gorro que mide 1 pie de altura.

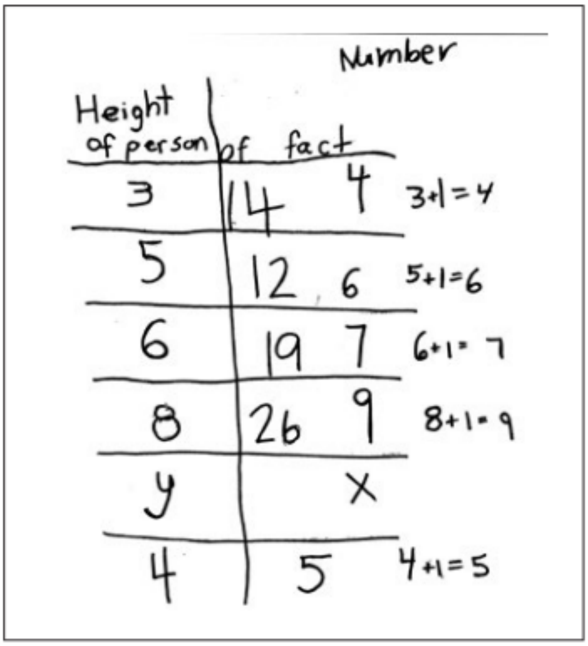


Figura 3-11. Uso de la representación numérica (p. 531)

Inicialmente, la estudiante organiza las variables en dos columnas: a la izquierda registra los valores relacionados con la altura de la persona y a la derecha la altura de la persona con dicho sombrero. Al trabajar con los casos particulares presentados, la estudiante identifica la relación entre ambas variables mediante una relación aditiva; va sumando 1 a la altura dada. El entrevistador pregunta a la estudiante cómo generalizó y esta no explicó como se relacionan las dos cantidades en general. Inmediatamente, la estudiante justificó la relación volviendo a usar casos particulares. Los autores señalan que aquellos estudiantes que usan la notación numérica y no logran generalizar "todavía no tienen medios de representación para comprimir múltiples instancias en una forma unitaria que podría simbolizar estos casos" (p. 542).

Notación algebraica

Diferentes estudios liderados por Maria Blanton (e.g., Blanton, 2017; Blanton, Stephens, et al., 2015; Blanton, Brizuela, et al., 2015; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y

Murphy Gardiner, 2015) resaltan cómo estudiantes de diferentes cursos de primaria expresan las relaciones funcionales mediante diferentes representaciones, entre las que se encuentra la notación algebraica. Dichos estudios tienen un carácter longitudinal y están centrados en diseñar secuencias de enseñanza para que los estudiantes describan la relación entre variables, incluyendo la introducción de representaciones cada vez más simbólicas. En uno de estos estudios (Blanton, Brizuela, et al., 2015), por ejemplo, se presenta a estudiantes estadounidenses de primer curso de primaria (6-7 años) el problema del tren, el cual relaciona el número de paradas que hace el tren y el número de vagones que se agrega en cada parada. Este problema involucra la función *y=2x* y fue presentado a los estudiantes mediante entrevistas, al finalizar la investigación. En la figura 3-12 presentamos la organización de los datos de una estudiante.

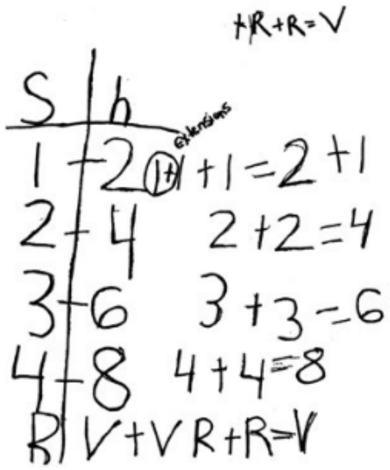


Figura 3-12. Respuesta de una estudiante al problema del tren (p. 537)

En la respuesta anterior es posible identificar la organización de los datos en dos columnas. Inicialmente, ella exploró la relación dado ciertos casos particulares (paradas 1, 2, 3 y 4 y los respectivos números de vagones). El quinto caso considerado (representado en la última fila de la tabla) muestra el uso de la notación algebraica. El uso de esta representación no fue espontáneo; los estudiantes fueron instruidos en el uso de este tipo de herramienta. La estudiante organiza el número de paradas (S) y el número de vagones (R). La estudiante trabaja con representaciones numéricas para identificar la relación con casos particulares y luego conceptualiza la relación funcional entre dos letras arbitrarias y explícitamente señaladas (R y V). Los autores describen que este tipo de representación le permitió a la estudiante abstraer la relación general involucrada en la situación luego de trabajar con casos particulares. Esta posibilidad de abstracción se realiza al mismo tiempo que la estudiante explora letras para representar la situación.

En el contexto español, diferentes estudios han sido desarrollado sobre el significado que estudiantes asignan a las letras. Por ejemplo, en el grupo de investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, Ayala-Altamirano (2017) describe la evolución del significado que 24 estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales. Uno de los objetivos de investigación fue identificar significados a las letras, a partir de sus respuestas orales y producciones escritas. Los principales resultados dan cuenta de una diversidad de significados, ampliando los hallazgos reportados en estudios previos. La autora identifica los siguientes significados a las letras:

- Rechazo de la letra.
- Acepta uso de la letra.
    - Letra como etiqueta o como objeto.
    - Letra evaluada.
    - Letra evaluada / valor lógico.
    - Letra como variable / valor aleatorio.
    - Letra como variable / valor indeterminado.

Por ejemplo, y al analizar las respuestas orales de los estudiantes durante tres sesiones de un experimento de enseñanza, el significado "letra como variable/valor indeterminado" fue el más frecuente identificado en las respuestas de los estudiantes, seguido por los significados "letra como variable/valor aleatorio" y "letra evaluada". Por ejemplo, en una de las sesiones se presentó el problema de las camisetas: un niño vende camisetas y gana 3 euros por cada camiseta vendida. Al discutir sobre la veracidad o falsedad de sentencias, uno de los estudiantes señala que en la expresión $3 \times Z$, "la letra puede ser el número que tú quieras" (p. 41), asignándole un valor aleatorio a dicha letra.

Tabular

Diferentes investigaciones reportan cómo estudiantes de primaria representan datos en tablas. Específicamente, y dentro del contexto funcional, investigaciones describen el trabajo de los estudiantes considerando: (a) cómo estos construyen y completan tablas (e.g., Brizuela y

Lara-Roth, 2001; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011; y/o (b) cómo los estudiantes comprenden aspectos de la función a través de este tipo de representación (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Brizuela y Earnest, 2008; Martinez y Brizuela, 2006). En el primer de los casos —relacionado con la creación de tablas por estudiantes de primaria—, Brizuela y Lara-Roth (2001) describen el trabajo de estudiantes de segundo de primaria (7-8 años). Específicamente, las autoras están interesadas en los elementos que los estudiantes consideran relevante al construir una tabla. La figura 3-13 muestra el problema presentado a los estudiantes.

Día 1:
Jessica, Daniel y Leslie tienen una alcancía cada uno, donde guardan el dinero que su abuela les ha dado. Un día, ellos contaron el dinero que tenían y encontraron que Jessica tenía 7 dólares, Daniel 4 y Leslie no tenía dinero. Luego, los tres decidieron no gastar más dinero y guardar lo que tenían hasta que su abuela les volviera a dar dinero.
Muestra cuánto dinero tiene cada uno.

Día 2:
Durante el segundo día, la abuela visitó a los niños y le dio 2 dólares a cada uno. Ellos pusieron el dinero en su alcancía.
Muestra qué ocurrió.

Día 3:
Durante el tercer día, la abuela visitó nuevamente a los niños y le dio 3 dólares a cada uno.
Muestra qué pasó.
¿Cuánto dinero tiene cada uno ahora?

Muestra en una tabla que ocurrió del día 1 al 3.

Figura 3-13. Problema de la abuela y la alcancía (p. 131)

Los primeros resultados muestran que los estudiantes construyen tablas de carácter idiosincráticos y algunas más convencionales (“a” y “b”, en la figura 3-14).

(a) (b)

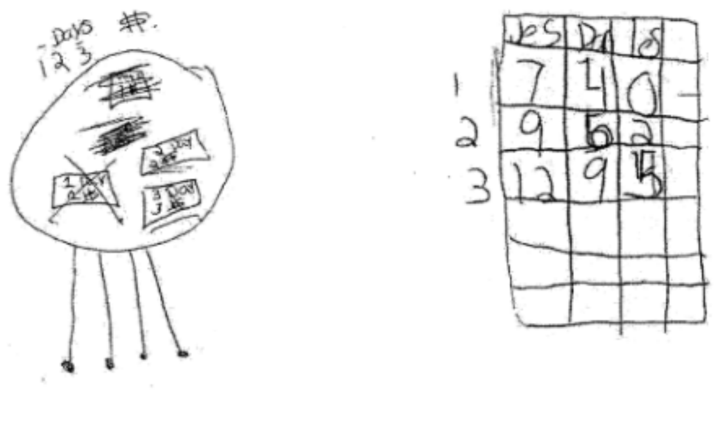


Figura 3-14. Tablas producidas por estudiantes

Algunos estudiantes que construyeron tablas más convencionales presentaron dificultades al intentar establecer relaciones funcionales, pues estos tendían a centrarse en patrones recursivos; dado el valor de una variable, su foco estuvo puesto en los valores consecutivos de esa misma variable. La mayoría de los estudiantes construyeron tablas sofisticadas, las cuales muestran el funcionamiento de su lógica al resolver el problema y más de la mitad de estos seguían un orden temporal en sus tablas (considerando los personajes de la historia, a través de filas, y el dinero al paso del tiempo, a través de columnas).

El estudio de Blanton y Kaput (2011), con estudiantes de diferentes cursos de primaria, ilustra el rol de las tablas al momento de comprender las tablas y cómo se relacionan las variables presentadas. Por ejemplo, uno de las tareas presentadas a los estudiantes es el problema del apretón de manos y lo mostramos en la figura 3-15.

Si hay 3 personas en un grupo, ¿cuántos apretones de manos en total habría si todas las personas se dieran la mano una vez? ¿Cuántos apretones de manos habría si hubiera 4 personas en el grupo? ¿Cinco personas? ¿Seis personas? ¿Veinte personas? ¿Puedes encontrar una relación entre el número de personas en el grupo y el número total de apretones de manos?

Figura 3-15. Problema del apretón de manos

El uso de las tablas fue usado de diferentes maneras por estudiantes de diferentes edades. Aquellos estudiantes de 5-6 años usaron este tipo de representación, principalmente, para organizar la información presentada en el problema. El uso de esta representación durante la Educación Primaria muestra que los estudiantes la usan para organizar los datos, así como para "mirar" y "observar" nuevas relaciones. Por ejemplo, en la figura 3-16 presentamos la tabla construida por un estudiante de primero de primaria (6-7 años).

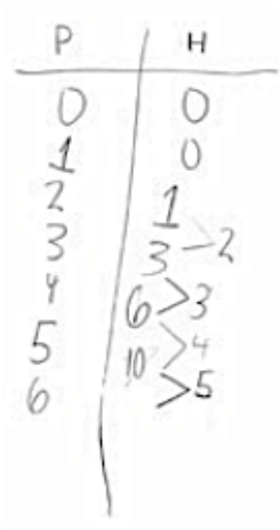


Figura 3-16. Tablas producidas por un estudiante de primero (p. 10).

Nota. P = número de personas y H = número de apretones de mano

La tabla anterior permitió a los estudiantes encontrar relaciones entre los datos, identificando la manera en la cuál una variable varía en relación a la otra. Los autores señalan que este tipo de representación permite que los estudiantes estén centrados en encontrar y simbolizar relaciones funcionales de correspondencia o covariación, en vez de solo organizar los datos.

Representaciones múltiples

Diferentes trabajos de Bárbara Brizuela (e.g., Brizuela, 2004, 2005; Brizuela y Earnest, 2008) describen las relaciones entre representaciones que evidencian estudiantes de primaria, analizando las ventajas que tienen para los niños establecer relaciones entre diferentes representaciones y qué impacto a nivel conceptual se produce al establecer esas relaciones. Por ejemplo, en uno de los estudios citados, Brizuela y Earnest (2008) analizan las representaciones usadas por estudiantes de 2º a 4º de primaria, a través de un estudio longitudinal. Específicamente, a través de entrevistas a los estudiantes, se presentó un problema que fue explorado a través de cuatro representaciones diferentes: (a) verbal; (b) gráfica-escrita; (c) tabular; y (d) gráfica. Los estudiantes ya habían trabajado con problemas que involucran funciones, pero es primera vez que trabajaban con representaciones simultáneas. En la figura 3-17 presentamos el problema usado.

Raymond tiene algo de dinero. Su abuela le ofrece dos tratos: Trato 1: Ella duplicará su dinero. Trato 2: Ella triplicará su dinero y luego le quitará 7. Raymond quiere elegir la mejor oferta. ¿Qué debe hacer? ¿Cómo podrías averiguar y *mostrarle a él* qué es lo mejor que puede hacer? ¿Una oferta *siempre* es mejor? Muestra esto en una hoja.

Figura 3-17. Problema del trato de la abuela (p. 281). Nota= las cursivas fueron agregadas por los autores originales

En primer lugar, los investigadores exploraron las reacciones de los estudiantes al representar verbalmente y con material manipulativo cuál es el mejor trato. Durante dicha exploración, los estudiantes señalaron que el trato 1 es mejor que el trato 2. Luego de las discusiones orales, los investigadores instaron a los estudiantes a representar sus ideas usando cualquier tipo de representación. Durante esta etapa, las representaciones parecer ser un poco frágiles, en el sentido de mostrar como se producen las relaciones entre variables. En la tercera fase, los estudiantes construyeron sus propias tablas, las cuales le permitieron a algunos estudiantes resaltar las funciones involucradas en el problema. Finalmente, al explorar la representación gráfica, esta les permitió a los estudiantes usar nuevos lentes para comprender las funciones involucradas y les ayudó a dar sentido a las representaciones usadas anteriormente. En conclusión, los principales resultados dan cuenta que las comprensiones de los estudiantes sobre las relaciones involucradas en el problema son mejoradas cuando estos comparan y contrastan sus representaciones con otras.

En un estudio longitudinal, Carraher y Schliemann (2007) analizan cómo estudiantes piensan algebraicamente y emplean dichas representaciones, al trabajar con problemas que involucran funciones lineales. Por ejemplo, en la figura 3-18 mostramos la respuesta de un estudiante al responder a un problema que establece la relación entre el dinero que tienen dos personas, dada las relaciones $y=x+8$ y $y=3x$.

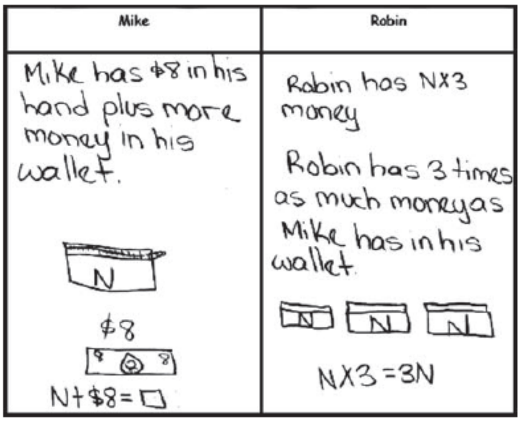


Figura 3-18. Ejemplo de representación múltiple (p. 693)

En la respuesta del estudiante (ver figura 3-18), tres representaciones diferentes convergen al representar la cantidad de dinero que tiene cada personaje del problema: lenguaje natural-escrito, pictórica y notación algebraica. Las tres representaciones expresan la generalización de la relación entre variables involucradas en los problemas, las cuales cobran sentido al analizarlo por separado.

Formas directa e inversa de la función lineal

Tradicionalmente, la literatura reporta las dificultades que tienen los estudiantes de cursos posteriores a la primaria cuando trabajan con la forma inversa de una función, las cuales tienen su origen en diferentes aspectos (Even, 1989; Teuscher, Palsky y Palfreyman, 2018; van Dyke, 1996; Wilson, Adamson, Cox y O'Bryan, 2011). Dado que las funciones son el contenido matemático central del pensamiento funcional, algunos investigadores recomiendan enfatizar en cómo los estudiantes comprenden las formas directas e inversas de una función (Oehrtman, Carlson y Thompson, 2008). Sin embargo, son escasos los estudios que tratan ambas formas (directa e inversa) en la literatura sobre pensamiento algebraico con estudiantes de primaria (e.g, Pinto y Cañadas, 2018b). Algunos investigadores resaltan que el pensamiento funcional ayuda a desarrollar una comprensión de las relaciones entre las operaciones, en particular, la relación inversa (Warren y Cooper, 2005). A continuación, describimos dos estudios que exploran las formas directas e inversa de una función, con estudiantes de primaria y estudiantes de edades cercanas a los participantes de nuestro estudio.

Callejo, García-Reche y Fernándes (2016) identifican características del pensamiento algebraico de estudiantes de primaria, en el contexto de patrones que involucran funciones lineales. Los investigadores aplicaron una hoja de trabajo a 264 estudiantes de 1º a 6º curso de primaria, el cual contenía preguntas que involucra la generalización (cercana y lejana, en términos de Stacey, 1989) de la forma directa de la relación, así como algunas cuestiones que involucraba la forma inversa de la función y su generalización. Las preguntas que involucran la forma inversa fueron consideradas solo para los estudiantes de 6º de primaria, quienes emplearon principalmente la representación gráfica para resolver problemas que involucran este tipo de relación.

En un estudio cercano a las edades de estudiantes de primaria, MacGregor y Stacey (1995) exploraron cómo 143 estudiantes de 14 a 15 años de edad reconocen, usan y describen reglas que relacionan dos variables, enfocándose en la comprensión de la relación funcional. Uno de los ítems utilizados incluía preguntas para la forma directa (que incluyen valores cercanos y lejanos) y forma inversa (solo valores cercanos) de funciones lineales. Parte de los resultados mostraron que el 63% de los estudiantes respondieron correctamente la forma directa, pero solo el 43% para la forma inversa de la función. Específicamente, los estudiantes encontraron formas fáciles de trabajar con valores cercanos en forma directa, mientras que algunas dificultades aparecieron al trabajar con números lejanos. Por otro lado, cuando los estudiantes trabajaron con la forma inversa, tuvieron muchas dificultades para trabajar con valores cercanos. Los autores no proporcionaron información sobre cómo los estudiantes percibieron la regularidad cuando se involucraba la función inversa, ya que el objetivo era describir cómo los estudiantes encuentran reglas en formas directas (dado el valor de la variable independiente, calcular el valor del dependiente). Por tanto, investigar en cómo estudiantes perciben las formas directas e inversas de la función se traduce en una importante contribución al campo de la investigación (en el capítulo 5, específicamente en el cuarto paper, exploramos esta idea).

Estructuras

Dentro del contexto funcional al álgebra escolar existen algunos estudios que tienen a la estructura como un elemento central de sus investigaciones. En Australia, los trabajos liderados por Joanne Mulligan (e.g., Mulligan y Mitchelmore, 2009; Mulligan, Prescott y

Mitchelmore, 2006; Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011) tienen como foco de interés las ideas de patrón y estructura, las cuales fueron desarrolladas dentro del proyecto de investigación *Awareness of Mathematical Pattern and Structure* (AMPS). De manera general, los investigadores infieren las estructuras interpretadas por los estudiantes al resolver diferentes problemas, donde a través de las representaciones que estos usan, analizan las diferentes formas en los cuales los niños organizan objetos y conjuntos de objetos, según lo que interpretan de los problemas presentados. Entre los problemas propuestos, hay problemas que involucran funciones. Los autores proponen cuatro etapas generales de desarrollo estructural: (a) pre-estructural; (b) emergente; (c) estructura parcial; y (d) desarrollo estructural (Mulligan y Mitchelmore, 2009, p. 42). En el caso de las estructuras evidenciadas en los problemas que involucran funciones, estos tipos de tareas resultaron muy difíciles para los estudiantes. Se mostró una amplia diversidad en las etapas de desarrollo para los niños del mismo rango de edad. Los principales resultados mostraron una relación existente entre aquellos estudiantes con bajo rendimiento académicos, los cuales evidenciaban rasgos de la etapa pre-estructural, ya que estos se centraban específicamente en las características superficiales de los problemas, no atendiendo a la estructura matemática o espacial de los elementos involucrados. En cambio, los estudiantes con buen rendimiento académico extrajeron y extendieron características estructurales de las relaciones involucradas en los elementos. En conclusión, los autores señalan que aquellos estudiantes que muestran un buen desarrollo estructural en áreas como números, operaciones o geometría mostraron fuertes indicios de pensamiento algebraico temprano.

En el contexto del pasado *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 11), celebrado en febrero de 2019 en Utrecht, Países Bajos, Hewitt (2019) presentó un trabajo que se centra en la importancia de la estructura en el desarrollo del pensamiento algebraico. El estudio critica una atención exclusiva en patrones numéricos aleja a los estudiantes en la posibilidad de identificar las estructuras que subyacen de estos problemas, así como la generalización de dichas relaciones. Todos los problemas que analiza el autor provienen de investigaciones que describen las respuestas de estudiantes a diferentes problemas que involucran funciones lineales (configuraciones puntuales, el problema de las mesas y comensales, por ejemplo). Este autor sostiene, a partir de las investigaciones analizadas, que: (a) el conteo entrega poca información para poder analizar las estructuras involucradas; (b) el trabajo con tablas de funciones puede ocasionar problemas, pues se pierden las propiedades inherentes al problema, observando solo números y se tiende a que los estudiantes pongan atención a patrones recursivos en vez de la obtención de relaciones funcionales; y (c) la importancia del contexto en los problemas es esencial al momento de identificar las estructuras involucradas en los problemas, evitando diseñar actividades que solo lleven a los estudiantes a realizar cálculos.

Recientes estudios comienzan a centrarse en las estructuras identificadas en las respuestas de los estudiantes, para analizar cómo estos organizan, representan y generalizan las relaciones entre variables. En concreto, son los trabajos iniciados por el autor y la directora de esta tesis que indagan en las estructuras identificadas en las respuestas de los estudiantes al responder a problemas que involucran funciones lineales (e.g., Pinto y Cañadas 2017, 2018b), idea que ha sido utilizada en otros estudios. Por ejemplo, Torres, Cañadas y Moreno (2019) describen las estructuras —entendidas como las diferentes maneras en las cuales los estudiantes perciben y relacionan los elementos involucrados en la regularidad— evidenciadas en las respuestas de estudiantes de segundo curso de primaria (7-8 años) al trabajar con diferentes problemas. Los autores comparan las diferencias entre las respuestas de los estudiantes en entrevistas individuales realizadas al inicio de un experimento de enseñanza y otras al finalizar. En la figura 3-19 presentamos una de las preguntas presentadas a los estudiantes en la entrevista inicial, en el contexto de una máquina de funciones que tiene como regla funcional $y=x+3$.

1. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 8 bolas? ______ bolas.

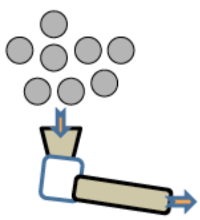


Figura 3-19. Problema de las máquinas de funciones

Los autores anteriores relacionan las estructuras evidenciadas en las respuestas de los estudiantes con la generalización. La mayoría de los estudiantes evidenciaron, en ambas entrevistas, las mismas estructuras en sus respuestas al trabajar con casos particulares y con el caso general: $y=x+3$.

Problemas contextualizados y tipos de preguntas

Carraher et al., (2008) señalan que una de las características centrales del *early algebra* es que se basa, principalmente, en el uso de problemas contextualizados. Los autores enfatizan en que el uso de este tipo de problemas permitirá que los estudiantes se centren en lo realmente importante: que piensen de manera más abstracta. Tal como lo señalamos en Pinto (2016), consideraremos un problema contextualizado como aquel que presenta actividades cercanas a posibles situaciones reales, donde los resolutores requieren emplear habilidades, conceptos y procesos matemáticos. En síntesis, son considerados una herramienta que permite organizar, sintetizar y representar los datos, otorgándole significado a las decisiones tomadas (Blanco, 1991).

Diferentes autores han destacado el rol de los problemas contextualizados como una herramienta que permita situar y profundizar el aprendizaje del álgebra; así como favorecer la posibilidad de generalizar sobre cantidades (Carraher y Schliemann, 2007; Carraher, Martinez y Schliemann, 2008; Kieran, 2007). La mayoría de los estudios que analizan elementos del pensamiento funcional en estudiantes de primaria presentan un problema acompañado por diferentes tipos de preguntas, las cuales exploran diversos aspectos asociados al contexto general del problema (por ejemplo, casos particulares, caso general, relaciones inversas, exploración de relaciones en tablas, entre otros). Por ejemplo, el trabajo de Stacey (1989) es uno de los que ha tenido un fuerte impacto en la literatura sobre pensamiento funcional. La autora analiza el proceso de generalización de estudiantes de 9-13 años al trabajar con problemas que involucran funciones lineales de la forma $y=mx+b$, identificando: (a) forma de expresar generalizaciones; (b) estrategias; y (c) dificultades que tienen los estudiantes. A partir de las respuestas de los estudiantes, se distinguen dos tipos de generalización:

- *Cercana,* para cuestiones que “pueden ser resueltas mediante un dibujo paso a paso o contando”, las cuales tienen relación con el tipo de número involucrado (cercano a los estudiantes o en un determinado ámbito numérico); y
- *Lejana,* para cuestiones “que van más allá de los límites prácticos que involucra un enfoque paso a paso” (p. 150), involucrando ámbitos numéricos mayores a los comprendidos (tales como 100, 1.000, 1.000.000), por ejemplo.

Por otra parte, y con estudiantes de edades similares, Amit y Neria (2008) analizan las estrategias usadas por estudiantes de 11-13 años al resolver problemas que involucran relaciones funcionales. Los estudiantes, al trabajar con números pequeños, encontraron patrones recursivos al describir las relaciones entre las cantidades involucradas, mientras que, al trabajar con números más grandes, estos evidenciaron relaciones funcionales, identificando variables y constantes. Junto con esto, diferentes estudiantes generalizaron las relaciones involucradas en los problemas sin seguir el diseño del cuestionario. En relación al estudio anterior, pero con estudiantes de segundo de primaria, Cañadas et al. (2016) describe dos enfoques que siguen los estudiantes de segundo de primaria al expresar las relaciones entre cantidades, destacando que los estudiantes, al trabajar con números pequeños (de 0 a 20) usan estrategias recursivas y con números más grandes evidencian relaciones funcionales.

Otros autores describen las implicaciones del diseño de los problemas que se presentan a los estudiantes. Por ejemplo, Morales et al. (2018) analizan las respuestas de estudiantes de primer curso al responder a un problema que involucra la relación entre perros y platos de comida y agua, donde la relación funcional involucrada es $y=x+5$ ("una cuidadora de animales debe comprar platos de comida y agua para los perros, de modo que cada perro debe tener su plato de comida, y cinco platos con agua en un sitio donde los perros puedan beber" p. 64). Los autores señalan que, la manera como se presentó el problema puede haber influido en que los estudiantes evidenciaran relaciones funcionales de correspondencia y covariación, en lugar de la recurrencia, ya que se presentaron preguntas que involucraban casos particulares no consecutivos y no solo de forma creciente.

CAPÍTULO 4

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo describimos y justificamos el marco metodológico de la investigación. Organizamos el capítulo en tres secciones. En primer lugar, detallamos el contexto general desde dónde surgen los datos analizados para luego, en segundo lugar, describir el paradigma metodológico que rige nuestra tesis: la investigación de diseño. Justificamos su consideración según los objetivos de investigación y detallamos los aspectos del diseño que forman parte de esta memoria. Finalmente, presentamos los datos que analizamos según dos fuentes de información directamente relacionadas: (a) una sesión específica de un experimento de enseñanza; y (b) entrevistas individuales semiestructuradas. Considerando cada fuente de información, describimos los estudiantes que forman parte de estas, la selección de los datos considerados, los procesos e instrumentos de recogida de información y las categorías de análisis empleadas.

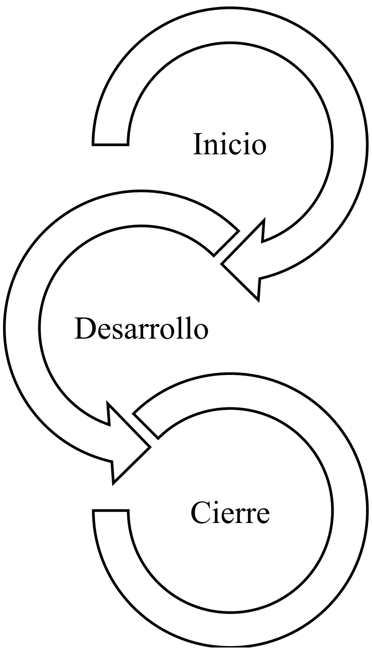
Contexto general de la investigación

Los datos que analizamos en esta Tesis Doctoral provienen de un experimento de enseñanza y entrevistas individuales semiestructuradas llevadas a cabo con estudiantes de tercero a sexto de Educación Primaria (8-12 años) en un centro educativo ubicado en Granada, al sur de España. De manera general, y durante el curso 2014/2015, se desarrollaron cuatro sesiones diferentes de un experimento de enseñanza con estudiantes de primero, tercero y quinto de primaria[17]. En cada una de las sesiones se presentó un problema a los estudiantes, los cuales involucraban funciones lineales e introducían diferentes tipos de representaciones. Al curso siguiente, entrevistamos un grupo de estudiantes que participó en dichas sesiones, con la finalidad de profundizar en sus respuestas a diferentes problemas que involucran funciones. Tanto el experimento de enseñanza como las entrevistas persiguen propósitos similares, tales como explorar cómo los estudiantes: (a) relacionan las variables involucradas en problemas

[17] El equipo de investigación estuvo conformado por María C. Cañadas, Aurora del Río, Marta Molina, Rodolfo Morales y Antonio Moreno.

que involucran diferentes tipos de funciones lineales; e (b) usan diferentes tipos de representaciones para expresar relaciones funcionales. Los propósitos descritos anteriormente conciben a la generalización como un elemento central.

En esta investigación, y en una primera instancia, nos centramos en el trabajo de los estudiantes al experimento de enseñanza cuando cursaban tercero y quinto. En concreto, ambos grupos participaron en las cuatro sesiones diseñadas para cada curso y en cada una de las sesiones presentamos un problema. En los anexos 1-A y 1-B presentamos las hojas de trabajo tal como se presentaron a los estudiantes de ambos cursos. El equipo de investigación de cada curso estuvo conformado por tres investigadores: (a) un profesor-investigador, quien dirigió las sesiones; (b) un investigador asistente; y (c) un técnico de cámara. En cada curso, los profesores-investigadores fueron los mismos durante las cuatro sesiones y cada sesión tuvo una duración aproximada de 60 minutos. Específicamente, el desarrollo de cada sesión se dividió en tres partes y en la figura 4-1 ilustramos la organización de cada una de las sesiones.



- **Introducción del problema.**
- Presentación del problema y representaciones.
- Preguntas para asegurar comprensión de los estudiantes.

- **Presentación de la hoja de trabajo**
- Presentación de reglas de trabajo.
- Estudiantes responden la hoja de trabajo.

- **Discusión con grupo completo**.
- Explicación, por parte de los estudiante sobre sus respuestas a algunas cuestiones.

Figura 4-1. Organización de las sesiones del experimento de enseñanza

Para describir los problemas que utilizamos en cada sesión, en la tabla 4-1 presentamos una caracterización de estos, señalando el enunciado de la situación, así como sus principales elementos.

Tabla 4-1. *Caracterización de las sesiones del experimento de enseñanza*

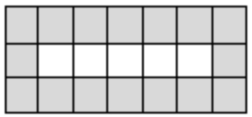
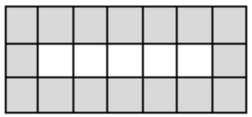
Fecha	Est.	Enunciado del problema	Función	Formato de la tarea	Representación introducida	Forma de la función lineal
			Tercero			
11-02-2015	25	María y Raúl son hermanos. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.	$y=x+5$	Exploración casos particulares/caso general Construcción o cumplimentación de tabla	Lenguaje natural – escrito Tabular	FD - FI
25-02-2015	24	Carlos vende camisetas con el escudo de su colegio. Él gana 3 euros por cada camiseta que vende.	$y=3x$	Exploración casos particulares/caso general Verdadero/falso	Lenguaje natural – escrito Tabular	FD - FI
11-03-2015	23	Carlos vende camisetas con el escudo de su colegio. Él gana 3 euros por cada camiseta que vende.	$y=3x$	Exploración casos particulares/caso general Construcción o cumplimentación tabla Construcción/interpretación de la gráfica	Lenguaje natural – escrito Tabular Gráfico	FD - FI
18-03-2015	24	En un colegio hay diferentes pasillos compuestos de baldosas grises y blancas. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño, siguiendo un patrón. 	$y=2x+6$	Exploración casos particulares/caso general	Lenguaje natural – escrito Pictórica	FD - FI
			Quinto			
13-02-2015	22	Carlos vende camisetas con el escudo de su colegio. Él gana 3 euros por cada camiseta que vende.	$y=3x$	Exploración casos particulares/caso general Construcción o cumplimentación tabla	Lenguaje natural – escrito Tabular	FD

Tabla 4-1. *Caracterización de las sesiones del experimento de enseñanza*

Fecha	Est.	Enunciado del problema	Función	Formato de la tarea	Representación introducida	Forma de la función lineal
25-02-2015	24	Carla y Daniel venden camisetas. Carla gana 3 euros por cada camiseta vendida. Daniel gana el doble por cada camiseta vendida y tiene 15 euros ahorrados.	$y=3x$ $y=2x+15$	Exploración casos particulares/caso general Construcción o cumplimentación tabla	Lenguaje natural – escrito Tabular	FD - FI
11-03-2015	24	Juan tiene ahorrado algo de dinero (sólo tiene euros, no céntimos). Su abuela quiere recompensarle por un trabajo que le ha hecho. Le ofrece dos tratos: - Trato 1. Te doblo el dinero que tienes - Trato 2. Te doy el triple de tu dinero y tú me das 7 euros.	$y=2x$ $y=3x–7$	Exploración casos particulares/caso general	Lenguaje natural – escrito	FD
18-03-2015	24	En un colegio hay diferentes pasillos compuestos de baldosas grises y blancas. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño, siguiendo un patrón. 	$y=2x+6$	Exploración casos particulares/caso general	Lenguaje natural – escrito Pictórica	FD - FI

Nota. Est. = cantidad de estudiantes; FD = forma directa de la función; FI = forma inversa de la función

En los dos cursos se presentaron problemas que involucran diferentes tipos de funciones lineales. En el caso de tercero, la organización de los problemas responde a las funciones involucradas en cada una: $y=x+b$; $y=ax$; y $y=ax+b$. Se organizó de esta forma debido a las operaciones aritméticas involucradas. Por otra parte, los problemas trabajados con los estudiantes de quinto involucran dos tipos de funciones: $y=ax$; y $y=ax+b$. No incluimos la función $y=x+b$ con los estudiantes de quinto debido a que este tipo de función se considera más sencilla para estos estudiantes.

Algunos de los problemas seleccionados fueron obtenidos de estudios previos y otros fueron diseñados por el equipo de investigación. Por ejemplo, el problema del trato (tercera sesión del experimento de enseñanza en quinto) fue adaptado de Brizuela y Earnest (2008) y el problema de baldosas fue adaptado del trabajo de Küchemann (1981). Cada problema contenía diferentes preguntas y, de manera general, las preguntas involucradas seguían el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007).

Los estudiantes respondieron individualmente las hojas de trabajo, a diferencia de la tercera sesión en quinto (problema del trato). Dos problemas idénticos se presentaron en ambos cursos: el problema de las camisetas y el problema de las baldosas; este último es parte del foco de nuestra investigación.

Durante las cuatro sesiones desarrolladas en cada curso, las fuentes de información fueron tres: (a) grabaciones mediante vídeo-cámara del trabajo en gran grupo; (b) notas de los investigadores; y (c) hoja de trabajo de los estudiantes. Las grabaciones mediante vídeo-cámara se realizaron con una cámara fija y una móvil. La cámara fija quedó ubicada al final de la sala de clases, mientras que con la cámara móvil intentamos recoger ideas verbales y explicaciones que brindan los estudiantes mientras respondían las hojas de trabajo.

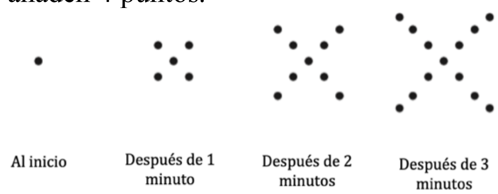
Después del experimento de enseñanza, utilizamos la entrevista como un instrumento para profundizar en la generalización de los estudiantes y en su representación. Esta es la segunda instancia desde donde obtuvimos los datos que analizamos. Entrevistamos[18], durante el curso 2015/2016, a ocho estudiantes de cada grupo, que al momento de las entrevistas cursaban 4º y 6º de primaria, respectivamente. Los estudiantes entrevistados fueron seleccionados por evidenciar diferente rendimiento durante el experimento de enseñanza (en

---

[18] El equipo de investigación que recogió la información estuvo formado por Aurora del Río, Antonio Moreno, Rodolfo Morales, María C. Cañadas y el autor de esta memoria de investigación.

las siguientes secciones detallamos esta selección). Cada estudiante fue entrevistado en dos sesiones diferentes y la duración de cada entrevista fue de 30 minutos, aproximadamente. Cada entrevista fue realizada por el mismo profesor-investigador y un investigador video-grabó las entrevistas. En la tabla 4-2 caracterizamos las dos entrevistas realizadas a los estudiantes de ambos cursos.

Tabla 4-2. *Caracterización de las sesiones de las entrevistas*

Fechas	Est.	Enunciado del problema	Función	Representación introducida
		Cuarto		
07-02-2016 16-02-2016 18-04-2016	8	El sábado vamos a esquiar a Sierra Nevada. Tenemos que dejar el coche en el parking y nos dicen que la entrada cuesta 1 euro y dos euros cada hora que el coche esté allí.	$y=x+2$	Lenguaje natural – escrito Tabular
25-04-2016 09-05-2016 12-05-2016	8	Elsa conduce un tren. Desde que ella comienza el viaje, en cada parada suben tres pasajeros.	$y=3x+1$	Lenguaje natural – escrito Tabular
		Sexto		
08-03-2016 15-03-2016 29-03-2016 05-04-2016 26-04-2016	8	Empezamos con un punto. Cada minuto se añaden 4 puntos.  	$y=4x+1$	Lenguaje natural – escrito Tabular
14-03-2016 01-06-2016	8	Jorge y Rosa tienen diferentes tarifas telefónicas: • La tarifa de Jorge: Él paga 10 céntimos por minuto para todas las llamadas que haga • La tarifa de Rosa: Ella paga 60 céntimos al mes más 5 céntimos por minuto para todas las llamadas que haga.	$y=10x$ $y=5x+60$	Lenguaje natural – escrito Tabular

Nota. Est. = número de estudiantes participantes.

En cada una de las entrevistas se siguió un protocolo en el cual se presentó oralmente un problema a los estudiantes, acompañado por diferentes preguntas. En ambos cursos, el investigador presentó al estudiante el problema y realizó diferentes preguntas, las cuales involucraban: (a) casos particulares; (b) la relación general; y (c) el uso de la notación algebraica. Por ejemplo, el problema del tren (segunda entrevista con estudiantes de cuarto) involucra la función $y=3x+1$. Una vez presentado el problema, planteamos preguntas que involucran:

- *casos particulares*: por ejemplo, la tercera parada está en Málaga, ¿cuántos pasajeros irán en el tren al salir de la estación de Málaga?,
- *la relación general*: Elsa ha parado en un pueblo y no recuerda qué número de parada es la de ese pueblo, pero al llegar a la estación, ve en qué número de parada está. ¿Cómo puedes saber cuántas personas hay en el tren?, y
- *uso de la notación algebraica:* Por ejemplo, Elige una letra para representar el número de pueblos en los que Elsa tiene amigos ¿Por qué eliges esa letra? ¿Qué valores puede tener esa letra? ¿Cuántos amigos van en el tren?

La consideración de preguntas que involucra casos particulares y el caso general también siguen el modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007), con el propósito de indagar sobre los mismos. En los anexos 2-A y 2-B presentamos los problemas usados en las entrevistas, tal como se introdujeron a los estudiantes. Las fuentes de información fueron tres: (a) los vídeos de cada entrevista; (b) las transcripciones de dichas entrevistas; y (c) las producciones escritas de los estudiantes.

Paradigma y diseño de la investigación

Nuestro trabajo tiene un carácter cualitativo y descriptivo. Esta Tesis Doctoral se enmarca en una investigación más amplia centrada en el pensamiento funcional de estudiantes españoles de Educación Primaria. De manera general, en esta investigación seguimos las directrices de la investigación de diseño, considerada un paradigma metodológico emergente que estudia el aprendizaje de los estudiantes en contexto, y es usado principalmente para la exploración de mejoras educacionales, así como describir nuevas formas de aprendizaje para los estudiantes (The Design-Based Research Collective [DBRC], 2003; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2007; Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). En concreto, este paradigma de investigación se adecúa a nuestros objetivos de investigación, ya que: (a) tiene el foco puesto en el diseño y exploración; (b) es "sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje y la enseñanza, percibiendo elaborar avances teóricos con una fuerte base empírica que ayuda a guiar la práctica educativa" (Cañadas y Molina, 2013, p. 15); (c) tiene lugar a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño, lo que se hace de manera paralela al avance de los objetivos; y (d) se realiza durante períodos prolongados de tiempo debido a la ventaja de examinar cambios graduales a medida que los estudiantes aprenden nuevas ideas, conceptos o estrategias (DBRC, 2003; Molina et al., 2011; Prediger, Gravemeijer y Confrey, 2015).

Las investigaciones de diseño tienen un campo de aplicación que varía en término de las edades de los sujetos participantes, así como los temas que se pueden tratar (Prediger, Gravemeijer y Confrey, 2015). Esta multiplicidad de contextos favorece que surjan diferentes tipos de investigación de diseño, desde donde surgen los experimentos de enseñanza (que describimos en la siguiente sección), un tipo de estudio dentro de la investigación de diseño (Molina et al., 2011).

Experimentos de enseñanza

Los experimentos de enseñanza se caracterizan por comprender procesos de enseñanza aprendizaje cuando el investigador actúa activamente como educador, estudiando la naturaleza del desarrollo de ideas, herramientas o modelos en los que están contenidos alumnos, profesores o grupos (Cobb y Gravemeijer, 2008; Kelly, 2003; Kelly y Lesh, 2000). Dentro de las principales características de los experimentos de enseñanza están: (a) la ruptura docente/investigador, ya que las intervenciones son realizadas por uno de los investigadores, quienes experimentan de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los estudiantes; (b) la caracterización de la situación en toda su complejidad; (c) la presencia de muchas variables no controladas; (d) que ocurre en contextos reales; (e) el centro de interés es el desarrollo de alumnos, el desarrollo de docentes y actividades de enseñanza; (f) la duración del experimento puede ser variable; y (g) se pueden desarrollar en pequeñas habitaciones-laboratorio para entrevistas, clases completas o incluso ambientes de aprendizajes más amplios (Kelly y Lesh; 2000; Molina et al., 2011; Steffe y Thomspon, 2010).

En este tipo de diseño se establecen tres fases: (a) la preparación del experimento; (b) la experimentación; y (c) ejecución del análisis retrospectivo (Cobb y Gravemeijer, 2008). En la figura 4-2 presentamos los principales elementos de cada una de las fases.

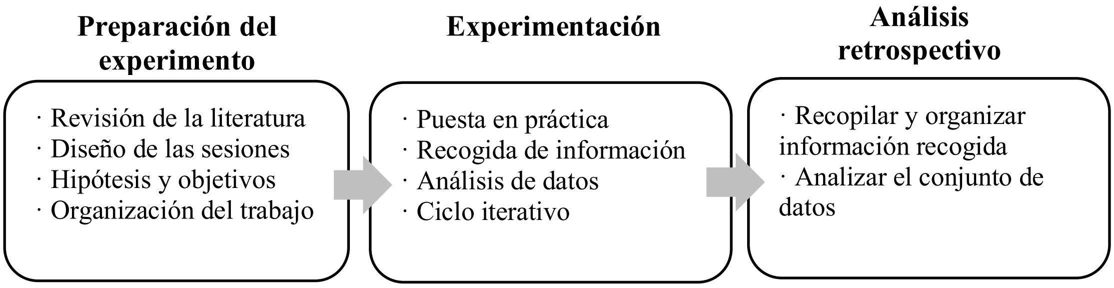


Figura 4-2. Fases de los experimentos de enseñanza

En la segunda fase, centrada en las intervenciones en el aula, se producen las iteraciones del ciclo de tres pasos: (a) diseño y reformulación de la hipótesis; (b) intervención en el aula y recogida de datos; y (c) análisis de los datos, revisión y reformulación de la hipótesis.

En síntesis, uno de los propósitos principales de un experimento de enseñanza es que los investigadores adquieran experiencia directa con el razonamiento matemático, el aprendizaje y el desarrollo de los estudiantes, a través de una secuencia de episodios de enseñanza (Cobb y Steffe, 1983; Steffe y Thompson, 2000). Considerando nuestros propósitos de investigación, parte del objetivo del experimento de enseñanza fue caracterizar el pensamiento funcional de los estudiantes, donde la generalización constituye un elemento central.

Entrevistas individuales semiestructuradas

Tal como lo señalan Cohen, Manion y Morrison (2018), las entrevistas son un instrumento flexible para recolectar información, la cual se caracteriza por tener uno o más propósitos explícitos. La entrevista permite explorar temas en profundidad, para "ver cómo y por qué las personas enmarcan sus ideas de la forma en que lo hacen, cómo y por qué establecen conexiones entre ideas, valores y eventos, opiniones, comportamientos, etc." (p. 506). Estos autores señalan que las entrevistas tienen diferentes propósitos, entre los cuales está el hecho de comprender a una persona, en una determinada situación. Específicamente, y de acuerdo a nuestros propósitos de investigación, la entrevista es una herramienta que permite profundizar en las maneras por las cuales los estudiantes generalizan y representan dichas generalizaciones al trabajar con problemas que involucran funciones.

En el contexto de la investigación cualitativa, las entrevistas varían en el grado en que están estructuradas, entre las que se encuentra la entrevista individual semiestructurada; foco de interés. Una de las principales características de este tipo de entrevista es que "las mismas preguntas o temas generales son expuestos a cada uno de los entrevistados" (Bogdan y Biklen, 2007, p. 275). En este tipo de entrevistas, el entrevistador es libre de modificar, según las respuestas de los estudiantes, la secuencia de las preguntas, las cuales se van acomodando a las respuestas de los estudiantes y permiten obtener información más específica (Ginsburg, 1997).

Fuentes de información

Las fuentes de información consideradas en esta memoria son dos: (a) la última sesión del experimento de enseñanza realizado en cada curso; y (b) entrevistas individuales semiestructuradas llevadas a cabo con un grupo de los estudiantes. Las fuentes de información consideradas se relacionan directamente con los dos objetivos generales de investigación. Asimismo, de cada fuente de información se desprenden los diferentes estudios que forman parte de los resultados de esta Tesis Doctoral. Para clarificar las ideas anteriores, en la tabla 4-3 presentamos la relación las fuentes de información con sus respectivos elementos.

Tabla 4-3. *Relación entre las fuentes de información y los diferentes elementos considerados*

Fuentes de información	Objetivos de investigación	Participantes	Estudios relacionados	Concepción de la generalización
Última sesión del experimento de enseñanza. En concreto, las respuestas escritas de los estudiantes a la hoja de trabajo.	1. Describir y caracterizar la generalización de estudiantes de tercero y de quinto de Educación Primaria al resolver un problema que involucra una función lineal.	24 estudiantes de tercero y 24 estudiantes de quinto.	Estudios 1, 2, 3 y 4.	Como un producto (en términos de Ellis, 2007).

Tabla 4-3. *Relación entre las fuentes de información y los diferentes elementos considerados*

Fuentes de información	Objetivos de investigación	Participantes	Estudios relacionados	Concepción de la generalización
Todas las sesiones del experimento de enseñanza y entrevistas individuales semiestructuradas. En concreto, las respuestas escritas de los estudiantes a todas las sesiones del experimento de enseñanza. Respuestas orales y escritas de los estudiantes a las entrevistas.	2. Describir cómo varían las representaciones usadas por estudiantes de tercero a sexto de primaria al trabajar con diferentes problemas de generalización que involucran funciones lineales.	Ocho estudiantes de tercero/cuarto y ocho estudiantes de quinto/sexto	Estudio 5	Como un proceso (en términos de Ellis, 2007).

A continuación, detallamos los datos que analizamos, considerando ambas fuentes de información y describiendo los participantes, justificación de los datos analizados, descripción de los instrumentos de recogida de información y el análisis y categorías empleadas para analizar los datos.

Última sesión del experimento de enseñanza

En ambos cursos, tercero y quinto, la sesión que analizamos es la última e involucra el problema de las baldosas. Durante el desarrollo de esta sesión, en cada curso se siguió la misma estructura de clase: (a) presentación del problema, en la cual se presentó a los estudiantes el enunciado del problema y las diferentes preguntas involucradas; (b) trabajo individual de los estudiantes en la hoja de trabajo; y (c) puesta en común de alguna de las respuestas, en la cual los profesores-investigadores lideraron una discusión con los estudiantes, centrándose en sus respuestas, ideas y procedimientos a las diferentes preguntas del problema. En ambos cursos, la organización de la sala de clases fue la habitual. En las figuras 4-3 y 4-4 presentamos la organización de las aulas de tercero y quinto, respectivamente.

Figura 4-3. Organización del aula en tercero

Figura 4-4. Organización del aula en quinto

En ambos cursos, los maestros habituales actuaron como observadores pasivos, por decisión propia. En cada clase, una cámara fija se ubicó en la parte central y posterior del aula, la cual grabó el desarrollo de la sesión. Una cámara móvil registró el trabajo de algunos estudiantes al responder la hoja de trabajo.

En las siguientes secciones, detallamos los aspectos centrales de la sesión implementada.

Participantes

Trabajamos con dos grupos de estudiantes de un colegio de Granada, durante el curso 2014-2015. El primer grupo estuvo compuesto por 24 estudiantes de tercero de Educación Primaria

(8-9 años). Los conocimientos previos incluían diferentes estrategias de conteo y las cuatro operaciones básicas con números naturales, con énfasis en la suma y resta. El segundo grupo estaba compuesto por 24 estudiantes de quinto de Educación Primaria (10-11 años), quienes habían trabajado las cuatro operaciones aritméticas básicas de diferentes conjuntos numéricos (naturales, enteros y racionales). Ningún grupo de estudiantes había trabajado previamente con problemas que involucran funciones lineales.

Justificación de los datos analizados

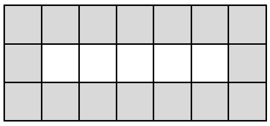
Los datos que analizamos corresponden a las respuestas de los estudiantes a la última sesión del experimento de enseñanza (el problema de las baldosas) en ambos cursos, e involucra la función del tipo $y=ax+b$. Tres hechos principales motivan la selección de la última sesión. Primero, nos interesa analizar cómo estudiantes de diferentes cursos, en concreto de tercero y quinto, responden a un mismo problema, el cual incluye las mismas cuestiones y las mismas representaciones. En segundo lugar, el problema involucra preguntas para la forma directa e inversa de la función inversa, lo cual favorece la descripción sobre como estudiantes de diferentes cursos trabajan con ambas formas de la función lineal. Finalmente, esta sesión fue la última y los estudiantes estaban más familiarizados con el trabajo con tareas de pensamiento funcional.

Instrumento de recogida de información

Durante la cuarta sesión presentamos el problema de las baldosas a los estudiantes, el cual es un problema adaptado de Küchemann (1981). Escogimos este problema por tres razones principales. En primer lugar, este problema es un ejemplo genérico, el cual corresponde a una situación cotidiana que se presenta con la intención de mostrar lo general (Mason y Pimm, 1984) y ha sido utilizado en otros estudios cercanos a nuestra investigación (e.g., Merino et al., 2013). En segundo lugar, el diseño de las preguntas considera casos particulares no consecutivos, con la finalidad de evitar que los estudiantes establecieran recurrencia en su forma de organizar los datos del problema. En tercer lugar, el enunciado del problema está acompañado de una representación pictórica, la cual puede mejorar el entendimiento de los estudiantes sobre el problema y se pueden establecer diferentes maneras de representarlo (Küchemann, 1981).

La figura 4-5 presenta el enunciado del problema, así como las diferentes cuestiones involucradas.

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

6. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan? ¿Cómo lo sabes?

7. En otro pasillo los albañiles también han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 56 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan? ¿Cómo lo sabes?

Figura 4-5. Problema de las baldosas

Las siete preguntas del problema fueron diseñadas en base al modelo de razonamiento inductivo descrito por Cañadas y Castro (2007), que involucra preguntas que incluyen valores particulares y generalización. Las primeras cinco preguntas consideran la forma directa de la función ($y=2x+6$); las cuatro primeras involucran valores particulares y la quinta la generalización. La sexta y la séptima preguntas involucran la forma inversa de la función ($y=(x-6)/2$), preguntando por valores particulares.

Análisis de datos y categorías

Específicamente, los datos que analizamos son las hojas de trabajo de los estudiantes y utilizamos algunos extractos de las grabaciones para ilustrar y complementar algunas respuestas escritas de los alumnos, ya que no todos participaron oralmente de las discusiones video-grabadas. En los anexos 3-A y 3-B presentamos la transcripción de las sesiones de las baldosas con los estudiantes de tercero y quinto, respectivamente. En los anexos 4-A y 4-B presentamos las respuestas de los estudiantes a las hojas de trabajo.

Considerando los objetivos de investigación, establecimos las siguientes categorías de análisis con las cuales analizamos las respuestas de los estudiantes: (a) relaciones funcionales; (b) representaciones; (c) generalización; y (d) estructuras (cada categoría varía según el foco de los estudios desarrollados). Luego, el autor de la tesis codificó las respuestas para después, en conjunto con la directora de este trabajo y los coautores respectivos, realizamos una revisión de las codificaciones. Para cada uno de los análisis empleamos hojas de cálculo, en la cual registramos las respuestas de los estudiantes, según las categorías diseñadas. En la figura 4-6 presentamos las categorías que usamos y su relación con los estudios incluidos.

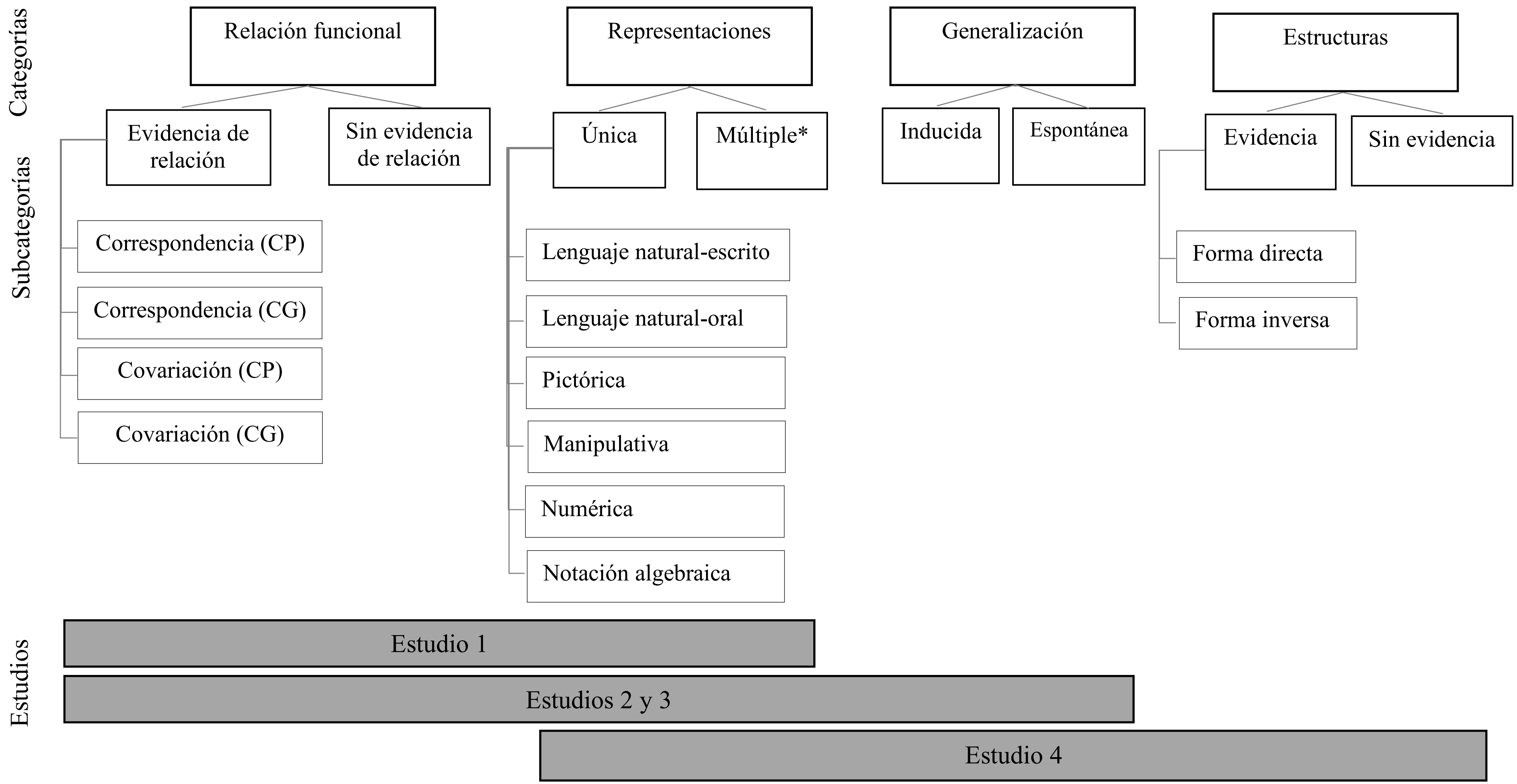


Figura 4-6. Relación entre las categorías de análisis y los estudios

Nota. CP = caso particular; CG = caso general; * = involucra las múltiples posibles combinaciones de representaciones.

Sesiones del experimento de enseñanza y entrevistas individuales semiestructuradas

Con la finalidad de profundizar en las respuestas de los estudiantes, analizamos las respuestas de un grupo de estudiantes ocho estudiantes de tercero y ocho estudiantes de quinto que participaron en el experimento de enseñanza, y sus respuestas a dos entrevistas individuales semiestructuradas, cuando estos cursaban cuarto y sexto, respectivamente. Específicamente, examinamos: (a) las respuestas escritas de los estudiantes a todos los problemas presentados durante las sesiones del experimento de enseñanza (anexo 5-A y 5-B); y (b) sus respuestas orales y escritas durante las dos entrevistas. En el caso de las entrevistas, cada estudiante participó de estas en días diferentes (ninguno de ellos respondió a los dos problemas en el mismo día). Las fuentes de información analizadas de las entrevistas provienen de tres fuentes: (a) grabaciones mediante vídeo-cámara; (b) transcripciones de las grabaciones (anexos 6-A y 6-B); y (c) producciones escritas de los estudiantes (anexos 7-A y 7-B). Las grabaciones fueron realizadas con una cámara fija, la cual registró la totalidad de la entrevista. En las figuras 4-7 y 4-8 presentamos el espacio físico en el cual se realizó cada una de las entrevistas.

Figura 4-8. Organización de una entrevista en cuarto

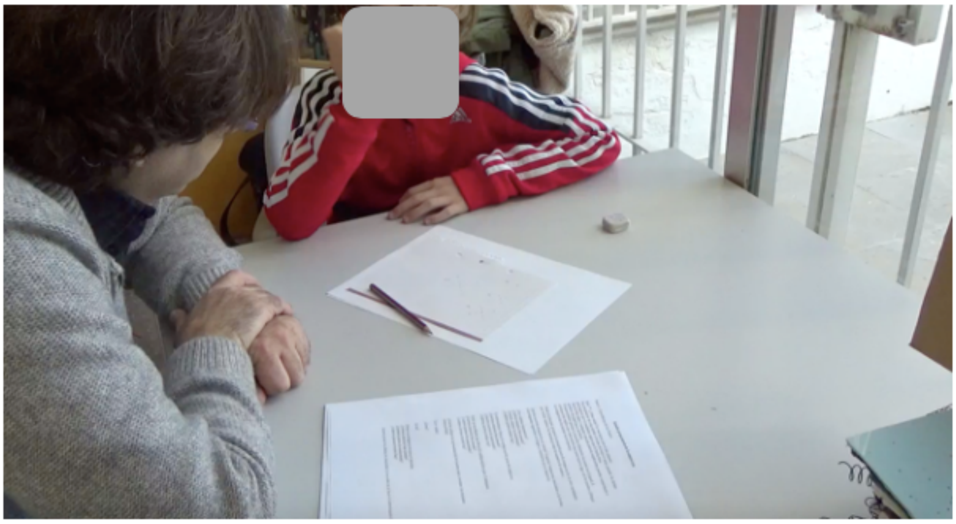


Figura 4-9. Organización de una entrevista en sexto

A continuación, presentamos los principales elementos considerados.

Participantes

Seleccionamos a ocho estudiantes que, al momento de la entrevista, cursaban cuarto de primaria y ocho estudiantes que cursaban sexto. Para la selección de estos estudiantes, analizamos las respuestas de los 24 estudiantes de tercero y de los 24 estudiantes de quinto al experimento de enseñanza y los organizamos en tres grupos de rendimiento (avanzado, intermedio e inicial), con base en sus avances en la identificación de patrones y en la generalización. Luego de esta agrupación, y con ayuda de la tutora de la clase, seleccionamos a los ocho estudiantes de cada curso considerando su disposición para colaborar. En el anexo 8 presentamos el análisis de las respuestas de los ocho estudiantes de cada curso, organizados en los grupos descritos.

Justificación de los datos analizados

Analizamos las respuestas escritas de los estudiantes a los problemas de todas las sesiones del experimento de enseñanza, así como sus respuestas orales y escritas a los dos problemas presentados durante las entrevistas individuales. Los problemas presentados a los estudiantes, tanto en el experimento de enseñanza como en las entrevistas, contienen diferentes tipos de formatos. Con la finalidad de analizar las respuestas de los estudiantes al mismo tipo de pregunta, en la tabla 4-4 caracterizamos los problemas empleados.

Tabla 4-4. *Caracterización de los problemas presentados*

Problema	Tipo de pregunta: Exploración casos particulares / caso general	Tipo de pregunta: Verdadero / Falso	Tipo de pregunta: Construir gráfico	Tipo de pregunta: Construir/ completar tabla	Tipo de relación: Directa	Tipo de relación: Inversa
			Tercero/Cuarto			
Experimento de enseñanza						
Edades	X			X	X	X
Camisetas	X	X	X	X	X	X
Baldosas	X				X	X
Entrevistas						
Parking	X				X	X
Tren	X				X	X
			Quinto/Sexto			
Experimento de enseñanza						
Camisetas I	X			X	X	
Camisetas II	X			X	X	X
El trato	X				X	
Baldosas	X				X	X
Entrevistas						
Puntos	X				X	X
Tarifas	X				X	X

Tal como lo presentamos en la tabla 4-4, todos los problemas tienen en común dos aspectos: (a) contienen preguntas que exploran la relación entre casos particulares y el caso general, y (b) todos exploran el valor de la variable dependiente dada la independiente (relación directa). Por tanto, analizamos las respuestas de los estudiantes a los problemas del experimento de enseñanza y a las entrevistas considerando los dos aspectos anteriores.

Instrumentos de recogida de información

Los instrumentos de recogida de información son los problemas que se presentaron a los estudiantes durante el experimento de enseñanza (ver tabla 4-1) y los problemas usados en las entrevistas (ver tabla 4-2). En el caso de las entrevistas, cada estudiante disponía de un papel y lápiz que podía emplear libremente. La entrevista fue grabada mediante videocámara.

Análisis de datos y categorías

Considerando las fuentes de información, analizamos las respuestas de los estudiantes considerando las representaciones que estos usaron al generalizar. De manera simultánea, aplicamos dos categorías interrelacionadas, las cuales buscan analizar las representaciones que usan los estudiantes al trabajar con problemas que involucran: (a) diferentes tipos de función lineal; y (b) casos particulares y al generalizar. Para evitar reiterar la información, en el quinto capítulo describimos y profundizamos en las categorías usadas.

CAPÍTULO 5
RESULTADOS

En este capítulo presentamos lo resultados de esta Tesis Doctoral, los cuales están organizados en cinco estudios (uno de ellos publicado y los otros cuatro en revisión). Los primeros cuatro estudios tributan al objetivo general 1 (describir y caracterizar la generalización de estudiantes de tercero y de quinto de Educación Primaria al resolver un problema que involucra una función lineal) y a sus respectivos objetivos específicos. A continuación, presentamos el orden de los estudios, según aparecen en este capítulo.

- Estudio 1. Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (en revisión). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra.

- Estudio 2. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA, 12*(3), 173-184.

- Estudio 3. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (en revisión). Generalizations of third and fifth graders from a functional approach to early algebra.

- Estudio 4. Pinto, E., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (en revisión). Fifth graders working on direct and inverse forms of a function. A study within a functional approach to early algebra.

Estos estudios, escritos en inglés, analizan las respuestas de los estudiantes al responder al problema de las baldosas; en los primeros tres analizamos sus respuestas a las primeras cinco preguntas del problema, las cuales involucran la forma directa de la función lineal. El cuarto estudio analiza las respuestas de los estudiantes de quinto a las siete preguntas del problema de las baldosas. Adicionalmente, los primeros tres estudios analizan las relaciones funcionales, representaciones y generalización de los estudiantes de tercero y/o quinto al resolver el problema de las baldosas, mientas que el cuarto estudio describe el trabajo de los estudiantes de quinto al trabajar con las formas directas e inversa de una función lineal, así como la consideración de los conceptos de estructuras, representación y generalización.

El quinto estudio aborda el objetivo general 2 (describir cómo varían las representaciones espontáneas que usan estudiantes de tercero a sexto de primaria al trabajar con diferentes problemas de generalización que involucran funciones lineales) y sus respectivos objetivos específicos. A continuación, detallamos las principales características del reporte de investigación citado, denominado estudio 5.

- Estudio 5. Pinto, E., Brizuela, B. M. y Cañadas, M. C. (en revisión). Variación de representaciones matemáticas de estudiantes en Educación Primaria.

ESTUDIO 1

FUNCTIONAL RELATIONSHIPS EVIDENCED AND REPRESENTATIONS USED BY THIRD GRADERS WITHIN A FUNCTIONAL APPROACH TO EARLY ALGEBRA

Eder Pinto, María C. Cañadas, and Antonio Moreno
University of Granada, Spain

Abstract

This study describes how 24 third-graders (8-9 years old) relate and represent the relationships among variables when working with a functional thinking task. This aspect contributes to provide insights about how students attend properties and relationships between covarying quantities. From a functional approach to early algebra, we describe students' answers when working with specific values and when generalizing. Design research guidelines, specifically those set out for Classroom Teaching Experiment (CTE) were followed. This study addresses the fourth and last CTE session, which involved a function of the type $y=ax+b$, with which the students had not previously worked. The findings show that they identified primarily correspondence relationships, which they represented numerically. Three students generalized the functional relationship while five students used more than one type of representation to express the relationships between variables.

Keywords

Functional relationships, representations, generalization, functional thinking, early algebra

Introduction

Algebraic thinking in elementary and middle grades (also known as early algebra) plays a crucial role in research on classroom algebra because it promotes the identification of mathematical relationships and structures, rather than isolated arithmetic and computational fluency, for instance (Cai & Knuth, 2005). We adopt the idea of algebra and early algebra beyond the use of algebraic notation; we promote that students attend to properties and relationships between quantities explicitly and examining their generality (Kaput, 2008). Specifically, we focus in a functional approach to early algebra (Carraher & Schliemann, 2007), in which function is the prime mathematical content and it acts as a gateway to algebra in the early grades, favoring the vision of arithmetic operations as functions and enabling students to explore the notion of variable as a variation between quantities (Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011). Functions, in other words, enhance students' ability to generalize, help unify unrelated mathematical ideas and procedures, and serve as support in problem solving. They also reduce the difficulties encountered by students to undertake more formal algebraic work in secondary school (Romberg, Fennema, & Carpenter, 1993).

Broadly speaking, our objective is to describe how third elementary school students relate and represent the variables involved in a functional thinking task. Different studies have reported how elementary school students perceive, express, and generalize regularities in problems that involve functions (e.g., Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, & Newman-Owens, 2015; Chimoni, Pitta-Pantazi, & Christou, 2018; Cooper & Warren, 2011; Pinto & Cañadas, 2018). However, some topics have not been deepening addressed in the recent literature on a functional approach to early algebra. First, most of the studies that analyze the functional relationships evidenced by elementary school students do so in instructional contexts (e.g., Carraher & Schliemann, 2007; Cooper & Warren, 2011; Radford, 2018). Nevertheless, some studies have focused on exploring and describing how elementary school students, without prior instruction, evidence functional relationships. For example, Morales, Cañadas, Brizuela, & Gómez (2018) analyzes the responses of 30-first-graders working with problems that involved functions, during a CTE and, subsequently, interviews conducted with four of these students. The main results showed that students, when solved for first time a problem that involves an additive function ($y=x+5$), more frequently evidenced the functional relationship of correspondence. For example, these students frequently added the constant amount of the function to the amount of the independent variable. On the other hand, these results provide evidence that some students also showed covariation relationship. In summary, there is a paucity of research addressing and deepening how students of elementary school, without prior instruction, relate variables.

Second, representation is fundamental to functional thinking as they serve to: (a) represent mathematical ideas, forming an integral part of how students think about functions; (b) mediate between subjects and the functions and functional relationships, helping to structure and expand students' thinking; and (c) constitute a way of expressing relationships among variables, which if suitably chosen, it can unify possibly isolated ideas (Brizuela & Earnest, 2008; Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006; Carpenter & Franke, 2001; Goldin & Shteingold, 2001;). Representing is described as a sociocultural vehicle used to generalize, enable students to build and complete the ideas that help them reason about general statements and compress multiple instances into the unitary form of a single statement that symbolizes the multiplicity. Thus, generalization is the "act of creating that symbolic object" (Kaput, Blanton, & Moreno, 2008, p. 20). Although algebraic notation is a key type of representation in algebra, we adopt the idea that elementary school students could express covarying quantities through different representations: natural language (oral and written), gesturing, tabular, and pictorial representation, for instance (Carraher & Schliemann, 2007; Radford, 2003). Our interest is to describe how elementary students use representations when relating variables in functional thinking tasks, either working with particular values or generalizing. Some studies reported that elementary school students have fewer types of representations to express general relationships than to express the relationships between specific values (e.g., Blanton et al., 2015). Such observations are indicative of the need for studies in greater depth of how such students identify and express functional relationships.

Third, this study is important within the Spanish context. At the end of elementary education, students should "describe and analyze situations of change, find patterns, regularities, and mathematical laws in numerical, geometric and functional contexts, valuing their usefulness for making predictions" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19.387). In addition, Chimoni, Pitta-Pantazi, and Christou (2018) point it out to functional thinking should be addressed from elementary school, providing to children long-term and sustained experiences for developing their intuitive ways of thinking into more formal ones. Classroom culture and teaching practices should address students' intuitive strategies so that these become more robust over time. Therefore, it is important to provide empirical data that help us describe how these students understand changes in functional contexts, where representations are a way of describing how students describe and analyze situations of change, specifically between covarying quantities. The Spanish research conducted around functional thinking tasks has focused primarily on the lower or upper grades of elementary school (e.g., Morales et al., 2018). As a consequence, there is a paucity of research addressing the intermediate grades of the elementary school on topics pivotal to working with functions, such as functional relationships and the types of representation used to express them.

Theoretically, this study builds on Kaput's ideas (2008) about algebraic thinking, where generalizations and the ways they are expressed were emphasized. We are interested in describing how third graders working with problems that involve covarying quantities, connecting particular values, perceiving, representing and generalizing relationships and structures underlying in each situation. Particularly, we adopt a functional approach to early algebra (Carraher & Schliemann, 2007), which builds on the relationship between two or more covarying quantities involving the types of thinking that range from specific relationships to the generalization of relationships (Smith, 2008). Considering the research objective—to describe how third elementary school students relate and represent the variables involved in a functional thinking task—we define two specific research objectives to:

- 1. Identify the type of functional relationships evidenced by the students.
- 2. Describe the type or types of representations used by them.

In addressing these specific research objectives, we analyze evidence from a specific session of a CTE, in which students worked with a problem and answered different questions on a worksheet.

Functions and functional relationships

We adopt the concept of function as "a correspondence between two nonempty sets that assigns to every element in the first set (the domain) exactly one element in the second set (codomain)" (Vinner & Dreyfus, 1989, p. 357). Here the focus is on linear functions, specifically the type $f(x)=mx+b$ where m and b are constants, and variables x and y natural numbers. This type of function is deemed suitable for the age and type of work expected of elementary school students in the functional approach to early algebra (Carraher & Schliemann, 2007). Usually, in studies that address a functional approach to early algebra functions are presented through contextualized problems (the problem used in this study is an example), in which questions are related with the relationships and rules between dependent and independent variables. Considering the above idea, a functional relationship is understood here to be "a lawful pattern involving two variables in which the value of one variable can be computed by applying the functional rule to the value of the other variable" (Brenner, Mayer, Moseley, Brar, Duran, Smith, et al., 1997, p. 668). Confrey and Smith (1991) established a problem-based reference framework for teaching functions. Further to their ideas and Smith's (2008) proposal, we consider two types of functional relationships involving values for both variables: (a) correspondence, which focuses on the relationships between pairs of values (a, $f(a)$) and (b) covariation, which analyzes how two quantities co-vary and how change in one produce change in the other. These two types of functional relationships are illustrated in Figure 5-1.

Covariation. The change in one of the individual variables is coordinated with change in the other. Here, for example, when x increases by 1, y increases by 2.

x	y
1	8
2	10
3	12
…	…

Correspondence. The relationship between x and y is described. Verbally here, for instance, as twice x plus six or algebraically as: $2x + 6$".

Figure 5-1. Example of functional relationships (Adapted from Smith, 2008, pp. 146-147)

Correspondence and covariation can be represented both to express the relationship between variables in specific values and/or when generalizing the relationship. Early elementary graders have been shown to evolve from the ability to identify recurrent patterns to provide evidence of correspondence and covariation (e.g., Cañadas, Brizuela, & Blanton, 2016; Moss & McNab, 2011; Stephens, Fonger, Knuth, Strachota, & Isler, 2016). Other findings suggest that students' ability to identify a functional rule grows as they work with different specific instances in which the values of the two variables change. They have also been observed to find it more difficult to represent than to identify the functional relationship (Warren, Miller, & Cooper, 2013). Both correspondence and covariation can be expressed using different types of representations. Figure 5-2 shows different types of representations used by a third grader when working with a problem in which people's height when bare-headed was related to their height when wearing a 1-foot high hat.

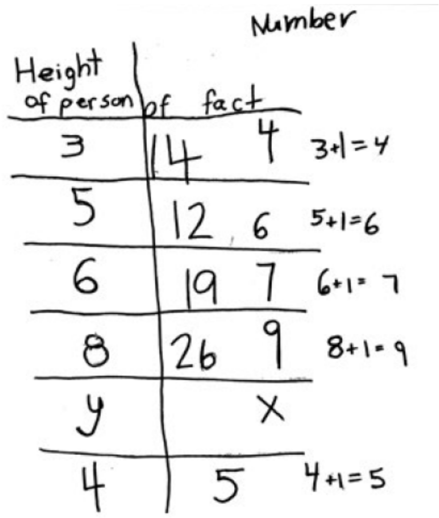


Figure 5-2. Example of functional relationship between specific corresponding values (Blanton et al., 2015, p. 531)

The student identified a correspondence functional relationship for specific instances (see Figure 2), recognizing the pattern that relates the dependent and independent variables. She initially arranged the specific instances in a table and subsequently, using numerical symbols, established the relationship between the two quantities (in the first row for instance, writing 3+1 to determine the person's height with the hat on). As this example shows, the student realized that different types of representation can be used to express a given functional relationship.

Representations

Representations are essential elements in building mathematical knowledge, as well as crucial vehicles for capturing mathematical ideas, which can be used to express a mathematical object, a concept or a procedure constructed by students (Cai, 2005; Goldin, 1998; Kaput, 1991). In this study, we are interested in describing the representations by which elementary school students express relationships between specific values and the general rule among variables. The four types of representations described by the literature on school algebra traditionally are: natural language, graphical, tabular, and algebraic notation (Brenner et al., 1997, Williams, 1993). We consider different types of representations (e.g., verbal, manipulative, pictorial, numerical, algebraic symbolism, tabular, and graphical) that help students to reason fluently to understand and predict functional behavior (Brizuela & Blanton, 2014).

In recent research, Radford (2018) describes the development of "symbolic algebraic thinking" from second to sixth grade (7 to 12-year-olds) based on problems involving functions. The author describes different types of genuine algebraic symbolism, while deeming "gesture, language, perception, and symbol use to account for non-conventional forms of signifying mathematical generality" (p. 12). Fourth graders (9- to 10-year-olds) were observed to initially generalize the relationship using natural language. One student, for instance, expressed the general rule using the word "always" (factual generalization). When asked to express the generalization using letters, he gave the general relationship as "$2\times a=b+1=c$". The two representations used by this student to generalize (natural language and algebraic symbolism) illustrate the importance of the notion of multiple representations, as discussed below.

Some researchers contend that multiple representations should be an essential part of school algebra, for it entails the application of the knowledge of operations, helping a deeper and fuller understanding of mathematics (Yerushalmy & Schwartz, 1993). In particular, this study explores the relationship between two or more types of representations simultaneously used by students when solving problems involving linear functions. In the functional thinking approach, multiple representations: (a) draws a connection between two types of representations, which become a tool for establishing a given relationship; (b) enables students to externalize and visualize different but complementary sides of an idea through meaning pathways; (c) creates an environment favorable to abstraction and comprehension of mathematical conceits, necessitating an understanding of how students use representation and inter-connections between types of representations; (d) and constitutes a topic scantily explored in elementary school grades (e.g. Brizuela, 2005; Brizuela & Earnest, 2008;

Confrey & Smith, 1994). In a longitudinal study, Carraher and Schliemann (2007) analyzed students' understanding of certain features associated with functions on the grounds of their use of representations when working with problems involving linear functions. Figure 5-3 shows a student's answer to a problem relating the amount of pocket money two people have, based on the functions $f(x)=x+8$ and $f(x)=3x$.

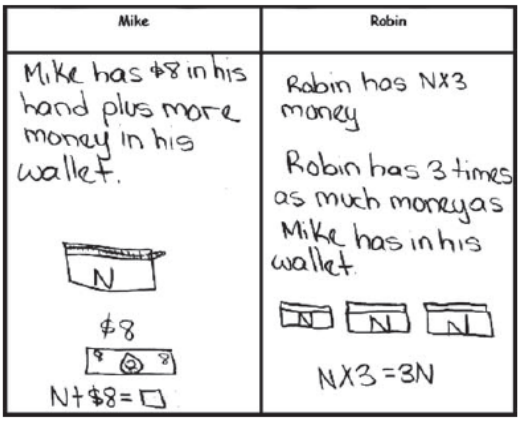


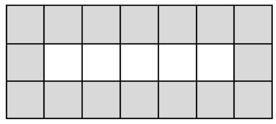
Figure 5-3. Example of multiple representations (Carraher & Schliemann, 2007, p. 693)

Three types of representations (natural language, pictorial, and algebraic symbolism) converged in the student's response to calculate each person's pocket money shown in Figure 5-3. The three representations enabled him to generalize the relationship and infer, compare, and refine ideas (Brizuela & Earnest, 2008).

The study

This study forms part of a broader research with Spanish students in the elementary grades (6- to 12-year-olds). Here the focus was on third-graders' answers to a functional thinking task. Design research guidelines, specifically those set out for CTE were followed. The researcher acts actively as a teacher, studying the nature of the development of ideas in which students are included (Cobb & Gravemeijer, 2008; Kelly & Lesh, 2000). Specifically, we designed a four-session CTE in which a different problem was posed in each session. Broadly speaking, in the four sessions we considered the same objectives, which were to: (a) explore how students relate the variables involved in a problem involving a linear function; (b) introduce different types of representations to express functional relationships; and (c) explore students' generalizations when working with functional thinking tasks. Table 5-1 shows the contexts and functions involved in each session. Some of them were selected from previous studies and others were designed by the research team.

Table 5-1. *Problems and functions used in each session*

Session	Problem context	Function
1	María and Raúl are brother and sister. They live at La Zubia. María is the elder. We know that María is 5 years older than Raúl.	$f(x)=x+5$
2 and 3	Carlos wants to earn money selling T-shirts with the school's emblem to go on a trip with the rest of the class. He earns 3 euros for every T-shirt sold.	$f(x)=3x$
4	A school wants to replace the floor in all its corridors, where the tiles are severely damaged. Its board decides to lay white and grey tiles on all the floors. All the tiles are square and of the same size and are to be laid in the following pattern: 	$f(x)=2x+6$

The problems were drawn (and most adapted) from earlier studies, such as problem 4, adapted from Küchemann's (1981) tiles problem. Students were asked to answer several questions in connection with the problems in Table 5-1. Three researchers were present during the CTE: one was the teacher-researcher, other the support researcher, and the third acted as video camera operator. The usual mathematics teacher, by her own decision, participated as an observer. This paper addresses the fourth and last session, which involved a function of the type $f(x)=ax+b$.

Data selection

This paper reports the findings from the last CTE session. Three main reasons motivate the interest on the last session. First, the tiles problem involved a function of type $f(x)=ax+b$, which the students had not previously worked in the CTE. Second, this session was the last one and the students were more familiar with working with functional thinking tasks and with the research team. Third, this problem was worked with fifth grade students, which will allow us to make comparisons in the future.

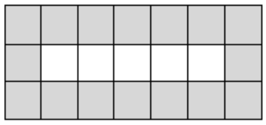
Participants

The subjects were 24 third-grade students (8-9 years old) who attended a Spanish school. The school was intentionally chosen because of its interest in collaborating. The students had not been introduced to problems involving functional relationships prior to the sessions. They had been taught to add and subtract, count one by one, two by two, five by five and ten by ten. None required an adapted curriculum.

Data collection and instrument

Session 4, the one addressed here, consisted of three parts. In the first, the teacher-researcher introduced the tiles problem and asked the students questions to ensure they had understood it. The function involved in the tiles problem (Figure 5-4) was $f(x)=2x+6$.

A school wants to replace the floor in all its corridors, where the tiles are severely damaged. Its board decides to lay white and grey tiles on all the floors. All the tiles are square and of the same size and are to be laid in the following pattern:



The school asks a company to replace the floors in all the corridors. We want you to help the masons answer some questions before they can start to work.
Q1. How many grey tiles do they need if a corridor has five white tiles? How did you figure that out?
Q2. Some corridors are longer than others. Therefore, the masons need different numbers of tiles for each corridor. How many grey tiles do they need for a corridor with eight white tiles? How did you figure that out?
Q3. How many grey tiles do they need for a corridor with 10 white tiles? How did you figure that out?
Q4. How many grey tiles do they need for a floor with 100 white tiles? How did you figure that out?
Q5. The masons always lay the white tiles first. How can they know how many grey tiles they need if they've already laid the white tiles?

Figure 5-4. The tiles problem

As Figure 4 shows, the first three questions (Q1, Q2, and Q3) involved specific instances with numbers under 100, while the value in the specific instance in Q4 was 100. Question 5 (Q5) asked for generalization. The children were allowed to use manipulatives representations, namely white and grey paper squares, to represent the two types of tiles.

During the second part of the session, the students worked individually on a worksheet to solve questions related to the problem posed (Q1-Q5). In this stage, which was video-recorded, the teacher-researcher guided the students and answered their questions. In the last part of the session, the group pooled its experience on the work performed, led by the teacher-researcher who asked questions and encouraged the students to explain their answers.

Information was gathered from three sources: the video recordings of the session; the researchers' notes; and the students' answers on their individual worksheets. The data analyzed in this paper were the students' CTE worksheets because we have answers from all the students (and the videos recording only contain the oral answers of some students).

Data and analysis categories

The students' answers to questions Q1 to Q5 were analyzed considering two categories simultaneously:

1. Functional relationships. We identify the functional relationship underlying students' responses to the tiles problem questions, regardless of whether the functional relationship is correct or incorrect to the tiles problem. The purpose of this analysis was to identify in which ways third graders relate the variables involved in the problem. Figure 5-5 shows an example of how we identified functional relationships in one student's responses.

Question (Q)	Student's responses		Functional relationship underlying student's response
Q1 (5 white tiles)	3+3+5+5=16	⇨	Correspondence
Q2 (8 white tiles)	3+3+8+8=22	⇨	Correspondence
Q3 (10 white tiles)	3+3+10+10=26	⇨	Correspondence
Q4 (100 white tiles)	3+3+100+100	⇨	Correspondence

Figure 5-5. Examples of functional relationship identified in a student's responses

We evidence correspondence in these responses because a rule is constructed to determine the unique value of any given value (*x*), thus creating a correspondence between *x* and *y*.

2. Representations. We identify the representation used by students to express the regularity in each question: natural language-written, manipulative, pictorial, numerical or algebraic notation.

Each category emerges from theoretical perspectives derived from previous studies. Specifically, each category was designed to respond to our specific research objectives. The first category, functional relationships, is related to specific research objective 1 (identify the type of functional relationships evidenced by the students) and the second category is related to specific research objective 2 (describe the type or types of representations used by them). Table 5-2 summarizes the categories, subcategories, and codes used to analyze each student's responses.

Table 5-2. *Analysis categories*

Category	Sub-category	Code
1. Functional relationships	1.1. Provide evidence of a functional relationship	1.1.1 Correspondence, specific instance 1.1.2. Correspondence, generalizing 1.1.3. Covariation, specific instance 1.1.4. Covariation, generalizing
	1.2. Not provided evidence of a functional relationship	1.2.1. The subject only answered the question. 1.2.2. The subject repeated the problem wording. 1.2.3. The subject furnished or alluded to pictorial representations, but provided no information on the relationship. 1.2.4. The subject performed arithmetic operations with no clear meaning. 1.2.5. No answer
2. Representation	2.1. One type of representation	2.1.1. Natural language-written 2.1.2. Manipulative 2.1.3. Pictorial 2.1.4. Numerical 2.1.5. Algebraic notation
	2.2. Multiple representations	*

Note: *= all the possible combinations of more than one of the types of representations listed

As the data in Table 5-2 show, some students could provide evidence of functional relationship when they were asked for specific values or when generalizing. Given the problem type, students were deemed to have evidenced a functional relationship when: (a) a regularity was evidenced in at least two of the first three questions (Q1-Q3); (b) a functional relationship was identified in Q4 and the preceding questions; or (c) when a functional relationship was evidenced in the answer to Q5. Those criteria were adopted to ensure that functional relationships would not be identified on the grounds of the answer to a single question that might have been found arithmetically.

Each student's answer was coded in two phases. First, the corresponding author coded all written answers considering both categories. Then, we contrasted these codes with the other two authors.

Results

All the students replied to the first three questions, while the 19 students answered to Q4. Sixteen students answered Q5. The sections below describe the functional relationships and types of representations used by students when working with the tiles problem.

Functional relationships

The 24 students' answers are summarized in Table 5-3.

Table 5-3. *Functional relationships identified by third-graders*

Not provided evidence of functional relationship	Functional relationship evidenced			
	Correspondence		Covariation	
	Specific values	Generalization	Specific values	Generalization
13	7*	3	2*	0

Note. *=one student provide evidence both correspondence and covariation functional relationships

As the data in Table 5-3 show, a total of 13 students[19] did not evidence functional relationships. S17's answer to Q1 ("How many grey tiles do they need for a floor with five white tiles?"), for instance, was: "16 tiles because I counted them on the drawing". In her answer, student S17 referred to the pictorial representation included in the problem and her response do not provide evidence a functional relationship (code 1.2.3). In contrast, 11 students provided evidences of functional relationships when answering to different questions.

Of the 11 students in whose answers functional relationships were identified, 10 provided evidence of correspondence only and three of these students generalized. One student provided evidence of correspondence and covariation, while another student only

[19] To respect students' anonymity, each was assigned a code consisting of the letter "S" and a number from 1 to 24.

provided evidence of covariation in the answers related to specific values. The findings for each type of functional relationship identified are discussed below.

Evidences of correspondence

Of the 10 students who evidenced a correspondence functional relationship, seven did so for specific instances only. In one student, S19, we identified correspondence only for questions involving amounts of under 100 (Q1 and Q3); another, S3, only for the question involving the specific instance of 100 tiles (Q4); and five for specific instances involving amounts less than or equal to 100 (Q1-Q4). S5's answers to some questions, deemed representative for the manner in which she provides evidence of the correspondence relationship between the variables in specific instances, are shown in Figure 5-6.

Q1. (Find the number of grey tiles if there are five white tiles)	3+3+5+5=16
Q2. (Find the number of grey tiles if there are eight white tiles)	3+3+8+8=22
Q3. (Find the number of grey tiles if there are 10 white tiles)	3+3+10+10=26
Q4. (Find the number of grey tiles if there are 100 white tiles)	3+3+100+100

Figure 5-6. S5's answers to Q1-Q4

In her answer, S5's answer (see figure 5-6) focuses on the number of grey tiles given the number of white tiles. In all four replies, she defined pairs of values (a, f(a)) for the a values in each specific case (5, 8, 10 and 100) and established a relationship with the number of grey tiles: 16, 22, 26 and 206, respectively. S5 answered all the questions following the same "closed form rule" to describe a relation between quantities (Confrey & Smith, 1994), adding adding to the number of tiles on the left and right sides (3+3) the number of top and bottom grey tiles, which varied from one question to the next. This, S5 provide evidence of a rule constructed to determine the unique value of any given value (x), thus creating a correspondence between x and y. That approach to decomposing the number of grey tiles, which was the same in all the questions, "reflects the ability to see a pattern based on the graphic representation included in the presentation of the problem" (Cañadas, Castro & Castro, 2008, p. 145).

All three students who generalized the correspondence did answer to Q5—when we explicitly ask for this relationship—and also provide evidence of correspondence for all the specific instances (Q1-Q4). Two students provide evidence of generalization only considering the constant in the function; they identified the number of grey tiles that, regardless of the number of white tiles, are always the same: three on the right side and three on the left (six in total). For instance, S22 answered to Q5 (The masons always lay the white tiles first. How can they know how many grey tiles they need if they've already laid the white tiles?) writing "adding 6". Student S9, in turn, generalized all the elements involved in the function (relating the dependent and independent variables). Figure 5-7 shows the functional relationships identified by S9 in several questions.

Q2. (Find the number of grey tiles if there are 8 white tiles)	8 + 8 = 16 16 + 3 + 3 = 22
Q4. (Find the number of grey tiles if there are 100 white tiles)	10 + 10 + 3 + 3 = 26
Q5. (Find the number of grey tiles given any number of white tiles)	"You add 6 to twice the number of white tiles"

Figure 5-7. S9's answers to Q2, Q3 and Q4

Evidences of covariation

Of the 11 students who provide evidence of functional relationships, only in two we identified the functional relationship of covariation underlying students' responses to the tiles problem questions. Neither generalized that relationship. One student, S12, provide evidence of covariation in his responses to Q2, Q3, and Q4, while in S3' responses we identified covariation in Q3 and correspondence in Q4. He, S3, was the sole student who provide evidence of both functional relationships, although he did so in answers to different questions. A number of examples of students' answers follow. Figure 5-8 reproduces the answers furnished by S12, who evidenced covariation in three of the questions posed.

Q1. (Find the number of grey tiles if there are 5 white tiles)	16
Q2. (Find the number of grey tiles if there are 8 white tiles)	16×3=48 5+3=8
Q3. (Find the number of grey tiles if there are 10 white tiles)	5+5=10 y 16×5=80
Q4. (Find the number of grey tiles if there are 100 white tiles)	16×100=1600

Figure 5-8. S12's answers to Q1-Q4

S12's answers show that he realized that the change in value in one variable (from five to eight white tiles, for instance) affected the value of the other variable (from 16 to 48 grey tiles). This student first identified the difference between five and eight (three), which he then multiplied times the number of grey tiles needed for five white tiles, i.e., he applied different arithmetic operations to the dependent and independent variables.

S3 identified a correspondence relationship in questions Q4 and Q5, and covariation in Q3. The answers that attested to her evidence of covariation are reproduced in Figure 5-9.

Q2. (Find the number of grey tiles if there are 8 white tiles)	20. "set them [the manipulatives] up and count them"
Q3. (Find the number of grey tiles if there are 10 white tiles)	22. "if for 8 [referring to Q2] you need 20+2=22"

Figure 5-9. S3's answers to Q3

S3's answers (Figure 5-9) revealed that to answer Q2, she used the manipulative representations (white and grey paper squares to represent the two types of tiles) to visualize the eight white tile question (20, in her count). To reply to Q3 (find the number of grey tiles if there are 10 white tiles) she established a covariation relationship, building on the result of the preceding question to define a procedure (add 2) to find the answer. Here the student used the variation between the number of white tiles (10-8=2) to calculate the number of grey tiles, concluding that two more would also be needed. Focusing on the simultaneous change in the two variables, she realized that any variation in the value of the independent variable entailed a variation in the value of the dependent variable. In other words, she evidenced a covariation relationship.

Representation

Considering all students' responses, Table 5-4 shows the types of representations used by them in different questions to express functional relationships.

Table 5-4. *Types of representations used to express functional relationships*

	Functional relationship				
	Correspondence (n=38)		Covariation (n=6)		
Representation	G	SV	G	SV	Total
Pictorial	0	2	0	0	2
Manipulative	0	0	0	1	1
Natural language-written	3	16	0	5	24
Numerical	0	27	0	3	30
Multiple representations	0	8	0	2	10
Total	3	53	0	11	

Note: G=generalization; SV=specific values

As Table 5-4 shows, students tended to express functional relationships numerically (30 of a total of 38 answers) or natural language-written (24 answers). Correspondence relationships were represented primarily numerically, while covariation relationships were described verbally. Generalization was only observed in correspondence relationships and was likewise expressed verbally. Neither algebraic notation was used.

Five students exhibited multiple representations, all mainly related to correspondence. By way of example, S24's answer to Q3 contained two types of representations, as illustrated in Figure 5-10.

Q3. (Find the number of grey tiles if there are 10 white tiles)	26. There are 10 white tiles, three grey tiles on each side and 10 on the top and 10 on the bottom 10+10=23+3=26

Figure 5-10. S24's answer to Q3

This figure shows that both the natural language and numerical representation furnished information and while their meanings were independent, they were both needed to reply fully to the question. In keeping with the literature, this answer was deemed to constitute multi-representation.

In the same vein, S19 combined pictorial and numerical representation, which must be analyzed together for them to make sense, as shown in Figure 5-11.

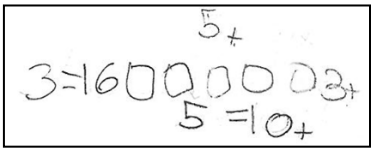


Figure 5-11. S19's answers to Q1

In the answer to Q1 exemplified in Figure 5-11, the student used a pictorial arrangement to represent the number of white tiles and numbers to represent the number of top, bottom, left and right-side grey tiles. In light of the joint use of pictorial and numerical representation, this was deemed to constitute multiple representations.

Discussion and conclusions

This study describes how elementary school students, specifically 24 third-graders, relate and represent the relationships among quantities when working with a functional thinking task. The originality of this study lies in the idea of exploring and describing students' responses without instruction. More specifically, this study contributes to deepen and provide evidence of how students identified relationships among covarying quantities and what types of representations they used answering questions that involve specific values and generalization.

Concerning the first specific research objective—to identify the type of functional relationships evidenced by the students—we describe how 11 students related variables involved in the tiles problem. The others 13 students were characterized by the lack of any reference to the relationships between variables present in the tiles problem. Three main issues derive from this objective. First, all students answered the first three questions (Q1-Q3) on the worksheet, whereas fewer replied to the questions involving a larger number (Q4) or generalization (Q5). The time allotted to fill in the worksheet was not a determining factor, for students were provided all the time they needed. That circumstance suggests that the difference may have been determined by the type of question. We interpret that the first three questions (involving specific values 5, 8, and 10) did not imply a greater challenge because probably it was not necessary for the students to identify rules among the variables, pictorial or manipulative representation may have helped to obtain the answer in each question. On the other hand, the work with Q4 and Q5 implied to attend the relationship between variables, which can be a challenge for them, since they were not used to working with these types of questions.

Second, we identify primarily correspondence in underlying students' responses and just two students provide evidence of covariation. Most of the students in who we identified correspondence did so in the questions involving amounts both under and equal to 100, as well as when generalizing. The inference appears to be that this group of students tend to focus on the relationships between variables involved in each question but not connect or relate that all the questions belong to a whole: the problem of the tiles (y=2x+6). On the other hand, and considering these 11 students, our results are in line with others authors (e.g., Warren, Miller, & Cooper, 2007), emphasizing that students' ability to identify functional relationships grows as they work with an increasing number of specific cases involving two variables.

Third, three students generalized the relationship to Q5, which could suggest that some 8- to 9-year-olds can establish general relationships between variables. We know that our results can not be generalized because we analyze one specific session in a specific context. However, this study can help to: (a) understand how elementary school students work and generalize a problem that involved function of the type $y=ax+b$, and (b) recognize that students can generalize, even when they were not used to doing it in their mathematics lessons.

The second research objective—describe the type or types of representations used by them—helps to notice that students' representations contribute to generalize and express algebraic ideas through representations as natural language. Students nonetheless need to be taught to use representations and interact with symbolic representations gradually (Goldin & Kaput, 1996; Janvier, Girardon, & Morand, 1983; Kaput, 1991), considering that representations used in daily activities (natural language, for instance) could act as a useful scaffold for more symbolic representations. As a general rule in this study, the correspondence relationship was expressed numerically when students provide evidence in specific instances but they used natural language-written in answers to the question involving generalization. Covariation was described verbally only. These findings are partially consistent with results reported by Blanton, Stephens, Knuth, Gardiner, Isler, and Kim (2015), who found that most third-graders used algebraic notation and to a lesser extent natural language to describe functional relationships. While algebraic notation was not observed in this study, natural language was the vehicle of choice for expressing general rules (see Figure 6, for instance). The observation that the types of representations used varied depending on the type of functional relationship identified is another of the contributions of this study (see Table 4).

The presence of multiple representations in students' answers provides insight into how students reason algebraically, one of today's research challenges, and suggests that multiple representations should form an essential part of algebra instruction (Wilkie, 2016). The multiple representations observed here were primarily combinations of natural language and numerical, and to a lesser extent, pictorial and numerical representation. None of the students' answers was indicative of the presence of three (or more) types of representations in a single answer. The existence of multiple representations in some students' answers provides grounds for analyzing how they use two types of representations jointly to predict, compare and understand one relative to the other to better understand the mathematical idea underlying the problem (Brizuela, 2005; Confrey & Smith, 1991; Goldin & Kaput, 1996).

The tiles problem allows to illustrate how students relate and generalize relationships involving dependent (grey tiles) and independent (white tiles) variables. Three main implications for teaching arise from our study. First, consider tasks that explicit and involve the relationship between two variables (including geometric patterns) reinforces the idea of some authors (eg, Mason, Graham, Pimm, & Gowar, 1985) who emphasize that these types of activities are a means to introduce students to algebra, since they are recommended due to their dynamic representation with the variables. Second, students' representations in the current study show that they used the same representation given in the problem (e.g., natural language, pictorial or manipulative), even when they knew other types of representations. This evidence highlights the importance of introducing and teaching different representations to help students to communicate their mathematical ideas in different ways.

Finally, we know that neither algebraic thinking in general nor functional thinking, in particular, is developed intuitively or naturally with today's curricula (Kieran et al., 2016), as is the case of Spain, where this study is carried out. Nonetheless, three of the student participants in the teaching experiment generalized the relationship between the dependent and independent variables. Further research is consequently desirable into how students identify patterns when working with problems in functional contexts and the relationship between the patterns identified in specific instances and their ability to generalize. Thus, a future line of research could be focused on interviewing students to obtain more evidence about their ideas working with functional thinking tasks.

Acknowledgements

This study was conducted under National R&D Project EDU2016-75771-P funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness; the first author benefited from a PhD. grant awarded the by Chilean Government through the Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT), folio 72160307-2015.

References

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (Eds.). (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M. L., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: the impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal, 34*(4), 663-689.

Brizuela, B. M. (2005). Relaciones entre representaciones [Relations between representations]. In M. Alvarado & B. M. Brizuela (Eds.), *Haciendo números: las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp.198-220). Mexico, DF: Paidós.

Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria [The development of algebraic thinking in children of primary school]. *Revista de Psicología*, 14, 37-57.

Brizuela, B., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the "best deal" problem. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). New York, NY: LEA.

Cai, J. (2005). US and Chinese teachers' constructing, knowing and evaluating representations to teach mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(2), 135-169.

Cai, J., & Knuth, E. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives. *ZDM*, *37*(1), 1-4.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103.

Cañadas, M. C., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas [Patterns, generalization and inductive strategies in 3rd and 4th year secondary students]. *PNA*, *2*(3), 137-151.

Carpenter, T. P., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalisation and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference (Vol 1, pp. 155-162). Melbourne, Australia: ICMI.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM.

Carraher, D. W., Schliemann, A., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 57-76.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovation in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J., & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg, VA: Conference Committee.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 135-164.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai (Ed.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 187-214). Berlin, Germany: Springer.

Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Goldin, G., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Janvier, C., Girardon, C., & Morand, J. C. (1993). Mathematical symbols and representations. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom. High school mathematics* (pp. 79-102). New York, NY: Macmillan.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. V. Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (2000). *Research design in mathematics and science education*. New Jersey, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Fong, S. (2016). *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching.* New York, NY: Springer.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11- 16* (pp. 102-119). London, United Kingdom: John Murray.

Mason, J. H., Grahamn, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. East Kilbride, United Kingdom: The Open University Press, Walton Hall, Milton Keynes.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* [Royal Decree 126/2014, of February 28, which establishes the basic curriculum of Primary Education] (Vol. 52, pp. 19349-19.420). Madrid, Spain: Author.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional [Functional relationships and strategies of first graders in a functional context]. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78.

Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Berlin, Germany: Springer.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, *12*(3), 173-184.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 31-70.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-years-olds* (pp. 3-25). Cham, Germany: Springer.

Romberg, T., Fennema, E, & Carpenter, T. (1993). *Integrating research on the graphical representation of functions.* New York, NY: Routledge.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Stephens, A., Fonger, N. Knuth, E., Strachota, S., & Isler, I. (2016). *Elementary students' generalization and representation of functional relationships: A learning progressions approach*. Paper presented at ICME 13 Conference.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 333–361. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9703-x

Williams, S. R. (1993). Mathematics and being in the world: Toward an interpretative framework. *For the Learning of Mathematics*, *13*(2), 2-7.

Yerushalmy, J., & Schwartz, J. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), Integrating research on the graphical representation of function (pp. 41-68). New York, NY: Routledge.

ESTUDIO 2

GENERALIZATION IN FIFTH GRADERS WITHIN A FUNCTIONAL APPROACH

Eder Pinto and María C. Cañadas
University of Granada, Spain

Abstract

This article discusses evidence of 24 fifth graders' (10-11 year olds') ability to generalize when solving a problem which involves a linear function. Analyzed in the context of the functional approach of early algebra, the findings show that 3 students generalized both when solving specific instances and when asked to provide the general formula; while 16 students generalized only when asked to define the general formula. The results are described in terms of the functional relationship identified, the types of representation used to express them and the type of questions in which students generalized their answers. Most of the pupils who generalized did so based on the correspondence between pairs of values in the function at issue.

Keywords

Generalization, functional relationship, representations, functional thinking

Generalización de estudiantes de quinto de primaria desde un enfoque funcional

En este artículo presentamos evidencias de generalización de 24 estudiantes de quinto de primaria (10-11 años) al resolver un problema que involucra una función lineal. Desde el enfoque funcional del *early algebra*, los hallazgos muestran que 3 estudiantes generalizaron al trabajar con casos particulares y cuando se les pide expresar la regla general; mientras que 16 estudiantes solo lo hicieron cuando les pedimos expresar la regla general. Describimos los resultados en términos de la relación funcional identificada, los tipos de representaciones que emplearon para expresar dichas relaciones y el tipo de pregunta en la cual los estudiantes generalizaron. La mayoría de los estudiantes que generalizaron establecieron una relación de correspondencia entre los pares de valores de la función.

Palabras clave
Generalización, relaciones funcionales, representaciones, pensamiento funcional

Research interest in mathematics education is growing around elementary school students' understanding and expression of notions about algebraic concepts, particularly these students' generalization and how they express general relationships when solving different problems (Carpenter & Levi, 2000; Kaput, 2008). In this context, algebraic thinking plays a key role in research on school algebra, for it entails the development of the ability to analyze relationships between quantities, identify general patterns and use symbols to represent ideas, among others (Kaput, 2008; Kieran, 2004). Different researchers denote that "developing children's ability to generalize in the elementary grades is vital because it draws their attention away from the particulars of arithmetic instances and onto the relationships and structure that connect these particular instances" (Blanton, Brizuela, & Stephens, 2016).

Generalization is one of the main components of algebraic thinking and, particularly of functional thinking, which is the focus of this study. This type of thinking addresses in the function and the relationship between two (or more) variables: specifically, it involves the types of thinking that range from specific relationships to the generalization of relationships (Smith, 2008). Although such functional thinking appears to be beneficial for students, its application in the elementary grades has received scant attention (Blanton & Kaput, 2011).

Generalization and representation notions are very close in Elementary education (Kaput, Blanton, & Moreno, 2008). Traditionally, generalization process has been linked to the use of algebraic symbolism and much of the previous research has focused on the students' difficulties in generalizing (Dienes, 1961; Ellis, 2007). For this reason, it was not clear if difficulties arose from the generalization process or from the representation used. Students at Elementary, or even at Kindergarten, are able to identify regularities that serve as first approach to generalization with no knowledge about algebraic symbolism (e.g., Castro, Cañadas, & Molina, 2017; Schifter, Monk, Russell, & Bastable, 2008).

Our focus is on describing fifth graders' generalization when solving tasks which involve functions. Specifically, our interest is to get information about how and when these students generalize. From the research literature review, we conjecture that students: (a) establish different relationships between the variables involved, and (b) generalize using different representations.

Theoretical framework

In this section, we describe some ideas concerning our research problem.

Generalization

According to some researchers, generalization is the key element in algebra (e.g., Mason, 1996). It is present when students intuitively perceive a certain underlying pattern, even though they are unable to represent it clearly (Mason, Burton, & Stacey, 1988). Generalization is an adaptation and reorganization process in which a person identifies the essence of one idea, which implies deliberate reasoning that builds on specific cases to identify inter-model, inter-procedural or inter-structural relationships (Carraher, & Schliemann, 2002; Kaput, 1999; Mitchelmore, & White, 2007).

Different researchers show types or levels of generalization (e.g., Harel, & Tall, 1991; Kaput, 1999; Stacey, 1989; Kruteskii, 1976). In the functional approach of early algebra, Blanton et al. (2015) show different ways in which students relate variables focused on functional relationships. Their findings distinguished between students who identified a specific and those who detected a general relationship between variables, and related the distinction to the ability to symbolize. Students who established the relationship between variables for specific cases "did not yet have a representational means to compress multiple instances into a unitary form that could symbolize these instances" (p. 542). Pinto and Cañadas (2017) describe fifth graders' generalization when solving different items from a written questionnaire, identifying: (a) spontaneous generalization, when students generalize when answering questions about particular cases, and (b) prompted generalization, when students generalized when answering a question involving the general case. Carraher, Martinez, and Schliemann (2008) establish different criteria to describe students' generalization in their last years of elementary education. These criteria are: (a) form of the underlying function, (b) variables mentioned, (c) types of operations used, (d) use (or not) of algebraic notation, (e) structural features, and (f) the meaning of the different component of the written formula.

Algebraic symbolism has been directly associated with generalization in different grades. In the context of elementary grades, some authors highlight the students' use of different representations to express a general relationship. For example, Mason and Pimm (1984) describes the use of everyday language as a fundamental resource to express generalization and its use can have influence in the use of algebraic symbolism to express the generalization. Radford (2010) recognizes the importance of gestures as a way to express generalization. Moreover, other types of representation, including verbal, numerical, pictorial and manipulative, are of interest in the context of early algebra (Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011; Merino et al., 2013). In summary and with base on previous ideas, we assume that the generalization, from a functional approach at elementary grade can be expressed in different representations.

Functional thinking

Functional thinking is a "component of algebraic thinking based on construction, description and reasoning with and about functions and their constituents" (Cañadas & Molina, 2016, p. 210) that ranges from specific relationships to generalizing the relationships between two (or more) variables (Smith, 2008). In most countries, students are not introduced to functions, which comprise the core content of this type of thinking until secondary school.

The present study used the linear function $f(x) = ax + b$ (with the domain and codomain limited to natural numbers) as a port of entry for early algebra to afford students the opportunity to: (a) explore variations in quantities, (b) use different representations, (c) expand numerical contents working with domain and codomain of variables, (d) help to increase students' ability to get generalization, among other (Blanton et al., 2011; Carraher, & Schliemann, 2018; Romberg, Fennema, & Carpenter, 1993).

Our work is focused on bivariate functions. Smith (2008) defined the functional relationships involving two quantities that co-vary to be: (a) correspondence, or the relationship between the pairs of values for the two variables (*a, f(a)*); and (b) covariation, or the relationship that describes how changes in one variable affect the other. These relationships can be express through different representations and can relate particular values of the variables or the general case. Some authors describe that whenever students work with particular co-varying quantities, their ability to identify the functional relationship increases (Warren, Miller, & Cooper, 2007).

Method

This study forms part of a broader teaching experiment on functional thinking in fifth graders in which the contextualized problem posed in each session revolved around a linear function. This article discusses the results of the fourth and final session, when student progress was greatest because they had already worked on a number of problems involving functions.

Subjects and tools

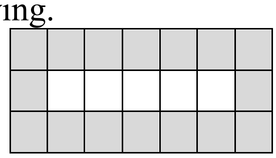
The 24 subjects were fifth graders (10- to 11-year-olds) enrolled in a school in the South of Spain, who were deliberately chosen on the grounds of school and teacher availability. The students had not worked on problems involving functions prior to the study, except in the first three sessions of the teaching experiment, in which they worked with problems that involve linear functions. In the Table 5-5 we present a summary of the first three sessions.

Table 5-5. *Contexts and Functions in Each Session*

Session	Context	Function
1	Carlos wants to sell shirts for earning money for a study trip with his class. He earns 3 euros per shirt.	f(x)=x+5
2	Daniel and Laura sell different shirts for their study trip. Laura gets 3 euros for each shirt. Daniel has saved 15 euros. For each shirt he gets 2 euros.	f(x)=3x and f(x)=2x+15
3	Juan has saved some money (he only has euros, not cents). His grandmother wants to reward him for a job he has done for her. She offers him two deals: Deal 1. I'll double the money you have Deal 2. I'll give you triple your money and you give me 7 euros.	f(x)=2x and f(x)=3x-7

The research team consisted in the teacher-researcher who led the sessions and two researchers who recorded the videos and helped answer students' questions. In the tiles problem posed to all students, the implied function was f(x)=2x+6. The problem and related questions are reproduced in Figure 5-12.

A school wants to re-pave its corridors because they are in poor condition. The school decides to use a combination of white and grey tiles, all square and all the same size. They are to be laid as in the drawing.



The school contracts a company to re-pave the corridors on all three floors. We want you to help the workers answer some questions before they get started.

Q1. How many grey tiles will they need for a corridor with 5 white tiles?

Q2. Some corridors are longer than others. So the workers will need a different number of tiles for each corridor. How many grey tiles will they need for a corridor with 8 white tiles?

Q3. How many grey tiles will they need for a corridor with 10 white tiles?

Q4. How many grey tiles will they need for a corridor with 100 white tiles?

Q5. The workers always lay the white tiles first and then the grey tiles. How can they figure out how many grey tiles they need if they have already laid the white ones?

Figure 5-12. The tiles problem

The questions posed involve: (a) specific instances (Q1, Q2, Q3 and Q4) and (b) the general case (Q5).

The information gathered included the session videos and the students' answers to the questionnaire. This article describes the results from the students' written responses.

Analytical categories and data analysis

The theoretical framework and background were applied to define some of the categories. Generalization was identified based on its presence or absence in students' replies to questions Q1 to Q5. In the Table 5-6 we present the categories with which we describe the generalization of students.

Table 5-6. *Analytical Categories*

Categories	Description
Type of generalization	We distinguished between the prompted generalization (generalization to Q5) or spontaneous generalization (generalization to Q1-Q4) (Pinto & Cañadas, 2017).
Functional relationship identified	Students' generalization was described in terms of the functional relationship generalized: correspondence or covariation (Smith, 2008).
Representations	Representations used by the students to generalize: pictorial, verbal, numerical or with algebraic notation, as well as combinations of one or the other or both with other representations (Blanton et al., 2011; Carraher et al., 2008).

Students were labeled as Si, where i = 1, ..., 24.

Results

We present a first approach to the results in Table 5-7, distinguishing those students who did not generalize and those did, attending to the categories previously described.

Table 5-7. *Evidence of students' generalization*

	Generalization		
Non generalization	Only prompted	Only spontaneous	Both
S15, S16, S18, S19, and S20	S1, S2, S3, S4, S7, S9, S11, S11, S12, S13, S14, S17, S21, S22, S23, and S24		S5, S6, and S8

Table 5-7 illustrates that of the 24 students, five students did not generalize in their responses to Q1-Q5. This students gave direct answers only (i.e., only the numerical result), described how they counted the tiles, repeated the problem, or made a drawing: no generalization could be attributed to these pupils. For instance, we present the S19's answer to Q4 in Figure 5-13. He made a drawing to represent the number of grey tiles needed for 10 white tiles.

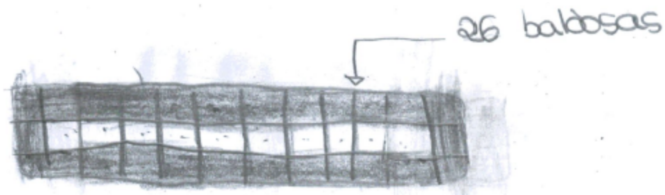


Figure 5-13. Non-generalization's example, S19 in Q4 (*baldosas* means tiles in Spanish)

On the other hand, 19 students generalized the functional rule and two profiles were identified: (a) three students exhibited both spontaneously and prompted generalization, and (b) 16 students generalized promptly (when replying to Q5). A discussion of these types of responses follows.

Spontaneous and prompted generalizations

Three students exhibited both spontaneously and prompted generalization. We present in Table 5-8 questions where these students evidenced generalization and the representation used.

Table 5-8. *Spontaneous and prompted generalization and representation used*

Student	Question		
	Q1	Q2	Q5
S5	✓ Algebraic		✓ Verbal
S6	✓ Verbal	✓ Verbal	✓ Algebraic
S8	✓ Algebraic		✓ Verbal

As we can observed in Table 5-8, three students (S5, S6, and S8) generalized in questions 1, 2, and 5. Two of them generalized (S5 and S8) in Q1 and Q5, and S6 in Q1, Q2 and Q5. These three students used verbal and algebraic representations to generalized and the three students generalized the correspondence relationship. A discussion of these students' responses follows.

Two of the students who generalized spontaneously and when prompted (S5 and S8) used algebraic notation to represent their replies. S8's answer to Q1 was: "formula: (X x 2) + 6 = 16; x = number of white tiles". This student used algebraic symbolism "(X x 2) + 6" to express the general relationship. In Q2, Q3 and Q4, this student simply answered the questions, without explaining how he got the result. That was interpreted to mean that the student used the same functional relationship for 8, 10 and 100 tiles, relating the pairs of values (a, f(a)) for a = 8, 10 and 100 and correctly finding that the number of grey tiles needed would be 22, 26 and 206, respectively.

S6, the third student who generalized spontaneously and when prompted, described the generalization in Q1 in the following words: "they need 16 grey tiles. For every white tile, there are 2 grey tiles, except on the sides, where there are 6. All the whites x2 + 6 on the sides". Hence S6 identified the relationship between variables as well as the constant number (six white tiles on the sides). This student used both verbal and numerical notation to express the relationship. This student's answer to Q5 was: "multiplying the number of white tiles times 2 plus 6 on the sides: x·2+6=x". In other words, S6 used two types of representation: verbal and algebraic, exhibiting a transition from natural to a more general and abstract language.

Note that the three students who generalized, using different representations, the general formula by identifying the correspondence relationship in the function f(x)=2x+6.

Only prompted generalizations

Sixteen students generalized promptly (when answering Q5). These students expressed the general relationship between the pairs of values (correspondence) verbally. A few representative examples follow.

The students identified the pattern from which they expressed the general formula in a number of ways. In one, eight students described generalization in terms of a rule that in algebraic notation would be represented as $f(x)=2x+6$. The student S14, for instance, answered "you get the answer by multiplying the white tiles times 2 and then adding 6". In this case, as in the other seven, generalization was expressed verbally. Student S3, in turn, replied "multiplying the white tiles by two and adding three at the beginning and three at the end". The pattern detected by this student would be represented in algebraic notation as $f(x)=2x+3+3$. The student S24 adopted a third approach, identifying the pattern to be $f(x)=2(x+2)+2$.

One of these students, S1, used primarily verbal representation, although in conjunction with algebraic symbols. In Q5 the answer was "you need to use 2x white tiles +6"; i.e., verbal representation predominated, although with some elements of algebraic symbolism. The implication would seem to be that this student, who used some algebraic symbols sporadically when answering the previous questions, was in route to attaining a more natural and spontaneous use of algebraic symbolism to represent the relationship between variables.

Lastly, the relationship was incorrectly identified by six students in a way that translated to algebraic notation would yield $f(x)=2x+2$. One representative example of this relationship between variables was provided by S9, whose answer to Q5 was "multiply the top and bottom rows by 2 and add 2". Like the other five students, this pupil established a general, albeit mistaken, relationship between the variables.

Discussion and conclusion

This research supplements other studies focusing on lower grade students' ability to generalize in the context of classroom algebraic functions (e.g., Carraher et al., 2008). Here the emphasis was on generalization by 24 fifth graders who have not received prior instruction on this type of activity, so their answers allow us to explore the generalization in a more spontaneous environment.

For the elementary students, the tiles problem affords the opportunity to explore students' functional thinking, as it enables fifth graders to progress beyond recursive sequences. In fact, they generalized on the grounds of correspondence functional relationships that involved the values of a set of variables.

The overall finding was the existence of two situations in which students generalize: (a) when answering questions about particular instances, and (b) when specifically prompted to generalize. Three students generalized spontaneously, i.e., where the question could be answered without doing so. They consequently used generalization as a strategy to reply to questions involving specific instances. All the students who established a general relationship between the variables (spontaneously or when prompted) based their rules on the correspondence relationship. The students who generalized spontaneously used algebraic notation and verbal representation to express the general relationship between variables. Representation was primarily verbal in students who generalized only when prompted. In line with Blanton et al. (2015), the present authors venture that using algebraic notation would enable students to visualize generalization in fuller detail. That is consistent with the fact that the students who used notation in addition to verbal representation to express relationships did so in questions where generalization was not necessary (spontaneous generalization).

Moreover, the different ways in which students express the functional relationship of correspondence ($f(x)=2x+6$; $f(x)=2x+3+3$; $f(x)=2(x+2)+2$; $f(x)=2x+2$) afforded the opportunity to interpret and understand their thought process when identifying a general relationship between variables.

Lastly, the present findings are related to earlier research results on fifth graders' ability to generalize (Merino et al, 2013), in which verbal representation was also observed to prevail. This study complements ways to analyze the students generalization, considering three aspects: (a) functional relationship, (b) representations, and (c) type of question. The data analysis is focused in written students' answers could be complemented with other pieces of evidence (class discussion, for instance) to have more information about how students generalize since some students were able to generalize and, perhaps, did not express it until it was required. Even so, the results supports the application of this approach to mathematics teaching in the lower grades, for its favors and enhances algebraic thinking (Blanton et al., 2011).

Acknowledgments
This study forms part of National R&D Projects EDU2013-41632-P and EDU2016-75771-P funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness; the first author was supported by a PhD scholarship granted by Chilean Government through the CONICYT, folio 72160307-2015.

References
Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Berlin, Germany: Springer.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (Eds.) (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M., Brizuela, B., & Stephens, A. (2016). *Children's understanding and use of variable notation.* Paper presented at the 13th International Congress on Mathematics Education. Hamburg, Germany.

Cañadas, M. C. & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades [Approach to the conceptual framework and background of functional thinking in early years]. In E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz, & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, Spain: Comares.

Carpenter, T., & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. Madison, WI: National Center for Improving student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2002). The transfer dilemma. *The Journal of the Learning Sciences*, *11*(1), 1-24.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-years-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 107-138). New York, NY: Springer.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Castro, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil [Functional thinking shown by kindergarten students]. *Edma 0-6. Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13.

Dienes, Z. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard Educational Review, 31*(3), 281-301.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221-262.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38-42.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277-289.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente* [Thinking mathematically]. Barcelona, Spain: Labor.

Merino, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización [Representations and patterns used by fifth grade students in a generalization task]. *Edma 0-6. Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.

Mitchelmore, M., & White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal*, *19*(2), 1-9.

Pinto, E. & Cañadas, M. C. (2017). Generalization in fifth graders within a functional approach. In B. Kaur, W. Kin Ho, T. Lam Toh, & B. Heng Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapore: PME.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Romberg, T., Fennema, E., & Carpenter, T. (1993). *Integrating research on the graphical representation of functions.* New York, NY: Routledge.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S., & Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 389-412). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton

(Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

ESTUDIO 3

GENERALIZATIONS OF THIRD AND FIFTH GRADERS FROM A FUNCTIONAL APPROACH TO EARLY ALGEBRA

Eder Pinto and María C. Cañadas
University of Granada, Spain

Abstract

Different studies report that elementary school students, and even Kindergarten students, generalize and represent relationships when working with problems that involve functions; a topic that has been recognized as a way to introduce algebraic thinking in the early grades (also known as early algebra). In this paper, we describe generalizations by 24 third-grade (8-9 years old) and 24 fifth-grade (10-11 years old) students. Specifically, we further examine ways of describing students' generalizations when they respond to the same problem, without prior instruction. The goal of the study is to explore and describe what (functional relationships), how (representations), and when (types of questions) third and fifth graders generalize. Theoretically, our study builds on a functional approach to early algebraic thinking, in which generalization and representation are core aspects. In our study, we describe students' responses drawn from a Classroom Teaching Experiment in each grade and we analyze the data coming from the last session in both grades. We analyzed their written responses to a series of questions designed to generalize the relationships in a problem, where the underlying function is y=2x+6. The main results provide evidence of functional relationships in both grades; three third graders and 19 fifth graders generalized providing evidence of correspondence in this generalization and using exclusively natural language. Of the fifth grader generalizers, three did so spontaneously using algebraic notation.

Keywords

generalization; functional relationships; representations; functional thinking; early algebra

Introduction

Research in school algebra has evidenced the importance of students' generalization in different grades (e.g., Dienes, 1961; Mason, 1996; Stacey & MacGregor, 1997). Specifically, there is an increase in studying—from different theoretical points of view—how elementary school students (6 to 12 years old) generalize properties and relationships involved in different mathematical situations (e.g., Carraher & Schliemann, 2007; Radford, 2003; Rivera, 2013; Schifter, Bastable, Russell, Seyferth, & Riddle, 2008). In addition, different curriculum guidelines emphasize the role of generalization in the early grades, focusing on how students notice, relate, organize, predict, and express regularities and general rules from different mathematical contexts (e.g., Australian Curriculum, Assessment, and Reporting Authority, 2015; National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010). In this study, our interest is to describe elementary school students' generalization, considering it as a core aspect of algebraic thinking (Kaput, 2008).

We adopt the idea that generalizing and representing generalizations are considered central elements of the learning of algebra at elementary school (Cooper & Warren, 2011; Kaput, Blanton, & Moreno, 2008). Particularly, we focus on functional thinking; a type of algebraic thinking that focuses on the relationship between two or more covarying quantities. Within a functional thinking approach, functions are the prime mathematical content and it to be instrumental in introducing algebra in the lower grades. In this context, our objective is to explore and describe *what*, *how*, and *when* third and fifth graders generalize relationships in a problem that involve a linear function (also known as functional thinking task). Four main reasons motivate this study and are presented below.

First, different studies show that elementary school students relate relationships among variables in different ways. For instance, some studies report how students tended to focus on recursive patterns (e.g., Moss & Beatty, 2006). On the other hand, studies that focus on process of instruction describe how elementary school students used sophisticated tools to explore, generalize, and symbolize functional relationships (e.g., Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006; Cooper & Warren, 2008; Moss, Beaty, Schillolo, & Barkey, 2008). Our interest is to describe *what* type of functional relationship is evidenced in students' responses through an exploratory study, without focusing on an instruction process.

Second, representations are a way to describe and analyze *how* students perceive the structures and relationships embedded in a given problem, which helps to structure and expand students' thinking (Brizuela & Earnest, 2008). Although algebraic notation is the traditional type of representation in school algebra, representing generalizations can also be otherwise represented, using natural language, for instance, to communicate and represent algebraic concepts or ideas (Mason & Pimm, 1984; Radford, 2003). Different studies report students' representations when they work with functional thinking tasks (e.g., Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008; Cooper & Warren, 2011; Morales, Cañadas, Brizuela, & Gómez, 2018). For example, in a study focus on how 4-5 to 11-12 years old students generalize, Blanton and Kaput (2004) provide evidence from students' responses to a problem that involves a functional relationship. Figure 5-14 shows one of the problems raised.

Suppose you were at a dog shelter and you wanted to count all the dog eyes you saw. If there was one dog, how many eyes would there be? What if there were two dogs? Three dogs? 100 dogs? Do you see a relationship between the number of dogs and the total number of eyes? How would you describe this relationship? How do you know this works?

Figure 5-14. Eyes and dog's problem (p. 136)

The main results show that students of 4-5 years old used manipulative material and counting strategies to determine the number of eyes in a variable number of dogs, and organizing the information in a table helped them organize quantities that would covariate. Students of 5-6 years old were able to identify a pattern and establish relationships on data parity, while that third, fourth, and fifth graders were able to use, fluently, tables to organize the information, they express multiplicative rules with words and symbols, getting to generalize relations as $2n$. These results, like those reported by other studies (e.g., Cañadas, Brizuela, & Blanton, 2016; Moss & McNab, 2011; Rivera, 2013), show that students, depending on their age, were able to use different types of representations to express how the variables included in the problem (dog and eyes) are relating. Therefore, from the previous studies we observed a need to deepen *how* elementary school students, from different grades, express general relationships by responding to the same problem.

Third, generalization is a core aspect in functional thinking and it enables students: (a) to see beyond isolated computations; (b) understand the mathematical situations involved; (c) associate new ideas with previous knowledge; and (d) draw conclusions by generalizing mathematical ideas, for instance (Carpenter & Levi, 2000; Carraher & Schliemann, 2002; English & Warren, 1998). Some authors describe that young students are naturally predisposed to perceive regularities and generalize (Becker & Rivera, 2005; Mason, 1996; Schifter, Bastable, Russell, Seyferth, & Riddle, 2008), even when they do it without following a worksheet designed for this purpose (e.g., Amit & Neria, 2007; Pinto & Cañadas, 2018). Our interest is to describe *when* elementary school students, from different grades, generalize answering the same problem, which includes questions to specific values and generalization.

Fourth, this study is of importance in Spain because of the presence of regularities and generalization in their national curriculum indicate that the students at the end of the elementary school should be able to "describe and analyze situations of change, find patterns, regularities, and mathematical laws in numerical, geometric, and functional contexts, valuing their usefulness to make predictions" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19.387). In this connection, we select third and fifth graders because research on functional thinking in these grades is scarce. On the other hand, our study could be related to previous studies focused on first graders (e.g., Morales, Cañadas, Brizuela, & Gómez, 2018) to describe useful teaching implications.

Theoretically, our study builds on a functional approach to early algebra (Carraher & Schilemann, 2007), in which generalization and representation are core aspects (Kaput, 2008). This approach focuses on the relationship between two or more covarying quantities, covers both relationships in specific values and their generalization (Smith, 2008) and functions constitute the core mathematical content. Considering the above ideas and the research objective— to explore and describe *what*, *hoy*, and *when* third and fifth graders generalize relationships in a problem that involve a linear function—we design three specific research objectives:

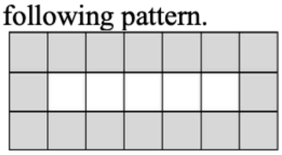
1. To describe the functional relationships evidenced in student's responses (*what*);
2. To describe representations used by students (*how*); and
3. To identify the types of questions in which students generalize (*when*).

In addressing these research objectives, we analyze evidence from a specific session in which students worked with a problem and answered different questions on a worksheet. This study's specific contribution is to provide a deep way to describe students' generalization of a functional thinking task.

Functions and functional relationships

Functions are instrumental in elementary education because they: (a) can serve as a gateway to algebra and because they enable students to explore the concept of "variable" as a variation between quantities (Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011), and (b) basic arithmetic operations can be treated as functions, given the relationships between quantities they may entail (Carraher & Schliemann, 2007). We adopt the concept of function as "a correspondence between two nonempty sets that assigns to every element in the first set (the domain) exactly one element in the second set (codomain)" (Vinner & Dreyfus, 1989, p. 357). Here the focus is on linear functions, specifically the type $y=mx+b$ where m and b are constants, and variables x and y natural numbers. This type of function is deemed suitable for the age and type of work expected of elementary school students in the functional approach to early algebra (Carraher & Schliemann, 2007). In functional thinking tasks, functions are presented through contextualized problems. The problem used in this study, the tiles problem, is an example of one functional thinking task (see Figure 5-15).

A school wants to re-floor all its corridors, where the tiles are in very poor condition. The principal decides to lay square white and grey tiles on all the floors. All the tiles are of the same size and are to be laid in the following pattern.



The school contracts a builder to replace the floors in all the corridors. We want you to help the masons answer some questions before they get started.

Figure 5-15. The tiles problem

The tiles problem involves the function $g=2w+6$, with natural numbers as the domain and codomain. In this problem, two variables are involved: the number of white tiles (w) and the number of grey tiles (g). For example, if we want to know the number of grey tiles that can put around a number of white tiles, g is expressed in terms of w. In this case, w is the independent variable and g is the dependent one.

When students work with a functional thinking task, they have different forms to interpret and build how the dependent and independent variables relate to each other: (a) *recurrence*, which describes attending to variation within one quantity (e.g., considering the tiles problem, “the number of grey tiles increases by 2”); (b) *correspondence*, refers to the pairs (a, f(a)) (e.g., “two times the number of white tiles plus six”); and *covariation*, which analyzes how two quantities co-vary and how change in one (from a_n to a_{n+1}, for instance) produce change in the other (from f(a_n) to f(a_{n+1})) (e.g., “when the number of white tiles increases by one, the number of grey tiles increases by two”). (Confrey & Smith, 1994). Here, we focused on correspondence and covariation, which involve both variables (in contrast to recurrence, which explains variation between different values of the dependent variable).

For instance, Cañadas and Morales (2016) identify and describe functional relationships evidenced by first graders when answering a functional thinking task which involve the function y=x+5 (There is a kennel in which each dog needed its own feeding bowl and there are additional five bowls to be shared for water). Students were asked by near and far specific values (e.g., How many bowls do they need if there are three dogs?) and the generalization of the relationships (e.g., How many bowls do they need for any number of dogs?). Analyzing written and oral students’ responses to the problem, the main results indicate that none of the students identify functional relationships in their replies to questions about specific values. In contrast, correspondence and covariation relationships, particularly the former, were observed in their replies to questions on the general case; twenty students provide evidence of a rule is constructed to determine the unique value of any given number of dogs (x), thus creating a correspondence between number of dogs (x) and number of bowls (y).

Generalization and representations

We adopt the idea that generalize is “the process by which we identify structure and relationships in mathematical situations” (Blanton et al., 2011, p. 9). As it involves conscious reasoning based on specific values to identify broader and more abstract models or relationships, it requires adapting, adjusting, connecting and reorganizing mathematical ideas (Kaput, 1999; Mitchelmore & White, 2007). For example, Carraher, et al. (2008) describe generalization among third graders when solving a problem that involved the function p=2t+2 and it includes a number of tables (t, independent variable) and a number of people can sit at them (p, dependent variable). One of the students used pictorial representations to determine the relationship between the variables, generalized the relationship through natural language, and used algebraic notation, stating: "*t* times 2 plus 2 equals *p*…" (p. 12). On these grounds, generalization in a functional context is assumed here to refer to the different ways in which students express a general functional relationship among two variables.

Pinto and Cañadas (2018) describe different types of generalization when students work with a functional thinking task that involves a function of the type $y=ax+b$. Their main results describe two types of generalizations: (a) spontaneous, when students generalize in response to questions about specific values; and (b) prompted, when they answer a question posed in general terms. Exploring spontaneous and prompted generalizations could provide insights regarding the types of functional relationships and representations evidenced by students to describe their generalizations.

Generalization need not be expressed explicitly. Some authors deem that elementary school students generalize when they intuitively perceive some regularity and represent relationships between quantities, not necessarily with algebraic notation but pictorially, natural language, manipulatives or numerical (e.g., Mason, Burton, & Stacey, 1988; Radford, 2018). According to some authors, such diversity of representation is pivotal to lower grade algebra in the context of generalization (e.g., Carraher, et al., 2008; Kaput, 2008). Here, and according to Kaput, Blanton, and Moreno (2008), we adopt the idea that representations—a socio-cultural vehicle used to generalize—enable students to build and complete the ideas that help them reason about general statements and compress multiple instances into the unitary form of a single statement that symbolizes the multiplicity. Thus, generalization is the "act of creating that symbolic object" (p. 20).

For example, Cooper and Warren (2008) report students' generalization of third to fifth graders (8 to 11 years old) focussing on the variety of contexts in which the problems were framed and the diversity of representations used. The main results show that students' generalizations are expressed through different representations. Students provided evidences of natural language, figures/diagrams (activity with function machines and drawings of function machines), notation systems (tables, diagrams, and equations), and graphs to describe general rules between variables.

The study

This study is part of a broader CTE on functional thinking in third (8-9 years old) and fifth graders (10-11 years old). Design research guidelines, specifically those set out for CTE were followed. CTE is characterized by understanding teaching-learning processes when the researcher acts actively as a teacher, studying the nature of the development of ideas, tools, or models in which students, teachers or groups are included (Cobb & Gravemeijer, 2008; Kelly & Lesh, 2000). We design a four-session CTE in each grade, with a problem posed in each session. Three of the purposes of the sessions were to (a) explore how students relate the variables involved in a functional thinking task; (b) introduce and use different types of representations to express functional relationships: and (c) explore the generalization of students when responding to functional thinking tasks. Table 5-9 shows the contexts and functions involved in each of the four sessions for each grade; some of them were selected or adapted from previous studies and others were designed by the research team, considering different types of linear functions.

Table 5-9. *Contexts and functions presented in each session*

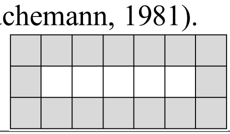
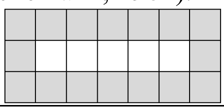
Session	Context	Function
	Third	
1	María and Raúl are brother and sister. They live at La Zubia. María is the elder. We know that María is 5 years older than Raúl.	$y=x+5$
2 and 3	Carlos wants to sell shirts with his school's badge so he can go on a study trip with his class. He earns 3 euros for each shirt he sells.	$y=3x$
4	A school wants to re-tile its corridors because they are in poor condition. Its administration decides to use a combination of white and grey tiles, all square and all the same size, to be laid out as in this figure (Adapted from Küchemann, 1981). 	$y=2x+6$
	Fifth	
1	Carlos wants to sell shirts with his school's badge so he can go on a study trip with his class. He earns 3 euros for each shirt he sells.	$y=3x$
2	Daniel and Carla sell different shirts for their study trip. Carla gets 3 euros for each shirt. Daniel has saved 15 euros. Additionally, for each shirt he sells, he gets 2 euros.	$y=3x$ and $y=2x+15$

Table 5-9. *Contexts and functions presented in each session*

Session	Context	Function
3	Juan has saved some money (he only has euros, no cents). His grandmother wants to reward him for a job she has given him. She offers him two deals: Deal 1. She will double his money. Deal 2. She will triple his money and then take away 7 euros. (Adapted from Brizuela & Earnest, 2008).	y=2x and y =3x-7
4	A school wants to re-tile its corridors because they are in poor condition. Its administration decides to use a combination of white and grey tiles, all square and all the same size, to be laid out as in this figure (Adapted from Küchemann, 1981). 	y=2x+6

In each session (see Table 5-9), a research team worked with the students: the teacher-researcher, who led the sessions, and two researchers who video recorded the sessions and helped answering students' questions when they were working on the problem. Each CTE session lasting approximately 60 minutes and was divided into three parts. Firstly, we introduced the context of the problem, highlighted the representations given and asked the students questions about specific values to ascertain whether they had understood it. Secondly, the students were given individual worksheets with questions about specific values and generalization related to the problem. Lastly, the researchers led a classroom discussion around the responses to some of the questions on the worksheets.

Data selection

This paper reports the findings from the last CTE session in each group: the tiles problem. In both grades, the students worked in the first three sessions with problems involving two types of functions: $y=x+a$ and $y=ax$. In the fourth session, the problem involves a different type: $y=ax+b$, combining additive and multiplicative structures. Two main issues motivate the focus on the last session. Firstly, the functional thinking task was the same for both grades, which is an opportunity to explore how, what, and when students generalized from the same mathematical situation. Secondly, this session was the last one and allowed the students to be more used to working with functional thinking tasks.

Participants

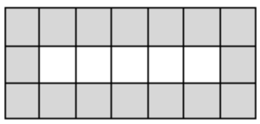
We worked with two Spanish groups of students. One comprised by 24 third graders (8-9-year-olds) whose prior knowledge included counting strategies and using natural numbers to perform the four basic operations, especially addition and subtraction. The second group, 24 fifth graders (10-11-year-olds), had performed the four arithmetic operations with both natural and rational numbers.

Data collection

Three different researchers in each grade entered in the classroom for the CTE, with the students' teachers as passive observers. Each session was divided into three parts. First, we posed a problem and asked the students questions to ascertain whether they had understood it. The students were then given a worksheet on which they worked individually, replying to questions on specific values and the general case. Lastly, one of the researchers led a classroom discussion around the responses to some of the questions on the worksheet. The sole difference between the two groups was that the third graders were given manipulatives to work with at their discretion, if they wanted to.

The session described here revolved around the tiles problem, in which the function was $y=2x+6$. The questions asked, identified by the letter Q and a number, are listed in Figure 5-16.

A school wants to re-floor all its corridors, where the tiles are in very poor condition. The principal decides to lay square white and grey tiles on all the floors. All the tiles are of the same size and are to be laid in the following pattern.



The school contracts a builder to replace the floors in all the corridors. We want you to help the masons answer some questions before they get started.
Q1. How many grey tiles do they need if a corridor has five white tiles?
Q2. As some corridors are longer than others, the masons need different numbers of tiles for each corridor. How many grey tiles do they need for a floor with eight white tiles?
Q3. How many grey tiles do they need if a corridor has 10 white tiles?
Q4. How many grey tiles do they need for a floor with 100 white tiles?
Q5. The masons always lay the white tiles first. How can they know how many grey tiles they need if they've already laid the white tiles?

Figure 5-16. The tiles problem and questions

These questions (Q1-Q5) were designed based on the inductive reasoning model described by Cañadas and Castro (2007), involving specific values (Q1-Q4) and the general case (Q5).

Data analysis

We analyze students' written responses to the worksheet (Q1-Q5), considering three categories which emerge from theoretical perspectives derived from previous studies. Specifically, each student's response (24 third graders and 24 fifth graders) was analyzed considering three categories simultaneously:

1. Functional relationships, identifying functional relationship underlying students' responses to the tiles problem questions (correspondence and covariation);
2. Representations, describing representations used by students to express the functional relationships (pictorial, natural language-written, numerical, and algebraic notation); and
3. Type of generalization, distinguishing between students who generalized in questions referring to specific values (spontaneous generalization) and those who did so when confronting the general situation (prompted generalization).

Categories, subcategories, and codes are summarized in Table 5-10.

Table 5-10. *Categories used in each student's responses*

Category	Subcategory	Code
1. Functional relationships	1.1. It is possible to identify a functional relationship	1.1.1. Correspondence to specific values 1.1.2. Correspondence to general rule 1.1.3. Covariation to specific values 1.1.4 Covariation to general rule
	1.2. It is not possible to identify a functional relationship	1.2.1. Student only answered the question 1.2.2. Student repeated the problem wording 1.2.3 Student furnished or alluded to pictorial representations, but does not provided information on the relationship 1.2.4. Student performed arithmetic operations with no

Table 5-10. *Categories used in each student's responses*

Category	Subcategory	Code
		clear meaning
	1.3. Did not answer the question	
2. Representations	2.1. Pictorial 2.2. Natural language-written 2.3. Numerical 2.4. Algebraic notation	
3.Type of generalization	3.1. Explicit evidence of generalization	3.1.1. Prompted generalization (generalization to Q5)
		3.1.2. Spontaneous generalization (generalization to Q1, Q2, Q3, and Q4).
	3.1. No explicit evidence of generalization	

Each category was designed to respond to our research objectives. The first category is related to what (to describe functional relationships evidenced in students' responses), the second is related to how (to describe representations used by students), and the last category with when (to identify the types of questions in which students generalize) third and fifth school students generalize.

At first, the first author coded the written answers of the students and then we checked these codes with the second author. All the results reported in this paper are related to all students' answers to the worksheet.

Results

Results are organized by grade, third or fifth, distinguishing functional relationships, representations, and the type of questions in which they generalized.

Third graders

All the students replied to the first three questions, while the 19 students answered to Q4. Sixteen students answered Q5. Thirteen of the 24 third graders do not provide evidence of functional relationships in their written responses. Broadly speaking, we identify two main trends in student responses; those that provide evidence of functional relationships when working with specific values and those that generalize the relationship. Specifically, eight students' responses provide evidence of functional relationships to specific values questions (Q1-Q4), while three students provide evidence of generalization (in Q5). The types of functional relationships (correspondence, covariation or both) identified by them and the types of representations used are given in Table 5-11.

Table 5-11. *Functional relationships evidenced and representations used by third graders*

	Functional relationships		Representations				
Q	Cr	Cv	P	M	N	NL	A
1	✓ (4)	✗	✓ (1)	✗	✓ (4)	✓ (1)	✗
2	✓ (3)	✓ (2)	✗	✗	✓ (3)	✓ (2)	✗
3	✓ (7)	✓ (2)	✗	✗	✓ (8)	✓ (5)	✗
4	✓ (10)	✗	✗	✗	✓ (2)	✓ (10)	✗
5	✓ (3)	✗	✗	✗	✗	✓ (3)	✗

Note. Q=question; Cr=correspondence; Cv=covariation; P=pictorial; M=manipulative; N= numerical; NL=natural language-written; A=algebraic notation

As Table 5-11 shows, the number of students identifying a correspondence relationship increased with each question (Q1-Q4). Four students provide evidence of correspondence in Q1 (number of grey tiles for five white tiles). Covariation was identified in two students' answers to Q2 (eight white tiles) and Q3 (ten white tiles). For example, Ana provides evidence of covariation in Q3 (Figure 5-17).

Q3 (10 white tiles)	*32.* *16x2=32 and there were five white tiles on the other page [referring to Q1].*

Figure 5-17 Ana's answer to Q3

Figure 5-17 shows that Ana established a relationship between the number of grey tiles needed for the five white tiles in Q1 and the number of grey tiles given 10 white tiles in Q3. She explained her reasoning by saying "there were five white tiles on the other page". As in Q1 she found that she needed 16 grey tiles, she multiplied that number times 2, reasoning that if the number of white tiles doubled, the number of grey tiles would also double.

Eight of the all students whose replies to questions on Q1-Q4 mainly used numerical representation in the first three questions (Q1-Q3), followed by natural language. Andy's answer to Q3 exemplified a functional relationship represented numerically.

Q3 (10 white tiles)	10 +10 = 20 + 6 = 26

Figure 5-18. Andy's answer to Q3 (number of grey tiles for 10 white tiles)

Andy added the number of white tiles (10) to the same number to find how many grey tiles were in the top and bottom rows (10+10). He then added six to that sum (10+10+6) to account for the grey tiles on the sides. Andy used the same functional relationship, correspondence, in the other specific values.

Considering the types of question that students generalized, and although three of the 24 third graders did it to Q5, only one, Josh, did so correctly. Having been observed in Q5, the question on the general case, theirs were prompted generalizations. In Josh's replies to Q2, Q3 and Q4, for instance, he identified the same numerical regularity, as shown in Figure 5-19.

Q2 (8 white tiles)	8 + 8 = 16 16 + 3 + 3 = 22
Q3 (10 white tiles)	10 + 10 + 3 + 3 = 26
Q4 (100 white tiles)	100 + 100 + 3 + 3 = 206

Figure 5-19. Josh's answers to Q2, Q3, and Q4

Josh represented the relationship among variables (white and grey tiles) using a numerical representation. In his answer to Q5, he wrote that to find the number of grey tiles after all the white tiles were laid "you add the number of white tiles twice and then you add 6". In other words, when prompted to generalize he expressed the relationship through natural language, whereas he used numerical representation in the specific values questions. What Josh identified in his reply to Q5 was correspondence, for he defined the relationship between the value pairs for the two variables and established a procedure based on the number of white tiles to calculate the number of grey tiles needed in any given case.

The other two students, who generalized, likewise after prompting, did so incorrectly because their answers referred only to the six tiles needed on the right and left, i.e., the constant term in the implicit function. Ruth's representative answer is reproduced in Figure 5-20.

Q5 (general case)	*Adding 6 more.*

Figure 5-20. Ruth's answer to Q5

Figure 5-20 shows that while Ruth identified the constant number of grey tiles (6) in her response, she failed to see that the number of grey tiles on the top and bottom was twice the number of white tiles.

Fifth graders

All students answered all the tiles problem's questions, except for one student, who did not respond to Q2 and Q5. Nineteen of the 24 students provide evidences of functional relationships. All students who provide evidence of functional relationships generalized the relationship involved in the tiles problem (y=2x+6). Table 5-12 describes functional relationships and representations used by these students.

Table 5-12. *Generalized functional relationships identified by fifth graders and representations used*

Q	Functional relationships		Representations				
	Cr	Cv	P	M	N	NL	A
1	✓ (3)	✗	✓ (1)	✗	✗	✓ (1)	✓ (2)
2	✓ (1)	✗	✗	✗	✗	✓ (1)	✗
5	✓ (16)	✗	✗	✗	✗	✓ (15)	✓ (2)

Note. Q=question; Cr=correspondence; Cv=covariation; P=pictorial; M=manipulative; N=numerical; NL=Natural-Language; A=algebraic notation

As Table 5-12 shows, evidence of students' generalization was found responses to Q1, Q2, and Q5. Three students generalized when answering questions that involve specific values and the general case: spontaneous and prompted generalization, respectively. Sixteen students only generalized when answering to Q5: prompted generalization. Two of the students who generalized in both spontaneously and prompted generalization used algebraic notation to represent their answers to the first question. Lucy's answer to Q1 (five white tiles), reproduced in Figure 5-21, was representative of spontaneous generalization.

Q1 (5 white tiles)	*They need 16 tiles.* *I found wit this formula: (x+2)+6=16* *x = number of white tiles*

Figure 5-21. Lucy's answer to Q1

With her reply, Lucy showed that she could relate the pairs of values (number of white and grey tiles) for any number of white tiles. Figure 5-22 shows how Lucy related the pair of values involved in Q1.

White tiles (x)	Grey tiles (y)
5 $\xrightarrow{2x + 6}$	16

Figure 5-21. Lucy's answer to Q1

She provides evidence of correspondence using algebraic notation. She used the same functional relationship for 8, 10 and 100 tiles (Q2, Q3 and Q4). In all three cases she related the value pairs (a, $f(a)$), finding the number of grey tiles needed for a=8, 10 and 100 to be 22, 26 and 206, respectively.

Mike also exhibited both spontaneously and prompted generalization. His answer to Q1 is depicted in Figure 5-23.

Q1 (5 white tiles)	*They need 16 tiles.* *There are two grey tiles for every white tile except on the sides where there are 5. Or all the tiles x 2 + 6 on the sides.*

Figure 5-23. Mike's answer to Q1

Figure 5-22 shows that Mike provide evidence of the relationship between the variables as well as the constant (six white tiles on the sides). He expressed the relationship both natural language and numerically. Mike also generalized in Q5. His answer is reproduced in Figure 5-24.

Q5 (general case)	*Multiplying the number of white tiles times 2 and adding 6.* $x \times 2 + 6 = x$

Figure 5-24. Mike's answer to Q5

Mike used natural language and algebraic notation to express the general relationship characterizing the tile problem. The three students who generalized both before and after prompting deduced the general relationship by identifying the correspondence relationship implicit in the tile problem function.

The other 16 students, who generalized only when prompted (in Q5), expressed the general relationship between value pairs (correspondence). One of these students represented the generalization through natural language and algebraic notation, whereas the remaining 14 expressed it through natural language only. Peter's answer to Q5, deemed representative of the latter, is reproduced in Figure 5-25.

Q5 (general case)	*Multiplying the number of white tiles by 2 and adding 6 gives you the result.*

Figure 5-25. Pedro's answer to Q5

The figure 5-25 shows that Pedro generalized, through natural language, the number of white tiles for any number of white tiles. Of the 16 students who generalized when prompted, 8 expressed the generalization in terms of a rule that, using algebraic notation, would yield the function $y=2x+6$. The other seven identified other general rules (in Q5) that involved tile problem variables. Carlos replied, for instance: "multiplying the white tiles times two and adding three at the beginning and three at the end". Sara used primarily natural language representation with a few algebraic notations: "you need to use 2x the white tiles +6". These different expressions of regularity mirrored the way students interpreted the problem.

Discussion and conclusions

This paper seeks to shed light on what, how, and when intermediate and upper elementary school students (8 to 12 years old) generalize when answering a functional thinking task; functional relationships, representations, and the type of questions generalized are the key aspects to describe students' generalization. Different studies have been reported elementary school students' generalization with problems involving different types of linear functions (e.g., Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, & Newman-Owens, 2015; Carraher & Schliemann, 2008; Cooper & Warren, 2011; Morales et al., 2018), which provide some ideas about how students relate, express, and generalize relation among variables. Our result illuminate a way to deep and understand students' generalization (from different grades) in natural contexts, without prior instruction, and we contribute in a characterization of students' responses working with specific values and generalizing.

Data from this study provide evidence of similarities and differences between third and fifth graders' generalizations. According to our first specific research objective—to describe the functional relationships evidenced in student's responses—both third and fifth graders provide evidence of functional relationships. We identified that 11 third graders related the variables involved in the tiles problem, three of them generalized the relationship.

On the other hand, 19 fifth graders provide evidence of functional relationships, all generalized the relationship involved in the tiles problem. Correspondence was identified as the most frequent functional relationships, both when working with specific values or generalizing. This situation allows us to interpret that those differences could are due to the students' previous mathematical experiences; students in major grades would be more predisposed to focus on the relationships between variables, while third-graders still focus on the details of arithmetic computations. On the other hand, covariation was identified only in two third graders' answers to questions on specific values. Recurrence was not detected in any of the students' replies. That findings, consistent with earlier reports (e.g., MacGregor & Stacey, 1995), was foreseeable in our research because the problem was posed in a way intended to elicit correspondence and covariation, which relate the dependent and independent variables. In fact, we do not use consecutive values in the questions included in the tiles problem; which could be one reason for this.

According to our second and third research objective—to describe representations used by students and to identify the types of questions in which students generalize—some ideas are discussed below. Generalizing third graders exclusively was expressed through natural language, whereas in fifth graders emerged algebraic notation in some Q1 and Q5 responses. We interpret that the lower grade students who provide evidence of relationships between variables in specific values lacked the resources needed to express the generalization, a finding consistent with results reported by Blanton et al. (2015). These students were consistent with the regularity among variables perceived to Q1-Q4 (they could be detected the general rule in their own words) but when they were asked for the general relationship for any number (Q5), they did not answer. That may explain why only three students generalized. On the other hand, fifth graders' use of algebraic notation was found to be related directly to the presence of spontaneous generalization: students who generalized in this way used algebraic notation. The association between the two would need to be analyzed in future research. Interestingly, fifth graders used different types of representations depending on whether the questions involved the specific values or general cases. We believe that the nature of the question affected how students expressed relationships: in the questions on specific values, they were asked to provide a quantity and in the general case to describe a procedure.

Previous research identified criteria for analyzing elementary school students' generalization of functional thinking problems. Carraher et al. (2008), for instance, emphasize in: (a) the form of the underlying mathematical function, which could relate the two variables involved in the task or only one of them; (b) the variables mentioned; (c) the types of arithmetic computations used; (d) the use or otherwise of symbolic-algebraic notation; and (e) the meanings of the components of the written expression. Our study added a further three: (a) the relationship between variables identified by students; (b) the variety of representations used in addition to algebraic notation; and (c) the type of question in which students generalized (spontaneous or prompted generalization).

The tiles problem was designed in a way to prevent students from resorting to recurrence (Küchemann, 1981). We stress the importance of problem design for two reasons. First, it enables students to use different procedures when answering the questions involving specific values until they are able to generalize. Second, it helps researchers identify the elements of generalization and functional thinking that can be deduced from elementary school students' spontaneous replies. The latter should lead to useful conclusions for teaching, for such elements are present in a number of countries' mathematics curriculums (Ministerio de Educación, Cultura y Ciencia, 2014). The findings discussed consequently support students' ability to define a general rule, albeit incorrectly on occasion. Some of the difficulties faced by students when trying to establish a rule for the relationship between variables have to do with a mistaken notion of their exchangeability. While acknowledging that generalization is not simple and requires time (Dienes, 1961), we believe that learning sequences must be designed to guide students to a general rule valid for different specific values, working with different type of mathematical representations.

The manners in which students expressed regularity in the tiles problem were informed by the way they interpreted the problem. That idea suggests a line of research on students' perception of structure and how it changes with the quantities involved (when they working with different specific values or the general case).

Acknowledgments

This study forms part of National R&D Projects EDU2013-41632-P and EDU2016-75771-P funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness; the first author was supported by a PhD scholarship granted by Chilean Government through the CONICYT, folio 72160307-2015.

References

Amit, M., & Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, 40, 111-129.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2015). *Mathematics: Sequence of content F-6 strand: Number and algebra*. Retrieved from http://www.acara.edu.au/verve/_resources/ Mathematics__Sequence_of_content.pdf, March, 2017.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128). Melbourne, Australia: PME.

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2004). Elementary grades student’s capacity for functional thinking. In M. Hoines & A. Fugslestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: PME.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds’ thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (Eds.) (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the “best deal” problem. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). New York, NY: LEA.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., & Morales, R. (2016). Functional relationships identified by first graders. In C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi. (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 131-138). Szeged, Hungary: PME.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103.

Carpenter, T., & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (Research report No. 00-2). Madison, WI: National Center for Improving student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2002). The transfer dilemman. *The Journal of the Learning Sciences*, *11*(1), 1-24.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 669-705). Reston, VA: NCTM.

Carraher, D. W., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, 37(2), 87-115.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovation in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 135-64.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM*, *40*(1), 23-37.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai (Ed.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 187-214). Berlin, Germany: Springer.

Dienes, Z. P. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard Educational Review*, *31*(3), 281-301.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, *19*(2), 166-170.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (2000). *Research design in mathematics and science education*. New Jersey, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London, United Kingdon: John Murray.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, *7*(1), 69-85.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In B. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 227-290.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente* [Thinking mathematically]. Barcelona, Spain: Labor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria [Royal

Decree 126/2014, of 28 February, by which the corresponding core curriculum for primary education is established]. *Boletín Oficial del Estado*, *52*, 19349-19420.

Mitchelmore, M., & White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 1-9.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional [Functional relationships and strategies of first graders in a functional context]. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building and knowledge forum: Grade 4 students collaborate to solve linear generalizing problems. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the International Group for PME* (Vol. 4, pp. 193-199). Prague, Czech Republic: Charles University.

Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Berlin, Germany: Springer.

Moss, J., Beatty, R., Barkin, S., & Shillolo, G. (2008). What is your theory? What is your rule? Fourth graders build an understanding of functions through patterns and generalizing problems. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 155-168). Reston, VA: NCTM.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: Council of Chief State School Officers. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf, March, 2017.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, *12*(3), 173-184. https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6643

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic–cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds, ICME-13 Monographs* (pp. 3-25). https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. New York, NY: Springer.

Schifter, D., Bastable, V., Russell, S. J., Seyferth, L., & Riddle, M. (2008). Algebra in the grades K–5 classroom: Learning opportunities for students and teachers. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 263-277). Reston, VA: NCTM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Building foundations for algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *2*(4), 253-260.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

ESTUDIO 4

FIFTH GRADERS WORKING ON DIRECT AND INVERSE FORMS OF A FUNCTION. A STUDY WITHIN THE FUNCTIONAL APPROACH TO EARLY ALGEBRA

Eder Pinto[a], María C. Cañadas[a], and Bárbara M. Brizuela[b]
[a] University of Granada, Spain
[b] Tufts University, United States

Abstract

We present an exploratory study that describes written responses of fifth grade students (10-11 years old) working with both direct and inverse forms of a linear function, a topic that has been scarcely addressed in the recent literature on functional approaches to early algebra. The goal of the study is to describe how these students understand, represent, and generalize relationships between variables involved in a functional thinking task. We identify the structures underlying students' answers and describe how they interpret and understand the relationships involved in the problem, their representations, and generalizations. Our findings illustrate that the structures identified are more varied and incorrect when they work with the inverse form of the function. Our data help to clarify and confirm that: (a) students generalize direct and inverse forms of linear functions and (b) natural language is an important feature of students' representations in both linear function forms.

Keywords:

Structure, generalization, direct functions, inverse functions, functional thinking.

Introduction

Functional thinking, as an aspect of algebraic thinking, is a vehicle for introducing algebra in the early years of schooling, focusing on the relationship between two or more co-varying quantities (Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011; Smith, 2008). Given that functions constitute the prime mathematical content in functional thinking, some researchers recommend focusing on how students understand both direct and inverse forms of functional relationships (e.g., Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008). In this article, through analysis of a session within a Classroom Teaching Experiment (CTE), we explore and describe how 10 fifth-grade students (10-11 years old) understand, represent, and generalize relationships between variables when working on a functional thinking task that includes the direct and inverse forms of a linear function.

In this paper, we identify the structures underlying students' responses and describe how these students understand relationships between variables. We adopt the idea of structure as "a way of viewing an object or expression such that it is seen as a combination of recognizable parts along with recognizable patterns which connect those parts together" (Hewitt, 2019, p. 2). To clarify the idea of structure, Mulligan and Mitchelmore (2009) exemplify it through rectangular grids represented in Figure 5-26.

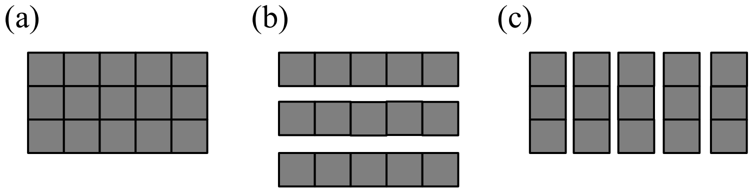


Figure 5-26. Rectangular grid perceived as (a) 3 x 5, (b) 3 rows of 5, (c) 5 columns of 3 (Mulligan & Mitchelmore, 2009, p. 34).

Often, elementary grade students have difficulties identifying the pattern 3x5 in the three grids of Figure 5-26 because they are not able to recognize the implicit structure of three rows of five squares each or five columns of three squares each. In this case, the way in which the squares are organized is one important characteristic of the structure.

Four main issues motivate this study. First, researchers are interested in how elementary students express functional relationships that involve direct forms of linear functions (e.g., Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, & Newman-Owens, 2015; Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008; Pinto & Cañadas, 2018) and very few studies have been published on how students work with both direct and inverse forms of a function, or only inverse forms (e.g., Warren & Cooper, 2005). Most of the studies that tackle students' understandings of inverse forms of a function are focused on post-secondary students, pre-service teachers, and in-service teachers (Paoletti, Stevens, Hobson, Moore, & LaForest, 2018). Thus, the contribution of this study is to explore and provide evidence regarding elementary students' work with both direct and inverse forms of a function.

Second, the idea of structure has different meanings and it has been scarcely treated in the context of functional thinking (Hoch & Dreyfus, 2004; Kieran, 2018; Molina & Cañadas, 2018). Authors such as Papic, Mulligan, and Mitchelmore (2011) highlight the need to infer the structure underlying student responses that can explain how students perceive regularities in work with different types of patterns. Thus, the idea of identifying structures in students' responses provides a way to describe how elementary school students interpret and understand relationships between variables in a functional thinking task.

Third, generalization and representations are crucial practices central to the acquisition of algebraic thinking and, specifically, functional thinking (Kaput, 2008). According to Kaput, Blanton, and Moreno (2008), representations—a socio-cultural vehicle used to generalize—enable students to build and complete the ideas that help them reason about general statements and compress multiple instances into the unitary form of a single statement that symbolizes the multiplicity. In addition, generalization is the "act of creating that symbolic object" (Kaput et al., 2008, p. 20). Prior studies provide evidence of primary school students' ability to generalize functional relationships, using a variety of representations, when working with the direct form of a linear function (e.g., Blanton & Kaput, 2004). Therefore, furhter motivation for this study is to explore students' generalizations and representations when working with both forms of a linear function.

Fourth, fifth graders were chosen because while research has been conducted about the direct and inverse forms of functions (e.g., MacGregor & Stacey, 1995) and the idea of structure (e.g., Linchevski & Livneh, 1999) among secondary school students, it has not been studied among elementary school students. For instance, MacGregor and Stacey (1995) explored how 143 14-15 years old students recognize, use, and describe rules relating two variables, focusing on students' understanding of functional relationships. One of the items used involved direct (with near and far values) and inverse (only near values) forms of linear functions. Results showed that 63% of students answered correctly the direct form, but only 43% answered the inverse form of the function correctly. Specifically, students found easy ways to work with near values in the direct form, while some difficulties appeared when working with far numbers. On the other hand, when students worked with the inverse form, they had many difficulties working with near values. The authors did not provide information regarding how students understood regularity when the inverse function was involved because the focus was to describe how students find rules in direct forms (given the value of the independent variable, calculate the value of the dependent). Therefore, our study can contribute insights that allow us to describe how elementary school students work with both forms of a linear function.

This study was carried out within an early algebra CTE, where generalizations and the ways they are expressed were emphasized (Kaput, 2008). This study builds on a functional approach to early algebra (Carraher & Schliemann, 2007). Considering our aim—to explore and describe how 10 fifth-grade students (10-11 years old) understand, represent, and generalize relationships between variables when working on a functional thinking task that includes the direct and inverse forms of a linear function—we address the following research questions (RQ):

- RQ1: What structures could be identified from the students' answers in both direct and inverse forms of the function?
- RQ2: How do representations used by fifth graders vary in both direct and inverse forms of the function?
- RQ3: How do generalizations expressed by fifth grade students vary in both direct and inverse forms of the function?

In addressing these research questions, we analyze evidence from a specific session in which students worked with a problem and answered different questions on a worksheet.

Theoretical framework

Function and its direct and inverse forms

This study focuses on linear functions; specifically, we focus on the type y=mx+b, in which constants m and b, as well as variables x and y, are natural numbers. A linear function is a rule that establishes a relationship between two variables, with the emphasis on how the changes in one are related to changes in the other (Thompson, 1994). In this context, the dependent and independent variable can be arbitrarily chosen because this dependent relationship is derived from how we present the task (Blanton et al., 2011). Thus, the direct and inverse forms of a function are related to the roles played by each variable involved. The independent variable in the direct form of the function is the dependent variable in the inverse form, and vice-versa. For instance, in a problem that involves square tables and people sitting around them in the way that we show in Figure 5-27 (see Carraher et al., 2008; Merino, Cañadas, & Molina, 2013), two variables are present: number of square tables (t) and number of people (p).

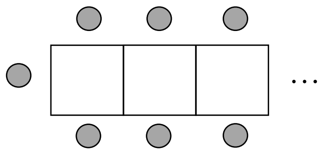


Figure 5-27. Square tables and people's problem ($p=2t+2$).

If we want to know the number of people that can sit at t tables, p is expressed in terms of t. In this case, t is the independent variable and p is the dependent one. We assume that this is the direct form of the function. Consequently, if we are interested in knowing the number of tables given the number of people, t is expressed in terms of p and we consider that this is the inverse form of the function. Thus, naming a form of a function the direct or inverse form is somewhat arbitrary.

Generalization and representations

The activity of representing mathematical structures and relationships is as important as generalizing (Kaput et al., 2008). The representations not only give "material" form to the generalizations, but also give shape to students' understandings (Blanton, Brizuela, Stephens, Knuth, Isler, Gardiner, et al., 2018). In this study, we assume that functional thinking involves generalization of relationships between covarying quantities and expressing those relationships through different representations.

Some authors consider generalization as "the process by which we identify structure and relationships in mathematical situations" (Blanton et al., 2011, p. 9), a process that allows students to give meanings to the calculations they make. Thus, generalization, which could entail conscious reasoning based on specific instances to identify broader and more abstract models or relationships, requires adapting, adjusting, connecting, and reorganizing mathematical ideas (Kaput, 1999; Mitchelmore & White, 2007). For instance, Carraher et al.

(2008) describe generalization among a group of third graders (8-9 years old) when solving the square table and people's problem mentioned earlier (see Figure 2). One of the students, for instance, used pictorial representations to determine the relationship between the variables, generalized the relationship verbally, and used algebraic symbolism, stating: "*t* times 2 plus 2 equals *p*…" (p. 12). Considering the above example, and according to some researchers, the types of representations that can be used by elementary school students to solve problems involving linear functions include: (a) natural language—oral; (b) natural language—written; (c) pictorial; (d) numerical; (e) algebraic notation; (f) tabular; and (g) graphical (Carraher et al., 2008). Considering the suggestions of current literature (e.g., Radford, 2003), we stress the role of natural language in students' descriptions of specific values or when generalizing relationships, and we assume that natural language is a useful tool to promote the use of other types of representations.

Within a functional approach to early algebra, authors describe different types of generalizations. For example, Pinto and Cañadas (2018) focused on the type of questions that prompt fifth graders to generalize when working with a functional thinking task that involves a function of the type $y=ax+b$. Their main results describe two types of generalizations: (a) spontaneous, when students generalize in response to questions about specific values; and (b) prompted, when they answer a question posed in general terms. Students that provided evidence of prompted generalization primarily used natural language—written, while students who generalized spontaneously used algebraic notation and natural language—written to express the general relationship between variables. Exploring spontaneous and prompted generalizations could provide insights regarding the types of students' representations to describe their generalizations.

Structure

Conceptually, patterns and structures are quite close. A pattern can be defined as a spatial or numerical regularity and structure as the elements that form the regularity, the computations that connect the elements, the order of the elements, and the connections between these elements (Kieran, 1989; Mason, Stephens, & Watson, 2009; Morris, 1999; Resnick & Ford, 1990; Warren, 2003). Previous authors have argued that to generalize, students must previously identify the structure of the relationships observed and that when they identify structures in mathematical tasks, students experience mathematics more deeply (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008; Mason et al., 2009). For this reason, in this paper, we identify underlying structures in students' responses to describe how these students understand relationships between variables. For instance, in order to express the number of people (p) that can sit at a number of tables (t), students can describe the relationship between variables as: (a) the number of people is twice plus 2 the number of tables, (b) $p=2t+2$, or (c) $p=\square+\square+2$ ($\square$ = table). These expressions, through different representations, describe the underlying structure of the situations: (a) and (b) involve the same arithmetic operations (multiplication and addition) whereas (c) only uses addition. The three expressions represent the same regularity, therefore are considered equivalent in terms of structure (English & Warren, 1998).

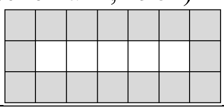
The Study

This study is part of a broader CTE focused on functional thinking in fifth grade (10-11 years old). We designed a four-session CTE in which a different problem was posed in each session. Broadly speaking, in all four sessions we considered the same objectives, which were to: (a) explore how students relate the variables involved in a problem involving a linear function; (b) introduce different types of representations to express functional relationships; and (c) explore students' generalizations when working with functional thinking tasks. Table 5-13 shows the contexts and functions involved in each of the four sessions; some of them were selected from previous studies and others were designed by the research team.

Table 5-13. *Contexts and functions presented in each session*

Session	Context	Function
1	Carlos wants to sell shirts with his school's badge so he can go on a study trip with his class. He earns 3 euros for each shirt he sells.	$y=3x$
2	Daniel and Carla sell different shirts for their study trip. Carla gets 3 euros for each shirt. Daniel has saved 15 euros. Additionally, for each shirt he sells, he gets 2 euros.	$y=3x$ and $y=2x+15$

Table 5-13. *Contexts and functions presented in each session*

Session	Context	Function
3	Juan has saved some money (he only has euros, no cents). His grandmother wants to reward him for a job she has given him. She offers him two deals: Deal 1. She will double his money. Deal 2. She will triple his money and then take away 7 euros. (Adapted from Brizuela & Earnest, 2008).	$y=2x$ and $y=3x-7$
4	A school wants to re-tile its corridors because they are in poor condition. Its administration decides to use a combination of white and grey tiles, all square and all the same size, to be laid out as in this figure. (Adapted from Küchemann, 1981) 	$y=2x+6$

In each session (see Table 1), a research team worked with the students: the teacher-researcher, who led the sessions, and two researchers who video recorded the sessions and helped answer students' questions when they were working on the problem. Each CTE session lasted approximately 60 minutes and was divided into three parts. First, we introduced the context of the problem, highlighted the representations given, and asked the students questions about specific values to ascertain whether they had understood the problem. Second, the students were given individual worksheets with questions about specific cases and the general rule underlying the problem. Each student worked individually. Last, the researchers led a classroom discussion around the responses students' provided to some of the questions on the worksheets.

Data selection

This paper reports the findings from the last CTE session, in which the tiles problem was used. In the first three sessions, the students worked with problems involving three types of functions: $y=x+a$, $y=ax$, and $y=ax+b$. In the fourth session, the problem involves exclusively the type $y=ax+b$ (the second and third sessions included this type of function and $y=ax$). Three main issues motivate the focus on the last session. First, the session design included questions that involved direct and inverse forms of the function. Second, this session was the last one and students were more familiar with working with functional thinking tasks. Third, the function of the last session involved exclusively additive and multiplicative structures (as opposed to second and third sessions).

Participants

A group of 24 fifth graders enrolled in a school in the South of Spain participated in the CTE. The school was intentionally chosen because of its interest in collaborating in the research study. There was a single fifth grade classroom in this school. Prior to the CTE, these students had worked with the four basic arithmetic operations with natural, whole, and rational numbers; they had not worked on functional thinking tasks. Specifically, in the fourth and last session (the tiles problem), each student worked on the task, which includes questions to the direct and inverse forms of a linear function. To describe how students worked with both forms of the linear function, we selected students who answered:

- Two or more questions about the direct form, and two questions about the inverse form, and/or;
- Generalized the relationship for both the direct and inverse forms of the linear function.

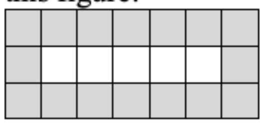
We considered these criteria to ensure that students included in our analysis provided answers to both forms of the function (e.g., if one student only answered the direct form questions (Q1-Q5) and not the inverse forms (Q6-Q7), this would not allow us to describe how students worked with both forms of a linear function). Ten students (S1[20], S2, S3, S6, S11, S12, S13, S14, S21, and S24) were selected according to these criteria.

Instruments and data collection

The fourth classroom session that we describe here was divided into three stages. In the first stage, the teacher-researcher introduced the problem, where the underlying function was $y=2x+6$ (see Figure 5-28), and different questions (Q1-Q7). The teacher-researcher led a discussion on the context of the tiles problem, asking some questions to assess the students' understanding of the problem, and gave some instructions.

[20] We refer to the students with letter S followed by a number, from 1 to 24 to maintain their anonymity.

A school wants to re-tile its corridors because they are in poor condition. Its administration decides to use a combination of white and grey tiles, all square and all the same size, to be laid out as in this figure:



The school contracts a company to re-tile the corridors. We want you to help the workers answer some questions before they get started.
Q1. How many grey tiles do they need for a corridor with 5 white tiles? How did you find your answer?
Q2. As some corridors are longer than others, the workers need a different number of tiles for each. How many grey tiles do they need for a corridor with 8 white tiles? How did you find your answer?
Q3. How many grey tiles do they need for a corridor with 10 white tiles? How did you find your answer?
Q4. How many grey tiles do they need for a corridor with 100 white tiles? How did you find your answer?
Q5. The workers always lay the white tiles first and then the grey tiles. How can they calculate how many grey tiles they need in a corridor where they've already laid the white ones?
Q6. In some corridors, the workers mistakenly laid the grey tiles before the white tiles. They laid 20 grey tiles. How many white tiles do they need? How did you find your answer?
Q7. In another corridor where they laid the grey tiles before the white, they laid 56 grey tiles. How many white tiles do they need? How did you find your answer?

Figure 5-28. The tiles problem.

Students then individually answered the worksheets that included the seven questions shown in Figure 5-28. These questions were designed based on the inductive reasoning model described by Cañadas and Castro (2007), which involves questions that include specific values and generalization. Questions Q1 to Q5 involve the direct form of the function ($y=2x+6$); the first four questions involve specific values and Q5 the generalization. The sixth and seventh questions involve the inverse form of the function ($y=(x-6)/2$), asking for specific values.

Finally, the teacher-researcher led a group discussion focused on students' answers, ideas, and procedures to different questions.

The data analyzed in this paper were the students' CTE worksheets. We video-recorded the session and we use some transcribed episodes to illustrate students' written answers to the worksheets.

Data and analysis categories

We analyzed each student's responses to the worksheets, considering three categories simultaneously:

1. Structure. We identify the structure underlying students' responses to the tiles problem questions. The purpose of this analysis was to identify the variety of structures underlying how students interpret and understand the relationship between variables in functional thinking tasks. Figure 5-29 shows an example of how we identified structures in one student's responses.

Question (Q)	**Student's responses**	**Structures underlying student's response**
Q2 (8 white tiles)	Multiply the white tiles by 2 and add 6. They are 22 tiles.	$2x + 6$
Q3 (10 white tiles)	26 gray tiles are needed. Multiply the white tiles by 2 and add 3 from the beginning and 3 from the end	$2x + 3 + 3$
Q5 (indeterminate white tiles)	They have to multiply the number of white tiles times 2 and add 3 from the beginning and 3 from the end.	$2x + 3 + 3$
Q6 (20 grey tiles)	7 tiles are needed. Dividing the gray tiles by 2 and subtracting the three tiles at the beginning and end.	$x : 2 - 3 - 3$
Q7 (56 grey tiles)	There are 25 white tiles. For the same reason as before. Dividing by two the grey tiles and subsract 6.	$x : 2 - 6$

Figure 5-29. Examples of structures identified in a student's responses.

We express the structures using algebraic notation, although the students did not use these types of representations.

2. Representation. We identify the representation used by students to express the regularity in each question: pictorial, natural language-written, numerical, and algebraic notation (see Table 5-14).
3. Generalization. We distinguish between fifth-grade elementary school students who generalized in questions referring to specific cases (spontaneous generalization) and those who did so when confronting the general situation (prompted generalization) (Pinto & Cañadas, 2018).

Each category was designed to respond to our research questions. The first category is related to RQ1 (what structures could be identified from the students' answers in both direct and inverse forms of the function?), the second category is related with RQ2 (how do representations used by fifth graders vary in both direct and inverse forms of the function?), and the last category with RQ3 (how do generalizations expressed by fifth grade students vary in both direct and inverse forms of the function?).

Table 5-14 summarizes the categories, subcategories, and codes used to analyze each student's responses. We also include examples of the categories.

Table 5-14. *Categories used in each student's responses*

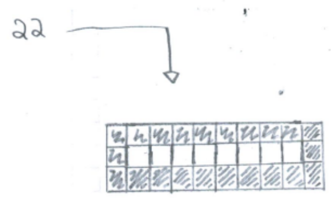
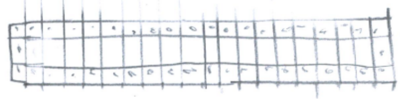
Categories	Subcategories	Code	Examples
1. Structure	1.1. It is possible to identify a structure		Q3 (10 white tiles): $12 \times 2 = 24 + 2 = 26$ Q4 (100 white tiles): $102 \times 2 = 204 + 2 = 206$
	1.2. It is not possible to identify a structure	1.2.1. Answered the questions without providing information about the procedure used.	Q7 (56 grey tiles): "25 white tiles".
		1.2.2. Merely copied the problem wording.	Q1 (5 white tiles): "We need 16 tiles because it is said in the example".
		1.2.3. Drew or referred to illustrations of the problem.	Q2 (8 white tiles): 
	1.3. Did not answer the question		
2. Representation		2.1. Pictorial	Q6 (20 grey tiles): 

Table 5-14. *Categories used in each student's responses*

Categories	Subcategories	Code	Examples
		2.2. Natural language – written	Q5 (indeterminate white tiles): "They have to multiply the number of white tiles times 2 and add 6".
		2.3. Numerical	Q3 (10 white tiles): $12 \times 2 = 24 + 2 = 26$
		2.4. Algebraic notation	Q5 (indeterminate white tiles): $X \times 2 + 6 = X$
3. Generalization	3.1. Explicit evidence of generalization	3.1.1. Prompted generalization (generalization to Q5)	Q1 (5 white tiles): "(…) For each white tile there are 2 grays except for the ones on the sides that are 6. Or all the white ones x2 +6 on the sides."
		3.1.2. Spontaneous generalization (generalization to Q1, Q2, Q3, Q4, Q6, and Q7)	Q5 (indeterminate white tiles): "Multiplying by 2 the white tiles and multiplying by 3 the ones at the beginning and [*the three*] at the end."
	3.2 No explicit evidence of generalization		

To summarize, we analyze each student's responses according to three categories: structure, representation, and generalization, considering all the written answers to the worksheets. At first, the first author coded the written answers of the students and then we checked these codes with the other two authors. All the results reported in this paper are related to students' answers to the worksheet, and we use some transcript excerpts from the class discussion to illustrate students' written responses.

Results and discussion

Structures

In this section, we present the variety of structures identified in the ten students' answers to the worksheet. Table 5-15 shows the types of structures identified, considering both forms of the function: direct (Q1-Q5) and inverse (Q6-Q7).

Table 5-15. *Structures identified in students' responses*

	Questions						
	Direct form					Inverse form	
Student	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
S1		2x+6		2*x*+6	2*x*+6*	(*x*-6):2	(*x*-6):2
S2		2*x*+3+3	2*x*+3+3	2*x*+6	2*x*+6*	(*x*:2)-6*	*x*:2
S3		2*x*+3+3	2*x*+3+3	2*x*+3+3	2*x*+3+3*	(*x*:2)-3-3*	(*x*:2)-3-3*
S6	2*x*+6*	2*x*+6*			2*x*+6*	(*x*-6):2*	(*x*-6):2
S11		2*x*+6		2*x*+6	2*x*+6*	(*x*-6):2	(*x*-6):2
S12				*x*+*x*+2	2*x*+2*	(x:2)-2	(*x*:2)-2
S13		2*x*+6		2*x*+6	2*x*+6*	(*x*-6):2	(*x*-6):2
S14		2*x*+3+3	2*x*+6	2*x*+6	2*x*+6*	(*x*:2)-6*	(*x*-6):2
S21		2*x*+6	2*x*+3+3	2*x*+3+3	2*x*×3×3*	(*x*:2)-3-3	(*x*:2)-3-3*
S22			2*x*+3+3	2*x*+3+3	2*x*+6*	(*x*-6):2	(*x*:2)×2+6

Note. * = generalization.

Broadly speaking, four different structures were identified in the students' responses to Q1-Q5 (direct form): (a) "2*x*+6" was identified in 19 responses; (b) "2*x*+3+3" was identified in 11 responses; (c) "*x*+*x*+2"; (d) "2*x*+2"; and (d) "2*x*×3×3" were identified in one response each. The first two are equivalent to the function involved in the problem because it represents the same regularity (English & Warren, 1998), while the last two structures are not equivalent to this form of the function (2*x*+6). On the other hand, we identified six different structures in response to Q6-Q7 (inverse form): (a) "(*x*-6):2", which is the only correct form, was identified in 10 responses; (b) "(*x*:2)-3-3" was identified in 4 responses; (c) "(*x*:2)-6" and (d) "(*x*:2)-2" were identified in two responses each; (e) "*x*:2", and (f) "(*x*:2)×2+6" were identified in one response each. The variety of structures identified in the questions that involve the inverse form is surprising, showing the ways that the students interpret and understand the relationship between the variables involved. We did not expect to identify so many structures due to the difficulties that post-primary students have with this type of function (e.g., Teuscher, Palsky, & Palfreyman, 2018; van Dyke, 1996).

Specifically, on the one hand, and in relation to the structures identified in the questions that involve the direct form of the function, we identified structures that represent the same regularity to the direct form question (y=2x+6) in nine students (2x+6 and 2x+3+3 are equivalent because they represent the same regularity). On the other hand, we identified two tendencies: (a) five students (S1, S3, S6, S11, and S13) consistently provided evidence of the same structure in their responses; and (b) the other five students (S2, S12, S14, S21, and S22) provided evidence of equivalent structures in their responses. For instance, in S13's answer (see Figure 5-30) we identify the same structure in three different questions: 2x+6.

Q2 (8 white tiles).	They need 22 gray tiles because they multiply 8x2 = 16, and then add 6, which is 22.
Q4 (100 white tiles).	They need 206 gray tiles because 2 x 100 = 200 + 6 = 206.
Q5 (indeterminate white tiles).	They have to multiply the number of white tiles times 2 and add 6.

Figure 5-30. S13's answers to Q2, Q4, and Q5

In her responses, S13 used the same structure to express the relationship between variables. Regardless of the numbers involved, she tended to establish a multiplication by two and then added 6. Additionally, she is being consistent with the structure underlying her responses. We interpret that S13 found the general rule before answering Q5 (when she answered Q2 and then she used the same rule to answer Q4) and she expressed it only in Q5, which makes sense for the type of question (in Q5 we explicitly asked for the generalization).

Another student, S21, provided evidence of different structures in her answers to the questions. In Figure 5-31 we present the student's answers.

Q2 (8 white tiles)	Multiply the white tiles by 2 and add 6. They are 22 tiles.
Q3 (10 white tiles)	26 gray tiles are needed. Because you have to multiply the white tiles by 2 and add the 3 at the beginning and [*the three*] at the end.
Q4 (100 white tiles)	206 gray tiles are needed. Multiply the white tiles by 2 and add the 3 at the beginning and the last 3.
Q5 (indeterminate white tiles)	Multiplying by 2 the white tiles and multiplying by 3 the ones at the beginning and [*the three*] at the end.

Figure 5-31. S21's answer to Q2, Q3, Q4, and Q5

In S21's responses (see Figure 5-31) we identified "$2x$+3+3" in Q2 and "$2x$+6" in Q3 and Q4. When she worked with Q5, she used "$2x\times3\times3$", which is a structure that is not equivalent with the problem. We identified a change in the structure from Q2 to Q3 and from Q4 to Q5. It seems that, spontaneously, the student (like S2 and S14) provides evidence of both equivalent structures in her answers, which could imply that neither was more difficult. In S21's answer to Q5, we identified a change in the structure from "$2x$+3+3" (identified in Q4) to "$2x\times3\times3$", which is not equivalent to the tiles problem. We interpret that the student, when answering Q5, made a mistake in writing the arithmetic operations that involve the situation; in her responses to Q2-Q4 she multiplied by 2 the number of white tiles and added the number of grey side tiles, while in her answer to Q5 she connects the side tiles with a multiplication.

Concerning the structures identified for questions that involve the inverse form of the function (Q6 and Q7), seven students (S1, S3, S6, S11, S12, S13, and S21) consistently provided evidence of the same structure in their responses; four of them showed the equivalent structure to the inverse form questions (S1, S6, S11, and S13). On the other hand, three students (S2, S14, and S22) provide evidence of different structures; two of them showed an equivalent structure in one of their responses. In addition, we identified in six students' responses equivalent structures to this form ($y=(x\text{-}6)/2$). Apparently, the students among whom we identify correct and consistent structures in their responses to the direct form, are also consistent with the inverse form.

To illustrate an equivalent and consistent structure identified to the inverse form questions, in Figure 5-32 we show S11's answers.

Q6 (20 grey tiles)	They need seven white tiles. You have to subtract six tiles (from the sides) [and divide] by two.
Q7 (56 grey tiles)	They need 25 white tiles. (56-6):2=25

Figure 5-32. S11's answers to Q6 and Q7.

In his response to Q6 (see Figure 5-32), the student considered the total number of grey tiles, subtracted the ones on the sides (6) and then divided the remainder by two, to get seven. We identified the structure (x-6):2. The student wrote the answer to the specific case asked (56 grey tiles). Like the other three students, S11 was observed to start from the structure identified in the direct function (2*x*+6) to describe the structure for the inverse function. Also, in his reply to Q7 he used the same structure identified in Q6.

On the other hand, S3 is one of the students that used a non-equivalent structure in the inverse form: (*x*:2)-3-3. This structure is correct for some specific values but not for the general case. We select the answer of this student to illustrate the way in which he interpreted and understood the operations involved in his response. Figure 5-33 shows the student's answers on the worksheet.

Q6 (20 grey tiles)	They need seven white tiles. Dividing the gray tiles between 2 and subtracting the three from the beginning and the three from the end.
Q7 (56 grey tiles)	25 tiles are needed because it divides the gray tiles between 2 and subtracts the three of the two sides.

Figure 5-33. S3's answer to Q6 and Q7.

In his response, like four other students (S2, S12, S14, and S21), he considered the specific number of grey tiles and divided them by two. Then, he subtracts the six tiles from both sides. Given this regularity detected, and when explaining how to obtain the number of white tiles given 56 grey tiles (Q7), the following dialogue happened in the last part of the session.

1. *S3*: Fifty-six, okay. Fifty-six minus six, equal to fifty. And now divided by two, equal to twenty-five, which are the white tiles in the corridor.
2. *Teacher (T)*: Okay, S3 has said that he would divide and then subtract and then what he has done has been subtracted and then divided. Does the order matter?
3. *Students*: No, it does not matter.
4. *S3*: No, it does not matter.
5. *T*: If you subtract first [instead of dividing], it does not matter?
6. *S3*: No, because uh ... If we divide fifty-six between two it's twenty-eight and we have to subtract the three from the beginning and the three from the end. Then it's 22 (…) But, I think it's better to subtract the columns and divided by two.
7. *T*: First you have to remove them and then divide them by two?
8. *S3*: First remove this column [right side] and this column [left side] and then, divide the gray tiles by two.

Two ideas arise from the above excerpt. First, during his written responses (see Figure 8), we identify the structure (x:2)-3-3 for both Q6 and Q7 questions, while in the extract we identify the structure (x-6):2 (lines 1 and 6). Therefore, we identify a change in the structure underlying S3's responses. Second, and in relation to the above idea, the teacher-researcher asked if the order of operations (first subtract and then divide, or divide and then subtract) matters (lines 2 and 5). The students in the class pointed out that the order does not matter (line 3), while S3 exemplified and concluded that first you have to subtract and then divide (lines 6 and 8). The discussion of the order of arithmetic operations involved in the problem could reflect how the student is focused on the details related to the arithmetic calculation (which allows them to reach the answer) rather than analyzing the relationship between variables, regardless of the specific values. This could suggest the difficulty of this form of the function to students.

Representations

Table 5-16 shows the types of representations identified in students' answers.

Table 5-16. *Representation(s) used by students*

	Questions						
	Direct form					Inverse form	
Student	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
S1		NL; N		N	NL; A	NL; N	N
S2		NL	NL	NL	NL	NL	N
S3		NL	NL	NL	NL	NL	NL
S6	NL	NL			A	NL; N	N
S11		NL; N		N	NL	N	N
S12				NL	NL	P; NL	N
S13		NL; N		N	NL	NL; N	NL; N
S14		NL	NL	NL	NL	NL	NL
S21		NL	NL	NL	NL	NL	NL
S22			N	N	NL	NL; N	N

Note. NL = Natural Language-written; N = Numerical; A = Algebraic notation; P = Pictorial

Regarding the representations used by students, all used the natural language-written at least once; three students only used this type of representation (S3, S14, and S21). These results show the importance of natural language for students when expressing a relationship between variables. On the one hand, this type of representation is considered a useful scaffold for the development of a more symbolic representation (e.g., algebraic notation) (Radford, 2003; Stephens et al., 2015). On the other hand, we interpret that students used natural language because this is how the questions were presented to them in written form and using natural language.

Considering both direct and inverse forms of the linear function, we found two main differences in the types of representations used. First, in the case of the direct form, there is a tendency for this group of students to mainly use natural-language written (all students use this type of representation), both in the questions that involve specific values (Q1-Q4) and the generalization (Q5). The use of numerical representations appears only in the questions that involve specific cases (S1, S11, S13, and S22) and it makes sense given that they were being asked about specific values. The algebraic notation appears spontaneously in the question related to generalization (S1 and S6).

Second, regarding the representations used by students in their responses to the inverse form of the function, natural language and numerical representation are the most frequently used. Five students (S2, S6, S12, S13, and S22) used both natural language and numerical representations in these questions, three students (S3, S14, and S21) used natural language representations exclusively in their answers, while one student (S11) used a numerical and another (S12) used a pictorial, natural language, and numerical representation. For instance, during the discussion with the whole group, we found an answer that we did not expect when discussing the answer to Q6. In her responses to the worksheet, S6 used natural language and numerical representations to answer Q6. Then, she orally explained her responses to the rest of the class, using three types of representations that she wrote on the board. Figure 5-34 shows the representations used by the student.

(a) (b) (c)

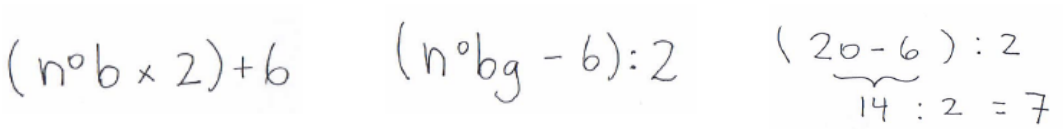


Figure 5-34. S6's answers to Q6
(Note: nº b = *número de baldosas* (number of tiles); nº bg = *número de baldosas grises* (number of grey tiles)

The student, before explaining how she got the answer to Q6 (see Figure 5-34), used algebraic notation to represent the (generalized) relationship that involves the direct form of the function (see Figure 5-34a) and, using that expression, she used the same type of representation when explaining the general relation (which was not requested) for the inverse form (see Figure 5-34b). In justifying her response to the general rule of the inverse form, she pointed out: "you have to do the same, but the other way around". She changed the types of representations used in the worksheet to use algebraic notation in her oral explanation. A possible interpretation of this change has to do with the limitation involved in analyzing students' responses in the worksheets. Maybe the student used the natural language and numerical representations in her written responses because she did not find it necessary (nor was asked) to use a more symbolic type of representation.

Generalization

Broadly speaking, all ten students generalized the relationships that focus on how many grey tiles are need given a number of white tiles (y=2x+6) and five students generalized the inverse form even though they were not asked to do so. Table 5-17 shows the type of generalization (prompted or spontaneous) for both forms of the function.

Table 5-17. *Types of generalization in students' responses*

Direct form (Q1-Q5)			Inverse form (Q6-Q7)
Only prompted generalizations	Only spontaneous generalizations	Both generalizations (spontaneous and prompted)	Spontaneous generalizations
9 (S1, S2, S3, S11, S12, S13, S14, S21, S22)	0	1 (S6)	5 (S2, S3, S6, S14, S21)

Nine students only generalized in response to Q5 (prompted generalization) while one student (S6) did generalize in their response to Q1, Q2, and Q5 (spontaneous and prompted generalizations). Five students generalized spontaneously the inverse form, which makes sense because we did not ask for the general relation for that form of the function.

To illustrate one student who generalized the direct form of the function, Figure 5-35 shows S6's responses to different questions.

Q1 (8 white tiles)	16 gray tiles are needed. For each white tile, there are 2 grays except for the ones on the sides that are 6. Or all the white ones ×2+6 on the sides.
Q2 (10 white tiles)	There are 22 gray tiles by the previous process.
Q5 (indeterminate white tiles)	Multiplying by 2 the white plus 6 of the sides. $x \times 2 + 6 = x$

Figure 5-35. S6's answers to Q1, Q2, and Q5.

In his responses (see Figure 5-35), we identified that the student explained the general statement in Q1 with the expression "all the white ones ×2+6 on the sides". Then, in Q2 he used the same general statement to find the specific number of grey tiles given 10 white tiles. In this sense, when he answered Q5, S6 expressed the general rule by means of two expressions ("multiplying by 2 the white plus 6 of the sides" and "x×2+6= x"), which use two different representations. The following excerpt (which happened during the last part of the class, when the students discussed their answers to the worksheet) illustrates a discussion about the general rule between the teacher-researcher (T) and the student (S6).

9. T: Remember that the question says: How can you know how many gray tiles if they have already placed the white tiles?
10. S6: (…) Ok. I can know that because, if uh ... for example, it would be two for the white tiles that there are plus six that are the edges. For example, if there are 30 white tiles then 30 for two plus six that are the edges. Then, that's it, that's it.
11. T: Okay…
12. S6: My theory is two for x plus six.

The above excerpt allows us to complement his generalization expressed on the worksheet. He expressed the general rule in lines 10 ("it would be two for the white tiles that there are plus six that are the edges") and 12 ("My theory is two for x plus six") and then, S6 exemplified his rule with a specific value: 30 white tiles (line 12).

On the other hand, three of the five students who generalized the inverse form of the function did it only in Q6 while the other two students did in both questions (Q6 and Q7). We interpret that, once the students found the general rule, they did not need to rewrite the general rule in Q7 and they only determined the amount requested, which has to do with the way in which the question was asked. A number of examples follow.

For instance, S6 is one of the students who only generalized in Q6. Previously, the student in his answers to questions involving the direct function (Q1-Q5) generalized spontaneously and when prompted. In Figure 5-36 we show the answers of this student to Q6 and Q7.

Q6 (20 grey tiles)	They need 7 white tiles. You have to subtract 6 tiles (from the sides) by 2. (20-6): 2 = 7
Q7 (56 grey tiles)	They need 25 white tiles. (56-6):2=25

Figure 5-36. S6's answer to Q6 and Q7.

In his response to Q6 (see Figure 5-36), the student considered the total number of grey tiles, subtracted the ones on the sides (6), and then divided the remainder by two, to get seven. In this answer, we observe the generalization of the relationship between variables. Like the other three students, S6 started from the structure identified in the direct function ($2x+6$) to describe the structure for the inverse function. Also, in his reply to Q7 he used the same structure but for a specific number (56 grey tiles).

Conclusions

Our initial motivation was related to how elementary school students, specifically fifth graders, work with direct and inverse forms of a linear function. The last idea is scantily researched within a functional approach to early algebra. Different studies have reported how elementary students (even Kindergarten students, see Blanton & Kaput, 2011) work with questions that involve direct forms of the function (e.g., Cañadas, Brizuela, & Blanton, 2016; Carraher et al., 2008). Our results illuminate an approach to understand—through structures, representations, and generalizations identified in students' responses—how these students work with a functional thinking task that includes both forms of a linear function.

Data from our research provide evidence that students understand, represent, and generalize the relationships between variables in different ways. According to our first research question (What structures could be identified from the students' answers in both direct and inverse forms of the function?), the structures underlying students' responses help us to describe how students interpret and understand the regularities involved in the problem (Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011). We highlight two main issues: (a) we identified equivalent structures to the direct form in nine students, while six students did so when working with the inverse form; and (b) students use a greater variety of structures when working with inverse form questions in comparison with direct form questions. This allows us to highlight that these students are able to relate, through different paths, the variables when calculating the value of the independent variable given the dependent one.

Our second and third research questions (How do representations used by fifth graders vary in both direct and inverse forms of the function? and How do generalizations expressed by fifth grade students vary in both direct and inverse forms of the function?) highlight and connect two crucial elements of algebraic thinking: generalization and representations (Kaput, 2008). About the representations used by students reported here, and similar to what other authors (e.g., English & Warren, 1998) have found, natural language is the most frequently used representation by this group of students (in both forms of the function involved). This situation allows us to understand that these ten students are capable of expressing relationships between variables; thus, as noted by other authors (e.g., Brizuela & Earnest, 2008), this highlights the importance of teaching representations in elementary school to enable students to gradually assimilate them as they are constructing meanings for different types of representations when generalizing and developing the meanings for functional relationships. On the other hand, considering the students' generalizations in both forms of the linear function, we could conclude that generalizing the inverse form is more difficult than the direct form (as pointed out by MacGregor & Stacey, 1995). However, we would like to emphasize that although only half of the students generalized this relationship, this gives us more evidence of students' surprising ideas that reflect their algebraic thinking, specially when considering that students were not actually asked to generalize this form of the function.

The tiles problem illuminates how fifth-grade students understand, represent, and generalize the functional relationship involved in the problem, considering both forms of a linear function. However, the analysis of students' written responses shows that the worksheets could not capture all students' ideas. Thus, a future line of research could be focused on interviewing students to obtain more evidence about their ideas working with functional thinking tasks.

Acknowledgments

This study was carried out under National R&D Project EDU2016-75771-P funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness; the first author benefited from a PhD grant awarded the by Chilean Government through the CONICYT, folio 72160307-2015.

References

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: PME.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (Eds.) (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Heidelberg, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. (pp. 27-49). Hamburg, Germany: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Brizuela, B., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the "best deal" problem. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. L. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, p. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing

Carraher, D. W., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

English, L., & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, *91*(2), 166-170.

Hewitt, D. (2019, February). "Never carry out any arithmetic": the importance of structure in developing algebraic thinking. Paper presented at The Eleventh Congress of the

European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). Bergen, Norway: PME.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., Blanton, M. L, & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 33-56). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-years-olds, ICME-13 Monographs* (pp. 79-105). New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London, United Kingdom: John Murray.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 173-196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

MacGregor, M., & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, *7*(1), 69-85. https://doi.org/10.1007/BF03217276

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32. https://doi.org/10.1007/BF03217543

Merino, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización [Representations and patterns used by fifth grade students in a generalization task]. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Mitchelmore, M., & White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal*, *19*(2), 1-9. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_516

Molina, M., & Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en early algebra [The notion of structure in early algebra]. In P. Flores, J. L. Lupiáñez, & I. Segovia (Eds.), *Enseñar Matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Granada, Spain: Editorial Atrio.

Morris, A. K. (1999). Developing concepts of mathematical structure: Pre-arithmetic reasoning versus extended arithmetic reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *21*(4), 44-72.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 23-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 27-42). Cambridge, United Kingdom: Mathematical Association of America.

Paoletti, T., Stevens, I. E., Hobson, N. L. F., Moore, K. C., & LaForest, K. R. (2018). Inverse function: Pre-service teachers' techniques and meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(1), 93-109. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9787-y

Papic, M., Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Pinto, E. & Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, 12(3), 173-184.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic–cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1981). *The psychologyof mathematics for instruction*. Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133-163). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I., & Gardiner, A. (2015). Just say yes to early algebra. *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92-101.

Teuscher, D., Palsky, K., & Palfreyman, C. Y. (2018). Inverse functions: Why switch the variable? *The Mathematics Teacher*, *111*(5), 374-381.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

van Dyke, F. (1996). The inverse of a function. *The Mathematics Teacher*, *89*(2), 121-126.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122-137. https://doi.org/10.1007/BF03217374

Warren, E. A., & Cooper, T. J. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

ESTUDIO 5

VARIACIÓN DE REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Eder Pinto[a], Bárbara M. Brizuela[b], and María C. Cañadas[a]
[a] Universidad de Granada, España
[b] Tufts University, Estados Unidos

Resumen

Las representaciones que usan estudiantes tienen un importante rol en la construcción de su conocimiento matemático y, específicamente, constituyen un elemento central en el desarrollo del pensamiento algebraico, un tipo de pensamiento que recientemente ha sido incorporado en el currículo español para la Educación Primaria. En este artículo presentamos un estudio de casos que analiza las representaciones que escogen y usan ocho estudiantes de cursos intermedios (8-10 años) y finales (10-12 años) de primaria al trabajar con problemas que involucran funciones, ya que estas se consideran un vehículo para introducir álgebra en los primeros cursos. Específicamente, analizamos sus respuestas al participar en un experimento de enseñanza y sus respuestas a entrevistas individuales semiestructuradas posteriores. La pregunta de investigación que dirige nuestro trabajo es: ¿cómo varían las representaciones de los estudiantes al trabajar con diferentes problemas de generalización que involucran funciones lineales? Con base en esta pregunta, analizamos dicha variación atendiendo al trabajo de los estudiantes con: (a) diferentes tipos de funciones lineales ($y=a+x$; $y=ax+b$; $y=ax+b$); y (b) diferentes tipos de preguntas, las cuales involucran casos particulares y el caso general. Nuestros resultados ilustran que los tipos de función lineal involucrados no tienen efecto en la elección de representación que usan los estudiantes. Por otra parte, los resultados nos llevan a destacar: (a) la importancia que tiene el lenguaje natural (oral y escrito) como un tipo de representación útil al momento de expresar la relación entre variables, así como (b) la necesidad de dar acceso a diferentes representaciones a los estudiantes desde los primeros cursos.

Palabras claves

Representaciones, generalización, función lineal, pensamiento funcional, *early algebra*

Abstract

Students' representations have an important role in the construction of their mathematical knowledge and, specifically, representations constitute a core aspect in the development of algebraic thinking, which has recently been incorporated into the Spanish curriculum. In this study, we present a case study that analyzes representations used by eight-intermediate (8-10 years) and eight-upper (10-12 years) elementary school students when participating in a Classroom Teaching Experiment and their responses to semi-structured individual interviews. Specifically, we explore how these students work with problems that involve functions, which are considered a vehicle to introduce algebra in the early grades. Our research question is: How do students' representations vary when working with different generalization problems that involve linear functions? Based on this question, we analyze this variation according to the work of the students with: (a) different types of linear functions ($y=a+x$; $y=ax+b$; $y=ax+b$); and (b) different types of questions that involve particular cases and generalization. Results illustrate that the types of linear function involved have no effect on the choice of students' representation. Specifically, results lead us to highlight the importance of natural language (oral and written) as a useful type of representation when expressing the relationship between variables, as well as the need to give access to different representations to the students from the first grades.

Keywords

*R*epresentations, generalisation, linear function, functional thinking, early algebra

Introducción

El rol de las representaciones en el ámbito educativo es crucial; son consideradas objetos de conocimiento y, a la vez, nos remiten a otra realidad (Martí y Pozo, 2000). En el campo de la Educación Matemática, las representaciones adquieren relevancia puesto que: (a) son inherentes a las matemáticas, ayudando a la conceptualización de fenómenos cotidianos; (b) permiten caracterizar, desde diferentes perspectivas, conceptos o procedimientos; (c) tienen un importante rol en la construcción del conocimiento matemático; (d) pueden ser usadas para mitigar ciertas dificultades; y (e) son usadas para hacer las matemáticas más atractivas e interesantes (Castro y Castro, 1997; Dufour-Janvier, Bednarz y Belanger, 1987; Vergnaud, 1987). En particular, nuestro interés por las representaciones cobra sentido en el contexto del pensamiento algebraico, un tipo de pensamiento que recientemente ha sido incorporado en el currículo básico español (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014) Específicamente, exploramos como estudiantes de primaria trabajan con problemas que involucran funciones, ya que estas se consideran un vehículo para introducir álgebra en los primeros cursos, centrándose en las relaciones entre dos o más cantidades que covarían (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

De manera general, en este estudio describimos cómo varían las representaciones que escogen y usan estudiantes de Educación Primaria al trabajar con diferentes problemas de generalización que involucran funciones lineales. Cuatro razones principales motivan este estudio. En primer lugar, exploramos las representaciones pues estas permiten describir cómo los sujetos se comunican, resuelven problemas, crean nuevos objetos, procedimientos e ideas al trabajar con conceptos matemáticos (Scheuer, Sinclair, de Rivas y Christinat, 2000). En concreto, nos centramos en describir las representaciones espontáneas que usan los estudiantes, entendiendo estas como aquellas que emergen sin que sean proporcionadas en el enunciado de un problema. El interés por las representaciones espontáneas adquiere relevancia pues nos ayuda a comprender el o los tipos de representaciones que los estudiantes escogen y les son útiles al relacionar las variables en problemas que involucran funciones.

En segundo lugar, nos centramos en las funciones pues estas se consideran una puerta de entrada para que los estudiantes exploren las variaciones entre cantidades (Blanton et al., 2011). Si bien en España este contenido matemático se introduce en la Educación Secundaria, diferentes argumentos sostienen que este contenido puede ser abordado en la Educación

Primaria, ya que permite que los estudiantes: (a) traten a las operaciones básicas como funciones, debido a las relaciones entre cantidades que pueden producirse; (b) mitiguen sus dificultades al trabajar con el concepto de función durante la secundaria; (d) fomenten su capacidad de generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas; y (e) resuelvan problemas (Carraher y Schliemann, 2007; Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018). Algunos estudios reportan que estudiantes de primaria, e incluso de Educación Infantil, generalizan y representan las relaciones en problemas que involucran un único tipo de función lineal (e.g., Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, Newman-Owens, 2015; Cooper y Warren, 2008: Morales et al., 2018; Moss, Beatty, Barkin y Shillolo, 2008). Nos parece interesante describir qué tipos de representaciones usan los estudiantes al trabajar con diferentes tipos de funciones lineales, lo cual constituye la originalidad de este estudio.

Una tercera razón tiene relación con indagar en los tipos de representaciones que usan los estudiantes cuando trabajan con números específicos y al generalizar. Esta distinción puede entregar pistas que ayuden a describir cómo los estudiantes de primaria generalizan. Reportes previos dan cuenta que, durante un proceso de instrucción sobre el uso de representaciones, estudiantes de 8-10 años usan la notación algebraica al trabajar con casos particulares o generalizar (e.g., Isler, Blanton y Murphy-Gardiner, 2014). Por otra parte, estudios sin énfasis en la instrucción de representaciones, señalan que estudiantes de 10-11 años usan principalmente el lenguaje natural y representaciones numéricas al trabajar con casos particulares, mientras que al generalizar usan representaciones más sofisticadas (e.g., Pinto y Cañadas, 2018). Por tanto, nuestro interés es describir cómo varían las representaciones de estudiantes de diferentes edades al trabajar con casos particulares y al generalizar.

En cuarto lugar, nuestro propósito de investigación tiene importancia dentro del contexto educativo español. Al finalizar la Educación Primaria, los estudiantes deben "describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19.387). Por tanto, cobra importancia aportar datos empíricos que nos ayuden a describir cómo estos estudiantes comprenden los cambios en contextos funcionales, donde las representaciones son una forma de describir dicha comprensión.

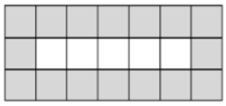
De manera general, el enfoque conceptual que abordamos sigue las ideas de Kaput (2008), el cual resalta la importancia de la generalización y las representaciones en el pensamiento algebraico. Según el autor, el pensamiento algebraico está compuesto por un proceso de simbolización que tiene como propósito la generalización y razonamiento con generalizaciones. En este sentido, las representaciones son un vehículo sociocultural utilizado para generalizar, permitiendo a los estudiantes desarrollar y completar las ideas que les ayudan a razonar sobre afirmaciones generales y comprimir múltiples instancias en la forma unitaria de una sola afirmación que simboliza la multiplicidad. Por lo tanto, la generalización es el "acto de crear ese objeto simbólico" (Kaput, Blanton y Moreno, 2008, p. 20).

En este artículo presentamos un estudio de casos que analiza las respuestas de ocho estudiantes de cursos intermedios (8-10 años) y ocho estudiantes de cursos finales (10-12 años) de primaria al participar en un experimento de enseñanza y sus respuestas a entrevistas individuales semiestructuradas posteriores. Considerando las representaciones espontáneas usadas por los estudiantes, nuestra pregunta de investigación es: ¿cómo varían las representaciones de los estudiantes al trabajar con diferentes problemas de generalización que involucran funciones lineales? Con base en esta pregunta, analizamos cómo varían estas atendiendo a su trabajo con: (a) diferentes tipos de funciones lineales ($y=a+x$; $y=ax+b$; $y=ax+b$); y (b) diferentes tipos de preguntas, los cuales involucran casos particulares y el caso general.

La idea de función lineal

Asumimos el concepto de función como "una correspondencia entre dos conjuntos no vacíos que asigna cada elemento en el primer conjunto (el dominio) a exactamente un elemento en el segundo conjunto (codominio)" (Vinner y Dreyfus, 1989, p. 357). La idea anterior es conocida como la definición de Dirichlet-Bourbaki, en la cual una correspondencia entre dos conjuntos asigna a cada elemento del primer conjunto exactamente un elemento del segundo conjunto. En nuestro estudio, el trabajo con funciones se centra en las relaciones entre cantidades que covarían y nos centramos en las funciones lineales de los tipos: (a) $y=a+x$; (b) $y=ax$; y (c) $y=\mathrm{a}x+b$, con números naturales en el dominio y codominio. Usualmente, en los estudios que abordan un enfoque funcional al álgebra escolar, las funciones son presentadas a través de problemas contextualizados. Uno de los problemas presentados en este estudio, el problema de las baldosas (ver figura 5-37), es un ejemplo clásico de una tarea que involucra una función lineal.

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio.

Figura 5-37. Problema de las baldosas

Este problema involucra la función $g=2b+6$ y dos variables están presentes: el número de baldosas blancas (b) y el número de baldosas grises (g). Por ejemplo, si quisiéramos conocer el número de baldosas grises que se deben colocar alrededor de un número de baldosas blancas, g es expresado en términos de b. En este caso, g es la variable dependiente y b la independiente. La variable dependiente e independiente se puede elegir arbitrariamente porque esta relación dependiente se deriva de cómo presentamos la tarea (Blanton et al., 2011). Por lo tanto, las formas directas (e.g., ¿Cuántas baldosas grises se necesitan en un pasillo de 5 baldosas blancas) e inversas (e.g., ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan en un pasillo de 16 baldosas grises?) de una función están relacionadas con los roles desempeñados por cada variable involucrada. La variable independiente en la forma directa de la función es la variable dependiente en la forma inversa, y viceversa.

Representaciones y generalización

La generalización no se puede entender sin su representación. El pensamiento funcional involucra la generalización de las relaciones entre cantidades que covarían, las cuales pueden ser expresadas a través de diferentes representaciones. En este contexto, entendemos la generalización como "el proceso por el cual identificamos las estructuras y las relaciones en situaciones matemáticas" (Blanton et al., 2011, p. 9). Las representaciones no solo dan la forma material a la generalización, también permiten articular, clarificar, justificar y comunicar el razonamiento de un sujeto a otros, las que pueden variar en formas (Reed, 2001).

En una investigación reciente, Radford (2018) describe cómo emergen las representaciones simbólicas de estudiantes de 2º a 6º de primaria (7- 12 años), al trabajar con problemas que involucran funciones lineales. Los principales resultados dan cuenta que, por ejemplo, estudiantes de 4º de primaria (9-10 años) generalizaron la relación mediante lenguaje natural en primera instancia. Un estudiante, por ejemplo, expresó la regla general usando la palabra "siempre" para explicar su generalización. Cuando se le pregunta por el uso de la relación general mediante notación algebraica, él representó la relación general por medio de la expresión "2xa = b + 1 = c". Las dos representaciones por las cuales el estudiante expresa la generalización –lenguaje natural y notación algebraica —dan cuenta de que los estudiantes pueden expresar relaciones generales mediante diferentes representaciones.

La literatura reporta diferentes tipos de representaciones que usan estudiantes de primaria para resolver problemas que involucran funciones: (a) lenguaje natural —oral; (b) lenguaje natural —escrito; (c) pictórica; (d) numérica; (e) notación algebraica; (f) tabular; y (g) gráfica (e.g., Carraher, Schliemann y Schwartz, 2008). El rol del lenguaje natural es esencial, ya que es considerado un andamio útil para otros tipos de representaciones más simbólicas (Radford, 2018). Este tipo de representación contribuye, por ejemplo, a la comprensión conceptual de las funciones y la conexión entre las matemáticas y otras situaciones de la vida cotidiana (Friedlander y Tabach, 2001).

Método

La investigación que presentamos es cualitativa y exploratoria. Específicamente, presentamos un estudio de casos que describe las representaciones usadas por ocho estudiantes de cursos intermedios (8-10 años) y ocho estudiantes de cursos finales (10-12 años) de primaria al responder problemas que involucran funciones lineales. Para la obtención de los datos, realizamos con cada grupo de estudiantes un experimento de enseñanza y, posteriormente, entrevistas individuales semiestructuradas. Tanto el experimento de enseñanza como las entrevistas siguen los mismos propósitos de investigación: (a) explorar cómo los estudiantes relacionan las variables involucradas en un problema que involucra una función lineal, (b) introducir diferentes tipos de representaciones para expresar relaciones funcionales, y (c) explorar la generalización de los estudiantes cuando responden preguntas que involucran funciones lineales. Nuestro interés es describir cómo los estudiantes representan las relaciones involucradas en diferentes problemas que involucran funciones.

Participantes

Trabajamos con dos grupos de estudiantes de un colegio del sur de España quienes previamente no habían interactuado con problemas que involucraban relaciones funcionales, generalización o notación algebraica como un tipo de representación. El primer grupo está compuesto por 24 estudiantes de tercero (8-9 años), cuyos conocimientos previos incluían estrategias de conteo y el uso de número naturales al trabajar las cuatro operaciones básicas. Posteriormente, entrevistamos a ocho estudiantes de este grupo cuando cursaban cuarto curso de primaria. Análogamente, el segundo grupo está compuesto por 24 estudiantes de quinto de primaria (10-11 años), quienes ya habían trabajado las cuatro operaciones aritméticas con números naturales y números racionales. También entrevistamos a ocho estudiantes de este grupo cuando cursaban sexto curso de primaria. Los ocho estudiantes de cada curso fueron seleccionados con la colaboración del tutor de cada clase por dos razones principales: (a) que evidenciaran diferentes tipos de respuestas durante el experimento de enseñanza, centrándonos en su capacidad para identificar patrones y generalizar; y (b) que tuvieran buena disposición a colaborar, expresando y justificando sus respuestas.

Experimento de enseñanza y entrevistas individuales semiestructuradas

En primer lugar, diseñamos un experimento de enseñanza —en el cual el investigador actúa activamente como profesor, estudiando la naturaleza del desarrollo de ideas en las que se incluye a los estudiantes (Cobb y Gravemeijer, 2008)— con los grupos completos de tercero y quinto. En cada curso, el experimento de enseñanza estuvo compuesto por cuatro sesiones de 60 minutos cada una, en las cuales presentamos un problema que involucraba una función lineal, así como diferentes tipos de preguntas que involucran la relación entre las variables involucradas. El equipo de investigación que trabajó en cada curso estuvo compuesto por un profesor-investigador, quien dirigió las sesiones, y dos investigadores que apoyaron y grabaron las sesiones. Cada sesión se dividió en tres partes. Primero, presentamos el contexto del problema y las representaciones que se proporcionaban en cada tarea, realizando preguntas a los estudiantes para verificar su comprensión sobre dicho contexto. Luego, los estudiantes respondieron una hoja de trabajo individual que contiene diferentes tipos de preguntas. Por último, los investigadores lideraron una discusión con el grupo completo, con la finalidad de que los estudiantes verbalizaran cómo habían resuelto algunas de las preguntas planteadas.

Posteriormente, realizamos dos entrevistas individuales semiestructuradas (Ginsburg, 1997) a los ocho estudiantes de cada curso, con la finalidad de profundizar en cómo usan las representaciones. La duración de cada entrevista fue de 30 minutos, aproximadamente. Cada sesión fue dirigida por un entrevistador y otro investigador apoyó la grabación y se siguió un protocolo: (a) presentación de un problema, en el cual se relató el contexto de un problema y se realizaron preguntas para indagar cómo los estudiantes comprendieron el problema, (b) exploración de la relación entre variables con casos particulares, y (c) exploración de la relación general. Durante las entrevistas, cada estudiante disponía de un papel y un lápiz que podía emplear libremente.

En la tabla 5-18 caracterizamos los problemas trabajados con los estudiantes.

Tabla 5-18. *Enunciados, funciones y representaciones de cada problema*

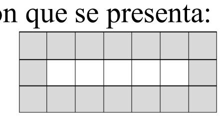
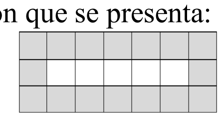
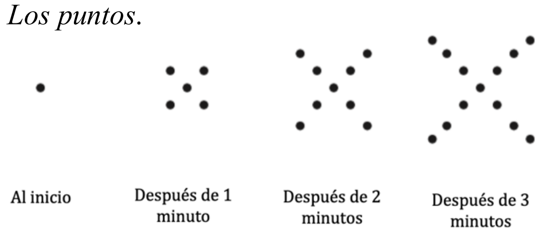
Sesión	Enunciado	Función involucrada	Representación introducida
	Experimento de enseñanza		
Tercero			
1	*Edades*. María y Raúl son hermanos. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.	$y=x+5$	Lenguaje natural - escrito Tabular
2	*Camisetas*. Carlos vende camisetas con el escudo de su colegio. Él gana 3 euros por cada camiseta que vende.	$y=3x$	Lenguaje natural-escrito Tabular
3	*Camisetas*. Carlos vende camisetas con el escudo de su colegio. Él gana 3 euros por cada camiseta que vende.	$y=3x$	Lenguaje natural-escrito Tabular Gráfico
4	*Baldosas*. En un colegio hay diferentes pasillos compuestos de baldosas grises y blancas. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño, siguiendo el patrón que se presenta: 	$y=2x+6$	Lenguaje natural-escrito Pictórica
Quinto			
1	*Camisetas I.* Carlos vende camisetas con el escudo de su colegio. Él gana 3 euros por cada camiseta que vende.	$y=3x$	Lenguaje natural-escrito Tabular

Tabla 5-18. *Enunciados, funciones y representaciones de cada problema*

Sesión	Enunciado	Función involucrada	Representación introducida
2	*Camisetas II*. Carla y Daniel venden camisetas. Carla gana 3 euros por cada camiseta vendida. Daniel gana el doble por cada camiseta vendida y tiene 15 euros ahorrados.	*y=3x* *y=2x+15*	Lenguaje natural - escrito Tabular
3	*El trato*. Juan tiene ahorrado algo de dinero (sólo tiene euros, no céntimos). Su abuela quiere recompensarle por un trabajo que le ha hecho. Le ofrece dos tratos: - Trato 1. Te doblo el dinero que tienes - Trato 2. Te doy el triple de tu dinero y tú me das 7 euros.	*y=2x* *y=3x–7*	Lenguaje natural escrito
4	*Baldosas*. En un colegio hay diferentes pasillos compuestos de baldosas grises y blancas. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño, siguiendo el patrón que se presenta: 	*y=2x+6*	Lenguaje natural- escrito Pictórica
	Entrevistas		
Cuarto			
1	*Parking*. El sábado vamos a esquiar a Sierra Nevada. Tenemos que dejar el coche en el parking y nos dicen que la entrada cuesta 1 euro y dos euros cada hora que el coche esté allí.	*y=x+2*	Lenguaje natural – oral Notación algebraica
2	*Tren*. Elsa conduce un tren. Desde que ella comienza el viaje, en cada parada suben tres pasajeros.	*y=3x+1*	Lenguaje natural – oral Notación algebraica
Sexto			
1	*Los puntos*. 	*y=4x+1*	Lenguaje natural Pictórica Notación algebraica
2	*Tarifas*. Jorge y Rosa tienen diferentes tarifas telefónicas: • La tarifa de Jorge: Él paga 10 céntimos por minuto para todas las llamadas que haga • La tarifa de Rosa: Ella paga 60 céntimos al mes más 5 céntimos por minuto para todas las llamadas que haga.	*y=10x* *y=5x+60*	Lenguaje natural Tabular Notación algebraica

*Nota. Al*gunos de los problemas seleccionados fueron obtenidos de estudios previos y otros fueron diseñados por el equipo de investigación. Así, por ejemplo, el problema del trato fue adaptado de Brizuela y Earnest (2008) y el problema de las baldosas fue adaptado de las ideas de Küchemann (1981).

Tal como lo presentamos en la tabla 5-18, los problemas involucran diferentes tipos de funciones lineales e introducen diferentes representaciones. Respecto a las funciones involucradas, los tipos $y=ax+b$, $y=ax$, y $y=ax+b$ fueron presentados a los estudiantes de tercero/cuarto. Los estudiantes de quinto/sexto trabajaron con los tipos $y=ax$ y $y=ax+b$. No incluimos la función $y=ax+b$ con los estudiantes de este último grupo debido a que este tipo de función se considera más simple, según las características de los estudiantes.

Selección de datos y fuentes de información

Los problemas presentados a los estudiantes durante el experimento de enseñanza (ver tabla I) contienen diferentes tipos de formatos: (a) preguntas que exploran la relación entre casos particulares y casos generales; (b) verdaderos y falsos; (c) construcción de tablas; y (d) construcción de gráficas. Todos los problemas tienen en común dos aspectos:

- exploran la relación entre *casos particulares* (e.g., en el caso del problema de las baldosas: ¿Cuántos baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?) y el *caso general* (e.g., Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises hay si ya han colocado las baldosas blancas?); y
- exploran el valor de la variable dependiente dada la independiente (relación directa).

Por tanto, los datos que analizamos del experimento de enseñanza son las respuestas escritas de los estudiantes a las hojas de trabajo, específicamente las preguntas que exploran la relación entre casos particulares y el general, así como las preguntas que involucra la relación directa. Considerando las entrevistas individuales semiestructuradas, las fuentes de información analizadas son las respuestas escritas y orales de los estudiantes.

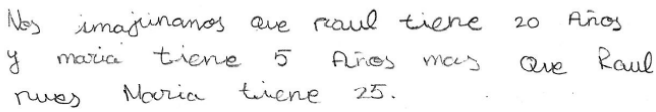
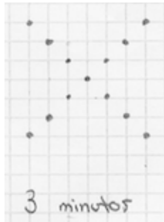
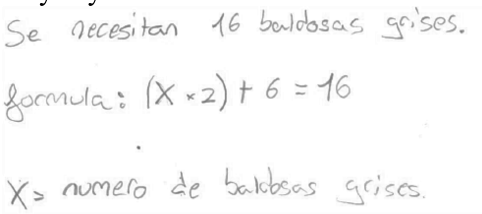
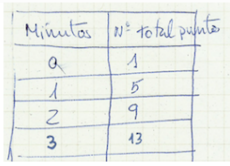
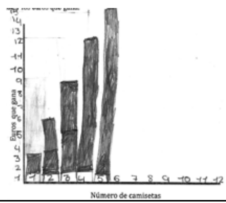
Análisis y codificación de datos

Analizamos las respuestas de cada estudiante, considerando la variedad de representaciones que usaron al responder a los diferentes problemas. La tabla 5-19 muestra un ejemplo de los tipos de representaciones usadas por los estudiantes.

Tabla 5-19. *Ejemplos de representaciones usadas por los estudiantes*

Tipo de representación	Ejemplos (respuestas de los estudiantes)
Lenguaje natural – oral	Entrevistadora: ¿Cómo podrías encontrar el número de pasajeros para cualquier número de parada? Estudiante: (…) *multiplicando el número de paradas por tres más uno.*

Tabla 5-19. *Ejemplos de representaciones usadas por los estudiantes*

Tipo de representación	Ejemplos (respuestas de los estudiantes)
Lenguaje natural – escrito	4. Encontramos una fotografía del cumpleaños de Raúl y lo único que se puede ver son las velas del pastel. ¿Cómo podrías saber la edad de María? 
Pictórica	Entrevistador: ¿Cómo puedes saber cuántos puntos hay luego de tres minutos transcurridos? Estudiante: 
Numérica	2. Cuando Raúl tiene 15 años, ¿cuántos años tiene María? 
Notación algebraica	5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises hay si ya han colocado las baldosas blancas 
Tabular	
Gráfica	

Distinguimos las representaciones espontáneas de los estudiantes, considerando simultáneamente dos categorías interrelacionadas:

1. Tipo de función lineal involucrada. Distinguimos entre las representaciones que usaron los estudiantes, tanto durante el experimento de enseñanza y las entrevistas, al trabajar con problemas que involucraron funciones del tipo $y=a+x$, $y=ax$, y $y=ax+b$.
2. Casos particulares y caso general. Identificamos qué tipo de representación usan los estudiantes al trabajar con preguntas que involucran números específicos y qué tipo de representación usan al generalizar.

Durante el proceso de análisis y codificación, el primer autor codificó cada una de las representaciones encontradas en las respuestas de los estudiantes, según las categorías indicadas. Inicialmente, se codificaron las respuestas escritas de ambos grupos a los problemas del experimento de enseñanza y luego las respuestas escritas y orales durante las entrevistas. Posteriormente, en conjunto con la segunda y tercera autora del artículo revisamos la codificación y las respuestas de cada estudiante. Durante la codificación, si un estudiante usó dos o más representaciones, estas fueron contadas separadamente.

Resultados y discusión

Tipo de función lineal involucrada

Estudiantes de tercero/cuarto

En la figura 5-38 mostramos cómo varían los tipos de representaciones (eje vertical) usadas por los estudiantes al trabajar con problemas que involucran diferentes tipos de funciones lineales (eje horizontal). La figura distingue las representaciones espontáneas (simbolizadas con borde negro y fondo blanco) de las que no lo son.

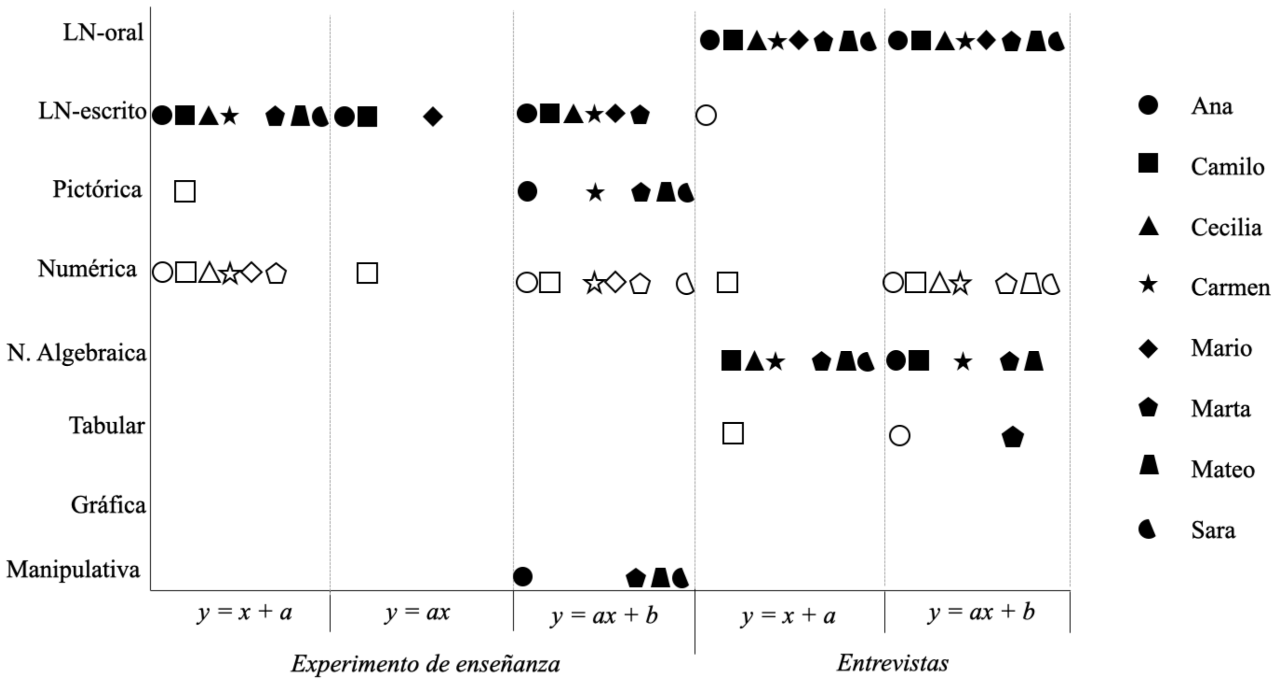


Figura 5-38. Variación de representaciones usadas por estudiantes de tercero/cuarto, según el tipo de función lineal

De manera general, todas las representaciones aparecieron en las respuestas de este grupo de estudiantes, a excepción de la representación gráfica, la cual no apareció en ninguna respuesta. En relación a las representaciones espontáneas, la numérica aparece en todos los tipos de funciones examinadas, con algunas evidencias de la representación tabular (en las respuestas de Ana y Marta al problema del tren: $y=ax+b$), pictórica (en la respuesta de Camilo al problema de las edades: $y=a+x$) y lenguaje natural-escrito (en la respuesta de Ana al problema del parking: $y=a+x$). Por otra parte, el lenguaje natural (escrito y oral) fue el que más frecuente que utilizaron los estudiantes en todos los tipos de funciones involucrados, lo cual podría tener sentido ya que los enunciados de los problemas introducen este tipo de representación. En concreto, cuatro principales hallazgos reportamos de las representaciones usadas por estos estudiantes, según el tipo de función lineal involucrado.

Un primer hallazgo tiene relación con la representación numérica, la cual emergió de manera espontánea y fue usada por los estudiantes al trabajar en los tres tipos de funciones examinadas. Por ejemplo, la figura 5-39 muestra las respuestas de Mario usando este tipo de representación.

Baldosas *(y=ax+b)*

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

16 Porque 7+7+2=16

2. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

22 Porque 10+10+2=22

3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

26 Porque 12+12+2=26

4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

206 Porque 102+102+2=206

Figura 5-39. Respuestas de Mario al trabajar con el problema de las baldosas ($y=ax+b$).

Mario relacionó las variables usando la representación numérica, centrándose en el número de baldosas gises dado el número de baldosas blancas. En todas sus respuestas, él estableció una operación aritmética para relacionar la cantidad de baldosas blancas y grises. El uso de este tipo de representación tiene sentido, ya que las preguntas exploran la relación para casos particulares, en las cuales se les preguntó a los estudiantes por un valor específico. Por otra parte, durante las entrevistas, este tipo de representación espontánea sigue siendo frecuente en las respuestas de los estudiantes.

En segundo lugar, durante las entrevistas dos estudiantes emplearon espontáneamente la representación tabular al responder a los problemas que involucran las funciones $y=x+a$ y $y=ax+b$. Por ejemplo, en la figura 5-40 presentamos la organización inicial de los datos con la cual Ana exploró el problema que involucra la función del tipo $y=ax+b$ (Elsa conduce un tren. Desde que ella comienza el viaje, en cada parada suben tres pasajeros).

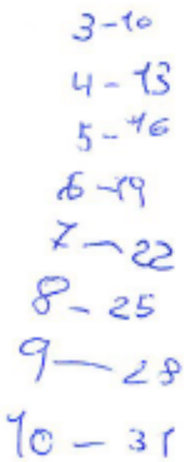


Figura 5-40. Organización de datos por Ana al trabajar con el problema del tren

Tal como aparece en la figura, Ana organizó los casos particulares en dos columnas, separadas por un guión (–). En la columna de la izquierda ubicó el número de paradas y en la columna derecha el número de personas. Este tipo de representación tiene características similares a la tabular, ya que como señala Martí (2009), la estudiante segmentó y categorizó la información en columnas, identificó las variables (número de parada y número de pasajeros) y organizó espacialmente los elementos, según este tipo de representación. Es una forma novedosa de representar y relacionar las variables involucradas en el problema, ya que estudiante usó guiones para separar las cantidades, en vez de usar celdas. Este tipo de representación aporta un *constructo generativo* (en términos de Brizuela y Earnest, 2008) para ver el problema, ya que "se basa en información previamente establecida, mostrando las funciones bajo una nueva luz y extendiéndolas para incluir información previamente oculta" (p. 289), lo cual puede favorecer al estudiante en una comprensión de cómo varían las variables involucradas en el problema.

En tercer lugar, el lenguaje natural (escrito u oral) fue el más usado por los estudiantes, sin importar el tipo de función lineal. Así, por ejemplo, en la figura 5-41 presentamos las respuestas escritas de Ana en algunas tareas propuestas en el experimento de enseñanza.

Edades ($y=x+a$)
4. Encontramos una fotografía del cumpleaños de Raúl y lo único que se puede ver son las velas del pastel. ¿Cómo podrías saber la edad de María?

Raúl tiene 5 años menos que María.

Baldosas ***($y=ax+b$)***
4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

2.600

¿Cómo lo sabes?

e pensado un numero y lo e multiplicado por cien

Figura 5-41. Respuestas de Ana al problema de las edades y de las baldosas

Este tipo de representación es usado por este grupo de estudiantes, principalmente, para explicar cuál es la relación general entre las variables involucradas (respuesta al problema de las edades), o bien, para describir cuál es el cálculo aritmético que permite llegar a la respuesta (respuesta al problema de las baldosas).

Durante las entrevistas, el lenguaje natural (oral) también fue el principal medio para expresar la relación entre variables, lo cual llama la atención dado que los estudiantes disponían de una hoja de papel que podían usar libremente. Por ejemplo, en el siguiente extracto presentamos la respuesta de Cecilia (C) a las preguntas de la entrevistadora (E) sobre el problema que involucra una función del tipo $y=x+b$ (problema del parking).

13. E: Y ahora imagínate que no sabemos exactamente el número de horas [que el coche ha estado en el parking]. Vamos a poner “cualquiera de horas” [lo escribe], ¿cómo calcularías tú el número de euros que tienes que pagar?
14. C: No sé.
15. E: Aquí es un número cualquiera [indicando la expresión “nº cualquier de horas” escrita en la hoja], el que sea, no sabemos cuál es. ¿Cómo calcularías el número de euros?
16. C: ¿No te cuenta el tiempo allí?
17. E: Sí, pero el problema es que no sabemos el número de horas que lo dejamos.
18. C: Pues el tiempo que te cuenta.
19. E: El tiempo que se te cuenta, y ¿qué haces con ese tiempo que te cuenta?

20. C: Pues le sumas 2 *a lo que sea* (el énfasis es nuestro).

21. E: A las horas que sean ¿no?, vamos a ver "a las horas le sumas 2" [lo escribe], ¿verdad?

10. C: Sí.

Inicialmente, Cecilia señaló que no sabía cómo calcular el número de euros a pagar dado un número cualquiera de horas (línea 2). Luego explicó que, para obtener el dinero que debe pagar el coche dado un número cualquiera, se debe sumar 2 euros *a lo que sea* (línea 8). A pesar de que la estudiante podía expresar libremente su respuesta en la hoja, optó por hacerlo de manera oral.

Los ejemplos anteriores ilustran una característica de este grupo de estudiantes: el lenguaje natural fue la representación más frecuente utilizada para expresar la relación entre variables. Esta situación podría tener una explicación desde dos perspectivas: (a) el uso de representaciones simbólicas puede tener dificultades en estos estudiantes, por lo que recurren espontáneamente a una representación más familiar (Dufour-Janvier et al., 1987), como es el uso del lenguaje natural (oral o escrito), y/o (b) no ven la necesidad de utilizar una representación diferente al lenguaje natural.

Un último hallazgo tiene relación con el uso de la notación algebraica, tipo de representación que fue introducido por la entrevistadora y los estudiantes la usaron en distintos sentidos. Este hallazgo es relevante pues estas representaciones no aparecieron en las respuestas de los estudiantes examinados durante el experimento de enseñanza. En el siguiente fragmento mostramos un ejemplo que consideramos representativo por el tipo de representación usada. Mateo (M), al responder al problema del tren ($y=ax+b$), interactúa con la notación algebraica.

22. E: Si yo te dijera cualquier número de paradas, ¿cuántas personas van en el tren?

23. M: Tres. O sea, yo lo multiplico por tres.

24. E: ¿Y algo más?

25. M: Lo multiplico por tres más uno.

(…)

26. E: Ahora lo vamos a poner con letras. ¿Si tuviéramos *Z* paradas?

27. M: Multiplicarlo por tres más uno.

28. E: ¿Cómo podrías escribir eso?

29. M: Pero, ¿con letras?

30. E: Sí.

31. M: Pues sería el número que tu me digas, *x* número, por tres [escribe lo que aparece en la figura].

32. E: ¿Y ya está? ¿Se te ha olvidado alguien?

33. M: Sí. Multiplicar por tres y luego le añado uno.

El estudiante usa la letra dada (*Z*) para describir la relación general del problema, *sin* importar el número de paradas (línea 19). Este resultado nos sorprende; Mateo es capaz de usar la notación algebraica con convenciones creadas por él (referida a la forma en la cuál organiza espacialmente la expresión) al expresar la relación general. El uso de la notación algebraica puede dar cuenta que el estudiante está preparado para una introducción formal de este tipo de representación, siendo capaz de conocer las ventajas y desventajas de este tipo de representación, para emplearla en otros contextos. Si bien diversos reportes dan cuenta que estudiantes de cursos menores se apropian de la notación algebraica (e.g., Blanton et al., 2015), nuestros datos aportan con una descripción del uso de este tipo de representación en contextos sin instrucción previa sobre la notación algebraica.

Estudiantes de quinto/sexto

La figura 5-42 muestra la variación en las representaciones usadas por los estudiantes de quinto y sexto, al trabajar con los diferentes tipos de funciones lineales.

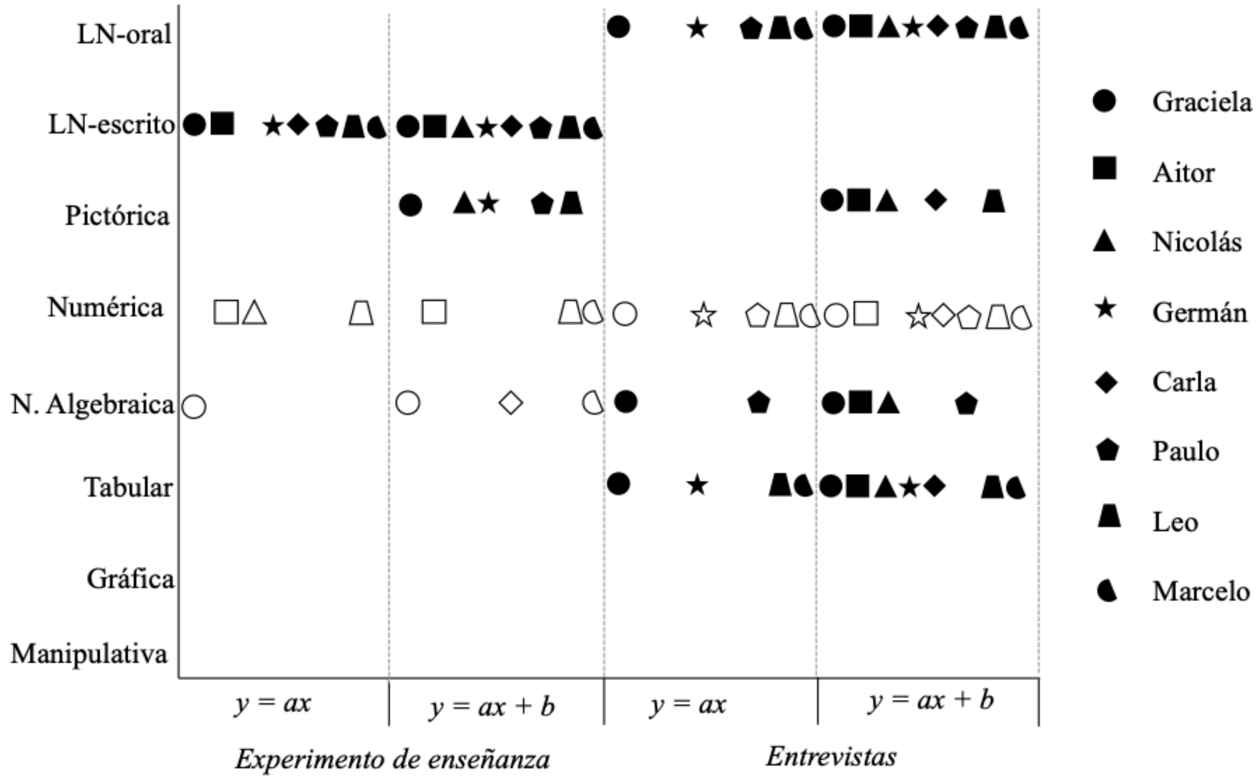
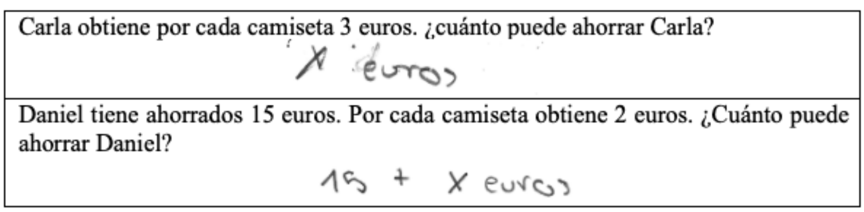


Figura 5-42. Variación de representaciones usadas por estudiantes de quinto/sexto, según el tipo de función lineal

En las respuestas de este grupo de estudiantes aparecieron seis representaciones diferentes (lenguaje natural oral y escrito, pictórica, numérica, notación algebraica y tabular), mientras que dos representaciones no emergen: gráfica y manipulativa. La representación manipulativa no apareció pues, a diferencia del grupo anterior, no se proporcionaron objetos manipulativos en ninguna tarea. Destacamos tres resultados principales. En primer lugar, y sobre las representaciones que emergen de manera espontánea, la representación numérica predomina. Sin embargo, el elemento que diferencia a este grupo de estudiantes del anterior, es que aparece espontáneamente, durante el experimento de enseñanza, el uso de la notación algebraica en tres estudiantes (Graciela, Carla y Marcelo). La figura 5-43 muestra cómo Graciela empleó este tipo de representación al responder a dos preguntas de un mismo problema.


Carla obtiene por cada camiseta 3 euros. ¿cuánto puede ahorrar Carla?

X euros

Daniel tiene ahorrados 15 euros. Por cada camiseta obtiene 2 euros. ¿Cuánto puede ahorrar Daniel?

15 + X euros

Figura 5-43. Respuestas de Graciela a dos preguntas del problema de las camisetas II

En las respuestas de la estudiante, el uso de la notación algebraica está asociado a representar las dos funciones involucradas en la tarea (*y=ax*, *y=ax+b*). En la primera respuesta, interpretamos que la estudiante usó la notación algebraica para referirse al total de dinero que puede ahorrar Carla, sin hacer alusión a la relación que involucra las dos variables (3*x*). Por otra parte, en su respuesta a la segunda pregunta, ella fue capaz de expresar la cantidad que se mantiene constante (15 euros), e interpretamos que usa la letra *x* para representar lo que gana por cada camiseta. Ambas interpretaciones se limitan a lo que se muestra en la figura, pues no tenemos más evidencias escritas o orales de la estudiante al responder al problema. Por otra parte, en el problema de las baldosas también aparece el uso espontáneo de la notación algebraica (ver figura 5-44).

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

Se necesitan 16 baldosas grises.

formula: $(X \times 2) + 6 = 16$

X = numero de baldosas grises.

Figura 5-44. Respuestas de Carmen al problema de las baldosas

En la respuesta de Carmen destacamos el uso de la notación algebraica, a través de la fórmula que expresa la relación general entre baldosas grises y blancas. Lo significativo de este hallazgo tiene relación con el uso de este tipo de representación al expresar una relación general, aun cuando se le preguntó por un caso particular.

En segundo lugar, y al igual que con el grupo anterior, el uso del lenguaje natural fue el más frecuente usado por los estudiantes en los dos tipos de funciones examinadas (*y=ax*, *y=ax+b*). Lo novedoso, y a la vez diferente del grupo anterior, es el uso de esta representación, exclusivamente, para expresar la regla general de la relación (en la siguiente sección profundizamos las representaciones usadas por los estudiantes al generalizar).

Finalmente, un tercer hallazgo se relaciona con la representación pictórica en los problemas que involucran exclusivamente la función *y=ax+b*: el problema de las baldosas y los puntos. Ambos problemas introducen una representación pictórica en su enunciado. Cinco estudiantes usaron este tipo de representación durante el trabajo con el problema de las baldosas (Graciela, Nicolás, Germán, Paulo y Leo) y cinco en el problema de los puntos (Graciela, Aitor, Nicolás, Carla y Leo). La figura 5-45 presenta las respuestas de un estudiante, Leo, a ambos problemas.

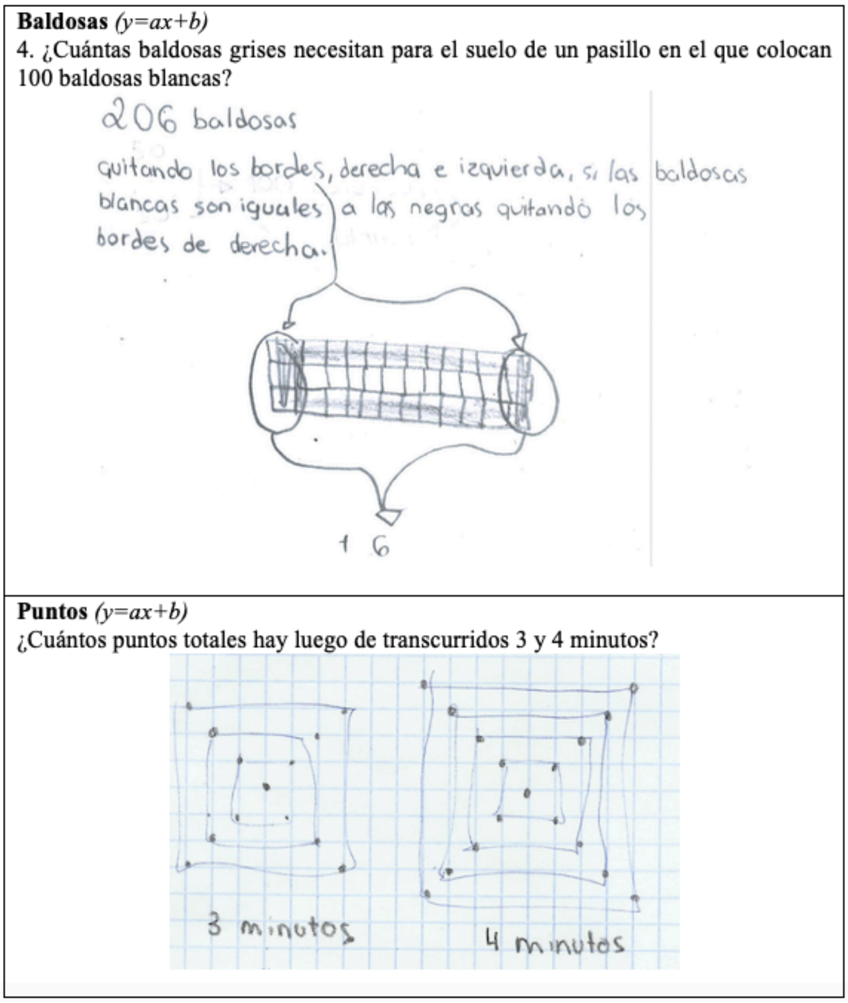


Figura 5.45. Respuestas de Leo a los problemas de las baldosas y de los puntos

Leo usó representación pictórica para identificar el valor constante en cada problema. En su respuesta al problema de las baldosas, identificó que, independiente del valor de baldosas blancas dadas, siempre debe agregar seis al número de baldosas grises (representó pictóricamente las baldosas de los bordes que se mantienen constantes). De manera similar, en su respuesta al problema de los puntos, relacionó los puntos mediante la formación de un cuadrado, donde cada punto es un vértice. De esta forma, resaltó que el punto central se mantiene constante. Conjeturamos que este tipo de representación puede ser útil para los estudiantes para identificar cual es el valor que se mantiene constante en la relación funcional, dado cualquier número para la variable dependiente. La idea anterior cobra fuerza pues algunos estudios reportan que estudiantes de estas edades tienen dificultades al trabajar con estos tipos de funciones, ya que no son conscientes del componente multiplicativo y, a la vez, la constante involucrada (Moss, Beatty, Barkin y Shillolo, 2008). Lo interesante sería contrastar qué ocurre con otros tipos de problemas que involucran el mismo tipo de función lineal y no introducen una representación pictórica en su enunciado.

Casos particulares y generalización

En la tabla 5-20 mostramos la cantidad de estudiantes que usó cada tipo de representación, según si responden a preguntas que involucran casos particulares o la generalización. El número de estudiantes que uso representaciones espontáneas lo registramos entre paréntesis.

Tabla 5-20. *Representaciones usadas por los ocho estudiantes de cada grupo*

Tipo de representación	Experimento de enseñanza		Entrevistas	
	Casos particulares	Caso general	Casos particulares	Caso general
		Tercero/cuarto		
Lenguaje natural – oral			8	8
Lenguaje natural – escrito	8	8		1(1)
Pictórica	5(1)	1		
Numérico	7(7)	1	7(7)	
Notación algebraica				7
Tabular			3(2)	
Gráfico				
Manipulativo	4			
		Quinto/sexto		
Lenguaje natural – oral			7	6
Lenguaje natural – escrito	8	8		
Pictórica	6		6	
Numérico	5(5)	2	7(7)	1
Notación algebraica	2(2)	3	2	8
Tabular			7	
Gráfico				
Manipulativo				

Según los datos reportados en la tabla, los estudiantes de tercero/cuarto emplearon siete representaciones diferentes al trabajar con casos particulares, mientras que al generalizar usaron cinco. Por otra parte, los estudiantes de quinto/sexto evidenciaron un uso de seis representaciones diferentes al trabajar con casos particulares, mientras que cuatro representaciones diferentes fueron usadas para generalizar. Al parecer, los ocho estudiantes de ambos grupos conocen diferentes representaciones matemáticas, las cuales evidencian al trabajar con casos particulares, pero al generalizar se reduce la variedad observada.

Con respecto a los ocho estudiantes de tercero y cuarto, los principales hallazgos de este grupo de estudiantes dan cuenta que, por una parte, la representación numérica es el tipo de representación más usada al explorar la relación entre casos particulares. Nuevamente, la situación anterior podría hacer sentido por el tipo de pregunta que se planteó; los estudiantes deben responder a un valor específico. Por otra parte, el lenguaje natural es un importante medio para expresar relaciones entre cantidades que covarían, ya sea al trabajar con casos particulares o al generalizar, mientras que todos los estudiantes usan la notación algebraica al generalizar durante las entrevistas (ambos son tipos de representaciones dados en el enunciado de cada problema o por la entrevistadora, respectivamente).

Sobre representaciones usadas por los estudiantes de quinto/sexto, lo sorprendente de las respuestas de estos estudiantes es el uso de la notación algebraica de manera espontánea, cuando trabajan con casos particulares (tal como lo presentamos en secciones previas). Por otra parte, al generalizar, todos los estudiantes usaron la notación algebraica al momento de expresar la relación entre variables, seguido en frecuencia por el lenguaje natural.

Conclusiones

En este artículo describimos cómo varían las representaciones usadas por estudiantes de cursos intermedios y finales de Educación Primaria (8-12 años) al responder problemas de generalización que involucran funciones lineales. Específicamente, este artículo poner en valor los tipos de representaciones escogidos espontáneamente por los estudiantes y que les fueron útiles al relacionar las variables en los diferentes problemas. Si bien los datos que presentamos no son generalizables, dada la naturaleza metodológica del estudio, los resultados obtenidos permiten describir cómo estudiantes españoles, sin instrucción previa en este tipo de tareas, comprenden las relaciones entre variables. Esto constituye una información relevante dado la reciente incorporación del pensamiento algebraico en el currículo español.

Sobre el primer objetivo de investigación propuesto (describir cómo varían las representaciones al trabajar con problemas que involucran diferentes tipos de funciones lineales), los resultados ilustran que los tipos de funciones lineales involucrados no tienen efecto en la elección de la representación usada por los estudiantes, ya que existe una tendencia en ambos grupos en usar principalmente la representación dada en el enunciado del problema, en vez de usar otros tipos de representaciones. Asimismo, en ambos grupos la representación númerica fue el tipo de representación espontáneo más usado por los estudiantes, parece constituir un camino útil y significativo al explorar las regularidades existentes entre los casos particulares, entregando pistas que les ayuden a generalizar.

Por otra parte, y considerando el segundo objetivo de investigación (describir cómo varían las representaciones al trabajar con problemas que contienen diferentes tipos de preguntas), los estudiantes evidenciaron una mayor variedad de representaciones al trabajar con casos particulares que al generalizar. Asimismo, los resultados asociados a este objetivo nos han permitido resaltar la relevancia que tiene el lenguaje natural para los estudiantes de ambos grupos, un tipo de representación esencial al expresar cómo se relacionan las variables. Tal como lo señalan algunos autores, el lenguaje natural (oral o escrito) es considerado el primer paso hacia la apropiación de una representación más simbólica y, a la vez, es un vehículo útil para expresar la generalidad (Mason, 2008). Existe un creciente interés en proporcionar a los estudiantes representaciones cada vez más simbólicas, abandonando la importancia que tiene el lenguaje natural para que los estudiantes sean capaces de interactuar con otras representaciones, lo que les permitirá confrontar representaciones, comparar y discutir los resultados que obtienen (Brizuela y Earnest, 2008).

Los resultados de nuestro estudio nos llevan a concluir, tal como lo señalan otros autores (e.g., Carraher y Schliemann, 2007), la importancia de dar acceso a los estudiantes a diferentes tipos de representaciones desde los primeros cursos de primaria (e incluso, de Educación Infantil), con la finalidad que estos, de manera progresiva, integren diferentes tipos de representaciones y den sentido a las relaciones funcionales. Es fundamental que los estudiantes conozcan las posibilidades, límites y efectividad de cada representación (Dufour-Janvier et al., 1987) para escoger la más apropiada, dependiendo de la pregunta y conociendo el por qué realizan dicha selección. Cuando los profesores prestan antención a las representaciones de los estudiantes, estos enseñan de manera más efectiva, ya que los estudiantes pueden conectar sus representaciones convencionales personales con algunas más convencionales (Goldin y Shteingold, 2001).

Para finalizar, en algunas secciones presentamos cómo los estudiantes de estos cursos interactúan con la notación algebraica (cuando aún no ha sido presentado formalmente y, en España, su introducción se realiza en Educacion Secundaria), lo que también es reportado por otros estudios con estudiantes de edades similares (e.g., Blanton et al., 2015). Esta situación abre una línea de investigación, la cual tiene relación con explorar como estudiantes de estas edades, en contextos similares a los de este estudio, se apropian de este tipo de representación y qué significados dan a dichas expresiones.

Referencias

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the "best deal" problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). Nueva York, NY: LEA.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 669-705). Reston, VA: NCTM.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. En J. J. Kaput, W. D. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Nueva York, NY: LEA.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovation in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM*, *40*(1), 23-37.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. y Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: LEA.

Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 yearbook* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Goldin, G. A. y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical conceptos. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 yearbook* (pp. 1-21). Reston, VA: NCTM.

Isler, I., Blanton, M. L. y Murphy-Gardiner, A. (2014). A comparison of elementary and middle grades students' algebraic reasoning. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y D.

Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (p. 110). Vancouver, Canadá: PME.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: LEA.

Kaput, J. J., Blanton, M. L. Y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). Nueva York, NY: LEA.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). Londres, Reino Unido: John Murray.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez-Echeverría y E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 133-148). Rotterdam, Países Bajos: Sense Punlishers.

Martí, E. y Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje*, *23*(90), 11-30.

Mason, J. (2008). Making use of children's power to produce algebraic thinking. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). Nueva York, NY: LEA.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el curriculo básico de la Educación Primaria* (Vol. 52, pp. 19349-19.420). Madrid, España: Autor.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78.

Moss, J., Beatty, R., Barkin, S. y Shillolo, G. (2008). What is your theory? What is your rule? Fourth graders build an understanding of functions through patterns and generalizing problems. En C. Greeno y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 155-168). Reston, VA: NCTM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, *12*(3), 173-184.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-years-olds* (pp. 3-25). Cham, Alemania: Springer.

Reed, K. (2001). Listen to their pictures: an investigation of children's mathematical drawings. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 yearbook* (pp. 215-227). Reston, VA: NCTM.

Scheuer, N., Sinclair, A., de Rivas, S. M. y Christinat, C. T. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y Aprendizaje*, *23*(90), 31-50.

Vergnaud, G. (1987). Conclusion. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 227-232). Hillsdale, NJ: LEA

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES GENERALES

En este capítulo exponemos las conclusiones generales de esta investigación. Les llamamos generales porque conectamos las conclusiones obtenidas en los diferentes estudios expuestos en el capítulo anterior. En concreto, el capítulo lo organizamos en cinco secciones. En primer lugar, establecemos las conclusiones asociadas a los objetivos generales y específicos de esta memoria, así como describimos la manera en que la tesis responde a los proyectos de investigación de los que forma parte. En segundo lugar, describimos las principales contribuciones de esta investigación, para luego describir, en tercer lugar, implicaciones para la docencia que surgen de nuestros resultados. En cuarto lugar, presentamos las limitaciones y perspectivas futuras que surgen del proceso de esta Tesis Doctoral. Finalizamos el capítulo exponiendo las diferentes publicaciones que surgen de esta investigación.

Objetivos de investigación

El elemento de interés central de esta memoria de investigación es la generalización de estudiantes de primaria. En concreto, de un grupo de estudiantes españoles de tercero a sexto curso. Asumimos la generalización desde la perspectiva del pensamiento algebraico, específicamente desde un enfoque funcional a este tipo de pensamiento, donde las funciones son el contenido matemático esencial. Considerando los objetivos generales de la investigación, así como sus respectivos objetivos específicos, en la tabla 6-1 describimos la relación entre estos elementos, así como su conexión con los estudios que forman parte de los resultados de esta tesis. En las secciones que siguen describimos las principales conclusiones asociadas a cada objetivo de esta investigación, así como la conexión con los objetivos de los dos proyectos I+D en el cual se inserta esta tesis.

Tabla 6-1. *Relación entre objetivos de investigación y estudios*

Objetivos generales	Objetivos específicos	Estudios 1	2	3	4	5
1. Describir y caracterizar la generalización de estudiantes de tercero y de quinto de Educación Primaria al resolver un problema que involucra una función lineal.	1.1. Describir las relaciones funcionales que evidencian los estudiantes.	✓	✓	✓		
	1.2. Identificar y describir las representaciones que usan los estudiantes al expresar la relación entre variables involucradas en un problema.	✓	✓	✓	✓	
	1.3. Identificar y describir las estructuras identificadas en las respuestas de los estudiantes para analizar cómo estos organizan las regularidades.				✓	
	1.4. Identificar el tipo de preguntas en las cuales los estudiantes generalizan la relación entre variables.	✓	✓	✓		
	1.5. Describir cómo los estudiantes trabajan con problemas que involucran las formas directas e inversas de una función lineal.				✓	
2. Describir cómo varían las representaciones usadas por estudiantes de tercero a sexto de primaria al trabajar con diferentes problemas de generalización que involucran funciones lineales.	2.1. Describir las variaciones de representaciones usadas por los estudiantes al trabajar con diferentes tipos de funciones lineales ($y=a+x$; $y=ax$; $y=ax+b$).					✓
	2.2. Describir las variaciones de representaciones usadas por los estudiantes al trabajar con diferentes tipos de preguntas, las cuales involucran casos particulares y al generalizar					✓

Objetivo general 1

En este objetivo concebimos la generalización como un artefacto cultural (Kaput, 2008) o como un producto (Ellis, 2007), ya que analizamos la producción escrita de los estudiantes al resolver al problema de las baldosas. El objetivo, tal como lo indicamos en la tabla 6-1, lo abordamos a través de cuatro estudios. En concreto, con este objetivo nos interesamos por describir los diferentes elementos involucrados en la expresión de la generalización de los estudiantes de (e.g., relaciones funcionales, representaciones, tipo de preguntas y estructuras). En el contexto de un experimento de enseñanza, específicamente durante la cuarta y última sesión llevada a cabo en cada curso, distinguimos entre aquellos estudiantes que identificaron relaciones para casos particulares como aquellos que generalizaron dichas relaciones; ambas distinciones nos han permitido describir características del pensamiento funcional de los estudiantes de ambos cursos.

Destacamos que tres estudiantes de tercero generalizaron la relación funcional involucrada en el problema de las baldosas, mientras que 19 lo hicieron en quinto. Tal como describimos previamente, los estudiantes de ambos cursos no estaban acostumbrados a trabajar con situaciones matemáticas que involucraran generalizar. Sin embargo, y tal como lo reportan otros estudios (e.g., Carraher et al., 2008), las experiencias matemáticas previas de los estudiantes parecen haber influido en cómo estos perciben reglas generales. Esto podría ser una explicación a por qué la mayoría de los estudiantes de quinto generalizaron, a diferencia del grupo de tercero. En el caso de los estudiantes de tercero, estos tendieron a centrarse en casos particulares cercanos (los cuales involucraron los números 5, 8 y 10). Para ellos, el cálculo aritmético les permitió responder a las primeras preguntas que les planteamos y no vieron la necesidad de encontrar la relación entre las variables mencionadas (ya que les pedimos explícitamente la relación general entre las variables). La situación anterior ocurre aún cuando el diseño del problema y sus preguntas no consideraron casos particulares consecutivos, que podría haber potenciando más esta situación. Por otra parte, sabiendo que la mayoría de los estudiantes de quinto generalizó, nos llamó la atención que tres estudiantes lo hicieron cuando se les preguntó por casos particulares: hablamos así de generalización espontánea. La expresión de la generalización por parte de los tres estudiantes anteriormente citados podría relacionarse con los estudiantes están predispuestos para generalizar, en términos de Mason (1996).

En el párrafo anterior hemos descrito brevemente similitudes y diferencias entre la generalización de los estudiantes de ambos cursos. Más allá de comparar ambos grupos de estudiantes, las evidencias de generalización nos entregan luces de que hay estudiantes de primaria que generalizan aún cuando no estaban acostumbrados a realizarlo durante las clases tradicionales de matemáticas. Somos conscientes que los resultados de nuestros estudios no son generalizables, pero dan orientaciones que pueden ser consideradas para describir cómo un grupo de estudiantes, en condiciones particulares, generaliza y trabaja con problemas que involucran funciones. Esta situación pone de relieve la importancia de introducir diferentes situaciones matemáticas en las cuales los estudiantes atiendan a las relaciones y estructuras de estas, las cuales pueden o no involucrar funciones. En la sección de implicaciones para la docencia retomamos esta idea.

También analizamos las estructuras en las respuestas de los estudiantes de quinto para describir e interpretar cómo estos organizan, representan y generalizan las variables involucradas en el problema que involucra preguntas para las formas directa e inversa de la función. Los principales resultados evidencian que más estudiantes generalizaron la forma directa que la forma inversa de la función, lo cual interpretamos como la dificultad que supone trabajar con la forma inversa. Aún así, algunos estudiantes generalizaron la relación involucrada en la forma inversa, lo que constituye un elemento sorpresivo, dado que gran parte de la literatura describe las múltiples dificultades que tienen los estudiantes de cursos posteriores de primaria al trabajar con las formas inversas. Los resultados nos proporcionan evidencias empíricas para promover este tipo de tareas (que involucran las formas directa e inversa de una función) con estudiantes de escolaridad primaria.

A continuación, presentamos las principales conclusiones para cada uno de los objetivos específicos.

Objetivo específico 1.1

Describir las relaciones funcionales que evidencian los estudiantes.

Este objetivo fue diseñado ante la necesidad de profundizar en cómo los estudiantes de primaria relacionan las variables involucradas en problemas. En concreto, la relación funcional de correspondencia predominó en las respuestas de los estudiantes de ambos cursos, con algunas evidencias de covariación en las respuestas de los estudiantes de tercero. La predominancia de la correspondencia indica que los estudiantes tendieron a centrarse en la construcción de una regla para determinar el valor único de cualquier valor dado (x), creando así una correspondencia entre x e y (Ayalon et al., 2015). La idea anterior podría explicarse desde tres perspectivas. La primera tiene relación con las experiencias matemáticas previas de los estudiantes de ambos cursos. Probablemente, los estudiantes conectaron sus conocimientos previos sobre operaciones aritméticas, por ejemplo, con encontrar “reglas de forma cerrada” para describir la relación entre cantidades (en términos de Confrey y Smith, 1994). Es así como las operaciones aritméticas que ellos conocían les ayudaron a encontrar la relación entre el par de variables requerido. En segundo lugar, podría tener relación con la idea de función que asumimos en este trabajo (como una correspondencia entre dos conjuntos no vacíos que asignan a cada elemento del primer conjunto exactamente un elemento del segundo conjunto). La noción de función adoptada se refleja en los problemas y las maneras en las cuales los presentamos a los estudiantes. Finalmente, la predominancia de esta relación funcional podría tener relación con la forma en la cual realizamos las preguntas a los estudiantes. Por ejemplo, y considerando el problema de las baldosas, las primeras cuatro preguntas tienen por propósito que los estudiantes identifiquen cuántas baldosas grises se pueden ubicar alrededor de un determinado número de baldosas blancas. Los estudiantes tienden a encontrar la relación funcional (que puede ser establecida para un caso particular o para cualquier caso) que relaciona un determinado par de valores para ambas variables.

Objetivo específico 1.2

Identificar y describir las representaciones que usan los estudiantes al expresar la relación entre variables involucradas en un problema.

Señalábamos en el primer capítulo que nos interesaba describir las representaciones por las cuales los estudiantes de primaria expresan la regla general entre las variables involucradas en un problema, más allá de los cuatro tipos de representaciones descritos por la literatura sobre álgebra escolar: lenguaje natural, gráfica, tabular y notación algebraica (Brenner et al., 1997; Williams, 1993). La idea anterior, de entender las representaciones más allá de las cuatro señaladas, se relaciona con lo nuestra forma de entender el álgebra. Consideramos que nuestra actividad puede denominarse algebraica pues promovemos que los estudiantes atiendan a propiedades y relaciones entre cantidades, examinando su generalidad (Kaput, 2008). Los resultados mostraron diferencias entre las representaciones usadas por los estudiantes de ambos cursos, diferenciando entre aquellas representaciones usadas para representar relaciones funcionales generales o para casos particulares. Aún así, los resultados obtenidos nos permiten concluir que las representaciones, en el contexto del enfoque funcional del álgebra escolar, son consideradas un medio para expresar la relación entre dos o más cantidades que covarían y forman una parte integral de cómo los estudiantes piensan acerca de las funciones. Las representaciones usadas por los estudiantes, tal como lo señalan Brizuela y Earnest (2008), han ayudado a: (a) caracterizar el pensamiento algebraico de los estudiantes; y (b) estructurar y expandir el conocimiento de los estudiantes, captando el significado de las relaciones funcionales establecidas y permitiendo a los estudiantes percibir las estructuras y relaciones en una situación, por ejemplo.

Objetivo específico 1.3

Identificar y describir las estructuras identificadas en las respuestas de los estudiantes para analizar cómo estos organizan las regularidades.

Cuando diseñamos este objetivo, que se materializa en el estudio 4, una de las preguntas que nos planteamos fue ¿en qué nos puede ayudar la idea de estructura al describir el trabajo de los estudiantes? En el contexto del álgebra escolar en general, y del pensamiento funcional en particular, la literatura previa ha acuñado el término estructura de diferentes maneras. Sin embargo, y dado nuestro interés por describir cómo los estudiantes organizan las regularidades percibidas, la idea de estructura que hemos adoptado nos ha ayudado a significar las respuestas escritas que tienen los estudiantes, con la finalidad de describir cómo estos trabajan con las formas directas e inversas de una función lineal. Los resultados que hemos obtenido nos han ayudado a reflexionar y concluir sobre algunos aspectos que ya habían mencionado previamente algunos autores. Por ejemplo, Kieran (1989) señalaba que los métodos centrados en "encontrar las respuestas" hacen que los estudiantes consigan desenvolverse con procesos intuitivos e informales, evitando el uso y reconocimiento de la estructura, que es esencial en el aprendizaje del álgebra. Las respuestas de los estudiantes al problema de las baldosas nos han ayudado, por una parte, a describir cómo estos organizaron las regularidades y, por otra, nos ayudan a percibir cómo ellos reconocen estructuras (que pueden ser consistentes o inconsistentes en uso) en las relaciones encontradas. El diseño del problema de las baldosas, que involucra casos particulares no consecutivos como el 100 (que cuantitativamente es diferentes al caso particular previo, que era 10), puede haber favorecido en que los estudiantes hayan percibido la estructura matemática que subyace a la situación trabajada. Por otra parte, también concluimos que promover el foco en la estructura (ya sea al analizar las respuestas de los estudiantes o al promover que estos se centren en aspectos estructurales) puede favorecer: (a) un aprendizaje significativo de la aritmética (al enfatizar su consideración como un sistema matemático organizado según ciertos principios; (b) el desarrollo de fluidez en el cálculo; y (c) el desarrollo de una buena base para el estudio formal del álgebra (Carpenter, Franke y Levi, 2001; Molina, 2006).

Objetivo específico 1.4

Identificar el tipo de preguntas en las cuales los estudiantes generalizan la relación entre variables.

El desarrollo de este objetivo está directamente relacionado con los tipos de generalización que hemos encontrado en las respuestas de los estudiantes: (a) espontánea, cuando los estudiantes generalizaron al responder a preguntas que involucraban casos particulares; e (b) inducida, cuando los estudiantes generalizaron al responder a la pregunta que explícitamente pide dicha regla. Sabíamos que diferentes autores describen que los estudiantes están naturalmente predispuestos a percibir regularidades y al generalizar (e.g., Mason, 1996; Schifter, Bastable, Russell, Seyferth y Riddle, 2008), pero nos sorprendieron las diferentes maneras en las cuales los estudiantes expresaron reglas de carácter general. La diferenciación de la generalización, según el tipo de pregunta, nos permite concluir que, para promover y fomentar la generalización en estudiantes de diferentes cursos de primaria, es necesario considerar el diseño de diferentes tipos de preguntas y tareas que "capturen" la capacidad de generalización de los estudiantes. De esta manera atendemos a la diversidad de estudiantes en las aulas de primaria y apoyamos a aquellos que pueden percibir relaciones generales, pero aún no pueden representarlas con claridad.

Objetivo específico 1.5

Describir cómo los estudiantes trabajan con problemas que involucran las formas directas e inversas de una función lineal.

Este objetivo ha permitido explorar un tema que escasamente ha sido tratado en la literatura sobre pensamiento funcional; la idea de las formas directa e inversa de la función lineal. Los principales resultados mostraron que las estructuras identificadas en las respuestas de los estudiantes a la forma directa de la función son mayoritariamente correctas y presentan menor variedad que en las estructuras identificadas en sus respuestas a la forma inversa. Asimismo, interpretamos que los estudiantes tuvieron más dificultades con las preguntas que involucraron la forma inversa pues en sus respuestas identificamos una menor cantidad de estructuras equivalentes con el problema. Dos principales conclusiones exponemos sobre el trabajo de este objetivo de investigación. En primer lugar, la consideración de ambas formas de la función favorece la flexibilidad y reversibilidad en el pensamiento de los estudiantes. Los estudiantes, al trabajar con la forma inversa deben "revertir" el proceso que hacen luego de trabajar con la forma directa, con las operaciones aritméticas implicadas, centrando la atención en las estructuras y relaciones matemáticas que subyacen. En segundo lugar, los resultados expuestos nos entregan evidencias de cómo los estudiantes conectaron las preguntas que involucraban la forma inversa con el orden y reversibilidad de las operaciones aritméticas considerados en el problema de las baldosas. La idea anterior se conecta con las ideas de Freudenthal (1983) y Warren y Cooper (2005), quienes señalan que el concepto de función, central en el pensamiento funcional, ayuda a desarrollar una comprensión de las relaciones entre las operaciones, en particular la relación inversa, así como con las ideas de Carraher y Schliemann (2007), quienes enfatizan en la necesidad de reconocer las operaciones aritméticas como funciones.

Objetivo general 2

Este objetivo nos lleva a enfatizar y concluir que la generalización no se puede entender sin las representaciones (entendidas como las diferentes formas que tienen los estudiantes de expresar las relaciones, las cuales involucran el lenguaje natural, las representaciones numéricas, pictóricas, manipulativas o incluso, la notación algebraica, por ejemplo). El análisis de las representaciones nos ha permitido acceder a las maneras en las cuales los estudiantes generalizan y relacionan variables, así como nos ha ayudado a entender la manera en que estos se comunican, resuelven problemas, crean objetos, procedimientos, entre otros. Este objetivo nos ha permitido ir más allá de analizar la producción escrita de la generalización; analizamos el proceso de generalización de los estudiantes a través de las representaciones que estos usan. Específicamente, describimos cómo varían las representaciones que escogen y usan ocho estudiantes de ambos cursos durante sus respuestas a entrevistas individuales semiestructuradas y sus respuestas a las diferentes sesiones del experimento de enseñanza.

En las secciones siguientes describimos las principales conclusiones asociadas a cada objetivo específico.

Objetivo específico 2.1

Describir las variaciones de representaciones usadas por los estudiantes al trabajar con diferentes tipos de funciones lineales (*y=a+x*; *y=ax*; *y=ax+b)*.

La literatura relacionada con el pensamiento funcional ha reportado el trabajo de estudiantes cuando responden a problemas que involucran un único tipo de función (e.g., Blanton, Brizuela, et al., 2015; Morales et al., 2018; Warren y Cooper, 2011) o bien, cuando comparan funciones en un mismo problema (e.g., Brizuela & Earnest, 2008; Moreno et al., 2016). Por tanto, ningún estudio había abordado qué diferencias existen en la manera por la cual los estudiantes trabajan con diferentes problemas que involucran distintos tipos de funciones lineales, en concreto los tipos *y=a+x*; *y=ax*; y *y=ax+b*. La consideración anterior nos ha permitido profundizar en la caracterización del pensamiento funcional de los estudiantes. Los principales resultados de este objetivo dan cuenta que no existen grandes diferencias relativas al uso de representaciones cuando los estudiantes trabajan con diferentes tipos de funciones lineales. Esto puede deberse a dos razones. En primer lugar, durante las intervenciones realizadas a los estudiantes (tanto en el experimento de enseñanza como en las entrevistas), estos se encontraban explorando las características de cada tipo de representación y evaluando su uso, según las demandas específicas de cada situación. La situación anterior podría poner de manifiesto que los estudiantes se están apropiando de los diferentes tipos de representaciones matemáticas para luego usar espontáneamente aquellas que satisfagan sus necesidades al resolver un problema, por ejemplo. En segundo lugar, la forma en la cual formulamos las preguntas a los estudiantes (de manera escrita u oral) y los requerimientos específicos de cada tipo de tarea podría no favorecer el uso de representaciones espontáneas.

Destacamos tres conclusiones principales a partir de las representaciones usadas por los estudiantes, considerando los diferentes tipos de funciones lineales. En primer lugar, y dada la predominancia en el uso del lenguaje natural (oral y escrito) en todas las edades y en todos los tipos de funciones lineales examinados, destacamos la importancia que tiene este tipo de representación. En muchas ocasiones los esfuerzos están centrados en introducir representaciones cada vez más simbólicas y sofisticadas, olvidándonos del poder del lenguaje natural como un tipo de representación matemática que favorece y apoya la construcción e incorporación de otros tipos de representaciones (e.g., Radford, 2006). Por otra parte, la aparición de la representación numérica surge en las respuestas de los estudiantes al trabajar con todos los problemas. Este tipo de representación puede ser considerada como un medio entre el trabajo con particularidades y detalles, así como la detección de regularidades en el cálculo. Finamente, el rol de las representaciones pictóricas apoya el trabajo con los problemas que involucran la función del tipo $y=mx+b$. Los enunciados de los problemas que incluían exclusivamente este tipo de función introducían el lenguaje natural y representaciones pictóricas. Al parecer, y dadas las características matemáticas de este tipo de función, la representación pictórica les ha permitido a los estudiantes comprender la parte que se mantiene constante en cada función, por lo que este tipo de representación resalta un aspecto importante del problema que puede no observarse con otros tipos de representación.

Objetivo específico 2.2

Describir las variaciones de representaciones usadas por los estudiantes al trabajar con diferentes tipos de preguntas, las cuales involucran casos particulares y al generalizar.

Las representaciones usadas por los estudiantes, según si estos trabajaban con casos particulares o con el caso general, constituye una de las principales diferencias entre ambos grupos de estudiantes al caracterizar cómo estos generalizan. Por ejemplo, al generalizar, los alumnos de tercer y cuarto utilizaron una variedad de representaciones más limitada que el grupo de estudiantes de mayor edad. Esto parece sugerir que, en esta muestra, los estudiantes de los cursos mayores de la escuela primaria tenían más recursos de los que podían recurrir cuando expresaban reglas generales, lo que nos hace sentido por las experiencias matemáticas previas que han recibido los estudiantes. Por otra parte, las respuestas de los estudiantes de ambos grupos dan cuenta que estos conocen diferentes tipos de representación al trabajar con caso particulares, pero al momento de generalizaron usaron siempre las mismas. Nuevamente, esto podría un elemento que pone de manifiesto la necesidad de promover diferentes situaciones matemáticas que lleven a los estudiantes a generalizar, para que estos exploren las diferentes representaciones que pueden estar al servicio de la generalización y seleccionen aquellas que más le acomoden para expresar dichas reglas generales.

Dos principales conclusiones exponemos sobre las representaciones usadas por los estudiantes al trabajar con casos particulares y al generalizar. En primera instancia, el uso de la representación numérica fue frecuentemente usada por los estudiantes de ambos grupos en todos los problemas relacionados con valores específicos. Esto tiene sentido, ya que a los estudiantes se les preguntaba acerca de valores específicos y no generales. Esto podría ser un elemento indicativo del tipo de representación que tradicionalmente se presenta en las clases de matemáticas de estos estudiantes: la numérica.

En segundo lugar, la notación algebraica es un elemento interesante y sorpresivo en la manera en la cual los estudiantes se apropian de este tipo de representación. En el caso de los estudiantes de tercero/cuarto, es durante las entrevistas donde entregamos evidencias de cómo los estudiantes interactúan con este tipo de representación. Dada la intervención de la entrevistadora, los estudiantes evidencian diferentes formas que tienen de interactuar con la notación algebraica, dentro de los cuales hay algunos que usan este tipo de representación para generalizar las relaciones. En el caso de los estudiantes de quinto/sexto, el primer elemento sorprendente tiene relación con el uso de la notación algebraica al responder al problema de las baldosas cuando estos trabajan con preguntas que involucraban casos particulares. Los estudiantes de estas edades, durante las entrevistas, también interactúan con la notación algebraica; su uso es algo más espontáneo. Si bien el foco de nuestra investigación está lejos de instruir sobre el uso de este tipo de representación (dado el carácter exploratorio y descriptivo del mismo), nuestros resultados dan cuenta que los estudiantes interactúan con este tipo de representación. Estas situaciones podrían poner de manifiesto que algunos estudiantes de primaria podrían incorporar la notación algebraica en su trabajo con diferentes situaciones matemáticas, rechazando aquellos enfoques que solo proponen su introducción durante la Educación Secundaria.

Objetivos relacionados con los proyectos de investigación

La presente Tesis Doctoral busca atender a los objetivos propuestos en los proyectos de investigación en los cuales se inserta. En la tabla 6-2 presentamos los objetivos de investigación que hemos atendido de cada proyecto de investigación y su relación con los estudios que presentamos en esta memoria (Cañadas y Molina, 2013; Molina y Cañadas, 2016).

Tabla 6-2. *Objetivos de los proyectos de investigación abordados*

Proyecto de investigación	Objetivo general	Objetivos específicos	Estudios relacionados
EDU2013-41632-P	2. Mostrar evidencias del pensamiento funcional de estudiantes españoles de educación primaria.	3. Describir las estrategias que emplean los estudiantes de educación primaria cuando abordan tareas que pretenden poner de manifiesto y promover su pensamiento funcional.	Estudios 1, 2 y 3
		4. Obtener conclusiones que sean útiles para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria.	Estudios 1, 2, 3, 4 y 5
EDU2016-75771-P	1. Profundizar en la descripción del pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes de Educación Primaria en España.	1. Describir el pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes españoles de los diferentes cursos de Educación Primaria.	Estudios 1, 2, 3, 4 y 5
		2. Establecer comparaciones entre el pensamiento funcional de estudiantes españoles de distintos cursos de Educación Primaria.	Estudio 3 y 5.

En relación a los objetivos del primer proyecto de investigación, las evidencias de pensamiento funcional de los estudiantes las hemos presentado a través de las relaciones funcionales que hemos evidenciado en las respuestas de estos, así como las representaciones usadas por estos.

Con respecto al segundo proyecto de investigación, la profundización en el pensamiento funcional la hemos realizado en términos de la generalización. Entendiendo la generalización como un elemento central de este tipo de pensamiento, esta memoria de investigación describe cómo los estudiantes atienden a problemas que involucran funciones lineales, describiendo las relaciones funcionales, representaciones, estructuras, el trabajo con las formas directas e inversas, así como el trabajo con diferentes tipos de funciones lineales.

Contribuciones específicas de la investigación

Las ideas presentadas en esta memoria buscan aportar, desde diferentes perspectivas, al progreso y transferencia del conocimiento científico. Los resultados que hemos presentado se relacionan directamente con nuestra forma de entender el pensamiento algebraico; consideramos que estos van más allá del uso exclusivo de la notación algebraica. Específicamente, destacamos tres principales contribuciones. En primer lugar, la forma de interpretar las relaciones funcionales evidenciadas por los estudiantes, tanto para casos particulares como para casos generales (estudios 1, 2 y 3) puede apoyar la manera de dar significado y entender cómo estos relacionan las variables a responder a diferentes problemas. Las respuestas escritas de los estudiantes constituyen un medio para describir cómo los estudiantes perciben las relaciones funcionales, los cuales pueden ser complementados con entrevistas, ya que estas entregan mayor profundidad en la manera de entender cómo los estudiantes relacionan dichos elementos.

Por otra parte, abordar las formas directa e inversa de la función lineal constituye una contribución relevante para las investigaciones en el contexto del pensamiento algebraico. Tanto en el contexto del pensamiento algebraico, en general, y del pensamiento funcional, en particular, son escasos los estudios que reportan cómo estudiantes comprenden relaciones inversas. En concreto, la manera que analizamos el trabajo de los estudiantes al trabajar con las formas directa e inversa de la función lineal constituye un enfoque relevante para la investigación. Por una parte, proporcionamos evidencias de cómo analizar las respuestas de los estudiantes y, por otra, conectamos el trabajo de los estudiantes con la generalización y representación al trabajar ambas formas de la función.

Finalmente, la idea de estructura tratada en esta tesis aporta otra forma de concebir esta noción porque ayuda a seguir profundizando en cómo los estudiantes relacionan las variables involucradas en diferentes situaciones. Específicamente, identificar las estructuras en las respuestas de los estudiantes pueden ayudar a entender cómo estos comprenden la relación entre variables a través de sus maneras de conectar los elementos que forman parte de las regularidades detectadas por ellos.

Implicaciones para la docencia

Los resultados obtenidos, así como las discusiones y conclusiones de estos, nos permiten describir algunas implicaciones pedagógicas que emergen de esta Tesis Doctoral. En primer lugar, el pensamiento funcional alienta naturalmente a que los estudiantes investiguen (Yerushalmy, 2000), ya que el foco de introducir problemas que involucran funciones es que los estudiantes atiendan a las relaciones y estructuras matemáticas involucradas, más que centrarse en cálculos aislados. Los problemas que hemos presentado en esta tesis (como el problema de las baldosas, en el cual se disponen baldosas grises alrededor de baldosas blancas y la función involucrada es $y=2x+6$) son contextos que pueden ser de utilidad para promover en los estudiantes otros tipos de pensamiento.

En el primer capítulo describíamos que una de las motivaciones del autor por realizar esta Tesis Doctoral tiene relación con su experiencia docente sobre el trabajo con patrones numéricos; el tratamiento de estos elementos varía escasamente entre un curso y otro. El trabajo con relaciones que involucran las dos variables puede convertirse en escenarios ideales para promover en los estudiantes un trabajo que vaya más allá de encontrar el "siguiente término" en una secuencia de elementos. El hecho de atender a la relación entre las dos variables refuerza la idea de algunos autores (e.g., Mason et al., 1985; Stacey y MacGregor, 2001), quienes enfatizan que las actividades con este tipo de regularidades son un medio para introducir a los estudiantes al álgebra, ya que son recomendados debido a su representación dinámica con las variables. Asimismo, considerar actividades que involucren atender a una sola variable es obstáculos en el desarrollo de su razonamiento (Blanton y Kaput, 2004).

Sabemos que la enseñanza de las diferentes representaciones constituye un elemento crucial en el aprendizaje de los estudiantes de primaria (6-12 años) pues cada tipo de representación resalta una característica particular del objeto matemático al cual refieren. Concretamente, enfatizamos en la importancia que debe tener el lenguaje natural (escrito o hablado) en el aprendizaje de los estudiantes. Potenciar este tipo de representación, de manera profunda y a través de diferentes situaciones matemáticas, favorecerá que los estudiantes puedan expresar diferentes ideas de manera cada vez más espontáneas y relacionar este tipo de representación con otras más simbólicas.

Finalmente, las oportunidades de aprendizaje basadas en estos hallazgos pueden ayudar a los estudiantes, por una parte, a desarrollar la comprensión de las relaciones funcionales a través de tareas contextuales y, por otra, al establecer una base sólida para una comprensión de las funciones en la Educación Secundaria. Asimismo, el hecho que los diferentes estudios, así como este, reportan que estudiantes de primaria generalizan las relaciones involucradas en problemas implica un desafío en lo que los profesores deben conocer.

Limitaciones y perspectivas futuras

El desarrollo de una Tesis Doctoral en la mayor parte de los casos es de cuatro años. La realización de la misma en un período de tres años trae consigo diferentes limitaciones. Una de ellas tiene relación con el tiempo involucrado en los diferentes procesos asociados a la formación de investigador. Por ejemplo, los datos provenientes de las entrevistas los analizamos desde la perspectiva de las representaciones; nos interesamos en describir cómo los estudiantes seleccionan y usan representaciones para expresar y generalizar relaciones funcionales. Sin embargo, la gran cantidad de datos que analizamos permiten "mirar" la información desde diferentes perspectivas, como puede ser los significados que los estudiantes dotan a la notación variable. Por otro lado, un aspecto ajeno a nuestro quehacer son los tiempos que manejan diferentes revistas científicas desde el momento que reciben un manuscrito. Inicialmente, y tal como lo señalamos en la presentación de esta memoria, habíamos planificado presentar una tesis por "agrupación de estudios", pero la organización temporal se retrasó con cuestiones ajenas a nuestra gestión.

El desarrollo de este estudio deja nuevas perspectivas y líneas de investigación. Durante el análisis de las entrevistas, realizamos un estudio que relaciona el modelo razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007) con la generalización de los estudiantes al resolver problemas que involucran funciones lineales. En este reporte de investigación presentamos un estudio de caso que ilustra los diferentes pasos de este modelo de razonamiento que sigue una estudiante de cuarto al resolver el problema del parking, el cual involucra la función $y=x+2$. Esta situación deja abierta la idea de: (a) analizar cómo los estudiantes del mismo curso, o de otros, siguen los pasos de este modelo de razonamiento; y (b) conectar diferentes marcos conceptuales, por ejemplo.

Una segunda línea abierta tiene relación con la comparación de las respuestas de los participantes reportados en este estudio, con estudiantes de los primeros cursos del mismo centro educativo (por ejemplo, Morales, 2018, reporta el trabajo con estudiantes de primero y segundo de primaria) o de otro centro educativo. Estas comparaciones favorecerían la interacción y el trabajo con otros miembros del grupo de investigación en el cual se inserta este estudio. Por ejemplo, durante el curso 2017/2018 el autor de esta Tesis Doctoral participó como profesor-investigador en una nueva recogida de datos, realizada en un centro educativo de Granada. Específicamente, el autor dirigió algunas sesiones en un segundo curso de primaria. Es así como los datos obtenidos de esta experiencia constituyen una fuente que permitirá hacer comparaciones con los datos analizados en esta memoria de investigación.

Finalmente, los resultados e implicaciones de esta Tesis Doctoral abren camino para explorar un nuevo campo: la formación de profesores. Sabemos, de alguna u otra forma, lo que los estudiantes de primaria pueden hacer al trabajar con contenidos de carácter algebraico. Sin embargo, son escasos los reportes de investigación que, desde la perspectiva del pensamiento algebraico, abordan el efecto que pueden tener estos profesionales en la mediación y construcción de los aprendizajes algebraicos de los estudiantes de la escuela primaria.

Publicaciones y presentaciones derivadas de la tesis

Organizamos esta sección distinguiendo entre artículos en revistas científicas, comunicaciones en congresos y seminarios impartidos. La organización de cada contribución sigue un orden cronológico.

Artículos en revistas

1. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, *12*(3), 173-184.
2. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (en revisión). Generalizations of third and fifth graders from a functional approach to early algebra.
3. Pinto, E., Cañadas, M. C y Moreno, A. (en revisión). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra.

4. Pinto, E., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (en revisión). Fifth graders working on direct and inverse forms of a function. A study within a functional approach to early algebra.
5. Pinto, E., Brizuela, B. M. y Cañadas, M. C. (en revisión). Variación de representaciones matemáticas de estudiantes en Educación Primaria.

Comunicaciones y participación en congresos afines

1. Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga, España: SEIEM.
2. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Functional thinking and generalisation in third year of primary school. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceeding of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 472-479). Dublín, Irlanda: ERME.
3. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017, marzo). Estructuras y evidencias de generalización en estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. Trabajo presentado al *Seminario de Investigación "Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las matemáticas y Educación Matemática de la SEIEM*. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid y Universidad Rey Juan Carlos.
4. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Generalization in fifth graders within a functional approach. En Kaur, B., Ho, W. K., Toh, T. L. y Choy, B. H. (Eds.). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapur: PME.
5. Moreno, A., Pinto, E. y Molina, M. (2017, julio) Introduciendo las funciones en primaria. En F.E.S. (Ed), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 641-648). Madrid, España: CIBEM.
6. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, España: SEIEM.
7. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar- González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457- 466). Gijón, España: SEIEM.
8. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Structures and generalisation in a functional approach: the inverse function by fifth graders. 2018. En D. M. Gómez (Ed.), *Proceedings of the First PME Regional Conference: South America* (pp. 89-96). Rancagua, Chile: PME.
9. Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018, noviembre). Generalización de estudiantes de tercero de primaria. Una aproximación desde el pensamiento funcional. Comunicación breve presentada a las *XXII Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Santiago, Chile: Universidad Alberto Hurtado.

10. Pinto, E., Brizuela, B. M. y Cañadas, M. C. (2018, noviembre). Variación de representaciones de estudiantes de tercero a sexto de primaria al explorar relaciones entre cantidades que covarían. Póster presentado a las *XXII Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Santiago, Chile: Universidad Alberto Hurtado.
11. Pinto, E., Brizuela, B. M. y Cañadas, M. C. (2019, febrero). Representational variation among elementary school students: A study within a functional approach to early algebra. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Seminarios impartidos y participación en mesas redondas

1. Pinto, E. (2017, enero). *Pensamiento funcional y generalización de estudiantes de tercero de educación primaria*. Seminario dictado al Programa de Máster Oficial en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Granada, España.
2. Pinto, E. (2017, septiembre). *El desarrollo de la tesis doctoral en Didáctica de las Matemáticas: perspectivas, inquietudes y problemáticas*. Invitado a la mesa redonda de la sesión destinada a los Jóvenes Investigadores en la XXI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Zaragoza, España.
3. Pinto, E. (2018, noviembre). *Pensamiento algebraico en la escolaridad primaria: El caso de la generalización.* Seminario dictado en la Facultad de Educación de la Universidad de los Andes, Chile.
4. Pinto, E. (2019, junio). Generalización de estudiantes de 3º a 6º de Educación Primaria en un contexto funcional al álgebra escolar: qué, cómo y cuándo. Seminario dictado en el seno del proyecto I+D con referencia EDU2016-75771-P. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España.

CHAPTER 7

GENERAL CONCLUSIONS

In this chapter, we present the main conclusions derived from this dissertation. The chapter connects the conclusions exposed in the five studies show in the results chapter. Specifically, this chapter is organized across five sections. First, we set the conclusions related to the general and specific research objectives and describe the way in which this dissertation answers to the R&D projects of which it is a part. Second, we describe the main contributions of this research, and then describe, in the third section, implications for teaching. Fourth, we present limitations and future prospects. Finally, we present a list of all our publications and invited presentations derived from this dissertation.

Research objectives

In this dissertation, students' generalization is the key element; specifically, we focus on a group from third to sixth Spanish elementary students. We assume generalization from the perspective of algebraic thinking, specifically within a functional approach. Related to the general research objectives, as well as their respective specific objectives, Table 7-1 shows the relationship between these elements, as well as their connection with the studies that constitute the results of this thesis. In the sections that follow, we describe the main conclusions associated with each objective of this research.

Table 7-1. Relation between Research Objectives and Studies

General research objective	Specific research objective	Studies				
		1	2	3	4	5
1. Describe and characterize third-year students and fifth-grade elementary students' generalization when solving a problem that involves a linear function.	1.1. Describe the functional relationships evidenced in students' responses.	✓	✓	✓		
	1.2. Identify and describe students' representations when expressing the relationship among variables involved in a given problem.	✓	✓	✓	✓	
	1.3. Identify and describe the structures identified in the				✓	

Table 7-1. Relation between Research Objectives and Studies

General research objective	Specific research objective	Studies 1	2	3	4	5
	students' responses to analyze how they organize regularities.					
	1.4. Identify the types of questions in which students generalize the relationship among variables.	✓	✓	✓		
	1.5. Describe how students work with problems that involve the direct and inverse forms of a linear function.				✓	
2. Describe how third to sixth elementary students' representations vary when solving different problems that involve linear functions.	2.1. Describe the variations of representations used by students when working with different types of linear functions ($y=a+x$; $y=ax$; $y=ax+b$).					✓
	2.2. Describe the variations of representations used by students when working with particular cases and generalizing.					✓

General Research Objective 1

This objective allows us to conceive generalization as a cultural artifact (Kaput, 2008) or as a product (Ellis, 2007), because we analyzed written students' responses to the tiles problem. This objective was developed across five studies (see Table 7-1). Specifically, in this objective we are interested in describing the different elements involved in how third and fifth graders expressed general rules (e.g., functional relationships evidenced, representations used, type of questions in which they generalized or structures identified in their responses). In the context of a Classroom Teaching Experiment, specifically during the fourth and final session worked in each grade, we distinguish between students who identified relationships for specific values and those who generalized. Both distinctions have allowed us to describe students' functional thinking.

We emphasize that three-third graders generalized the functional relationship involved in the problem of the tiles, while 19-fifth-graders did so. Such we previously described, students of both grades were not used to working with mathematical situations that involve generalize and problems that involve functions. However, as reported by other authors (e.g., Carraher et al., 2008), previous mathematical student experiences seem to have influenced how they perceive general rules. This could be an explanation for why most of fifth graders generalized (in comparison to third graders). Third graders tended to focus on specific values (which involved the numbers 5, 8, and 10). For them, the arithmetic computations allowed to answer the first questions we ask them and did not see the need to find the (general) relationship between these variables (in fifth question). The above situation occurs even when the design of the worksheet did not consider consecutive specific values, there could be enhancing this situation. On the other hand, and considering that most fifth graders generalized, we noticed that three students did when they were asked about specific values: spontaneous generalization. The expression of generalization by these three students could relate to the idea that students are naturally predisposed to generalize (in terms of Mason, 1996).

In the previous paragraph, we have briefly described similarities and differences between third and fifth graders' generalization. Beyond compare both groups, students' responses allow us to understand that there are elementary students who generalize even when they were not used to doing them during their math classes. We are aware that the results of our studies are not generalizable, but they illuminate and describe how a group of students, in a particular context, generalizes and works with problems involving functions. This situation can highlight the importance of introducing different mathematical situations in which students focus on mathematical relations and structure, which may or may not be functional. In the section on teaching implications we returned to this idea.

Also, we analyze the structures in fifth graders' responses to describe and interpret how they organize, represent, and generalize the variables involved in the problem, which involve the direct and inverse forms of a linear function. The main results show that most students generalized the direct form than the inverse form of the function, which we interpret as the difficulty of working with the inverse. However, some students generalized the inverse form of a linear function, which is a surprise element, since much of the literature describes the difficulties of post-primary students working with the inverse form.

In the following, we present the main conclusion related to each specific research objective.

Specific objective 1.1

Describe the functional relationships evidenced in student's responses.

This objective was intended to deepen in how third and fifth elementary students relate variables involved in the problem. Specifically, the functional relationship of correspondence predominated in the responses of students of both grades, with some responses from third graders who evidenced covariation. The predominance of correspondence helps us to highlight one aspect of this students' algebraic thinking when working with covarying quantities; these tend to focus on the construction of a rule to determine the unique value of any given value (x), creating a correspondence between x and y (Ayalon et al., 2015). Above idea could be explained from three perspectives. The first is related to the previous mathematical experiences of the students of both grades. Probably, the students connected their previous knowledge about arithmetic computations to find "closed-form rules" to describe the relationship among quantities (Confrey & Smith, 1994). The arithmetic computations that they knew helped them find the relationship between the required pair of variables. A second explanation could be related to the idea of function that we assume in this work (as a correspondence between two non-empty sets that assign each element of the first set exactly one element of the second set). The idea of the function adopted is reflected in the problems and the ways in which we present it to the students so that, possibly, this may be an explanation of why correspondence predominates. Finally, the predominance of this functional relationship could be related to the way in which we ask the students questions. For example, and considering the tile problem, the first four questions are intended for students to identify how many gray tiles can be placed around a certain number of white tiles. Students tend to find the functional relationship (which can be established for a particular case or for any case) that relates a certain pair of values for both variables.

Specific objective 1.2

Identify and describe students' representations when expressing the relationship among variables involved in a problem.

In the first chapter, we pointed out that our interest is to describe mathematical representations. Specifically, we focus on representations used by third and fifth graders to express general rule among variables involved in a problem (the tiles problem). This objective beyond the four types of representations described in the literature on school algebra: natural language, graphical, tabular, and algebraic notation (Brenner et al., 1997; Williams, 1993). The above idea is related to our way to understand what algebra is. We consider that our activity may be referred as algebraic because we promote that students attend properties and relationships among quantities, examining its generality (Kaput, 2008).

According to this objective, results show differences among representations used by third and fifth graders, differentiating between representations used that evidence functional relationships in general, or this type of relations involving particular specific values. Specifically, the results allow us to conclude that representations, in the context of the functional approach to school algebra, are ways to express the relationship between two or more covarying quantities and form an integral part of how students think about functions. Representations used by students, as pointed out Brizuela and Earnest (2008), have helped to: (a) characterize the student algebraic thinking; and (b) structure and expand the students' knowledge, capturing the meaning of established functional relationships, and allowing students to perceive the structures and relationships in a situation, for example.

Specific objective 1.3

Identify and describe the structures identified in the students' responses to analyze how they organize regularities.

When we designed this objective, which is developed in the study 4, one of the questions that we asked was how the idea of structure can help to describe students' work with functions? In the context of school algebra in general and of functional thinking in particular, previous literature has adopted the notion of structure in different ways. However, given our interest in describing how students organize the perceived regularities, the idea of structure we have adopted has helped us to mean the written responses that students, in order to describe how they work with direct forms and inverse of a linear function. The results we have obtained have helped us to reflect and conclude on some aspects that had previously mentioned some authors. For example, Kieran (1989) noted that centered methods "find answers" make students get cope with intuitive and informal processes, avoiding the use and recognition of the structure, which is essential in learning algebra. The student responses to the problem of the tiles have helped us, on the one hand, to describe how they organize the regularities and secondly, help us perceive how they recognize structures (which may be consistent or inconsistent in use) in relationships found. The design of the tile problem, particular cases involving nonconsecutive as 100 (which is quantitatively different from the previous particular case, it was 10), there may be favored students have perceived the mathematical structure underlying the situation worked. Moreover, we also conclude that promote the focus on the structure (either by analyzing responses from students or by promoting these focuses on structural aspects) may promote: (a) significant learning of arithmetic (emphasizing consideration as a mathematical system organized according to certain principles; (b) the development of fluency in the calculation; and (c) developing a good basis for the formal study of algebra (Carpenter, Franke, & Levi, 2001; Molina, 2006).

Specific objective 1.4

Identify the type of questions in which students generalize the relationship between variables.

The development of this goal is directly related to the types of generalization that we found in student responses: (a) spontaneous, when students generalized to answer questions involving specific cases; and (b) induced, when students generalized to answer the question explicitly asks that rule. We knew that different authors describe that students are naturally predisposed to perceive regularities and generalize (e.g., Mason, 1996; Schifter, Bastable, Russell, Seyferth, & Riddle, 2008), but we were surprised by the different ways in which students expressed rules general. Differentiation of generalization, depending on the type of question, we conclude that, to promote and encourage the widespread among students of different courses of primary, it is necessary to consider the design of different types of questions and tasks to "capture" the generalization ability of students. Thus, we consider the diversity of students in elementary classrooms and support to those who can perceive general relations, but still cannot represent them clearly.

Specific objective 1.5

Describe how students work with problems that involve the direct and inverse forms of a linear function.

This goal has allowed exploring a topic that has hardly been discussed in the literature on functional thinking; the idea of direct and inverse forms of the linear function. The main results showed that the structures identified in student responses to directly function are mostly correct and have less variety than the structures identified in their responses to the reverse. Also, we interpret that students had more difficulty with questions involving the reverse in their responses identified as fewer equivalent structures with the problem. Two main conclusions we present the work of this research objective. First, consideration of both forms of the function promotes flexibility and reversibility in the thinking of students. Students, working with the reverse should "reverse" the process they do after working with directly with arithmetic operations involved, focusing on structures and underlying mathematical relationships. Second, the above results give us evidence of how students connected questions involving the inversely with the order and reversibility of arithmetic operations considered in the problem of the tiles. The above idea is connected with the ideas of Freudenthal (1983) and Warren and Cooper (2005), who point out that the concept of function, central functional thinking,

General Research Objective 2

This objective helps us to emphasize and conclude that generalization cannot be understood without representations (understood as different ways for students to express relationships, which involve natural language, numerical, pictorial, manipulative or even algebraic notation, for example). The analysis of representations has allowed us access to the ways in which students generalize and related variables, and has helped us understand how they communicate, solve problems, create objects, procedures, among others. This goal allowed us to go beyond analyzing the written production of generalization; we analyze the process of generalization of students through the representations that they use. Specifically, we describe how the representations vary choose and use eight students of both courses that participated in interviews. We analyze student work in responding to problems involving different types of linear functions, in their responses to semi-structured individual interviews and responses to the different sessions of CTE.

The following sections describe the main findings associated with each specific objective, highlighting new aspects that have not been considered in the study related to this research objective (fifth study).

Specific objective 2.1

Describe variations of representations used by students to work with different types of linear functions (*y=a+x*; *y=ax*; *y=ax+b*).

Literature related to functional thinking has reported the work of students when they respond to problems that involve a single type of function (e.g., Blanton, Brizuela, et al., 2015; Morales et al., 2018; Warren & Cooper, 2011) or, when they compare functions in the same problem (e.g., Brizuela & Earnest, 2008; Moreno et al., 2016). Therefore, no study had addressed what differences in the way in which students work with different problems that involve different types of linear functions, specifically the types *y=a+x*; *y=ax*; y *y=ax+b*. Above idea has allowed us to deepen the characterization of students' functional thinking. The main results of this objective show that there are no major differences regarding the use of representations when students work with different types of linear functions. This may be due to the fact that, in the first place, during the interventions made to the students (both in CTE and in the interviews), they were exploring the characteristics of each type of representation and evaluating its use, according to the demands specific to each situation. The previous situation could show that students are appropriating the different types of mathematical representations and then spontaneously use those that meet their needs when solving a problem, for example. Second, the way in which we ask students questions (in written or oral form) and the specific requirements of each type of task may not favor the use of spontaneous representations.

Three main conclusions we get from the representations used by students, considering the different types of linear functions. First, given the predominance in the use of natural language (oral and written) at all ages and all types of linear functions examined, we emphasize the importance of this type of representation. In many cases efforts are focused on introducing increasingly sophisticated symbolic representations, forgetting the "power" of natural language as a kind of mathematical representation that favors and supports the construction and incorporation of other types of representations (Radford, 2006). Second, the emergence of numerical representation arises in the responses of students to work with all problems. This type of representation can be considered as a medium between the work particularities and details as well as detecting regularities in the computation. Third, the role of pictorial representations supports the work with problems involving the function $y=mx+b$. The problem statements that included only this type of function introduced natural language and pictorial representations. Apparently, given the mathematics of this type of function characteristics, pictorial representation has allowed students to understand the part that remains constant in each function, making such representation highlights an important aspect of the problem that cannot observed with other types of representation.

Specific objective 2.2

Describe variations of representations used by students to work with different types of questions, which involve individuals and generalizing cases.

Representations used by students, as if they were working with specific values or the general case, is one of the main differences between the two groups of students. For example, generalizing, students in third and fourth used a variety of more limited than the group of older students' performances. This suggests that, in this sample, upper elementary students had more resources than they could turn to when expressing general rules, what makes sense to us by previous experiences that have received math students. Moreover, the students' responses from both groups realize that they know different types of representation when working with individual case, but when widespread always used them. Again, this could be an element that highlights the need to promote different mathematical situations with students to generalize, so that they explore the different representations that can serve generalization and select those that best accommodate to express these general rules.

Two main conclusions are exposed on the representations used by students to work with particular cases and generalizing. In the first instance, the use of numerical representation was frequently used by students from both groups on all issues related to specific values. This makes sense, since students were asked about specific values and not general. This could be indicative of the type of representation element traditionally presented in math classes of these students: the number.

Second, algebraic notation is an interesting and surprising element in the manner in which students appropriate this type of representation. For intermediate elementary students, it is during interviews where we provide evidence of how students interact with this type of representation. Given the intervention of the interviewer, students show different ways in which they interact with algebraic notation, within which there are some who use this type of representation to generalize relationships. For upper elementary students, the first striking element relates to the use of algebraic notation to address the problem of the tiles when they work with questions involving specific values. Students of this age, during interviews, also they interact with algebraic notation; their use is more spontaneous. While the focus of our research is far from instructing on the use of this type of representation (given the exploratory and descriptive of the same character), our results show that students interact with this type of representation. These situations could demonstrate that some elementary students could incorporate algebraic notation in his work with different mathematical situations, rejecting only those approaches that propose their introduction in secondary education. While the focus of our research is far from instructing on the use of this type of representation (given the exploratory and descriptive of the same character), our results show that students interact with this type of representation. These situations could demonstrate that some elementary students could incorporate algebraic notation in his work with different mathematical situations, rejecting only those approaches that propose their introduction in secondary education. While the focus of our research is far from instructing on the use of this type of representation (given the exploratory and descriptive of the same character), our results show that students interact with this type of representation. These situations could demonstrate that some elementary students could incorporate algebraic notation in his work with different mathematical situations, rejecting only those approaches that propose their introduction in secondary education.

Our Research Objectives related to the R&D Projects

This dissertation aims to address the objectives in R&D projects in which it forms part. Table 7-2 presents the research objectives we have considered of each research project and its relation to the studies presented in this work (Canadas & Molina, 2013; Molina & Canadas, 2016).

Table 7-2. Objectives of the research projects addressed

Investigation project	General objectives	Specific objectives	Related studies
EDU2013-41632-P	2. Show evidence of functional thinking of Spanish elementary students.	3. Describe strategies used by elementary students when addressing tasks that aims to demonstrate and promote their functional thinking.	Studies 1, 2 and 3

Table 7-2. Objectives of the research projects addressed

Investigation project	General objectives	Specific objectives	Related studies
		4. Draw conclusions that are useful for the teaching and learning of mathematics in primary education.	Studies 1, 2, 3, 4 and 5
EDU2016-75771-P	1. Deepen the description of the functional thinking that reveal primary school students in Spain.	1. Describe the functional thinking that show Spanish students of different courses of primary education.	Studies 1, 2, 3, 4 and 5
		2. Establish comparisons between functional thinking of Spanish students from different courses of primary education.	Study 3, and 5.

In relation to the objectives of the first research project, evidence of functional thinking of the students have presented through the functional relationships we have evidenced in the responses of these as well as the representations used by these students.

Regarding the second research project, the deepening of functional thinking we have done in terms of generalization. Understanding the generalization as a central element of this kind of thinking, this research report describes how students attend to problems involving linear functions describing the functional relationships, representations, structures, working with direct and inverse forms as well as the work with different types of linear functions.

Specific Research Contributions

The ideas presented in this dissertation seek to provide helpful tools to progress and transfer of scientific knowledge. The results presented are relating directly to our understanding of algebraic thinking; we consider that these go beyond the exclusive use of algebraic notation. Specifically, we include three main contributions. First, how to interpret the functional relationships evidenced by students, both for specific values and for general cases (studies 1, 2, and 3) can support the way to give meaning and understanding how these relate variables to respond to different problems. Written student responses are a vehicle to describe how students perceive functional relationships.

Second, addressing direct and inverse forms of the linear function is a significant contribution to research in the context of algebraic thinking. Both in the context of algebraic thinking in general and functional thinking, in particular, few studies reporting how students understand inverse relationships. Specifically, the way we analyze student work in working with direct and inverse forms of the linear function is an important research focus. On the one hand, we provide evidence of how to analyze student responses and, secondly, we connect students work with the generalization and representation when working both forms of the function.

Finally, the idea of structure used in this thesis provides another way of thinking about this concept, which helps to further deepen how students relate the variables involved in different situations. Specifically, identifying structures on responses from students can help understand how they understand the relationship between variables through their ways to connect the elements that are part of the regularities detected by them.

Teaching Implications

The results we have obtained, as well as the discussions and conclusions of these allow us to describe some teaching implications. First, functional thinking encourages naturally students research (Yerushalmy, 2000), since the focus of introducing problems involving functions is that students attend relations and mathematical structures involved, rather than focusing on calculations isolated. The problems we have presented in this thesis (as the problem of the tiles, in which gray tiles are arranged around white tiles and function involved is $y=2x+6$) are contexts that can be helpful to promote the other students thought.

Second, in the first chapter we described that one of the author's motivations for making this thesis is related to his teaching experience on working with number patterns; treatment of these elements varies little between one course and another. Working with relationships involving two variables can become ideal scenarios to promote students a job that goes beyond finding the "next term" in a sequence of elements. The fact addresses the relationship between the two variables reinforces the idea of some authors (e.g., Mason et al., 1985; Stacey & MacGregor, 2001), who emphasize that activities such regularities are a means to introduce students to algebra, as they are recommended because of its dynamic representation with variables. Also consider serving activities involving a single variable is obstacles in developing their reasoning (Blanton & Kaput, 2004).

Third, we know that the teaching of various representations constitutes a crucial element in learning elementary school students (6-12 years) for each type of representation highlights a particular feature of the mathematical object which relate. Specifically, we emphasize the importance that should be the natural language (written or spoken) in student learning. Encourage this type of representation, deeply and through different mathematical situations, it will encourage students to express different ideas increasingly spontaneous way and relate this type of representation with more symbolic.

Finally, the learning opportunities based on these findings may help students, on the one hand, to develop understanding of the functional through contextual tasks relationships and, secondly, to lay a solid foundation for an understanding of the functions in Secondary Education. Also, the fact that different studies and this report that elementary students generalize the relationships involved in solving involves a challenge in what teachers should know.

Limitations and future perspectives

The development of a Doctoral Thesis in a three-year period brings different limitations. One is related to the time involved in the various processes associated with the formation of research. Two examples arise from this idea. First, the interviews data was analyzed from the perspective of representations; we are interested in describing how students select and use representations to express and generalize functional relationships. However, data analyzed allow "look" students' responses from different perspectives, such as the meanings that students give to the variable notation. Second, an external aspect to our work are the times that handle different scientific journals from the time they receive a manuscript.

This study leaves new perspectives and lines of research. During the analysis of interviews data, we developed a study linking inductive reasoning model proposed by Cañadas and Castro (2007) with the generalization of students to solve problems involving functions linear. In this research, we show a case study illustrating the different steps of this model of reasoning that follows a student from fourth to solve the problem of parking, which involves the function $y=x+2$. This leaves open the idea of: (a) analyze how students of the same course, or others, follow the steps in this model of reasoning; and (b) connecting different frameworks, for example.

A second open line relates to the comparison of the responses of the participants reported in this study, with students of the first courses of the same school (e.g., Morales, 2018, reports the work with students from first and second grades) or another school. These comparisons favor the interaction and work with other members of the research group in which this study is inserted. For example, during the period 2017/2018 the author of this thesis participated as teacher-researcher in a new data collection, held at a school in Granada. Specifically, the author made some sessions addressed in a second elementary grade.

Finally, the results and implications of this thesis opens way to explore a new field: the training of teachers. We know, in some way or another, so elementary students can do when working with content of algebraically character. However, few research reports that, from the perspective of algebraic thinking, addressing the effect they can have these professionals in mediation and construction of algebraic learning of elementary school students.

Publications and Presentations derived from this Dissertation

We organize this section distinguishing between articles in scientific journals, conference papers and seminars. The organization of each contribution follows a chronological order.

Articles in Refereed Journals

1. Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, *12*(3), 173-184.
2. Pinto, E., Cañadas, M. C., & Moreno, A. (major revisions). *Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra*. Manuscript under review.
3. Pinto, E., & Cañadas, M. C. (major revisions). *Generalizations of third and fifth graders from a functional approach to early algebra*.
4. Pinto, E., Cañadas, M. C., & Brizuela, B. M. (under review). *Fifth graders working on direct and inverse forms of a function. A study within a functional approach to early algebra*. Manuscript under review.
5. Pinto, E., Brizuela, B. M., & Cañadas, M. C. (under review). *Variación de representaciones matemáticas de estudiantes en Educación Primaria* [Mathematical representational variation among elementary school students].

Papers in Refereed Conference Proceedings

1. Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A., & Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan [Functional relationships evidenced by third graders and the representations used]. In J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P.

Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 417-426). Málaga, Spain: SEIEM.

2. Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2017). Functional thinking and generalisation in third year of primary school. In T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceeding of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 472-479). Dublin, Ireland: ERME.
3. Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2017, March). Estructuras y evidencias de generalización en estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparative [Third and fifth graders' structures and generalization: A comparative study]. Paper presented at *Seminario de Investigación "Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las matemáticas y Educación Matemática de la SEIEM*. Madrid, Spain: Universidad Complutense de Madrid & Universidad Rey Juan Carlos.
4. Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2017). Generalization in fifth graders within a functional approach. In Kaur, B., Ho, W. K., Toh, T. L., & Choy, B. H. (Eds.). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapore: PME.
5. Moreno, A., Pinto, E., & Molina, M. (2017, July) Introduciendo las funciones en primaria [Introducing function in elementary school]. In F.E.S. (Ed), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 641-648). Madrid, Spain: CIBEM.
6. Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparative [Structures and generalisation in third and fifth year of primary school: a comparative sutyd]. In J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, Spain: SEIEM.
7. Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento functional [Generalisation and inductive reasoning by a fourth grader. A case study from the functional approach]. In L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457- 466). Gijón, Spain: SEIEM.
8. Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018). Structures and generalisation in a functional approach: the inverse function by fifth graders. 2018. In D. M. Gómez (Ed.), *Proceedings of the First PME Regional Conference: South America* (pp. 89-96). Rancagua, Chile: PME.
9. Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018, November). Generalización de estudiantes de tercero de primaria. Una aproximación desde el pensamiento functional [Third graders' generalization. A study within of functional thinking]. Short Research Report presented at *XXII Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Santiago, Chile: Universidad Alberto Hurtado.
10. Pinto, E., Brizuela, B. M., & Cañadas, M. C. (2018, November). Variación de representaciones de estudiantes de tercero a sexto de primaria al explorar relaciones entre cantidades que covarían [Representational variation among third to sixth elementary school students exploring relationships among covarying quantities]. Poster presented at *XXII Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Santiago, Chile: Universidad Alberto Hurtado.

11. Pinto, E., Brizuela, B. M., & Cañadas, M. C. (2019, February). Representational variation among elementary school students: A study within a functional approach to early algebra. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, The Nethderlands: Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Invited Presentations

1. Pinto, E. (2017, January). *Pensamiento funcional y generalización de estudiantes de tercero de educación primaria* [Functional thinking and generalization of third graders]. Conference to the Programa de Máster Oficial en Didáctica de la Matemática of University of Granada. Granada, Spain.
2. Pinto, E. (2017, September). *El desarrollo de la tesis doctoral en Didáctica de las Matemáticas: perspectivas, inquietudes y problemáticas [The development of the doctoral thesis in Mathematics Education: Perspectives, concerns and problems]*. Invited to the round table of the session for Young Researchers in the XXI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Zaragoza, Spain.
3. Pinto, E. (2018, November). *Pensamiento algebraico en la escolaridad primaria: El caso de la generalización* [Algebraic thinking in elementary school: The case of generalization]. Conference to Education Faculty of Universidad de los Andes, Chile.
4. Pinto, E. (2019, June). Generalización de estudiantes de 3º a 6º de Educación Primaria en un contexto funcional al álgebra escolar: qué, cómo y cuándo [Third to sixth graders' generalization within a functional approach to early algebra]. Conference to I+D project EDU2016-75771-P. Departamento de Didáctica de la Matemática of University of Granada, Spain.

REFERENCIAS

Ainsworth, S., Bibby, P. y Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *The Journal of the Learning Sciences*, *11*(1), 25-61.

Alibali, M. W., Knuth, E., Hattikudur, S., McNeil, N. y Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 221-247.

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 111-129.

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra. Ideas, insights, and activities*. Nueva York, NY: Routledge.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2015). *Mathematics: Sequence of content F-6 strand: Number and algebra*. Sydney, Australia: Autor. Recuperado de http://www.acara.edu.au/verve/_resources/ Mathematics__Sequence_of_content.pdf

Ayala-Altamirano, C. (2017). *Evolución del significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (en prensa). Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de primaria. *Investigación en Educación Matemática XXIII*.

Ayalon, M., Watson, A. y Lerman, S. (2015). Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(3), 321-339.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas*. Madrid, España: Síntesis.

Baroody, A. J. (1990). How and when should place-value concepts and skills be taught? *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(4), 281-286.

Bastable, V. y Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. En J. J. Kaput, M. L. Blanton y D. W. Carraher (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 165-184). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bautista, A., Brizuela, B. M. y Ko, Y. Y. (2013). Middle school mathematics teachers' implicit conceptions about multiple representations for functions. En D. Halkias (Ed.), *Psychology and the search for certainty in everyday life* (pp. 31-7). Atenas, Grecia: Athens Institute for Education and Research.

Becker, J. R. y Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128). Melbourne, Australia: PME.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1988). A constructivist approach to numeration in primary school: Results of a three year intervention with the same group of children. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(3), 299-331.

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 41-73.

Blanco, L. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de enseñanza general básica y estudiante para profesores.* Badajoz, España: Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M. L. (2017). Algebraic reasoning in grades 3-5. En M. T. Battista (Ed.), *Reasoning and sense making in the mathematics classroom. Grades 3-5* (pp. 67-102). Reston, VA: NCTM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fugslestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: PME.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 5-23). Berlin, Alemania: Springer.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M. y Stephens, A. C. (2016, julio). Elementary children's algebraic thinking. Documento presentado en *The 13th annual conference of the International Congress of Mathematical Education* (ICME). Hamburgo, Alemania.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential* *understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M. L., Stephens, A. C., Knuth, E., Gardiner, A., Isler, I. y Jee-Son, K. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87.

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., et al. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. (pp. 27-49). Hamburgo, Alemania: Springer.

Bogdan, R. C. y Biklen, S. K. (2007). Qualitative research for education. An introduction to theory and methods (quinta edición). Boston, MA: Pearson.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R. y Reed, B. S et al. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, *34*(4), 663-689.

Brizuela, B. M. (2004). *Mathematical development in young children. Exploring notations*. Nueva York, NY: Teachers College Press.

Brizuela, B. M. (2005). *Relaciones entre representaciones: el caso de Jennifer, Nathan y Jeffrey*. En M. Alvarado y B. M. Brizuela (Eds.), *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp. 198-219). DF, México: Paidós.

Brizuela, B. M. (2016). Variables in elementary mathematics education. *The Elementary School Journal*, *117*(1), 46-71.

Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP)*, *14*, 37-57.

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the "best deal" problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2001). Additive relations and function tables. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(3), 309-319.

Brizuela, B. M. y Martinez, M. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero (Ed.), *Desarrollo cognitivo y educación [II]. Procesos de conocimiento y contenidos específicos* (pp. 267-290). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Murphy Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 34-63.

Brizuela, B. M., Schliemann, A. D. y Carraher, D. W. (2004). Sara: Notations for fractions that help her "think of something". En B. M. Brizuela (Ed.), *Mathematical development in young children. Exploring notations* (pp. 55-66). Nueva York, NY: Teachers College Columbia University.

Bush, S. B. y Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 613-632.

Cai, J. (2005). US and Chinese teachers' constructing, knowing and evaluating representations to teach mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(2), 135-169.

Cai, J. y Knuth, E. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, *37*(1), 1-4.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlín, Alemania: Springer.

Cai, J. y Moyer, J. C. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades : Some insights from international comparative studies. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 169-192). Reston, VA: NCTM.

Cai, J., Fong, N. S. y Moyer, J. C. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 25-42). Berlín, Alemania: Springer.

Callejo, M. L., García-Reche, Á. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 5-25.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). *Memoria del proyecto de investigación I+D+i "Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico", con referencia EDU2013-41632-P*. Documento no publicado. Universidad de Granada, España.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cañadas, M. C. y Morales, R. (2016). Functional relationships identified by first graders. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi. (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 131-138). Szeged, Hungría: PME.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C., Dooley, T., Hodgen, J. y Oldenburg, R. (2012). CERME7 Working group 3: Algebraic thinking. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 189-190.

Carpenter, T. P. y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra (pp* (pp. 155-162). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (Research report No. 00-2). Madison, WI: National Center for Improving student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2002). The transfer dilemma. *The Journal of the Learning Sciences*, *11*(1), 1-24.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2010). Algebraic reasoning in elementary school classrooms. En D. Lambdin y F. K. Lester (Eds.), *Teaching and learning mathematics: Traslating research to the classroom* (pp. 23-29). Reston, VA: NCTM.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 191-208). Nueva York, NY: Routledge.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-years-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 107-138). Nueva York, NY: Springer.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 3-22.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-72). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales: estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Granada, España: Comares.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Stepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en educación matemática XVI* (pp. 75-94). Jaén, España: SEIEM.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. *Edma 0-6: Eduación Matemática en la Infancia*, *6*(2), 1-13.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representacion y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361-371.

Chazan, D. (2000). *Beyond formulas in mathematics and teaching: Dynamics of the high school algebra classroom*. Nueva York, NY: Teachers College Press.

Chimoni, M. y Pitta-Pantazi, D. (2017). Parsing the notion of algebraic thinking within a cognitive perspective. *Educational Psychology*, *37*(10), 1186-1205.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 57-76.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovation in science, technology, engineering and mathematics* *learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(2), 258-277.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2007). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). Research methods in education (octava edición). Londres, Reino Unido: Routledge.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg, VA: Conference Committee.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2/3), 135-164.

Cooney, T. J., Beckman, S., Lloyd, G., Wilson, P. y Zbiek, R. (2010). *Developing essential understanding of functions. Grades 9-12*. Reston, VA: NCTM.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 23-37.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai (Ed.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 187-214). Berlín, Alemania: Springer.

Design Based Research Collective [DBRC] (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Dienes, Z. P. (1961). On abstraction and generalisation. *Harvard Educational Review*, *31*(3), 281-301.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth teaching* (pp. 61-85). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in adavanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and* *pedagogy*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1/2), 103-131.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221-262.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebrization. Advances in mathematics education* (pp. 215-238). Berlín, Alemania: Springer.

English, L. D. y Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, *19*(2), 166-170.

Even, R. (1989). *Prospective secondary mathematics teachers' knowledge and understanding about mathematical functions* (Tesis doctoral). Michigan State University, Estados Unidos.

Fernández-García, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Freudenthal, H. (1992). Variables and functions. En G. V. Barneveld y H. Krabbendam (Eds.), *Proceedings of conference on functions* (pp.7-20). Enschede, Países Bajos: National Institute for Curriculum Development.

Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. En A. Cuoco y F. Curcio. (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 yearbook* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria. Un estudio exploratorio* (trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, España.

Fujii, T. y Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 127-140). Reston, VA: NCTM.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebraización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Goldin, G. A. y Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of reprsentation in learning and doing mathematics. En L. P. Steffe, L. P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Goldin, G. A. y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical conceptos. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 yearbook* (pp. 1-21). Reston, VA: NCTM.

Harel, G. y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38-42.

Hewitt, D. (2019, febrero). "Never carry out any arithmetic": the importance of structure in developing algebraic thinking. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University y ERME.

Hidalgo, D. (2017). Proceso de generalización de estudaintes de 6º de Educación Primaria: respuestas inadecuadas, intervenciones y efectos (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, España.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 49-56). Bergen, Noruega: PME.

Isler, I., Blanton, M. L. y Murphy-Gardiner, A. (2014). A comparison of elementary and middle grades students' algebraic reasoning. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (p. 110). Vancouver, Canadá: PME.

Isler, I., Stephens, A. C., Gardiner, A., Knuth, E. y Blanton, M. L. (2013). Third-graders' generalizations about even numbers and odd numbers: The impact of an early algebra intervention. En M. Martinez y A. Superfine (Eds.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 140-143). Chicago, IL: PME.

Janvier, C., Girardon, C. y Morand, J. C. (1993). Mathematical symbols and representations. En P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom. High school mathematics* (pp. 79-102). Nueva York, NY: Macmillan.

Jones, I. y Pratt, D. (2012). A substituting meaning for the equals sign in arithmetic notation tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(1), 2-33.

Kaput, J. J. (1987). Towards a theory of symbol use in mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as meditors of constructive processes. En V. Glasersfeld (Ed.), *Radical construcitivs in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fenema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from a engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. y Blanton, M. L. (2005). Algebrafying the elementary mathematics experience in a teacher-centered, systematic way. En T. A. Romberg, T. P. Carpenter y F. Dremock (Eds.), *Understanding mathematics and science matters* (pp. 99-125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., Blanton, M. L. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Karp, A. (2014). *Leaders in mathematics education: Experience and vision*. Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Kelly, A. E. (2003). Theme issue: the role of design in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 3-4.

Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (2000). *Research design in mathematics and science education*. Nueva Jersey, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school trough college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 707-762). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to-12-year-olds, ICME-13* (pp. 70-105). Berlín, Alemania: Springer.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Fong, S. (2016). *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Nueva York, NY: Springer.

Kilpatrick, J. (2011). Commentary on part I. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 125-130). Berlín, Alemania: Springer.

Kilpatrick, J. e Izsák, A. (2008). A history of algebra in the school curriculum. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 3-18). Reston, VA: NCTM.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. R. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kim, H. y Son, J. (2018). Core mathematical teaching practices in algebraic and functional relations. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 211-218). Umeå, Sweden: PME.

Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (p.. 83-98). Dordrecht: Países Bajos: Kluwer.

Knuth, E. (2000). Student understanding of the cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 500-507.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, MI: University of Chicago Press.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). Londres, Reino Unido: John Murray.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258.

Lee, L. (1996). Initiation into algebraic culture: Generalization. En L. Lee (Ed.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Dordrecht, Países

Bajos: Kluwer.

Lesh, R. A., Behr, M. y Post, T. (1987). Rational numbers relations and proportions. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 173-196.

Lins, R. y Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer.

Lobato, J., Ellis, A. B. y Muñoz, R. (2003). How "focusing phenomena" in the instructional enviroment support individual students' generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 1-36.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, *7*(1), 69-85.

Malara, N. A. (2016). Early algebra y formación del profesorado: el caso del proyecto ARAL. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 45-69). Granada, España: Comares.

Martí, E. (2005). Las primeras funciones de las notaciones numéricas. Una mirada evolutiva. En M. Alvarado y B. M. Brizuela (Eds.), *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp. 51-80). DF, México: Paidós.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez-Echeverríal y E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 133-148). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Martí, E. y Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje*, *23*(90), 11-30.

Martinez, M. y Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(4), 285-298.

Marum, T., Isler, I., Stephens, A. C., Gardiner, A., Blanton, M. L. y Knuth, E. (2011). From specific value to variable: Developing students' abilities to represent unknowns. En L. R. Wiest y T. Lamberg (Eds.), *Proceedings of the 33rd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 106-112). Reno, NV: University of Nevada.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86).

Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. H., Grahamn, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. East Kilbride, Reino Unido: The Open University Press, Walton Hall, Milton Keynes.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277-289.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona, España: Ministerio de Educación y Ciencia/Labor.

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32.

Mata-Pereira, J. y y da Ponte, J. P. (2019, febrero). Enhancing students' generalizations: a case of abductive reasoning. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Mccallum, W., Menghini, M. y Neubrand, M. (2019). *The legacy of Felix Klein*. Cham, Suiza: Springer.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Eduación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2012a). *Matemática. Programa de estudio. Primer año básico*. Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2012b). *Matemática. Programa de estudio. Segundo año básico*. Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2012c). *Matemática. Programa de estudio. Tercer año básico*. Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2012d). *Matemática. Programa de estudio. Cuarto año básico*. Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el curriculo básico de la Educación Primaria* (Vol. 52, pp. 19349-19.420). Madrid, España: Autor.

Mitchelmore, M. y White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics*

Education Research Journal, *19*(2), 1-9.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *SUMA* 65, 7-15.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *La Gaceta de la RSME*, *17*(3), 559-579.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2016). *Memoria del proyecto de investigación I+D+i "Pensamiento funcional en Educación Primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización", con referencia EDU2016-75771-P*. Documento no publicado. Universidad de Granada, España.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez y I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruíz* (pp. 129-141). Granada, España: Atrio.

Molina, M., Ambrose, R. y del Río, A. (2016). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to-12-year-olds, ICME-13* (pp. 261-280). Hamburgo, Alemania: Springer.

Molina, M., Ambrose, R., Castro, E. y Castro, E. (2009). Breaking the addition addiction: Creating the conditions for knowing-to act in early algebra. En S. Lerman y B. Davis (Eds.), *Mathematical action & structures of noticing: Studies inspired by John Mason* (pp. 121-134). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, *29*(1), 75-88.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(6), 1137-1156.

Morales, R. (2018). *Resolución de tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos por estudiantes de 6-7 años* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional.

Enseñanza de las Ciencias, *36*(3), 59-78.

Moreno, A., Cañadas, M. C., Jaldo, P. y Bautista, A. (2016, julio). *Functional topics in grade 5 students' comparison of two linear functions*. Documento presentado al *13th International Congress on Mathematical Education* (ICME). Hamburgo, Alemania.

Morris, A. K. (1999). Developing concepts of mathematical structure: Pre-arithmetic reasoning versus extended arithmetic reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *21*(4), 44-72.

Morris, A. K. (2009). Representations that enable children to engage in deductve arguments. En D. A. Stylianou, M. L. Blanton y E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 87-101). Nueva Jersey, NY: Routdledge.

Moses, R. P. y Cobb, C. E. (2001). *Radical equations: Civil rights form Mississippi to the Algebra Project*. Boston, MA: Beacon Press.

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*(4), 441-465.

Moss, J. y McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Berlín, Alemania: Springer.

Moss, J., Beatty, R., Barkin, S. y Shillolo, G. (2008). What is your theory? What is your rule? Fourth graders build an understanding of functions through patterns and generalizing problems. En C. Greeno y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 155-168). Reston, VA: NCTM.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49.

Mulligan, J., Prescott, A. y Mitchelmore, M. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: the australian pattern and structure mathematics awareness project (PASMAP). En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 209-216). Praga, República Checa: PME.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers. (2010). Common core state standards for mathematics. Washington, DC: Council of Chief State School Officers. Recuperado de http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Oehrtman, M., Carlson, M. y Thompson, P. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. En M. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Özgün-Koca, S. A. (1998). Student's use of representation in mathematics education. Trabajo presentado en el *Annual meeting of he North American Chapter of the In-ternational Group for the Psuchology of Mathematics Education*. Raleigh, NC.

Paoletti, T., Stevens, I. E., Hobson, N. L., Moore, K. C. y LaForest, K. R. (2017). Inverse function: Pre-service teachers' techniques and meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(1), 93-109.

Papic, M., Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237-269.

Perkins, D. N. y Unger, C. (1994). A new look in representations for mathematics and science learning. *Instructional Science*, *22*(1), 1-37.

Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018a). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, *12*(3), 173-184.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018b). Structures and generalisation in a functional approach: the inverse function by fifth graders. 2018. En D. M. Gómez (Ed.), *Proceedings of the First PME Regional Conference: South America* (pp. 89-96). Rancagua, Chile: PME.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

Pinto, E., Brizuela, B. M. y Cañadas, M. C. (2019, febrero). Representational variation among elementary school students: A study within a functional approach to early algebra. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.),*The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University y ERME.

Pólya, G. (1957). *How to solve it*. Nueva Jersey, NY: Princeton University Press.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, España: Tecnos.

Prediger, S., Gravemeijer, K. y Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM Mathematics Education*, *47*(6), 877-891.

Radford, L. (1996) Sorne reflections on teaching algebra through generalization. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 107-11). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. Una perspective post-vigotskiana. *Educación Matemática*, *11*(3), 25-53.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A Semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5 - 12 year- olds. ICME 13 Monographs* (pp. 3-25). Berlín, Alemania: Springer.

Rau, M. A. y Matthews, P. G. (2017). How to make 'more' better? Principles for effective use of multiple representations to enhance students' learning about fractions. *ZDM Mathematics Education, 49*(4), 531-544.

Reed, K. (2001). Listen to their pictures: an investigation of children's mathematical drawings. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 yearbook* (pp. 215-227). Reston, VA: NCTM.

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990). *The psichology of mathematics for instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics. Pyschological and pedagogical considerations*. Nueva York, NY: Springer.

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Berlín, Alemania: Springer.

Romberg, T. A., Fennema, E. y Carpenter, T. P. (1993). *Integrating research on the graphical representation of functions*. Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización el álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74.

Russell, S., Schifter, D. y Bastable, V. (2011). *Connectiong arithmetic to algebra*. Portsmouth, NH: Heinamnn.

Sawrey, K. (2018). *Upper elementary students' connecting and interpreting function representations* (Tesis doctoral). Tufts University, Medford, Estados Unidos.

Sawrey, K., Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2015). Representaciones producidas por una alumna para interrumpir el flujo de una entrevista. *Estudios de Psicologia*, *36*(1), 185–192.

Scheuer, N., Sinclair, A., de Rivas, S. M. y Christinat, C. T. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y Aprendizaje*, *23*(90), 31-50.

Schifter, D., Bastable, V., Russell, S., Seyferth, L. y Riddle, M. (2008). Algebra in the grades k-5 classroom: Learning opportunities for students and teachers. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 263-278). Reston, VA.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. y Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 389-412). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Schliemann, A. D., Lins, M., Brito, L. y Siqueira, A. (2011). La comprensión de equivalencias en niños pequeños. En A. D. Schliemann, D. W. Carraher y B. M. Brizuela (Eds.), *El caracter aritmético del álgebra. Ideas para la sala de clases.* (pp. 47-72). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Schoenfeld, A. (1995). Report of working group 1. En C. B. Lacampagne, W. Blair y J. J. Kaput (Eds.), *The Algebra Initiative colloquium, volume 2: Working group papers* (pp. 11-12). Washington, DC: Departament of Education, Office of Educational Research and Improvement.

Schwartz, J. L. y Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function on and with algebra. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 261-289). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Selden, A. y Selden, J. (1992). Research perspectivas on onceptios of function. Summary and overview. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 1-21). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Skemp, R. R. (1986). *The psychology of learning mathematics*. Nueva York, NY: Penguin Books.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. En J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston, VA: NCTM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, M. L. Blanton y D. W. Carraher (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Soares, J., Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2006). Thinking algebraically across the elementary school curriculum. *Teaching Children Mathematics*, *2*(5), 228-235.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, España: SEIEM.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Stacey, K. y MacGregor, M. (1997). Building foundations for algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *2*(4), 252-260.

Stacey, K. y MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. En R. Lins (Ed.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141.153). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). Reston, VA: NCTM.

Stephens, A. C., Isler, I., Marum, T., Blanton, M. L., Knuth, E. y Gardiner, A. M. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. En L. R. van Zoest, J. J. Lo y J. L. Kratky (Eds), *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 821-828). Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Stephens, A., Fonger, N. Knuth, E., Strachota, S. e Isler, I. (2016). *Elementary students' generalization and representation of functional relationships: A learning progressions approach*. Documento presentedo al ICME 13 Conference.

Strachota, S. (2016). Conceptualizing generalization. *Open Mathematical Education Notes*, *6*, 41-55.

Teuscher, D., Palsky, K. y Palfreyman, C. Y. (2018). Inverse functions: Why switch the variable? *The Mathematics Teacher*, *111*(5), 374-381.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (vol. 4, 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, P. W. y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: NCTM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019, febrero). Structures identified by second graders in a teaching experiment in a functional approach to early algebra. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University y ERME.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019,). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 570-614.

van Dyke, F. (1996). The inverse of a function. *The Mathematics Teacher*, *89*(2), 121-126.

Vergel, R. y Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Vergnaud, G. (1987). Conclusion. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 227-232). Hillsdale, NJ: LEA.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. L. Chick y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. *4*, pp. 305-312). Melbourne, Australia: PME

Warren, E. A. y Cooper, T. J. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162.

Warren, E. A., Cooper, T. J. y Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebra reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 208-223.

Warren, E. y Cooper, T. J. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171-185.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 333–361.

Williams, S. R. (1993). Mathematics and being in the world: Toward an interpretative framework. *For the Learning of Mathematics*, *13*(2), 2-7.

Wilson, F. C., Adamson, S., Cox, T. y O'Bryan, A. (2011). Inverse functions: What our teachers didn't tell us. *The Mathematics Teacher*, *104*(7), 500-507.

Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function base approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics, 43*(2), 125-147.

Yerushalmy, M. y Schwartz, J. L. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. En T. A. Romberg, E. Fennema y T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 41-68). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ANEXOS

En el siguiente listado detallamos los anexos que forman parte de esta Tesis Doctoral.

- Anexo 1.A. Hojas de trabajo. Tercero.
- Anexo 1.B. Hojas de trabajo. Quinto.

- Anexo 2.A. Problemas usados en las entrevistas. Cuarto.
- Anexo 2.B. Problemas usados en las entrevistas. Sexto.

- Anexo 3.A. Transcripción sesión tercero.
- Anexo 3.B. Transcripción sesión quinto.

- Anexo 4.A. Hojas de trabajo. Respuestas de tercero.
- Anexo 4.B. Hojas de trabajo. Respuestas de quinto.

- Anexo 5.A. Respuestas de los ocho estudiantes de tercero a las sesiones.
- Anexo 5.B. Respuestas de los ocho estudiantes de quinto a las sesiones.

- Anexo 6.A. Transcripciones entrevistas. Cuarto.
- Anexo 6.B. Transcripciones entrevistas. Sexto.

- Anexo 7.A. Producciones escritas durante entrevistas. Cuarto.
- Anexo 7.B. Producciones escritas durante entrevistas. Sexto.

- Anexo 8. Análisis inicial de estudiantes para entrevistas.