Profesorado
Revista de currículum y formación del profesorado

VOL.25, Nº2 (Junio, 2021)
ISSN 1138-414X, ISSNe 1989-6395
DOI 10.30827/profesorado.v25i2.8725
Fecha de recepción: 15/02/2019
Fecha de aceptación:24/04/2020

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE LA PROPORCIONALIDAD EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Didactic-mathematical knowledge on proportionality in prospective elementary school teachers

*María **Burgos Navarro** y Juan D. **Godino***
Universidad de Granada
E-mail: mariaburgos@ugr.es; jgodino@ugr.es
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-4598-7684; https://orcid.org/0000-0001-8409-0258

Resumen:

En este trabajo se describe el diseño, implementación y análisis retrospectivo de una acción formativa con estudiantes del grado de Educación Primaria, cuyo objetivo es evaluar el conocimiento sobre proporcionalidad y el grado de desarrollo de dos aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático de dicho contenido: el análisis de objetos y significados puestos en juego en las prácticas matemáticas y el estudio de niveles de algebrización involucrados en distintas soluciones a problemas de proporcionalidad. La experiencia formativa se ha realizado con un grupo de 35 estudiantes en el marco de una asignatura sobre diseño y desarrollo del currículo en Educación Primaria en la cual se atribuye un papel relevante al trabajo en equipo. Los resultados indican que los conocimientos y competencias especializadas de los estudiantes sobre proporcionalidad presentan lagunas específicas que pueden dificultar la enseñanza del tema. Los estudiantes han logrado competencia para identificar el sistema de prácticas elementales en la resolución de las tareas y reconocer los niveles de algebrización puestos en juego. Pero se requiere mayor tiempo para que los estudiantes para maestro de primaria sean capaces de identificar los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y para enunciar variantes pertinentes de un problema dado.

Palabras clave: ***grado de Educación Primaria; formación de profesores; matemáticas; conocimiento didáctico***

Abstract:
This paper describes the design, implementation, and retrospective analysis of a formative action with primary school prospective teachers, whose objective is to evaluate the knowledge about proportionality and the degree of development of two relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of such content: the analysis of objects and meanings put into play in the mathematical practices and the study of algebraization levels involved in different solutions to proportionality tasks. The training experience has been carried out with a group of 35 students within the framework of a course on design and development of the curriculum in elementary grade-level in which a relevant role is attributed to team working. The results indicate that the students' specialized knowledge and competence on proportionality present specific gaps that may hinder the teaching of this subject. Students have achieved competence to identify the system of elementary practices in the resolution of tasks and recognize the levels of algebraization put into play there. However, more time is required for future teachers to be able to identify the different objects that intervene in mathematical practices and to enunciate meaningful variants of a given problem.

Keywords: ***primary Education Degree; teacher education; mathematics; didactic knowledge***

1. Introducción

El trabajo de los profesores es una práctica compleja que requiere una combinación de diferentes tipos de conocimientos, competencias y habilidades (Chapman, 2014). En este sentido y desde la investigación en educación matemática, se hace necesario diseñar e implementar experiencias formativas que permitan promover el crecimiento profesional y el desarrollo de conocimientos y competencias en el profesorado (Chapman, 2014; English, 2008; Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Ponte y Chapman, 2016; Sadler, 2013).

En el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Rubio, 2012; Seckel, 2016) se ha elaborado un modelo de categorías de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (modelo CCDM) del profesor de matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan, Assis y Castro, 2015) que puede orientar la formación de profesores de matemáticas. La creación de problemas, su solución por diversos métodos y el análisis de los conocimientos puestos en juego en los mismos, constituyen una parte esencial de las facetas epistémica y cognitiva de dicho modelo en tanto permiten al profesor, graduar la complejidad de las tareas que propone a sus estudiantes, comprender los conflictos de aprendizaje y gestionar la institucionalización de los conocimientos.

Diversas investigaciones y orientaciones curriculares proponen que el desarrollo del razonamiento algebraico sea un objetivo a lograr progresivamente desde la Educación Primaria, buscando organizar la enseñanza de la aritmética y el álgebra sin saltos ni rupturas (Aké, 2017; Carraher y Schliemann, 2007; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Radford, 2014; Socas, 2011). En este sentido, varios autores señalan la importancia del razonamiento proporcional en el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes (Lesh, Post y Behr, 1988; Butto y Rojano, 2010, Lim, 2009).

Sin embargo, como muestran diversas investigaciones, tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012; Berk, Taber, Gorowara y Poetzl, 2009; Fernández, Llinares y Valls, 2013; Rivas y Godino, 2010; Rivas, Godino y Castro, 2012; Thomson y Thomson, 1996). Con frecuencia los docentes relegan el desarrollo de una comprensión conceptual, centrando la atención en el aspecto operacional y justificando sus estrategias de resolución en problemas de proporcionalidad en argumentos procedimentales (Lamon, 2007; Riley, 2010; Post, Harel, Behr y Lesh, 1991).

Ben-Chaim et al. (2012) recurren en su investigación a tareas matemáticas para promover el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores en relación al razonamiento proporcional, planteando que los futuros profesores lean artículos didáctico-matemáticos sobre razón y proporción y contemplando el trabajo y discusión de resultados en grupo. Por otro lado, Berk y cols. (2009) analizan la capacidad de futuros maestros de emplear múltiples métodos para resolver problemas y escoger el más adecuado, concluyendo que los futuros maestros son poco flexibles para resolver el mismo problema usando diferentes estrategias.

Investigaciones como las de Buforn, Llinares y Fernández (2018), revelan limitaciones en la comprensión de los significados de razón y proporción de los futuros profesores a pesar de que conocieran y emplearan los procedimientos vinculados correctamente, proponiendo como objetivo potenciar en los programas de estudio la comprensión conceptual de las matemáticas escolares en los alumnos.

En Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino (2018) se describen los resultados de una acción formativa con estudiantes de un máster de profesorado de Educación Secundaria en el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. En dicha experiencia se perseguía analizar los conocimientos iniciales y evaluar el grado de desarrollo de la competencia de análisis epistémico sobre tareas de proporcionalidad. Los futuros profesores mostraron carencias tanto en el conocimiento común del contenido como en aspectos clave del conocimiento especializado que dejaban ver una concepción pobre y sesgada de la naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE).

Dada la vital importancia del papel del profesor para promover el razonamiento proporcional en las primeras etapas educativas, hemos realizado una intervención formativa con estudiantes del grado de educación primaria, focalizada en este contenido matemático, aplicando las herramientas del modelo CCDM y del modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática desarrollado en Godino et al. (2014). Bajo esta perspectiva, el objetivo de este trabajo es informar del diseño, implementación y resultados de dicha experiencia centrando la atención en:

- El desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas implicadas en la resolución de tareas de proporcionalidad, entendiendo que la identificación de la trama de objetos y relaciones que se ponen en juego en la resolución de situaciones-problema prototípicas permite desvelar la complejidad ontosemiótica de un objeto como factor explicativo de potenciales conflictos y dificultades de aprendizaje.

- El reconocimiento de niveles de algebrización involucrados en distintas soluciones, basado en la identificación de objetos y procesos algebraicos, permite identificar progresivos estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas y adaptar las tareas a las necesidades de los estudiantes por medio de variación de las mismas.

- La identificación de los errores y dificultades que los alumnos pueden presentar cuando aplican los conceptos y procedimientos en una determinada estrategia de resolución de las tareas propuestas.

El artículo se organiza como sigue. Después de esta introducción se incluye el marco teórico, el problema de investigación y la metodología empleada. A continuación, se presenta el estudio preliminar y después el diseño del proceso formativo. Posteriormente, se establecen los resultados de la investigación en términos de métodos de solución y niveles de algebrización, configuraciones ontosemióticas, asignación de nivel educativo y dificultades previstas, y enunciado de variantes de los problemas. El trabajo concluye con el análisis retrospectivo y las conclusiones.

2. Marco teórico, problema y metodología

En el marco del modelo CCDM (Godino et al., 2017; Pino-Fan et al., 2015) se acepta que el profesor debe tener *conocimiento matemático per se*, esto es *común* relativo al nivel educativo donde imparte su docencia, y *ampliado* que le permita articularlo con los niveles superiores. Además, a medida que se ponga en juego algún contenido matemático el profesor debe tener un *conocimiento didáctico-matemático* de las distintas facetas (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, mediacional e instruccional) que afectan el proceso educativo. Más específicamente, ante una tarea matemática determinada, el futuro maestro debe ser capaz de reconocer la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica). También debe poder resolver la tarea, utilizando distintos procedimientos y mostrando diversas justificaciones, así como debe ser competente para modificarla atendiendo a los conocimientos y dificultades de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva).

La faceta epistémica del modelo CCDM atiende al conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, en particular, al *conocimiento especializado* de la pluralidad de significados institucionales y su interconexión (competencia de análisis de significados globales) y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados para cada significado parcial (competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas).

En las prácticas matemáticas, entendidas como acciones realizadas por un sujeto para resolver un problema, participan y emergen distintos tipos de objetos matemáticos, los cuales según su naturaleza y función son clasificados en las siguientes categorías:

- Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- Conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones).
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos).
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- Argumentos (enunciados para justificar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

Estos objetos no aparecen de manera aislada, sino que están interconectados formando *configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos*. Así, las situaciones-problemas son la razón de ser de la actividad matemática; el lenguaje constituye el instrumento de trabajo matemático y representa las demás entidades; los argumentos fundamentan los procedimientos y las proposiciones que relacionan los conceptos matemáticos entre sí. En el marco del EOS, el uso de la herramienta *configuración ontosemiótica* implica el desarrollo de la subcompetencia de *análisis ontosemiótico,* que permite al docente secuenciar, describir y justificar tanto sus propias prácticas matemáticas como las desarrolladas por alumnos al resolver problemas.

El modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática de Godino et al. (2014) permite a los profesores conocer las características del RAE mediante el reconocimiento de objetos y procesos propios del mismo (Aké, 2013; Aké, 2017). Los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en los tipos de objetos (*conceptos, proposiciones, procedimientos* y a*rgumentos), t*ipo de representaciones usadas (lenguajes en sus diversos registros), procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente.

Así se establecen los distintos niveles:

- Nivel 0: indica ausencia de razonamiento algebraico, es decir, no se trabaja sobre conceptos y propiedades de índole estructural o funcional.
- Nivel 1: se comienzan a reconocer propiedades de las operaciones, también se reconoce el significado relacional del signo igual por lo que el concepto de equivalencia emerge. En el aspecto funcional se expresa una regla general.

- Nivel 2: en el aspecto estructural se comienzan a utilizar propiedades de las operaciones, se utiliza el significado relacional del signo igual, por lo que la noción de equivalencia interviene. En el aspecto funcional se expresa una regla general.

- Nivel 3: indica formas consolidadas de razonamiento algebraico, es decir, el uso de lenguaje simbólico-literal y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje.

En lo que refiere al estudio de la proporcionalidad en Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) se han identificado tres significados pragmáticos específicos de la proporcionalidad ligados a los niveles de algebrización que se ponen en juego en la solución de tareas que involucran la proporcionalidad directa de magnitudes: significado aritmético (nivel 0), proto-algebraico (niveles 1 y 2) y algebraico-funcional (nivel 3). Estos significados se complementan con un significado informal-cualitativo, centrado en la comparación perceptiva y la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas. Como señala Wilhelmi (2017) el significado global de la proporcionalidad que se sigue de los contextos de uso intramatemáticos (aritmético, algebraico, funcional, geométrico, probabilístico, estadístico) y extramatemáticos (ámbitos científico-técnico y artístico o vida cotidiana), debe permitir el necesario progreso en los sucesivos niveles de algebrización, desde una actividad puramente aritmética (nivel 0), propia de la Educación Primaria, hasta la consolidación algebraica (nivel 3), en los primeros años de la Educación Secundaria.

El problema de investigación que se documenta en este trabajo concierne al análisis y desarrollo del crecimiento profesional en los estudiantes para maestro de educación primaria sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas relativos al razonamiento proporcional y su imbricación con el razonamiento algebraico. En particular, en este trabajo describimos el diseño y evaluación de una acción formativa con estudiantes para maestro de educación primaria destinada a:

1. Desarrollar en ellos conocimientos y competencias didáctico-matemáticas sobre el razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico.

2. Fomentar la competencia de análisis ontosemiótico de objetos y procesos puestos en juego en las prácticas matemáticas en tareas de proporcionalidad.

Teniendo en cuenta el problema de investigación, la metodología seguida es la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado propuesto por Godino, et al. (2013). Esta interpretación, amplía su concepción tradicional (Artigue, 1989) en la dirección de las investigaciones basadas en el diseño (Cobb, Confrey, di Sessa, Lehrer, y Schauble, 2003), que recurre al diseño y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales, tratando que el diseño instruccional y la investigación sean interdependientes. En la ingeniería didáctica en el sentido generalizado de Godino, et al. (2013), se distinguen cuatro fases en la investigación:

1) Estudio preliminar en sus distintas facetas:

- epistémico-ecológica: conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, incluyendo los diversos significados de los objetos matemáticos implicados y los factores institucionales y curriculares.

- cognitivo-afectiva: implica el conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje y se analiza la sensibilidad del proceso a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores)

- instruccional: refiere al conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes.

2) Diseño del experimento. Supone la selección de tareas, secuenciación y análisis a priori de las mismas atendiendo a los comportamientos esperados de los alumnos.

3) Implementación. Observación de las interacciones entre personas y recursos y evaluación de los aprendizajes logrados.

4) Evaluación o análisis retrospectivo, derivado del contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación.

Se aplica también la metodología de análisis de contenido para examinar las respuestas de los estudiantes que intervinieron en la experiencia formativa.

3. Estudio preliminar

La proporcionalidad es un contenido longitudinal y transversal en el currículo tanto de educación primaria como de educación secundaria. En educación primaria aparece relacionada con los bloques de números, en el que se consideran los contenidos de proporcionalidad directa, la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad; geometría, en el que plantea el uso de escalas sencillas, ampliaciones y reducciones para hacer representaciones elementales en el espacio, así como en el bloque de educación audiovisual o expresión artística, en la que la proporción aparece como medida de equilibrio, orden y estética.

Desde el punto de vista del conocimiento matemático institucionalizado, la proporcionalidad ha sido estudiada desde tres puntos de vista: el aritmético, centrado en la noción de proporción, el algebraico, centrado en la noción de función y el geométrico, focalizado en la noción de semejanza. El razonamiento proporcional ha sido descrito por Lesh, Post y Behr (1988) como la consolidación del conocimiento aritmético en la escuela primaria y la cimentación del pensamiento algebraico en la escuela secundaria. Para estos autores, "el razonamiento proporcional involucra un sentido de covariación y de comparaciones múltiples en términos relativos, la habilidad para almacenar y procesar mentalmente varias piezas de información, así como también, la inferencia y predicción en situaciones de razonar, tanto de manera cualitativa como cuantitativa" (Lesh, et al., 1988, p. 93).

Diversos trabajos de investigación analizan las características del desarrollo del razonamiento proporcional desde la educación primaria hasta la educación secundaria, muestran que los estudiantes de distintos niveles educativos encuentran problemas al afrontar situaciones de proporcionalidad: la relación entre los números involucrados, el uso de razones enteras y no enteras, las unidades de las magnitudes que aparecen en la situación, el formato en que se presenta la tarea o la familiaridad del contenido, entre otros (Fernández y Llinares, 2011; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Turnaire y Pulos, 1985; Van Dooren, De Bock, Gillard y Verschaffel, 2009).

Para afrontar estas dificultades, se propone anticipar una aproximación intuitiva-cualitativa de estructura aditiva al concepto de razón y proporción, previa a su formalización y algoritmización, que recomiendan las múltiples investigaciones en el área (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Cramer y Post, 1993; Ruiz y Valdemoros, 2004; Streefland, 1985). Esto supone que, el profesor debe ser capaz de enseñar las diferentes formas de razonamiento que se pueden aplicar en situaciones de proporcionalidad y no limitarse a la aplicación de la regla de tres, de forma que su alumno pueda adquirir una comprensión profunda sobre las ideas fundamentales que rodean a la proporcionalidad y sus diferentes enfoques.

4. Diseño del proceso formativo

La experiencia formativa se realizó en el marco de la asignatura de Diseño y Desarrollo del currículum de Matemáticas en la Educación Primaria durante el año lectivo 2016-2017, con un grupo de 35 estudiantes de tercer curso del grado de Educación Primaria. Los estudiantes trabajaron en grupos (5 grupos de 4 estudiantes y 3 grupos de 5 estudiantes) siguiendo la distribución habitual de las clases prácticas de la asignatura.

El estudio de razón y proporción es uno de los contenidos de la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria que los estudiantes habían cursado en el primer curso de su formación de grado. Se asume que los alumnos al acabar este curso, conocen y relacionan entre sí los principales conceptos, propiedades y procedimientos que conforman los temas de las matemáticas escolares de Educación Primaria, analizando, razonando y comunicando de forma eficaz argumentaciones matemáticas. Así mismo, al acabar su primer curso, los estudiantes para maestro deben ser capaces de enunciar, formular y resolver problemas matemáticos mediante diferentes estrategias en una variedad de situaciones y contextos. En la asignatura de segundo curso, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria, los alumnos recibieron formación específica sobre fundamentos de la didáctica de las Matemáticas, concretada en: aspectos cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades) y didácticos (tareas y actividades, materiales y recursos). Finalmente, en la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en la Educación Primaria, los estudiantes deben profundizar y aplicar el conocimiento adquirido en los cursos previos para, entre otras cosas, diseñar y secuenciar tareas matemáticas de acuerdo a unos contenidos específicos y a determinadas expectativas de aprendizaje.

Los objetivos que se perseguía con la intervención son los siguientes:

1. Reflexionar y profundizar sobre las características del Razonamiento Algebraico en Primaria.
2. Distinguir tipos de objetos y procesos algebraicos en tareas matemáticas escolares.
3. Asignar niveles de razonamiento algebraico a la actividad matemática realizada al resolver tareas escolares.
4. Detectar posibles conflictos en las estrategias propuestas.
5. Diseñar tareas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

En primer lugar se llevó a cabo un taller de 2 horas de duración en el que se presentó las características del RAE, y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática de Godino et al. (2014).

En la siguiente sesión (también de 2 horas de duración), los alumnos debían trabajar en equipos para responder a las siguientes consignas:

1. Resolver las siguientes tareas matemáticas propias de primaria de varias maneras, incluyendo las estrategias que pensáis que usarían vuestros alumnos para resolver el problema.

Problema 1:
Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl.
1) Si el reparto se hace según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño?
2) ¿Cómo se produciría el reparto si la razón fuese 2:4?

Problema 2:
1) Si la longitud de la circunferencia delantera (grande) de la bicicleta es 462 cm y la de la trasera (pequeña) es de 132 cm, ¿qué distancia debe recorrer la bicicleta para que la rueda pequeña de 30 vueltas más que la grande.
2) Encuentra una explicación matemática del movimiento de la bicicleta. ¿Cómo lo explicarías a tus estudiantes?

Figura 1. Tareas propuestas a los alumnos (inspiradas en Ben-Chaim et al.; 2012)

2. Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones, enumerando la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

3. Discutir las distintas estrategias empleadas para resolver el problema, planteando para qué curso creéis que serían apropiadas y qué dificultades pueden observarse en la resolución del problema usando cada estrategia (para ello observad las prácticas, objetos y procesos identificados potencialmente conflictivos para los alumnos).

4. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

5. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

Finalmente se discutieron los resultados y se procedió a la extracción de conclusiones.

El trabajo en grupo permite a los alumnos comparar y enriquecer sus propuestas de diversas estrategias para resolver los problemas, situándose como docente y como discente a la hora de identificar las posibles dificultades en las mismas. En la instrucción previa que han recibido los estudiantes, se les ha explicado los distintos elementos que aparecen referidos en las consignas. En particular, junto con las diapositivas de clase empleadas en la primera sesión formativa sobre RAE, en la que se resolvieron tareas matemáticas escolares por distintos procedimientos, identificando los objetos y asignando niveles de algebrización a las prácticas, y que estaban disponibles en la plataforma informática *Prado* de apoyo a la docencia, se les facilitó un ejemplo completamente resuelto del análisis que se esperaba que realizasen. Los estudiantes para maestro deben resolver los dos problemas propuestos de varias maneras, considerando aquellas que podrían emplear sus alumnos. La elaboración de la configuración de objetos y procesos supone analizar los conocimientos matemáticos involucrados en la actividad desarrollada en las soluciones propuestas a los problemas. Estas soluciones y sus redes de objetos implicados pueden presentar ciertas dificultades para unos posibles alumnos, intrínsecas a la propia actividad y se espera que los estudiantes para maestro las analicen teniendo en cuenta los objetos y procesos matemáticos que se ponen en juego. La asignación de los niveles de algebrización a las soluciones, requiere reflexionar sobre el carácter algebraico de estas (el lenguaje, el grado de generalidad de los objetos implicados y las transformaciones que se realizan con ellos). Finalmente, todo este análisis debe permitir al estudiante para maestro crear nuevos problemas cuya resolución implique previsibles cambios en los niveles de algebrización.

El análisis a priori de la tarea propuesta en el problema 1 (apartado 1) puede consultarse en Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino (2018). La inclusión del segundo apartado responde a la necesidad de indagar sobre el conocimiento de la razón y de sus propiedades, dado que en este caso, el reparto no se hace de forma completa. En Burgos y Godino (2018) se incluye un análisis a priori del segundo problema.

En la Tabla 1 se resumen los tipos de conocimientos implicados en cada una de las tareas propuestas a los estudiantes.

Tabla 1

Consignas y tipos de conocimiento implicados

Consigna	Tipo de conocimiento	Intencionalidad
1. Resolver la tarea Problema 1	Común	Identificar conocimiento o carencias sobre razón y proporcionalidad
Problema 2 Ítem 1)	Ampliado	Comprobar si los alumnos distinguen situaciones de proporcionalidad directa e indirecta
Ítem 2)	Didáctico-matemático	Promover la argumentación y justificación matemática
Resolver la tarea de varias m enaneras, incluyendo las estrategias que usarían los alumnos de primaria		Promover la flexibilidad de resolución y la capacidad de adaptación al nivel educativo pertinente
2. Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones, enumerando la secuencia de prácticas		Desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico en tareas de proporcionalidad
3. Discutir para qué curso serían apropiadas las distintas estrategias empleadas.		Desarrollar la faceta ecológica del CCDM
Discutir las dificultades que pueden observarse en la resolución del problema usando cada estrategia.		Desarrollo de la faceta cognitiva del CCDM
4. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones		Profundizar en la faceta epistémica del CCDM analizando RAE en las tareas de proporcionalidad
5. Enunciar tareas relacionadas		Contribuir a la faceta instruccional impulsando la creación-variación de problemas atendiendo a los significados involucrados

5. Resultados

En la tarea que se ha planteado a los estudiantes para maestro de primaria, se espera que éstos resuelvan los problemas y que una vez identificados los conocimientos puestos en juego, analicen las posibles dificultades que presenta cada estrategia planteada y asignen los niveles de razonamiento algebraico implicados. Así mismo, se les pide que enuncien variantes de la tarea que impliquen cambios en los niveles de algebrización.

5.1 Métodos de solución y niveles de algebrización

Como señalan Buforn et al. (2018) es importante promover en los futuros profesores la flexibilidad en el uso de múltiples métodos para resolver los problemas que involucran relaciones de proporcionalidad y desarrollar la comprensión de los componentes conceptuales, proposicionales y argumentativos del razonamiento proporcional.

5.1.1 Problema 1

El primer problema requiere de un conocimiento común de los estudiantes para maestro sobre razón y proporcionalidad. Todos los grupos de trabajo elaboraron 2 soluciones distintas al problema. La respuesta al apartado 1 fue correcta en al menos una de las soluciones propuestas. Respecto al apartado 2, seis de los ocho grupos respondieron de forma inadecuada.

A continuación describimos las estrategias de resolución presentes en las respuestas de los grupos de alumnos:

- Aritmética aditiva (Nivel 0 de algebrización). Un ejemplo de esta estrategia viene descrita por la respuesta del grupo 6:

  1) 3+5=8; 8+3+5 =16; 16+3+5=24; 24+3+5=32; 32+3+5 =40 → Juan= 3+3+3+3+3=15 canicas y Saúl= 5+5+5+5+5=25 canicas.

  2) Si utilizamos la misma fórmula de hacer, no se podría resolver, ya que en 36 canicas se acabaría el reparto: 2+4 =6; 6+2+4 =12; 12+2+4 = 8; 18+2+4 = 24; 24+2+4 =30; 30+2 +4=36; 36+2+4=42 ← ¡NO SE PUEDE REPARTIR A PARTIR DE 36! → Juan=2+2+2+2+2+2= 12 canicas y Saúl= 4+4+4+4+4+4= 24 canicas.

- Aritmética división por la razón (nivel 0 de algebrización). La solución propuesta por el grupo 7 se incluye en esta categoría:

Sabemos que el reparto es 3:5, por tanto de cada 8 canicas, 3 son para Juan y 5 para Saúl. Y en el caso del reparto de 2:4, de cada 6 canicas, 2 son para Juan y 4 para Saúl. Como sabemos que cada reparto es la suma de cada relación y el límite es

40, dividimos las canicas entre el número de repartos. Realizamos la multiplicación del número de repartos por el número de canicas en cada uno.

Razón 3:5 40:8=5 Juan 3×5=15, Saúl 5×5=15

Razón 2:4 40:6=6 (sobran 4) Juan 2×6=12, Saúl 4×6=24

- Proto-algebraica parte-todo (nivel 1 de algebrización). Como ejemplo, se tiene la respuesta del grupo 3:

  1) Por la razón 3:5, Juan recibirá 3/8. 3/8×40=15 canicas para Juan. Si 15 canicas son para Juan 40-15=25 son para Saúl.

  2) Por la razón 2:4, Juan recibe 2/6 de 36 canicas. 2/6×36=12 canicas para Juan; Saúl recibe 4/6 de 36 canicas. 2/6×36=24 canicas para Juan.

- Algebraica-formal (nivel 3 de algebrización). Un ejemplo de esta estrategia corresponde a la seguida por el grupo 4:

  1) Se resuelve mediante un sistema de ecuaciones, donde x son las canicas de Juan y *la incógnita y corresponde con las de Saúl.*

  Ecuación 1: $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$

  Ecuación 2: $x + y = 40$

  Al despejar las ecuaciones y sustituir nos da como resultado y=25, x=15.

  2) Se resuelve mediante un sistema de ecuaciones, donde x son las canicas de Juan y la incógnita y corresponde con las de Saúl.

  Ecuación 1: $\frac{x}{y} = \frac{2}{4}$

  Ecuación 2: $x + y = 40$

  Al despejar las ecuaciones y sustituir nos da como resultado y=26,6, x=13,4. Al ser un número decimal tenemos que entender que sobran canicas que no entrarán en las bolsas de cada uno.

La estrategia aditiva fue empleada por 5 grupos. De ellos 4 identificaron correctamente el nivel de algebrización de la solución. La estrategia de división por la razón fue usada por la mitad de los grupos y todos identificaron apropiadamente el nivel de algebrización si bien no todos justificaron su decisión. Cuando lo hacen, refieren, de forma similar al grupo 5 que “el significado aritmético se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritmético”. En el caso de la estrategia parte-todo, empleada por 4 grupos, tres de ellos asignaron (sin justificar) adecuadamente su nivel y uno no respondió a esta cuestión. Finalmente, tres grupos incluyeron una estrategia de solución de tipo formal, y en este caso, sólo un grupo asignó apropiadamente el nivel de algebrización en base a las transformaciones realizadas en la solución (los otros asignaron un nivel inferior al correcto).

Los conflictos mostrados por los estudiantes muestran un conocimiento común deficiente del objeto razón y de sus propiedades. Esto se pone especialmente de manifiesto en la resolución del apartado 2 del problema, que en su mayoría fue poco o nada pertinente. Cuando los estudiantes para maestro emplean una estrategia aritmética, aditiva o de división por la razón, dado que en 40 canicas encuentran 6 grupos de 6 canicas y sobran 4, concluyen que Juan recibirá 12=6×2 canicas, Saúl 24=6×4, y quedarán 4 sin repartir. El grupo 1 propone: “para que no sobre ninguna canica las repartiríamos todas, dándole a cada uno dos canicas”, lo que contradice la razón de reparto 2:4, o equivalentemente, 1:2, que implica que Saúl reciba el doble de canicas que Juan, de manera que de las 4 canicas restantes de los 6 repartos, 1 debería ser para Juan y 2 deberían ser para Saúl. En el caso de seguir una estrategia de tipo proto-algebraica, Juan recibe 2/6 del total de canicas y Saúl 4/6 de las mismas, es decir, de 40 y no de 36 como propone el grupo 3. Dado que $2/6 \times 40 = 13,\overline{3}$, Juan recibe 13 canicas y por tanto Saúl 26, sobrando una.

Este conocimiento deficiente de la razón y de fracción se pone de manifiesto en la solución propuesta por el grupo 2 incluida en el Cuadro 1.

Se reparten 8 canicas cada vez (ya que se suma la razón 3:5), por cada 3 canicas que Juan recibe a Saúl le corresponden 5 (3 canicas de Juan + 5 canicas de Saúl = 8 canicas que se deben repartir cada vez). Se tienen que repartir 40 canicas, por lo que se va a repartir 5 veces (8 canicas cada vez x 5 veces = 40 canicas a repartir en total y la fracción que representa el total es 40/8).
Juan: 3/8 de canicas× 5/1 veces = 15/8 es la fracción de canicas que le corresponde.
Saúl: 5/8 de canicas × 5/1 veces = 25/8 es la fracción de canicas que le corresponde.

Cuadro 1. Conocimiento deficiente de razón y fracción (Grupo 2)

5.1.2 Problema 2

Con esta tarea se pretende evaluar el conocimiento ampliado de los estudiantes sobre proporcionalidad inversa. Éste es un contenido que no se contempla en el currículum de educación primaria, sino que se reserva para primer ciclo de educación secundaria. Sin embargo, es importante que los estudiantes para maestro de primaria distingan este tipo de situaciones y puedan plantear soluciones sin recurrir a la regla de tres inversa.

Todos los grupos resolvieron esta tarea y todos de forma correcta salvo uno de ellos que interpretó mal el enunciado. Además, 5 grupos propusieron al menos dos soluciones distintas y correctas al apartado 1). Las estrategias de resolución presentes en las respuestas de los grupos de alumnos:

- Aritmética (nivel 0 de algebrización). Un ejemplo de esta estrategia viene descrita por la respuesta del grupo 2:

Para que salga exacto, lo primero que haremos será calcular qué distancia recorre la rueda grande cada dos vueltas y cuántas vueltas suponen, por lo tanto:

- *462 x 2= 924 cm*
- *924 : 132= 7 vueltas por cada dos que da la grande.*

Si lo que nos pide el problema es saber qué distancia debe recorrer la bicicleta para que la rueda pequeña de 30 vueltas más que la rueda grande y sabiendo tras los cálculos realizados anteriormente que por cada dos vueltas de la grande la pequeña da 5 vueltas más, sabemos que la rueda grande debe dar 12 vueltas:

- *12 x 462= 5544 cm debe recorrer la bicicleta*

- Proto-algebraica (nivel 1 de algebrización). En este caso, se obtiene el número de vueltas que da la rueda pequeña por cada vuelta que da la rueda grande y se genera una sucesión (recogida a modo de tabla en las producciones de los grupos) con el número de vueltas que da la una y la otra hasta escoger los valores que corresponden a una diferencia de 30 vueltas. Tal es el caso de la solución propuesta por el grupo 4:

La razón es 462:132=3,5

R Gran	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	***12***
R Peq	*3,5*	*7*	*10,5*	*14*	*17,5*	*21*	*24,5*	*28*	*31,5*	*35*	*38,5*	***42***

Rueda grande=12×462=5544cm

- Proto-algebraica (nivel 2 de algebrización). Un ejemplo de esta estrategia viene descrita por la respuesta del grupo 3:

Si por cada vuelta de la rueda grande (462 cm) la pequeña da 3 vueltas y media (462:132=3,5), nos sobran 2 vueltas y media de la pequeña:

$$1 \to 2{,}5$$

$$x \to 30$$

$$2{,}5x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{2{,}5} = 12 \text{ vueltas da la grande}$$

$$12 \times 462 = 5544\ cm$$

- Algebraica (nivel 3 de algebrización) Este tipo de estrategia aparece en la segunda solución propuesta por el grupo 2:

Para saber la distancia que recorre la rueda grande cada dos vueltas, se establece una proporción que es la siguiente: 462x = 132y de forma que 30 + x = y;

siendo x el número de vueltas que da la rueda grande e y el número de vueltas que da la rueda pequeña. Por tanto, procedemos a despejar la incógnita "x":

462x = 1132 (30+x)
462x= 3960 + 132 x
462x – 132x= 3960
330x = 3960
x= 3960: 330
x= 12

Por tanto la bicicleta debe recorrer $12 \times 462 = 5544\ cm$

Las estrategias más empleadas fueron la aritmética y la algebraica, ambas por un total de 5 grupos. Todos ellos asignaron correctamente el nivel de algebrización en el caso de ser 0, mientras que dos asignaron incorrectamente el nivel 2 de algebrización a la solución de tipo algebraico propuesta. Las estrategias de tipo proto-algebraica (de nivel 1 y de nivel 2) ejemplificadas fueron empleadas por dos grupos (ambas) siendo en cada caso correcto el nivel de algebrización propuesto por los alumnos. Como en el problema 1, los estudiantes en su mayoría no justificaron el nivel asignado; en caso de hacerlo, se hacía referencia al tipo de transformaciones y al lenguaje empleado.

Observamos que los estudiantes mostraron menor flexibilidad para resolver este problema por más de un método y que algunos emplearon estrategias de nivel 3 de algebrización que podrían no estar adaptadas a alumnos de primaria. Por otro lado, los estudiantes consiguen diferenciar distintos grados de razonamiento algebraico en las estrategias que proponen, sin embargo no han logrado la competencia suficiente para justificar el nivel de algebrización en base a los objetos y procesos involucrados en las prácticas.

En el segundo apartado de este problema los estudiantes para maestro debían encontrar una explicación matemática del movimiento de la bicicleta que les permitiera explicárselo a sus estudiantes. Un grupo no respondió a este apartado y cuatro lo hicieron de forma poco o nada pertinente aludiendo a explicaciones físicas (descripción del movimiento circular uniforme de la rueda). Los restantes realizaron explicaciones de tipo matemático, aunque informal como aparece recogida en el Cuadro 2 y un grupo desarrolló una explicación en la que explícitamente reconoce la relación de proporcionalidad inversa dentro de su argumentación (Cuadro 3).

Este problema se lo podríamos explicar a los alumnos haciendo una similitud entre las bicicletas y dos personas. Una de ellas sería más alta, simbolizando a la rueda grande, la otra sería una persona pequeña simbolizando a la rueda pequeña. Si la persona bajita quisiese andar la misma distancia que la alta debe dar más pasos pues su zancada es menor.	*La bicicleta se trata de un sólido rígido por lo que las dos ruedas recorrerán el mismo recorrido siempre, esto será una proporcionalidad directa, puesto que a más vueltas, mayor recorrido.* *La diferencia está en el tamaño de cada rueda, por lo que el número de vueltas sí será diferente en cada una de ellas. Esto sería, sin embargo, una proporcionalidad indirecta, porque a más vueltas que dé la rueda mayor, más aún dará la pequeña (3,5 vueltas más)*

Cuadro 2. Explicación del movimiento de la bicicleta del grupo 7.

Cuadro 3. Explicación del movimiento de la bicicleta del grupo 8.

En la explicación ofrecida por el grupo 8 que vemos en el Cuadro 3 se reconoce una característica de la relación de proporcionalidad directa entre el número de vueltas de las ruedas y la distancia: a más vueltas, mayor recorrido. Por otro lado la diferencia de tamaño entre las ruedas, justifica la relación de proporcionalidad inversa entre el número de vueltas que dan éstas a igualdad de distancia recorrida.

5.2 Configuraciones ontosemióticas

En general, los estudiantes para maestro no tuvieron demasiadas dificultades para realizar la secuenciación de las prácticas elementales (salvo un grupo que no hizo las configuraciones ontosemióticas, 6 grupos hicieron una secuenciación muy pertinente en ambos problemas y uno lo hizo de forma muy esquemática). Sí fue conflictivo, de manera general, distinguir los objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) involucrados en las prácticas. La mayoría sólo identifican conceptos, frecuentemente *reparto, doble, mitad, fracción, razón de cantidades*, en el primer problema y *vuelta, recorrido, distancia, longitud, circunferencia* en el segundo. Sólo dos grupos identifican el concepto *proporcionalidad* en el problema del reparto de canicas.

Los estudiantes presentan graves conflictos a la hora de describir las proposiciones y argumentos, siendo frecuente que confundan ambos objetos con el uso o intencionalidad de la práctica referida (Cuadros 4, 5, 6 y 7). No obstante, en el segundo problema identifica de forma más apropiada proposiciones o argumentos que recaen en la relación de proporcionalidad. Así, por ejemplo, el grupo 8 identifica como argumentos “se cumple la proporcionalidad directa vuelta-centímetros recorridos” así como “la relación es de proporcionalidad indirecta: siempre la pequeña dará más vueltas que la grande por tener menos longitud”.

Proposición P4: Calcular las canicas de Saúl a partir de las totales y las de Juan.	*Proposición: intentamos averiguar el momento en el que la diferencia* [de vueltas] *es 30*

Cuadro 4. Proposición identificada de forma errónea por el grupo 8

Cuadro 5. Ejemplo incorrecto de proposición identificada por el grupo 7

Argumento: se restan las canicas totales de Juan a las totales para conocer que Saúl tiene 25 canicas.	*Argumento: solución de la ecuación*

Cuadro 6. Argumento no pertinente en la configuración del grupo 8

Cuadro 7. Argumento identificado de forma incorrecta por el grupo 4

En general, los estudiantes no reconocen más procedimientos que los de tipo aritmético y muestran dificultades en la justificación del uso que se pretende con la práctica textualizada involucrada.

5.3 Asignación de nivel educativo y dificultades previstas

Se espera que los estudiantes para maestro conozcan la diversidad de formas con las que el estudiante puede comprender el contenido y los conflictos que pueden presentar la aplicación de conceptos y procedimientos en la resolución de las tareas de proporcionalidad propuestas. El conocimiento de las dificultades de aprendizaje de los objetos matemáticos involucrados, sirve de soporte para diseñar y gestionar tareas que refuercen determinados conceptos o procedimientos, adaptando las tareas a las finalidades.

Sólo la mitad de los grupos argumentaron para qué curso serían apropiadas las distintas estrategias que habían empleado así como las dificultades que podrían plantearse a sus alumnos en la resolución de los problemas tratados de forma conjunta. Los grupos que respondieron a esta consigna consideraron (para ambos problemas) que las estrategias de tipo aritmético son adecuadas para 2º ciclo de primaria, reservando la estrategia proto-algebraica para 5º de educación primaria y la de tipo algebraico para 6º curso. En el caso del problema 1, los estudiantes consideran como posibles dificultades en cada estrategia el conocimiento y uso del concepto razón, así como que el reparto en apartado 2 “no sea exacto”. Por otro lado, piensan que sus alumnos no deben tener dificultades operacionales en la estrategia aditiva (“los alumnos saben sumar, restar, multiplicar y dividir”) pero reconocen que podrían tenerlas al tratar con fracciones en la estrategia división por la razón. Uno de los grupos que propone la solución de tipo algebraica formal señala también como dificultad posible el uso del simbolismo algebraico asociado a este mayor nivel de algebrización, argumentando que “los alumnos podrían tener dificultad en la resolución de la ecuación al despejar la incógnita ya que en primaria no se profundiza aún demasiado en las ecuaciones con incógnitas”. Por otro lado, un par de grupos señala dificultades “a la hora de comprender la relación entre la rueda pequeña y la rueda grande” y de “comprender los conceptos de proporcionalidad directa e indirecta” en el problema 2.

En este sentido, es importante mencionar que en el segundo problema, ningún grupo usó la regla de tres inversa para resolverlo, adaptando bien las estrategias al nivel educativo de primaria.

5.4 Enunciado de variantes del problema

Diversas investigaciones sobre la creación de problemas de matemáticas con propósitos didácticos relacionan esta tarea con las competencias docentes (Malaspina, Mallart y Font, 2015; Silver, 2013). Los estudiantes para maestro deben comprender que crear problemas es parte fundamental de la tarea del docente. Como señala Malaspina (2017), cada profesor conoce la realidad específica en su aula y es un desafío a sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, crear apropiadamente problemas que requieran soluciones específicas para esa realidad. Se trata pues de desarrollar en los futuros maestros la competencia para crear problemas matemáticos y reflexionar sobre sus aspectos didácticos (Malaspina, Mallart y Font, 2015). "La creación de problemas proporciona oportunidades para que las dos competencias (matemática y didáctica) interactúen de manera creativa" (p. 2865).

En la creación de problemas por variación de un problema dado se construye un nuevo problema, modificando uno o más de los cuatro elementos del problema inicial, pero no todos (Malaspina, 2017). Estos elementos son: información (datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema), requerimiento (lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones, contexto (intra matemático o extra matemático) y el entorno matemático: el contenido matemático en el que se incluyen los objetos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema, por ejemplo, proporcionalidad).

En general, los estudiantes que participaron en nuestro estudio mostraron dificultades para elaborar variantes del problema inicial, considerando que se trataba de inventar un problema con un cierto nivel de algebrización pero que no tenía que guardar ninguna relación con los enunciados propuestos. De ahí que no se distinguieran enunciados para cada una de las situaciones planteadas (reparto proporcional y proporcionalidad inversa).

Sólo cinco grupos respondieron a esta consigna y tan sólo uno de ellos planteó tareas (dos tareas para cada problema inicial) que se pueden considerar pertinentes (véanse los cuadros 8 y 9). En ellas se modificaba la información y requerimiento inicial cambiando el nivel de algebrización esperable respecto de las soluciones que habían facilitado antes.

Si Juan tiene 25 canicas y la razón de reparto es 3:5, ¿cuántas canicas recibió Saúl? ¿Y cuántas se han repartido en total?	*Sabiendo que la razón entre una rueda y otra es de 3,5 y que sumando las longitudes de las circunferencias suman 594 cm, calcula la longitud de cada una de ellas*
Cuadro 8. Enunciado propuesto por el grupo 7 con nivel asignado de algebrización 2.	*Cuadro 9.* Enunciado propuesto por el grupo 7 con nivel asignado de algebrización 3.

Las demás, no se podían considerar variaciones del enunciado dado que no guardaban ninguna conexión con el propuesto inicialmente y se proponían de forma conjunta para ambos problemas.

6. Análisis retrospectivo. Conclusiones

En este trabajo hemos descrito el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa con 35 estudiantes de tercer curso del grado de educación primaria destinada a analizar y promover su crecimiento profesional sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas relativos al razonamiento proporcional y su imbricación con el razonamiento algebraico. En concreto, hemos centrado la atención en el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas involucradas en la resolución de tareas de proporcionalidad, el reconocimiento de los niveles de algebrización puestos en juego, la creación de problemas por variación y la identificación de posibles dificultades que pueden encontrar los alumnos ante determinada estrategia de resolución.

El reconocimiento de los diversos tipos de significados del objeto proporcionalidad (aritmético, proto-algebraico y algebraico) en base al nivel de algebrización de la práctica matemática en que aparece imbricado debería ser una competencia del profesor de matemáticas. Esta le permitiría identificar los niveles de complejidad y competencia matemática en sus estudiantes y promover el desarrollo del razonamiento proporcional desde la educación primaria. En general, los estudiantes que participaron en nuestra investigación, diferenciaron de forma pertinente el nivel de algebrización en las prácticas de carácter aritmético o proto-algebraico, pero sus justificaciones suelen restringirse a los tipos de cálculo o el lenguaje empleado. La formación recibida por los estudiantes para maestro durante el grado no es suficiente para comprender la naturaleza compleja de los objetos matemáticos.

Hemos observado que los estudiantes encuentran más dificultades para detectar objetos y procesos potencialmente conflictivos en sus soluciones que para resolver las tareas. Si bien reservan las estrategias de resolución de un nivel superior de algebrización al último curso de educación primaria (donde se contempla según el currículum el estudio de la regla de tres), no suelen distinguir más dificultades que las de tipo operacional o con el simbolismo algebraico. Esto puede venir motivado por un conocimiento limitado sobre razón y proporción y una escasa exposición a la identificación de los errores de alumnos.

Cuando los estudiantes para maestro señalan los potenciales conflictos que creen que pueden tener sus alumnos revelan sus propias dificultades al resolver la situación-problema analizada (como hemos podido comprobar en el problema del reparto de canicas en la razón 2:4). Por otro lado, reconocer los errores y dificultades que los alumnos pueden presentar cuando aplican los conceptos y procedimientos en una determinada estrategia de resolución de las tareas propuestas, dota a los estudiantes para maestro de criterios con los que adaptar las tareas a las finalidades de aprendizaje y de seleccionar las estrategias más adecuadas al mismo, logrando procesos de estudio con mayor idoneidad cognitiva.

Los resultados obtenidos en la intervención formativa con estudiantes del grado de primaria son mejores que los obtenidos previamente con estudiantes del máster de secundaria, descritos en Burgos et al. (2017) y Burgos et al. (2018), en relación a la secuenciación de prácticas en unidades elementales de análisis y el reconocimiento de los distintos niveles de algebrización puestos en juego. Además, los estudiantes que participaron en nuestro estudio, trabajando de manera colaborativa, lograron elaborar diversas soluciones a un problema, adaptando bien las estrategias al nivel educativo de primaria, algo que en el caso de los estudiantes del máster de secundaria fue más limitado. Sin embargo, observamos también que la acción formativa implementada no ha sido suficiente para lograr que los estudiantes para maestro sean capaces de identificar y reflexionar sobre los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y de formular variantes pertinentes de un problema dado. Crear nuevos problemas a partir de las situaciones dadas, de manera que su estrategia de resolución lleve asociado un cambio en el nivel de algebrización, ha supuesto una gran limitación.

Un aspecto novedoso de nuestro diseño es que basa el análisis de la actividad matemática sobre el carácter algebraico de las prácticas y así vincula explícitamente el razonamiento proporcional con el algebraico, permitiendo la reflexión de los estudiantes para maestro sobre sus características. Este vínculo se plantea en lo epistémico (en el desarrollo de las configuraciones ontosemióticas y en el estudio de los niveles de algebrización) en lo cognitivo (al analizar las previsibles dificultades en términos de estos objetos matemáticos involucrados en las tareas de proporcionalidad) y en lo instruccional (al elaborar nuevos problemas que impliquen nuevos objetos y procesos algebraicos).

Referencias bibliográficas

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf

Aké, L. P. (2017). El modelo de niveles de algebrización como herramienta de análisis de tareas matemáticas de Educación Primaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). Macmillan.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. (2012) *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher.

Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C. y Petzl, C. (2009) Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 113-135.

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018) Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *23,* 229-251.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). SEIEM.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Prospective mathematics teachers' knowledge and competence analysing proportionality tasks. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-22.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2018). Recognizing algebrization levels in an inverse proportionality task by prospective secondary school mathematics teachers, *Proceedings of EDULEARN18 Conference*, Palma, Mallorca, Spain, p. 2483-2491.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, *22*(31), 55-86.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404-407.

Carraher, D.W., y Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *En F.K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 669-706). NCTM e IAP.

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.-J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Springer International Publishing.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

English, L. D. (2008) Setting an agenda for international research in mathematics education. En, *Handbook of international research in mathematics education*, 2nd Edition, p 3-19. Taylor and Francis (Routledge).

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: Efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34*(1), 67-80.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 441-468

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 39-61.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-13). enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31* (57), 90-113.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). Early adolescents proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 219-233.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: NCTM.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). NCTM.

Lim, K.H. (2009). Burning the candle at just one end: Using non proportional examples helps students determine when proportional strategies apply. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(8), 492-500.

Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861-2866). Praga.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Pino-Fan, L. R., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME, 19*(1), 71-98. DOI: 10.12802/relime.13.1913

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. En L. D. English and D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 275–296). Routledge

Post, T. R., Harel, G., Behr, M. y Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. En E. Fennema, T. P. Carpenter y S. J. Lamon (Eds.*), Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177-198). SUNY Press.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*, 257-277.

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, pp. 1055-1061). The Ohio State University.

Rivas, M. y Godino, J. D. (2010) Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *Educere*, *14* (48), 189-205.

Rivas, M., Godino J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*, *26* (42B), 559-588.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona. http://www.tdx.cat/handle/10803/294031

Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. (2004). Connections between qualitative and quantitative thinking about proportion: The case of Paulina. En M. J. Hoines y A. B. Flugestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 3, 201–208). PME.

Sadler, D. R. (2013). Making competent judgments of competence. En S. Blömeke, O. Zlatkin-Troitschanskaia, C. Kuhn y J. Fege (Eds.), *Modeling and measuring competencies in higher education: Tasks and challenges* (p. 13-27). Sense Publishing.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática*. Tesis

Doctoral Universidad de Barcelona. http://www.tdx.cat/handle/10803/385915

Silver, E. A. (2013). Problem posing research in mathematics education. Looking back, looking around and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 157-162. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77, 5-34.

Streefland, L. (1985). Search for roots of ratio: some thoughts on the long-term learning process (towards a theory) part II: the outline of the long-term learning process. *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75 - 94.

Thomson, A. G. y Thomson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 2-24.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D. Gillard, E. y Verschaffel, L. (2009). Add? Or Multiply? A study on the development of primary school students' proportional reasoning skills. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 281-288). PME.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Contribuciones del autor: M.B y J. D. G. han contribuido a la par en la concepción, diseño y desarrollo del trabajo que aquí se presenta. M. B. fue la encargada de realizar la implementación de la experiencia formativa y de recabar y analizar los datos de la misma, compartiendo con J.D.G. los resultados del análisis y la extracción de conclusiones.

Financiación: “Esta investigación no recibió financiación externa”.

Agradecimientos: Investigación desarrollada en el marco del Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía)

Conflicto de intereses: Los autores declaramos que no existen conflictos de intereses para la publicación de este manuscrito.

Declaración ética: Los autores declaramos que el proceso se ha realizado conforme a los principios éticos establecidos por la comunidad científica.

Cómo citar este artículo:

Burgos, M. y Godino, J.D. (2021). Conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 25(2), 281-306. DOI: 10.30827/profesorado.v25i2.8725