Universidad de Granada
Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática
Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación

Tesis Doctoral

Concepción y representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de primaria en contextos funcionales

Cristina Ayala-Altamirano
Granada, 2021

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Cristina Ayala Altamirano
ISBN: 978-84-1306-909-8
URI: http://hdl.handle.net/10481/69402

Esta Tesis Doctoral ha sido realizada dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Asimismo, la tesis fue llevada a cabo en el seno del Grupo de Investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM 193).

Su autora ha sido becaria del Programa “Becas Chile” de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), mediante su Programa de Formación de Capital Humano Avanzado, folio 72180046, desde el 19 de junio de 2017 hasta el 01 de marzo del 2021. A su vez, la autora fue beneficiaria de una beca de Movilidad Internacional para Estudiantes de Programas de Doctorado de la Universidad de Granada, para la realización de una estancia de 3 meses en *Laurentian University*, Canadá, desde el 18 de febrero al 18 de mayo del 2019.

A mis abuelos,

a mis padres,

a Carolina e Ignacia

y a Sebastián.

AGRADECIMIENTOS

Iniciar agradeciendo a Marta, mi directora, esta Tesis Doctoral no sería lo que es sin su invaluable apoyo, su constante aliento, cercanía e interés. Gracias por todo lo que aprendí contigo, por confiar en mi trabajo e inspirarme. Espero que este trabajo sea uno entre muchos más que podamos realizar juntas.

Asimismo, agradecer al Dr. Luis Radford, quien me recibió en *Laurentian University* durante mi estancia doctoral. Gracias por su tiempo y por compartir conmigo su trabajo. Gracias a Rafael Ramírez (Universidad de Granada) por el apoyo y confianza depositada en mi. Aprendí mucho de ti y de Bárbara Brizuela (Tufts University, Estados Unidos) cuando trabajamos juntos, gracias a ambos.

A Rebecca Ambrose (University of California, Estados Unidos) y a Juan Luis Piñeiro (Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile), por aceptar ser los revisores internacionales de esta tesis y sus enriquecedoras recomendaciones. A Eder Pinto, gracias por tus comentarios, tu apoyo y estar siempre ahí. Espero que sigamos sumando experiencias juntos.

Agradecer a las y los estudiantes que participaron en esta investigación, aprendí mucho de y con ustedes. También, gracias a las maestras que nos permitieron realizar nuestras intervenciones y gentilmente abrieron las puertas de sus salones de clases. Del mismo modo, agradecer a todas y todos los integrantes de los proyectos de investigación EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, gracias por permitirme ser parte del proyecto, escuchar mis ideas y darme la oportunidad de volver a hacer clases a niñas y niños de primaria, cosa que extrañaba y disfruto mucho.

A mis amigas en Chile que siempre estuvieron presente sin importar el océano que nos separaba. A los amigos que conocí en España y se convirtieron en mi familia, gracias por los buenos momentos que hemos vivido juntos. También deseo agradecer a mi familia en Chile. A mis padres por enseñarme el valor del trabajo y por apoyarme en cada una de mis aventuras. A mi hermana Carolina por estar para mi. A Ignacia, Camila, Daniela, Valentina y Renato, quienes cuando dejé Chile eran unos pequeños y ahora ya no lo son tanto. A Dani, Fernanda y Damián. Y a Sebastián, mi compañero de vida, gracias por caminar a mi lado y sumarte en este proyecto.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

En esta Tesis Doctoral nuestro objetivo general es describir y analizar el proceso de representación de la generalización de relaciones funcionales llevado a cabo por estudiantes de Educación Primaria (8 a 10 años) y relacionar dicho proceso con las características y demandas de las tareas propuestas. Este trabajo se enmarca en la línea de investigación sobre el álgebra escolar. Complementa las investigaciones existentes sobre el pensamiento funcional en el contexto de la propuesta *Early algebra* adoptando una perspectiva semiótica histórico-cultural y una perspectiva multimodal del pensamiento.

Para estudiar el pensamiento funcional de los estudiantes, asumimos que el pensamiento es un fenómeno multimodal y semióticamente mediado, es decir, el pensamiento no es solo una actividad mental sino un proceso mediado y evidenciado por el lenguaje, los gestos, el ritmo y todos los recursos utilizados para interactuar con el entorno (Radford et al., 2009). Además, consideramos que el aprendizaje es una forma de acción mediada por signos y limitada por la situación en la que se produce (Leont'ev, 1974; Vygotski, 1978/1979; Wertsch, 1981), es decir, depende de las necesidades, demandas y motivos de la actividad.

En este contexto, la presente Tesis Doctoral se presenta en la modalidad de agrupamiento de publicaciones, estructurada en seis capítulos seguidos del listado de referencias bibliográficas y los anexos.

En el capítulo 1 se presenta el problema de investigación. Se justifica su relevancia y se exponen las motivaciones que llevaron a la autora a realizar esta investigación. También se plantean los objetivos y preguntas que guían la investigación.

Nuestro objetivo general, presentado al inicio de este resumen, se concreta en los siguientes cinco objetivos específicos:

O.1. Identificar las concepciones de los estudiantes sobre las letras como representación de cantidades indeterminadas, a partir de sus intervenciones orales y producciones escritas en el marco de un experimento de enseñanza en el que se proponen tareas funcionales de generalización.

O.2. Describir cómo cambian las concepciones de las letras como representación de cantidades indeterminadas puestas de manifiesto por los estudiantes.

O.3. Identificar las representaciones utilizadas por los estudiantes para expresar la relación funcional involucrando cantidades indeterminadas.

O.4. Describir los cambios de las representaciones de la relación funcional involucrando cantidades indeterminadas, puestas de manifiesto por los estudiantes.

O.5. Relacionar las representaciones empleadas por los estudiantes para expresar cantidades indeterminadas y las características de las tareas propuestas.

Desde la perspectiva de la investigación son tres las principales razones para llevar a cabo esta investigación. En primer lugar, hay evidencias de que tareas que involucran una relación funcional desarrollan el sentido de variabilidad y contribuyen a la construcción de una sólida base de aprendizajes para estudios posteriores del álgebra (Blanton, Brizuela, et al., 2015; Blanton y Kaput, 2011; Cañadas et al., 2016). En segundo lugar, una línea abierta de investigación es profundizar en el estudio de las representaciones personales de los estudiantes y el proceso seguido hacia el empleo de formas de representación convencionales (Dörfler, 2008; Kaput, 2009). Finalmente, *qué*, *cuándo* y *cómo* introducir el álgebra siguen siendo puntos de discusión (Freiman y Fellus, 2021), es por esto que se quiere contribuir a la caracterización de las tareas que fomentan el pensamiento algebraico.

Desde la perspectiva curricular, dado que el álgebra escolar se ha incorporado en los lineamientos curriculares de diversos países (e.g. Australia, Canadá, Chile, España, Estados Unidos, Finlandia) es relevante informar sobre: el desarrollo del pensamiento algebraico de estudiantes de primaria; los primeros significados y reacciones de dichos estudiantes al relacionarse con diversos elementos algebraicos y las características de las tareas propuestas que favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico, entre otros aspectos. Como consecuencia de lo anterior, desde una *perspectiva docente* buscamos dar información relevante a los docentes sobre lo que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que fomentan el pensamiento algebraico y cómo se caracterizan dichas tareas. Para este fin consideramos factores como la interacción social, los medios semióticos involucrados, el tipo de justificación solicitada y las características de los enunciados de los problemas presentados.

En el capítulo 2 se detalla el marco teórico que sustenta esta investigación. Siguiendo las ideas de Vygotski y Leont'ev, en nuestra caracterización del aprendizaje se destaca el rol de la interacción social (Vygotski, 1978/1979; Wertsch, 1991/1993) y los medios semióticos (Vygotski, 1930/1981). Además, se describe el aprendizaje como una forma de acción que se caracteriza por estar limitada por la situación en la que se produce, es decir, depender de las necesidades, demandas y motivos de la actividad (Leont'ev, 1974; Wertsch, 1981).

Nuestros supuestos teóricos específicos incluyen la definición que adoptamos de pensamiento algebraico, pensamiento funcional, generalización, representación y justificación. Al respecto, en este estudio asumimos que el pensamiento algebraico se refiere a cantidades indeterminadas (incógnitas, variables, parámetros o números generalizados) que se utilizan de manera analítica. La analiticidad es clave para diferenciar lo aritmético de lo algebraico. Al pensar algebraicamente se razona sobre la generalidad, se reconoce la estructura algebraica subyacente en una situación y las relaciones entre las cantidades. Además, el álgebra recurre a modos de representación idiosincrásicos o específicos culturalmente evolucionados (Radford, 2018).

Por otro lado, el pensamiento funcional es parte del pensamiento algebraico y se centra en el estudio de las funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real (Cañadas y Molina, 2016). Incluye la generalización de las relaciones entre cantidades que varían en forma conjunta, la expresión de estas relaciones y el uso de dichas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton et al., 2011; Blanton y Kaput, 2011). El pensamiento funcional se evidencia principalmente cuando los estudiantes establecen relaciones de covariación o de correspondencia entre las variables involucradas en los problemas (Blanton y Kaput, 2011; Smith, 2008).

Entendemos la generalización de patrones y relaciones funcionales como un proceso (generalizing) así como un producto (generalization). El producto de la generalización es la forma en que se expresa la generalidad, es decir, es el resultado de dicho proceso (Ellis, 2007). La generalización como proceso implica: identificar los elementos comunes a todos los casos, extender el razonamiento más allá del rango en el que se originó, obtener resultados más amplios que los casos particulares y proporcionar una expresión directa que permita obtener cualquier término (Ellis, 2007; Kaput, 1999; Radford, 2013).

En la expresión de la relación funcional y su generalización los estudiantes pueden recurrir a distintos medios semióticos. El mayor grado de sofisticación en la expresión de ideas algebraicas lo relacionamos con la idea de contracción semiótica, esto quiere decir que hay una concentración de significados en la menor cantidad de signos a través de la que se expresa la generalidad (Radford, 2018b; Radford y Sabena, 2015). Compartimos la opinión de que el pensamiento algebraico puede cultivarse antes de que se introduzca la notación algebraica (Carraher y Schliemann, 2010; Radford, 2018b).

La función y sus elementos pueden ser representados de distintas formas, las que incluyen representaciones no convencionales (ej., gestos, lenguaje natural, material manipulativo y representaciones pictóricas) y representaciones convencionales (tabular, gráfica y simbólica). Para la representación de cantidades indeterminadas (variables, cantidades desconocidas o cantidades generales), la convención matemática moderna emplea una letra del alfabeto, no obstante, otras formas de representación son las figuras geométricas, las imágenes y el lenguaje natural a través de expresiones alusivas al contexto de la situación problema.

Finalmente, consideramos que la justificación es una habilidad que se desarrolla gradualmente (Stephens, Ellis, et al., 2017). La entendemos como un proceso social que permite explicar, verificar y sistematizar conocimiento matemático basándose en ideas, definiciones y propiedades matemáticas que están al alcance conceptual de la comunidad del aula, del mismo modo que las representaciones que se emplean para expresarla. Fomentar la justificación ayuda a refinar la generalización (Stephens, Ellis, et al., 2017).

En el capítulo 3, se describe el marco metodológico de la investigación. Metodológicamente seguimos las directrices de la investigación de diseño. De modo general, los datos analizados provienen de dos experimentos de enseñanza implementados en dos colegios ubicados en la provincia de Granada y realizados en el marco de dos proyectos de investigación del Plan Nacional I+D (EDU2013-41632-P y EDU2016-7477-P). Los objetivos de estos experimentos son investigar las capacidades de los alumnos de primaria a la hora de resolver problemas que implican una relación funcional, como aproximación al pensamiento algebraico. En particular, estos proyectos pretenden profundizar en la descripción del pensamiento funcional y desarrollar materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo de dicho pensamiento.

De los cuatro estudios que componen esta tesis, uno se enmarca en el primer experimento de enseñanza (2014/2015) y los otros tres en el segundo (2017/2018). En el primer estudio trabajamos con un grupo de 25 estudiantes de tercero de Educación Primaria (8 a 9 años). En los otros estudios trabajamos con estudiantes de cuarto de Educación Primaria (9 a 10 años): el grupo completo de 25 estudiantes en el caso de los estudios 2 y 4 y tres de dichos estudiantes en el estudio 3.

En cada experimento de enseñanza se diseñó e implementó una recogida de datos que incluyen sesiones de clases y entrevistas semiestructuradas individuales, en las cuales se propusieron situaciones contextualizadas que involucraban una relación funcional. Los estudiantes en una hoja de trabajo respondían una serie de preguntas relacionadas con la situación presentada y participaban en discusiones grupales sobre las mismas.

En el primer estudio analizamos las respuestas escritas y las intervenciones orales de los estudiantes para lograr los objetivos específicos 1 y 2. Para analizar los datos se establecieron dos grupos de categorías basadas en investigaciones previas: categorías referentes a los significados otorgados a las letras (Blanton et al., 2017; Küchemann, 1981; Molina et al., 2018) y categorías para representar cantidades indeterminadas (Blanton et al., 2015; Molina et al., 2018).

En el segundo estudio realizamos un análisis cualitativo de las respuestas escritas y las intervenciones orales de los estudiantes para lograr los objetivos específicos 3, 4 y 5. Se analizó el grado de sofisticación de las respuestas y justificaciones de los estudiantes considerando los medios semióticos involucrados, el modo cómo se referían a las variables, cómo expresaban la indeterminación y las características de la tarea.

En el análisis de datos en el Estudio 3, realizamos un análisis microgenético de la actividad de los estudiantes (Radford et al., 2009; Vygotski, 1978/1979). Al igual que el estudio 2, este estudio se relaciona con los objetivos específicos 3, 4 y 5. Las fuentes de información fueron la videograbación de la entrevista final, su transcripción y las producciones escritas de los estudiantes. A partir de la observación del trabajo de los estudiantes e investigaciones previas establecimos dos conjuntos de categorías: estrategias para responder las preguntas (Cañadas y Fuentes (2015; Morales et al., 2018) y acciones para generalizar (Blanton, 2008; Cañadas y Castro, 2007; Dörfler, 1991; Pinto y Cañadas. 2018).

Finalmente, en el análisis de datos en el estudio 4, nuevamente se analizaron las respuestas escritas e intervenciones orales de los estudiantes, en este caso para lograr los objetivos específicos 3 y 5. En primera instancia identificamos las estrategias que aplicaron los estudiantes al resolver los problemas propuestos. Para esto establecimos categorías que se basaban en investigaciones previas que se referían a cómo los estudiantes abordan problemas que involucran funciones (Blanton, 2008; Blanton y Kaput, 2011; Krutteskii, 1976; Smith, 2008; Vernaud, 2009). Luego, centramos nuestra atención en aquellos estudiantes que reconocieron la relación funcional e identificamos cómo la representan. Para esto empleamos tres categorías propuestas por Ureña et al. (2019).

En el capítulo 4, Compendio de publicaciones, se incluyen cuatro manuscritos (dos publicados, uno aceptado y otro en revisión) que recogen la investigación desarrollada en esta Tesis Doctoral. Los resultados de estos estudios se integran y sintetizan en el Capítulo 5.

En el primer estudio el foco está puesto en las letras como una representación convencional de una cantidad indeterminada. Su principal aporte es identificar los significados que le otorgan a las letras estudiantes de primaria sin instrucción previa al respecto y relacionar aquellos significados con las formas de representar la variable dependiente de la función cuando la variable independiente está representada por una letra.

En el segundo estudio, en comparación con el Estudio 1, se describió en mayor profundidad las justificaciones y explicaciones de los estudiantes. Ya no solo se analizaron las preguntas que involucraban letras para representar cantidades indeterminadas, sino que se analizó el proceso de generalización en su totalidad y se incluyeron otros medios semióticos que permitieron expresar y generalizar la relación funcional. La originalidad de este estudio es caracterizar las tareas considerando dos tipos de justificación (de elaboración y de validación) y diversas formas de representación (lenguaje natural, expresiones aritméticas, representación tabular y lenguaje alfanumérico).

El tercer estudio viene a complementar el Estudio 2, ya que en dicho trabajo se evidenció que los estudiantes comprendían la situación, pero no expresaban de modo indeterminado la relación entre las variables. Teniendo en cuenta esto, se buscó indagar con mayor detalle en qué es lo que realizan los estudiantes durante el proceso de generalización, cuáles son las evidencias que nos permiten concluir que sí generalizan aun cuando no lo verbalizan o no lo expresan con simbolismo alfanumérico y cómo esto se relaciona con las características de las tareas.

Dentro del marco teórico específico se profundizó en la generalización y, se introdujo la idea de generalización en acto, una adaptación de la propuesta de Mason (1996). Este constructo teórico que nos permitió describir las incipientes formas de pensar algebraicamente que manifiestan los estudiantes al resolver los problemas presentados.

Otro aporte de este trabajo es el análisis en detalle del proceso de generalización que permitió identificar en qué momento los estudiantes empleaban una u otra estrategia, qué preguntas favorecían el empleo de cada estrategia y cuáles permitían que los estudiantes expresaran de modo más sofisticado la relación entre las variables. Además, evidencia la efectividad de preguntar por lo indeterminado de distintos modos (conceptos como *muchos*, *infinitos*, letras). Esto complementa los resultados del Estudio 1 que solo se centra en el análisis de las preguntas que involucran letras.

Finalmente, en el cuarto estudio se analizan los problemas propuestos a lo largo del segundo experimento de enseñanza, esto con el objetivo de identificar qué caracteriza a aquellos problemas que favorecen estrategias funcionales y la expresión de la relación entre las variables en términos generales. Entre los principales hallazgos del Estudio 4 se muestra que los problemas que involucran una relación aditiva de la forma y = x + b son los que más favorecen el uso de estrategias funcionales. Le siguen los problemas que involucran una relación multiplicativa sin constante ($y= ax$), siendo los más difíciles los problemas multiplicativos con una constante ($y= ax + b$). Además, los problemas que favorecen estrategias funcionales incluyen la relación funcional de manera explícita en el enunciado. Aquellos problemas en los que los estudiantes tuvieron que descubrir la relación a partir de un par de valores fueron más complejos.

En el capítulo 6, Conclusiones, se valora positivamente el cumplimiento de los cinco objetivos específicos que permiten alcanzar el objetivo general planteado. En los resultados que se han reportado en este trabajo se destacan dos contribuciones de especial relevancia para la docencia. En primer lugar, se evidencian diversas formas en las que los estudiantes representan la relación entre las variables involucradas en los problemas propuestos. Al identificar y describir los medios semióticos empleados por los estudiantes se contribuye a describir el proceso de generalización seguido por estos y descubrir sus posibilidades de pensar algebraicamente. Esta información es relevante para los docentes, quienes pueden observar en sus estudiantes respuestas o actuaciones similares y, en vez de interpretarlas como una limitante, pueden potenciarlas para que los estudiantes confíen en sus capacidades de expresión y de forma progresiva adopten otros medios de representación más sofisticados.

En segundo lugar, destacamos la caracterización aportada de las tareas considerando distintos elementos (la interacción social, los medios semióticos involucrados, el tipo de justificación solicitada y las características del enunciado del problema). La caracterización de las tareas tiene una gran implicancia para la docencia dado que ofrece oportunidades para que los docentes reflexionen y enriquezcan sus propias prácticas y evalúen las tareas que presentan a los estudiantes.

Esta investigación deja nuevas perspectivas y líneas de investigación abiertas. Por ejemplo, evidenciar cómo el pensamiento funcional podría favorecer una visión estructural de expresiones aritméticas. Así conectar dos enfoques distintos que se distinguen en la literatura para abordar la enseñanza del álgebra escolar. Desde la perspectiva de la formación docentes y desarrollo profesional se podría considerar la participación de docentes que imparten clases en primaria. Motivarlos a participar del diseño e implementación de la investigación y discutir con ellos cuáles serían los modos más apropiados para desarrollar el pensamiento funcional de estudiantes cuyos marcos curriculares explicitan el desarrollo el pensamiento algebraico.

PRESENTACIÓN

El trabajo que se presenta en este escrito constituye la Tesis Doctoral de la autora con el propósito de obtener el grado de Doctora en el Programa de Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada en el curso académico 2020/2021.

Esta Tesis Doctoral se enmarca en la línea de investigación sobre el álgebra escolar. Complementa las investigaciones existentes sobre el pensamiento funcional en el contexto de la propuesta *Early algebra* adoptando una perspectiva semiótica histórico-cultural. Esta investigación tiene como objetivo describir y analizar el proceso de representación de la generalización de relaciones funcionales llevado a cabo por estudiantes de Educación Primaria y relacionar dicho proceso con las características y demandas de las tareas propuestas. Los datos analizados provienen de dos experimentos de enseñanza implementados en dos colegios ubicados en la provincia de Granada y realizados en el marco de dos proyectos de investigación del Plan Nacional I+D (EDU2013-41632-P y EDU2016-7477-P).

COMPENDIO DE PUBLICACIONES

La Tesis Doctoral desarrollada en esta memoria se presenta en la modalidad de agrupamiento de publicaciones. Cada una de estas cumplen con los indicios de calidad requeridos por el Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada como a continuación se detalla.

Estudio 1: Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5.

Indicios de calidad

a) Índice de impacto 1,578 en JCR-SSCI (2019). Posición de la revista 133/263 en la categoría *Education y Education Research.* (Cuartil 3).

b) Revista indexada en Scopus. Índice SJR (2019) 0,9. Posición en *Education* 203/1272 (Cuartil 1). Índice H, 35.

c) Otros indicios de calidad de la revista son: Clasificación Integrada de Revistas Científicas (CIRC) grupo A e Índice MIAR – ICDS 10,8.

d) También se encuentra indexada en CARHUS Plus+ 2018; ERIHPlus; EBSCO Education Research Complete; EBSCO Education Source; ERIC; Google Scholar: CNKI; Institute of Scientific and Technical Information of China; Japanese Science and Technology Agency (JST); Journal Citation Reports/ Social Sciences Edition; Naver; OCLC WordCat Discovery Service; Social Science Citation Index; TD Net Discovery Service; UGC-Care List (India).

Estudio 2: Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (En prensa). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*.

Indicios de calidad

a) Índice de impacto 1,5 en JCR-SSCI (2019). Posición de la revista 144/263 en la categoría *Education y Education Research.* (Cuartil 3).

b) Revista indexada en Scopus. Índice SJR (2019) 1,57. Posición en *Education* 76/1272 (Cuartil 1). Índice-H 60.

c) Otros indicios de calidad de la revista son: Clasificación Integrada de Revistas Científicas (CIRC) grupo A e Índice MIAR – ICDS 11,0.

e) La revista también se encuentra indexada en: CARHUS Plus+ 2018; ERIHPlus; EBSCO Education Research Complete; EBSCO Education Source; ERIC; ERIC Plus; Google Scholar: CNKI; Gale; Institute of Scientific and Technical Information of China; JSTOR; Japanese Science and Technology Agency (JST); Journal Citation Reports/ Social Sciences Edition; Naver; OCLC WordCat Discovery Service; Social Science Citation Index; TD Net Discovery Service; UGC-Care List (India).

Estudio 3: Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (En revisión). El Proceso de Generalización y la Generalización en Acto. Un Estudio de Casos.

Estudio 4: Ramírez, R., Brizuela, B.M. y Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 1-25. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Indicios de calidad

a) Revista indexada en Scopus. Índice SJR (2019) 0,817 Posición en *Education* 251/1272 (Cuartil 1). Índice-H, 27.

b) Otros indicios de calidad de la revista son: Clasificación Integrada de Revistas Científicas (CIRC) grupo A e Índice MIAR – ICDS 10,0.

c) También se encuentra indexada en las siguientes bases de datos: CARHUS Plus+ 2018; Astrophysics Data System (ADS); CNKI; EBSCO Education Research Complete; EBSCO Education Source; ERIC; Emerging Sources Citation Index; Google Scholar; Institute of Scientific and Technical Information of China; Japanese Science and Technology Agency (JST); Naver; OCLC WorldCat Discovery Service; TD Net Discovery Service y UGC-CARE List (India).

Estructura del Documento

Este documento se estructura en 6 capítulos seguidos del listado de referencias bibliográficas y los anexos. Para dar cumplimiento a los requisitos para optar a la mención internacional esta memoria incluye en los anexos la traducción al inglés de dos de los apartados de la misma: el resumen extendido y las conclusiones. A continuación, se describe el contenido de cada uno de los capítulos.

En el Capítulo 1 se presenta el problema de investigación. Se justifica su relevancia y se exponen las motivaciones que llevaron a la autora a realizar esta investigación. También se plantean los objetivos y preguntas que guían la investigación.

En el Capítulo 2 se detalla el marco teórico que sustenta esta investigación. En primera instancia se describen los supuestos teóricos generales que permiten visualizar la relación entre los aspectos semióticos y el proceso de aprendizaje. Luego, se describen los supuestos teóricos específicos. Estos incluyen la definición que adoptamos de pensamiento algebraico, pensamiento funcional, generalización, representación y justificación. En cada uno de los apartados se incluyen referencias a investigaciones previas que forman parte de los antecedentes de la investigación realizada.

En el Capítulo 3 se describe el marco metodológico de la investigación. Se caracteriza la investigación de diseño en general y, en particular, los experimentos de enseñanza y las entrevistas semiestructuradas. Luego, se describe el contexto en el que se llevó a cabo la investigación, las sesiones de clases y las entrevistas implementadas. Finalmente, se caracterizan cada uno de los cuatro estudios que forman parte de esta memoria. Para cada uno de ellos, se precisan los sujetos que forman parte de la muestra, los instrumentos de recogida de información y el análisis de datos efectuado.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados. Este capítulo está compuesto por las cuatro publicaciones que recogen cada uno de los cuatro estudios que componen esta investigación. Posteriormente en el Capítulo 5 se integran y sintetizan los hallazgos de los mismos.

En el Capítulo 6 establecemos nuestras conclusiones. En este capítulo damos respuestas a los objetivos de investigación y los relacionamos con los estudios llevados a cabo. También destacamos los principales aportes de la investigación y sus implicaciones para la enseñanza. Finalmente nos referimos a las limitaciones del trabajo y posibles líneas de investigación abiertas.

Formación del Investigador Durante el Desarrollo de Esta Tesis Doctoral

Esta memoria de investigación recoge el trabajo realizado durante 4 años. Durante este periodo su autora ha participado en variedad de actividades científicas dirigidas a dar divulgación a parte de la investigación en diferentes momentos de su desarrollo, dichas actividades se detallan en la Figura 0-1. Además, la autora realizó una estancia doctoral de tres meses, desde el 18 de febrero al 18 de mayo del 2019, en *Laurentian University* (Sudbury, Canadá), bajo la supervisión del Doctor Luis Radford. Dicha estancia es parte de los requisitos para obtener el grado de Doctor con Mención internacional por la Universidad de Granada.

Figura 0-1.

Actividades realizadas durante la formación doctoral

<table>
<tr><td>Curso 2016/2017</td><td>21º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática [SEIEM] (Zaragoza, España).
Presentación de una comunicación en el Grupo de investigación pensamiento numérico y algebraico: El significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales. (Ayala-Altamirano y Molina, 2017)</td><td rowspan="3">Estudio 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Curso 2017/2018</td><td>42º Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education [PME 42] (Umea, Suecia).
Presentación de una comunicación breve titulada Representation of indeterminate quantities in functional contexts by third grade students. (Ayala-Altamirano y Molina, 2018b)</td></tr>
<tr><td>22º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática [SEIEM] (Gijón, España).
Presentación de una comunicación titulada Representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de tercero de primaria: el caso de la variable dependiente.
(Ayala-Altamirano y Molina, 2018a)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Curso 2018/2019</td><td>Estancia pre-doctoral en el extranjero.
Participación en el laboratorio “Semiótica Cultural y Pensamiento Matemático” en Laurentian University (Sudbury, Canadá).</td><td></td></tr>
<tr><td>23º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática [SEIEM] (Valladolid, España).
Presentación de una comunicación titulada Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de Primaria. (Ayala-Altamirano y Molina, 2019)</td><td>Estudio 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Curso 2019/2020</td><td>8^{th} International Congress of Educational Sciences and Development (Pontevedra, España).
Presentación de una comunicación titulada Modos de dar sentido a una relación funcional por estudiantes de cuarto de primaria. (Ayala-Altamirano y Molina, 2020b)</td><td>Estudio 3</td></tr>
<tr><td>IV Congreso Internacional de Profesores de Matemática UGEL Chucuito (Chucuito, Perú)
Exposición en un seminario de investigación titulado Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de primaria.</td><td>Estudios 2 y 3</td></tr>
</table>

Capítulo 1
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Este capítulo contiene el planteamiento general del problema que se aborda en esta Tesis Doctoral. En el primer apartado se exponen los principales argumentos que sustentan esta investigación: se describe la motivación para estudiarlo y se justifica su pertinencia desde la investigación, el currículo y la docencia. En el segundo apartado se enuncian los objetivos de esta tesis y las preguntas de investigación que se afrontan.

1.1. MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

1.1.1. Motivación Personal

La primera razón para llevar a cabo esta investigación tiene relación con mi experiencia profesional. En Chile en el año 2012 se implementaron nuevas bases curriculares las cuales incorporan el álgebra desde los primeros cursos de Educación Primaria (Ministerio de Educación de Chile, 2012a). En ese momento me desempeñaba como maestra de primaria e impartía clases de matemáticas de 3º a 5º. Mientras preparaba mis clases me cuestionaba cuál era el objetivo de la enseñanza del álgebra a esa edad e inevitablemente lo relacionaba con mi único referente hasta ese momento, mi propia formación escolar que se focalizaba principalmente en el uso del simbolismo alfanumérico. Esta inquietud permaneció en el tiempo y luego me tocó abordarla cuando me desempeñé como editora y autora de textos escolares de matemática para la Educación Primaria. Dado que el texto escolar es uno de los recursos más empleados por los profesores, me sentía en la obligación de preparar una propuesta que estuviera relacionada con los últimos enfoques sobre el álgebra escolar y proponer experiencias de aprendizaje que desarrollaran el potencial algebraico de los estudiantes. En esta búsqueda complementé mi formación académica realizando un Máster en Educación Matemática en la Universidad de Los Andes (Chile) donde mi trabajo final consistió en analizar las propuestas didácticas para la enseñanza de las desigualdades e inecuaciones en los textos escolares de 1º a 6º de primaria distribuidos por el Ministerio de Educación de Chile (Ayala-Altamirano, 2016). No obstante, si bien resolví algunas inquietudes, este trabajo planteó otras, por lo que decidí realizar el Máster en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Muchos de los referentes teóricos empleados en mi investigación previa provenían de esta institución y del trabajo realizado en el seno del grupo Pensamiento Numérico y Algebraico.

La primera aproximación al problema de investigación que se presenta en esta memoria se realizó durante el curso 2016/2017, en el marco del citado Máster de la Universidad de Granada, con un Trabajo de Fin de Máster titulado "Evolución del significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales" (Ayala-Altamirano, 2017). En dicho trabajo se describe algunos de los significados que los estudiantes de tercero otorgan a las letras junto con las intervenciones en el aula que contribuyeron a su evolución. En el mencionado trabajo y en el actual, la doctora Marta Molina es la directora.

1.1.2. Justificación desde la Investigación

Desde las últimas décadas, las investigaciones parecen estar de acuerdo en que el álgebra escolar no es un tema aislado de los otros contenidos matemáticos, ni se trata solo del empleo de símbolos alfanuméricos, sino de formas de pensar (Kaput, 2008; Kieran, 2011). Además, las investigaciones sobre el álgebra escolar, y en particular el álgebra en Educación Primaria, se han centrado en la exploración del potencial del pensamiento algebraico de los estudiantes más que en sus limitaciones (Molina, 2009). Diversos trabajos dan cuenta de esto tanto a nivel nacional (Acosta y Alsina, 2020; Alsina, 2019; Callejo et al., 2016; Cañadas y Fuentes, 2015; Castro et al., 2017; Godino et al., 2014; Molina, 2009; Morales et al., 2018; Pinto y Cañadas, 2021; Ureña et al., 2019) como a nivel internacional (Blanton, 2017; Brizuela y Blanton, 2014; Cooper y Warren, 2011; Kaput, 2008; Mason, 2003; Radford, 2011; Rivera y Becker, 2007).

Uno de los enfoques que se propone para promover el desarrollo del pensamiento algebraico es el funcional (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran et al., 2016; Stephens, Fonger et al., 2017), el cual se centra en el estudio de las funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real (Cañadas y Molina, 2016). Por medio del término pensamiento funcional se hace referencia a la generalización de las relaciones entre cantidades que varían en forma conjunta, la expresión de estas relaciones y el uso de dichas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton et al., 2011; Blanton y Kaput, 2011). Variedad de antecedentes evidencian que cuando los estudiantes tienen la oportunidad de debatir tareas que involucran una relación funcional desarrollan el sentido de variabilidad (Blanton, Brizuela, et al., 2015; Cañadas et al., 2016) y que el desarrollo del pensamiento funcional contribuye a la construcción de una sólida base de aprendizajes para estudios posteriores del álgebra (Blanton y Kaput, 2011). Es en este enfoque funcional del álgebra escolar es en el que se sitúa esta investigación para estudiar las concepciones y representaciones de cantidades indeterminadas de los estudiantes de primaria.

Sobre la representación de cantidades indeterminadas, investigaciones previas han mostrado que niños de primaria son capaces de desarrollar una comprensión de las letras como representación de una cantidad indeterminada cuando participan en clases y reciben instrucción sobre su uso (Blanton et al., 2017; Brizuela et al., 2015; Cañadas et al., 2016; Carraher y Schliemann, 2018). Otras dan cuenta de que los estudiantes se refieren a cantidades indeterminadas de múltiples formas, por ejemplo, haciendo uso del ritmo, de los gestos o de las palabras (Cooper y Warren, 2011; Malara y Navarra, 2018; Radford, 2011, 2014; Vergel, 2015). Mientras que el primer grupo de investigaciones se centra en el estudio de representaciones convencionales, como por ejemplo letras, tablas o gráficos, en el segundo grupo se evidencia que en el tránsito hacia el uso de representaciones convencionales es importante considerar las representaciones personales de los estudiantes. Esta última es una línea abierta de investigación identificada por Kaput (2009). Refiriéndose al rol de la justificación y expresión en el proceso de generalización, Kaput (2009) señala que "hay mucho que aprender sobre la generalización y, por tanto, el desarrollo del pensamiento algebraico, a partir del estudio de los gestos y el habla (p.213)". Por otra parte, Dörfler (2008) plantea que, al expresar la generalidad, los signos no son generales por si mismos: esto depende de la forma o práctica de utilizarlos o interpretarlos. Agrega que es necesario profundizar desde la investigación en las formas de pasar de notaciones idiosincrásicas a las convencionales.

Teniendo en cuenta lo anterior, en este estudio se consideran tanto representaciones personales como convencionales. En concreto el interés es conocer el significado que le otorgan a las letras estudiantes españoles de primaria y evidenciar su capacidad de emplear formas de representación convencionales. A su vez se pretende contribuir a ampliar la investigación sobre el pensamiento funcional profundizando en el estudio de las formas de comunicación personal de los estudiantes (formas no convencionales de representación). Para esto se asume que el pensamiento es un fenómeno multimodal y semióticamente mediado, es decir, el pensamiento no es solo una actividad mental sino un proceso mediado y evidenciado por el lenguaje, los gestos, el ritmo y todos los recursos utilizados para interactuar con el entorno (Radford et al., 2009). En general, como argumenta Radford (2006b), algunas de las razones para manifestar interés en la semiótica desde la investigación en Educación Matemática son: (a) toma de consciencia de que la actividad matemática es esencialmente una actividad simbólica; (b) interés por intentar dar cuenta de la complejidad del discurso matemático observado en la sala de clases; e (c) intentar entender el papel cognitivo que desempeñan los artefactos y signos como portadores de convenciones y formas culturales de significación.

Finalmente, a nivel de investigación cada vez hay más consenso sobre *por qué* es necesario introducir el álgebra desde la Educación Primaria, no obstante, el debate sobre *qué*, *cuándo* y *cómo* introducir el álgebra siguen siendo puntos de discusión (Freiman y Fellus, 2021). Una línea abierta de investigación asociada al *cómo* introducir el álgebra es describir las tareas que fomentan el pensamiento algebraico (Dörfler, 2008; Lannin, 2005). En este estudio se busca caracterizar dichas tareas teniendo en cuenta que el aprendizaje es una forma de acción mediada por signos y limitada por la situación en la que se produce (Leont'ev, 1974; Vygotski, 1978/1979; Wertsch, 1981), es decir, depende de las necesidades, demandas y motivos de la actividad. Consideramos que el conocimiento de los estudiantes no solo se desarrolla de acuerdo a las demandas de las tareas, sino que también depende de la comunicación e interacción social.

1.1.3. Justificación desde el Currículum

En distintos países el álgebra ha sido incorporada en el currículo desde los primeros cursos de primaria, tal como lo han constatado investigaciones previas (e.g. Cai y Knuth, 2005; Merino et al., 2013). En España, país donde se desarrolla esta tesis, según lo señalado el Real Decreto 126/2014, se espera que todos los estudiantes al finalizar la Educación Primaria logren "describir y analizar situaciones cambiantes, reconocer patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p.19387). También se aborda el desarrollo de habilidades que fomentan el pensamiento algebraico, entre ellas comunicar. Se espera que los estudiantes logren “expresar verbalmente y de forma razonada el proceso seguido en la resolución de problemas; elaborar conjeturas y buscar argumentos que las validen o refuten en contextos numéricos, geométricos o funcionales” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p.19388). Mientras que, en Chile, país de procedencia de la autora esta tesis, en las bases curriculares vigentes para la Educación Primaria (Ministerio de Educación de Chile, 2012a) se espera que los estudiantes “expliquen y describan múltiples relaciones como parte del estudio de la matemática” (p.91) y se promueve el desarrollo de las habilidades de argumentar y comunicar, resolver problemas, representar y modelar. En concreto sobre la habilidad de representar se señala que los estudiantes tienen que “manejar una variedad de representaciones matemáticas de un mismo concepto y transitar fluidamente entre ellas lo que permitirá lograr un aprendizaje significativo y desarrollar su capacidad de pensar matemáticamente” (p.90). La habilidad de argumentar y comunicar es relacionada con el álgebra señalando que “se expresa al descubrir inductivamente regularidades y patrones en sistemas naturales y matemáticos y tratar de convencer a otros de su validez” (Ministerio de Educación de Chile, 2012b, p.32). Otros países que incluyen en sus lineamientos curriculares el álgebra desde los primeros cursos y que actúan como referentes para argumentar la relevancia curricular de esta investigación son Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers [NGA Center y CCSSO], 2010); Canadá (Ontario Ministry of Education and Training, 2020), Australia (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2015) y Finlandia (Finnish National Board of Education, 2014). Tal como lo menciona Pinto (2019) algunos de los aspectos que comparten los distintos lineamientos curriculares son: (a) la introducción del pensamiento algebraico a temprana edad; (b) la incorporación del pensamiento algebraico sin introducir nuevos contenidos, más bien potenciando los existentes desde el enfoque algebraico; (c) el fomento de la búsqueda de regularidades, y (d) la interpretación de la aritmética en términos generales.

Considerando que diversas directrices curriculares incluyen el álgebra desde los primeros cursos, es relevante informar sobre el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de Educación Primaria y sobre los primeros significados y reacciones de los estudiantes al relacionarse con diversos elementos algebraicos (Merino et al., 2013; Molina et al., 2018). Asimismo, es importante informar sobre las características de las tareas propuestas a los estudiantes que permiten que estos piensen de modo algebraico. En particular, en esta tesis el foco está en describir y analizar el proceso de representación de la generalización de relaciones funcionales llevado a cabo por estudiantes de Educación Primaria y caracterizar las tareas que favorecen este proceso.

1.1.4. Justificación Desde la Docencia

Como consecuencia de que el álgebra se haya incorporado desde temprana edad en distintos currículos escolares es importante dar información relevante a los docentes sobre lo que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que fomentan el pensamiento algebraico y cómo se caracterizan dichas tareas. Parte central de la actividad de diseño e implementación que un profesor debe realizar consiste en identificar el significado de cada concepto y estructura que forme parte del contenido de la matemática escolar. Además, debe promover los sentidos o modos de uso con lo que se trabajan y aplican dichos conceptos (Rico, 2015). Asimismo, es importante que los maestros actúen atendiendo a lo que los estudiantes hacen y dicen, que se sensibilicen con sus experiencias y los escuchen (Mason, 2017). Es por esto que en esta tesis se persigue contribuir a la identificación de las ideas y concepciones de los estudiantes y su forma de representar cantidades indeterminadas y, a su vez, informar sobre experiencias enseñanza y aprendizaje que pueden ser referentes para dar la oportunidad a los estudiantes de participar en situaciones de aprendizaje variadas que les permitan generar significados amplios y ricos.

Se busca proporcionar datos empíricos fundamentados para desarrollar el pensamiento algebraico, y en particular el pensamiento funcional, describiendo en detalle experiencias de enseñanza y aprendizaje que no incorporan nuevos contenidos, sino que trabajan las operaciones básicas como una función. En esta propuesta el objetivo es mostrar ejemplos de cómo se pueden adaptar historias problemáticas con preguntas que invitan a analizar una serie de casos particulares y luego generalizar a partir de ellos (Molina et al., 2018). Además, al describir las tareas se espera proporcionar información útil que ayude a los docentes a construir y proponer tareas en las que sus estudiantes tengan oportunidad de desarrollar su pensamiento algebraico.

1.2. PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

El objetivo general de esta tesis es describir y analizar el proceso de representación de la generalización de relaciones funcionales llevado a cabo por estudiantes de Educación Primaria y relacionar dicho proceso con las características y demandas de las tareas propuestas. Este objetivo se concreta en los siguientes cinco objetivos específicos:

O.1. Identificar las concepciones de los estudiantes sobre las letras como representación de cantidades indeterminadas, a partir de sus intervenciones orales y producciones escritas en el marco de un experimento de enseñanza en el que se proponen tareas funcionales de generalización.

O.2. Describir cómo cambian las concepciones de las letras como representación de cantidades indeterminadas puestas de manifiesto por los estudiantes.

O.3. Identificar las representaciones utilizadas por los estudiantes para expresar la relación funcional involucrando cantidades indeterminadas.

O.4. Describir los cambios de las representaciones de la relación funcional involucrando cantidades indeterminadas, puestas de manifiesto por los estudiantes.

O.5. Relacionar las representaciones empleadas por los estudiantes para expresar cantidades indeterminadas y las características de las tareas propuestas.

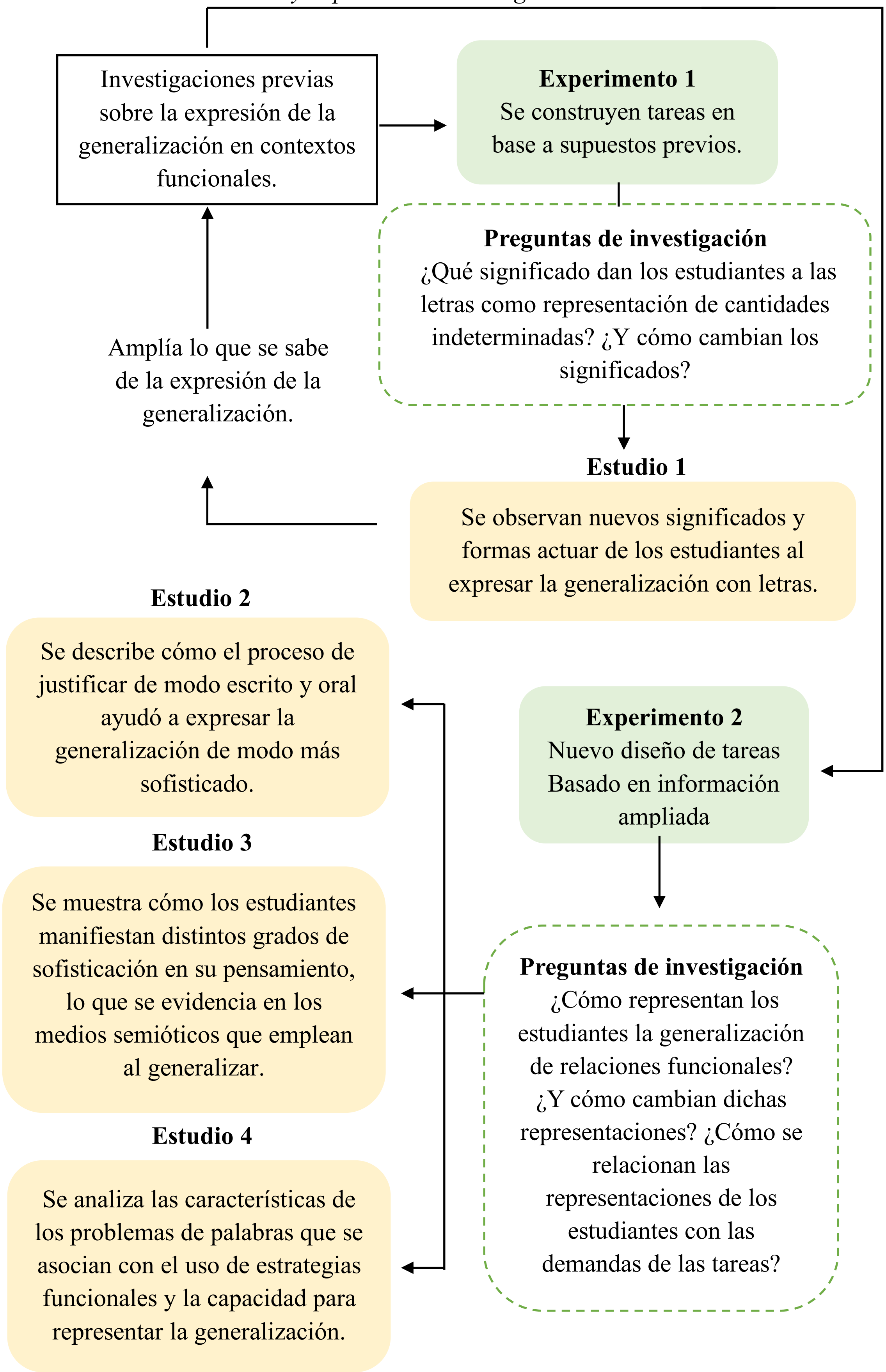
Al hablar de "concepciones de los estudiantes" hacemos referencia a las ideas o al conocimiento de los estudiantes con respecto a un tema, en los objetivos específicos 1 y 2 se pretende conocer los significados personales que le otorgan a las letras como representaciones de cantidades indeterminadas en el contexto de la resolución de problemas que involucran una función. Estos objetivos específicos responden a las preguntas: ¿Qué significado dan los estudiantes a las letras como representación de cantidades indeterminadas? ¿y cómo cambian los significados?

Con respecto a los objetivos específicos 3, 4 y 5, el interés es conocer cómo los estudiantes expresan y justifican ideas que involucran cantidades indeterminadas. Para esto se consideran diversas formas de comunicar dichas ideas matemáticas, tales como lenguaje alfanumérico, lenguaje natural, gestos, entre otros. Además, el interés es relacionar el proceso de representación con las características y demandas de las tareas propuestas. Para caracterizar las tareas se contemplan factores como la interacción social, los medios semióticos involucrados, el tipo de justificación solicitada y las características de los problemas presentados. Estos objetivos responden a las siguientes interrogantes: ¿cómo representan los estudiantes la generalización de relaciones funcionales? ¿Y cómo cambian dichas representaciones? ¿Cómo se relacionan las representaciones de los estudiantes con las demandas de las tareas?

La Figura 1-1 muestra de forma esquemática en qué momento del proceso de investigación se abordaron cada una de las cuestiones de investigación. Esta investigación se estructura en cuatro estudios desarrollados en dos fases. En el Estudio 1 se realiza un análisis retrospectivo de los resultados recogidos durante los cursos 2014/2015 y 2015/2016 en el marco de un experimento de enseñanza. El objetivo es conocer las ideas que los estudiantes le asocian a las letras (representación convencional de cantidades indeterminadas) y contrastar en el contexto español los hallazgos observados en otros contextos. Estos resultados permitieron ampliar los antecedentes sobre la expresión de la generalización y con base a estos la autora de esta tesis participó en el diseño e implementación de un segundo experimento de enseñanza que se llevó a cabo en el curso 2017/2018. En esta segunda fase el objetivo fue describir qué hacen los estudiantes para llegar a expresar una relación general y cómo esto se relaciona con otros factores, tales como: el proceso de justificar e intercambiar ideas con otros y las características de las tareas propuestas, es decir, el tipo de justificación solicitada y los medios semióticos involucrados (Estudio 2); los medios semióticos empleados por los estudiantes y su respectiva contracción semiótica durante la resolución de un problema que involucra una relación funcional (Estudio 3); y las características de los problemas que favorecieron la generalización y su respectiva representación (Estudio 4).

Figura 1-1.

Relación entre los estudios y el proceso de investigación



Capítulo 2
MARCO TEÓRICO

En este capítulo hacemos explícitos los principios teóricos que sustentan nuestra investigación. En primera instancia abordamos nuestro marco teórico general describiendo como los aspectos semióticos y sociales se relacionan con el proceso de aprendizaje. Luego nos centramos en nuestro marco teórico específico, en el que definimos la visión adoptada sobre pensamiento algebraico, pensamiento funcional, generalización, representación y justificación. En cada uno de los apartados incluimos referencias a investigaciones previas que forman parte de los antecedentes de la investigación realizada.

2.1. MARCO GENERAL

2.1.1. Aspectos Semióticos y Sociales en el Aprendizaje

Para entender e interpretar cómo las personas aprenden nos basamos en ideas de Lev Vygotski (1978/1979) y de A.N. Leont'ev (1974) sobre la psicología y la teoría de la actividad. Ideas que han sido recogidas por Jerome Bruner, John Mason, Luis Radford, James V. Wertsch, entre otros.

En primer lugar, destacamos el rol de la interacción social en el proceso de aprendizaje. Según Vygotski y Leont'ev todo se experimenta en sociedad antes de ser interiorizado. El origen de las funciones psicológicas superiores[1] se sitúa en la relación entre individuos cuando interactúan en cooperación con otras personas y el medio (Vygotski, 1978/1979; Wertsch, 1991/1993). Esto implica que para comprender al individuo es necesario también comprender sus relaciones sociales.

[1] Las funciones mentales superiores son exclusivas de los seres humanos y contemplan percepción, atención, memoria y pensamiento (Vygotski, 1978/1979). Aparecen bajo la influencia de los instrumentos simbólicos (Vergel, 2014).

En segundo lugar, consideramos el aprendizaje como una forma de acción que se caracteriza por estar limitada por la situación en la que se produce, es decir, depender de las necesidades, demandas y motivos de la actividad (Leont'ev, 1974; Wertsch, 1981). Lo anterior se basa en la propuesta de Leonti'ev (1974), quien señala que los sujetos se relacionan con el mundo a través de la actividad, la cual estará orientada por un motivo y se desarrolla mediante acciones y operaciones[2]. En el contexto educativo, la acción que realiza el estudiante debe estar orientada a un objetivo, por lo tanto, él será un solucionador dirigido por un fin. A su vez la necesidad de realizar dicha acción estará relacionada con el motivo de la actividad propuesta.

En tercer lugar, otro punto importante a considerar en la caracterización del aprendizaje es que los seres humanos sólo tienen acceso al mundo de manera indirecta, es decir, obtienen información sobre el mundo y actúan sobre él a través de diversos medios semióticos. Según Vygotski, para quien la mediación semiótica desempeña un papel fundamental, el desarrollo del pensamiento se observa en: los cambios en la forma de mediación de los procesos psicológicos, la transformación que implica la aparición de nuevos instrumentos de mediación o la transformación de los existentes a formas más avanzadas (Vygotski, 1930/1981). En nuestro estudio adoptamos una perspectiva multimodal del pensamiento. Consideramos que el pensamiento se produce en y a través de una sofisticada coordinación semiótica; por ejemplo, en caso de las matemáticas, las personas comprenden ideas matemáticas empleando diversos recursos cognitivos, materiales y perceptivos, tales como símbolos orales y escritos, dibujos, artefactos físicos y electrónicos y su propio cuerpo (Radford et al., 2009).

En cuanto a la relación de los aspectos semióticos y el aprendizaje de las matemáticas, los signos y su representación tienen un rol crucial: por una parte, permiten entender cómo las personas conocen y comprenden los objetos matemáticos y, por otra, permiten hacerlos presentes. Sobre el primer punto, consideramos que los signos son herramientas psicológicas que permiten a los sujetos reflexionar, planificar y llevar a cabo diversas acciones; actúan como mediadores culturales (Radford y Sabena, 2015). Los signos están incluidos en la actividad de los niños alterando la forma en que entienden el mundo y a sí mismos (Presmeg et al., 2016; Wertsch, 1991/1993). Su evolución implica

[2] Las acciones y operaciones son diferentes. Mientras que las primeras conectan la actividad con el contexto y pueden ser mentales o físicas, las segundas son el resultado de la asimilación de las acciones por el cuerpo y la mente y el sujeto es capaz de reproducirlas (Leont'ev, 1974).

el paso de los significados personales o espontáneos a significados matemáticos (conceptos científicos[3]) (Bartolini-Bussi y Mariotti, 2008; Sabena, 2018a). Además, se desarrollan de acuerdo a las demandas de la comunicación e interacción social (Wertsch, 1985/1988). Para entender el significado de los signos no solo es importante interpretar lo que representan, también lo es estudiar el tipo de actividad que permiten realizar (Hitt y Quiróz-Rivera, 2017; Radford, 2000; Vergel, 2014).

Sobre el segundo punto, los objetos matemáticos al ser ideales necesitan estar mediados por signos para representarlos a los demás y a uno mismo, así como para trabajar con ellos. Los signos se emplean como vehículos; no son los objetos matemáticos en sí mismos (Presmeg et al., 2016). Al hacer uso de múltiples representaciones, y hacerlo flexiblemente, se promueve aprendizajes matemáticos más profundos (Blanton y Kaput, 2011). Además, distintas representaciones destacan distintos aspectos de la situación (Blanton, 2017; Smith, 2008). En el contexto del pensamiento algebraico, en la medida que se incentiva a los estudiantes a tener confianza en la expresión de sus ideas y surgen múltiples representaciones de la generalización, su expresión es más fácil (Mason, 1996).

2.1.2. Aspectos Semióticos y Sociales en Educación Matemáticas

Los aspectos semióticos han sido estudiados desde distintas perspectivas dentro del área de la educación matemática. Una idea compartida es que los signos constituyen el puente de acceso a los objetos conceptuales (Cantoral et al., 2006). Desde una perspectiva epistemológica Rico (2009) señala que la representación de un concepto matemático consiste en hacerlo presente mediante unos signos específicos, convencionales y contextualizados, con unas reglas sintácticas de procesamiento. Dicha representación no agota el concepto, sino que sólo pone de manifiesto algunas de sus propiedades. Desde una perspectiva cognitiva, los conceptos son representados a través de representaciones internas (mentales) y representaciones externas. El vínculo entre estas es que las representaciones externas reflejan de alguna manera el funcionamiento mental. Se aprende de manera activa cuando se elaboran significados e identifican sentidos en situaciones personales, sociales y científicas. Realizando una adaptación de

[3] Vygotski en su libro "Pensamiento y lenguaje" diferencia los *conceptos cotidianos* o e*spontáneos* de los *conceptos científicos*. Los conceptos *espontáneos* son de naturaleza inductiva y se basan en la experiencia individual del que aprende, mientras que los conceptos *científicos* son transmitidos de forma sistemática por instituciones dentro de cada sociedad en particular (Vygotski, 1986/1995). Aunque son diferentes, estos conceptos están estrechamente relacionados dado que los conceptos cotidianos median en la adquisición de los conceptos científicos.

las ideas de Frege, Rico señala que al otorgar significado el aprendiz es capaz de identificar qué es o en qué consiste un concepto, propiedad o relación; puede expresarlos haciendo uso de signos y reglas de representación; y reconoce situaciones, contextos y modos de uso (Rico et al., 2015). Además, señala que el aprendizaje tiene lugar en contextos singulares culturalmente definidos. La interacción, negociación y comunicación con otras personas son relevantes en este proceso. El aula juega un papel decisivo; en ésta el docente tendrá el rol de diseñar e implementar clases en las cuales identifica el significado de cada concepto y de cada estructura que forma parte del contenido de las matemáticas escolares (Rico, 2015; Rico et al., 2015).

La Teoría de las Representaciones semióticas, impulsada por Raymond Duval, también está inspirada en la teoría de Frege. Propone que lo epistemológico no debe ser separado de lo cognitivo, es decir, la naturaleza y forma como se presenta el objeto estudiado deben estar ligadas a sus formas de acceso y comprensión (Duval, 2017). Las personas no tienen acceso directo a los objetos sino solo a los sistemas simbólicos que representan la realidad, es por esto que es fundamental el análisis de las producciones de los estudiantes (Duval, 1993). Representar se caracteriza como la operación de designar el objeto, el cual es abstracto e ideal (D'Amore et al., 2015). Al igual que Rico, Duval distingue entre representaciones mentales y externas. Las representaciones semióticas son un medio para exteriorizar las representaciones mentales de un individuo, de este modo son visibles o accesibles a los demás. Las representaciones mentales son imágenes y concepciones personales de un objeto. El conocimiento comienza cuando ya no se confunde la representación del objeto con el objeto mismo (Duval, 2017). El significado y comprensión de un objeto matemático se basa en el uso de distintas representaciones y registros semióticos[4] y su progresiva articulación (D'Amore, 2006). Uso y articulación son el centro de la actividad matemática.

Desde una perspectiva histórico-cultural, Radford (2006a, 2018a) inspirado en el materialismo dialéctico y la escuela de pensamiento de Vygotski, denomina la actividad de aprendizaje como labor conjunta de estudiantes y profesores (Radford, 2020). En su propuesta se refiere tanto a los conocimientos a aprender como la formación de los estudiantes como sujetos éticos y reflexivos. Propone que el aprendizaje implica

[4] Las representaciones semióticas son los signos y reglas que tienen un carácter intencional (Duval, 1993). Los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, tales como: registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro figural.

dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura. Las principales fuentes de elaboración de los significados son los medios semióticos de objetivación y la interacción social (Radford, 2000). Los medios para mostrar el objeto son llamados medios semióticos de objetivación e incluyen objetos, artefactos, herramientas, términos lingüísticos, gestos, dibujos, marcas y signos en general que se utilizan con el fin de volver aparente una intención y de llevar a cabo una acción[5]. Las personas hacen uso intencionalmente de los medios semióticos de objetivación para lograr una forma estable de conciencia, para hacer evidentes sus intenciones y llevar a cabo sus acciones y así lograr el objetivo de sus actividades (Radford, 2003). Los estudiantes participan progresivamente en el mundo social por medio de la actividad semiótica multimodal, la cual paulatinamente se organiza y refina (Radford, 2018a). Los signos son el resultado de la contracción semiótica de acciones sociales previamente realizadas en el plano social (Radford, 1999). La interacción social es más que la mera negociación de significados o un ambiente que ofrece estímulos para la adaptación cognitiva, es consustancial al aprendizaje y consiste en la toma de consciencia de conceptos culturales y la formación de las capacidades específicas del individuo.

Mason y colaboradores (Mason et al., 2005; Mason y Johnston-Wilder, 2004a), basándose en la Teoría de la actividad de Vygotski (1978/1979) y Leont'ev (1981), pero desde la tradición idealista-constructivista, señalan que la mente se desarrolla y puede ser comprendida dentro de un contexto de interacción con otros y el ambiente. En el proceso de enseñanza y aprendizaje diferencian entre la intención de la tarea (lo pretendido) y la actividad de los estudiantes (lo que hacen e interpretan a modo personal). En la actividad matemática, las acciones son llevadas a cabo usando diversas herramientas culturales, como objetos físicos, símbolos u otros, pero la herramienta principal es el lenguaje (Mason y Johnston-Wilder, 2004a). La actividad de los estudiantes no es uniforme a lo largo de una lección o lecciones, hay un flujo de actividades que serán guiadas por la interacción. En primera instancia la actividad de los estudiantes se puede caracterizar como un ciclo en espiral en el cual los estudiantes manipulan los objetos, dan sentido a las estructuras y relaciones y articulan sus ideas en sentencias generales (Mason, 2017; Mason y Johnston-Wilder, 2004a). Siguiendo la propuesta de Bruner (1966), estos autores distinguen tres modos de representación —Enactivo, Icónico y Simbólico—, los

[5] Este autor no realiza la distinción entre representaciones semióticas y no semióticas, como lo hace Duval. Radford (2003) señala que en la producción del conocimiento se incluyen todos los medios físicos y sensoriales de objetivización, no solo aquellos de carácter intencional.

cuales consideran como tres mundos de experiencias que transitamos a medida que nos movemos en capas de apreciación y comprensión. Los estudiantes cuando no tienen certeza de algo o de su significado, deciden volver a un punto donde se sienten en confianza para dar sentido a lo que hacen. Por otro lado, las actividades de manipular, dar sentido y articular se complementan con las acciones que los estudiantes estarán llevando a cabo de modo paralelo: hacer, hablar y grabar. Los estudiantes hablarán de lo que ellos hacen y sienten como una estrategia dirigida a un objetivo matemático. El hacer se puede volver más eficiente cuando se trata de grabar las acciones y expresarlas en palabras, imágenes o movimientos.

2.1.3. Modelos de Análisis de los Signos

La semiótica ayuda a entender el papel cognitivo que desempeñan los artefactos y las relaciones entre los signos a través de los cuales los individuos piensan (Radford, 2006b). Es importante considerar la existencia de diferentes modelos para estudiar los signos dado que cada uno ofrece distintas herramientas para la investigación. Según Duval (2017), los signos fueron estudiados sistemáticamente desde el siglo XIX, momento en el que surgieron los primeros modelos de análisis de los signos y de su papel en la actividad científica y la comunicación. Los principales exponentes son Saussure, Pierce, Vygotski y Frege. Estos modelos no tienen nada en común, dado que se desarrollaron en distintas áreas del conocimiento y surgieron de distintas preguntas de investigación (Duval, 2017; Radford, 2006b).

Ferdinand de Saussure (1857-1913) se centra en el análisis estructural del lenguaje. Emplea el término semiología para referirse a la ciencia que estudia en qué consisten los signos y cuáles son las leyes que lo rigen (Saussure, 1995, p.33 citado en Radford, 2006b). La pregunta que trata de responder es qué constituye un idioma como sistema de significado común, a pesar de los cambios y variaciones resultantes de sus múltiples usos (Duval, 2017). Define los signos como la unión indisociable de dos elementos de naturaleza psíquica: el concepto (significado) y la imagen acústica asociada (significante) (Radford, 2006b).

Charles Sanders Pierce (1839-1914) acuña el término semiótica y la concibe como la doctrina formal de los signos. Posicionado en la ciencia en general y la lógica, se pregunta por la forma de clasificar los distintos tipos de representación en el proceso de interpretación del significado. Él propone que los signos son algo que representan algo para alguien en algún aspecto o capacidad (Peirce, Collected papers, 2.228, 4.531, citado en Duval, 2017). La representación del signo fue definida como una relación tríadica entre un representamen (que representa), un objeto (que se representa) y un interpretante (signo equivalente creado en la mente de alguien). En su modelo propone que los signos se pueden clasificar de distintos modos. Por ejemplo, según su relación con el objeto se puede clasificar en íconos, índices y símbolos. Los íconos reflejan algo parecido al objeto dado, poseen alguna propiedad del objeto que representan. Los índices no tienen una relación sensible perceptual con el objeto, más bien su conexión es casual o de otro tipo. Lo símbolos son signos arbitrarios relacionado con el objeto en virtud de una ley o convención (Iori, 2014; Radford y Grenier, 1996). En la forma de definir el signo, Pierce no hace ninguna prescripción sobre lo que puede considerarse como tal (Sabena, 2018a).

Lev Vygotski (1896-1934) desarrolla sus ideas con el objetivo de estudiar el pensamiento y su desarrollo desde una perspectiva histórico-cultural. Para él los signos son medios de transformación de las funciones psicológicas del individuo (Vygotski, 1979). Signo y símbolo son sinónimos; junto con las herramientas son medios semióticos que cumplen la función alteradora de la estructura de las funciones mentales (Radford, 2000). Esta visión de los signos fue complementada por Leont'ev, quien, a través de la teoría de la actividad, señaló que la evolución de los significados debe ser vista bajo el prisma de las relaciones siempre en movimiento de los individuos y de la naturaleza (Radford, 2006b).

Gottlob Frege (1848-1925) propone un modelo de estudio posicionándose en la matemática y la lógica. Aborda la complejidad de las representaciones principalmente dentro de las escrituras simbólicas (Panizza, 2018), dado que el conocimiento matemático puede ser derivado de principios más que experiencias sensibles (Radford, 2002). Se pregunta cómo el proceso semiótico produce un nuevo conocimiento matemático (Duval, 2017). Aborda el estudio de los signos a través de un esquema tríadico compuesto por: signo, objeto y sentido. El signo representa al objeto y a través del sentido expresa un conocimiento del objeto. Para que algo sea considerado signo es condición necesaria que tenga sentido, aunque puede carecer de referencia (Rivas, 1996).

2.2. MARCO ESPECÍFICO

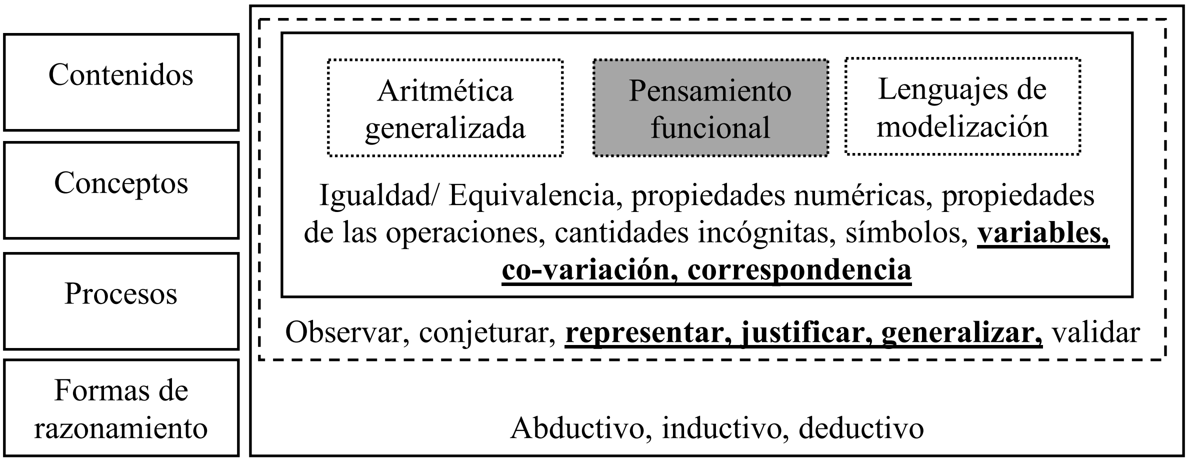
2.2.1. *Álgebra Escolar y Pensamiento Algebraico*

El álgebra es multidimensional (Kaput, 2000; Kieran, 1996; Molina y Castro, 2021; Pitta-Pantazi et al., 2020; Usiskin, 1988) y no existe acuerdo sobre su definición. Con la finalidad de incorporar su estudio en Educación Primaria han surgido diversos enfoques que consideran distintos componentes y concepciones del álgebra escolar, tales como: aritmética generalizada y estudio de patrones, enfoque funcional, resolución de problemas, estudio de estructuras y lenguaje algebraico (Molina, 2012).

Tampoco hay consenso sobre cómo definir el pensamiento algebraico (Carraher y Schliemann, 2018; Driscoll, 1999; Kaput, 2008). Realizando un estado del arte de las investigaciones relacionadas con el pensamiento algebraico Chimoni et al. (2018) distinguen cuatro dimensiones para describirlo: líneas de contenido básico (aritmética generalizada, pensamiento funcional y lenguaje de modelización), conceptos (e.g. igualdad/equivalencia, variables, covariación), procesos (e.g. representar, justificar y conjeturar) y formas de razonamiento (e.g. abductivo, inductivo y deductivo). La relación entre estas dimensiones se muestra en la Figura 2-1 la cual nos permite situar los elementos del álgebra que son abordados en esta tesis.

Figura 2-1.

Dimensiones básicas para describir el pensamiento algebraico



Nota. Fuente (Chimoni et al., 2018)

En este estudio asumimos que el pensamiento algebraico se caracteriza por diversas actividades que incluyen: a) referirse a cantidades indeterminadas o desconocidas, b) tratar las cantidades indeterminadas de forma analítica (Radford, 2018b); c) expresar y manipular la generalidad (Mason, 1996); y d) razonar sobre la generalidad y reconocer la estructura algebraica subyacente en una situación y las relaciones entre las cantidades (Kieran, 1989). Compartimos la opinión de que el pensamiento algebraico puede cultivarse antes de que se introduzca la notación algebraica (Carraher y Schliemann, 2010; Radford, 2018b).

El pensamiento algebraico es promovido en situaciones que involucran cantidades indeterminadas, las cuales pueden ser incógnitas, variables, parámetros o números generalizados. La representación de estas cantidades puede ser variadas, sin limitarse al uso de símbolos alfanuméricos. Los estudiantes pueden recurrir a modos personales, idiosincráticos y no tradicionales para representar las cantidades indeterminadas y sus operaciones. La analiticidad significa que, aunque las cantidades sean desconocidas, se suman, restan, multiplican o dividen, como si fueran conocidas (Radford, 2018b, p.8). Además, implica deducir métodos generales para resolver problemas similares (Ursini, 2001).

Asimismo, el álgebra es el lenguaje para la expresión y manipulación de la generalidad, la cual es una actividad innata y natural en los niños. Estas dos habilidades, que se manifiestan de diversas formas, son relativas y dependen de cada sujeto (Mason, 1996). El pensamiento algebraico es apoyado y generado por experiencias kinestésicas e imaginarias, que poco a poco dan paso a la manipulación de lo abstracto (Mason, 2003).

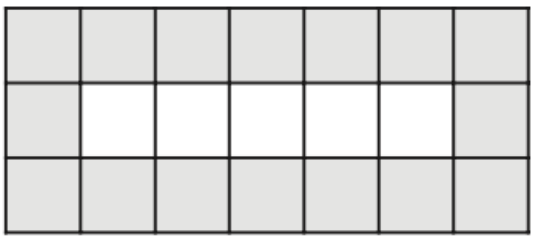
Sobre reconocer la estructura algebraica subyacente en una situación y las relaciones entre las cantidades, algunos autores concuerdan que esta expresión de la generalidad conduce a la descripción o captura de cierta estructura (e.g. Cooper y Warren, 2011; Molina, 2006). Atender a la estructura y generalizarla, más que centrarse en el cálculo, puede ayudar a ser matemáticamente exitoso (Blanton y Kaput, 2011). No obstante, la noción de estructura, al igual que otros conceptos desarrollados previamente, no tiene un significado único y consensuado. Este puede variar según la concepción del álgebra a la que esté asociado (Molina y Cañadas, 2018). En la aritmética generalizada se puede entender como un sistema compuesto por un conjunto de objetos matemáticos, una o más operaciones, así como ciertas propiedades y relaciones de y entre estos objetos y operaciones (Castro et al., 1997). En el estudio de patrones y funciones, la estructura refiere a una regularidad susceptible de ser generalizada que relaciona los conceptos y procedimientos matemáticos involucrados (Molina y Cañadas, 2018; Warren et al., 2013). En el álgebra como resolución de problemas, la estructura se relacionará con el significado de las operaciones implicadas (la estructura semántica del problema) (Molina y Cañadas, 2018).

Pinto (2019) observa que en los diversos enfoques una característica común de la idea de estructura es que “permite centrarse en las relaciones entre los elementos que la componen, más que encontrar una respuesta única” (p.91). Los estudiantes representarán las relaciones subyacentes en las situaciones sin tratar de obtener una respuesta numérica. Por ejemplo, en la situación que se muestra en la Figura 2-2, tomada de Pinto y Cañadas (2017), podrían emplear la expresión $2x + 6$ para expresar la cantidad de baldosas grises necesarias. La estructura de dicha situación también se puede representar de otros modos equivalentes, tales como: (a) La cantidad de baldosas grises es el doble de la cantidad de baldosas blancas más seis; (b) x + x + 6; (c) 2 □ + 6 (donde □ representa la cantidad de baldosas blancas); entre otras.

Figura 2-2.

El problema de las baldosas

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen:



Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

Cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones algebraicas pueden realizar actividades que incluyen acciones de explorar, formular, revisar y validar conjeturas, organizar datos e identificar una estructura (Blanton, 2008; Cañadas y Castro, 2007; Pinto y Cañadas, 2018). Describimos cada una de estas actividades en la Tabla 2-1 tomando como ejemplo el desarrollo del pensamiento funcional. Estas acciones podrían llevar a los estudiantes a plantear conclusiones por medio de diversos razonamientos tales como de abducción, inducción o deducción. Al fomentar estas acciones de modo intencionado los estudiantes toman los argumentos en serio como formas de construir un conocimiento confiable, interactúan con ideas matemáticas complejas, así como negocian nuevos sistemas de notación y herramientas que les permiten pensar matemáticamente (Blanton y Kaput, 2011).

Tabla 2-1.
Acciones llevadas a cabo en situaciones algebraicas

Actividad del estudiante	Descripción
Explorar	Experimenta y busca solución a situaciones que involucran casos particulares.
Organizar datos	Organiza los datos de alguna manera, como por ejemplo una tabla.
Identificar una estructura	La estrategia de acción se fija y se extiende a otros casos, explicitando cómo esta se relaciona con la situación propuesta.
Conjeturar	Propone una afirmación que explica la relación entre las variables.
Validar	Explica la veracidad de su conjetura.
Extender la acción/ generalizar	Replica de modo consistente una estrategia para establecer la relación entre diversos casos propuestos. Si logra verbalizar esta relación y lo hace de modo general, se produce la generalización como producto.
Revisar la acción/conjetura	Busca otra estrategia o modifica su conjetura.

2.2.2. La Investigación Sobre el Pensamiento Algebraico

La investigación sobre el álgebra escolar y las discusiones sobre su enseñanza y aprendizaje han tenido distintos focos a lo largo de los años, los cuales se relacionan con diferentes temáticas de interés, concepciones del álgebra y marcos teóricos (Kieran, 2006; Molina, 2012). Con respecto a la enseñanza del álgebra en Educación Primaria, a principios de la década de los noventa se comienza a promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde el inicio de la escolaridad de los niños[6] (Lins y Kaput, 2004). No obstante, es a partir del año 2007 cuando comienza a tener más fuerza al difundirse las reflexiones de expertos que formaban parte del grupo *Early algebra.* Ellos

[6] En las décadas anteriores algunas investigaciones habían abordado la enseñanza del álgebra en primaria (Davydov, 1962; Freudenthal, 1974) o señalado la importancia del álgebra desde estos niveles (Davis, 1989; Vergnaud, 1988). Sin embargo, es en la década de los noventa cuando cobra mayor fuerza.

proponen introducir el álgebra desde primaria con el objetivo de llevar a las clases situaciones matemáticas que favorezcan el desarrollo de habilidades matemáticas (Blanton et al., 2007). Estas reflexiones se realizaron en el contexto de una actividad organizada por la *Mathematical Association of America* (MAA) en el año 2006.

James Kaput destacó que el álgebra debe comprenderse más como una forma de pensar que como un tema en particular. A través de la propuesta *Early algebra* se busca "algebrizar" las matemáticas elementales, lo que implica potenciar el currículum tradicional y crear hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura matemática (Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 2000). Se busca promover mayor grado de generalización en el pensamiento de los estudiantes de primaria y aumentar su capacidad de expresar esa generalización (Brizuela y Blanton, 2014; Molina, 2009). Kaput (2008) caracteriza el pensamiento algebraico como "un proceso de simbolización complejo cuyo propósito es el de generalizar y razonar con esas generalizaciones" (p.9).

Las ideas del autor antes mencionado fueron desarrolladas y ampliadas por Blanton y colaboradores (2011). Estos investigadores organizan las ideas de Kaput (2008) en tres áreas o enfoques al algebra escolar: a) aritmética generalizada, b) equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones y c) estudio de las funciones. Además, incluyen cuatro procesos transversales denominados prácticas del pensamiento: generalización, representación, justificación y razonamiento sobre generalizaciones.

Por su parte, Radford y Mason también proponen promover el aprendizaje del álgebra desde primaria; en su caso adoptan una perspectiva distinta a la de Kaput. Mason destaca que los estudiantes tienen capacidades naturales para generalizar y expresar esa generalización, las cuales deben ser explotadas en el desarrollo del pensamiento algebraico. El álgebra es caracterizada como el lenguaje para manipular, expresar y razonar sobre la generalidad (Mason et al., 1985). Con respecto a la generalidad, señala que no es una noción única, sino relativa al dominio de confianza de un individuo, depende de la interpretación personal, dado que lo que es simbólico y abstracto para uno, puede ser concreto para otro (Mason, 1996). Además, en sus trabajos apoya la idea de que el uso del simbolismo algebraico no es en sí mismo álgebra. Este autor en sus trabajos realiza una amplia propuesta de tareas y principios para implementar su propuesta, para él es importante que los profesores actúen atendiendo a lo que hacen y dicen los estudiantes (Mason et al., 1985; Mason et al., 2005; Mason y Johnston-Wilder, 2004a). Por ejemplo, señala que es importante desarrollar dos tipos de percepciones: mirar la generalidad en lo particular y, de modo inverso, ver lo particular en lo general (Mason, 2003). También propone tratar las generalidades como conjeturas que se deben justificar (Mason, 2017).

Radford (2014, 2018b) señala que el pensamiento algebraico se caracteriza por referir a cantidades indeterminadas (incógnitas, variables y los parámetros) y razonar de manera analítica con estas, recurriendo a modos idiosincráticos o específicos evolucionados culturalmente para representar la indeterminación y sus operaciones. Propone que el pensamiento algebraico está basado en niveles de generalidad los cuales están estrechamente relacionados con los sistemas semióticos que se emplean. En el contexto de la resolución de problemas de patrones, propone los siguientes tres niveles: pensamiento factual, pensamiento contextual y pensamiento simbólico (Radford, 2010a, 2010b). En sus trabajos (e.g. Radford, 2011) muestra como los estudiantes dan sentido a la generalidad movilizando tanto el lenguaje natural como gestos de manera coordinada y eficiente. Cuando una situación no está en al alcance perceptivo de los estudiantes, estos despliegan nuevos mecanismos de objetivización semiótica.

Otros investigadores han destacado que los procesos algebraicos no pueden separarse de las formas básicas de razonamiento dado que las conclusiones a las que llegan los estudiantes cuando se enfrentan a tareas algebraicas dependen de estas (Chimoni et al., 2018; Jeannotte y Kieran, 2017). Por ejemplo, las investigaciones han estudiado las formas de razonamiento abductivas, inductivas y deductivas llevadas a cabo por los estudiantes. En la literatura estos tipos de razonamiento se han definido de distintos modos. Rivera y Becker (2007) destacan el rol del pensamiento abductivo en la predicción plausible sobre la generalización y en la formación de conjeturas. La abducción es un tipo de inferencia explicativa limitada por la realidad y el conocimiento incompleto. Señalan que el proceso de transformar posibilidades en generalidades siempre comienza con una abducción. Por ejemplo, este tipo de razonamiento, por sí solo, no permitiría justificar o demostrar que una afirmación se cumple para todos los casos posibles, no obstante, permite la reflexión sobre la validez de una afirmación a partir de hechos conocidos y la generación y formación de hipótesis o teorías mediante el ensayo y error. Radford (2013) identifica la abducción como un elemento importante en el proceso de generalización, en sus propias palabras, esta permite deducir y generalizar la relación involucrada en una situación dada.

El razonamiento inductivo también tiene un rol importante en el proceso de generalización, es un tipo de razonamiento que también va de lo particular a lo general, permite identificar los elementos comunes y extraer una generalización (e.g. Cañadas y Castro, 2007; Pinto y Cañadas, 2018). Según Rivera y Becker (2007) distinguir una abducción de una inducción es difícil, el rol que le asignan a la inducción es de confirmación, es decir, demostrar que algo es realmente operativo. Por ejemplo, en el proceso de generalización se podría analizar una serie de casos dados y generar y justificar una posible generalización abductiva. Si luego esta generalización se aplica a casos más allá de los dados y se prueba su plausibilidad para toda la clase, esa generalización sería inductiva. Si no se logra validar para todos los casos, seguirá teniendo el carácter de abductiva. Finalmente, el razonamiento deductivo es un tipo de razonamiento que va de lo general a lo particular, el cual produce resultados de reglas generales (Rivera, 2017). Este tipo de razonamiento emplea propiedades y principios lógicos que permiten obtener una conclusión que se basan en unas premisas iniciales. Este tipo de razonamiento favorece el tránsito desde generalizaciones limitadas a otras más precisas (Ellis, 2007b).

2.2.3. Pensamiento Funcional

El desarrollo del pensamiento funcional se ha estudiado principalmente desde la perspectiva de la propuesta *Early algebra*. Este tipo de pensamiento se centra en el estudio de las funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real (Cañadas y Molina, 2016). Incluye la generalización de las relaciones entre cantidades que varían en forma conjunta, la expresión de estas relaciones y el uso de dichas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton et al., 2011; Blanton y Kaput, 2011).

El enfoque funcional permite integrar el álgebra en los planes de estudios de matemáticas elementales sin añadir ningún contenido nuevo, sólo interpretando las operaciones aritméticas como funciones. A través de la resolución de problemas, permite tratar las funciones como una variación en contextos cotidianos (Carraher y Schliemann, 2007, 2015; Morales et al., 2018). Su desarrollo desde primaria también podría tener implicaciones en grados superiores, tales como: ayudar a construir herramientas representativas y lingüísticas para analizar, describir y simbolizar patrones y relaciones; o proporcionar un continuo en el que los símbolos como herramientas no son inscripciones abstractas sin sentido, sino herramientas mediante las cuales las ideas pueden ser mediadas y comunicadas (Blanton y Kaput, 2011).

A continuación se define el concepto de función, se describen los elementos que la componen, las relaciones funcionales que se estudian en esta memoria, las diversas formas de representar una función y los modos de representar las variables cuando involucran cantidades indeterminadas.

La Función. En esta investigación las funciones son presentadas a través de tareas contextualizadas, es por esto que, para ejemplificar los conceptos e ideas expuestas en este apartado, tomaremos como ejemplo la situación que se muestra en la Figura 2-3 que fue implementada en una sesión de clase.

Figura 2-3.

Ejemplo de una situación problema

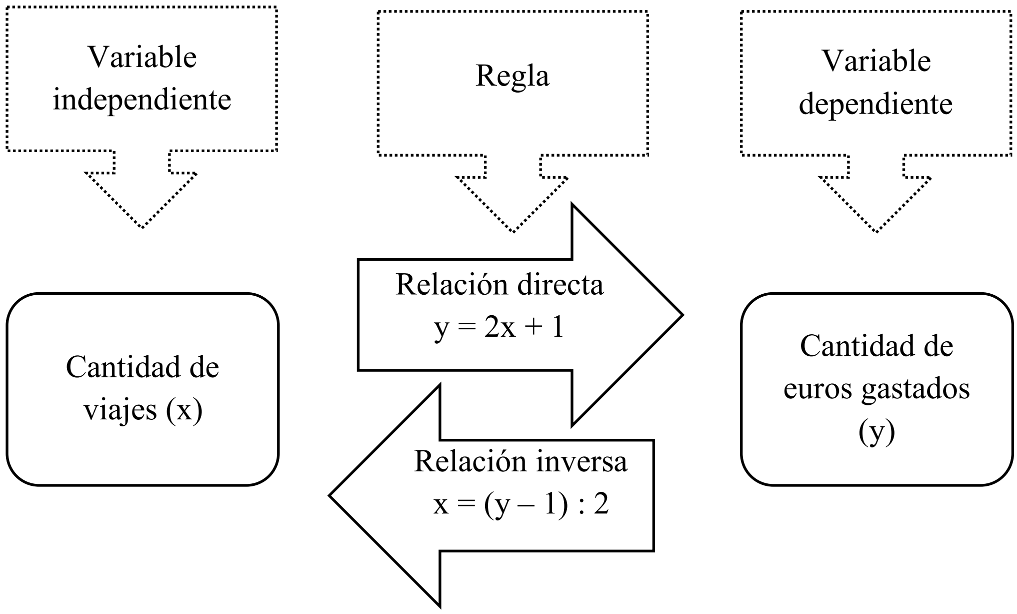
> "Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, compras un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 2 euros".

En el contexto del álgebra escolar una función es una declaración matemática que describe como dos cantidades varían de forma conjunta. Está formada por un dominio, un conjunto de llegada (codominio, o rango si se restringe a los valores que toma la función) y una regla que a cada elemento del dominio le hace corresponder un elemento único del conjunto de llegada (Azcárate y Deulofeu, 1990; Vinner y Dreyfus 1989). También se puede definir como relaciones en las que el valor de cada variable independiente coincide con un valor único de la variable dependiente (Larson y Hostetler 2008). Los valores de la variable independiente pertenecen al dominio, mientras que los de la variable dependiente pertenecen al conjunto de llegada. Determinar cuándo una variable es la independiente o la dependiente esta estrechamente relacionado con cómo se presenten los datos en las tareas propuestas (Blanton et al., 2011) y de cómo visualiza la dependencia la persona que se enfrenta a la situación problema, si es que la observa (Thompson y Carlson, 2017).

Distinguimos dos formas de expresar la regla de correspondencia, también denominada relación funcional. La forma directa refiere a cómo la variable dependiente está relacionada con la independiente y la forma inversa a cómo la variable independiente está relacionada con la dependiente (Merino et al., 2013). En el ejemplo, consideramos la cantidad de viajes como la variable independiente (x) y la cantidad de euros como la variable dependiente (y). La relación directa se aplicará para responder cuántos euros se han gastado en total, mientras que la relación inversa permitirá conocer la cantidad de viajes realizados (ver Figura 2-4).

Figura 2-4.

Elementos y definición de una función



El foco de nuestra investigación son las funciones lineales de la forma *f(x) = mx + n,* dónde m, x y n son naturales ($n, x, m \in \mathbb{N}_0$). Este tipo de funciones involucra componentes multiplicativos y aditivos.

Relaciones Funcionales. El pensamiento funcional se puede evidenciar principalmente cuando los estudiantes establecen relaciones de covariación o de correspondencia entre las variables involucradas en los problemas (Blanton y Kaput, 2011; Smith, 2008). Siguiendo a Smith (2008), una relación de correspondencia consiste en el desarrollo de una regla cerrada para describir la relación entre cantidades. La regla permite analizar y predecir el comportamiento de la función y conocer un valor específico de la variable dependiente, a partir del correspondiente valor de la variable independiente, sin conocer otros valores de la función. Una relación de covariación permite examinar la función en términos de coordinación de cambios de los valores de la variable dependiente (y) y la independiente (x). Es decir, moverse operacionalmente de y_m a y_{m+1} coordinadamente con el movimiento de x_ma x_{m+1} (Stephens, Ellis, et al., 2017). Estas relaciones se ejemplifican en la Figura 2-5 para el problema ejemplo antes presentado.

Figura 2-5.

Ejemplo de relaciones funcionales

Cantidad de viajes	Cantidad de euros ganados
1 El doble	más uno 3
2 a 2x	+ 1 5
b 3 +1	7 b +2
4	9

a. Correspondencia: La cantidad de euros ganados es el doble de la cantidad de viajes más uno.
b. Covariación: Cuando la cantidad de viajes aumenta en uno, la cantidad de euros aumenta en dos.

Los estudiantes también pueden evidenciar relaciones de recurrencia, pero solo las consideramos de tipo funcional cuando conectan ambas variables involucradas en el problema. Este tipo de relación es limitada, ya que puede no implicar una relación entre las variables cuando se refiere a una sola de ellas. En este caso es considerada solo como el primer paso en la construcción del sentido de los datos. En el ejemplo de la Figura 2-5, los estudiantes podrían observar solo la columna *cantidad de euros ganados* y decir que se suma cada vez dos sin explicitar la relación entre dicha variable y la *cantidad de viajes*.

Representación de una Función. En el desarrollo del pensamiento algebraico, en este trabajo consideramos que los estudiantes dan significados a los objetos matemáticos empleando distintos medios semióticos que incluyen tanto sistemas de representación convencionales como no convencionales (Radford, 2002). En el tránsito hacia el uso de notación convencional destacamos la importancia de considerar las formas personales de expresarse de los estudiantes, tal como lo han hecho otras investigaciones (e.g., Cooper y Warren, 2008; Hitt y Quiróz-Rivera, 2017; Malara y Navarra, 2018; Radford, 2018b). Al respecto Kaput y colaboradores (2008) señalan que antes de lograr utilizar las letras y sus convenciones, los estudiantes utilizarán otras formas intermedias de simbolización y crearán un sistema de símbolos convencionales a partir de la comparación de los sistemas que utilizan, esto con el objetivo de buscar una forma económica y eficiente de comunicar sus ideas.

El mayor grado de sofisticación en la expresión de ideas algebraicas lo relacionamos con la idea de contracción semiótica, es decir, con la reorganización de los medios semióticos que se produce como resultado de la mayor conciencia de los estudiantes de los significados e interpretaciones matemáticas (Radford y Sabena, 2015). En una contracción semiótica hay una concentración de significados en la menor cantidad de signos a través de la que se expresa la generalidad (Radford, 2018b). Por ejemplo, volviendo a la situación presentada en la Figura 2-3, para representar la relación entre cantidad de euros gastados según el número de viajes realizados, un estudiante podría en primera instancia dejar implícita las variables de la fórmula y expresarlas a partir de diversos casos particulares numéricos, así como explicar la relación a través de gestos o utilizando material manipulativo. Más adelante su forma de expresar la generalidad podría cambiar y mencionar explícitamente las variables y relacionarlas a partir del lenguaje natural, sin tener que recurrir a ejemplos (La cantidad de euros gastados es el doble que la cantidad de viajes más uno). Finalmente, puede llegar a expresar la relación utilizando la menor cantidad de signos por medio de la fórmula $2x + 1$. El lenguaje simbólico reemplaza al verbal, pues ya no necesitan interpretar la fórmula según el contexto para utilizarla.

A continuación, describimos distintas formas de representar la función y sus elementos. En primer lugar, nos referimos a las representaciones no convencionales, las cuales incluyen los gestos, el lenguaje natural, el material manipulativo y las representaciones pictóricas. Luego, nos centramos en las representaciones convencionales tabular, gráfica y simbólica. De modo convencional, una función puede ser representada de múltiples formas y cada una de estas permite resaltar algunos aspectos o características de las funciones (Castro y Castro, 1997).

Los gestos ayudan a los estudiantes a generalizar y expresar la generalización. Pueden contribuir a llevar a cabo argumentaciones que se apartan de las posturas empíricas y se desplazan a un plano hipotético en el que se aborda la generalidad (Sabena, 2018b). Cooper y colaboradores (Cooper y Warren, 2011; Warren, Miller y Cooper, 2013) observan que, en el contexto de problemas que involucran una función, quienes hicieron menos gestos al explicar sus respuestas a los problemas propuestos tuvieron mayor fracaso. Asimismo, la inclusión de elementos manipulativos permitió a los estudiantes explicar mejor lo que estaba ocurriendo. A modo de ejemplo, en la Figura 2-6 mostramos el trabajo de una estudiante en uno de los problemas utilizados en nuestra investigación: “En un cumpleaños se reparte la misma cantidad de globos a cada invitado y se coloca uno en la puerta para indicar que esa es la casa del cumpleaños, ¿cuántos globos necesita si asisten 15 invitados?”[7]. A través de gestos, la estudiante relaciona cada dedo con un invitado. Verbalizando la secuencia numérica, cuenta tres veces en cada dedo hasta completar 15 dedos. Cuando finaliza, cuenta uno más por el globo de la puerta.

Figura 2-6.

Ejemplo de representación de conteo con gestos

Con respecto al lenguaje natural o lenguaje cotidiano, en su forma escrita y oral, lo caracterizamos como una forma de representación ambigua, dado que una frase puede ser interpretada de más de una manera (Mitchell, 2001). El lenguaje natural es importante para dar significado a representaciones simbólicas (e.g. Molina, 2014; Stacey y MacGregor, 1995). Permite comprender cual es la interpretación dada a ciertas expresiones algebraicas que pueden no ser suficientemente claras dado que lo que escriben los estudiantes podría no tener directa relación con lo que realmente quieren expresar (Radford, 2002).

Otras formas de representación, que pueden ser convencionales[8] o no, son las representaciones con material manipulativo o pictóricas. Las representaciones con material manipulativo permiten a los estudiantes tener consciencia de la situación planteada, es decir, identificar las variables involucradas o comprender el contexto. No obstante, tal como lo menciona Mason (1996), no son garantía de que la generalidad haya sido percibida, más bien son indicadores. Su uso podría enfatizar lo particular y hacer más difícil apreciar lo general. En la Figura 2-7, mostramos el trabajo realizado por un

[7] La función involucrada era $f(x) = 3x + 1$ y la estudiante previamente había encontrado la relación analizando otros casos particulares a partir del reparto con material concreto que se muestra en la parte superior de la imagen.

[8] Dependiendo de las características del material, su uso puede estar normado por alguna convención. Por ejemplo, en los bloques de base 10 hay un acuerdo sobre el modo de representar unidades, decenas, centena, entre otros. Pero los estudiantes también podrían hacer uso de este material de una forma distinta y personal.

estudiante quien resuelve la misma situación presentada en la Figura 2-6. En esta ocasión explica, utilizando material manipulativo, cuántos globos se necesitan cuando asisten diez invitados.

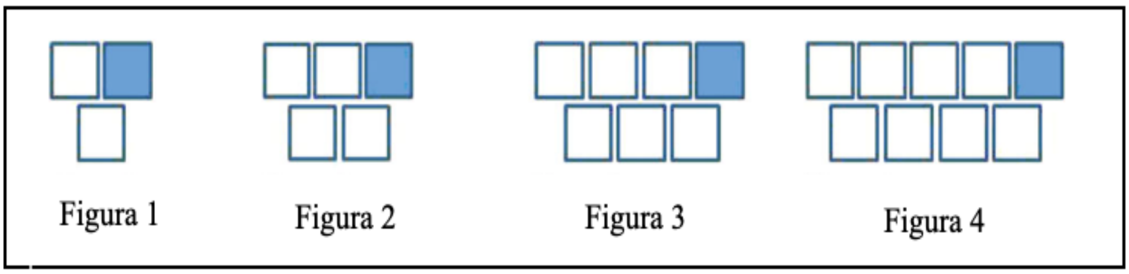
Figura 2-7.

Ejemplo de representación con material manipulativo

Las representaciones pictóricas, por lo general, permiten visualizar la situación problema y la relación entre las variables a través de la relación entre las estructuras espaciales y numéricas. Este aspecto es importante en el pensamiento algebraico dado que se pueden reconocer relaciones algebraicas a partir de la descomposición de figuras (Radford, 2011). En la Figura 2-8, se muestra una secuencia presentada a estudiantes de segundo de primaria cuyos colores y disposición espacial dan pistas de la relación involucrada ($y = 2x + 1$).

Figura 2-8.

Ejemplo de representación pictórica en una tarea de patrones



Nota. Imagen presentada en Radford, 2011, p. 305.

Las representaciones visuales pueden hacer las ideas más concretas y disponibles para la reflexión, así los estudiantes se centran en las ideas matemáticas

(Blanton, 2008). En la Figura 2-9 mostramos cómo un estudiante explicó cómo supo cuántos globos se necesitaban cuando asistían diez invitados escribiendo junto a las imágenes con las que se le presentó el problema.

Figura 2-9.

Ejemplo de representación pictórica

Una representación tabular (ver Figura 2-10) permite organizar los pares de elementos que relaciona la función, identificar y describir los cambios entre las variables (Blanton, 2008) y ayuda a percibir los elementos de entrada y salida, simultáneamente para encontrar la relación funcional (English y Warren, 1998).

Figura 2-10.

Ejemplo de representaciones numéricas y tabular

Cantidad de invitados	Cantidad de globos
4	9
4	4 + 4 + 1
4	4 x 2 + 1

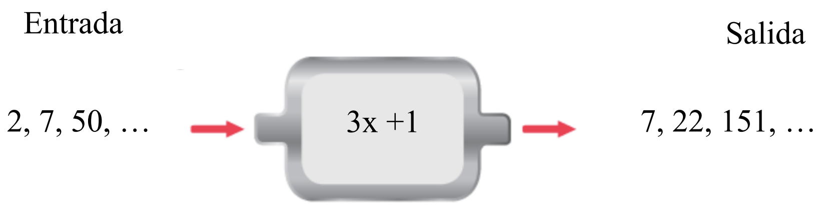
Entre las representaciones gráficas de las funciones encontramos la metáfora de la máquina, el diagrama sagital y el plano cartesiano (ver Figura 2-11).

El uso de la metáfora de la máquina permite destacar que la función es una regla de correspondencia que asocia a un conjunto de entrada, otro conjunto de salida. El caso de la cantidad de invitados y la cantidad de globos se podría ejemplificar como se muestra en la Figura 2-11a. El diagrama sagital permite establecer la relación de correspondencia entre el conjunto de entrada y salida, además de destacar que se están relacionando dos conjuntos (ver Figura 2-11b). El plano cartesiano permite una visión global a nivel cualitativo y cuantitativo. Facilita analizar y visualizar las tendencias, continuidad y variación de una función, pudiendo predecir y estimar su comportamiento sin tener que realizar cálculos (ver Figura 2-11c).

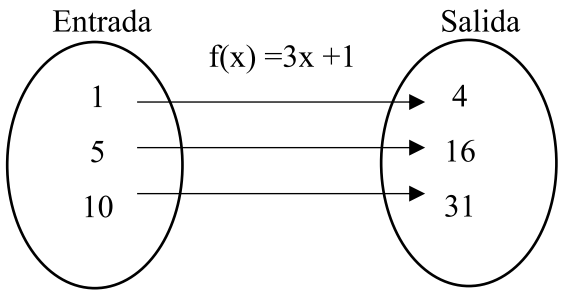
Figura 2-11.

Ejemplos de representaciones gráficas

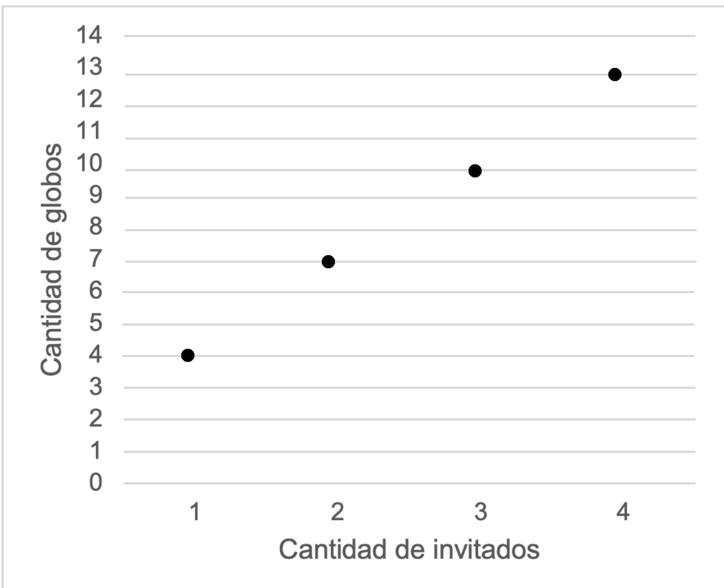
(a) Metáfora máquina



(b) Diagrama sagital



(c) Plano cartesiano



Las representaciones simbólicas a través de simbolismo algebraico permiten expresar las relaciones funcionales haciendo uso de letras y signos aritméticos (e.g. +, –, x, :, =). Brindan una visión cualitativa y cuantitativa general de la función, permitiendo hacer un análisis del comportamiento de la función de manera abstracta. La situación ejemplo sobre la cantidad de globos en el cumpleaños se podría representar como $f(x) = 3x + 1$, donde $x \in \mathbb{N}$.

En la Figura 2-10, se muestran distintas formas de representar numéricamente las variables de una situación utilizando solo números y expresiones aritméticas que permiten visualizar la estructura subyacente. Las expresiones aritméticas pueden ser interpretadas de forma operacional o estructural. En el primer caso, se interpretan como procesos a realizar y la atención se centra en obtener un resultado, mientras que en el segundo las expresiones se conciben como objetos matemáticos y se atiende a las cantidades implicadas y las relaciones representadas (Resnick, 1992). Kieran (1989) y Mason (2003) señalan que tener experiencia con la estructura de expresiones numéricas puede ayudar a los estudiantes a desarrollar su sentido algebraico. En el siguiente apartado describimos formas de representar la variable cuando ésta es una cantidad indeterminada o desconocida.

Representación de Cantidades Indeterminadas. En la literatura se emplean distintos términos para referirse a las cantidades indeterminadas, entre ellos: variables, cantidades desconocidas o cantidades generales. En esta memoria los empleamos como sinónimos.

Para representar una cantidad indeterminada, la convención matemática moderna emplea una letra del alfabeto. El origen de esto podría ser "que los matemáticos optaron por tomar prestados los símbolos de nuestro sistema alfabético para su trabajo en álgebra porque estos símbolos eran familiares y estaban a la mano (particularmente en las imprentas)" (Molina et al., 2018, p.263). No obstante, el uso de letras no es condición suficiente para pensar algebraicamente (Linchevski, 1995).

Otras formas de representación, usualmente propuestas en libros de textos, son las figuras geométricas o imágenes, tal como se muestra en la Figura 2-12. Mason y colaboradores (2005) señalan que el uso de imágenes, como por ejemplo una nube, es una herramienta de transición entre la informalidad del lenguaje natural y la formalidad de las letras.

Figura 2-12.

Ejemplo de representación con imágenes y figuras geométricas

 +  +  + 1	3 x $\triangle$ + 1

También las cantidades indeterminadas pueden ser representadas con lenguaje natural a través de expresiones alusivas al contexto de la situación problema, por ejemplo: *cantidad de dinero*, *número de niños*, o incluso pueden ser dibujadas. Por ejemplo, se puede dibujar una billetera para representar la cantidad de dinero. En este último caso es importante poner atención a los dibujos y distinguir cuándo representan una variable y cuándo son un dibujo literal (Carraher y Schliemann, 2010, p. 24).

Los significados que se le pueden asociar a las cantidades indeterminadas dependen del contexto en el que aparecen (Ursini, 1994; Wagner, 1983). Es así como podrán ser interpretadas como números generalizados, como representantes de cantidades que varían, como incógnitas, como parámetros o como objetos arbitrarios en una estructura (Molina, 2012; Usiskin, 1988). Una construcción adecuada del significado asociado a cantidades indeterminadas implica interpretar de distintas maneras los símbolos que se utilizan para representarlas y tener la posibilidad de pasar de un significado a otro con flexibilidad según las exigencias del problema a resolver (Trigueros et al., 1996; Ursini, 1994).

Investigaciones previas han indagado sobre el significado y uso de la letra como notación algebraica. Estos trabajos han transitado desde el estudio de los errores y dificultades al resolver situaciones con notación algebraica (e.g. Booth, 1988; Küchemann, 1981), siguiendo con el reconocimiento de la importancia de las experiencias de aprendizaje en el proceso de construcción del significado (e.g. Knuth et al., 2011; MacGregor y Stacey, 1997), hasta la manifestación de las capacidades de estudiantes de Educación Primaria para trabajar con estos símbolos y la descripción de los significados que pueden manifestar en distintos momentos. Estas últimas investigaciones concluyen que las dificultades con el simbolismo pueden estar menos asociadas con la edad y más a los conflictos que las notaciones crean con las experiencias y entendimientos previos de los estudiantes. Los estudiantes no rechazan el uso de letras y sus ideas cambian en la medida que participan en experiencias de aprendizaje (e.g. Brizuela et al., 2015; Cañadas et al., 2016; Molina et al., 2018).

Algunos hallazgos evidenciados en investigaciones con estudiantes de primaria concluyen que las discusiones en el aula ayudan a los estudiantes a modificar su comprensión de la letra como notación de variable (Molina et al. 2018). A través de distintos estudios longitudinales, Blanton y colaboradores muestran que los estudiantes de diferentes cursos de primaria son capaces de emplear la notación algebraica, cuando participan en secuencias de enseñanza que incluyen la introducción de representaciones simbólicas progresivamente (e.g. Blanton, 2017; Blanton et al., 2017; Blanton, Stephens, et al., 2015; Brizuela et al., 2015). Otras investigaciones informan sobre la transición entre el uso de sistemas de representación no simbólico y simbólicos (e.g. Radford, 2018b) y sobre los sistemas de representación que utilizan estudiantes que manifiestan pensamiento funcional (e.g. Pinto et al., 2016; Ureña et al., 2019). También se ha informado sobre cómo los estudiantes se refieren a lo indeterminado, señalando la necesidad de seguir indagando en esta cuestión (e.g. Callejo, et al., 2016).

2.2.4. Generalización

La generalización es un aspecto central en el pensamiento algebraico (Kaput, 2008; Mason, 1996) que se puede caracterizar de diversas formas. De modo amplio, se puede interpretar como la acción de reconocer que algunos atributos de la situación pueden cambiar, mientras que otros permanecen invariables (Mason, 2017); o como un proceso que conduce a algo general o más general (Dörfler, 1991).

Entendemos la generalización de patrones y relaciones funcionales como un proceso (generalizing) así como un producto (generalization). El producto de la generalización es la forma en que se expresa la generalidad, es decir, es el resultado de dicho proceso (Ellis, 2007). La generalización como proceso implica: a) identificar los elementos comunes a todos los casos, b) ampliar el razonamiento más allá del rango en el que se originó, y c) obtener resultados más amplios que los casos particulares (Ellis, 2007; Kaput, 1999; Radford, 2013). Al generalizar, la actividad de los estudiantes puede incluir acciones tales como explorar, formular, revisar y validar conjeturas, organizar datos e identificar una estructura (Cañadas y Castro, 2007; Blanton, 2008; Pinto y Cañadas, 2018). Estas acciones podrían llevar a los estudiantes a plantear conclusiones por medio de razonamientos de abducción, inducción o deducción, por ejemplo. Asimismo, los alumnos para responder a los diferentes ítems planteados durante el proceso de generalización, podrían emplear estrategias de conteo u operatoria (suma, resta, descomposición, entre otras) (Cañadas y Fuentes, 2015; Morales et al., 2018).

Durante el proceso de generalización los estudiantes recurren a distintos medios semióticos para percibir, dar sentido y expresar las relaciones observadas. La expresión de la generalidad tendrá distintos grados de sofisticación según la contracción de los medios semióticos empleados. En el grado más sofisticado hay una concentración de significados en la menor cantidad de signos a través de los que se expresa la generalidad (Radford, 2010). Por otra parte, cabe destacar que los medios semióticos empleados pueden tener distintos grados de generalidad para cada individuo, ya que lo que es simbólico y abstracto para uno, puede ser concreto para otro (Mason, 1996).

Un punto importante a tratar es el carácter algebraico de la generalización. Mucho se ha discutido sobre esto y no existe un acuerdo concluyente (e.g. Dörfler, 2008; Radford, 2018). En coherencia con nuestra descripción del pensamiento algebraico, consideramos que una generalización algebraica está caracterizada por: (a) referirse a cantidades indeterminadas, (b) involucrar un razonamiento analítico y (c) recurrir a diversas formas de expresión. Una generalización será aritmética si la relación detectada se aplica de manera local, es decir solo a unos casos sin ser capaz de extenderla y/o no se observa evidencia que permita dar cuenta de la analiticidad del razonamiento (Radford, 2010). Además, en estos casos el foco de atención de los estudiantes será encontrar un resultado numérico concreto, sin establecer relación entre los casos particulares (Blanton, 2017).

En investigaciones previas, en el contexto de la resolución de problemas de patrones (Radford, 2008, 2010b; Vergel, 2015), se han propuesto tres niveles de generalización algebraica caracterizados según los medios semióticos empleados: factual, contextual y simbólico. Por su parte, Mason (1996) propone un tipo de generalización que da cuenta de las posibilidades de pensar algebraicamente, a saber: la generalización en acto. Esta forma de generalizar se observa cuando un estudiante actúa como si percibieran la generalidad, pero no logra expresarla. En este caso la generalidad o lo común es expresado de forma operativa más que predicativa, es decir, se observa en los actos cuando una relación o una acción se extiende a otros casos de forma reiterada e invariante pero no logra llegar a ser enunciada verbalmente (Amit y Neria, 2008; Dörfler, 1991). En el contexto funcional, Blanton, Brizuela, et al. (2015) proponen ocho niveles de sofisticación en el pensamiento de los estudiantes cuando generalizan: pre-estructural. recursivo-particular, recursivo-general, funcional-particular, primitivo funcional-general, emergente funcional-general, condensación funcional-general y función como objeto.

Para establecer estos niveles analizaron el trabajo de estudiantes de 6 años y tuvieron en cuenta la lógica subyacente en las matemáticas aplicadas al resolver una serie de problemas y la naturaleza de las relaciones que fueron identificada. Ureña (2021) observa que estudiantes de primaria, en España, muestran evidencias de generalizar a través de distintas formas de representación, verbal, genérica y simbólica, y describe las ayudas o mediaciones que favorecieron la expresión de la generalización.

2.2.5. Justificación

Fomentar la justificación ayuda a refinar la generalización (Stephens, Ellis, et al., 2017). La definición de justificación y argumentación en la literatura sobre educación matemática es muy variada. Según Chua (2016), la justificación es un medio para determinar y explicar la verdad de una conjetura o afirmación. Sus roles son determinar la verdad para eliminar las propias dudas o persuadir a otros de que la conjetura es verdad. De modo similar la caracterizan Ayalon y Hershkowitz (2018), ellos destacan que es una actividad verbal y social. Posicionan la argumentación en un espacio social como parte del discurso en el aula, la cual permite articular ideas alternativas, reflexionar y razonar. Simon y Blume (1996) también contemplan lo social y mencionan que la justificación consiste en establecer la validez y desarrollar un argumento que se construye a partir de conocimientos compartidos por la comunidad.

En este trabajo, consideramos que la justificación es una habilidad que se desarrolla gradualmente (Stephens, Ellis, et al., 2017). La entendemos como un proceso social que permite explicar, verificar y sistematizar conocimiento matemático basándose en ideas, definiciones, propiedades matemáticas que están al alcance conceptual de la comunidad del aula, del mismo modo que las representaciones que se emplean para expresarla. Esto quiere decir que deben ser acorde a los conocimientos de los estudiantes, por ejemplo, en primaria las justificaciones más comunes podrían apelar a los conocimientos aritméticos: en los primeros cursos a la adición y sustracción y, en los siguientes cursos, podrían incorporar la multiplicación y división como argumentos válidos para ellos. El rol de la justificación depende del contexto de la comunidad de practica en la que se lleve a cabo (Staples et al., 2012). Esto implica que es lógico pensar que la justificación de un matemático profesional sea distinta a las que surgen en el contexto educativo.

El rol de la justificación en el aprendizaje es muy importante, dado que puede ser un medio para aprender y hacer matemáticas. Alentar a los estudiantes a justificar su pensamiento les ayuda a aumentar su comprensión de las matemáticas y su competencia para hacer matemática. Además, la justificación como acto de comunicación, ayuda a los estudiantes a expresarse más claramente. También permite a los profesores entender lo que los estudiantes están pensando y tomar decisiones pedagógicas mejor informadas (Ingram et al., 2019), ya que los conocimientos matemáticos de los estudiantes pueden ser analizados a partir de lo que dicen o del uso que hacen de los signos (Morgan et al., 2014).

Las tareas de justificación se pueden clasificar según su naturaleza y propósito, así como el elemento a ser proporcionado en la justificación. Chua (2016, 2017) propone la clasificación que se muestra en la Tabla 2-2.

Tabla 2-2.

Tipos de justificación (Chua, 2016, 2017)

Naturaleza de la tarea	Propósito de la justificación	Elementos esperados en la justificación
Elaboración	Explica como…	Una clara descripción del método o estrategia utilizada para obtener el resultado matemático.
Validación	Explica porque…	Una razón o evidencia para apoyar la afirmación matemática.
Inferencia	Explica que…	Significado del resultado matemático, con las palabras clave de la tarea abordada.
Predicción	Explica si…	Decisión sobre la afirmación matemática y proporcionar pruebas para apoyar o refutar la afirmación.

En el contexto del desarrollo del pensamiento algebraico, Blanton (2017) señala que la justificación se puede observar cuando los estudiantes discuten porqué es verdadera una generalización. Este proceso incita a los estudiantes a pensar en la estructura y en la relación subyacente, así como a buscar pistas en el contexto y los datos. Podría ayudar a los niños en el estudio más formal de la prueba matemática.

En estudios previos (e.g. Blanton, 2017; Carpenter et al., 2003; Knuth et al., 2009; Lannin, 2005; Stephens, Ellis, et al., 2017) los niveles de justificaciones que se han establecido al analizar las respuestas de estudiantes contemplan: (a) no justificación, (b) apelar a una figura de autoridad, (c) evidencia empírica, (d) ejemplo genérico, (e) argumento general que no llega a ser una prueba aceptable y (d) justificaciones deductivas. Las justificaciones que incluyen evidencias empíricas son aquellas de naturaleza inductiva o perceptual que se basan en ejemplos en vez de en una relación general (Carpenter et al., 2003). Un ejemplo genérico es una justificación deductiva expresada en una instancia particular (Lannin, 2005) la cual puede hacer referencia a casos particulares numéricos o a representaciones que dependen del uso de diagramas, materiales manipulativos o historias relacionadas con el contexto (Stephens, Ellis, et al., 2017). Blanton (2017) señala que este tipo de argumentos pueden ser un puente entre argumentos empíricos y formales, dado que los estudiantes razonan con estos como si fueran una representación de un caso arbitrario. Un argumento general que no llega a ser una prueba aceptable es aquel que incluye argumentos no viables o matemáticamente incorrectos. También podría ser un argumento incompleto que si se completa sería aceptable (Knuth et al., 2009).

Blanton (2017) señala que, en los estudios llevados a cabo con estudiantes de primaria en el contexto funcional, es frecuente que al justificar recurran a casos empíricos. De modo similar, Lannin (2005) concluye que los estudiantes de sexto grado, al realizar tareas de generalización de situaciones numéricas, tienden a usar justificaciones empíricas o ejemplos genéricos; en el último caso es el docente quién nota la generalidad en los argumentos, no así los estudiantes. Carpenter et al. (2003) señalan la importancia de guiar a los estudiantes hacia argumentos más generales que testear casos particulares. Guiarlos para que razonen sobre el contexto o la estructura del problema. Knuth et al. (2009) realizan un estudio con estudiantes de sexto a octavo grado. Observan que predominan las justificaciones basadas en ejemplos y que con la edad las justificaciones se vuelven más sofisticadas: aunque carecen del rigor matemático prueban el caso general. Esto podría ser debido a que los estudiantes han tenido la oportunidad de participar en actividades que las fomentan. La producción de argumentos generales fue lo que mayor dificultad causó.

Capítulo 3
METODOLOGÍA

Este capítulo está compuesto por tres secciones en las que presentamos el enfoque metodológico de nuestra investigación. En primer lugar, describimos nuestros supuestos metodológicos y el paradigma de investigación seguido. Incluimos en esta sección una descripción de la investigación de diseño, de los experimentos de enseñanza, y de los criterios fundamentales para evaluar la calidad de nuestra investigación. En segundo lugar, describimos de forma general el contexto en el que se obtienen los datos analizados, relacionamos los objetivos de nuestros estudios con los objetivos de los experimentos de enseñanza en los que se enmarca y describimos las características generales de las sesiones de clases, así como de cada una de las actividades propuestas. Finalmente, caracterizamos de modo general los cuatro estudios que componen nuestra investigación refiriéndonos a: los estudiantes que forman la muestra, el diseño de las sesiones de clase, los instrumentos de recogida de información empleados y el análisis de datos efectuado. En el capítulo 4 se describe en detalle cada uno de los estudios.

3.1. PARADIGMA Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Esta tesis se enmarca en una investigación de diseño más amplia, en particular, dos experimentos de enseñanza cuyos focos es indagar en las capacidades que manifiestan los estudiantes de Educación Primaria a través de la resolución de problemas que involucran una relación funcional, esto como una aproximación al pensamiento algebraico. En particular, en dicha investigación se busca profundizar en la descripción del pensamiento funcional y desarrollar materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo de dicho pensamiento. Para explorar las capacidades de los estudiantes se implementaron sesiones de clases y se realizaron entrevistas semiestructuras.

3.1.1. Investigación de Diseño

La investigación basada en el diseño (*design research*) es un paradigma metodológico de naturaleza principalmente cualitativa. Es un tipo de investigación en la cual se busca comprender y mejorar una realidad educativa (Molina et al., 2011) mientras se diseña y se desarrolla un producto, un proceso o una herramienta. A través de ciclos de implementación, observación, análisis y rediseño, que incluyen la retroalimentación sistemática de los investigadores, el diseño se refina y se mejora (Swan, 2020). Los estudios de diseño se llevan a cabo en la complejidad del aula, fusionando la investigación aplicada y la investigación pura (Confrey, 2006). Este tipo de investigación suele implicar tratamientos novedosos o innovadores de áreas curriculares, como la introducción de nuevos temas, nuevas tecnologías o nuevas formas de interacción. En el caso particular de nuestro trabajo, proponemos desarrollar el pensamiento funcional de estudiantes de primaria en el marco de los contenidos aritméticos actualmente vigentes en el currículum español. Buscamos promover habilidades algebraicas sin necesidad de incorporar nuevos temas en el currículum.

En general, los objetivos de la investigación de diseño son proporcionar un conocimiento sistemático y garantizado sobre el aprendizaje y producir teorías empíricamente fundamentadas que guíen la toma de decisiones de instrucción hacia un mejor aprendizaje para el estudiante. Se busca proporcionar información convincente para que los profesores den sentido a su experiencia en aula (Confrey, 2006). Esta incluye métodos de enseñanza, materiales, programas de desarrollo profesional y/o tareas de evaluación (Swan, 2020). Además, se podría pretender alcanzar un objetivo transformador que implica crear nuevas posibilidades de enseñanza y aprendizaje y estudiar su impacto en los maestros, los niños y otros usuarios finales (Cobb, 2000; Swan, 2020).

En este tipo de investigación no se busca que los diseños sean perfectos, más bien se pretende explicar la relación entre teoría educativa, práctica y herramientas de enseñanza. Se busca orientar la practica mediante marcos explicativos acompañados de datos, pruebas y argumentos; en ningún caso se espera prescribir una práctica. En términos de Confrey (2006) un marco explicativo se caracteriza por: (a) ser un modelo de resultados probables, (b) estar estrechamente relacionado con la teoría, (c) proporcionar pruebas basadas en diversas fuentes al interactuar con entornos auténticos, (d) ser riguroso y (e) ser útil. El potencial de las investigaciones de diseño es que hacen progresar teorías de aprendizaje y enseñanza en situaciones complejas en base a conocimiento empíricamente fundamentado (Cobb et al., 2003; Molina et al., 2011; The Design-Based Research Collective [DBRC], 2003)

El rol de los investigadores en los estudios de diseño es hacer, probar y refinar conjeturas sobre el aprendizaje basándose en evidencia; esto por medio de ciclos de reflexión iterativos, de carácter prácticos y centrados en promover el aprendizaje. También pueden colaborar con el profesor o actuar como él (Confrey, 2006). Quien actúa como docente ha de estar completamente implicado en el estudio (Barab y Squire, 2004).

En el proceso de investigación a través de ciclos iterativos de implementación, análisis y rediseño (Collins et al., 2004), los investigadores identifican un problema en un contexto definido y, basándose en investigaciones previas, visualizan una posible solución. Luego desarrollan un borrador del diseño; no es el definitivo dado que durante la implementación puede cambiar según las necesidades que se vayan suscitando, por lo que va acomodando a la realidad (Molina et al., 2011). El objetivo es producir un diseño eficaz, una descripción de la teoría y de los principios que sustentan el diseño y un análisis de las múltiples formas en que funciona el diseño en un contexto determinado (Swan, 2020). En este proceso la teoría previa informa el diseño y el refinamiento de las herramientas, mientras que la practica retroalimenta la teoría que la guía (Cobb, 2000). Las teorías resultantes son de carácter local y de alcance humilde; estas deben ser juzgadas por su utilidad más que por su grado de generalización a una población amplia (Cobb et al., 2003; Confrey, 2006). Esta información luego será adaptada a los contextos en los que se desee implementar (Stephan, 2015). Las teorías propuestas pueden referirse al aprendizaje de un estudiante, de un aula completa, de una comunidad de enseñanza profesional o de una escuela o distrito visto como una organización (Cobb et al., 2003).

Cuando los estudios de diseño se sitúan en un escenario de aulas enteras, podrían interpretar el pensamiento de los individuos en una red de fuerzas socioculturales que dan forma al desarrollo de sus ideas (Confrey, 2006). Las formas de razonamiento cada vez más sofisticadas están relacionadas con la actividad matemática de los estudiantes, es decir, con su participación en comunidades de practica constituidas por el profesor y los estudiantes en aula (Cobb, 2000). Según Prediger, Gravemeijer y Confrey (2015), las investigaciones de diseño que se basan en las teorías de Vygotski y sus sucesores, tal como lo hacemos en esta tesis, prestan mucha atención al discurso en las aulas estudiadas dado que reconocen que el pensamiento y la acción están conectados y se influyen mutuamente. También se centran en la variedad de representaciones desarrolladas por los estudiantes, las herramientas y otros medios semióticos utilizados, y observan cómo estos interactúan con las formas de desarrollo de la clase al hablar, explicar y fundamentar su pensamiento. Buscan documentar cómo el uso de las representaciones cambia a lo largo del estudio.

En un estudio de diseño es importante recolectar la mayor cantidad información posible. El detalle que se visualice en los datos recolectados permitirá que en los análisis se puedan identificar variables que antes pudiesen no haberse considerado relevantes (Molina et al., 2011) y serán una garantía de la calidad del estudio (Cobb y Gravemeijer, 2008). Entre las fuentes de información que dan cuenta del proceso de enseñanza y de su fin se pueden considerar los trabajos de los alumnos, las grabaciones de video, audio de las clases, las evaluaciones, las notas de los investigadores, entre otras (DBRC, 2003).

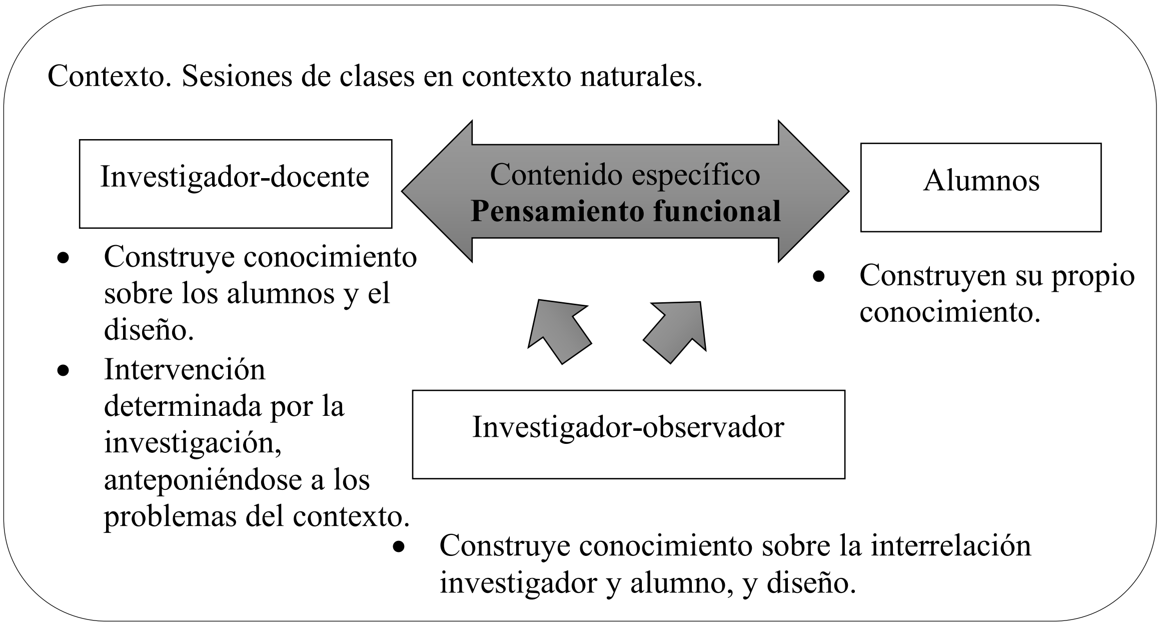
3.1.2. Experimento de Enseñanza

Un tipo de estudios dentro de la investigación de diseño es el experimento de enseñanza. Según Steffe (1991) este surge de la necesidad de estudiar las matemáticas de los niños (en lugar de las matemáticas tradicionales) y ubicarlas en las negociaciones de la comunicación interactiva más que en las matemáticas formales. El objetivo es centrarse en la evolución de la actividad de los estudiantes y examinar las modificaciones en sus esquemas en relación con las actividades. Está dirigido a comprender los progresos que los niños realizan durante un periodo de tiempo y uno de los principales objetivos es formular un modelo de aprendizaje y/o desarrollo de los estudiantes, en relación con un contenido concreto (Molina et al., 2011), es decir, comprender cómo, cuándo y porqué ciertas innovaciones educativas pueden funcionar en el aula.

Se compone de una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). La oportunidad de que los investigadores participen como investigadores-docentes es una de las principales características de estos estudios, pudiendo los investigadores experimentar en primera persona el razonamiento y aprendizaje de los estudiantes (Steffe y Thompson, 2000). Si los docentes habituales de las clases desean participar, esto también es posible, no obstante, es esencial que las intervenciones están delimitadas y limitadas por los objetivos de la investigación, lo que se antepone a las creencias propias del docente sobre qué cree que es mejor para los alumnos (Kelly y Lesh, 2000). En la Figura 3-1 se muestra cómo se relacionan los participantes en estos estudios y cuál es el conocimiento que construye cada uno.

Figura 3-1.

Relación entre los participantes de un experimento de enseñanza



Según Cobb y Gravemeijer (2008) la investigación desarrollada en un experimento de enseñanza se estructura en tres fases: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo. Las acciones en las fases se sustentan en la literatura relacionada con el problema de investigación y en la experiencia previa del equipo de investigación.

a) La preparación del experimento consiste en el diseño y formulación de hipótesis/conjeturas que son el fundamento para la creación de instrumentos de evaluación diagnóstico, el planteamiento de los objetivos de las sesiones y la planeación de la instrucción.

b) En la experimentación se realiza la intervención en el aula y recogida de datos los cuales son analizados e interpretados en los ciclos iterativos de experimentación en el aula.

c) Finalmente, en el análisis retrospectivo se analizan y revisa la totalidad de los datos y las hipótesis/conjeturas. Se regresa a cada una de las secuencias aplicadas y se analiza detalladamente el quehacer del estudiante, su entorno y el contexto en el que se realizó la actividad.

3.1.3. Entrevistas Semiestructuradas.

En las investigaciones de diseño y experimentos de enseñanza pueden emplearse entrevistas para obtener más información que ayude a comprender los patrones de razonamiento de los estudiantes y comprender mejor de la forma en que los alumnos ven determinados conceptos y las explicaciones alternativas que se espera que den los estudiantes (Confrey, 2006; Prediger et al., 2015). A continuación, caracterizamos las entrevistas semiestructuradas, método de recogida de datos que forma parte de los experimentos de enseñanza que forman parte de esta tesis,

En general, las entrevistas se basan en preguntas cuyo propósito es explorar la riqueza del pensamiento de los entrevistados, identificar sus actividades fundamentales y evaluar su competencia cognitiva (Ginsburg, 1981). Según Hernández y colaboradores (2010) algunas características esenciales son: (a) lenguaje, preguntas y orden de estas se adaptan a los participantes, pueden cambiar de un sujeto a otro, (b) es el entrevistador quien define su ritmo y dirección, (c) se considera el contexto social al momento de interpretar sus resultados y (d) pueden considerar distintos tipos de preguntas, tales como preguntas generales, de opinión, de contraste o de expresión de sentimientos y/o conocimientos. Según la estructura del protocolo seguido en las entrevistas, estas se pueden clasificar como: entrevistas estructuradas (incluye solo preguntas planificadas, se hacen las mismas preguntas a todos. Misma formulación y orden), entrevistas no estructuras o abiertas (las preguntas no se planifican y pueden variar según cada sujeto. Hay una guía general, de los temas a tratar, pero el entrevistador la maneja con total libertad) y entrevistas semiestructuradas, esta última son foco de nuestro interés.

Según Ginsburg (1997), en una entrevista semiestructurada el protocolo no es rígido y las preguntas pueden variar según el curso de la entrevista y las respuestas de los participantes, esto respetando parámetros comparables entre cada uno de los entrevistados. Se pueden realizar preguntas de seguimiento no planificadas, variaciones o aclaraciones (Zazkis y Hazzan, 1998). El entrevistador decide el orden y la formulación de las preguntas, también si profundizará en un tema o no; esto permite obtener información más detallada y específica. Una ventaja de este tipo de entrevistas es que su estructura flexible facilita el desarrollo de los puntos de vista de los entrevistados en contraste con las entrevistas estandarizas o cuestionarios (Flick, 2012).

3.1.4. Evaluación de la Investigación

Los principales criterios de evaluación de los estudios de diseño son cuatro: generalización, fiabilidad, replicabilidad y utilidad. La generalidad en este tipo de estudio no está relacionada con la representatividad de la muestra, Confrey (2006) señala que la generalización se consigue en la medida que los resultados se exponen tantos acontecimientos que confirman las conjeturas como los que no lo hacen. Además, se evidencia explícitamente el poder explicativo de los constructos teóricos. Se busca crear modelos probables que conduzcan a aprendizajes satisfactorios por medio de la reflexión y la relación entre los hallazgos y la realidad a la que se pretendan transferir. Para esto los investigadores deben aportar suficiente información sobre la conjetura, su contenido y evolución, la pedagogía y el marco teórico (Confrey y Lachance, 2000). Cobb (2000) señala que al generalizar es importante notar que los fenómenos son ejemplos situados en una realidad local.

Sobre la fiabilidad, Cobb (2000) señala que consiste en demostrar que el análisis fue sistemático y exhaustivo. Molina et al. (2011) añade que la fiabilidad se refiere al grado en que las inferencias y afirmaciones son razonables y justificables. Para esto se mide el grado de sistematicidad del análisis y si éste permite o no la refutación de conjeturas. Otros aspectos a considerar son si los criterios utilizados para las argumentaciones son explícitos y permiten a otros investigadores monitorizar el análisis, si las argumentaciones y afirmaciones finales pueden ser justificadas siguiendo las sucesivas fases del análisis dado que se describe detalladamente cada una de estas fases y que se fundamentan las inferencias realizadas, así como si el análisis ha recibido críticas por otros investigadores externos al equipo que ha recogido los datos.

La replicabilidad se refiere a la posibilidad de repetir elementos o aspectos del proceso en otros contextos. Este indicador está estrechamente relacionado con la capacidad de generalización, pues si hay elementos o aspectos del proceso que se pueden repetir en otros contextos, y se obtienen los mismos resultados, entonces se considera que estos son generalizables y se valida que promueven aprendizajes en otros contextos.

Finalmente, la utilidad se relaciona con el grado de claridad con la que se exponen las conclusiones y aportes para la enseñanza, de modo que los docentes puedan utilizarlas en la planificación y actuación en el aula.

3.2. CONTEXTO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de los experimentos de enseñanza de los que es parte esta Tesis Doctoral es indagar en las capacidades de generalizar, representar, justificar y resolver problemas que manifiestan los estudiantes de Educación Primaria a través de la resolución de problemas que involucran una relación funcional; esto como una aproximación al pensamiento algebraico. Estos experimentos se implementaron en dos centros educativos ubicados en la provincia de Granada (España). Estos centros fueron escogidos por su disponibilidad y buscando representar grupos socioeconómicos distintos. Los objetivos de cada experimento así como sus principales características se detallan en la Tabla 3-1.

Tabla 3-1.

Contexto general de los experimentos de enseñanza

Características	Experimento 1		Experimento 2
Año escolar	2014/2015	2015/2016	2017/18
Centro	A	A	B
Niveles	1º, 3º y 5º	2º, 4º y 6º	2º y 4º
Tipo de centro	Privado	Privado	Concertado
Número de sesiones	4 clases		5 (1 diagnóstico y 4 clases)
Duración de cada sesión	60 minutos		60 minutos
Cantidad de estudiantes en sesiones	25		25
Entrevistas por curso		2	2
Duración entrevistas		15 a 20 minutos	25 a 30 minutos
Cantidad de entrevistados por curso		8	6

Tabla 3-1.

Contexto general de los experimentos de enseñanza

Características	Experimento 1	Experimento 2
Objetivos	Profundizar en los elementos descriptivos del pensamiento funcional de los estudiantes a través del análisis de sus producciones. Mostrar el potencial del pensamiento funcional para enriquecer la actividad matemática en las aulas de Educación Primaria y producir materiales que sean útiles para promoverlo. (Cañadas y Molina, 2013)	Re-diseñar y refinar el diseño instruccional implementado en la fase previa y profundizar en la descripción del pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes de Educación Primaria. Desarrollar materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo de pensamiento funcional y la superación de los obstáculos que lo limitan. (Molina y Cañadas, 2016)

El primer experimento se implementó durante el curso 2014/2015. Participaron estudiantes de primero, tercero y quinto de Educación Primaria (6 a 12 años) de un centro privado de la vega de Granada. Los estudiantes de este centro proceden en su mayoría de familias de nivel sociocultural medio-alto. En cada curso se realizaron cuatro sesiones de trabajo en el aula. En el siguiente curso (2015/2016) se realizaron entrevistas semiestructuradas para profundizar en el estudio del pensamiento funcional de los estudiantes. De cada curso se seleccionaron ocho estudiantes que previamente habían participado en las sesiones. Al momento de ser entrevistados cursaban segundo, cuarto y sexto de primaria. En este experimento la autora de esta tesis no participó en el diseño e implementación de las sesiones, incorporándose al estudio en la fase de análisis retrospectivo.

El segundo experimento se realizó en un colegio concertado durante el curso 2017/2018. Este centro se ubica en Granada capital en una zona de nivel socioeconómico bajo. La mayoría de sus estudiantes pertenecen a familias socialmente desfavorecidas. Participaron estudiantes de segundo y cuarto de Educación Primaria (8 a 10 años). Se efectuaron cuatro sesiones de clases en cada curso, un diagnóstico previo a las sesiones (sesión 0) y dos entrevistas a seis estudiantes de cada curso (pre y post-test, respectivamente). La autora de esta memoria participó en el diseño, implementación y análisis de las sesiones. También cumplió el rol de investigadora-docente en el nivel de 4º de primaria dirigiendo tanto las sesiones de clases como las entrevistas.

3.3. CONTEXTO ESPECÍFICO DE LA INVESTIGACIÓN: ESTUDIOS DE LA TESIS.

De los cuatro estudios que componen esta tesis, uno se enmarca en el primer experimento de enseñanza y los otros tres en el segundo. Las características metodológicas de cada uno de ellos se sintetizan en la Tabla 3-2 y se elaboran en los siguientes apartados. Desde el punto de vista metodológico, son estudios descriptivos y exploratorios, debido a nuestro interés por elaborar un modelo explicativo sobre las formas de representar la relación funcional involucrando cantidades indeterminadas de un grupo de estudiantes en el contexto de la resolución de situaciones problemas.

Tabla 3-2.

Esquema general de la metodología de los estudios

Característica	Estudio 1	Estudio 2	Estudio 3	Estudio 4
Objetivo	Describir el uso y los significados atribuidos a las letras[9] por los estudiantes de tercer año de primaria cuando se enfrentan a problemas verbales relacionados con la generalización de una relación funcional.	Analizar el proceso de expresión de la relación funcional y su relación con las justificaciones orales y escritas.	Describir diversas formas de expresar la generalización de la relación funcional a través de representaciones personales y/o convencionales.	Caracterizar las situaciones problemas que propician estrategias funcionales y la capacidad de representar la generalización de los estudiantes.
Sujetos	25 estudiantes de tercero de primaria.	25 estudiantes de cuarto de primaria.	3 estudiantes de cuarto de primaria.	25 estudiantes de cuarto de primaria.

[9] Consideramos la letra como una forma convencional de representar cantidades indeterminadas.

Tabla 3-2.

Esquema general de la metodología de los estudios

Característica	Estudio 1	Estudio 2	Estudio 3	Estudio 4
Sesiones y/o entrevistas analizadas	Sesiones de clase: 1, 2 y 3. (2014/2015)	Sesiones de clase: 3 y 4. (2017/2018)	Entrevistas finales. (2017/2018)	Entrevistas iniciales y finales. Todas las sesiones. (2017/2018)
Instrumentos de recogida de información	Hojas de trabajo. Transcripciones de discusiones grupales. Producciones escritas en discusiones grupales. Grabación en video.	Hojas de trabajo. Transcripciones de discusiones grupales. Producciones escritas en discusiones grupales. Grabación en video.	Transcripciones entrevista. Producciones escritas. Grabación en video entrevistas.	Hojas de trabajo. Transcripciones de discusiones grupales. Grabación en video sesiones y entrevistas.

3.3.1. Sujetos

En el primer estudio trabajamos con un grupo de 25 estudiantes de tercero de Educación Primaria (8 a 9 años) del centro A. Nunca habían participado en tareas que implicaran funciones o utilizaran letras para representar cantidades indeterminadas. Aunque la legislación vigente define las relaciones funcionales como un requisito curricular, estas disposiciones aún no habían tenido un efecto significativo en la práctica del aula del citado centro.

De forma retrospectiva se trabaja con los datos relativos al grupo de tercero para realizar un diagnóstico de los significados y el uso del simbolismo algebraico que los estudiantes ponen de manifiesto en este contexto. Teniendo disponibles datos de primero, tercero y quinto decidimos analizar el trabajo de los estudiantes de tercer curso de primaria por dos razones. En primer lugar, el objetivo fue comparar los resultados con estudios anteriores sobre el tema (e.g. Blanton et al., 2017; Brizuela et al., 2015; Cañadas et al., 2016; English y Warren, 1998; Radford, 2011, 2018b; Warren et al., 2013). En segundo lugar, las directrices curriculares vigentes en varios países (e.g. Chile, EE.UU.) recomiendan la introducción de la representación de cantidades indeterminadas a partir de los 8 o 9 años de edad, en particular sugieren el uso de letras (Ministerio de Educación de Chile, 2012; NGA Center y CCSSO, 2010).

En los estudios 2, 3 y 4 trabajamos con estudiantes de cuarto de Educación Primaria (9 a 10 años) del centro B: el grupo completo de 25 estudiantes en el caso de los estudios 2 y 4 y tres de dichos estudiantes en el estudio 3.

Teniendo acceso a estudiantes de todos los cursos de primaria, elegimos trabajar con el grupo de estudiantes de cuarto curso debido a que estos estudiantes habían estudiado previamente las cuatro operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y también habían trabajado con números hasta un millón. Nuestra conjetura era que este conocimiento favorecería la discusión y la resolución de problemas que involucran funciones de la forma $y=ax+b$ o $y=ax$, donde a, x y b son números naturales. Otro criterio empleado en la selección del grupo, frente a los de cursos inferiores, fue su mayor capacidad para comunicar sus ideas y estrategias.

Por otro lado, investigaciones previas que analizan el trabajo de estudiantes en primaria han identificado que el cuarto curso es un periodo crucial para que los estudiantes identifiquen las relaciones entre variables y expresen de modo general sus ideas (e.g. Blanton et al., 2017; Carraher y Schliemann, 2007; McEldoon y Rittle-Johnson, 2010; Stacey, 1989). Particularmente, cuando se trata de representar cantidades indeterminadas, Radford (2018b) en una investigación longitudinal con estudiantes de segundo a sexto de primaria observó que los estudiantes que cursaba cuarto curso comenzaban a emplear símbolos alfanuméricos, previo a esto empleaban otros sistemas semióticos no convencionales.

Para las entrevistas individuales, cuyos datos son analizados en los estudios 3 y 4, seleccionamos a seis alumnos: dos de rendimiento bajo, dos de rendimiento intermedio y dos de rendimiento alto en relación a los resultados obtenidos en el diagnóstico realizado el primer día que trabajamos en el colegio. Estos niveles fueron determinados según las respuestas dadas por los estudiantes en el diagnóstico que realizamos antes de implementar las sesiones de clases. También comparamos sus resultados con la opinión de su profesora habitual, quien tuvo en cuenta el rendimiento de cada estudiante en las clases de matemáticas.

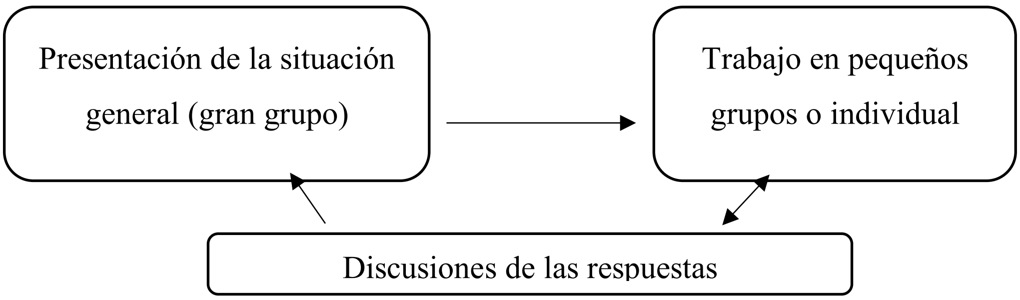
En lo que sigue nos referiremos a la parte de los experimentos de enseñanza desarrolladas con los dos grupos de sujetos señalados: los estudiantes de tercero de primaria del centro A y los de cuarto de primaria del centro B. No obstante, es importante destacar que el diseño (y re-diseño) de las sesiones de clase implementadas en ambos niveles fue compartido con el equipo de investigación a cargo del experimento, algunos de los cuales estaban a cargo de la recogida de datos en los otros cursos (primero y quinto en el centro A y segundo en el centro B). En consecuencia, los análisis preliminares de los datos recogidos en cada nivel informaron en algunas ocasiones el diseño de las sesiones que a continuación describimos.

3.3.2. Diseño General de las Sesiones de Clases

En el diseño de las sesiones de clases se contemplan tres momentos (ver Figura 3-2). Al inicio de cada sesión el investigador-docente presentó una situación general que servía de contexto para las tareas a trabajar. El objetivo era introducir el enunciado general y corroborar que todos comprendieran la tarea. Luego, los estudiantes, de forma individual o en grupos, respondían las actividades propuestas en las hojas de trabajo. Seguidamente, se realizaron discusiones de las respuestas de los estudiantes en las que podían presentar sus ideas, interpelar a otro estudiante para que diera explicaciones sobre algo o hacer una sugerencia para mejorar la respuesta propuesta. Los momentos no se efectuaron de forma lineal, luego de una discusión grupal la clase podría terminar, volver a trabajos en pequeños grupos o continuar abordando una nueva tarea.

Figura 3-2.

Momentos de sesiones de clases



Nuestros supuestos teóricos implican que a nivel metodológico el discurso y la acción mediada tienen un rol importante en el diseño, análisis e interpretación de la práctica en el aula. Es por esto que durante las sesiones enfatizamos el desarrollo de la comunicación oral a través de las discusiones y la comunicación escrita a través de las hojas de trabajo. Estábamos interesados en estudiar las formas de expresar y representar ideas algebraicas y los sentidos que los estudiantes les otorgaban a los signos que empleaban. El uso de diversos signos es parte de un proceso que resulta de la confluencia del lenguaje natural y escrito sobre acciones que se producen en el sistema semiótico en que los problemas son planteados (Radford, 1999). La posibilidad de discutir en pequeños o grandes grupos fue relevante en el diseño ya que la participación de los estudiantes en discusiones matemáticas es la actividad central del aprendizaje (Boaler y Greeno, 2000). La interacción social ayuda a los estudiantes a modificar sus formas de simbolizar y sus significados matemáticos (Cobb et al., 2012). Por otra parte, la comunicación escrita es un recurso que se suele utilizar para evaluar el desempeño de los estudiantes, es por esto que fue importante considerarla en el diseño ya que forma parte del contexto habitual de los estudiantes con los que trabajamos.

El papel de la investigadora-docente fue animar a los estudiantes a participar activamente en las actividades, aclarar sus dudas sobre las tareas y fomentar la interacción entre todos. En las discusiones, la investigadora-docente se involucraba con las contribuciones de los estudiantes, planteaba preguntas que permitían a los estudiantes reflexionar sobre las tareas y sus respuestas, evaluar si eran correctas o no, y así, en conjunto, poder resolver las actividades.

Los problemas presentados en cada sesión involucraban distintas funciones lineales, tipos de justificaciones y representaciones. Algunos problemas fueron inspirados en estudios previos y otros diseñados por el equipo de investigación. Los contextos y el vocabulario fueron escogidos para que fueran familiares para los estudiantes que participaban en el estudio. Con base al análisis posterior de cada una de las sesiones se tomaron decisiones para las siguientes. Por ejemplo, en cuarto comenzamos el trabajo implementando tareas que involucraban la función $2x + 1$, sin embargo, los estudiantes manifestaron problemas por la falta de conocimiento aritmético y hechos numéricos. Su atención se centró en el cálculo, lo que supuso un obstáculo para generalizar y justificar la relación entre las variables. Por lo tanto, en las sesiones posteriores propusimos funciones más simples. En la Tabla 3-3 y Tabla 3-4 se muestran las principales características de cada una de las sesiones implementadas en los dos experimentos de enseñanza.

Las preguntas planteadas en cada sesión estaban estructuradas para guiar a los estudiantes hacia generalizar la relación funcional transitando de lo particular a lo general a través de tres momentos: a) identificar los elementos comunes a todos los casos, b) ampliar el razonamiento más allá del rango en el que se originó, y c) obtener resultados generales (Ellis, 2007a; Kaput, 1999; Radford, 2013). Para esto las primeras preguntas se referían a cantidades pequeñas, sencillas de manipular por los estudiantes, que facilitaran la búsqueda de relaciones. Luego, se proponían preguntas que involucraban cantidades más grandes para aplicar o validar las relaciones detectadas. Finalmente se proponían preguntas que aludían a cantidades indeterminadas, cuyo objetivo era que los estudiantes establecieran las relaciones en términos generales. Es importante tener en cuenta que la característica de ser una cantidad pequeña o grande es subjetiva y depende de cada estudiante y nivel.

Además, se motivó a los estudiantes a explorar, formular, revisar y validar conjeturas, organizar datos e identificar una estructura (Blanton, 2008; Cañadas y Castro, 2007; Pinto y Cañadas, 2018). Se esperaba que estas acciones condujeran a los estudiantes a plantear conclusiones por medio de razonamientos tales como de abducción, de inducción o de deducción.

Tabla 3-3.

Características generales de las sesiones de tercero de primaria

Características	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	
Contexto	Edad de los hermanos	Venta de camisetas		B
Enunciado	María y Raúl son hermanos. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.	Carlos vende camisetas con el escudo de su colegio. Él gana 3 euros por cada camiseta que vende.		E
Estructura del problema	Aditiva	Multiplicativa o aditiva		M
Función	$y = x + 5$	$y = 3x$ $y = x + x + x$		y y
Variables	Edad de Raúl Edad de María	Cantidad de camisetas vendidas Cantidad de euros ganados		N N
Información sobre la relación funcional	Explícita en el enunciado.	Explícita en el enunciado.		R ej
Formato de las preguntas	Preguntas abiertas Tabla a completar o construir	Preguntas abiertas Sentencias Verdadero/Falso	Tabla a completar o construir	Pr

Tabla 3-3.

Características generales de las sesiones de tercero de primaria

Características	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	
			Gráfico a completar o construir	
Tipo de justificación	Elaboración	Elaboración Validación	Elaboración	E
Sistema semiótico en que los problemas son planteados	Lenguaje natural Numérico: solo números Tabular Lenguaje alfanumérico	Lenguaje natural Numérico: sólo números Lenguaje alfanumérico	Lenguaje natural Numérico: sólo números Numérico: expresiones aritméticas Tabular Lenguaje alfanumérico Grafico	L N
Forma de preguntar por una cantidad indeterminada	Lenguaje natural: En una fotografía del cumpleaños de Raúl en la tarta se puede ver cuántos años tiene Raúl. ¿Cómo puedo saber cuántos años tiene María en el cumpleaños de Raúl?	Lenguaje natural: Los euros que gana Carlos son el doble del número de camisetas que vende. (¿Verdadero o falso?)	Lenguaje natural: Explica qué relaciones observas entre los números que hay en la tabla.	L

Tabla 3-3.

Características generales de las sesiones de tercero de primaria

<table>
<tr><th>Características</th><th>Sesión 1</th><th>Sesión 2</th><th>Sesión 3</th></tr>
<tr><td></td><td>Letra
Elije una letra para indicar la edad de Raúl. Coloca la letra en la fila de la tabla que aparece en gris, junto a la flecha blanca.
Junto a la flecha negra, escribe cómo usar la letra para calcular la edad de María.</td><td>Letra
Cuando Carlos vende Z camisetas, gana 3xZ euros.
(¿Verdadero o falso?)</td><td>Letra
Completar tabla.<table><tr><th>Número de camisetas vendidas</th><th>Euros ganados</th></tr><tr><td>N</td><td></td></tr><tr><td></td><td>3×Y</td></tr><tr><td>Z:3</td><td></td></tr><tr><td></td><td>D</td></tr></table></td></tr>
</table>

Tabla 3-4.

Características generales de las sesiones de cuarto de primaria

Características	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3
Contexto	Parque atracción I	Parque atracción II	Mesas y
Enunciado	Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 2 euros.	A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que cuesta 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 1 euro.	Isabel está preparand Comienza organiza sorpresa para sus ir formando una fila y como se muestra la 
Estructura del problema	Aditiva y multiplicativa	Aditiva	Mult
Función	$y = 2x + 1$ $y = x + x + 1$	$y = x + 3$	
Variables	Número de viajes Cantidad de euros gastados	Número de viajes Cantidad de euros gastados	Número de mesas Número de cajas de s
Información sobre la relación funcional	Explícita en el enunciado.	Explícita en el enunciado.	Representada en una

Tabla 3-4.

Características generales de las sesiones de cuarto de primaria

Características	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3
Formato de las preguntas	Preguntas abiertas	Preguntas abiertas	Preguntas abiertas Tabla a completar
Tipo de justificación	Elaboración	Elaboración	Elaboración
Sistema semiótico en que los problemas son planteados	Lenguaje natural Numérico: solo números	Lenguaje natural Numérico: solo números	Lenguaje natural Pictórico Numérico: solo núm Tabular
Forma de preguntar por una cantidad indeterminada	Lenguaje natural: Un niño de la clase te ha dicho que se hizo socio y las veces que viaja en las atracciones. Explícale cómo puede calcular cuántos se ha gastado	Lenguaje natural: - Encarna paga por el carnet y *muchos* viajes. Explica cómo sabe cuánto paga. - Encarna paga por el carnet y *infinitos* viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.	Lenguaje natural: ¿Cómo sabes cu mesas hay c conoces la cantid cajas? ¿Cómo sabes cu cajas hay c

Tabla 3-4.

Características generales de las sesiones de cuarto de primaria

Características	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3
	Letra ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del par	Figura/dibujo - Encarna paga por el carnet y  viajes. Explica cómo sabe cuánto paga. Letra - ¿Cuánto paga cuando hace V viajes?	conoces la cantid mesas?

En la recogida de datos en el centro B la estructura de las preguntas presentadas en el diagnóstico y en las entrevistas fue la misma que en las sesiones. El diagnóstico se implementó en una sesión cuya duración fue de 60 minutos. La investigadora-docente presentó y explicó el contexto en una discusión grupal y luego los estudiantes respondieron por escrito las preguntas planteadas en la hoja de trabajo. No hubo una puesta en común de las respuestas.

En las entrevistas los estudiantes trabajaron de manera individual y en constante diálogo con los entrevistadores, quienes seguían un protocolo que detallaba el tipo de preguntas a realizar y las posibles ayudas. El objetivo de las entrevistas fue profundizar en el conocimiento de los procesos realizados por los estudiantes, así como observar detalladamente cada uno de los pasos seguidos para resolver los problemas e identificar y expresar la relación funcional. En la entrevista inicial se indagó sobre sus respuestas en el diagnóstico y en la entrevista final se presentó una nueva tarea que involucraba todos los elementos trabajados durante las cuatro sesiones de clases. En la Tabla 3-5 se caracterizan las entrevistas y el diagnóstico.

Tabla 3-5.

Características generales de las entrevistas de cuarto de primaria

Características	Diagnóstico/ Entrevista inicial	Entrevista final
Fecha	24 de noviembre de 2017 15 de diciembre de 2017	04 de mayo de 2018
Entrevistados	E09, E12, E15, E16, E21 y E23	E09, E12, E15, E16, E21 y E23
Contexto	Máquinas	Los globos de un cumpleaños
Enunciado	Hoy os planteamos un juego. Os presentamos una máquina que transforma números. Vuestro trabajo es averiguar cómo funciona.	En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños.
Estructura de la función	Aditiva y multiplicativa	Aditiva y multiplicativa
Función	$y = 2x + 1$	$y = 3x + 1$
Variables	Número que entra Número que sale	Número de invitados Número de globos

Tabla 3-5.

Características generales de las entrevistas de cuarto de primaria

Características	Diagnóstico/ Entrevista inicial	Entrevista final
Información sobre la relación funcional	Tres pares de valores (a, f(a))	Tres pares de valores (a, f(a))
Formato de las preguntas	Preguntas abiertas Sentencias Verdadero/Falso	Preguntas abiertas Tabla a completar Sentencias Verdadero/Falso
Tipo de justificación	Elaboración Validación	Elaboración Validación
Sistema semiótico en que los problemas son planteados	Lenguaje natural Pictórico Numérico: solo números Lenguaje alfanumérico	Lenguaje natural Pictórico Numérico: solo números Tabular Lenguaje alfanumérico
Forma de preguntar por cantidad indeterminada	Lenguaje natural: Explica cómo funciona la máquina. Símbolo “?” Si “?” es un número que no conocemos, ¿cómo indicarías el número que sale de la máquina? Letra Si en la máquina meto A, sale A+A. (¿Verdadero o falso?)	Lenguaje natural: ¿Cómo le explicarías a Isabel qué debe hacer para conocer la cantidad de globos que se necesitan en el cumpleaños? Cuando hay *muchos* / *infinitos* invitados, ¿cuántos globos necesita? Letra Cuando hay R invitados, ¿cuántos globos necesita? ¿Es correcta la afirmación?, ¿por qué? Cuando hay Z invitados, se necesitan Z + Z + Z globos.

3.3.3. Implementación del Diseño

En este apartado nos centramos solo en las sesiones que son analizadas en los cuatro estudios que conforman esta memoria (ver Tabla 3-2). Describimos la implementación del diseño de las sesiones del clases, diagnóstico y entrevistas, las cuales se presentan de manera cronológica.

Experimento 1: Sesiones de Clase en Tercero de Primaria. El hilo conductor de cada sesión era una situación cotidiana sobre la que se planteaban distintas tareas. En la primera sesión se planteó el problema denominado “la edad de los hermanos" (ver Tabla 3-3), el cual se consideró que era accesible para los estudiantes porque se creía que las diferencias de edad y el cambio de edad a lo largo del tiempo eran ideas lo suficientemente familiares como para comprometerlos en la tarea y hacerlos pensar en las variaciones. En la segunda sesión se introdujo el problema denominado “la venta de camisetas” (ver Tabla 3-3), este también se trabajó en la tercera sesión. Se consideró que los estudiantes también estaban familiarizados con situaciones relacionadas con la venta de productos y que podría ser un contexto motivador. Esto facilitaría el trabajo y la discusión en la sala de clases.

En las hojas de trabajo las actividades estaban estructuradas para que los estudiantes analizaran diversos casos particulares y descubrieran regularidades. Luego, expresarían de modo general sus descubrimientos empleando las letras como una representación de cantidades indeterminadas. Las primeras preguntas se referían a casos específicos presentados de forma no consecutiva para no fomentar el razonamiento recursivo. Investigaciones previas (e.g. Stephens et al., 2017) han evidenciado que al presentar casos ordenados correlativamente, los estudiantes notan la relación de recurrencia entre las variables, pero esto es un obstáculo para construir la regla de correspondencia entre las cantidades.

Se decidió utilizar las letras como una forma de representación de cantidades indeterminadas o generales, dado que en estudios previos se muestra claramente que los estudiantes de primaria pueden entender las letras como representaciones de variables cuando se les da la oportunidad de participar en tareas y discusiones sobre las funciones y su representación (e.g. Blanton et al., 2017; Cañadas et al., 2016). Las letras fueron introducidas al mismo tiempo que se pedía a los estudiantes que trataran y expresaran la variabilidad. Según investigaciones previas sobre la comprensión de las letras como variables y su notación por parte de los estudiantes de secundaria en contextos algebraicos (Fernández-Millán y Molina, 2016; Furinghetti y Paola, 1994; Küchemann, 1981; Molina et al., 2017), los enfoques tradicionales de la enseñanza del álgebra han resultado infructuosos para ayudarles a desarrollar satisfactoriamente dicha comprensión. Esos resultados son una indicación de que los estudiantes necesitan más oportunidades y más tiempo si quieren alcanzar ese objetivo.

En la primera sesión los estudiantes respondieron preguntas abiertas sobre casos particulares, tales como: “Cuando Raúl tiene 7 años ¿cuántos años tiene María?, ¿cómo lo sabes?” y se les preguntó que conjeturarán sobre la relación entre la edad de los hermanos señalando lo siguiente: “En una fotografía del cumpleaños de Raúl en la tarta se puede ver cuántos años tiene él. ¿Cómo puedo saber cuántos años tiene María en el cumpleaños de Raúl?

Posteriormente, para validar su conjetura, los estudiantes registraron la información en una tabla con tres columnas, tal como se muestra en la Figura 3-3. Para representar el caso general o indeterminado se les pidió que representaran ambas variables con las letras que ellos escogieran, las cuales registraron en la última fila de la tabla.

Figura 3-3.

Ejemplo de preguntas para emplear la letra para representar dos variables

Edad de Raúl	Operaciones para calcular la edad de María	Edad de María
7		
15		
80		
⇨	➡	

6. Elije una letra para indicar la edad de Raúl. Coloca la letra en la fila de la tabla que aparece en gris, junto a la flecha blanca.
Junto a la flecha negra, escribe cómo usar la letra para calcular la edad de María.

En la segunda sesión trabajaron el problema de las camisetas a partir del análisis de sentencias verdaderas y falsas. Al igual que en la otra sesión, primero analizaron casos particulares y luego casos en los que tanto la variable dependiente como la independiente eran representadas por letras o expresiones algebraicas. A diferencia de la primera sesión, en la segunda los investigadores sugirieron distintas representaciones para cantidades indeterminadas empleando diversas letras. El objetivo era que los estudiantes determinaran si la relación funcional representada con letra era correcta o no. Ejemplo de esto fueron las preguntas que se muestran en la Figura 3-4.

Figura 3-4.

Ejemplo de preguntas de verdadero o falso que involucran letras

6. Cuando Carlos vende Z camisetas, gana 3×Z euros. VERDADERA FALSA

Porque ______________________________

____

7. Cuando Carlos vende Z camisetas, gana N euros. VERDADERA FALSA

Porque ______________________________

____

14. Carlos quiere ganar Z euros. Entonces tiene que vender Y camisetas. VERDADERA FALSA

Porque ______________________________

____

15. Carlos quiere ganar Z euros. Entonces tiene que vender Z camisetas. VERDADERA FALSA

Porque ______________________________

En la tercera sesión el contexto de las camisetas se repitió pues se quería indagar cómo los estudiantes extendían sus hallazgos y los representaban en tablas. La clase comenzó recordando la situación y, seguidamente, los estudiantes completaron la tabla que se muestra en la Figura 3-5. Con respecto a los casos que aludían a cantidades indeterminadas, una de las variables fue representada por una letra sugerida por los investigadores y los estudiantes debían completar la tabla representando la otra variable. El objetivo era de determinar cómo los estudiantes interpretaban y utilizaban la letra dada para representar la otra variable.

Figura 3-5.

Ejemplo de preguntas para emplear la letra para representar una variable

4. En la siguiente tabla aparecen alguna información sobre la cantidad de camisetas vendidas por Carlos y el dinero que ha ganado con ellas. Completa los huecos.

Número de camisetas vendidas	Euros ganados
3	
4	
	18
	30
	39
20	
32	
50	
	3×100
	600
900:3	
	3000
N	
	3×Y
Z:3	
	D

Experimento 2: Diagnóstico y Entrevista Inicial en Cuarto de Primaria. En el diagnóstico y en la entrevista inicial el contexto fue descubrir cómo funcionaba una máquina de funciones en las que conocían el número que entraba y el número que salía (ver Tabla 3-4). Este tipo de problemas ha sido ampliamente estudiado en la literatura. Consideramos que era pertinente considerarlo en el diagnóstico ya que las evidencias demuestran que favorece el pensamiento funcional y el uso de distintas representaciones (Cooper y Warren, 2011; Moss et al., 2008; Warren et al., 2013). La función involucrada se podía expresar de dos modos: como una suma ($x + x + 1$) o como una combinación de una multiplicación y una suma ($2x + 1$).

La sesión en la que se implementó el diagnóstico comenzó con una discusión grupal en la que la investigadora-docente presentó la máquina y pares de valores (por ejemplo: 2 y 5; 5 y 11: 9 y 19), esto se muestra en la Figura 3-6.

Figura 3-6.

Presentación de la Máquina de función durante el diagnóstico

Luego, los estudiantes respondieron una hoja de trabajo en la que se incluían cuatro preguntas que abordaban casos particulares y que se formularon del siguiente modo: "¿Qué número saldrá si metemos [4, 20, 11, el número que tú quieras]?". El caso general se preguntó de dos modos distintos: "Explica cómo funciona la máquina" y "Si "?" es un número que no conocemos, ¿cómo indicarías el número que sale de la máquina?". Decidimos emplear el signo de interrogación como una forma de representar cantidades indeterminadas porque investigaciones previas muestran que los estudiantes sugieren esta representación para una cantidad indeterminada cuando aún no han recibido instrucción sobre el empleo del simbolismo alfanumérico (e.g. Molina, 2006; Radford, 2018b).

También se presentaron sentencias verdaderas y falsas en las que se incluían casos particulares y letras que representaban cantidades indeterminadas. Basándonos en nuestra experiencia en el primer experimento de enseñanza con los estudiantes de tercero, decimos evaluar a través de este tipo de preguntas cómo los estudiantes interpretaban las letras y determinaban si la relación entre ellas era correcta o no. En esta sesión no se discutieron en una puesta en común grupal las respuestas. No obstante, se profundizó en ellas durante las entrevistas realizadas a los seis estudiantes seleccionados.

Experimento 2: Sesiones de Clases en Cuarto de Primaria. En la primera sesión de trabajo se presentó el problema denominado "El parque de atracciones" (ver Tabla 3-4). Este contexto se escogió debido a que en el primer experimento de enseñanza se observó que las situaciones relacionadas con dinero, compra y venta tenían buena recepción por parte de los estudiantes; les resultaban motivadoras y fácil de comprender.

Se decidió repetir la misma función del diagnóstico ($2x + 1$) descrita de forma implícita en el enunciado del problema (ver Tabla 3-4). Esta vez los estudiantes no debían descubrirla a partir de pares de valores.

La hoja de trabajo incluía 8 preguntas, siete de ellas referían a casos particulares y se formulaban del siguiente modo: "¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar [un número] viaje?". Las cantidades de viajes propuestas fueron 1, 4, 20, 11, 35, 100 y un millón. Se evitó presentar cantidades consecutivas u ordenadas ascendente o descendentemente. El caso general se preguntó empleando lenguaje natural y se les motivó a explicar a un niño hipotético cómo calcular cuánto ha gastado en el parque a partir de la cantidad de viajes que realizó. En la representación de cantidades indeterminas y la expresión de la relación funcional se decidió no utilizar letras para permitir que representaran sus ideas de la forma que ellos consideraran pertinente. Esta decisión estuvo motivada por los resultados del primer estudio, en el cuál si bien los estudiantes aceptaron la letra para representar cantidades indeterminadas, al generalizar la relación funcional recurrieron a sistemas de expresión propios más que a los convencionales. Además, otras investigaciones evidencian los efectos positivos de ampliar la variedad de medios semióticos involucrados en las tareas dado que los estudiantes recurren a aquellos que les otorgan mayor confianza (e.g. Mason, 2017; Radford, 2011).

Al final de la puesta en común se empleó la letra para representar una cantidad desconocida de viajes. Se decidió no preguntarlo por escrito dadas las dificultades observadas en el diagnóstico. Conjeturábamos que sería más fácil emplear la letra si se introducía en un contexto de diálogo y mediación por parte de la investigadora-docente. Esperábamos que los estudiantes relacionaran esta forma de representación con sus respuestas previas. Los casos propuestos fueron: B y Z viajes.

En la segunda sesión repetimos el contexto del parque de atracciones, pues fue fácil de comprender y propició la discusión en clases. Sin embargo, propusimos una función más simple ($x + 3$), esto debido a que notamos una falta importante de conocimiento aritmético y comprensión numérica por parte de los estudiantes, lo que suponía un obstáculo para generalizar y justificar la relación entre variables (ver Tabla 3-4).

La hoja de trabajo estaba compuesta por siete preguntas: Cinco referían a casos particulares (1, 17, 9, 300 y un millón de viajes) y dos a cantidades indeterminadas (Ver Figura 3-7). En la pregunta seis empleamos la expresión *muchos viajes* para representar una cantidad indeterminada. A su vez, para motivar a los estudiantes a responder les pedimos que le escribieran un mensaje a su maestra. En la pregunta siete representamos una cantidad indeterminada mediante un dibujo, una mancha, debido a las dificultades detectadas con el uso de la letra para expresar la relación funcional en la puesta en común de la sesión anterior. Nuestra conjetura fue que era necesario sugerir otro tipo de representación para dar la oportunidad a los estudiantes de emplear aquella que tuviera sentido para ellos. Para tomar esta decisión nos basamos en actividades de libros de textos e investigaciones previas que muestran que en ocasiones los estudiantes emplean dibujos para representar cantidades indeterminadas (Fujii y Stephens, 2008; Mason et al., 2005; Radford, 2018b).

Figura 3-7.

Preguntas para caso general, segunda sesión

6. Encarna paga por el carnet y muchos viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.

____
____
____
____

7. Encarna paga por el carnet y viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.

____
____
____
____

En la puesta en común al discutir sobre el significado de *muchos viajes* un estudiante señala que *muchos* puede ser *infinito y más allá*, luego generaliza la relación. Otros estudiantes aceptan esta forma de referirse a lo indeterminado y también la emplean. Al igual que la sesión anterior, en la discusión se preguntó por un caso representado por una letra (V viajes) para indagar si al tratarse de una función más simple los estudiantes empleaban la letra para generalizar.

En la tercera y cuarta sesión se presentó el mismo contexto denominado “Mesas y cajas en un cumpleaños” (ver Tabla 3-4). Se escogió esta situación ya que, al igual que los contextos involucrados en el primer estudio, era familiar para los estudiantes lo que favorecería su comprensión. La situación es una adaptación de otra similar en la que se organizan mesas y sillas, la cual en investigaciones previas fue propuesta a estudiantes de similar edad (e.g. Stephens, Fonger, et al., 2017). La función involucrada fue seleccionada por la posibilidad de ser expresada como una multiplicación ($2x$) o como una suma ($x + x$).

El enunciado de la situación estaba acompañado de un ejemplo genérico que mostraba la disposición de las mesas y cajas de sorpresas en el cumpleaños (ver Figura 3-8). Según Mason y Pimm (1984) un ejemplo genérico es un ejemplo real, pero que se presenta de tal manera que se resalta su rol como portador de lo general. Esto se hace mediante el énfasis y el registro de diversas características clave para intentar estructurar la percepción que uno tiene de él. En nuestro caso, en la presentación de la situación problema se enfatizó cómo se organizarían las mesas (una al lado de otra formando una fila de mesas) y el lugar dónde se pondrían las cajas en cada mesa (se emplearían solo dos lados de la mesa y las cajas estarían una frente a otra).

Figura 3-8.

Ejemplo genérico para el problema de las mesas y cajas

En la tercera sesión las actividades estaban organizadas de tal forma que los estudiantes comenzaran analizando casos particulares no consecutivos y terminaran generalizando la relación funcional. En esta sesión debían descubrir la relación funcional a partir del análisis de casos particulares los cuales eran organizados en una tabla compuesta por dos columnas. En ocasiones se les indicaba la cantidad de mesas y ellos debían determinar la cantidad de cajas de sorpresas y en otras se les pedía el proceso inverso. Las variables dependiente e independiente se representaron con números y se preguntó por el caso general empleando lenguaje natural. Se preguntó por lo indeterminado sin sugerir ninguna representación. Esto para que los estudiantes emplearan la forma que ellos consideran pertinente. En algunos casos los estudiantes fueron motivados a justificar cómo encontraron la respuesta, esto con el objetivo de fomentar justificaciones de elaboración (Chua, 2016).

Con respecto a la cuarta sesión, al igual que la sesión anterior, en primera instancia analizaron casos particulares representados en una tabla, no obstante, el objetivo ya no era descubrir la relación funcional, más bien era extender la relación identificada en la sesión previa. Para esto los estudiantes fueron motivado a determinar si las relaciones eran verdaderas o falsas y a proporcionar justificaciones de validación (Chua, 2016).

En esta sesión, a diferencia de la tercera, la forma de representación de las variables independiente y dependiente involucró otras formas que no eran solo números. En los casos particulares se incluyeron expresiones aritméticas basadas en las expresiones propuestas en la discusión de la sesión anterior donde los alumnos reconocieron que la relación funcional podía expresarse como una suma o multiplicación o *el doble* e identificaron la equivalencia entre estas. El objetivo de incorporar este tipo de representación fue favorecer una interpretación estructural de la situación. Ese enfoque se ha aplicado en otros estudios, pero trabajando el álgebra como aritmética generalizada (Blanton et al., 2018; Molina y Mason, 2009). Nuestra conjetura era que trabajar con la estructura de las expresiones numéricas debería ayudar a los estudiantes a comprender expresiones algebraicas que presentaríamos en la última parte de la sesión.

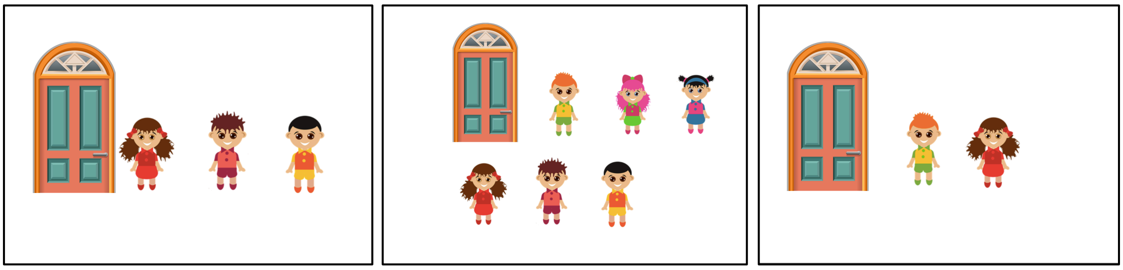
Al introducir el uso de la letra para expresar la relación funcional nos inspiramos en investigaciones previas en las que se les pedía a los estudiantes escribir un mensaje a otra persona (e.g. Radford, 2018b). La investigadora-docente pidió a los estudiantes que explicaran por escrito cómo encontrar el número cajas conociendo el número de mesas. El primer caso presentado fue una cantidad concreta (1000 mesas) y luego una cantidad indeterminada representada por una letra (Q mesas). Esperábamos establecer una comparación de las explicaciones y dar sentido al uso de la letra.

Una vez que se motivó a los estudiantes a emplear la letra como una forma de representar una cantidad indeterminada propusimos sentencias verdaderas y falsas que incluían su uso y expresiones con la misma estructura que las expresiones aritméticas presentadas previamente. Decidimos incluir este formato de preguntas ya que en el primer estudio ayudaron a los alumnos a referirse a cantidades indeterminadas y a dar sentido al lenguaje alfanumérico.

Experimento 2: Entrevista Final en Cuarto de Primaria. Siguiendo el hilo conductor de las últimas dos sesiones, en la entrevista final se decidió continuar con el contexto del cumpleaños ya que tuvo una buena recepción por parte de los estudiantes. La presentación del problema denominado "Los globos de un cumpleaños" (ver Tabla 3-4) fue acompañada por representaciones pictóricas y material manipulativo, el cual simulaba ser los globos de los cumpleaños representados en papel. Además, los estudiantes contaban con una tabla con dos columnas para registrar la información y hojas de papel en blanco. El uso de este material era opcional y ellos decidían si lo empleaban o no. En la Figura 3-9 mostramos los recursos antes descritos.

Figura 3-9.

Material complementario empleado en la entrevista final



Número de invitados	Número de globos

Nota. Fuente de las ilustraciones de la puerta y los niños: www.pixabay.com

En esta oportunidad la relación funcional debería ser descubierta a partir del análisis de dos pares de valores que representaban las variables dependiente e independiente del problema. La función involucrada se podría expresar como una suma ($x + x + x + 1$) o como una combinación de multiplicación y suma ($3x + 1$). Como parte del diseño general, al inicio siempre procuramos comenzar el análisis de las relaciones a partir de números fáciles de operar. A cada estudiante se les propuso los mismos pares de valores (3 invitados y 10 globos; 6 invitados y 19 globos; y 2 invitados y 7 globos) y se les preguntó qué pasaba con los globos, recordando que Isabel le regalaba la misma cantidad de globos a cada invitado y colocaba un globo en la puerta.

En las siguientes preguntas solo se les indicó la cantidad de invitados que asistían al cumpleaños, preguntándoles por la cantidad de globos necesaria en cada caso. El objetivo era que extendieran la relación a otros casos. En concreto la pregunta fue: "Cuando hay [un número] invitados, ¿cuántos globos necesita?, ¿por qué?". Las cantidades involucradas eran más grandes y difíciles de representar con el material manipulativo. Nuestra conjetura era que esto propiciaría el empleo de otras estrategias más sofisticadas. También les pedimos que ellos propusieran una cantidad de invitados, con el objetivo que los estudiantes trabajaran con cantidades que les hicieran sentir confiados. La pregunta se formuló del siguiente modo: "Dime un número de invitados. Si Isabel invita a esas personas, ¿cuántos globos necesita? Explícame cómo lo has pensado".

En las preguntas que aludían a cantidades indeterminadas la cantidad de invitados fue representada con lenguaje natural, refiriéndose a esta como *muchos invitados* o *infinitos invitados*. Decidimos emplear las palabras *muchos* e *infinitos* porque los estudiantes habían usado estos términos en la segunda sesión de clases, por tanto, resultaban ser formas de representar cantidades indeterminas que eran conocidas para ellos y habían tenido una buena recepción al momento de expresar la relación funcional. Por otra parte, también se representaron las variables empleando letras. Se realizaron dos tipos de preguntas: a) abiertas en las que ellos representaban la cantidad de globos y b) de verdadero y falso. Como una forma de evaluar si los estudiantes extendían y comprendían correctamente la relación funcional, también les planteamos preguntas en las que debían validar lo que otra persona había comentado sobre el cumpleaños. La situación se le planteaba así: "Otro niño de la clase dice que hay [un número] invitados, por lo que necesitaran [otro número] globos. ¿Estás de acuerdo con él?".

3.3.4. Análisis de Datos

En este apartado se describe de modo general el proceso de análisis de datos llevado a cabo en cada uno de los estudios. La información que se presenta aquí es complementaria a la que se muestra en cada uno de los artículos que componen el Capítulo 4.

Análisis de Datos en el Estudio 1. Sometimos los datos recogidos a una codificación cualitativa (Hernández et al., 2010). Primero analizamos las videograbaciones y las transcripciones de las discusiones orales registradas en la cámara fija. Buscábamos evidencias sobre cómo los estudiantes representaban la variable independiente, la variable dependiente y la relación funcional cuando las variables referían a cantidades indeterminadas. También, buscábamos información sobre el significado que le otorgaban a la letra cuando en la tarea se sugería su uso. Los extractos seleccionados fueron numerados en orden cronológico y organizados en una tabla. Posteriormente, se realizó una revisión línea a línea y se incluyeron tres columnas para registrar la forma de representar las variables y la relación funcional sugerida en cada intervención. Enseguida, estas representaciones fueron agrupadas según sus similitudes. En segundo lugar, revisamos las grabaciones y transcripciones de la cámara móvil siguiendo el mismo procedimiento antes descrito.

En tercer lugar, revisamos las respuestas escritas de los estudiantes, las cuales fueron copiadas literalmente en una tabla y contrapuestas con las transcripciones de las grabaciones de las cámaras fija y móvil. Interpretamos estas respuestas contrastándolas con los argumentos dados por los estudiantes y las agrupamos según las similitudes observadas, al igual que las discusiones grabadas. Es importante señalar que no todos los estudiantes participaron oralmente en las discusiones video-grabadas, por lo tanto, esto se realizó solo en los casos que se contaba con dicha evidencia.

Una vez finalizada la primera interpretación de los datos, comparamos nuestros resultados con los de investigaciones previas y establecimos una serie de categorías que se ajustaban a las respuestas de los estudiantes. Tras una primera codificación y revisión, se revisaron las categorías preliminares y se distinguieron matices comunes según el grado de especificación de la respuesta, obteniéndose el listado definitivo de categorías y subcategorías. Se establecieron dos grupos de categorías: uno para los significados atribuidos a las letras y otro para las formas de representar cantidades indeterminadas.

Las categorías referentes a los significados se definieron de acuerdo con investigaciones anteriores (Blanton et al., 2017; Küchemann, 1981; Molina et al., 2018) y se organizaron según su complejidad, que va desde el rechazo de las letras hasta su aceptación como cantidades indeterminadas y variables (ver Tabla 3-6). En la Figura 3-10 mostramos cuáles son y el flujo seguido en la codificación de las respuestas escritas y orales de los estudiantes.

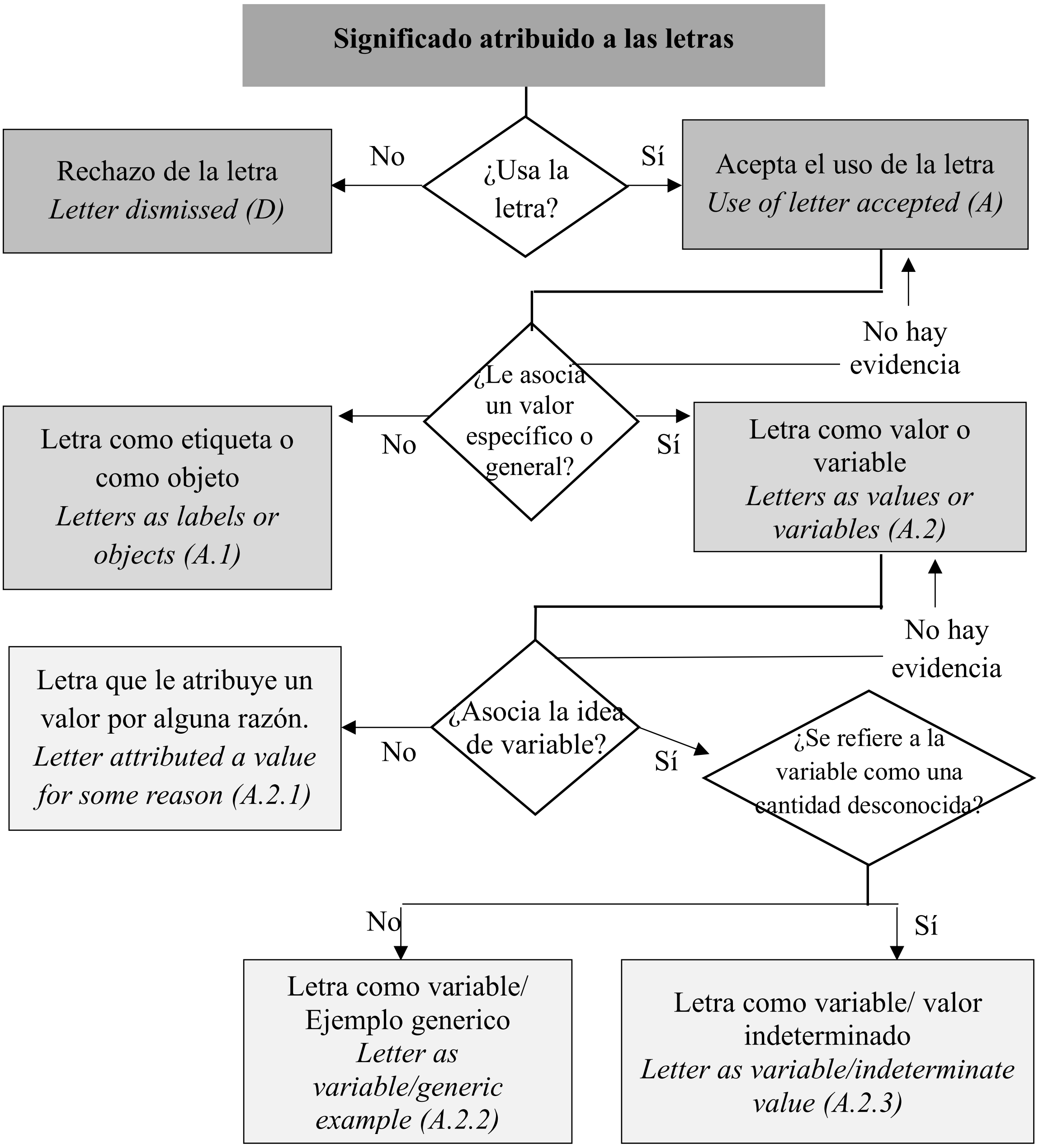
Tabla 3-6.

Categorías de significados atribuidos a las letras

Categoría	Descripción
D. Rechazo de la letra	Las letras no son empleadas y los estudiantes señalan que estás no significan nada.
A. Acepta el Uso de la letra	Las letras se utilizan para realizar las tareas propuestas.
A.1 Letra como etiqueta o como objeto	Las letras se utilizan como etiquetas para los objetos (por ejemplo, "M es María", sin relacionarla con la edad de María en años).
A.2 Letra como valor o variable	Las letras son relacionadas con una cantidad fija o indeterminada.
A.2.1 Letra que le atribuye un valor por alguna razón	Letra a la que se le asigna un valor único por alguna razón (por ejemplo, su posición en el alfabeto, su valor como número romano).
A.2.2 Letra como variable/ Ejemplo genérico	Letra empleada para representar diferentes valores, con ejemplos; mención frecuente de *por ejemplo* (por ejemplo, "Z puede ser 5, por ejemplo, así que como cada camiseta cuesta 3 euros, 3x5 es 15, por ejemplo").
A.2.3 Letra como variable/ valor indeterminado	Letra utilizada para representar diferentes valores, sin aplicar un número concreto para explicar la respuesta, sino expresando la respuesta en términos generales (por ejemplo, "es el número que quieras que sea").

Figura 3-10.

Proceso de codificación de los significados atribuidos a las letras



Las definiciones de las categorías para representar cantidades indeterminadas se basaron tanto en investigaciones anteriores (Blanton et al., 2015; Molina et al., 2018) como en las características de las respuestas de los estudiantes (ver Tabla 3-7). En la Figura 3-11 mostramos el flujo seguido al categorizar las respuestas.

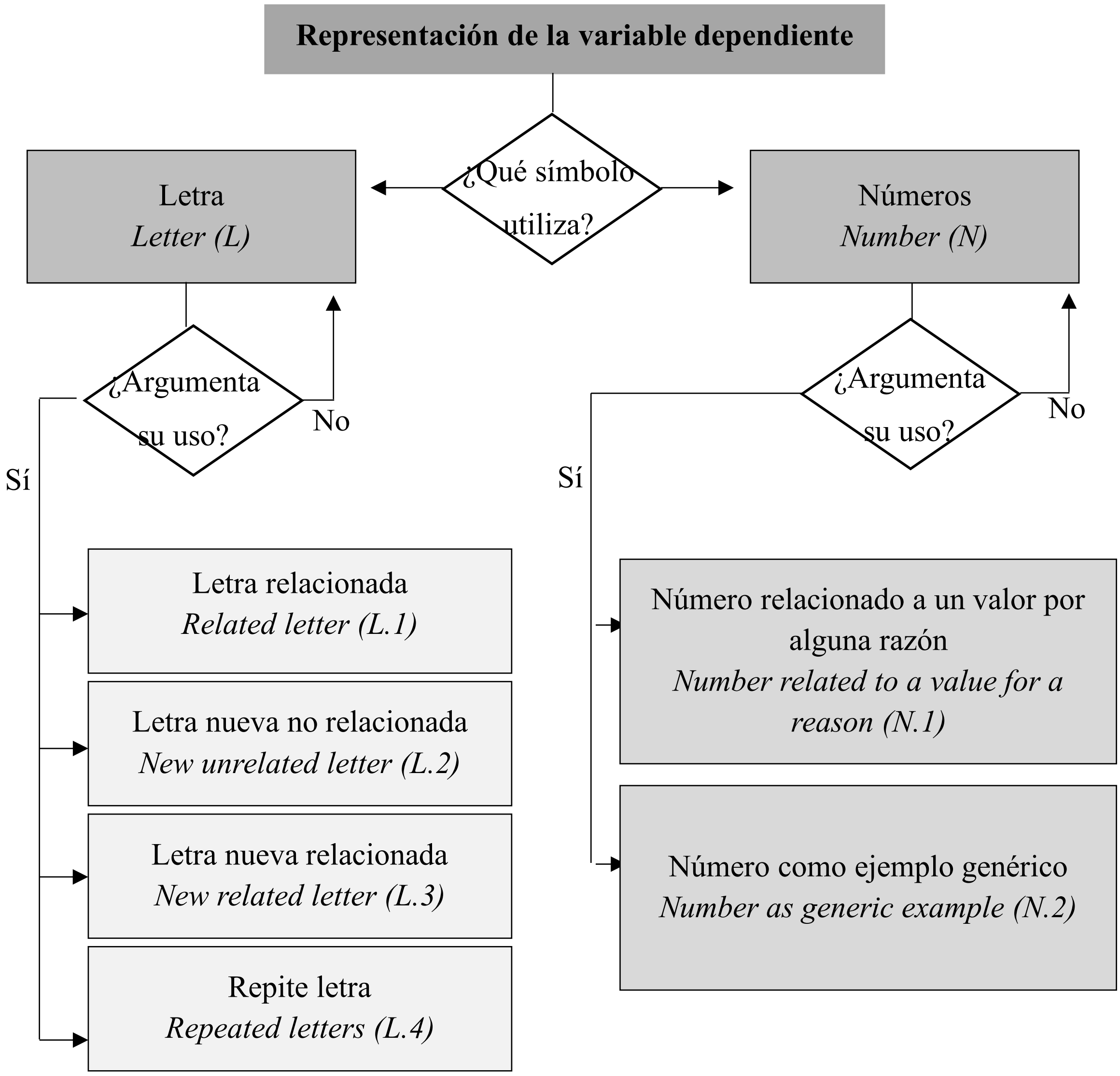
Tabla 3-7.

Categorías de representaciones empleadas para denotar las variables

Categoría	Descripción
L. Letra	Uso de la letra para representar la variable dependiente.
L.1 Letra relacionada	Uso de una letra para representar la variable independiente y una expresión que lleva la misma letra para describir su relación con la variable dependiente (por ejemplo, en el problema de las camisetas, se propuso N como el número de camisetas y 3xN como la cantidad de euros ganados).
L.2 Nueva letra no relacionada	Uso de letras diferentes y no relacionadas para referirse a cada variable (por ejemplo, en el problema del hermano, R y M).
L.3 Nueva letra relacionada	Uso de letras diferentes para cada variable, explicando la relación entre ambas (por ejemplo, las letras E y J porque están separadas por cinco posiciones en el alfabeto: E, F, G, H, I, J).
L.4 Repite letras	Uso de la misma letra para representar ambas variables (por ejemplo, N camisetas vendidas y N euros ganados).
N. Números	Uso de un número para representar la variable dependiente.
N.1 Número relacionado a un valor por alguna razón	Dada una letra para representar la variable independiente, uso de un número para representar la variable dependiente, calculado atribuyendo un valor numérico a la variable independiente por alguna razón, como su posición en el alfabeto (por ejemplo, las camisetas B vendidas significan 6 euros ganados, porque la B es la segunda letra del alfabeto y 2 por 3 es 6).
N.2 Número como ejemplo genérico	Dada una letra para representar la variable independiente, uso de un número aleatorio para representar la variable dependiente (por ejemplo, dados los ingresos de S euros, el número de camisas es 100 porque S puede ser cualquier número).

Figura 3-11.

Proceso de codificación de la representación de cantidades indeterminadas



Para garantizar la fiabilidad de las categorías, en primera instancia la autora de esta tesis analizó los datos y estableció las categorías. Luego, estas fueron chequeadas y discutidas con la directora de tesis. Se buscó que las categorías fueran exhaustivas, mutuamente excluyentes, significativas y claras.

Análisis de Datos en el Estudio 2. Realizamos un análisis cualitativo de los datos recogidos en la tercera y cuarta sesión. En primera instancia analizamos las respuestas escritas (hojas de trabajo) y las respuestas orales (discusiones videograbadas) de forma separada. Posteriormente las comparamos.

Al analizar las respuestas y justificaciones escritas, determinamos si son correctas o no, si implican la relación directa o inversa, cuáles son los elementos matemáticos involucrados en la justificación (conteo, adición, multiplicación, entre otros), cómo se refieren a las variables y si las expresiones son interpretadas operativa o estructuralmente. Dado que nuestro interés era describir las formas de expresar las relaciones funcionales y vincularlas con características de las tareas, concretamente con el tipo de justificación demandada y la forma en que la variable aparece representada en la tarea, la siguiente fase del análisis fue agrupar las respuestas según las características de las tareas (ver Tabla 3-8) y compararla para determinar su grado de sofisticación. Consideramos que una justificación es sofisticada en contextos funcionales cuando es precisa, identifica y menciona explícitamente las variables implicadas, expresaba la relación entre variables empleando correctamente lenguaje matemático y se refiere a cantidades indeterminadas.

Tabla 3-8.

Agrupación de tareas según características

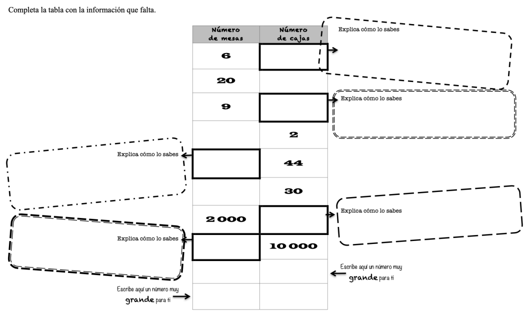
Tipo de justificación	Sistema semiótico	Sesión	Actividad
Elaboración	Sólo números	3	Completa la tabla con la información que falta. 
	Lenguaje natural	3	¿Cómo sabes cuántas mesas hay cuando conoces la cantidad de cajas? ¿Cómo sabes cuántas cajas hay cuando conoces la cantidad de mesas?
Validación	Sólo números	4	Indica si cada una de las siguientes relaciones es verdadera (V) o falsa (F). Corrige aquellas que consideres que son falsas cambiando lo que sea necesario.

Tabla 3-8.

Agrupación de tareas según características

<table>
<tr><th>Tipo de justificación</th><th>Sistema semiótico</th><th>Sesión</th><th>Actividad</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td><table>
<tr><th>Número de mesas</th><th>Número de cajas</th><th></th><th></th><th></th><th>Explicación</th></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>⇨</td><td>V</td><td>F</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td><td>⇨</td><td>V</td><td>F</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td>Números y expresiones aritméticas</td><td>4</td><td><table>
<tr><td>4 x 2</td><td>4</td><td>⇨</td><td>V</td><td>F</td><td></td></tr>
<tr><td>13 - 2</td><td>13</td><td>⇨</td><td>V</td><td>F</td><td></td></tr>
<tr><td>22</td><td>22 x 2</td><td>⇨</td><td>V</td><td>F</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>5 + 5</td><td>⇨</td><td>V</td><td>F</td><td></td></tr>
<tr><td>10 : 2</td><td>10</td><td>⇨</td><td>V</td><td>F</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td>Lenguaje natural y números</td><td>4</td><td><table>
<tr><td>1.000</td><td>El doble de 1.000</td><td>⇨</td><td>V</td><td>F</td><td></td></tr>
<tr><td>La mitad de 2 millones</td><td>2 millones</td><td>⇨</td><td>V</td><td>F</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td>Lenguaje natural</td><td>4</td><td>1. La cantidad de mesas es el doble que la cantidad de cajas.</td></tr>
<tr><td></td><td>Lenguaje natural y numérico: números</td><td>4</td><td>2. Cuando Isabel utiliza 11 mesas necesita 21 cajas.
4. Cuando Isabel utiliza 12 mesas necesita 6 cajas.</td></tr>
<tr><td></td><td>Lenguaje natural y numérico: números y expresión aritmética</td><td>4</td><td>3. Cuando Isabel utiliza 4 mesas necesita 2x4 cajas.</td></tr>
<tr><td></td><td>Lenguaje natural y alfanumérico</td><td>4</td><td>Cuando Isabel utiliza Z mesas necesita 2xZ cajas.
Cuando Isabel utiliza Z mesas necesita Q cajas.
Cuando Isabel utiliza Z mesas necesita Z+Z cajas.
Cuando Isabel utiliza Z mesas necesita Z cajas.</td></tr>
</table>

Analizamos las discusiones en el aula a partir de las grabaciones en video y las respectivas transcripciones. Revisando línea a línea cada intervención, caracterizamos las respuestas de los alumnos según el grado de sofisticación de las justificaciones. La Tabla 3-9 recoge tres ejemplos en orden descendente de sofisticación. Este análisis de basó en trabajos previos que analizan el proceso de generalización de estudiantes de primaria (e.g. Vergel, 2015).

Tabla 3-9.

Ejemplo del análisis de las justificaciones orales

Intervención	Variables mencionadas	Relación matemática	Expresión de la indeterminación
E_{08}: Yo he puesto seis, porque si las cajas que tengo que llevarlo a las mesas que sea, pues es sumando de dos en dos.	Cajas Mesas	Sumando de dos en dos	Las mesas que sean
E_{03}: Que seis por dos, seis, por seis mesas, y dos por dos cajas, entonces seis por dos doce.	Cajas Mesas	Seis por dos son doce	Implícita
E_{17}: Sumando. 2000	Implícitas	Sumando	Implícita

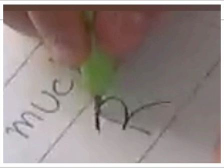
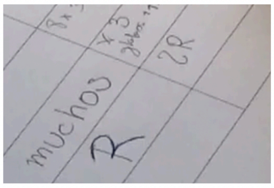
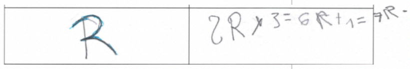
La fiabilidad de la investigación se garantizó a través de la discusión de las categorías entre la autora de esta tesis y su directora. Se llevó a cabo un proceso similar al realizado en el primer estudio. A su vez, parte de esta investigación fue discutida con otros investigadores durante la estancia doctoral como parte de las actividades realizadas en el contexto del laboratorio “Semiótica Cultural y Pensamiento Matemático”.

Análisis de Datos en el Estudio 3. Se realizó un análisis cualitativo de la videograbación de la entrevista final, su transcripción y las producciones escritas de los estudiantes. Con base en estas, realizamos un análisis microgenético de la actividad de los estudiantes (Radford et al., 2009; Vygotski, 1978/1979), el cual consistió en la observación y análisis de los intentos de los estudiantes en la solución del problema planteado. Este tipo de análisis permite el estudio de una habilidad, concepto o estrategia dentro de una sola sesión, facilita la observación de los cambios y permite detectar la variabilidad del comportamiento de los estudiantes ante una misma tarea u otras similares (Bermejo, 2005; Wertsch y Stone, 1978).

Los videos fueron visto varias veces y se realizaron capturas de pantalla de acciones que complementaban las transcripciones, tales como gestos, dibujos, cálculos, entre otros. En una segunda revisión de la información incorporamos comentarios sobre nuestra interpretación del proceso llevado a cabo y describimos la actividad de los estudiantes a partir de los medios semióticos que utilizan para comunicar sus respuestas: lenguaje natural, gestos, lenguaje aritmético y lenguaje alfanumérico (ver Figura 3-12). Asimismo, las preguntas las agrupamos en tres momentos: a) identificar los elementos comunes en casos dados, b) ampliar el razonamiento más allá del rango que los originó y c) ampliar el razonamiento más allá de casos particulares y obtener resultados generales.

Figura 3-12.

Ejemplo de transcripción de una entrevista final

Momento de la entrevista	*Línea*		Transcripción	Comentarios		
	223	E21	¿Puedo usar el boli?			
	224	I	Sí, lo que quieras tú.			
	225	E21	[Comienza a marcar los bordes de la letra] Aquí hay dos.			
	226	I	¿Cómo es eso?			
	227	E21	Porque si necesita R invitados, va a necesitar 2R globos [lo escribe en el folio]			
	228	I	2R globos, ¿por qué?			
	229	E21	Porque me he fijado... por eso he utilizado el boli... me he fijado aquí que al hacer esto [Marca el borde de la			
	230	I	Pero, ¿qué hizo ella antes cuando eran muchos o eran			
	231	E21	Multiplicar por 3.			
	232	I	¿Y ahora con R? ¿Qué tendría que hacer?			
	233	E21	2R por tres, es igual a seis R. [escribe]			
	234	I	¿Solo eso? ¿la puerta no?			
			Más uno es igual a 7R. [escribe]	La letra la interpretó como un número. Aplicó la regla antes generalizada.		

A partir de la observación del trabajo de los estudiantes e investigaciones previas establecimos dos conjuntos de categorías: a) estrategias para responder las preguntas y b) acciones para generalizar. Las primeras se basan en los trabajos de Cañadas y Fuentes (2015) y Morales et al. (2018), mientras que las segundas en los trabajos de Blanton (2008), Cañadas y Castro (2007), Dörfler (1991) y Pinto y Cañadas (2018). Estas categorías son descritas en la Tabla *3-10*. También registramos su duración en minutos.

Tabla 3-10.

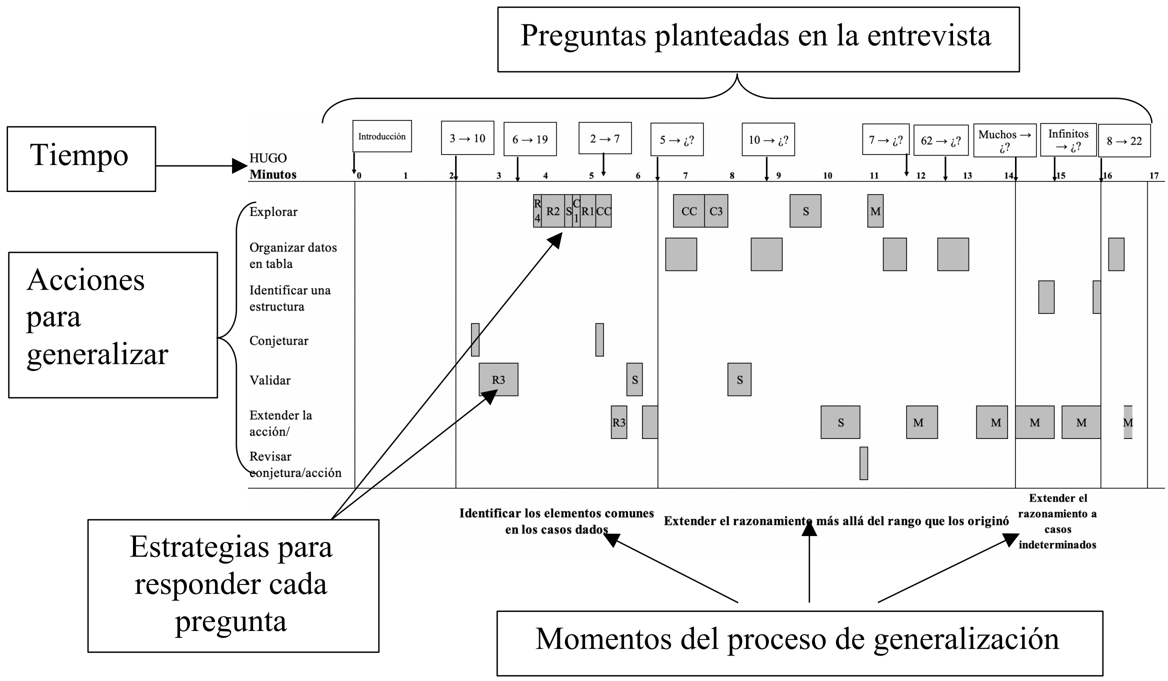
Categorías de análisis de las entrevistas finales

Categorías	Sub-Categorías
	Estrategias para responder las preguntas
Respuesta directa (RD)	Presenta el resultado, sin dar explicación alguna.
Conteo (C_i)	Cuenta, con apoyo concreto o no. i representa la secuencia de conteo seguida, por ejemplo, C2 significa conteo de 2 en 2.
Reparto (R_i)	Con material manipulativo realiza repartos. i representa la cantidad de objetos que reparte cada vez, por ejemplo, R3 significa que realizó un reparto de 3 en 3.
Suma (S)	Propone o realiza una adición.
Multiplicación (M)	Propone o realiza una multiplicación.
División (D)	Propone o realiza una división.
Comparar casos (CC)	Vuelve a casos previos y los compara entre ellos o con el caso que está resolviendo.
	Acciones para generalizar
Explorar	Experimenta y busca solución a situaciones que involucran casos particulares.
Organizar datos	Organiza los datos de alguna manera, como por ejemplo una tabla.
Identificar una estructura	La estrategia de acción se fija y se extiende a otros casos, explicitando cómo esta se relaciona con la situación propuesta.
Conjeturar	Propone una afirmación que explica la relación entre las variables.
Validar	Explica la veracidad de su conjetura.
Extender la acción/ generalizar	Replica de modo consistente una estrategia para establecer la relación entre diversos casos propuestos. Si logra verbalizar esta relación y lo hace de modo general, se produce la generalización (como producto).
Revisar la acción/conjetura	Busca otra estrategia o modifica su conjetura.

Finalmente, programamos una Macro en Excel® que nos permitió graficar y observar cuáles fueron las estrategias empleadas por los estudiantes, captar el momento en que se produjeron cambios en sus acciones y relacionarlos con las preguntas planteadas. Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 3-13.

Figura 3-13.

Ejemplo gráfico del proceso de generalización durante una entrevista



No incluimos en los gráficos las preguntas que incluían lenguaje alfanumérico porque la atención de los estudiantes se centró en dar sentido a este nuevo medio semiótico, no en generalizar la relación funcional, pasando a un segundo plano la situación problema.

La fiabilidad de la categorización fue revisada entre las investigadoras. La primera autora del estudio 3 realizó una codificación preliminar, la cual fue chequeada por la segunda autora. Luego las categorías se fueron refinando hasta llegar a un consenso sobre su validez.

Análisis de Datos en el Estudio 4. En este estudio se caracterizaron los problemas propuestos a lo largo de la recogida de datos realizada en el centro B para identificar algunos de los factores que influyeron en las estrategias de los estudiantes. Además, se describen los tipos de representación que utilizan los estudiantes cuando evidencian reconocer la relación funcional implicada en la tarea propuesta. El estudio es de tipo cualitativo y se analizan las respuestas escritas de los estudiantes, las transcripciones de las sesiones de clases y las entrevistas.

En primera instancia identificamos las estrategias que aplicaron los estudiantes al resolver los problemas propuestos. Para esto establecimos categorías que se basaban en investigaciones previas que se referían a cómo los estudiantes abordan problemas que involucran funciones (Blanton, 2008; Blanton y Kaput, 2011; Krutteskii, 1976; Smith, 2008; Vernaud, 2009), estas se enumeran en la Tabla 3-11 y se describen en detalle en el capítulo 4. Como se mencionó en el apartado de diseño, los problemas fueron pensados para que el proceso de generalización estuviera guiado por preguntas con distintos grados de complejidad los cuales estaban determinados por las cantidades involucradas: cantidades pequeñas, grandes e indeterminadas. Considerando esto, se identificó cuál fue la pregunta más compleja que cada estudiante había respondido.

Luego, centramos nuestra atención en aquellos estudiantes que reconocieron la relación funcional e identificamos cómo la representan. Para esto empleamos tres categorías propuestas por Ureña et al. (2019) y que se muestran en Tabla 3-11. Este proceso se repitió para analizar las entrevistas individuales, en esta ocasión se analizaron las videograbaciones y transcripciones.

Tabla 3-11.

Categorías de análisis de las respuestas de los estudiantes en el Estudio 4

Categorías	Definición
	Tipos de estrategias
Funcional	Los alumnos que generalizan entienden los datos de las distintas secciones del problema como diferentes valores para la misma variable, utilizando letras, lenguaje natural y/o tablas. Identifican las cantidades implicadas y su relación, reconociendo relación de covariación (Blanton y Kaput ,2011) o la correspondencia entre pares de variables dependientes e independientes (Blanton, 2008; Smith .2008). Siguen el mismo proceso que utilizaron en las distintas secciones del problema para encontrar la solución y generalizar la relación cuando responden a la sección que implica una cantidad indeterminada.

Tabla 3-11.

Categorías de análisis de las respuestas de los estudiantes en el Estudio 4

Categorías	Definición
Aritmética	Los alumnos utilizan operaciones aritméticas elementales para encontrar la solución, sin darse cuenta de que la relación entre los datos y la solución es la misma en los distintos apartados. La estrategia aritmética se basa en la elección correcta de las operaciones (Vergnaud, 2009).
Manipulativa/ Visual o gráfica	La estrategia se basa en la información extraída directamente de las representaciones visuales (Krutetskii, 1976) o de los materiales manipulativos. Estos dos enfoques se combinaron aquí en una sola categoría, ya que se comprobó que los alumnos no utilizaban operaciones aritméticas, sino que contaban, reorganizaban los materiales manipulativos o cosas similares.
Otra	La estrategia utilizada no fue clara o el alumno no respondió.
	Representación de la generalización
Verbal	Los alumnos generalizan la relación en lenguaje natural con alusiones a cantidades indeterminadas, pero sin utilizar expresiones algebraicas.
Genérica	Los alumnos describen la relación con ejemplos genéricos, en los que las cantidades específicas utilizadas como ejemplos pretenden representar varios valores al mismo tiempo.
Simbólica	Los alumnos generalizan utilizando expresiones algebraicas (letras para representar cualquier valor, ecuaciones, etc.).

Finalmente, las respuestas de los estudiantes se relacionaron con las características de los problemas, teniendo en cuenta: (a) las variables involucradas; (b) el tipo de función involucrada y (c) la información sobre la relación funcional incluida en el enunciado.

Para garantizar la fiabilidad de nuestro análisis, después de que el primer autor realizara la codificación inicial, sus decisiones se discutieron con cada una de las otras dos autoras hasta que llegamos a un consenso.

Capítulo 4
COMPENDIO DE PUBLICACIONES

En el presente capítulo presentamos, en formato artículo, los cuatro estudios realizados que conforman nuestra investigación. Los estudios 1 y 4 ya han sido publicados, el estudio 2 ha sido aceptado, pero aún no está publicado y el estudio 3 se encuentra en proceso de revisión. A continuación, incluimos los datos correspondientes a cada uno de los artículos[10]:

Estudio 1: Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5.

Estudio 2: Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (Aceptada). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*.

Estudio 3: Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (En revisión). El Proceso de Generalización y la Generalización en Acto. Un Estudio de Casos.

Estudio 4: Ramírez, R., Brizuela, B.M. y Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 1-25. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

[10] En las citas y referencias de toda la memoria de tesis hemos seguido los lineamientos de APA en su séptima edición (American Psychological Association, 2020), esto ha requerido realizar modificaciones mínimas en los manuscritos de los artículos con respecto a cómo han sido o van a ser publicados. Además, para evitar confusión y repetición en la numeración de tablas y figuras, hemos cambiado la numeración con respecto a las versiones publicadas.

ESTUDIO 1: MEANINGS ATTRIBUTED TO LETTERS IN FUNCTIONAL CONTEXTS BY PRIMARY SCHOOL STUDENTS[11]

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5.

Abstract

This article describes part of the findings of a teaching experiment whose objective is to investigate the algebraic abilities of elementary students when they solve situations that involve a functional relationship. In particular, we focus on describing the use and meanings attributed to letters by third-year primary students when faced with verbal problems related to the generalization of a functional relationship. Drawing from the functional approach to early algebra and set in Spain, the study expands on earlier research conducted on primary students' use of letters in algebraic contexts. Their initial reactions to the use of letters to represent indeterminate quantities and how those reactions changed in the course of three sessions are described. Analyses of the students' written answers together with their participation in group discussions yield qualitative data on how students associate the idea of variability with indeterminate quantities and use letters, numbers or both to represent that notion.

Keywords: *Algebraic symbolism, algebraic thinking, Early algebra, functional thinking, variables*

1. Introduction

Research on the feasibility of introducing algebra in primary education has been ongoing since the nineteen nineties. Early algebra, the curricular proposal stemming from that research, seeks to further modes of algebraic thinking and enhance primary school students' ability to understand and express generalisation (Brizuela & Blanton, 2014). The impact of these ideas on curricular guidelines in countries such as Australia, China, Japan, Portugal, Spain and the United States has determined a need for surveys of primary students' first conceptions and reactions when interacting with algebraic elements (Merino et al., 2013; Molina et al., 2018).

The country's curricular guidelines recommend that primary students should be able to 'describe and analyse change in situations, identify patterns, regularities and mathematical laws in numeric, geometric and functional contexts' (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19387). Research is consequently needed to inform the application of such guidelines in an education system accustomed to a traditional approach to algebra instruction.

Functional thinking is a major gateway to algebraic thinking (Carraher & Schliemann, 2007). Precedents have shown that affording students the opportunity to discuss functional tasks leads to an understanding of variability (Brizuela et al., 2015; Cañadas et al., 2016). Building on that premise, this article aims to contribute to the understanding of the meanings and use attributed by primary students to letters to represent variable quantities when solving problems involving functional relationships.

2. Letters in a Functional Approach to Algebra

Functional thinking, a component of algebraic thinking, involves working with functions and families of functions in real life situations (Cañadas & Molina, 2016). It includes generalising relationships between quantities that vary jointly; the expression of such relationships in natural language, symbols, tables or graphs; and the use of such expressions to analyse functional behaviour (Blanton et al., 2011). Smith (2008) identified three types of functional relationships: (a) recursive patterning, (b) covariation and (c) correspondence. Blanton et al. (2011), noting that recursive patterning is a limited application that implies no inter-variable relationships as it refers to only one of the variables, deemed it to be a first step to making sense of the data.

Kaput, Blanton and Moreno (2008) described symbolisation as a social process closely related to generalisation. It is also a dynamic process, for by symbolising general ideas students build a new platform for expressing and thinking about unfamiliar situations. As a result, symbols and what they represent may be experienced separately. Radford (2011, 2018) contended that algebraic thinking consists in reasoning with indeterminate quantities analytically and that people can think in terms of indeterminate quantities before having symbols to express them. Pursuant to that author's (1999) premises, the perspective adopted in this study is that learning algebra entails the formulation of signs in specific mathematical activities, in which the application and formulation of meanings are individual and social processes associated with other systems of signs used in the classroom. From that perspective, signs are not cognitively neutral. In this study, letters acquired meanings for students, albeit not necessarily the ones expected, and induced them to certain types of action.

When representing indeterminate quantities, letters may be associated with different meanings depending on the context: generalised numbers, variable quantities, unknowns or parameters. Students must be afforded the opportunity to participate in a diversity of learning experiences to help them generate substance-rich, wide-ranging meanings (Schoenfeld & Arcavi, 1988; Ursini, 1994).

3. Previous Research

The earliest studies on the meanings attributed by students to indeterminate quantities and their representation with literal symbols (Küchemann, 1981; Booth, 1988; MacGregor & Stacey, 1997) are focused on secondary education and general arithmetic. They observed that students found it difficult to interpret letters as variable quantities, tending to adopt a static perspective, associating letters with specific objects or ignoring them when performing algebraic tasks (Küchemann, 1981). MacGregor and Stacey (1997) found that students interpreted letters in a variety of ways, suggesting that the origin of such interpretations might be: (a) intuitive assumptions and pragmatic reasoning around the new notation; (b) analogies with familiar systems; (c) interference from new learning; and (d) deceptive teaching materials.

In a study on sixth- to eighth-year students' understanding of equivalence and letters to denote indeterminate quantities, Knuth et al. (2011) stressed that helping students acquire that understanding and grasp the idea that letters may adopt multiple values might contribute to the development of algebraic thinking. They also recommended teaching students to use letters at earlier ages.

Building on the conclusions of such studies, later authors explored the use of letters by primary school students in the context of early algebra and described their capacities in that regard. Blanton et al. (2015) compared the traditional approach to early algebra and its impact. Based on an analysis of students' answers to a pre- and post-test questionnaire, they concluded that the third-year students participating in the experience were able to correctly represent unknown quantities, generalise, relate natural language to algebraic notation and use the latter to represent functional relationships. Other reports concurred that students in different years of primary school accepted the use of letters and that their ideas around their use changed over time as they participated in further learning experiences. Students were observed to spontaneously assign values to literal symbols in keeping with their position in the alphabet or, while acknowledging that they may represent different values, attribute specific, randomly chosen values to them when performing explicit tasks (Brizuela & Blanton, 2014; Brizuela et al., 2015; Cañadas et al., 2016). Blanton et al. (2017) described a possible progression in first year primary school students' thinking about variables and their notation. They designed a two-cycle instructional sequence consisting in 16 lessons and three semi-clinical individual interviews (before cycle 1, between cycles 1 and 2, and after cycle 2). After analysing the interviews, they concluded that the difficulties experienced by students in assimilating symbolism were associated less with age than with the way notation clashed with their prior experience and understanding. They identified six levels of progression in the understanding of variables and their notation, the first two of which involved internalising the meaning of letters as variables. Students failed to think of the variable amount as an unknown or indeterminate quantity and therefore sought ways to find a numerical value that would enable them to complete the task, including counting, measuring or other more familiar methods of quantification. From the third to the fifth level, meaning was condensed; students began to understand variability and the notion that letters may represent an unknown, variable quantity. Reification occurred on the sixth level, in which children mathematised unknown quantities and realised that they could be regarded as objects in and of themselves or even combined with others.

4. Research Goal

This study forms part of a research project that explores the algebraic capacities of Spanish primary school pupils in tasks involving functional relationships. Within this project, previous studies have described fifth graders (10 to 11 years old)'s ability to generalize, identifying the functional relationships they applied and the types of representation they used to express them (Pinto & Cañadas, 2018a, 2018b). In this study, they describe the type of questions in which students respond in a generalized manner and the patterns/structures that students recognize. The ability to generalize and represent generalizations of fourth grade students (9-10 years old) and the interviewer's mediator role in interacting with these students (Ureña et al., 2019) have also been described.

The studies cited in the earlier section clearly showed that primary school students can understand letters as representations of variables when afforded the opportunity to participate in tasks and discussions about functions and their representation. They are also a source of examples of tasks that can be used to those ends and describe students' progression in their understanding of letters in algebraic contexts. In this article our aim is to compare some of the data contained in two Blanton et al. (2017, 2015) papers to findings in Spain for students who had no previous experience with either generalisation or functional tasks.

In particular, our study was designed not only to ascertain the meaning given to letters and whether students used them, but also to determine how they used them to represent the dependent variable when they were given the independent variable represented with a letter. This is part of the process of generalization of the functional relationship involved in the problem situations presented. The aim was to supplement previous studies interpretations of the use of letters by relating such use to the meanings given to literal symbols by students through joint analysis of their written answers and their participation in group discussion. The research questions posed were:

What meanings do students attribute to letters when exploring functional relationships between two quantities?

When students generalize functional relationships and use letters to represent the dependent variable, how is this use related to the meanings they give the letters that represent the independent variable?

Third-year primary students were chosen for the study for two reasons. Firstly, the aim was to compare the findings to those of previous studies on the issue. Secondly, the curricular guidelines in place in a number of countries (e.g., Chile, USA) recommend the introduction of (particularly the literal) representation of indeterminate quantities from the age of 8 or 9 (Ministerio de Educación de Chile, 2012, p. 33; NGA & CCSSO, 2010).

The answers to both research questions may inform the design of teaching methods geared to introducing the notation of variables from a functional approach in the primary years.

5. Methodology

A qualitative, exploratory and descriptive study, this classroom teaching experiment (Cobb & Gravemeijer, 2008), was conducted with 25[12] third-year primary school students (8-9 years old) enrolled in a private school in southern Spain. This experiment had a wider objective than that of this paper: to globally explore students' functional thinking including various dimensions such as the patterns/structures that they recognize, their capacity to generalize and express generalizations as well as their understanding and use of letters, in this context, as representations of indeterminate quantities.

Like most Spanish third graders, the students had never performed tasks involving functions or used letters to represent indeterminate quantities, for although the legislation in place defines functional relationships as a curricular requirement, those provisions have yet to have any significant effect on classroom practice.

5.1. Design and Implementation of the Teaching Experiment. The teaching experiment consisted in four classroom sessions lasting around 90 minutes each. In each session a task was proposed to the students. It consisted in a word problem that involved a linear function with a single unknown, natural numbers and a several related questions. This paper discusses the data collected in the first three sessions as the use of letters was absent in the questions posed in the fourth. Some characteristics of the word problems are summarised in Table 4-1. Although the background information used in the second and third sessions was the same, the questions differed.

[12] The total number of students in the class was 25, but in the second and third sessions 24 and 23 students participated, respectively.

Table 4-1.

Background information for word problems

Session	Function	Name	Background
1	F(x) = $x + 5$	Siblings' age	María and Raúl are siblings who live in La Zubia. María is 5 years older than Raúl.
2 and 3	F(x) = $3x$	T-shirt sales	Carlos wants to earn money selling T-shirts with the school's emblem to go on a trip with the rest of the class. He earns 3 euros for every T-shirt sold.

A team of researchers with different roles collected the data, one as researcher-teacher, the second as support teacher and observer and the third as video camera operator. The students' classroom teacher was present during the sessions as an observer only because she did not have time to become more involved in the research process. In a teaching experiment, the person acting as a teacher has to be fully involved in the study. Research objectives take precedence over what from the teacher's point of view might be most appropriate for students (Kelly & Lesch, 2000). This is why it is usually one of the researchers who does the interventions in the classroom rather than the usual teacher.

The data were collected from students' written worksheets and video recordings taken both with a fixed camera located at the back of the classroom and a mobile camera that recorded some of the groups as they worked.

5.1.1. Moments of the Sessions. Each of the session was composed of three moments: (a) Presentation of the background information of the task to the whole group, (b) work in small groups or individually in one or several worksheets and (c) whole group discussions of the answers. These moments were not done in a linear way, after a group discussion the class could end, return to work in small groups or present a new question.

When initially presenting the background information, the objective was to corroborate that everyone understood the proposed task. In discussions, the students could present their ideas, ask another student to explain something or suggest ways to improve an answer. The role of the researcher-teacher was to encourage students to participate actively in the activities, clarify their doubts about the tasks and encourage interaction between students. In the discussions, the researcher-teacher got involved with the students' contributions, posed questions that allowed the students to reflect on the tasks and their answers, evaluate if they were correct or not, and thus, as a whole, be able to solve the activities.

Students were seated in their usual classroom arrangement, in groups of three or four, and allowed to work individually or in groups, at their discretion, to ensure they felt at ease throughout. They had opportunities to talk to one another while problem solving as well as discussing their ideas in the whole class discussion.

The possibility to discuss either in small or large groups is very important in the design of the teaching experiment. Students' participation in discussions of mathematics is the central activity of learning (Boaler & Greeno, 2000). Social interaction with others helps students modifies their ways of symbolizing and their mathematical meanings (Cobb et al,, 2012).

5.1.2. Design of Worksheets. The design of the tasks (e.g., the functional relationship involved, the representation used) was inspired by previous studies on functional thinking previously cited but contexts and vocabulary were chosen to be familiar to the participating students. The tasks were organized around the inductive reasoning model proposed by Cañadas and Castro (2007). The first questions referred to specific cases presented non-consecutively so as not to foster recursive reasoning. Students were then asked to verbalise the relationships observed and check their validity. Letters were subsequently introduced to represent indeterminate quantities and the students encouraged to use them to verbally generalise the relationship observed. Letters were introduced at the same time as students were asked to deal with and express variability. According to research on secondary students' understanding of letters and of variables and their notation (Fernández-Millán & Molina, 2016; Furinghetti & Paola, 1994; Küchemann, 1981; Molina et al., 2017) in algebraic contexts, traditional approaches to algebra instruction have proved unsuccessful in helping them satisfactorily develop such an understanding. Those findings are an indication that students need more opportunities and more time if they are to reach that goal. So, we introduced the use of letters to provide students with opportunities to grapple with algebraic notation and build on their incipient ideas. Learning to use symbols allows students to participate in communication; symbols are an integral part of individual and collective activity (Cobb et al., 2012). In this case symbols allow students to work with the idea of indeterminate quantities.

Questions addressed the correspondence relationship (primarily) and covariation (Smith, 2008) and revolved around both direct (how the dependent was related to the independent variable) and inverse (how the independent was related to the dependent variable) functional relationships.

The 'siblings' problem was introduced in the first session. It was deemed to be accessible for students because age differences and the change in age over time were believed to be ideas familiar enough to engage them in the task and make them think about variations in quantities that differ by a constant amount. In Table 4-2 we describe the tasks presented in the first session and relate them to the phases of the Cañadas and Castro (2007)'s inductive model. In this and the following sessions the intention of each task is a suggestion to guide the process, however the students could generalize in phases prior to the suggested one.

Table 4-2.

Tasks presented in a worksheet, session 1

<table>
<tr><th>Model</th><th>Description of task</th></tr>
<tr><td>Observation of particular cases and identification of structures</td><td>The next question is raised by considering three different cases (7, 15 and 80 years old). When Raúl is 7 years old, how old is María? How do you know?</td></tr>
<tr><td>Conjecture formulation</td><td>4. I found a picture of a birthday of Raúl, how can I know how old María is? On the cake you can see how old Raúl is.</td></tr>
<tr><td>Conjecture validation</td><td>5. Complete some rows of the table with quantities that may be true. Remember that María is 5 is older than Raúl. (In the table they can complete seven rows, for example as follows)
<table><tr><th>Raul's age</th><th>Calculation of María's age</th><th>María's age</th></tr><tr><td>7</td><td>7+5=</td><td>12</td></tr><tr><td>10</td><td>10+5=</td><td>15</td></tr><tr><td>⇨ A</td><td>➡ A +5</td><td>F</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Conjecture generalization</td><td>6. Choose a letter to indicate Raúl's age. Place the letter in the gray table row next to the white date. Next to the gray date, write how to use the letter to calculate María's age.</td></tr>
</table>

The T-shirt problem was introduced in the second session. The students were also deemed to be familiar with situations involving product sales. In this task true/false sentences were proposed. In our experience they are useful to help primary students focus on relations and leave aside the computational mindset that they tend to show in arithmetic settings (Molina et al., 2008). The independent variable was only represented by the letter Z and the dependent variable was represented in different ways: by the letters Z, N or Y (see Table *4-3*). Sentences 7 and 14 could be true or false depending on the conditions to be met by letters N and Y.

Table 4-3.

Tasks presented in a worksheet, session 2

Model	Description of task
Observation of particular cases and conjecture formulation	The students propose particular cases and conjecture their relationship by asking: How much money can Carlos earn?
Conjecture validation	The students were asked to answer and explain their answers to 15 true/false questions (e.g., 'when Carlos sells five T-shirts, he earns 10 euros').
Conjecture generalization	The following sentences involved the use of letters. 6. When Carlos sells Z T-shirts, he earns 3xZ euros. 7. When Carlos sells Z T-shirts, he earns N euros. 14. Carlos wants to earn Z euros. That means he must sell Y T-shirts. 15. Carlos wants to earn Z euros. That means he must sell Z T-shirts.

Students also worked on the T-shirt problem in the third session. In this case various letters were proposed to represent the dependent or independent variable (see Table 4-4).

Table 4-4.

Tasks presented in a worksheet, session 3

<table>
<tr><th>Model</th><th>Description of task</th></tr>
<tr><td>Observation of particular cases and organization</td><td>Fill in the table with the amount that may be true. (In the table they can complete nine rows, for example as follows)
<table>
<tr><th>Number of T-shirts sold</th><th>Calculation of de money earned</th><th>Euros earned</th></tr>
<tr><td>50</td><td>50x 3 =150</td><td>150 €</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Identification of structures and conjecture formulation</td><td>1. Look at the numbers in the third column, what could you say about those numbers?
2. Explain the relationships you see between the numbers in the table.
3. What relationship do you observe between the numbers that appear in the first column and those that appear in the third column?</td></tr>
<tr><td>Conjecture validation</td><td>4. The following table shows some information about the number of T-shirts sold by Carlos and the money he has earned from them. Fill in the gaps.
<table>
<tr><th>Number of T-shirts sold</th><th>Euros earned</th></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>6</td><td>18</td></tr>
<tr><td>100</td><td>3×100</td></tr>
<tr><td>900:3</td><td>300</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Conjecture generalization</td><td>At the bottom of the table, four cases involving letters were presented.
<table>
<tr><th>Number of T-shirts sold</th><th>Euros earned</th></tr>
<tr><td>N</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3×Y</td></tr>
<tr><td>Z:3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>D</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

5.2. Data Analysis. The review of the information from each session included a detailed analysis of students' written work as well as the classroom interventions. The transcripts of the sessions recorded with the stationary and mobile cameras and the students' written work were coded qualitatively. First, the episodes involving indeterminate quantities and letters were identified in each medium used to collect the data. The transcripts were reviewed line by line. In the students' written work, the units of analysis were students' written answers, which were contrasted with the video recordings. Students' anonymity was ensured by assigning each a code: E_i where i= 1 ... 25. The researchers were identified as R_i (i=1 or 2).

The categories discussed below were formulated on the grounds of an inductive analysis of the data collected. Two groups of categories were established, one for the meanings attributed to letters and the other for the ways indeterminate quantities were represented.

The categories referring to meanings were defined in keeping with earlier research (Blanton et al., 2017; Küchemann, 1981; Molina et al., 2018) and organised by complexity, ranging from the dismissal of letters to their acceptance as indeterminate, variable quantities. The general and specific sub-categories are listed in Table 4-5. Imprecise replies were coded using general categories (e.g., 'use of letter accepted'), whereas more complete replies were classified under the respective specific sub-categories (e.g., 'letter as variable/generic example').

Table 4-5.

Meanings attributed to letters: categories

Category	Description
D. Letter dismissed	Letters cannot be used because they mean nothing.
A. Use of letter accepted	Letter are used to perform the proposed tasks.
A.1 Letter as label or object	Letters are used as labels for objects (e.g., 'M is María', with no mention of its use to represent María's age in years).
A.2 Letter as value or variable	Letter related to a fixed or indeterminate quantity.
A.2.1 Letter attributed a value for some reason	Letter assigned a unique value for some reason (e.g., its position in the alphabet, its value as a Roman numeral).
A.2.2 Letter as variable/generic example	Letter understood to represent different values, with examples; frequent mention of 'for instance' (e.g., 'Z can

Table 4-5.

Meanings attributed to letters: categories

Category	Description
	be 5, for instance, so since each T-shirt costs 3 euros, 3x5 is 15, for instance').
A.2.3 Letter as variable/indeterminate value	Letter used to represent different values, without applying a specific number to explain the answer but expressing the reply in general terms (e.g., 'it's whatever number you want it to be').

The definitions of the categories for representing indeterminate quantities listed in Table 4-6 were based both on earlier research (Blanton et al., 2015; Molina et al., 2018) and the characteristics of students' answers. The focus was on how students represented the dependent variable, given a symbolic representation for the independent variable. Broad categories were defined and sub-divided into more specific categories because it was not always possible to determine why students proposed a specific number or letter.

Table 4-6.

Categories of representations used to denote variables

Code	Description
L. Letter	Use of letter to represent the dependent variable.
L.1 Related letter	Use of one letter to represent the independent variable and an expression bearing the same letter to describe its relationship to the dependent variable (e.g., in the T-shirt problem, N was proposed as the number of shirts and 3xN as the amount of euros earned).
L.2 New unrelated letter	Use of different, unrelated letters to refer to each variable (e.g., in the sibling's problem, R and M).
L.3 New related letter	Use of different letters for each variable, explaining the relationship between the two (e.g., letters E and J because they are five positions apart in the alphabet: E, F, G, H, I, J) [13].

[13]Traditionally the Spanish alphabet had 30 letters: the 26 in the English language alphabet, plus 'ch' between 'c' and 'd', 'll' between 'l' and 'm', 'ñ' between 'n' and 'o' and 'rr' between 'r' and 's', although in keeping with a decision adopted in 1994 only the third is still regarded as a separate letter in dictionaries. Some students in this study used the traditional and others the modern version.

Table 4-6.

Categories of representations used to denote variables

Code	Description
L.4 Repeated letters	Use of the same letter to represent both variables (e.g., N T-shirts sold and N euros earned).
N. Number	Use of a number to represent the dependent variable.
N.1 Number related to a value for a reason	Given a letter to represent the independent variable, use of a number to represent the dependent variable, calculated by attributing a numerical value to the independent variable for some reason, such as its position in the alphabet (e.g., B T-shirts sold means 6 euros earned, because B is the second letter in the alphabet and 2 times 3 is 6).
N.2 Number as generic example	Given a letter to represent the independent variable, use of a random number to represent the dependent variable (e.g., given earnings of S euros, the number of shirts is 100 because S can be any number).

6. Results

The following discussion addresses first the meanings attributed to letters and then the representations used to designate the dependent variable.

6.1. Meanings Attributed to Letters. This section begins with an overview of the meanings put forward by students in classrooms discussions and their written answers. The specific categories are discussed in greater depth below, with examples drawn from the students' explanations.

6.1.1. Meanings observed by session. In classroom discussions, 15 students (out of 25) spoke a total of 31 times: 8 times in session 1, 16 times in session 2 and 7 times in session 3. Their classification is shown in Figure 4-1. Interventions (I_1 to I_{31}, numbered chronologically) were associated with the meanings described in Table 4-5, which were indicated by the symbol "X" in Figure 4-1. In cases where student interventions relate to two meanings, the first observed meaning was indicated by "Xa" while the next was indicated by "Xb". On the whole, students tended to consider letters either as values or as variables (category A.2). All but one accepted the use of letters and only four used them as labels or objects (category A.1) across the three sessions.

Figure 4-1.

Meanings put forward in classroom discussions

Meanings	Express Raúl's age and calculate Maria's age								When Carlos sells Z T-shirts, he earns 3xZ euros.						When Carlos sells Z T-shirts, he earns N euros.										When Carlos sells N T-shirts, how many euros does he earn?						
D																										X					
A	X						X																								
A.1			X		Xa										X			X													
A.2		X			Xb	X		X		X																			X		X
A.2.1																			X					X			X			X	
A.2.2				X								Xb	Xb	X		Xb							X					Xb			
A.2.3									X		X	Xa	Xa			Xa	X			X	X	X			X			Xa			
	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11	I12	I13	I14	I15	I16	I17	I18	I19	I20	I21	I22	I23	I24	I25	I26	I27	I28	I29	I30	I31
	Session 1								Session 2																Session 3						

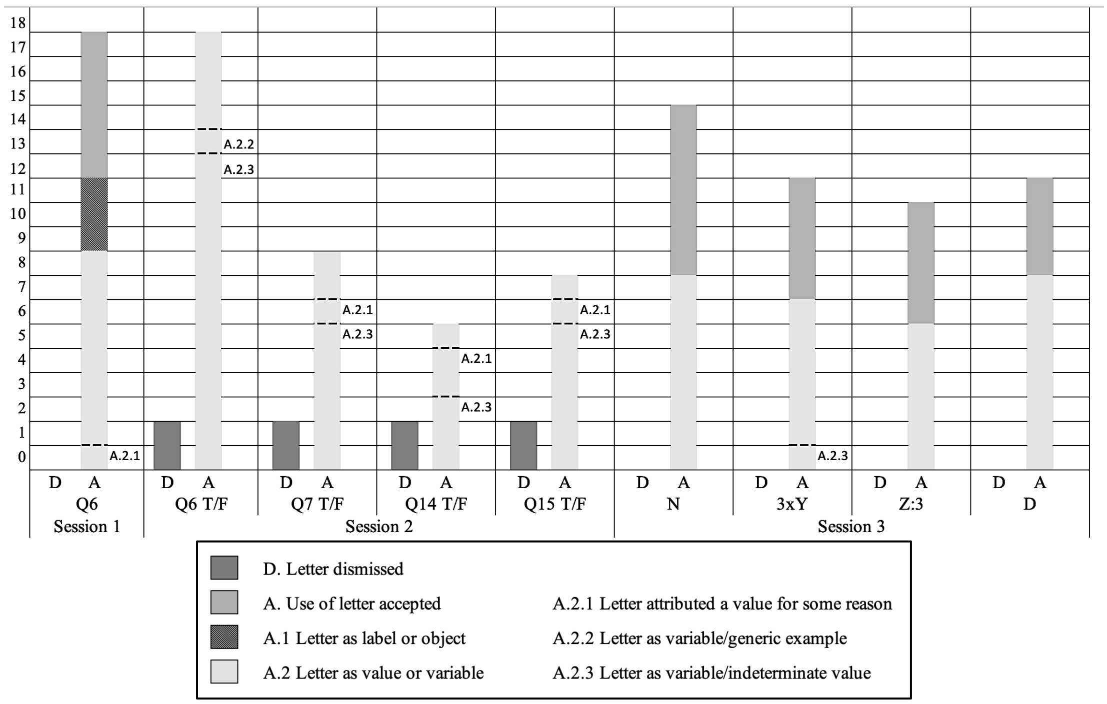
The frequency of the meanings gleaned from the written answers and shown in Figure 4-2 is consistent with the data on the classroom discussions described above. Meanings were observed to be diverse and change across the three sessions.

The data in Figure 4-2 show that students accepted the use of letters in the first session, attributing them meanings based on familiar references such as the alphabet or assigning them a numerical value in pursuit of an arithmetic solution.

Some of the students' written answers in session 2 denoted dismissal of the use of letters. As in the classroom discussions, when letters were accepted, they were most frequently interpreted as indeterminate quantities (category A.2.3). Students most commonly contended that letters can represent 'whatever number you want'. That interpretation generated misconceptions in connection with the last T/F question ('Carlos wants to earn Z euros so he has to sell Z T-shirts'). As the same letter cannot represent different quantities in the same situation, here the correct answer was 'false'. Only three students (of the ten who answer this question) answered correctly to this sentence: two who interpreted the letter as an indeterminate quantity and one who assigned it the value of its position in the alphabet.

Figure 4-2.

Meanings observed by session in written answers



Note. Q6 = question 6; T/F = true/false statement; N = sold N T-shirts; 3xY = sold 3xY T-shirts; Z:3 = earned Z:3 euros; D = earned D euros

No specific pattern was discerned in students' answers to the third session tasks and, as written explanations were lacking on the worksheets for that session, the meanings attributed to the letters could not be identified. In the classroom discussion (see Figure 4-1) two students resorted to the alphabet to attribute a value to the letter representing the independent variable, which they then multiplied by 3 to find the value of the dependent variable. One student dismissed the use of letters and two interpreted them to be any number.

A comparison of the results for sessions 2 and 3 suggest that the latter task was more difficult for students although more students answered. There they again resorted to familiar elements to express their ideas, such as alphabetical order and arithmetic notions, while persistently interpreting letters to be 'whatever number you want'. True/false questions seem to help students broaden their understanding of the use of letters, with a substantial proportion of answers inferring that they interpreted letters as indeterminate values (A.2.3).

6.1.2. Description of meanings. Like the subjects of earlier studies (Brizuela & Blanton, 2014; Cañadas, et al, 2016; MacGregor & Stacey, 1997), some students interpreted letters to be labels or objects. In session 2, students sought words related to the letters: N to mean 'nothing', for instance. In session 1, the letters chosen were the initials for characters' names, with students contending that they represented the names and showing no signs of references to quantities. By way of example, E_5 explained:

E_5: Here I wrote 'R' for Raúl (pointing to the first column) and here a 'C' for 5[14] (pointing to the second),

R: 'C' for five, why did you write a 'C' for 5?

E_5: Because you had to add 5 to everything.

R: Okay, and if 'R' is Raúl's age, how would you write María's age?

E_5: 'M'.

R: Why?

E_5: Because it's her initial.

Interestingly, here the initials of key words were on occasion used to refer to determinate quantities. One example can be found in E_{15}'s session 1 (Figure 4-3) choice of 'R' for Raúl. In the video she explained that 'R' was 19, its position in the alphabet. Her answer was classified as 'letter attributed a value for a reason'.

Figure 4-3.

E_{15}'s answer in session 1

The recording of the conversations between E_{15} and the other members of her working group showed that they initially represented Raúl's age as 'R' and María's as 'M' and sought numbers beginning with those letters to attribute the respective values. As that strategy was unsuccessful, they decided that the value of 'R' was its position in the alphabet. No value was attributed to 'M', initially chosen to represent María's age. They calculated her age by adding five to the value of 'R', i.e., by applying the functional relationship.

[14] The Spanish word for five is 'cinco', hence the 'C'.

The researcher's discussion with this group of students also showed that they accepted the idea that the problem could have different answers. They noted that María's age could be any number, which would depend on the letter chosen. That denoted an understanding of variability, mirrored in their use of different letters to describe the situation, as in the following excerpt from a conversation with E_{15}.

R: If we don't know how old Raúl is, 'R' could be another number, no?

E_{15}: [nods assent].

R: How could you find María's age, if Raúl is 'R' (years old)?

E_{15}: I'd say she's twenty-four.

R: Why?

E_{15}: María, and Raúl is nineteen.

R: But we don't know. He might be older.

E_{15}: If you choose A, for instance, the number would be smaller.

As in previous studies, letters were observed here to be assigned numbers based on their position in the alphabet. Not all these cases implied a lack of awareness of the variable character of the dependent and independent variables. In the following excerpt from the session 1 discussion, E_4 made no reference to a specific age, while nonetheless using alphabetical order to choose the letters to represent the two quantities.

R: A plus five equals E. Explain how you got that answer.

E_4: From A to E goes five.

This use of alphabetical order entailed construing letters to have an indeterminate value and their position in the alphabet a mere reference to express the functional relationship (as in E_4's explanation above). Alphabetical order was also used to assign a unique, fixed value to letters, although possibly associated with variability. These findings corroborated other authors' reports (Brizuela & Blanton, 2014; Cañadas, et al, 2016; MacGregor & Stacey, 1997) in which the use of alphabetical order was viewed as a natural and spontaneous tendency among primary school students, although they associated it with the assignment of (fixed) numerical values.

Students also showed that they recognised the variability represented by letters in other ways. In those cases, their answers were classified under category A.2.2 ('letter as variable/generic example') or A.2.3 ('letter as variable/indeterminate value'). The subcategory 'letter as variable/generic example' grouped answers in which students' use of examples denoted an understanding that letters can represent different values. In the session 1 classroom discussion, E_6 referred to letters as representing different quantities, attributing a numerical value to the letter by way of example only: 'A plus five. And I say for instance 45'. In other words, she did not rule out the possibility of some other amount.

A second example arose in the session 3 discussion. E_4 referred to the letter as an indeterminate number, noting that it could be 'whatever number you want'. His explanation that the independent variable had to be multiplied by three constituted recognition of the existence of a relationship between the two variables. He ultimately attributed the letter a numerical value to clarify his argument.

E_{14}: I wrote N and then I wrote S, I think.

R_1: Another letter, S.

E_{14}: Yes, I used N which is, say, the number that we want. I used S because I think N would be the number and then the result would be a different number. That's why I wrote S.

R: You wrote S because it's a different number. Fine.

R_2: And that number, E_{14}, could it be any number?

E_{14}: Yes, for instance, N could be three and S could be nine, for instance.

R_2: And how would you always find that S, E_{14}?

E_{14}: Multiplying N times three.

Students first verbalised the idea of letters being 'whatever number you want' in session 2 (Table 4-7 lists further examples in the students' written work), such as in the discussion of the statement 'Carlos sells Z T-shirts and earns N euros'. E_7 and E_{14} verbalised that argument, as shown in the following excerpt.

E_7: I say it's true because if Carlos sells Z T-shirts, Z is a number and he earns N euros, N is another number. If he sells Z T-shirts, he earns N euros. Then I think that if Carlos sells whatever number, he earns a different number of euros.

R: If the two are different, then, you say it's true.

E_7: Yes.

E_{14}: True because Z can be whatever number you want and N can also be any number you want. If Carlos has however many T-shirts you want, then he can earn however much you want.

Table 4-7.

Meanings attributed to letters in true/false questions: letter as variable/ indeterminate value

	Example		
Questions	E	R	Student's explanation
6	E_{17}	T	Z is a number and you have to multiply it times 3.
	E_4	T	Z can be a number and if you multiply it times 3 he earns the (result of the) multiplication.
7	E_9	T	Z and N are whatever number you want.
	E_{14}	T	Z and N are the number you want.
14	E_{17}	T	Z and Y are whatever number you want.
	E_{14}	T	Z is whatever number you want and Y also.
15	E_7	F	The euros earned aren't the same as the T-shirts he sells.
	E_5	F	He has to sell triple.
	E_9	T	Z can be whatever number you want.
	E_{14}	T	Because Z can be 13 or whatever number you want.

Note. E = student; R = reply; T = true; F = false

The idea that letters can be any number led some students to conclude that the statements in questions 7, 14 and 15 were (always) true (e.g. see E_{14}'s answers in Table 4-7). Some students nevertheless realised that the two quantities had to be related as per the functional relationship specified (e.g. E_4 and E_{17} in session 1).

6.2. Representation of Indeterminate Quantities: the Dependent Variable. This section analyses how students represented the dependent variable when the independent variable was represented symbolically. As noted above, whereas students were asked to represent the dependent variable in sessions 1 and 3, in session 2 the researchers themselves proposed the representations. In this later case we analyse students' explanations to determine how they interpreted and used letters. As the categories discussed above showed, students used letters, numbers or both to represent the dependent variable. Whilst the use of letters prevailed in the first session, in session 3 numbers acquired a certain predominance (see Table 4-8).

Table 4-8.

General categories for representation used to denote the dependent variable

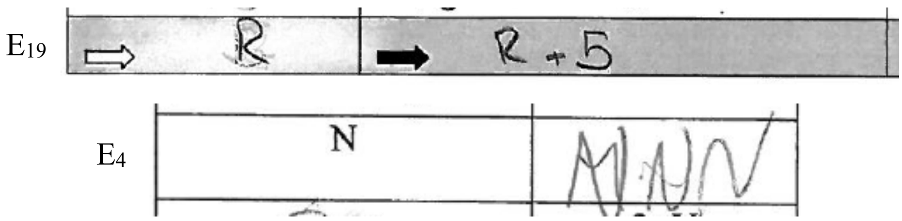
	Session 1	Session 3			
Category	Q6	N	3xY	Z:3	D
L. Letter	10	6 (4)	5 (3)	5 (3)	5 (4)
N. Number	5	8 (7)	6 (6)	7 (6)	7 (4)
Total	15	14	11	12	12

Note. (Qi = question i; N = sold N T-shirts; 3xY = sold 3xY T-shirts; Z:3 = earned Z:3 euros; D = earned D euros). The values in parentheses indicate the frequencies not classified under other sub-categories.

6.2.1. Use of a letter to represent the dependent variable. Students represented the functional relationship in one of two ways. In some answers, classified as 'related letter', the independent variable formed part of the (not necessarily syntactically correct) expression used. The examples in Figure 4-4 were taken from E_{19}'s answers in session 1 and E_4's in session 3.

Figure 4-4.

Excerpts from E19's and E4's written answers in session 3



E_4's explanation, reproduced below, of why he repeated the independent variable three times to represent the dependent variable, attested to his interpretation of the former as a variable with an indeterminate value.

E_4: If it were multiplied times three, you add N three times.

R: Then N three times [writing on the blackboard].

E_4: N plus N plus N, three Ns.

R: What does that mean? Can you explain, E_4?

E_4: It's as if you were multiplying. Three Ns because it's multiplied times three.

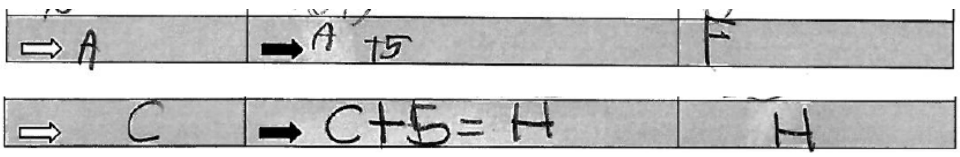
In other answers classified as 'new related letter', students took the alphabet as a reference to choose a letter for the dependent variable and express the functional relationship. For example, in session 1 three students chose a letter located five positions after the letter denoting the independent variable to represent the function $x + 5$ (see Figure 4-5).

Figure 4-5.

Excerpts from E_8's and E_{10}'s written answers in session 1

E_8

E_{10}



This is complemented by what E_5 points out in the discussion of session 1. There E_5 made no reference to a specific age, while nonetheless using alphabetical order to choose the letters to represent the two quantities. The argument was that if Raúl was Z years old, as 'Z' is the last letter of the alphabet, María's age would have to be found by going back to 'A'; María would be D years old. These students did not replace letters with numerical values.

Some of the session 2 answers were also classified under 'new related letter'. When representing the functional relationship, some students used a different letter for the dependent variable, contending that different letters represented different quantities and that letters can represent 'whatever number you want', an argument that, as noted in the preceding section, implies viewing letters as variable and indeterminate quantities (category A.2.3). Some students (e.g., E_7) applied that argument broadly while others (e.g., E_1) did so more restrictively, noting that although a given letter can be any number the functional relationship between the two variables had to hold. They were nonetheless unable to express that relationship with letters. The following excerpts exemplify these arguments.

E_7: I say it's true because if Carlos sells Z T-shirts, Z is a number and he earns N euros, N is another number. If he sells Z T-shirts, he earns N euros. Then I think if Carlos sells whatever number, he earns a different number of euros.

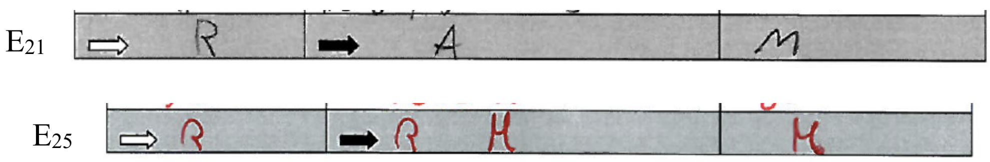
> *E_1:* It's true. Because if Z is a lot, N has to be a large number. And if Z is small, then the other number also has to be small. For instance, if Z is 20, twenty times 3 would be 60. And you write 60 for N. And it would be 60 and that's why I say it's true.

Another example of the 'new related letter' category, taken from the session 3 discussion, was E_{11}'s reason for choosing the letter S, claiming that since he deemed N to be 15 the answer after multiplying was a different number, so he chose another letter, different from N.

In contrast, some students used different, unrelated letters. Such replies were classified under the category 'new unrelated letter'. In the first session, for instance, two students (E_{21} and E_{25}) used letters as labels, choosing R and M, the initials of the names of the two siblings (Figure 4-6).

Figure 4-6.

Excerpts from E_{21}'s and E_{25}'s answers in session 1

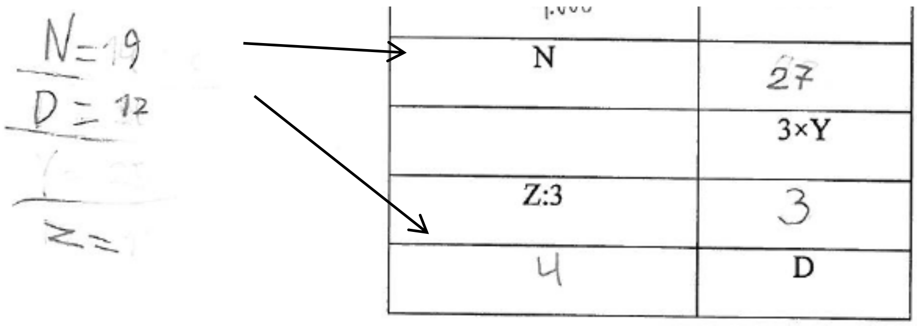


Some students were also observed to believe that a given letter could represent both the dependent and the independent variables in the function and different amounts in one and the same situation. Four students claimed that true/false question 15 was true. E_{14} asserted that it was true 'because Z can be 13 or whatever number you want'. They contended that letters could be 'whatever number you want', interpreting them as indeterminate quantities.

5.2.2. Use of a number to represent the dependent variable. The criteria for choosing numbers to represent the dependent variable were not always verbalised. Where they were, two categories could be distinguished: random and alphabet-related. Sometimes students assigned a value to the independent variable and after applying the functional relationship used the result to represent the dependent variable. That is illustrated in Figure 4-7, where E_5 wrote in the values for the letters N and D in the margin and used them to fill in the table by applying the direct and inverse functional relationships to the assigned values.

Figure 4-7.

Excerpt from E_5's answers in session



Some students' explanations suggested that the number chosen was used as a generic example (category N.2). The mobile recording of session 1 included a conversation in which student E_{10} explained why she used the number 100 to represent the variable. She construed the letter to be a variable and explained that 100 was just an example, because letters can represent 'any number'.

In other students' explanations the number was alphabet-related (category N.1). In the session 3 discussion E_3 contended that she thought N was 14 because of its position in the alphabet and therefore represented the dependent variable as 42 (=3x14).

7. Discussion and Conclusions

The first question posed in this study sought to determine the meanings attributed by students to letters when exploring the functional relationships between two quantities. The meanings detected were as a label, value and variable. They varied across the sessions.

The Blanton et al. (2017) contention that progression in thinking about variables and their notation is non-linear, with meanings varying with the task involved, was both confirmed by the present findings and shown to apply to third-year students. Most of the students used familiar elements in the first session, in keeping with observations by Radford (2000), who noted that when students attribute meanings to symbols they seek recognisable references. In the first session meanings alluding to areas previously worked on by the students, such as alphabetical order or arithmetic, prevailed. Previous studies interpret this as a tendency to assign fixed values to unknown quantities and to not perceive variability (Blanton et al., 2017), however, our data show that this is not always the case. We discuss it below when we talk about students' representations of the dependant variable.

In the second session the meaning of letters as variables with indeterminate values, associated with the idea that letters can be 'whatever number you want', prevailed. Students tended to support their 'letter as variable/indeterminate value' reasoning with reference to specific quantities. That category would therefore be closely related to 'letter as variable/generic example', in which students realised that letters could represent different amounts, but proposed a set quantity as an example. While able to express the algebraic relationship correctly, it seems that they fail to deem the answer as suitable because arithmetic logic induces them to seek numerical solutions. They might also resort to examples due to limitations in their competence to express their thinking in abstract terms.

In the third session, where a more open task was considered, the meanings observed varied, with five of the eight contributions to the discussion attributing a value to the letter to explain the answer.

Students tended to represent more the direct than the indirect relationship no matter which of these relations was ask for. When in session 2 the dependent variable was shown in connection with the operation relating it to the independent variable (such as in T/F question 6), the students viewed the latter as an indeterminate quantity, validated with previously generalised procedures based on tasks involving specific numbers. In contrast, when the dependent variable was expressed as a letter (T/F question 7), they tended to represent the other variable with a letter as well. They construed letters as indeterminate quantities, although in general they deemed that the two amounts had to be different and since the letters were different, the respective statements would be true.

The second research question posed the possible relationship between the meanings given to letters and their use to represent indeterminate quantities. That issue was explored with an in-depth analysis of how students represented the dependent variable when the independent variable was a letter. This study furnishes new information on students' tendency to relate letters to their alphabetic order and use them as indeterminate quantities. Earlier studies revealed that students innately attributed numbers to letters according to their position in the alphabet. Here further exploration of that idea showed that while students sometimes used alphabetical order to replace letters with numbers ('letter attributed a value for a reason'), in others they applied that criterion only to choose the letter representing the dependent variable. They then assigned variables indeterminate values to express the functional relationship ('letter as variable/indeterminate value'). In other cases, while attributing a unique value to each letter in keeping with its alphabetical order, they acknowledged that values could vary depending on the letter chosen to represent the independent variable. Such answers are an indication that, even when resorting to alphabetical order, students realised that the answer could involve more than one indeterminate quantity. They nonetheless lacked a system of symbols with which to express that variability with a single notation.

The study also revealed that representation of the dependent variable was affected by the meaning category 'letter as variable/indeterminate value'. Students used the same or different letters to represent the two variables, reasoning that letters can be 'whatever number you want' or contending that they can represent 'any number'. Whilst some felt no need to include the functional relationship in their representation, others tried to explain that letters cannot adopt just any number but were governed by that relationship.

When students represented the dependent variable as a number they might be thought to be assigning the letter a fixed value, confirming the static view of letters described by Kücheman (1981). However, the analysis of students' explanations for choosing a given number to represent a letter, showed that they deemed the choice to be a mere example, for in their belief that letters can be any number they assumed that replies involving a specific case would not be wrong.

Although in all three sessions at least one student dismissed the use of letters, on the whole they acknowledged the idea of variability which they associated with indeterminate quantities. Nonetheless, they deployed a personal system of symbols consisting in letters, numbers or both. These findings support the Blanton et al. (2017) and Kaput et al. (2008) argument to the effect that variability as a notion and its symbolic representation can be experienced separately. An aware and effective reference to letters by students of this age is not so quickly approachable. Few children appropriate variable notation readily. Let's remember that our results come from just three 90-minutes sessions. Nevertheless, our description provides interesting examples of how students might make sense of this notation.

Students, who had no prior introduction to algebra, were able to reason abstractly and associate letters with indeterminate quantities. That was favoured by tasks involving true/false sentences, but not so much in those in which they had to represent functional relationships by themselves. This study showed that participants could use letters in ways reported by earlier authors.

The categories defined here were useful for analysing students' replies and may be applicable in future research. While based on earlier studies, they were supplemented and adapted here to the data collected. The originality of this study rests in part on the categories proposed to analyse representation of the dependent variable when the independent variable is given as another letter, for this particular has not been previously addressed.

Further research along the present lines would include the exploration of other meanings related to indeterminate quantities, such as unknowns. Here students indicated that letters can represent indeterminate quantities and argued that they can be 'whatever number you want', but that is not true in other contexts.

References

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181–202.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5.* Reston, VA: NCTM.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39–87.

Boaler, J., & Greeno, J. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematics worlds. In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on mathematics learning and teaching (pp. 171-200). London, England: Ablex Publishing.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. Coxforf & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook* (pp. 20–32). Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria [The development of algebraic thinking in children of primary school]. *Revista de Psicología – Segunda época (UNLP), 14,* 37–57.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A., & Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation / Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología: Studies in Psicology, 36*(1), 138–165. doi: 10.1080/02109395.2014.1000027

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41,* 87–103.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorization for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 69–81.

Cañadas, M. C. & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades [An approach to the conceptual framework and background of functional thinking in early ages]. In E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo, & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Granada, España: Comares.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* (Vol. 2, pp. 669–705). Charlotte, NC: Information Age

Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (2012). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. Lesh & J. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68–95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Fernández-Millán E. & Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas [Inquiry into secondary students' conceptual knowledge of algebraic symbolism through problem posing]. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(1), 53–71.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 368-375) Lisbon, Portugal: PME.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A.E. y Lesh, R.A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence y variable. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A Global dialogue from multiple perspectives* (pp. 259–276). Berlin, Germany: Springer.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London, United Kingdom: John Murray.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1–19.

Merino, E., Cañadas, M.C., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización [Use of representations and patterns by fifth graders in a generalization task]. *Edma 0–6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24–40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria [Royal Decree 126/2014 of February 28, which establishes the basic curriculum of Primary Education]. *BOE, 52,* 19349-19420.

Ministerio de Educación de Chile. (2012). *Bases curriculares educación básica*. [*Curricular bases primary education*]. Santiago, Chili: Unidad de Currículo y Evaluación.

Molina, M., Castro, E., & Mason (2008). Elementary students' approaches to solving true/false number sentences. *PNA, 2*(2), 75–86

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C., & Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 1137–1156.

Molina, M., Ambrose, R. & del Rio, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade spanish students. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 monographs* (pp. 261–280). Cham, Germany: Springer.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: NGA & CCSSO.

Pinto, E., & Cañadas, M.C. (2018a). *Generalization in fifth graders within a functional approach.* PNA, *12*(3), pp. 173-184.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018b). Structures and generalisation in a functional approach: The inverse function by fifth graders. In Gómez, D. M. (Ed.), *Proceedings of the First PME Regional Conference: South America* (pp. 89-96). Rancagua, Chile: PME.

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra: Una perspectiva post-vigotskiana [The learning of sign use: A post-Vygotskian perspective]. *Educación Matemática, 11*(3), 25–53.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237–268.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303–322). Berlin, Germany: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-17735-4_17

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Eds.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs (pp. 3–25).* Cham, Germany: Springer.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The Mathematics Teacher, 81*(6), 420–427.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grad*es (pp.133-160). New York, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ureña, J., Ramírez, R., & Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje/Journal for the Study of Education and Development 42*(3), 1–21.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables [Children and the variables]. *Educación Matemática, 6*(3), 90–108.

ESTUDIO 2: FOURTH-GRADERS' JUSTIFICATIONS IN EARLY ALGEBRA TASKS INVOLVING A FUNCTIONAL RELATIONSHIP[15]

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (En prensa). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Abstract

In the context of early algebra research and as part of a classroom teaching experiment (CTE), we investigated fourth grade (9- to 10-year-old) students' justifications of how they performed tasks involving the functional relationship y = 2x. We related their written justifications (part of the task) to the task characteristics, which included various semiotic systems (verbal, numerical and alphanumeric, among others) and the demand of different type of justifications. The role of classroom discussion in helping express the functional relationship orally in more sophisticated terms was also investigated. The findings showed that students' written justifications changed with the semiotic system involved in the task. Oral discussion helped students generalize in more sophisticated terms than in their written justifications, in which they omitted information or used less precise language.

Keywords: Early algebra, generalization, justification, functional thinking, semiotic system

[15] Reproducido con permiso de Springer Nature. Esta es una versión posterior a la revisión por pares y previa a la corrección de estilo de un artículo publicado en Educational Studies in Mathematics. La versión final autentificada está disponible en línea en: https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Reproduced with permission from Springer Nature. "This is a post-peer-review, pre-copyedit version of an article published in Educational Studies in Mathematics. The final authenticated version is available online at: https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

1. Introduction

One of goals of early algebra research is to *algebrify* elementary mathematics considering several dimensions of algebra: (a) generalized arithmetic; (b) the study of patterns; (c) equivalence, expressions, equations and inequations; and (d) the study of functions (Molina & Mason, 2009; Blanton et al., 2011). In addition, it includes processes that are transversal to those contents: generalization, representation, justification and reasoning about generalizations.

The object of this study is the process of justification in the context of early algebra tasks involving functional relationships. We focused on functional thinking, understood to be generalizing, representing and justifying relationships between covarying quantities, as well as the use of representation to predict and understand how variables behave (Blanton & Kaput, 2011). This type of thinking allows integrating algebra in the elementary mathematics curricula without adding any new content, just interpreting arithmetic operations as functions. It is also a useful resource in problem solving; it allows to deal with functions, in students' daily contexts, as a variation (e.g., Carraher & Schliemann, 2007, 2015).

Justification, a skill developed gradually (Stephens et al., 2017), is a way of determining and explaining the truth of a conjecture or assertion. We are interested in its study because encouraging students to justify their thinking helps them understand and actively participate in the construction of mathematical concepts and processes (Chua, 2016).

Justification is an act of communication. Students' mathematical knowledge can be analyzed from what they say or their use of other signs (Morgan et al., 2014). Furthering mathematical communication helps students express themselves more clearly. It also helps teachers understand what students are thinking and make better informed pedagogical decisions (Ingram et al.,2019). As acknowledged in curricular guidelines, Spanish elementary school students are expected to "verbally express and reason the process followed in solving a problem […]; formulate conjectures and find arguments to validate or refute them" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p.19388).

In the context of a CTE designed to explore and foster functional thinking in elementary school students, we sought to determine how justification may be conditioned by the characteristics of the tasks proposed and describe the development of students' ability to justify. We delimited the research problem in terms of the following questions:

> What are the characteristic features of written justifications in functional tasks involving different semiotic systems and demanding various types of justifications in generalization?
> How might oral justification arising in group discussion promote further more sophisticated expression of inter-variable relationships?

Considering that the type of arguments wielded depends on students' skills and the nature of the task (Chua, 2016), we include in the tasks the demand of two type of justifications: elaboration and validation. At the same time, we consider that semiotic systems include conventional representations systems but also non-conventional systems such as gestures, rhythm and natural language. By using them students give meanings to mathematical objects (Radford, 2002). A higher sophistication in the expression is related to the idea of semiotic contraction, i.e., the reorganization of semiotic resources produced as a result of students' higher awareness of mathematics meanings and interpretations (Radford & Sabena, 2015). The semiotic contraction consists of making a choice between what counts as relevant and irrelevant (Radford, 2018)

The interest of studying justification and the expression of generalization considering different semiotic systems is manifested by Kaput (2009) as an open line of research: "Given the essential role of argument and expression in generalization, and the fact that younger learners need to use natural language and other naturally occurring forms of expression, my sense is that we have much to learn about generalization and hence the development of algebraic thinking, from studies of gesture and talk—including intonation (p.213)". In that paper the author claims that theoretical constructions such as that of Radford (2009) are needed to get a deeper understanding of how speech, gesture, and the many different systems of signs interact, particularly if we adopt his perspective that knowledge objectification is almost always, particularly in education, a multimodal, semiotically mediated phenomenon. Considering this concern, in this study we aim to contribute to widening the study of functional thinking by adopting a multimodal view of thinking. We consider thinking not just as a mental activity but as a process mediated and evidenced by language, gestures, rhythm and all the resources used to interact with the environment. We understand that "the source of abstract mathematical thinking is to be found in the sophisticated linkage of language and the perceptual, auditory, tactile and kinesthetic sensorial channels.” (Radford, 2009, p. 124).

Earlier studies have broached justification from different angles. Some sought to characterize student’s arguments and determine whether they accepted a mathematical proof as valid (Stylianides, 2015), while others used the Toulmin model to characterize such arguments (Krummheuer, 2013), focused on teachers’ questions and actions that could further explanation or argument (Ingram et al., 2019) or established levels in students’ justifications (e.g., Carpenter et al., 2003; Knuth et al., 2009; Lannin, 2005). Some of the open lines of research mentioned in earlier papers included exploring the types of tasks that encourage students to analyze their classmates’ generalizations and justifications (Lannin, 2005) and identifying the type of curricular and educational foundations on which to build sophisticated justification (Stephens et al., 2017).

We aim to characterize students’ justifications qualitatively, without judging whether they constituted formal mathematical proofs. We deemed justification to be sophisticated in functional contexts when it was precise, explicitly mentioned the variables involved, expressed the relationship between variables bearing in mind a number of mathematical elements and referred to indeterminate quantities. The acknowledged importance of justification in the process of learning mathematics justify our interest in deepening our understanding on how students justify their answers and how this process may be conditioned and mediated by various tasks characteristics. In this case the characteristics consider are the type of justifications demanded by the task and the semiotic systems used in the task. Part of the originality of this study is to analyze the students' answers considering these two components of the tasks. We discuss the differences identified between written and oral justification in terms of the idea of semiotic contraction providing new insight into the development of students’ awareness of the functional elements involved in the early algebra tasks proposed as well as the role of the linguistic exchange provoked by the task.

2. Theory and Background

2.1. Justification. In this study, justification is defined as a social process in which mathematical knowledge is explained, verified and systematized based on ideas, definitions and mathematical properties which, like the representations used to express the concept, are within the conceptual reach of the classroom community. Its role depends on the community at issue (Staples et al., 2012). As an educational task, justification may be a means to learn mathematics and solve mathematical problems, enabling students to heighten their understanding of mathematics and improve their mathematical skills.

Justification and argumentation have been defined in a variety of ways in mathematics education literature. According to Chua (2016), justification is a way to determine and explain the truth of a conjecture or assertion. Its roles include determining the truth to dispel one's own doubts or persuading others that a conjecture is true. Similarly, Ayalon and Hershkowitz (2018) and Simon and Blume (1996) stressed that it is both a verbal and a social activity. They positioned justification in a social space as part of classroom discourse for contrasting ideas, reflecting and reasoning. Therefore, it is based on knowledge shared by the community.

Justification tasks may be classified by their nature and purpose or by the element to be furnished in the justification (Chua, 2016). For example, in justification task of elaboration where the purpose is to explain *how*, students are expected to include a description of the method or strategy used to find the result. In task of validation the aim is to explain *why*, with students expected to give reasons or evidence to support or refute a mathematical idea.

2.2. Earlier Research on Justification. The different levels of student justification established in the literature include: non-justification; reference to an authority; empirical evidence; generic example; general argument not constituting an acceptable proof; and deductive justification.

Empirical evidence-mediated justifications are inductive or perceptual, i.e., based on examples rather than on a general relationship (Carpenter et al., 2003). A generic example is a deductive justification expressed in connection with a particular instance (Lannin, 2005). A general argument not constituting an acceptable proof is one that includes non-feasible or mathematically incorrect arguments or an incomplete argument which, if completed, would be acceptable (Knuth et al., 2009).

Blanton (2017) noted that in studies conducted in a functional context, elementary school students often resort to empirical cases when justifying their answers. Similarly, Lannin (2005) concluded that sixth-grade students, when performing generalization tasks in numerical situations, tended to use empirical justification or generic examples. In the latter case generality was identified by the educator rather than the students. Carpenter et al. (2003) stressed that to help students' reason about the context or structure of a problem guiding them toward general arguments is more important than testing specific cases. In a study with sixth- to eighth-grade students, Knuth et al. (2009) observed that example-based justifications prevailed and justification grew more sophisticated with age. Although lacking mathematical rigor, students could prove the general case, perhaps because those students had participated previously in activities that favored justification. Establishing general arguments was the task that posed greatest difficulty.

2.3. Approach of the Semiotic and Social Perspective of Algebraic Thinking. Algebraic thinking can be defined from multiple perspectives (Carraher & Schliemann, 2018; Kieran, 2014). In this study we assume algebra refers to indeterminate quantities (unknowns, variable, parameters or generalized numbers) which are used in an analytical manner. It involves reasoning about generality, recognizing the underlying algebraic structure in a situation and relations between quantities. Algebra as a language for expressing and manipulating generality (Mason et al., 1985) resort to idiosyncratic or specific modes of representation culturally evolved (Radford, 2018).

Concerning the modes of representation in the study of algebraic thinking, we consider thinking is produced in and through a sophisticated semiotic coordination of talk, body, gestures, symbols and tools. It is not just abstract and intangible ideas situated in the mind (Radford, 2009). Signs are the keys to understanding and interpreting how people learn and understand. Signs are psychological tools that enable subjects to reflect and plan actions and act as cultural mediators (Radford & Sabena, 2015). Invoking Vygostkian premises, we deemed signs to be included in children's activity and alter the way they understand the world and themselves. As that transformation depends on the collective social meaning and use of signs, it is related to their historical and cultural role (Presmeg et al., 2016).

The evolution of the meanings of signs is closely related to social interaction because it is the way in which ideas are symbolized and mathematical meanings change with communication and interaction with others. The meaning of signs arises and is materialized and transformed during a singular communicative situation, thanks to the linguistic exchange stablished between the users. In other words, they are developed according to the demands of communication and social interaction (Wertsch, 1985/1995). To understand the meaning of signs, we cannot reduce its interpretation to just what they represent but rather we must understand the type of activity that they allow (Vergel, 2014).

Generalization is a central aspect in algebraic thinking (Kaput, 2008; Mason, 1996) which has been described in several ways in the literature. This activity can be understood as a process (generalizing) as well as a product (generalization) (Ellis, 2007). The process implies: (a) to identify elements common to all cases, (b) to extend reasoning further than the range in which was originated, and (c) to derive more wider results than the particular cases and to provide a direct expression that allows to obtain any term (Ellis, 2007; Strachota et al., 2018). In addition, we think of generalization is constituted by layers which acquire higher sophistication in relation to the semiotic systems used to reason and express generality (Radford, 2010). In general, we share the view that algebraic thinking may be cultivated before algebraic notation is introduced (Carraher & Schliemann, 2018; Radford, 2018).

2.4. Functional Thinking. Research on functional thinking studies functions and families of functions in real-life situations (Cañadas & Molina, 2016). In the context of classroom algebra, a function is a mathematical statement that describes how two quantities covary. It comprises a domain, a target set (codomain or range if constrained to the values adopted by the function) and a rule whereby each element in the domain is paired to a single element in the codomain. The values of the independent variable lie in the domain and those of the dependent variable in the codomain. The definition of which variable is dependent and which independent is conditioned by how the data are presented in the tasks proposed (Blanton et al., 2011).

In this study we propose problems involving linear functions of the forms $y = ax$ or $y = ax + b$, where a, x and b belong to the set of natural numbers. In this context, we consider two of the ways in which the functional relationship may be expressed: directly (how the dependent variable relates to the independent variable) or inversely (how the independent variable relates to the dependent variable).

Functional thinking is present when students establish covariation or correspondence relationships between the variables involved in problems (Smith, 2008). While recurrence relationships may also be established, they are only considered to be functional when they entail the analysis of both variables by establishing a relationship between them.

Functions may be represented in many ways and each representation merely expresses some of its properties. As the starting point for understanding functions, verbal language can be used to formulate a (generally qualitative) description. Tabular representations organize the pairs of elements related by the function and help identify and describe the changes between variables (Blanton, 2008). Symbolic representations afford a general qualitative and quantitative view of the function, from which to abstractly analyze its behavior. The depth of students' understanding of functions depends on how they develop the skill to use a variety of representations and understand their inter-connections (Blanton, 2008).

3. Method

3.1. Participants. This qualitative, exploratory and descriptive study consisted in a CTE (Cobb & Gravemeijer, 2008) with a group of 24 second-grade (7- to 8-year-old) and 25 fourth-grade (9- to 10-year-old) students. This paper discusses only the data for the fourth graders as second graders furnished very few and very vague explanations. Another reason for choosing the older group of students was that they had studied addition, subtraction and the basics of multiplication and division and worked with numbers up to one million. Prior to the working sessions, the students had received no instruction on generalization or expressing algebraic ideas.

They were enrolled in a charter school in southern Spain in a very low-income level neighborhood populated by families at risk of social exclusion. Many of the students were members of socially disadvantaged families of either Romani or Spanish-speaking immigrant origin. We chose to work at such school due to their availability and good disposition to participate.

Our aim is to describe student activity by communicating their ideas and to understand the development of algebraic thinking in a situated way. We assume that their circumstances may involve harder conditions for successful learning. We share the idea that educational phenomena are context sensitive, therefore, we aim that these real references guide future action through reflection (Radford & Sabena, 2015) without pretending to be directly generalizable to other contexts.

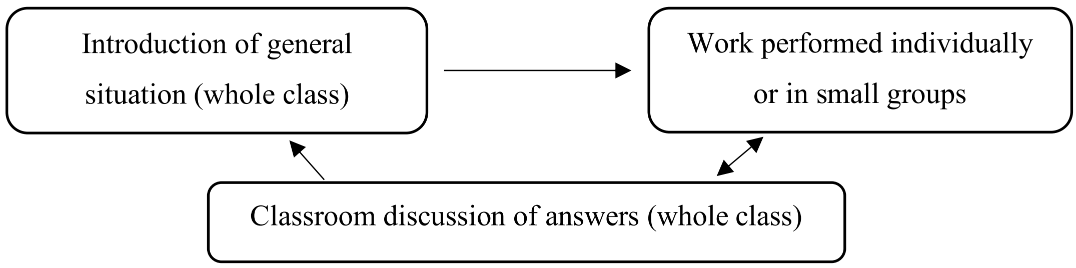
3.2. Instruction Sequence. The design for the fourth graders included an individual questionnaire, two (one initial, one final) individual semi-structured interviews and four 60-minute classroom sessions. The school was visited once a month for 6 months.

Students' normal classroom arrangement in groups of three or four was retained for the working sessions. One researcher played the part of teacher-researcher to monitor the variables defined in the experimental design (Kelly & Lesh, 2000). Her role consisted primarily in encouraging students to participate actively and interact with one another and to clarify their doubts around the tasks. Other team members acted as observers or video-recorded the sessions.

The sessions were divided into three parts (see Figure 4-8). At the beginning of each the teacher-researcher introduced or repeated the general situation that constituted the context for the tasks at hand and ensured that all the students understood them. In the classroom discussions the students were allowed to express their ideas, ask classmates for explanations about theirs or make suggestions to improve the proposed answer. The order in which the parts were conducted was not strictly linear: after a classroom discussion the students could return to their working groups or work on a new task. Whole group discussions and students' interaction were promoted due to the importance of social interaction in the development of algebraic thinking.

Figure 4-8.

Session parts



Contexts and vocabulary were chosen to be familiar to participants. The analysis conducted of each session served as a basis for decisions affecting the ones that followed. Because student communication and activity are closely related to the demands of the task, we include different types of justifications, representations, contexts, and functions in the task design. Task characteristics are listed in Table 4-9.

Table 4-9.
Worksheet tasks

Task characteristic	Session 1	Session 2	Session 3	Session 4
Context	Amusement park		Birthday: tables and boxes	
Function	y = 2x + 1	y = x + 3	y = 2x or y = x + x	
Type of justification				
- Elaboration	✓	✓	✓	
- Validation				✓
Semiotic system				
- Natural language	✓	✓	✓	✓
- Figures or drawings		✓		
- Numerical: numbers only	✓	✓	✓	✓
- Numerical: Arithmetic expressions				✓
- Tabular			✓	✓
- Alphanumeric language				✓

In the tasks involving the function *2x+1* the students encountered problems due to lack of arithmetic knowledge and numerical understanding. As their focus on the operation per se was an obstacle to generalizing and justifying the inter-variable relationship, we designed the following sessions around simpler functions.

The worksheet semiotic systems grew gradually more complex. Sessions 3 and 4 involved the same context and functions but different semiotic systems.

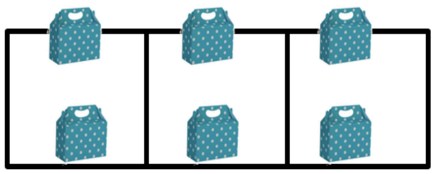
3.3. Data Collection. Data was collected from three sources: worksheets; video recordings with a fixed camera located at the rear of the classroom; and mobile camera video recordings of students as they worked.

This paper discusses the tasks proposed in the last two sessions, described in detail below. We focused on them because the function involved accommodated both multiplication and addition and both the semiotic system and the type of justification were broader than in the earlier sessions. The general situation for the tasks performed in the two sessions is shown in Figure 4-9.

Figure 4-9.

General situation for sessions 3 and 4

Isabel is getting ready for her birthday party. She puts two boxes containing little presents for her guests on each table. She arranges the tables in a row as in the drawing.



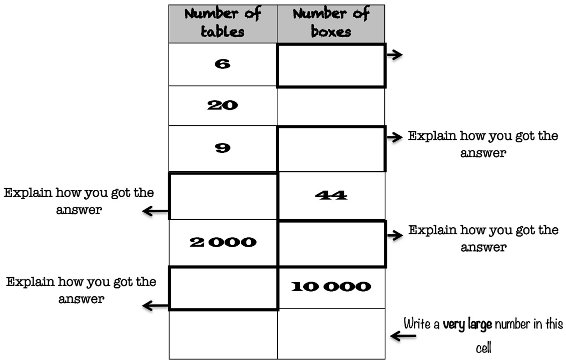
As the numbers of tables and boxes were represented by numbers only in the third session, the functional relationship was implicit, for the objective was for the students to discover it. In the fourth session the functional relationship was sometimes expressed explicitly. Although each task was associated with just one type of justification, in the classroom discussions both could be observed, depending on each student's intention when expressing their opinion.

3.3.1. Description of Session 3. The teacher-researcher introduced the situation with pictures of the tables and boxes, which she pasted on the blackboard until achieving the representation shown as shown in Figure 4-9. In the four specific cases initially described the students identified common elements, established the relationship between the number of tables and number of boxes and tabled the data. They then broke into small groups to perform the tasks shown in Table 4-10. The session ended with a classroom discussion of the answers.

Table 4-10.

Tasks on the session 3 worksheet

Task	Case type	Semiotic system	Type of justification
Fill in the blank cells in the table with the number of boxes, given the number of tables, or vice-versa. Justify the answer. (Part of the table is reproduced below.)	Non-consecutive specific cases	Numbers only Tabular	Elaboration



Answer open questions to generalize the relationship between boxes and tables. • How do you know how many tables there are when you know the number of boxes? • How do you know how many boxes there are when you know the number of tables?	General case	Natural language	Elaboration

3.3.2. Description of Session 4. The fourth session began with a review of the situation introduced in the third and the analysis of a few examples to ensure students remembered the relationship between the numbers of boxes and tables. They then solved the tasks listed in Table 4-11, first in writing and then in a classroom discussion in which each student explained their answer while a classmate stated whether they agreed or otherwise. The session ended with a classroom discussion of the answers to tasks 1 and 3.

Table 4-11.

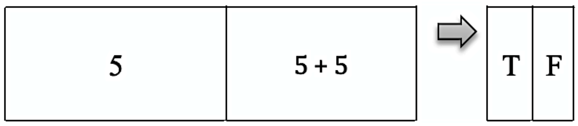
Tasks on the session 4 worksheet

<table>
<tr><th>Task</th><th>Case type</th><th>Semiotic systems</th><th>Type of justification</th></tr>
<tr><td>Task 1
Analyze specific cases in a table and determine whether the relationships are true or false. (Part of the table is reproduced below.)
<table>
<tr><th>Number of tables</th><th>Number of boxes</th><th></th><th></th><th>Explanation</th></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>T</td><td>F</td><td></td></tr>
<tr><td>4 x 2</td><td>4</td><td>T</td><td>F</td><td></td></tr>
<tr><td>1.000</td><td>Twice 1.000</td><td>T</td><td>F</td><td></td></tr>
</table></td><td>Non-consecutive specific cases</td><td>Numbers only
Arithmetic expressions
Natural language
Tabular</td><td>Validation</td></tr>
<tr><td>Task 2
Explain in writing how to find the number of boxes:
• When there are 1000 tables
• When there are Q tables</td><td>Specific case
General case</td><td>Natural language
Alphanumeric language</td><td>Validation</td></tr>
<tr><td>Task 3
Analyze statements that explain the number of tables and boxes and justify whether they are true or false. Two of the statements were:
• When Isabel has 11 tables she needs 21 boxes.
• When Isabel has Z tables she needs 2xZ boxes.</td><td>Non-consecutive specific cases
General cases</td><td>Natural language
Numbers only
Arithmetic expressions
Alphanumeric language</td><td>Validation</td></tr>
</table>

3.4. Data Analysis. We analyze how students communicate written and oral justifications. We describe their ways of expressing functional relationships and relate them to the demands of the tasks (determined by the type of justification and the way of representing the variable in the task). We analyzed each explanation in terms of whether it was correct; whether it involved the direct or inverse relationship; the mathematical elements used (counting, addition, multiplication, among others); how the variables were referred to; and whether the expressions were interpreted operationally or structurally. In operational interpretation, expressions are seen in terms of processes for which a result must be found. In structural interpretation, expressions are processed as a single entity with no need for calculation. For instance, in the task illustrated in Figure 4-10, a student exhibiting structural interpretation would answer that the relationship is true because "5 + 5" is twice five and the number of boxes is twice the number of tables. An operational interpretation would contend that it is true because "5 + 5 = 10" and ten is twice five.

Figure 4-10.

Sample task, session 4



We analyzed the classroom discussions on the grounds of the video recordings and respective transcriptions. We characterized students' answers by degree of sophistication of the justifications, based on whether: they explicitly identified and mentioned the variables; explained the mathematical relationship between variables; and expressed themselves in indeterminate or general terms. Table 4-12 lists three examples in descending order of sophistication[16].

Table 4-12.

Examples of characterization of answers

Response	Variables mentioned	Mathematical relationship	Expression of indeterminacy
S_{08}: I said six because if I have to take boxes to however many tables, I add two by two.	Boxes Tables	Adding two by two	However many tables

[16] Students' identities are coded as S_i where i=1 … 25. T-R refers to the teacher-researcher.

Table 4-12.

Examples of characterization of answers

Response	Variables mentioned	Mathematical relationship	Expression of indeterminacy
S_{03}: Six times two, six, for six tables times two for two boxes, then six times two is twelve.	Boxes Tables	Six times two is twelve.	Implicit
S_{17}: By adding. 2000	Implicit	Adding	Implicit

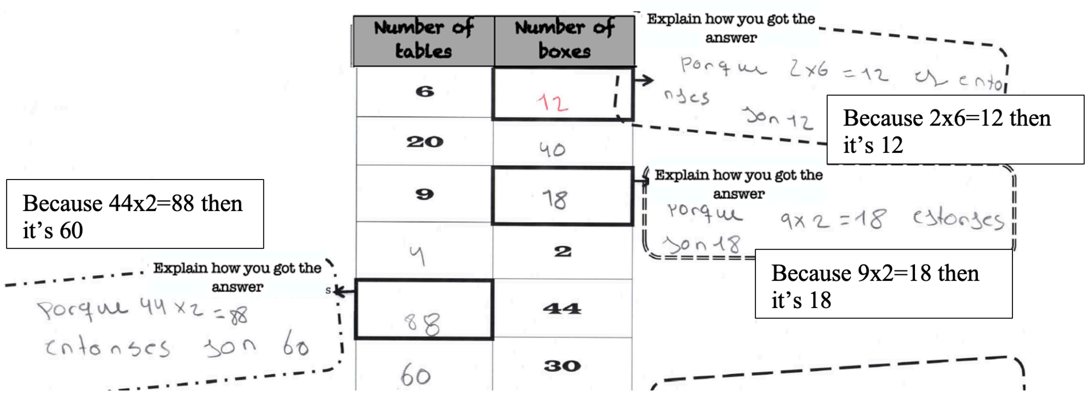
4. Results

4.1. Written Justifications. In the tasks involving *elaboration justification* students preferred to use natural language in brief and at times imprecise answers. Most only mentioned the operation used or whether the relationship was twice or half. The variables were not mentioned.

In the *numerical cases*, some students' justifications invoked the direct relationship, even to explain how to find the number of tables. Their replies included "because I added", "I multiplied", "because it's always twice" or reproduced the multiplication. Figure 4-11 shows S_{09}'s worksheet, by way of example.

Figure 4-11.

S_{09}'s answer

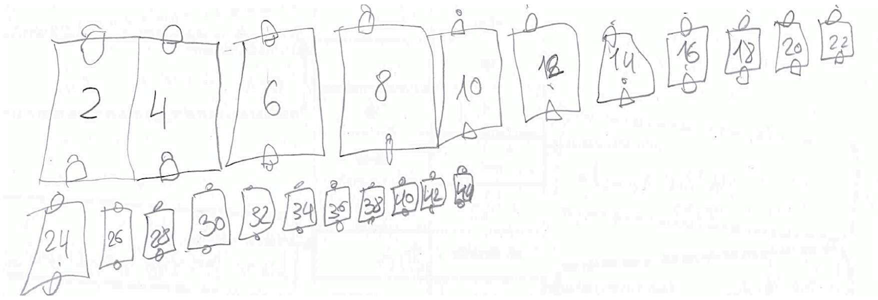


Other students justified the direct and inverse relationships differently, although imprecisely. For the number of boxes, they replied "multiply", "multiply times two", "add" or "find twice" and for the number of tables "subtract twice". Justifying the inverse relationship via subtraction might suggest that students understood adding and subtracting but not multiplying and dividing as inverse operations. They might have also related multiplying times two with adding the same number twice.

Some students also used counting or graphic representations to justify their answers. For instance, when asked to find the number of tables for 44 boxes, S_{07} replied "because I drew the boxes", referring to Figure 4-12.

Figure 4-12.

S_{07}'s drawing, session 3



S_{08} explained how she counted: "because I put two on one finger and I added two by two". She wrote a list in which she established the correspondence between the numbers of tables and the number of boxes (see Figure 4-13). She correctly answered the question involving the inverse relationship, although her justification refers to the direct relationship: "because I found twice [the number]". When justifying the inverse relationship (as he was being video recorded), S_{13} wrote "double 44" and immediately set out to write the sequence two-by-two (see Figure 4-14). When he reached 44, he counted the number of times he counted two-by-two to determine the number of tables. As they based their answers on the numerical sequence, S_{08} and S_{13} seem to have been thinking in terms of the direct relationship, which might explain why, when justifying the inverse relationship, they referred to finding twice rather than half the number.

Figure 4-13.

S_{08}'s count

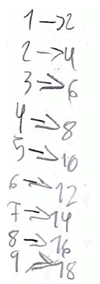
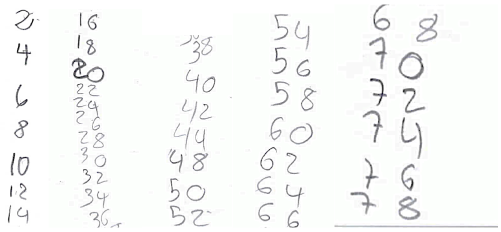


Figure 4-14.

S_{13}'s count



Most students referred only to the mathematical operation applied in their justifications of *indeterminate quantities expressed in natural language*. Some repeated the same justification for the inverse as for the direct relationship, so it is not clear whether they used the inverse relationship. Some students made general statements (e.g. S_{21} said he “multiplied times two” to get the number of boxes and for the number of tables “because in my head I thought it was half”). Others wrote down a number or example that expressed the number of tables and boxes.

Validating justifications were observed to change with the semiotic system used in the task (see Table 4-13 and Table 4-14). Students were asked to justify the false answers only.

Table 4-13.

Answers to task 1, session 4

Semiotic system	Relationship proposed		Student’s reply		No reply
	Tables	Boxes	True	False	
Numerical: numbers	2	2	1	17*	1
	4	8	17*	1	1
Numerical: numbers and arithmetic expression	4 x 2	4	-	17*	2
	13 – 2	13	2	15*	2
	22	22 x 2	12*	5	2
	5	5 + 5	10*	7	2
	10 : 2	10	7*	7	5
Natural language and numerical: numbers	1000	Twice 1000	9*	8	2
	Half of 2 million	2 million	8*	7	4

Note: * = correct answer. Six students were absent.

In the third task (Table 4-14), the statements combined *natural language and another semiotic system,* except in statement 1 which most students mistakenly identified as true. They misconstrued the expression “twice as many” because they failed to heed the order of the variables.

Table 4-14.

Answers to task 3, session 4

Semiotic system	Relationship proposed	Student's reply		No reply
		True	False	
Natural language	1. There are twice as many tables as boxes.	13	5*	1
Natural language and numerical: numbers	2. When Isabel has 11 tables she needs 21 boxes.	1	17*	1
	4. When Isabel has 12 tables she needs 6 boxes.	2	15*	2
Natural language and numerical: numbers and arithmetic expression	3. When Isabel has 4 tables she needs 2x4 boxes.	16*	1	2
Natural language and alphanumeric	5. When Isabel has Z tables she needs 2xZ boxes.	12*	4	2
	6. When Isabel has Z tables she needs Q boxes.	7	8	4
	7. When Isabel has Z tables she needs Z+Z boxes.	8*	7	4
	8. When Isabel has Z tables she needs Z boxes.	3	12*	4

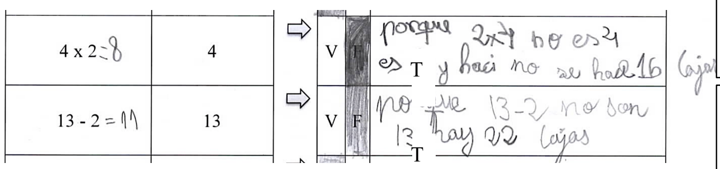
Note: * = correct answer. Statement 6 could be true or false depending on the reasoning.

In the items in Table 4-13 involving *only numbers* and statements 2 and 4 in Table 4-14, most of the justifications mentioned the name of one or both variables and corrected the number of boxes, denoting that the students applied the direct relationship. For instance, in task 1 S_{12} wrote: "it's false because you can't put 2 on two tables. It would be 1 in each 1; 4 is right". As a rule, the calculation or verbalization of the relationship was implicit, except for S_5 who justified the falsehood writing "2 x 2 = 4 tables".

When analyzing *arithmetic expressions*, some students exhibited an operational approach (e.g. see Figure 4-15). Their justifications showed that they solved the operations, applied the direct relationship and then determined whether the results agreed with the numbers proposed.

Figure 4-15.

S_{18}'s justifications, session 4



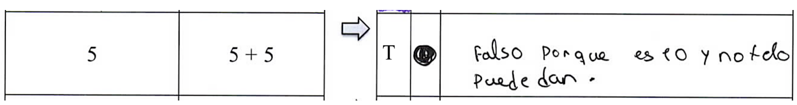
because 2x4 isn't 4, it's 8 and here it doesn't say 16 boxes

because 13-2 isn't 13. There are 22 boxes.

Other students rejected arithmetic expressions as the right answer, possibly because they believed only answers expressed as a number were valid (see Figure 4-16).

Figure 4-16.

S_{09}'s justification in session 4



False because it's 10 and the answer can't give it to you.

In the statements involving *alphanumeric language* to refer to indeterminate quantities, some students assigned values to letters to justify their responses. Focusing on the shape of the letter they sought a number with a similar morphology (e.g. associating 7 and 2 with Z) or they assigned them a value at random or the value beginning with the letter (e.g. zero to Z). After assigning a value, they applied the functional relationship and analyzed the statements. These students did not refer to indeterminate quantities or use the alphanumeric system, although they identified the relationship. Some answered statement 8 generally. S_{17}, for instance, explaining it was false because it couldn't be the same number, had no need to assign the letter any quantity.

4.2. Oral Justifications in Classroom Discussions. Students expressed and communicated the relationship between tables and boxes better orally than in writing. Counting two-by-two was the first mathematic tool that enabled them to explain and verify their answers. Their justifications became more sophisticated as they referred to the relationships *twice* or *half*, with explicit mention of the variables involved.

In session 3, students' *recognition of common elements in some of the cases described* attested to progress toward generalization. In the classroom discussion during the introduction of the general situation around the number of tables for 16 boxes, the students either wielded no or only very general arguments to justify their answers. The discussion ended when S_{13} explained why there were eight tables, basing his justification on counting the number of tables on his fingers. The rest of the class agreed to the answer. Some of the students' answers to other cases are set out in Table 4-15.

Table 4-15.

Answers in the initial discussion, session 3

Question	Reply	Variables explicitly mentioned	Mathematical relationship	Expression of indeterminacy
I have two tables: how many boxes do I need?	S_{18}: four, because I counted two, four.		Counting 2-by-2	
I have 12 boxes: how many tables are there?	S_{08}: I said six because if I have to take boxes to however many tables, I add two by two.	Boxes Tables	Adding 2-by-2	However many tables
	S_{23}: there are six tables because twelve is twice six.	Tables	Twice	
	S_{03}: Six times two, six, for six tables times two for two boxes, then six times two is twelve.	Tables Boxes	Multiply times two	

In connection with generalization involving *reasoning beyond the initial range of values*, the justifications given in the first part of the session 3 reappeared in the post-task classroom discussion. Some students answered and justified correctly while others answered correctly but used the mathematical relationship incorrectly in their arguments. For instance, the question: How many tables are there if we use two boxes? prompted the following dialog:

S_{04}: One, because twice two is one.

T-R: Twice two is one?

S_{03}: No

T-R: Why not, S_{03}?

S_{03}: She said twice two, which is four.

T-R: What's is it then?

S_{03}: It would be half, half of two.

Expressing and discussing their justifications with classmates enabled students to identify their errors and clarified the use of mathematical concepts. The aforementioned situation recurred in the discussion around how to find the number of tables for 44 boxes. S_{08} said by multiplying and S_{21} corrected him saying: "You found half, S_{08}. Not twice. Because if you'd multiplied you'd have 88". S_{04} and S_{08} justified their answers by invoking multiplication, a relationship that had been the object of previous discussion. While they found the right number of tables, they alluded to the wrong mathematical concept when explaining their answers.

When *deriving broader results from specific cases* at the end of session 3, the classroom discussion focused on examples involving indeterminate quantities. Here the teacher's guidance was instrumental to improving justification and generalization. Students were also found to resort to empirical justifications as observed in other studies (e.g. Carpenter et al., 2003). Some of the teacher-researcher's conversations are transcribed below.

T-R: When we calculate 500 million or any number of tables, what do we have to do to get the number of boxes? Can anyone explain that? I mean whichever of those numbers, whichever. What we would have to do to find the number of boxes when I'm given whatever number of tables?

S_{02}: Twice five hundred thousand.

Although asked for an indeterminate number, S_{02} based her reply on a specific case. S_{14} answered the same way.

> *S_{14}:* What I did… since look if 40 is the number of boxes and twenty the number of tables, well what I did, I thought twenty plus twenty is 40 and I added.

Those arguments failed to grasp and express indeterminacy. The students explained the mathematical relationship using specific cases. Whereas S_{02} made no explicit mention of the variables involved, S_{14} referred to the number of tables and boxes and the mathematical operation that linked the two. Therefore, although both arguments were based on empirical cases, S_{14}'s was more sophisticated, given the explicit mention of the variables.

In the following dialog, the teacher-researcher pursued greater precision in the S_{21}'s arguments, affording him the opportunity to express himself more generally

1. *T-R:* How can I find the number of tables if I know how many boxes I have? However many.
2. *S_{21}:* The number of boxes, say, for 500 million tables, no because there always have to be more boxes than tables.
3. *T-R:* But if they tell you how many boxes, what do you do right away to know how many tables?
4. *S_{21}:* Well… half. I'd think half the number of boxes.
5. *T-R:* When you know how many tables, what do you do to know how many boxes?
6. *S_{21}:* Multiplying.
7. *T-R:* Times?
8. *S_{21}:* Times two.
9. *T-R:* What would you multiply times two?
10. *S_{21}:* 500 million times two. 10 million.
11. *T-R:* So, when you know how many tables, what do you do to know how many boxes?
12. *S_{21}:* Multiply.

13. *T-R:* When you know how many tables, what do you do to know how many boxes?
14. *S_{21}:* Multiply times two because there are two boxes on each table.

S_{21}'s arguments referred to the variables indeterminately. Although in lines 2 and 10 he tried to use a specific amount in his explanation, he did not pursue that line of thought but expressed the relationship between tables and boxes in two ways, first qualitatively (line 2) and then mentioning the operations that would yield any number of tables or any number of boxes (lines 4 and 14).

In the following case the indeterminate quantity was represented as "Q". The teacher-researcher said that "Q" represented a number they did not know, that could be any number. The students' first reaction was to ask what that meant and related the letter with the numbers 15 (*quince*) or 40 (*cuarenta*, misspelled as *quarenta*). S_{01} contended:

S_{01}: It depends, because if it's the letter there aren't any tables but if it's the number there are. Then it's double the number.

T-R: If it's the letter there are no tables?

S_{01}: If it's not the letter, it's 40 and there are 80 boxes.

T-R: And how do you know there are 80 boxes?

S_{01}: Because there's twice the number [of tables].

In this case, by accepting that the letter could be a number, the student established the relationship indeterminately, although the variables were implicit in her explanation. Then she validated her answer empirically (assigning Q a value).

5. Discussion

As a general purpose, we sought to determine how justification may be conditioned by the characteristics of the tasks proposed and to describe the development of students' ability to justify. In this regard, we observed that the functional relationship was express in a more sophisticated way when students interacted orally justifying their answers. Whereas students' written justifications omitted information or were imprecise.

This result might be explained by using Vygotsky's view of language and signs as instruments of mediation that are formed accordingly to the demands of communication (Vygotsky, 1934/1995 cited by Wertsch, 1985/1995, p. 97). Vygotsky's ideas about kind of speech serve us to explain the differences detected between oral and written justifications. We relate written justifications with written monologue kind of speech and oral justifications with dialogue kind of speech. The distinction between these kinds of speech is not the amount of people involved but rather the degree of participation between them. According to Vygotsky monologue is a more complex, superior and historically later developed than dialogue. Following Yakubinskii's work (1923 cited by Wertsch, 1985/1995), he considers dialogue as a natural form of interaction and monologue as an artificial late form. Written monologue is more complex due to the requisite of sharing a communicative context with the reader and fully explaining the linguistic formulations (Wertsch, 1985/1995, p. 102). Written justifications lacked additional questions about the comprehensibility of the message or about its adequacy to the demand of the task, so students wrote short messages without questioning whether someone else could understand them or whether they were answering the question. Instead, with classroom discussion students became actively involved in the process. Recognizing classmates' ideas helped them to both adopt more sophisticated solving strategies and verbalize their explanations more precisely. The teacher's intervention proved to be instrumental for introducing generalization in students' justifications and motivate them to refer to indeterminate quantities.

Our results might also be related to the design of the tasks because instances to discuss and reflect on the written productions were not included. Banes et al., (2017) present an experience with fifth-grade students where the importance of thinking about written explanations and motivating students to co-construct them stands out. They show that a collaborative writing lesson with an authentic audience sparks powerful class discussion and engages students in deciding what should be included in a mathematical explanation with different purposes and audiences.

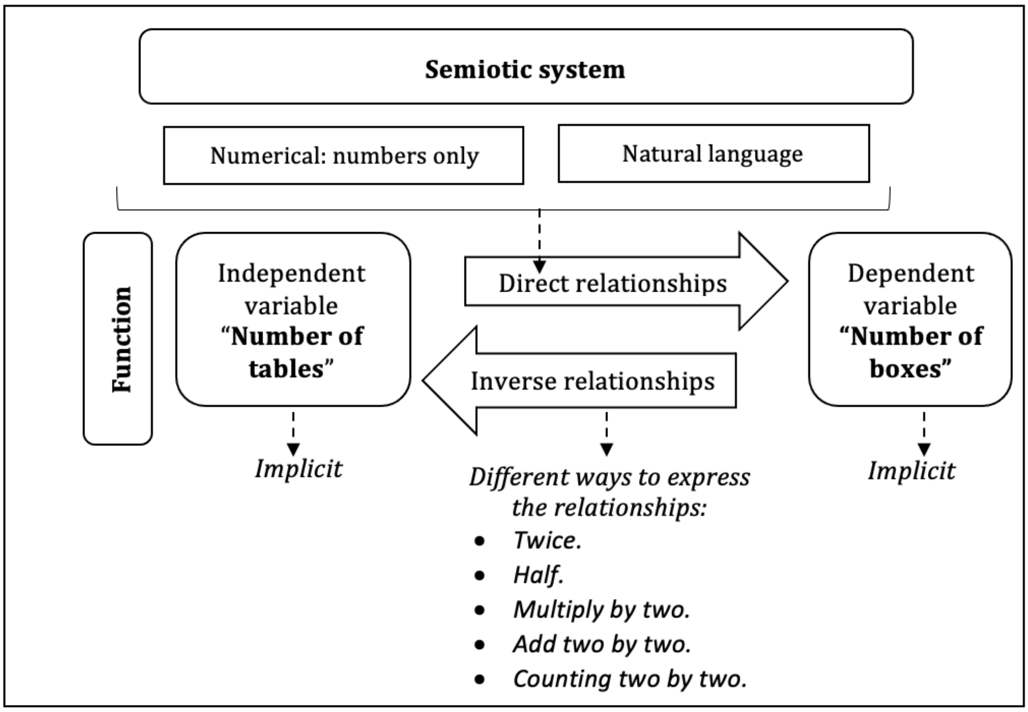
In our study, the results showed that students' oral justifications helped them express the relationship between tables and boxes more precisely (second research question). Possibly including in the design a discussion about the understanding of their written justifications for the inter-variable relationship would have favored the indeterminacy present in these. That supports the importance of socializing answers in functional contexts to help contrast ideas, as observed in studies that analyzed patterns (e.g. Radford, 2018).

Regarding our first research question, we found that the characteristics of students' written justifications depend on the type of justification and semiotic system involved in the task. Accordingly, students focused on one or another element of the function. Students used various semiotic systems to refer to variables and to reason and express the functional relationship, which did not always coincide with the ones used in the task. The students resorted to trusted entities to manipulate and give meaning and expression to the relationships identified.

In *elaborating justifications*, similar written answers were given in tasks involving only numbers and those involving the general case expressed in natural language. Students tended to use natural language in brief and, at times, imprecise answers. Most only mentioned the operation used or the relationship in different ways (see Figure 4-17) and not the variables (boxes and tables). These results show that by asking students for an argument to explain how they obtained the answers, the communicative demand in this task led students to focus more on the functional rule than on the variables, leaving the latter implicit in the questions.

Figure 4-17.

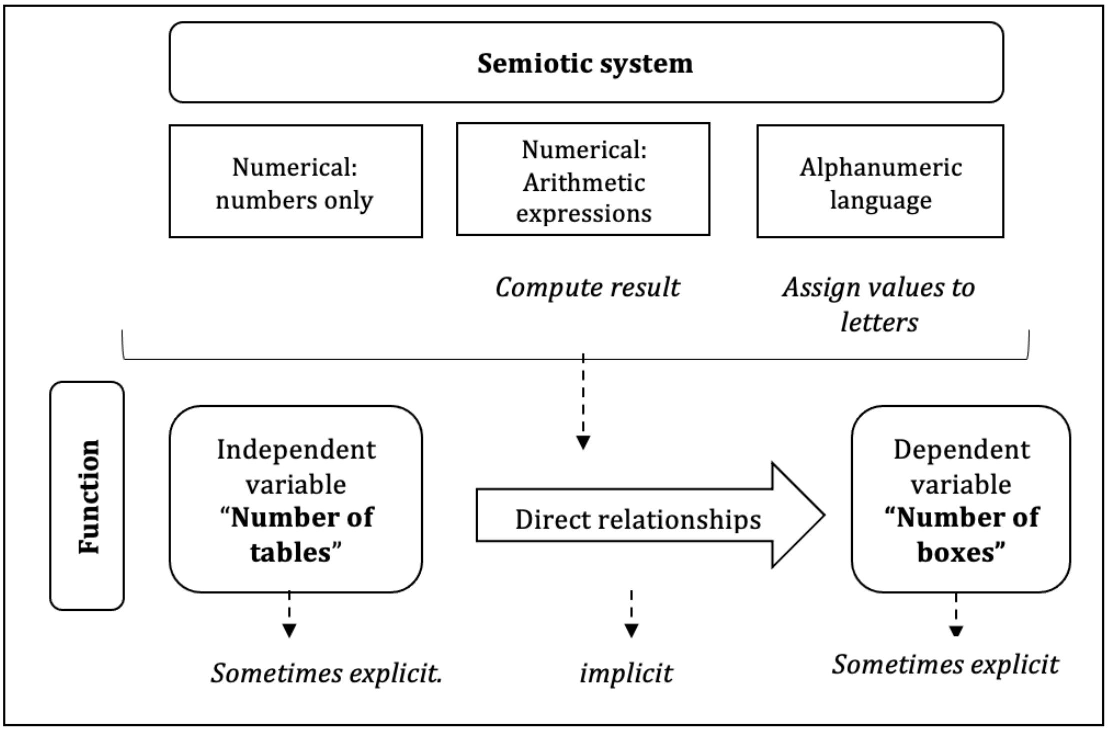
Elements of functional thinking identified in elaborating justifications



In comparison with elaboration justification, the communicative demand of *validation justification* was different, so students focused on other elements of the function. The elements explicit and implicit in their explanations differed (see Fig.11). False statements were explained differently depending on the semiotic system involved. More students mentioned the names of the variables in the statements involving numbers only. Mainly, students applied the direct relationship to check whether the relationship between the quantities is correct or not. They made the number of boxes to always be the double of the number of tables but did not make the functional relationship explicit in their justifications (see Figure 4-18). Therefore, our results suggest that students interpreted the elaborating justifications as demands to clarify the processes applied while validating justifications led them to refer to pairs of concrete values within a context.

Figure 4-18.

Elements of functional thinking identified in validating justifications



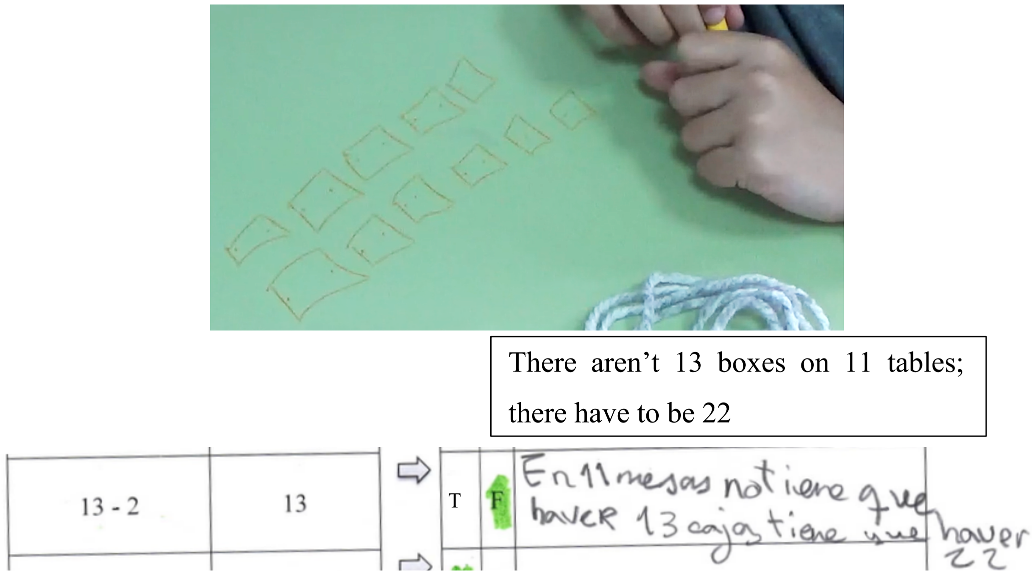
The arithmetic expressions were broached operationally. The students failed to accept as valid equivalent expressions and performed the calculations to validate the equivalence of the result. In the third session students recognized that the functional relationship could be expressed as an addition or multiplication or *twice* and identified the equivalence. When equivalent arithmetic expressions involving those ideas were presented in the fourth session, however, they found it difficult to make the connection. No structural interpretations of the expressions were observed. Structural approaches are identified as a scarce but a natural consequence of arithmetic learning (Knuth et al., 2005) which become more frequent when they are explicitly promoted in instruction (Molina & Mason, 2009). However, previous studies focus in arithmetic expressions within the approach to algebra named “Generalized arithmetic”. There is no information about how accessible is the structural interpretation of expressions in a functional context. Our results suggest this might not be an approach to algebra that naturally favors this structural view. Therefore, proposing tasks that include such representations and discussion about them is required to foster the generalization of arithmetic relationships. Working with the structure of numerical expressions in elementary school should help students understand secondary school algebra (Kieran, 1989, 2018). The inference is that the functional approach to algebra that guided this study is related to another conception of algebra: generalized arithmetic.

When working with alphanumeric language students first assigned the letter a value and then applied the functional relationship. Their written answers furnished no evidence of an indeterminate interpretation of letters. Although their explanations denoted an understanding of the situation, students’ communication skills in that context were underdeveloped. We must say that these results were expected as it was the first time that students were asked to use letters to refer to unknown quantities. The first students’ reactions in our study match those described in previous studies. For example, Küchemann (1981) mentions that students have difficulty interpreting the letter as a varying quantity. Also, letters tend to be interpreted as concrete objects, ignored or related to a numerical value. Different meanings would affect how activities can be solved. Booth's research (1988) identifies possible explanations for the origin of errors in the use of letters. One of these is the focus of algebraic activity and the nature of its responses. It points out that while in arithmetic the aim is to find a numerical answer, in algebra the focus is on processes, relationships and their expression in general. As a consequence of not identifying the differences in the type of answer, in algebraic contexts students expect to write a numerical answer. Other studies describe how students manage to interpret letters as variables that represent indeterminate quantities in a context of functional problem solving (e.g. Ayala-Altamirano & Molina, 2020; Blanton et al., 2017; Brizuela et al., 2015). However, this requires more time than just a pair of sessions.

Arithmetic and Alphanumeric expressions were the ones that posed the greatest challenge to students. We observed in the recordings of students answering their worksheets that their gestures and drawings made situations more specific, favoring reflection and concentration on mathematical ideas. For example, S_{13}, after defining the "13-2 tables" / "13 boxes" relationship as true, was heard to say, while pointing at the numbers, "11 tables and two boxes, 13". S_{01} told him the statement was false, that there would be 22 boxes. S_{13} then looked at the drawing of the tables shown at the beginning of the session, with S_{01} drew the tables shown in Figure 4-19 and concluded that the number of boxes proposed was wrong.

Figure 4-19.

S_{13}'s representation and S_{01}'s written reply



S_{12} was recorded during session 3 as she replied to statement 6. First, she drew 27 lines, then counted them one-by-one, but touching the top and bottom of each line. Those movements would represent the number of boxes per table. Halfway through the count, she stopped and decided that wasn't the solution, writing "it's false because Z is 2 and Q is 15[17] and that's not it". Her gestures showed that she understood the situation and could apply it to specific cases by counting. She realized that there were two boxes per table but was unable to express the idea in general terms.

Although in this paper we do not aim to describe students' gestures in detail, we turn to them when needed due to the importance they had to give sense to tasks. Mason (2017) points out that students turn to entities of trust to manipulate and give sense to the identified relations. In a cyclic process of representations becoming more sophisticated,

[17] The Spanish word for fifteen is 'quince', hence the 'Q'.

students keep adding layers of appreciation, comprehension and understanding. In a similar way Radford (2010) explains how algebraic thinking is composed by layers of understanding that depend on the semiotic systems involved.

6. Conclusions

This study contributes to a fuller characterization of students' thinking when facing situations involving functions. We contribute to the study of functional thinking from a semiotic perspective inspired by some of Radford's papers (2010, 2018). Promoting justification in the classroom led to generating instances of communication in which we identified how students thought and expressed themselves through signs. Specifically, by means of semiotic systems we could observe how students thought and talked about functions. We would like to reiterate that the situations we describe in this study are context sensitive, so we do not intend to generalize directly to other scenarios. To guide future action, reflection is fundamental (Radford & Sabena, 2015).

The *twice* and *half* relationships were pivotal factors in the sessions analyzed. While those concepts can be used to perform tasks involving a known relationship without understanding the function per se, in this study they also proved useful for prompting discussion on the relationship between two quantities that vary in a joint way, even if the students do not explicitly understand this as a functional relationship. Our findings emphasize the importance of classroom discussion, which was furthered by posing questions that induced different types of justification of how to reach a certain answer or why certain relationships or statements were false. The justifications recorded helped describe students' thinking by analyzing the semiotic systems used or their interpretation of the systems suggested in the tasks.

Although the oral justifications expressed in classroom discussion were more sophisticated than those furnished in writing, both approaches are important. The written justifications helped us understand the consistency between what students said and did. Whereas in classroom discussions many correctly identified *twice* as the relationship involved, their written answers failed to detect the cases where its application was in order.

When something was difficult to understand, the existence of a variety of systems enabled students to broach the situation with one that was familiar. Other studies address tasks in which variables were represented either numerically only or with letters only. Part of the originality of this study is the use of a variety of systems and arithmetic expressions.

By proposing tasks with non-consecutive particular cases, students' establishment of correspondence relations was favored. This contrast with results from previous studies (Carraher & Schliemann, 2007) that show predominance of use of recursive relations, a separated attention to variables and higher difficulty to identify how the variables covary, when students are asked about consecutive cases.

One recommendation for designing lessons would be to analyze arithmetic expressions as a way of prompting discussion that would favor a structural interpretation of situations. That approach has been applied in other studies, working with algebra as generalized arithmetic (Molina & Mason, 2009; Blanton et al., 2018). Although we only reported on functional relationship $y = 2x$, our proposal demonstrates the utility of analyzing arithmetic expressions in functional contexts, an approach that also accommodates comparing and studying the characteristics of functions. An open line of research would be to investigate what happens in contexts involving other types of functions.

Different semiotic systems were introduced gradually. Students first analyzed numerical cases and identified the functional relationship. In the following session, depending on their responses, we introduced statements or relationships that used other semiotic systems to express relationships already recognized.

The discussion on the veracity of statements also enabled students to analyze the variables more fully. In an earlier study (e.g. Ayala-Altamirano & Molina, 2020) we showed this type of questions to help students refer to indeterminate quantities and make sense of the alphanumeric system. Here we took the study of functions one step further by introducing other semiotic systems and affording students more opportunities to justify their answers.

References

Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5.

Ayalon, M., & Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *Journal of Mathematical Behavior, 49*, 163–173. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010

Banes, L. C., López, G., Skubal, M., & Perfecto, L. (2017). Co-constructing written explanations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 23*(1), 30–38. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.23.1.0030

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NA: Heinemann.

Blanton, M.L. (2017). Algebraic reasoning in grades 3-5. In M. Battista (Ed.), *Reasoning and sense making in grades 3-5* (pp. 67–102). Reston, VA: NCTM.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. advances in mathematics education* (pp. 5–23). Heidelberg, Germany: Springer.

Blanton, M. L., Brizuela, B., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181–202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M. L., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27–49). Hamburg, Germany: Springer.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. Coxforf & A. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20–32). Reston, VA: NCTM

Brizuela, B., Blanton, M. L., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A., & Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation/una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Studies in Psychology/ Estudios De Psicología, 36*(1), 138–165. https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027

Cañadas, M. C. & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades [An approach to the conceptual framework and background of functional thinking in early ages]. In E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo, & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Granada, España: Comares.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Reston, VA: NCTM.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. In L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 191–208). New York, NY: Routledge.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs (pp. 107–138).* Cham, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5

Chua, B. L. (2016). Justification in Singapore secondary mathematics. In P. C. Toh, & B. Kaur (Eds.), *Developing 21st century competencies in the mathematics classroom* (pp. 165–188). Singapore: World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789813143623_0010

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68–95). Mahwah, NJ: LEA.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221–262. https://doi.org/10.1080/10508 400701193705

Ingram, J., Andrews, N., & Pitt, A. (2019). When students offer explanations without the teacher explicitly asking them to. *Educational Studies in Mathematics, 101*(1), 51–66. https://doi.org/10.10 07/s10649-018-9873-9

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2009). Building intellectual infrastructure to expose and understand ever-increasing complexity. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 211–215. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9169-6

Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey: NJ: LEA.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner, & C. Kieran (Eds.) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra (pp.* 33–56). Reston, VA: NCTM

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 27–32). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice (pp. 79-105). New York: Springer.

Knuth, E., Alibali, M.W., McNeil, N.M., Weinberg, A., & Stephens, A.C. (2005). Middle School Students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 68-76

Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. In M. L. Blanton, D. Stylianou, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 153–170). New York, NY: Routledge.

Krummheuer, G. (2013) The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the contex of the development of mathematical thinking in the early years. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 249–265. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9471-9

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11–16). London, UK: Murray.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Molina, M., & Mason, J., (2009) Justifications-on-Demand as a Device to Promote Shifts of Attention Associated with Relational Thinking in Elementary Arithmetic. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(4), 224–242. https://doi.org/10.1080/14926150903191885

Mason, J., Grahamn, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. London, UK: Center for Mathematics Education, The Open University.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra* (pp. 65–86). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. In S. Stewart (Ed.), *And the rest is just algebra* (pp. 97–117). Cham, Germany: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria [Royal Decree 126/2014 of February 28, which establishes the basic curriculum of Primary Education]. *BOE, 52,* 19349–19420.

Morgan, C., Craig, T., Schuette, M., & Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: An overview of research in the field. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education, 46*(6), 843–853. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0624-9

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W., & Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education. ICME-13 Topical Surveys.* Berlin, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31370-2_1.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14–23.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111–126. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37–62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs (pp. 3–25).* Cham, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Radford, L., & Sabena, C. (2015). The question of method in a Vygotskyan semiotic approach. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 157–182). New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 3–31

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–163). New York, NY: LEA.

Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifaceted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(4), 447–462. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M., & Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education. third handbook of research in mathematics education.* (pp. 386–420). Reston, VA: NCTM.

Strachota, S., Knuth, E., & Blanton, M. (2018). Cycles of generalizing activities in the classroom. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 351–378). Cham, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_15

Stylianides, A. (2015). The role of mode of representation in students' argument constructions. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* (pp. 213–220). Prague, Czech Republic.

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotsky y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores [the sign for Vygotsky and its connection with the development of superior psychological processes]. *Folios,* 39(1), 65-76 https://doi.org/10.17227/01234870.39folios65.76

Vygotsky, L. S. (1995). *Thought and Language* (J.P. Tousaus, Trans.). Barcelona, Spain: Editorial Planeta. (Original work published 1934)

Wertsch, J. V. (1995). *Vygotsky and the social formation of mind* (J. Zanón & M. Cortés, Trans.; 2nd ed.). Barcelona, Spain: Ediciones Paidós. (Original work published 1985).

Yakubinskii, L.P. (1923). *O dialogicheskoi rechi* [On Dialogic Speech]. Petrogrado: Trudy Foneticheskogo Instituta Prakticheskogo Izucheniya

ESTUDIO 3: EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN Y LA GENERALIZACIÓN EN ACTO. UN ESTUDIO DE CASOS

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (En revisión). El Proceso de Generalización y la Generalización en Acto. Un Estudio de Casos.

Resumen

A partir de un análisis microgenético del proceso de generalización de tres estudiantes de cuarto de primaria, se describe cómo construyen, dan sentido y expresan una relación funcional en un contexto de resolución de problemas. Los resultados contribuyen a la comprensión y reflexión sobre la integración del enfoque funcional en las aulas de primaria. Se distinguen diferentes grados de sofisticación en el proceso de generalización según los medios semióticos empleados. Uno de los estudiantes expresa de forma explícita la generalización mientras que en los otros dos casos queda implícita en las acciones de los estudiantes sugiriendo una incipiente conciencia sobre lo indeterminado o presencia de la analiticidad.

Palabras clave: *educación primaria; generalización; pensamiento funcional; medios semióticos.*

1. Introducción

En el marco de la propuesta *Early algebra,* esta investigación parte del enfoque funcional o concepción del álgebra denominada estudio de las funciones. Desde esta perspectiva "las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas" (Cañadas y Molina, 2016, p.212), son elementos clave que permiten desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de primeros niveles educativos. En este trabajo se busca complementar las investigaciones existentes sobre este enfoque en las etapas de educación primaria adoptando una perspectiva semiótica histórico-cultural y una perspectiva multimodal del pensamiento. Nuestro objetivo es describir cómo tres estudiantes (9 a 10 años) construyen, dan sentido y expresan la relación funcional durante el proceso de generalización. Para esto, indagamos cuáles son las estrategias que emplean, en qué momento se producen cambios en su actividad, cómo comunican las relaciones que identifican y qué características de la tarea motivan a los estudiantes a cambiar de estrategia o generalizar.

Las cuestiones que son de nuestro interés han sido investigadas previamente a través de estudios longitudinales que se han centrado en el aprendizaje a lo largo del tiempo y utilizan progresiones y trayectorias de aprendizaje como herramientas para comprender y representar el desarrollo de la comprensión de los estudiantes (Stephens et al., 2017). Por ejemplo, Blanton y colaboradores han propuesto trayectorias hipotéticas sobre la generalización (Blanton et al, 2015) y sobre la apropiación de la notación de la variable (Blanton et al., 2017). A diferencia de estos estudios, este trabajo busca aportar al estudio de la generalización a partir de un seguimiento detallado del proceso efectuado por cada estudiante en una sola sesión de clases. Por esto seleccionamos una muestra pequeña y realizamos un análisis microgenético. Este tipo de investigación permite profundizar en cómo los estudiantes razonan hasta llegar a la generalización y cómo expresan dicha generalización. Además, facilita la observación de los cambios y permite detectar la variabilidad del comportamiento de los estudiantes ante la misma tarea u otras similares (Bermejo, 2005; Wertsch y Stone, 1978).

En el estudio de los distintos medios semióticos movilizados por los estudiantes, consideramos tanto representaciones personales como convencionales. Atendemos así a una línea de investigación abierta señalada por Kaput (2009) y complementamos investigaciones previas sobre el desarrollo de pensamiento algebraico desde los primeros cursos que describen cómo los estudiantes logran establecer la relación entre las variables y expresarlas de diversas formas por medio de representaciones convencionales tales como tablas, notación algebraica o gráficos (e.g. Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Blanton et al., 2017; Ureña, Ramírez y Molina, 2019).

2. Pensamiento algebraico y pensamiento funcional

Asumimos que el álgebra se refiere a cantidades indeterminadas (incógnitas, variables, parámetros o números generalizados) que se utilizan de manera analítica. La analiticidad es clave para diferenciar lo aritmético de lo algebraico. Significa que, aunque no se conozcan las cantidades, se realizan operaciones matemáticas como si fueran conocidas (Radford, 2018). Implica deducir métodos generales para resolver problemas similares (Ursini, 2001). Al pensar algebraicamente se razona sobre la generalidad, se reconoce la estructura algebraica subyacente en una situación y las relaciones entre las cantidades. Además, el álgebra recurre a modos de representación idiosincrásicos o específicos culturalmente evolucionados (Radford, 2018).

En la perspectiva adoptada en este trabajo, el pensamiento funcional es parte del pensamiento algebraico. Se centra en el estudio de las funciones y las familias de funciones en situaciones de la vida real (Cañadas y Molina, 2016). Incluye la generalización de las relaciones entre cantidades que covarían, la expresión de estas relaciones y el uso de dichas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton y Kaput, 2011). El tipo de relaciones que se pueden establecer entre las variables implicadas en los problemas son de covariación o correspondencia (Smith, 2008). También pueden establecerse relaciones de recurrencia, pero solo las consideramos de tipo funcional cuando conectan las variables implicadas.

Para estudiar el pensamiento funcional adoptamos una perspectiva multimodal del pensamiento. Consideramos que el pensamiento se produce en y a través de una sofisticada coordinación semiótica. No se trata solo de ideas abstractas e intangibles situadas en la mente (Radford, 2009). Desde la perspectiva multimodal las personas comprenden ideas matemáticas tomando en cuenta diversos recursos cognitivos, materiales y perceptivos, tales como: símbolos orales y escritos, dibujos, gestos, artefactos físicos y electrónicos y su propio cuerpo (Radford, et al., 2009). Los medios semióticos, por una parte, permiten entender cómo las personas conocen y comprenden los objetos matemáticos y, por otra, permiten hacerlos presentes. Son herramientas psicológicas que permiten a los sujetos reflexionar, planificar y llevar a cabo diversas acciones; actúan como mediadores culturales de las funciones psicológicas (Radford y Sabena, 2015). Además, están incluidos en la actividad de los niños alterando la forma en que entienden el mundo y a sí mismos y se desarrollan de acuerdo a las demandas de la comunicación e interacción social (Wertsch, 1985/1988).

3. Generalización

Entendemos la generalización de patrones y relaciones funcionales como un proceso (generalizing) así como un producto (generalization). El producto de la generalización es la forma en que se expresa la generalidad, es decir, es el resultado de dicho proceso (Ellis, 2007). La generalización como proceso implica: a) identificar los elementos comunes a todos los casos, b) ampliar el razonamiento más allá del rango en el que se originó, y c) obtener resultados más amplios que los casos particulares (Ellis, 2007; Kaput, 1999; Radford, 2013). Al generalizar, la actividad de los estudiantes puede incluir acciones tales como explorar, formular, revisar y validar conjeturas, organizar datos e identificar una estructura (Cañadas y Castro, 2007; Blanton, 2008; Pinto y Cañadas, 2018). Estas acciones podrían llevar a los estudiantes a plantear conclusiones por medio de razonamientos de abducción, inducción o deducción, por ejemplo. Asimismo, los alumnos para responder a los diferentes ítems planteados durante el proceso de generalización, podrían emplear estrategias de conteo u operatoria (suma, resta, descomposición, entre otras) (Cañadas y Fuentes, 2015; Morales et al., 2018).

Durante el proceso de generalización los estudiantes recurren a distintos medios semióticos para percibir, dar sentido y expresar las relaciones observadas. La expresión de la generalidad tendrá distintos grados de sofisticación según la contracción de los medios semióticos empleados. En el grado más sofisticado hay una concentración de significados en la menor cantidad de signos a través de los que se expresa la generalidad (Radford, 2010). Por otra parte, cabe destacar que los medios semióticos empleados pueden tener distintos grados de generalidad para cada individuo, ya que lo que es simbólico y abstracto para uno, puede ser concreto para otro (Mason, 1996).

Un punto importante a tratar es el carácter algebraico de la generalización. Mucho se ha discutido sobre esto y no existe un acuerdo concluyente (e.g. Dörfler, 2008; Radford, 2018). En coherencia con nuestra descripción del pensamiento algebraico, consideramos que una generalización algebraica está caracterizada por: (a) referirse a cantidades indeterminadas, (b) involucrar un razonamiento analítico y (c) recurrir a diversas formas de expresión. Una generalización será aritmética si la relación detectada se aplica de manera local, es decir solo a unos casos sin ser capaz de extenderla y/o no se observa evidencia que permita dar cuenta de la analiticidad del razonamiento (Radford, 2010). Además, en estos casos el foco de atención de los estudiantes será encontrar un resultado numérico concreto, sin establecer relación entre los casos particulares (Blanton, 2017).

Basándonos en las ideas de Radford (2010) consideramos distintos tipos de generalización algebraica que se caracterizan según los medios semióticos involucrados en la toma de consciencia de la generalidad del objeto matemático. Estas son factual, contextual y simbólica. En la generalización factual la indeterminación queda sin nombrar, está implícita en las acciones, gestos, usos de símbolos numéricos y la actividad perceptual, se trata de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional. En la generalización contextual lo indeterminado está explícito y se relaciona con objetos del contexto. Es un avance con respecto a la generalización factual; en este caso no se generalizan solo las acciones, sino que la indeterminancia se vuelve objeto del discurso. Finalmente, en la generalización simbólica la indeterminación es explícita y representada por medio de lenguaje alfanumérico.

En una de sus investigaciones Vergel (2019) observa que durante el proceso de generalización la consciencia de los estudiantes sobre el sentido de lo indeterminado o la presencia de la analiticidad puede ser incipiente y no llegan a generalizar del modo descrito por Radford (2010). En concreto, los estudiantes a través de sus acciones pareciera que perciben la generalidad, pero no se refieren a cantidades indeterminadas de forma analítica. Sin embargo, el sentido estructural y el reconocimiento de una estructura asociada a la situación problema es la evidencia que permite inferir que comienzan a razonar de modo analítico. En este estudio esta forma de generalización la denominaremos "generalización en acto". Este término fue propuesto por Mason (1996) quien lo describe como una posibilidad de pensar algebraicamente y se observa cuando los niños actúan como si percibieran la generalidad sin llegar a expresarla. En nuestra propuesta adaptamos la idea de "generalización en acto" para referirnos a una forma de generalización que se situaría entre la generalización aritmética y algebraica antes definidas. En este tipo de generalización ni la acción ni las declaraciones de los estudiantes son garantía concluyente de que la generalidad fue percibida y se refiere a cantidades indeterminadas de forma analítica, más bien son indicadores que los estudiantes comienzan a tener consciencia de esto.

4. Método

Esta investigación forma parte de un proyecto más amplio cuyo objetivo es indagar en las capacidades de generalizar, representar, justificar y resolver problemas que manifiestan los estudiantes de Educación Primaria a través de la resolución de problemas que involucran una relación funcional. Es de tipo cualitativa y descriptiva. En el proyecto se diseñó e implementó una recogida de datos que incluye un diagnóstico inicial, cuatro sesiones de clase y dos entrevistas semiestructuradas individuales, una al inicio y otra al final. En este trabajo analizamos las entrevistas finales.

4.1. Participantes

Los tres entrevistados fueron seleccionados de un grupo de 25 estudiantes de 4º de primaria (9-10 años) con el objetivo de representar diferente nivel de capacidades académicas con relación a su desempeño en el diagnóstico. Estos resultados fueron contrastados con la opinión de su maestra. Mateo en el diagnóstico obtuvo una puntuación de nivel bajo, no obstante, según su maestra en las clases tenía un rendimiento alto y destacaba dentro de su grupo de clase. Hugo y Sofía en el diagnóstico obtuvieron una puntuación de nivel medio, según la maestra ellos en las clases de matemáticas tendrían un nivel académico medio-bajo. Para mantener el anonimato hemos cambiado sus nombres.

Los estudiantes, antes de la implementación de la intervención diseñada, no habían recibido instrucción sobre la generalización ni expresión de ideas algebraicas. En sus clases habituales habían trabajado las cuatro operaciones aritméticas básicas y los números hasta un millón. La entrevistadora fue la primera autora de este trabajo, quien también participó dirigiendo las sesiones de clases junto con otros miembros del equipo.

4.2. Contexto de la investigación

En la implementación se trabajaron situaciones en las que estaban implicadas las relaciones funcionales $2x + 1$, $x + 3$ y $2x$ bien de forma explícita en el enunciado o implícita (se conocen valores de las variables independiente y dependiente). Cada relación funcional estaba asociada a contextos cercanos a los estudiantes, tales como el dinero gastado en un parque de atracciones o la cantidad de sorpresas necesarias en una fiesta de cumpleaños. Las preguntas estaban organizadas de lo particular a lo general, es decir, los estudiantes comenzaban analizando casos numéricos específicos y no consecutivos, para poco a poco llegar a plantear las relaciones observadas en términos generales. Lo general fue representado en las tareas a partir de distintos medios, tales como lenguaje natural, dibujos y lenguaje alfanumérico. También se motivó a los estudiantes a justificar sus respuestas de forma escrita y oral y a hacer uso de recursos tales como material manipulativo, tablas, sus propias manos o lápiz y papel. En Ramírez, Brizuela y Ayala-Altamirano (2020) se caracterizan detalladamente cada una de las sesiones y entrevistas que forman parte del estudio.

4.3. Recogida de datos

Las entrevistas individuales semiestructuradas duraron entre 25 y 30 minutos. Este tipo de entrevistas favorecen la obtención de información detallada al permitir variar las preguntas, dentro de un esquema definido, según las respuestas de los estudiantes (Ginsburg, 1997). A cada entrevistado se le pidió que pensara en voz alta mientras resolvía varias preguntas propuestas de forma oral. Las intervenciones o mediaciones del investigador para profundizar en las respuestas de los estudiantes estaban definidas en el protocolo (e.g. repetir pregunta de forma exacta, variar o destacar algunos elementos, repetir respuesta, aclarar lenguaje o introducir estímulos con expresiones de interés) y se basaban en investigaciones previas realizadas en el marco del mismo proyecto de investigación (Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020; Ureña, Molina y Ramírez, 2019).

El contexto para todas las preguntas fue el siguiente: "En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños". Tras presentar el contexto se realizaron preguntas relacionadas con cuatro momentos: los tres primeros se enumeran en la Tabla 4-16 y el último corresponde a la expresión de la relación inversa, la cual no tratamos en este trabajo. Las preguntas que aludían a cantidades desconocidas o indeterminadas se formularon de diversas formas: por medio de lenguaje natural, palabras claves y lenguaje alfanumérico.

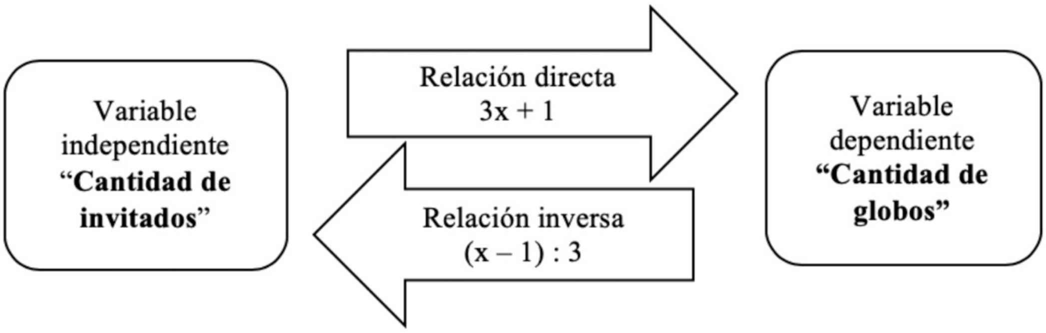
Tabla 4-16.
Ejemplos de preguntas planteadas

Dato desconocido	Ejemplos
Momento 1: Identificar elementos comunes en casos particulares.	
Relación entre las variables	• Cuando hay 3 invitados se necesitan 10 globos, ¿qué crees que hizo con los globos? • Cuando hay 6 invitados se necesitan 19 globos, ¿qué crees que hizo con los globos?
Momento 2: Extender el razonamiento más allá del rango que los originó (otros casos particulares)	
Valor de la variable dependiente	• Cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita? • Cuando hay 15 invitados, ¿cuántos globos necesita? • Un niño de la clase dice que hay 8 invitados, por lo que necesitaran 22 globos. ¿Estás de acuerdo con él?
Momento 3: Extender el razonamiento a casos indeterminados	
Variable dependiente	• ¿Cómo le explicarías a Isabel qué debe hacer para conocer la cantidad de globos que se necesitan en el cumpleaños? • Cuando hay “muchos” / “infinitos” invitados, ¿cuántos globos necesita? • Cuando hay R invitados, ¿cuántos globos necesita? • ¿Es correcta la afirmación “cuando hay Z invitados, se necesitan Z + Z + Z globos” ?, ¿por qué? • ¿Es correcta la afirmación “cuando hay Z invitados, se necesitan W globos” ?, ¿por qué?

Consideramos dos posibles formas expresar la relación funcional: directamente (cómo se relaciona la variable dependiente con la variable independiente) o inversamente (cómo se relaciona la variable independiente con la variable dependiente). Las relaciones que podrían establecer se muestran en la Figura 4-20.

Figura 4-20.

Relación funcional



Los estudiantes disponían de diversos recursos que podían usar libremente y que habían sido empleados en las sesiones previas. Estos eran hojas de papel y lápiz, una tabla de doble columna para rellenar, imágenes de apoyo para visualizar la situación y globos representados en papel que podrían ser manipulados (por ejemplo, para contar o repartir).

4.4. Análisis de datos

Las fuentes de información fueron: (a) videograbación de la entrevista final, (b) su transcripción y (c) las producciones escritas de los estudiantes. Con base en estas, realizamos un análisis microgenético de la actividad de los estudiantes (Radford et al., 2009; Vygotski, 1978/1979), el cual consistió en la observación y análisis de los intentos de los estudiantes en la solución del problema planteado. Este tipo de análisis permite el estudio de una habilidad, concepto o estrategia dentro de una sola sesión, facilita la observación de los cambios y permite detectar la variabilidad del comportamiento de los estudiantes ante una misma tarea u otras similares (Bermejo, 2005; Wertsch y Stone, 1978).

En primera instancia, las transcripciones fueron complementadas con capturas de pantalla de la videograbación donde captamos las acciones de los estudiantes y los medios semióticos (lenguaje natural, gestos, lenguaje aritmético y lenguaje alfanumérico) que utilizaron para comunicar sus respuestas. Luego, basándonos en los trabajos de Blanton (2008), Cañadas y Castro (2007), Dörfler (1991) y Pinto y Cañadas (2018), clasificamos las acciones según las categorías que mostramos en la Tabla 4-17.

Tabla 4-17.
Categorías de análisis de las acciones para generalizar

Actividad del estudiante	Descripción
Explorar	Experimenta y busca solución a situaciones que involucran casos particulares.
Organizar datos	Organiza los datos de alguna manera, como por ejemplo una tabla.
Identificar una estructura	La estrategia de acción se fija y se extiende a otros casos, explicitando cómo esta se relaciona con la situación propuesta.
Conjeturar	Propone una afirmación que explica la relación entre las variables.
Validar	Explica la veracidad de su conjetura.
Extender la acción/ generalizar	Replica de modo consistente una estrategia para establecer la relación entre diversos casos propuestos. Si logra verbalizar esta relación y lo hace de modo general, se produce la generalización (como producto).
Revisar la acción/conjetura	Busca otra estrategia o modifica su conjetura.

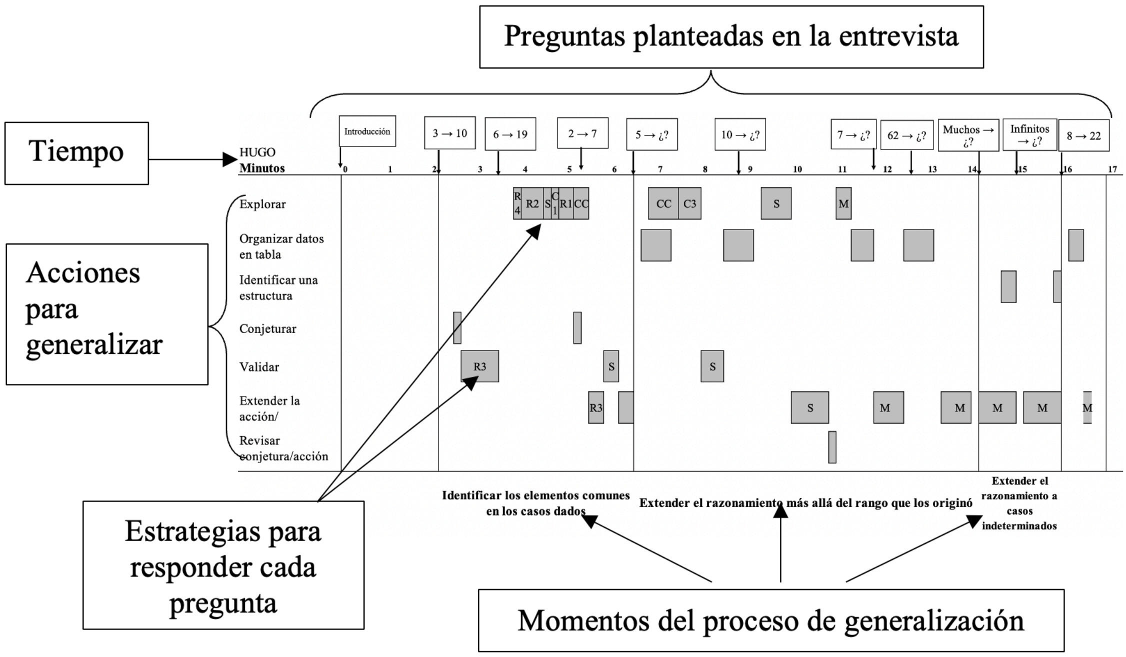
A su vez, identificamos las estrategias que utilizan los estudiantes y las asociamos con las acciones antes descritas. En la Tabla 4-18 describimos las categorías relativas a las estrategias, procedentes de trabajos previos (Cañadas y Fuentes, 2015; Morales et al., 2018).

Tabla 4-18.
Categorías de análisis estrategias

Estrategia	Código	Descripción
Respuesta directa	RD	Presenta el resultado, sin dar explicación alguna.
Conteo	C_i	Cuenta, con apoyo concreto o no. i representa la secuencia de conteo seguida, por ejemplo, C2 significa conteo de 2 en 2.
Reparto	R_i	Con material manipulativo realiza repartos. i representa la cantidad de objetos que reparte cada vez, por ejemplo, R3 significa que realizó un reparto de 3 en 3.
Suma	S	Propone o realiza una adición.
Multiplicación	M	Propone o realiza una multiplicación.
División	D	Propone o realiza una división.
Comparar casos	CC	Vuelve a casos previos y los compara entre ellos o con el caso que está resolviendo.

Finalmente, programamos una Macro en Excel® que nos permitió graficar y observar cuáles fueron las estrategias empleadas por los estudiantes, captar el momento en que se produjeron cambios y relacionarlos con la pregunta. En la Figura 4-21, se muestran cada uno de los elementos incluidos en los gráficos. No incluimos las preguntas que involucraban lenguaje alfanumérico porque la atención de los estudiantes se centró en dar sentido a este nuevo medio semiótico, no en generalizar la relación funcional, pasando a un segundo plano la situación problema.

Figura 4-21.
Ejemplo de gráfico del proceso de generalización



5. Resultados

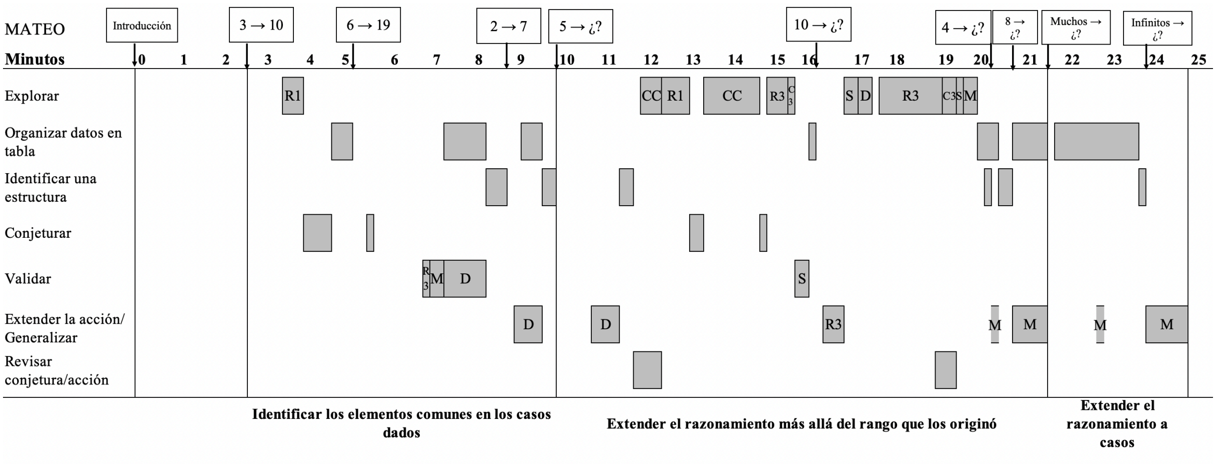
El análisis descrito en el apartado previo que implicó graficar y describir las estrategias empleadas por los estudiantes nos ha permitido identificar dos formas de generalizar: Mateo generaliza de modo contextual, mientras que, Sofía y Hugo evidencian una generalización en acto. Posteriormente, al final de esta sección de resultados, comparamos la actividad de los estudiantes en relación al tiempo empleado en cada una de las preguntas.

5.1. Generalización contextual

Mateo identificó la relación involucrada en el problema y la expresó refiriéndose a cantidades indeterminadas de manera analítica. La Figura 4-22 resume su actividad. A continuación, describimos el proceso seguido.

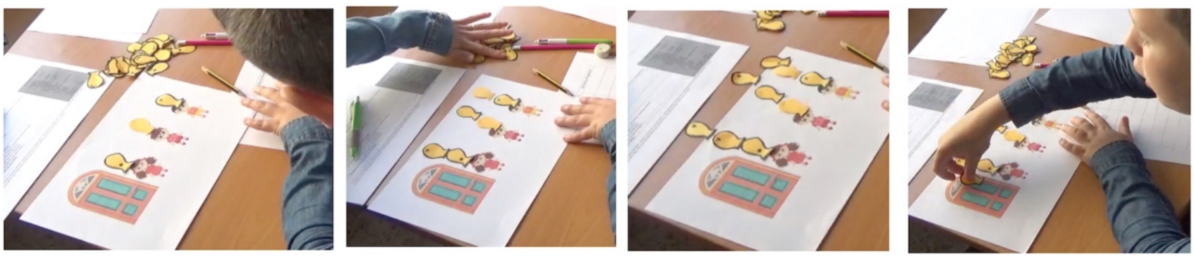
Figura 4-22.

Gráfico de la actividad de Mateo



Identificar los elementos comunes. En el primer momento de la entrevista se le propone a Mateo, de uno en uno, los siguientes pares de valores de cantidad de invitados y de globos utilizados: (3, 10); (6, 19); (2, 7). Debía explorar y explicar qué hizo Isabel con los globos. Para hallar la respuesta a la primera pregunta (3 invitados y 10 globos) utilizó los globos de papel. Seleccionó la cantidad total de globos y luego hizo un reparto uno a uno (ver Figura 4-23). Su conjetura fue que Isabel dio tres globos a cada uno y puso uno en la puerta para saber dónde era el cumpleaños.

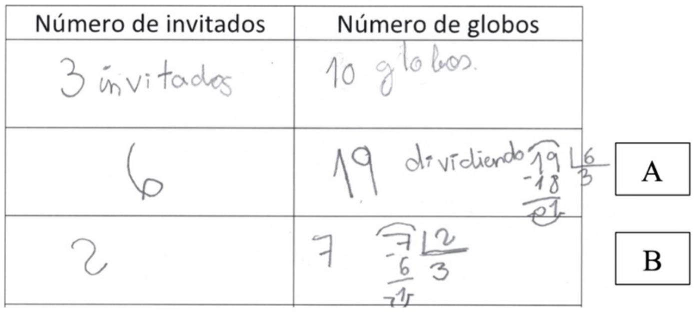
Figura 4-23.
Reparto de 1 en 1



En la siguiente pregunta (6 invitados y 19 globos) repitió la conjetura propuesta anteriormente: "Pues pone uno en la puerta y tres para cada uno". Para validarla usó el material: dejó un globo en la puerta y repartió tres a cada invitado. Cuando se le preguntó cómo se podría comprobar su respuesta Mateo miró la imagen y dijo "contando" pero, en mitad del conteo, propuso dividir. Luego verbalizó su cálculo realizando una multiplicación pero, por escrito, registró una división. Su estrategia se volvió más sofisticada, del conteo y reparto uno a uno, pasó al conteo y reparto de 3 en 3, para finalmente proponer el cálculo como se muestra en la Figura 4-24 (fila A).

Figura 4-24.

Registro escrito de Mateo



Número de invitados	Número de globos
3 invitados	10 globos.
6	19 dividiendo
2	7

Al preguntarle qué significaba el cálculo realizado (ver Figura 4-24, fila A), evidenció que identificaba una estructura para la situación. Mencionó los elementos del problema, tal como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista.

Mateo : ¿El tres? Lo que le damos a cada niño.

I : Lo que le damos a cada niño, ¿y ese uno?

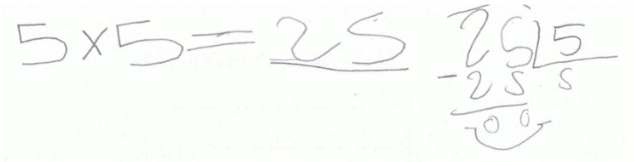
Mateo : Lo que le damos a la puerta.

En la siguiente pregunta (2 invitados, 7 globos), repitió su estrategia tal como se muestra en la Figura 4-24 (fila B). Su explicación fue similar a la dada anteriormente y volvió a identificar la estructura.

Extender el razonamiento más allá del rango que lo originó. En este segundo momento, Mateo da respuesta al número de globos que se necesitan dadas cantidades concretas de invitados (5, 10, 4, 8). Al responder al primer caso propuso una nueva relación donde a cada invitado se le dio cinco globos y lo expresó como se muestra en la Figura 4-25.

Figura 4-25.

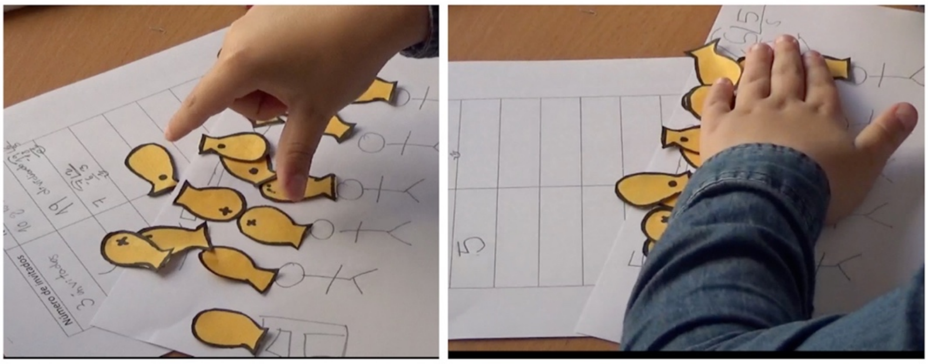
Nueva relación propuesta para el cuarto caso



Ante esto, la investigadora lo motivó a revisar su estrategia y explorar los casos anteriores. Mateo recurrió a recursos que le otorgaron mayor confianza: volvió a repartir los globos de papel en vez de calcular. Cuando justificó su respuesta dijo: "Porque le doy tres a cada uno y he sumado todos los globos que he puesto aquí" (Ver Figura 4-26).

Figura 4-26.

Reparto en el cuarto caso



En la siguiente pregunta Mateo solo sabía que había 10 invitados. En primera instancia los representó a través de un dibujo e intentó repartir los globos de papel, pero al no tener suficientes globos cambió de estrategia. Propuso sumar e intentó dividir diez entre tres. Pero no logró explicar su estrategia, lo que lo motivó a volver al reparto con el material manipulativo. Enseguida la investigadora le preguntó: ¿Cuántos globos hay?, ¿cómo lo pensarás? Dijo "sumas 3", al tiempo que apunta los grupos de tres globos que representó con el material. Luego, la entrevistadora lo motivó a escribir sus cálculos (Ver Figura 4-27, fila A). Mientras lo hacía, revisó su conjetura y mantuvo el siguiente diálogo con la entrevistadora:

Mateo : Tres por 10 igual a 30. Necesitamos 30 globos.

I : ¿Esos tres qué significa?

Mateo : Lo que le dio a cada uno.

I : ¿Y ese 10?

Mateo : El número de invitados.

I : ¿Y qué pasa con la puerta?

Mateo : Que le sumo la puerta y es igual a 31.

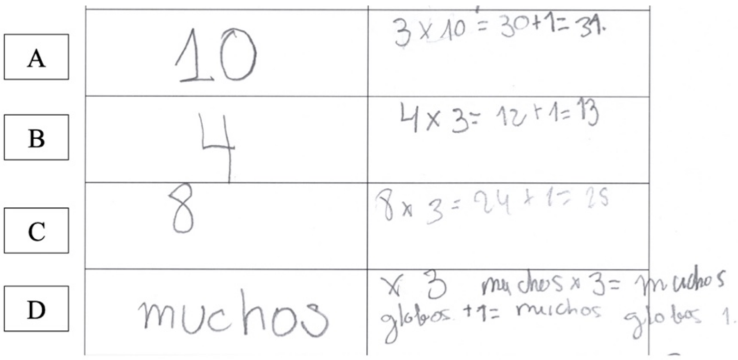
I : ¿Entonces cuántos globos va a necesitar?

Mateo : 31

Las limitaciones del material y la extensión del conteo favorecieron que Mateo propusiera una forma más sofisticada para encontrar la cantidad de globos. El reparto con el material ayudó a comprender la situación y fue el sustento para proponer la multiplicación. Mateo dio sentido a la fórmula que obtuvo relacionándola con el contexto. Esto evidencia que identificó una estructura relacionada con la situación. Los siguientes casos numéricos los resolvió con facilidad extendiendo la estrategia (Ver Figura 4-27, filas B y C).

Figura 4-27.

Cálculo escrito de Mateo



Extender el razonamiento a casos indeterminados. En el tercer momento de la entrevista se preguntó a Mateo por la cantidad de globos dada una cantidad indeterminada de invitados a la que la entrevistadora refiere primero como “muchos”, después como “infinitos” y, finalmente, por medio de símbolos alfanuméricos. En el primero de estos tres casos, en coherencia con la estructura planteada en los tres casos anteriores, Mateo completó la tabla (Ver Figura 4-27, fila D). Mientras escribía, este fue el diálogo que sostuvo con la entrevistadora.

I	:	Pero ella sabe el número, solo que no te lo quiere decir a ti. Solo te dice que son muchos. ¿Cómo le explicas tú a ella qué tiene que hacer para saber la cantidad de globos? ¿Qué hiciste tú antes que ahora le puede servir?
Mateo	:	Multiplicar y darle tres globos a cada uno. Multiplica por tres.
I	:	Y ahí cuando multiplique por tres si son muchos, ¿qué hace después?
Mateo	:	Muchos por tres... Igual a... a muchos globos.
I	:	¿Solo multiplica por tres? ¿Qué pasaba con la puerta?
Mateo	:	Más uno es igual a... muchos globos uno.

Cuando la entrevistadora preguntó qué pasaba si iban infinitos invitados, Mateo volvió a expresar la relación del mismo modo: “Pues multiplicando por tres, infinito. Por tres es igual a infinito. Entonces infinito globos, más uno, infinitos globos uno”. En ambos casos expresó la relación de forma indeterminada y realizó las operaciones matemáticas como si las cantidades fueran conocidas, representando las variables por medio de las palabras propuestas en el contexto. Al igual que le ocurrió al trabajar con el caso de 10 invitados, requirió de la mediación de la entrevistadora para implicar el globo que se coloca en la puerta, que sí incluyó al dar respuesta a los primeros casos propuestos. Sin esta intervención quizás hubiera generalizado la relación 3x. En las siguientes cuestiones consideró el número de globos de la puerta sin mediación previa de la entrevistadora.

Finalmente, al representar la investigadora la variable independiente con símbolos alfanuméricos, Mateo asignó un valor a cada letra según su forma. La letra “R” dijo que era equivalente a 2, mientras que la letra “Y” era 4 (Ver Figura 4-28). Otra vez extendió la relación, aunque esta vez tuvo que recurrir a cantidades concretas.

Figura 4-28.

Variable independiente expresada con letras

R	2R x 3= 6R+1= 7R-
Y	4Y x 3= 12Y+1= 13Y

Posteriormente evaluó la veracidad de tres pares de valores: (Z, Z+Z+Z), (Z, W) y (Z, Zx3 +1). En el primer caso Mateo señaló que era correcto porque “en vez de multiplicar, suma”. Cuando se le preguntó si se estaban considerando todos los elementos de la situación, dijo que no, que faltaba uno más para la puerta, por lo que cambió su respuesta. En la siguiente pregunta primero señaló que era correcto, luego evaluó las letras Z y W como 7 y 11 respectivamente y divide 11 entre 7, para concluir que sobran 3 globos. Cuando se le preguntó por Z invitados y Z x 3 + 1 globos, primero dijo que era correcto. Enseguida, evaluó la letra como 7 y, a medida que realizó el cálculo, lo relacionó con el contexto, mencionando explícitamente las variables.

5.2. Generalización en acto

Sofía y Hugo identificaron la relación funcional. La aplicaron y extendieron de manera coherente a todos los casos propuestos como se muestra en los gráficos de su actividad (ver Figura 4-29 y Figura 4-30). No obstante, cuando se les preguntó por cantidades indeterminadas (muchos, infinitos o letras) recurrieron a casos particulares.

Figura 4-29.

Gráfico de la actividad de Sofía

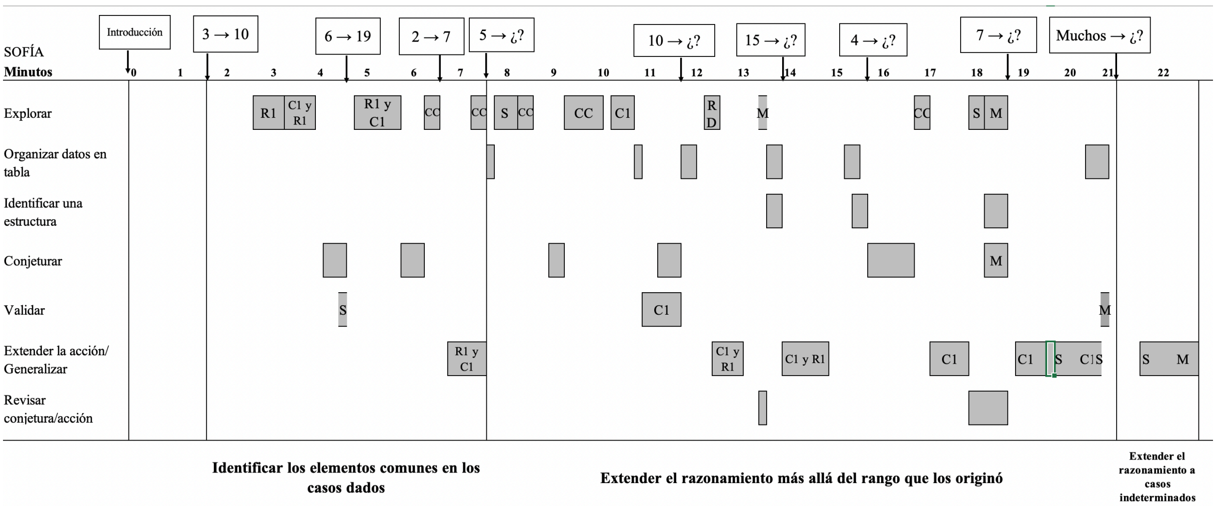
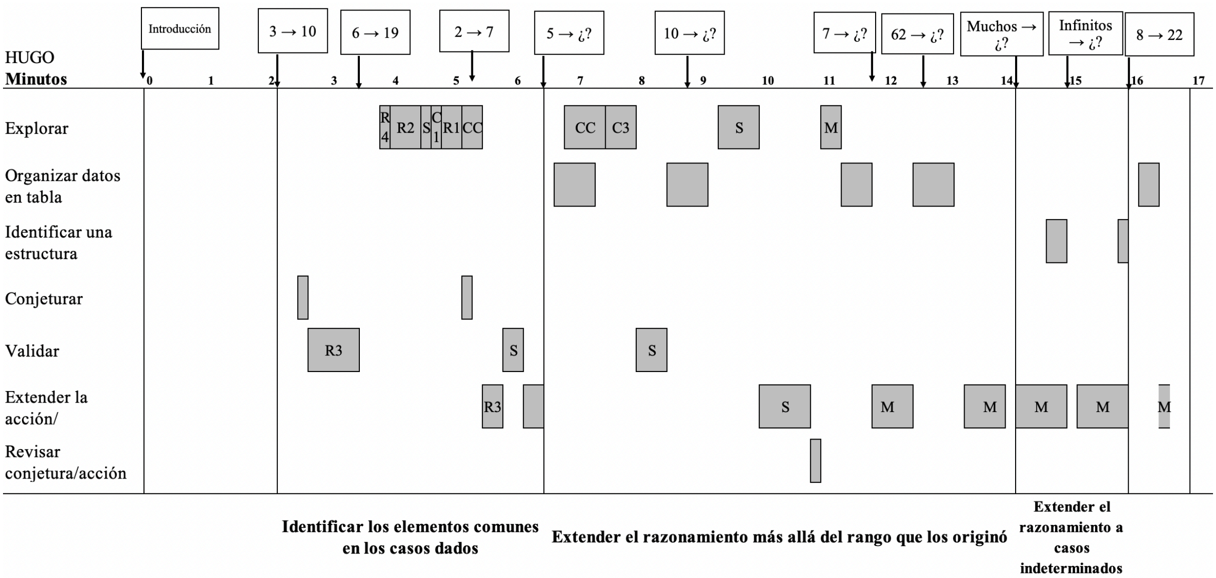


Figura 4-30.

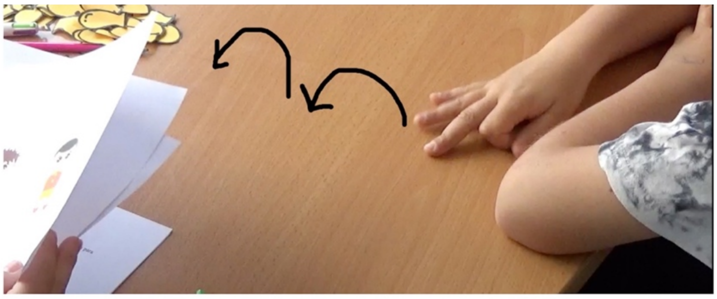
Gráfico de la actividad de Hugo



Identificar los elementos comunes. Hugo conjeturó inmediatamente que había que dar 3 globos a cada niño. Acompañó su explicación realizando gestos del reparto con su mano (Ver Figura 4-31). Mostró tres dedos y movió su mano hacia su derecha tres veces: “Pues repartió tres. Le dio tres a cada niño y los demás se los quedó ella”. Luego validó su conjetura haciendo el reparto con el material.

Figura 4-31.

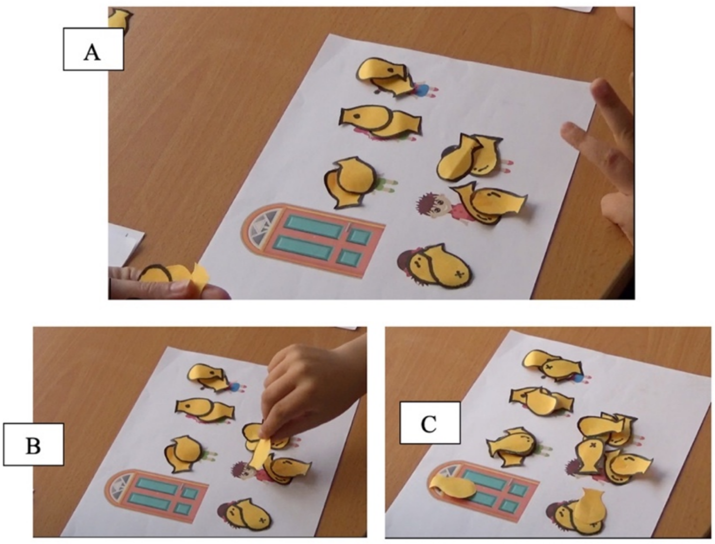
Reparto con gestos



En la segunda pregunta (6 invitados, 19 globos) no extendió inmediatamente su conjetura. Volvió a explorar la situación realizando diversos repartos acompañados de la verbalización de sumas o del conteo con los dedos. En la Figura 4-32 se muestra cómo Hugo realizó primero un reparto de dos en dos. Luego contó cuántos globos había utilizado y apoyándose en sus dedos determinó por conteo cuántos globos le faltaban para completar 19. Finalizó comparando esta situación con la anterior, dice: “que les dio a todos los niños tres”. En la tercera pregunta repitió la acción de repartir el material y lo comprobó sumando (3 + 3 + 1). Luego, refiriéndose a todos los casos observados generalizó la relación señalando: “siempre si van algunas veces nueve o tres niños, siempre le da tres globos a cada niño”.

Figura 4-32.

Reparto 19 globos

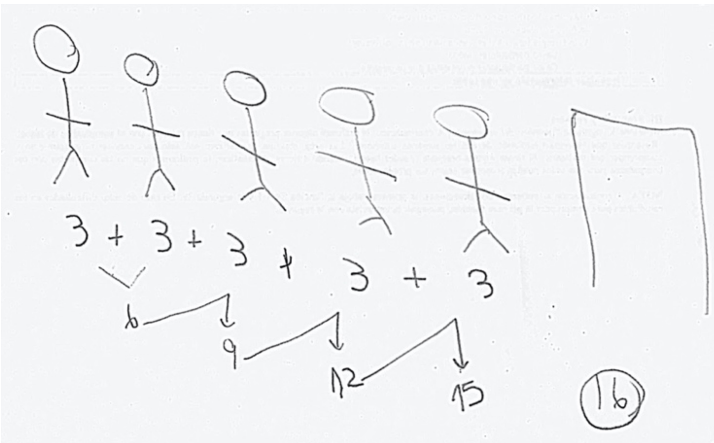


Sofía abordó el problema de modo similar al de Hugo. Resolvió las tres primeras preguntas a partir del reparto y conteo de globos de papel. Su conjetura fue que Isabel daba tres a cada uno y ponía uno en la puerta, la cual validó sumando 3 tantas veces como invitados había y uno más por la puerta. Comparó los casos a medida que los resolvía. Al responder a la tercera pregunta evidenció que había identificado una regularidad expresando que siempre estaba repartiendo tres globos a cada amigo.

Extender el razonamiento más allá del rango que los originó. Al preguntar por 5 invitados, Hugo y Sofía cambiaron la relación y propusieron otros repartos. Fue necesario aclararles que se podían comprar todos los globos que quisieran. Hugo observó y comparó las imágenes de los repartos anteriores. Enseguida contó con sus dedos cinco veces tres y respondió la cantidad de globos. Para comprobarlo sumó en voz alta de tres en tres apoyándose en el registro escrito que se muestra en la Figura 4-33.

Figura 4-33.

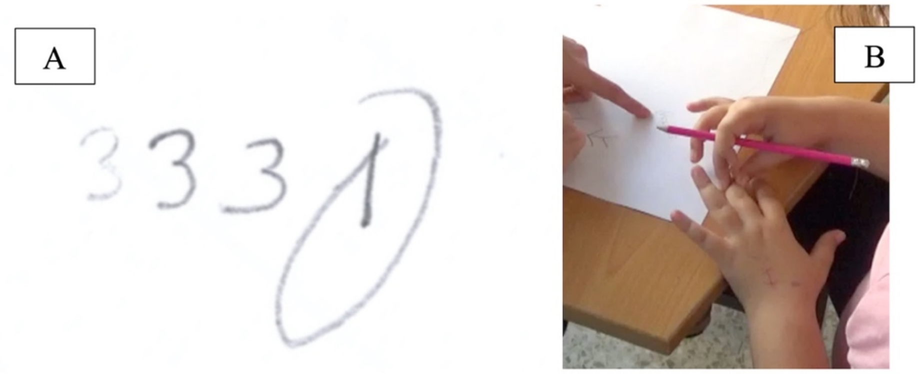
Representación de Hugo para cinco invitados



Por su parte, Sofía organizó sus ideas por escrito como se muestra en la Figura 4-34A. La entrevistadora le preguntó qué significaban y Sofía dijo “uno en la puerta. Porque para que… si hay cinco invitados uno tres, otro tres... [cuenta de uno en uno con los dedos] quince” (Ver Figura 4-34B). Ella verbalizó su estrategia de la siguiente forma: “porque mis dedos son, por ejemplo, los invitados. Entonces yo voy contando de tres en tres y me sale el número”. En las siguientes preguntas extendió esto, apoyando su conteo con sus manos y la mano de la entrevistadora.

Figura 4-34.

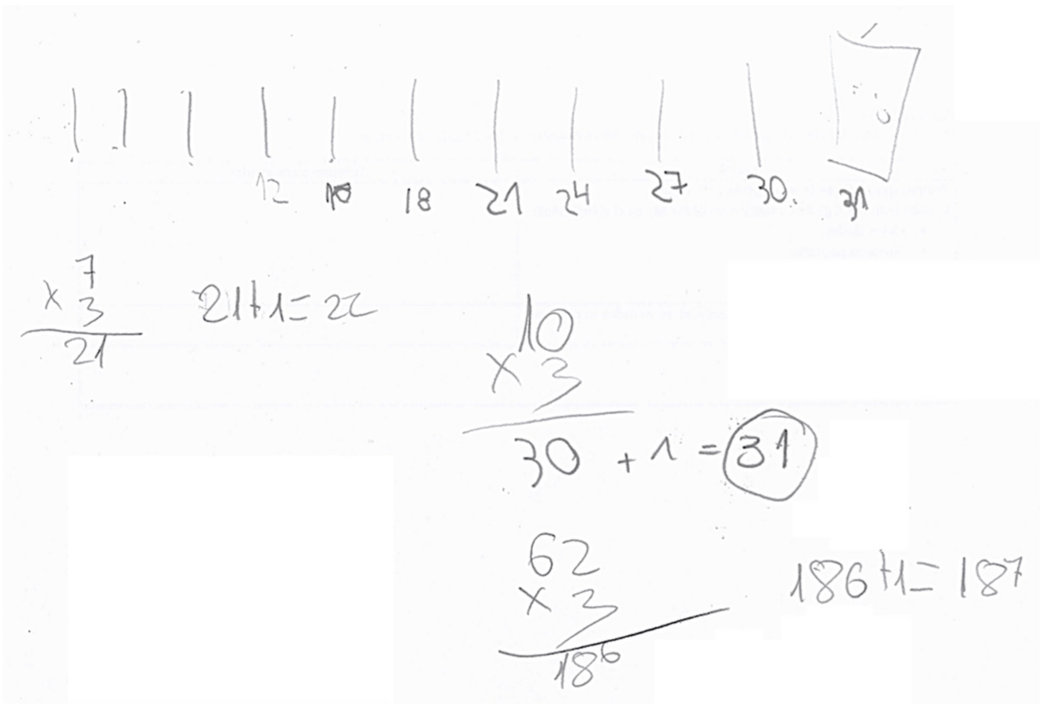
Conteo con los dedos realizado por Sofía



Cuando se indicó que había 10 invitados, ambos cambiaron su estrategia, al igual que Mateo. Hugo sumó con apoyo gráfico. En este caso su representación icónica fue más abstracta (ver Figura 4-35). Tras preguntarle si había otra forma de saber la respuesta, revisó su acción y dijo: "pero porque si es multiplicando, puede salir el número, pero es más difícil". A partir de este momento, Hugo extendió la estrategia de multiplicar para todas las otras preguntas tal como se muestra en la Figura 4-35.

Figura 4-35.

Respuesta de Hugo para diez, siete y 62 invitados



Sofía dijo inmediatamente 30, pero al no estar segura volvió al conteo. Señaló:

Sofía : Es que antes lo he hecho multiplicando y tenía la respuesta bien.

I : ¿También se puede hacer multiplicando?

Sofía : Sí.

I : ¿Y qué multiplicaste?

Sofía : Treinta... diez por tres.

I : Diez por tres te dio treinta y esos serían los globos para los invitados. ¿Y solo esos globos necesitamos o necesitamos más globos?

Sofía : Uno más para la puerta.

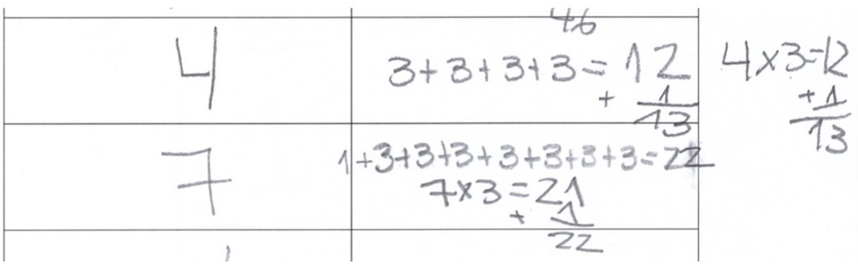
I : Ese le sumamos uno más y nos daría...

Sofía : Treinta y uno.

Tal como se muestra en la Figura 4-36, en los siguientes casos particulares Sofía resolvió sumando y multiplicando, aunque en primera instancia recurrió al conteo de dedos para hallar la respuesta. Identificó la estructura de la situación al relacionar sus cálculos con el contexto.

Figura 4-36.

Registros en tabla de Sofía



Extender el razonamiento a casos indeterminados. Al igual que a Mateo, se les preguntó por "muchos" e "infinitos" invitados. Hugo y Sofía propusieron, como ejemplo, un número de invitados. Hugo en el caso de "muchos" dijo "Por lo menos, si son muchos, como 100", para "infinitos" propuso 1.000 invitados. A medida que realizó los cálculos los relacionó con la situación, dijo que el resultado de la multiplicación son los globos para los invitados y hay que sumar uno más para la puerta. Esto evidenció que había identificado una estructura. Hugo demostró aplicar la relación incluso cuando se le planteó un caso falso. Esto se evidencia en el siguiente diálogo.

I : Y si ella te dice que son... ella te dice que son ocho invitados y que compró 22 globos, ¿tú le vas a decir que está bien calculada la cantidad de globos o que está mal calculada la cantidad de globos?

Hugo : [Hace el cálculo en el folio 8 x 3 = 24] Que está mal calculada.

I : ¿Por qué? ¿Cuántos globos son en realidad?

Hugo : Veinticinco.

I : ¿Por qué?

Hugo : Porque a la puerta le ponemos uno.

En el caso de Sofía, solo se le preguntó por "muchos" invitados. Lo primero que dijo fue que no podía hacer la cuenta si no sabía el número de invitados. Luego señaló que tenía que sumar o multiplicar. Propone ocho invitados para la suma: "por ejemplo, hay que sumar ocho veces tres y luego le sumas uno, que es el globo de la puerta" y nueve invitados para la multiplicación. Aclaró que el número nueve es solo un ejemplo y explicó los pasos para encontrar el resultado.

Cuando se representó una cantidad indeterminada de globos con letras, ambos actuaron de modo distinto. Hugo señaló que no sabía lo que era e ignoró la letra. Formuló multiplicaciones como "R x A" o "R x 3 = 3", pero no las relacionó con la situación. Sofía, por su parte, les asignó valores según el orden del alfabeto y extendió lo realizado anteriormente como muestra el siguiente extracto:

I : Explícame, qué pasaba cuando invitaba a B invitados.

Sofía : Pues yo, como la B es la segunda letra, pues sumaría dos veces tres, porque tres más tres, son seis, entonces el número que habría pensado son seis, le sumo uno, que el uno es de la puerta. Son siete.

Ella no reconoció la relación en la expresión Z x 3 + 1, aunque en el caso de Z invitados y Z globos, argumentó haciendo referencia a la relación, I : Y si fuese Z invitados, y ella dice que necesita Z globos, ¿eso está bien o está mal?

Sofía : Esta mal.

I : ¿Por qué?

Sofía : Porque si tenía que repartir a sus invitados, tres globos pues no... porque si sumas Z más Z sería 27 globos, pero en vez de tres, uno.

I : ¿No le estaría dando tres globos a cada uno?

Sofía : No, le estaría dando uno.

5.3. Comparación temporal de la actividad de los estudiantes

En la Tabla 4-19 comparamos el tiempo empleado por cada estudiante para responder cada pregunta. Establecer la relación entre el tiempo empleado en responder cada pregunta y el proceso seguido por cada estudiante nos permite conjeturar sobre la demanda de cada una de las preguntas. En concreto, observamos que al identificar elementos comunes tardaron menos en responder la tercera pregunta, que las dos primeras. Esto podría ser porque los dos primeros casos les permitieron identificar la regularidad, la que extendieron al tercero.

Tabla 4-19.
Tiempo (minutos) por pregunta

Momento	Preguntas	Estudiantes		
		Mateo	Sofía	Hugo
Identificar elementos comunes	3 → 10	2:33	2:57	1:17
	6 → 19	3:34	1:58	1:52
	2 → 7	1:14	0:56	1:13
Extender el razonamiento más allá del rango que los originó	5 → ¿?	6:06	4:15	2:17
	10 → ¿?	4:17	2:13	3:01
	15 → ¿?		1:43	
	4 → ¿?	0:26	3:03	
	8 → ¿?	0:45		
	7 → ¿?		2:23	0:45
	62 → ¿?			1:26
Extender el razonamiento a casos indeterminados	Muchos → ¿?	2:28	1:41	1:01
	Infinitos → ¿?	0:54		1:00
	8 → 22			0:58

En la cuarta y quinta pregunta fue donde los estudiantes invirtieron más tiempo. Esto coincide con el cambio en la forma de preguntar. En la cuarta pregunta Mateo fue quien más tardó pues al no conocer el valor de la variable dependiente no pudo emplear su estrategia de dividir la cantidad de globos entre la cantidad de invitados. Esto implicó que tuviera que volver a revisar los casos anteriores para, posteriormente, proponer la relación directa (ver Figura 4-20) a partir del reparto del material manipulativo.

En la quinta pregunta, cuando se les preguntó por 10 invitados, todos multiplicaron y relacionaron sus cálculos con el contexto. Hugo explicitó que multiplicar era más difícil y Sofía recurrió al conteo para comprobar sus respuestas. Probablemente ella no se sentía segura de sus conocimientos sobre los hechos multiplicativos básicos. En adelante, el tiempo de respuesta de los tres estudiantes fue menor al repetir la estrategia de multiplicar.

6. Discusión

En este estudio nuestro objetivo es describir cómo tres estudiantes construyen, dan sentido y expresan la relación funcional durante el proceso de generalización. Para esto, gracias al análisis microgenético realizado, hemos evidenciado las estrategias que emplean, captado el momento en el que se producen cambios en su actuación, descrito los medios semióticos que emplean durante la resolución de la tarea y la variabilidad del comportamiento de los estudiantes frente a la misma situación problema. Comentamos, a continuación, cada una de estas dimensiones de los resultados presentados.

6.1. Construcción y sentido de la relación funcional

Al comparar la actividad de los tres estudiantes, notamos que muestran distintos modos de pensar al hacer uso de distintos medios semióticos. Al igual que evidencian Pinto y Cañadas (2018), durante el proceso de generalización los estudiantes exploraron, formularon, revisaron y validaron sus conjeturas, organizaron los datos en tablas (uno de los recursos facilitados, empleado en sesiones previas) e identificaron una estructura. Complementando dicha investigación, evidenciamos que durante la exploración los estudiantes recurren a múltiples medios semióticos para dar sentido a la situación y hallar la relación funcional. Los gestos de reparto, el conteo, dibujos y registros escritos de sus cálculos fueron recursos que les permitieron elaborar conjeturas sobre la relación y se convirtieron en entidades de confianza (Mason, 2017) para manipular y dar sentido a la relación entre las variables. Luego, se convirtieron en garantía para justificar sus conjeturas o acciones. Por ejemplo, Sofía, aunque propone como regla multiplicar por tres y sumar uno, recurre al conteo de sus dedos (gesto) para validar sus respuestas.

Una clave para evidenciar que los estudiantes generalizaron fue notar que identificaron la estructura involucrada en el problema, aun cuando no lo expresaran explícitamente. Los estudiantes relacionaron las expresiones que emplearon en sus cálculos con el contexto y lo hicieron de forma coherente y recurrente en la mayoría de las preguntas. Su pensamiento algebraico se vio enriquecido dado que apreciaron de dónde provenía la expresión (Warren et al., 2013).

6.2. Expresión de la relación funcional

Desde la perspectiva adoptada en este estudio, entendemos que las acciones llevadas a cabo por los estudiantes son mediadas por las herramientas culturales de las que disponen (Radford, 2018). Con base a esto, mostramos dos formas distintas de generalizar que evidencian distintos grados de sofisticación en el pensamiento de los estudiantes.

Mateo, quien generaliza de modo contextual, expresa explícitamente la relación funcional y lo hace recurriendo a cantidades indeterminadas de modo analítico. En su trabajo es posible notar la contracción semiótica de los recursos al lograr expresar la relación en una fórmula que refiere a cantidades indeterminadas. Lo logra cuando se le pregunta por “muchos” o “infinitos” invitados. Estos términos fueron más cercanos a él que el uso de letras. Esto evidencia la importancia de incorporar variedad de formas de preguntar por lo indeterminado en el tránsito al uso de convenciones algebraicas. Quizás estos términos podrían aceptarse como formas personales de expresión.

La generalización en acto la identificamos en la actividad de Sofía y Hugo. Ellos tras analizar los tres primeros casos particulares emplean el deítico “siempre[18]” para evidenciar haber advertido una característica común, la que extienden a otros casos particulares. No obstante, no llegan a articular la relación funcional recurriendo a cantidades indeterminadas. Al responder preguntas que referían a cantidades indeterminadas, proponen casos concretos a modo de ejemplo. Sus acciones muestran

[18] Radford (2013, 2018) señala que el deíctico temporal “siempre” evidencia una de las funciones generativas del lenguaje, esto es, funciones que hacen que sea posible describir procedimientos y acciones que potencialmente se pueden llevar a cabo en una forma reiterativa, imaginada.

que pueden encontrar valores del codominio, conociendo el valor del dominio, o pueden determinar la veracidad de una relación extendiendo la relación hallada previamente. La importancia de la generalización en acto reside en que permite describir el potencial que tienen los estudiantes para pensar algebraicamente (Mason, 1996) aun cuando su razonamiento analítico o el sentido de lo indeterminado sea incipiente. En el trabajo de Sofía y Hugo, las evidencias no son suficientes para concluir que han desarrollado el sentido de lo indeterminado como incógnitas, variables o parámetros. Hugo dice que "muchos" es "como 100", esto podría indicar que 100 es un ejemplo o tal vez que propuso una estimación de esa cantidad. Por su parte, Sofía en sus respuestas explicita que los casos numéricos que escogen son solo ejemplos, por lo que queda abierta la posibilidad de que interprete esas cantidades indeterminadas como cualquier número, es decir una variable, pero que no pueda expresarlo de modo general, tal como lo han evidenciado otras investigaciones (e.g. Ayala-Altamirano y Molina, 2020)

6.3. La tarea y la actividad de los estudiantes

En este trabajo y en otros se ha evidenciado que los estudiantes comprenden la generalidad antes de expresarla con notación algebraica (e.g. Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Dörfler, 1991; Radford, 2018). A continuación, profundizamos en las características de la tarea que favorecieron esta comprensión.

En primera instancia, se motivó a los estudiantes a examinar e investigar la relación funcional a partir de un grupo de casos particulares que incluían números que facilitaron los cálculos y el uso de material manipulativo, permitiendo estrategias como el reparto o el conteo. Una vez que los estudiantes identificaron la relación entre las variables, se buscó que la extendieran, pero cambiando la forma de preguntar. Ya no conocían la cantidad de globos total, solo el número de invitados. Tal como lo evidenciamos en los resultados, al comparar el tiempo empleado para responder cada pregunta, la cuarta pregunta fue clave para que los estudiantes comprendieran mejor la situación propuesta y comprobar que establecían correctamente la relación entre número de invitados y cantidad de globos. La quinta pregunta fue clave para motivar el cambio de estrategia, quizás por las limitaciones del material o lo extenso que sería hacer el reparto o el conteo cuando el número de invitados era una cantidad mayor a las antes analizadas. El extender la relación funcional a otros casos también ayudó a los estudiantes a identificar una estructura, relacionando sus cálculos con los datos del problema.

En el tercer momento de la tarea se buscaba que los estudiantes expresaran la relación de modo general, para esto preguntamos de tres formas distintas por lo indeterminado. Esto en otras investigaciones se suele preguntar empleando letras o motivando a los estudiantes a que las utilicen. En dichos casos, al igual que en los resultados obtenidos en este estudio, los estudiantes tienden a rechazar las letras o les asocian un valor según algún referente como el abecedario o la forma de las letras (e.g. Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Blanton et al., 2017; Molina, Ambrose y del Río, 2018). El uso de este medio semiótico implicó entrar en una zona de desconfianza o desconocida para los estudiantes. Una contribución de este trabajo es mostrar la efectividad de preguntar por lo indeterminado recurriendo a conceptos como “muchos” o “infinitos”. Estas formas alternativas de preguntar mantuvieron a los estudiantes en una zona de confianza, lo que les permitió focalizar su atención en la situación problema y transferir la relación identificada en los casos particulares. Aunque podría ser discutible su carácter general o indeterminado, como hemos precisado previamente, entendemos que la generalidad no es única, lo que es simbólico y abstracto para uno, puede ser concreto para otro (Mason, 1996). Esta forma de preguntar podría ser un recurso para permitir la aparición de ideas incipientes sobre lo indeterminado por parte de los estudiantes.

7. Conclusiones

Este artículo contribuye a la reflexión sobre cómo los estudiantes abordan el proceso de generalización en un contexto funcional y a la comprensión del mismo. La riqueza de detalle que permite el tipo de análisis realizado es uno de los aportes de este trabajo. Se evidencian los cambios en el proceso de resolución de un problema que involucra la generalización de una relación funcional y se detecta la variabilidad en el comportamiento de los estudiantes atendiendo a los medios semióticos involucrados en la tarea y los empleados por los estudiantes y las características de la tarea (distintas formas de preguntar por los casos particulares y por los casos generales).

Al atender a la introducción del pensamiento algebraico en las aulas de primaria y querer favorecer su desarrollo desde la enseñanza es importante reconocer las diferencias que se constatan entre los modos de pensamiento de los estudiantes. Ellos a veces expresan sus conocimientos de forma explícita y otras en su manera de actuar. El término generalización en acto es relevante en este contexto para llamar la atención sobre un tipo de generalización, entre lo aritmético y lo algebraico, que evidencia una incipiente conciencia sobre el sentido de lo indeterminado o presencia de la analiticidad en su pensamiento. Los resultados de nuestro trabajo también contribuyen a la comprensión del papel de los medios semióticos en la actividad del estudiante. En la acción, los estudiantes transitaron desde el reparto con material concreto a formas más sofisticadas de expresión, dieron sentido a la situación progresivamente, haciendo uso de múltiples medios semióticos.

Por otra parte, este trabajo contribuye a la identificación de características de las tareas que contribuyen a la expresión de ideas algebraicas. En concreto destacamos la importancia de preguntar por lo indeterminado de distintos modos, así como incluir diversos medios semióticos que permitan comprender la tarea y expresar las ideas propias.

Una limitación del estudio fue la poca experiencia de los estudiantes en justificar sus respuestas o explicar y reflexionar sobre sus razonamientos. Esto condujo a la entrevistadora a cuestionarles reiteradamente sobre su procedimiento y preguntarles si habían considerado todos los elementos de la situación. Sin esta intervención quizás los estudiantes no habrían generalizado la relación correcta, dado que en ocasiones olvidaban considerar el globo de la puerta. Por otra parte, considerar una muestra pequeña podría ser otra limitante, sin embargo, esto permitió comparar en detalle cada una de las acciones de los estudiantes. En coherencia con los criterios de calidad de las investigaciones cualitativas, buscamos que la generalización de nuestra investigación se logre al poder transferir los hallazgos a otros contextos (Flick, 2012) gracias a la presentación en detalle de las actividades realizadas y el contexto en el que se aplicaron.

Referencias

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings Attributed to Letters in Functional Contexts by Primary School Students. *International Journal of Science and Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Bermejo, V. (2005). Microgénesis y cambio cognitivo: adquisición del cardinal numérico. *Psicothema, 17*(4), 559-562.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice.* Portsmouth, NA: Heinemann.

Blanton, M. L. (2017). Algebraic reasoning in grades 3-5. En M. T. Battista (Ed.), Reasoning and sense making in the mathematics classroom. Grades 3-5 (pp. 67-102). Reston, VA: NCTM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(2), 181–202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 69–81.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211–220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Granada, España: Comares

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. V. Dormolen (Eds), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 61–85). Dordrecht: Springer.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: Comments and reflections. *ZDM*, *40*(1), 143–160. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0071-y

Ellis, A. B. (2007). A Taxonomy for Categorizing Generalizations: Generalizing Actions and Reflection Generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221–262. https://doi.org/10.1080/10508400701193705

Flick, U. (2012). *Qualltative Sozialforschung* [Introducción a la investigación cualitativa]. Ediciones Morata.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M.C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA, 14*(3), 204-225. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.11378

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fenema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: LEA

Kaput, J.J. (2009). Building intellectual infrastructure to expose and understand ever-increasing complexity. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 211–215. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9169-6

Mason, J. H., Grahamn, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. East Kilbride, Reino Unido: The Open University Press, Milton Keynes.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86) Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. En S. Stewart (Ed.), *And the rest is just algebra* (pp. 97–117). Cham, Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6

Molina, M., Ambrose, R. y del Río, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to-12-year-olds, ICME-13* (pp. 261-280). Cham, Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_11

Morales, R., Cañadas, M., Brizuela, B. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457–466). Gijón: España: SEIEM.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111–126. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3–12). Granada, España: Comares.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 (pp. 3–25).* Cham, Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. *Educational Studies in Mathematics* 70(2), 91–95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y

Radford, L. y Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods* (pp. 157-182). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7.

Ramírez, R., Brizuela, B.M. y Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, M. L. Blanton y D. W. Carraher (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp.133–163). Nueva York, NY: LEA.

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M. L., Knuth, E. y Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 143-166. https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation / Representaciones de la generalización de una relación funcional y el vínculo con la mediación del entrevistador. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 570-614. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020

Ursini S. (2001) General methods: a way of entering the world of Algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds), *Perspectives on School Algebra.* (pp. 209-229). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_12

Vergel, R. (5 – 10 de mayo 2019). *Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico*. XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Medellín, Colombia: CIAEM-IACME.

Vygotski, L. S. (1979). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes* [El Desarrollo de los procesos psicológicos superiores]. (Trad. S. Furió). Harvard University Press y Editorial Planeta. (Trabajo original publicado en 1978).

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75–84.

Wertsch, J. V. (1995). *Vygotsky and the social formation of mind* (J. Zanón & M. Cortés, Trans.; 2nd ed.). Ediciones Paidós. (Original work published 1985).

Wertsch, J. y Stone, C. A. (1978). Microgenesis as a tool for developmental analysis. *Quaterly Newsletter Laboratory of Comparative Human Cognition*, *1*(1) 8-10.

ESTUDIO 4: WORD PROBLEMS ASSOCIATED WITH THE USE OF FUNCTIONAL STRATEGIES AMONG GRADE 4 STUDENTS[19]

Ramírez, R., Brizuela, B.M. y Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 1-25. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Abstract

This article discusses the characteristics of word problems that are associated with students' use of functional strategies and their ability to represent the generalization of functions. In the context of a broader research project designed to explore and foster functional thinking among elementary school students, twenty-five grade 4 (9- to 10-year-old) students were asked to identify functional relationships in five problems involving specific or indeterminate quantities. Their responses to a number of questions involving the generalization of the relationships in the problems were analyzed and associated to the characteristics of the problems. The type of representation of generalization used (verbal, generic, or symbolic) were also identified. Our findings indicate that grade 4 students showed potential for functional thinking prior to receiving instruction on variables and their notation. Such thinking was most effectively prompted when they worked with word problems that explicitly involved an additive function. When students generalized functional relationships, they represented them verbally or with generic examples. None of the students used symbolic representation. The originality of this study lies in the description of the specific characteristics of word problems that are associated with functional thinking; this information will prove useful to both teachers and curriculum designers. Identifying these characteristics could help build and propose tasks that encourage students to use more than one and more sophisticated strategies.

Keywords: Early algebra, Functional thinking, Generalization, Representations, Word problems

1. Introduction

One of the goals pursued in today's mathematics education research is to establish the connection between arithmetic and algebraic thinking in the early grades (Warren et al., 2016). According to the literature, understanding patterns, relationships, and functions in different contexts is critical to algebraic thinking (Blanton & Kaput, 2011; Kieran et al., 2016; Lee et al., 2018). The study reported in this paper was designed to explore functional thinking among grade 4 students who had no prior instruction on the use of variable notation and in early algebra (specifically, early algebra that included problems focused on everyday contexts). Functional thinking includes generalizing relationships between covariant quantities; expressing those relationships in words, symbols, tables, or graphs; and using representations to analyze functions (Blanton et al., 2011). Functional thinking provides a fertile background to develop algebraic thinking practices such as generalizing and representing relationships between quantities (Blanton et al., 2011; Carraher & Schliemann 2007; Cañadas et al., 2016). Thus, generalization plays a fundamental role in functional thinking (Kaput, 2008) and is deemed to be a key to acquire mathematical knowledge from the youngest ages (Mason, 2008, 2018; Pólya, 1945). The two research questions we explored in this study were:

> What characteristics of word problems are associated with students' use of functional strategies?
>
> How do students who recognize functional relationships represent the generalizations?

One of the reasons for conducting this study is related to the incorporation of algebra into primary school curricula. Curricular documents emphasize the advantages of developing algebraic thinking in the early grades (Cai & Howson, 2012). According to *Principles and Standards for School Mathematics* (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), students from pre-kindergarten to grade 12 should understand patterns, relationships, and functions and be able to represent and analyze mathematical situations and structures using algebraic symbols; use models to represent and understand quantitative relationships; and analyze change in different contexts

(Blanton et al., 2011). In Spain, where this study was conducted, curricular objectives for all students finishing elementary school include the ability to describe and analyze changing situations; recognize patterns, regularities, and mathematical laws in numerical, geometric, and functional contexts; and evaluate their predictive utility. Curricular content at these grades also addresses the development of numerical understanding and algebraic symbolization (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014).

Another reason to research functional thinking in elementary school is that it contributes to the construction of a sound learning base for later, more sophisticated studies in algebra (Morales et al., 2018). Once students identify relationships in functional situations, representing them through different means (e.g., tables, graphs, drawings, and equations or algebraic expressions) may help them structure and broaden their understanding of functions (Blanton & Kaput, 2011; Brizuela & Earnest, 2008). Understanding functions and gradually using algebraic symbolism may help prevent or mitigate the difficulties observed in later grades in students' use of mathematical symbols to express relationships between quantities (Bednarz, 2001; Carraher & Schliemann, 2007). Students from the earliest grades can generalize and reason with functional relationships in numerical contexts and even use variable notation (Brizuela & Earnest, 2008; Blanton & Kaput, 2011; Blanton et al., 2015).

2. Literature Review

In connection with the first research question, the strategy students use when working on tasks plays a significant role when generalizing functional relationships (Merino et al., 2013; Moss & Beatty, 2006). In addition, there are different factors that influence the selection of algebraic generalization strategies used by students (Lannin, et al., 2006; Mulligan & Mitchelmore, 2009). Prior research provides evidence that grade 4 students can use covariational strategies (Stephens et al., 2012; Warren, 2005; Warren & Cooper, 2008). In earlier grades, students use additive strategies such as counting (Blanton & Kaput, 2004; Cañadas & Fuentes, 2015; Merino et al., 2013) or multiplicative strategies such as duplication (Cañadas et al., 2016). Furthermore, which strategies are used may be conditioned by certain characteristics of the tasks proposed, such as the situations that are described in the word problems (Earnest, 2014; Larsson & Pettersson, 2015), the magnitude of the values involved (Lannin et al., 2006; Cañadas et al., 2016; Pinto et al., 2016), and the way in which the task is presented (Pinto & Cañadas, 2018c; Stephens et al., 2015; Stylianides, 2016).

In terms of the second research question, teaching has a significant impact on students' understandings of functions, especially regarding their understandings of variable notation. Some studies (e.g., MacGregor & Stacey, 1995) have reported that students understood functional relationships but could not express them clearly. Research reveals significant differences between control groups and groups of students who received early algebra instruction (Blanton et al., 2015; Pang & Kim, 2018). Of course, algebraic thinking may be present in the early grades even though the use of letter-symbolic algebra is not (Kieran, 2006) and students may also verbalize generalizations (Mason, 1996; Radford, 2006c, 2011). However, Kaput (2008) contends that increasingly systematic generalization in a conventional system of symbols is a key factor in algebraic thinking. One approach to instruction on the use of variable notation may begin with intuitive representations, followed by the gradual adoption of conventional representations, including letters to represent variables, along with tools to represent and understand mathematical relationships such as the use of tables and Cartesian coordinate graphs (Carraher et al., 2008). In Spain, grade 3 students have been observed to understand variability in connection with word problems involving functions (Ayala-Altamirano & Molina, 2020). Nonetheless, in Ayala-Altamirano and Molina (2020) study, when students expressed how two quantities co-varied they did so in non-conventional ways, which differed depending on their own prior knowledge. More specifically, their use of letters depended on the meanings they associated with them; for example, some associated the value of a letter with its position in the alphabet.

Studies comparing elementary school students of different ages identify grade 4 as a pivotal period for students to identify relationships between variables and show that the role of teaching is instrumental. In the absence of early algebra instruction, the ability to generate symbolic rules differs between grade 3 and 4 students (McEldoon & Rittle-Johnson, 2010), while certain task characteristics such as the type of underlying functional relationship affect their performance (Blanton et al., 2017). Differences between grade 4 students who have received early algebra instruction or not are greatest in tasks involving far generalization and the use of variable notation (Carraher & Schliemann, 2007). In studies on pattern generalization in which students had not received any specific prior instruction, grade 4 students engaged in far generalization (Stacey, 1989; i.e., tasks that require calculating the value of f(n) for a *large* n) and expressed the general rule verbally more effectively than grade 3 students, although very few grade 4 students expressed the general rule algebraically (Zapatera, 2018). In studies in which students received instruction on pattern generalization in terms of positional language and on extending children's language and thinking to describe and predict patterns, they were able to express the relationship between two data sets using algebraic symbols such as $n + 1$ (Warren, 2005). With no specific instruction in early algebra, the grade-to-grade findings from one longitudinal analysis also revealed differences between grades 3 and 4 and an indirect relationship between arithmetic acumen and the tasks involved in establishing relationships between quantities (Lee et al., 2018). These authors interpreted that indirect relationship to mean that children who are good at arithmetic tend to over-rely on those skills to solve relational tasks.

Grade 4 has also stood out as relevant in the area of representations of generalizations. In a problem-solving study with grades 2 to 6, Radford (2018) noted that students used alphanumeric symbols as well as non-conventional semiotic systems. In his study, students did not use letters before grade 4. At this grade, they produced alphanumeric formulas, however they did not consider expressions such as "$x + 3$" as an answer and tended to calculate results. The operations had to be reconceptualized for students to readily understand the expressions in which they were used. In later grades students were able to express the general formula with less difficulty and even use brackets within expressions appropriately. In another study with no instruction in early algebra where grade 4 students inductively generalized functional relationships they proved able to represent generalizations verbally and generically and even symbolically if aided by the interviewer (Ureña et al., 2019). The identification by other authors of similar achievements among much younger children reinforces the importance of the role of instruction in the use of variable notation (Brizuela & Earnest, 2008; Blanton & Kaput, 2011; Blanton et al., 2015).

The literature reviewed confirms the role of teaching in grade 4 students' ability to represent functional relationships, especially the use of symbols to represent variables. In spite of the fact that research in the area of functional thinking is by now quite broad, no conclusive evidence has been found regarding the role of characteristics of tasks that may have favored students' identification of the relationship between two variables. The research reported in this paper is important because it shows that, prior to instruction in variable notation, grade 4 students already have the potential to exhibit functional thinking. In this study, the proposed problems were characterized to identify some of the factors that influenced students' strategies. In addition, we also describe the kinds of representations they use when they use a functional strategy. Therefore, in this study our goal is to explore what characteristics of word problems are most associated with students' use of functional strategies and with representing of generalizations in the absence of prior early algebra instruction. Identifying these characteristics could help build and propose tasks that encourage students to use various strategies and promote more sophisticated strategies.

3. Background and Framework for this Study

This study was carried out in the context of early algebra, which promotes the development of algebraic thinking from the start of children's schooling and of generalizing, justifying, and representing (Blanton & Kaput, 2011). Kaput (2008) characterizes algebraic thinking as a complex symbolization process whose purpose is that of generalizing and reasoning with those generalizations. The approach to early algebra that we propose in this study is focused on functional thinking (Carraher & Schliemann, 2007). We understand functional thinking as "thinking in terms of about relationships" (Rico, 2007, p. 56). The functional perspective entails reasoning with variables and establishing connections between quantities that covary simultaneously (Blanton et al. 2011). Variables and their relationships can be expressed in ways other than symbolic notation, such as words, tables, or the algebraic or parametric use of numbers (Blanton, 2008; Blanton et al. 2015).

In this study we understand functions as relationships in which the value of each independent variable matches a single value of the dependent variable (Larson & Hostetler, 2008) and we define functional relationships as the rules generating one-to-one correspondences between elements in set B and elements in set A (Vinner & Dreyfus, 1989), where A and B are sets of natural numbers. In functional thinking, generalization is necessary to identify and analyze relationships between variables (Smith, 2003). Generalizing consists of the transition from the identification of regularity in specific cases to other broader cases that follow a same pattern (Polya, 1945). In the process of generalization, characteristics and properties of objects that have been abstracted are generalized and extended to a set of objects of a certain class (Krutetskii, 1976).

Strategies are understood as procedures that allow us to find a solution to a problem, arrive at conclusions from a body of concepts, and establish relationships

(Rico, et al, 1997). Strategies for generalizing functional relationships are understood to include the approaches students use to identify the relationship between elements and to extend that relationship into a more general structure. Bills and Rowland (1999) distinguish between *empirical generalization* that entails building on a small number of cases and *structural generalization* that involves no examples or only examples treated as generic representatives of the property. Radford (2010, 2013), on the other hand, differentiates between *algebraic generalization* in which students construct an expression from a deductive process that allows them to obtain any specific value and *arithmetic generalization* in which students identify a numerical pattern but that is a local commonality observed on some figures, without being able to use this information to provide an expression of whatever term of the sequence. Finding the formula by trial and error also constitutes arithmetic generalization. When identifying a functional relationship, students identify the quantities involved and their relationship, recognizing covariation between two simultaneously varying quantities (Blanton & Kaput, 2011) or the correspondence between pairs of dependent and independent variables (Blanton, 2008; Smith, 2008). In problems that include patterns and linear functions, several authors have defined functional strategies as those procedures students use when they establish a relationship between two variables—the position of the figure in the pattern and the number of elements in the figure—through a mathematical expression of the form $f(n) = an + b$ ($b \neq 0$), where the difference between consecutive terms and b is constant throughout the pattern (Stacey, 1989; Zapatera, 2018).

To understand students' generalizations, it's also important to understand the ways in which they express and represent their generalizations, in a way that all elements can be represented in a single expression (Radford, 2010). When students express the generalization of the functional relationship, they may represent it through spoken language, graphs, symbolic representations, or a combination of different representations (Carraher et al., 2008; Smith, 2008). Cañadas, Castro, and Castro (2008) use the term textual or verbal generalization when students use natural language. In a study on representing the generalization of functional relationships, Ureña et al. (2019) distinguish between verbal, generic, and symbolic representations of generalizations, drawing from research by Radford (2010) and Mason and Pimm (1984). In their study, when representing a generalization verbally, students recognized the functional relationship and expressed it verbally in general terms, alluding to indeterminate quantities. When they represented the generalization generically, students recognized the functional relationship in general cases and expressed it with an example involving specific numbers used as generic examples. Finally, when using a symbolic representation, students recognized the functional relationship and expressed it using algebraic symbols.

4. Methodology

4.1. Participants. Twenty-five grade 4 students aged 9 to 10 years old enrolled in a school in the South of Spain, participated in this study. In addition, two individual interviews were carried out with each of six of these 25 students. We selected these six students to represent low, intermediate, and high-performance levels relative to the classroom as a whole during the first classroom session problem. We also compared our selected students to their teacher's opinion of their performance in mathematics and made sure to include at least one student in each level of performance (low, intermediate, high). Students' communication skills were also taken into account to ensure the fluency of their answers during the interviews. Students' anonymity was ensured by assigning each a code, S_i, where i= 1 ... 25.

4.2. Instructional Sequence. Five 60-minute data gathering sessions were conducted by two researchers under the classroom teacher's supervision. Students' normal classroom arrangement in groups of three or four was used for these sessions. The sessions were characterized by different stages: (a) general introduction by the researcher-teacher; (b) individual or small group-based problem solving with worksheets; and (c) general discussion where students could express their ideas, ask classmates to explain their thinking, or make suggestions to revise the answers or generalizations proposed.

Two semi-structured interviews were also conducted with each of six students, one after the first and the other after the last classroom session. Table 4-20 shows the word problems presented to students in the classroom sessions and interviews.

The problems proposed were designed following an inductive process (Cañadas & Castro, 2007), i.e., they were divided into three sections in which the problems first involved small quantities, followed by large and then indeterminate quantities represented with natural language (i.e., any, many), symbols (e.g., question marks, drawings) or letters. An example of the sections of the problems in Session 2 is provided below (see Table 4-21).

Table 4-20.

Background information for word problems (WP)

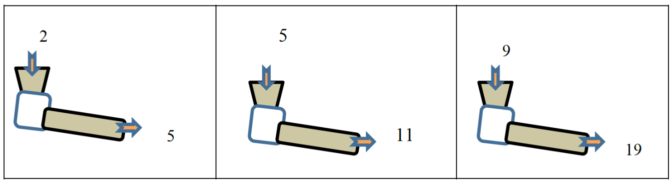
Session/ Interview	Name	Background
Session 1 and Interview 1	WP1. Function machine	Today we're going to play a game. This machine changes numbers. It's your job to figure out how it works. 
Session 2	WP2. Amusement park in [Name of city]	[Name of city] has a new amusement park. To get in you have to buy a pass for 1 euro that you can use as often as you like. The park has lots of rides. All rides cost 2 euros.
Session 3	WP3. Amusement park in [Name of town]	The town of [Name of town] now also has an amusement park. To get in you have to buy a pass for 3 euros that you can use as often as you like. The park has lots of rides. All rides cost 1 euro.
Session 4 and Session 5	WP4. Tables and chairs for a birthday party	Isabel is getting ready for her birthday party. She puts two boxes containing little presents for her guests on each table. She arranges a few tables in a row as in the drawing. 
Interview 2	WP5. Balloons for a birthday party	All the guests at Isabel's birthday party get the same number of balloons and they put one balloon on the door to show there's a birthday party going on inside.

Table 4-21.

Problem in Session 2

Section 1. Small quantity	How much does it cost for a pass into the park and one ride? How did you find your answer? [Analogously, students were asked to calculate the cost for 4, 20, 11, 35, and 100 rides.]
Section 2. Large quantity	How much does it cost for a pass into the park and one million rides? How did you find your answer?
Section 3. Indeterminate quantities	• One classmate knows he bought a pass and the number of rides he took. Explain to him how to calculate how much he spent. • If a child wants to go on B rides, how can you figure out how much they have to spend?

4.3. Data Collection. Data were collected from two sources: written worksheets and video recordings. The video recordings included those from classroom sessions (with a fixed camera located at the rear of the classroom and with a mobile camera recording students as they worked in small groups) and from individual interviews.

To classify the word problems, we considered the following characteristics: (a) the variables involved, (b) whether the functional relationship was additive or multiplicative, and (c) information about the functional relationship (see Table 4-22).

Table 4-22.

Word problem (WP) characteristics

Problem characteristic	WP1	WP2	WP3	WP4	WP5
Context	Function machine	Amusement park	Amusement park	Birthday: tables and boxes	Birthday: Balloons
Function	2x + 1	2x + 1	x + 3	2x or x + x	3x + 1
Variable	Input unit Output unit	Number of rides Number of euros	Number of rides Number of euros	Number of tables Number of boxes	Number of guests Number of balloons
Information about the functional relationship	Three pairs of (a, f(a)) values	Explicit in word problem	Explicit in word problem	Drawing with an example	Three pairs of (a, f(a)) values and verbal information

4.4. Data Analysis. In this paper we focus our analysis on students' written answers (on worksheets) and transcripts of class sessions and interviews. The association between characteristics word problems and the use of strategies was investigated by analyzing individual students' written responses before they were discussed by the group as a whole. Earlier studies have analyzed the effect of whole group justification and discussion on representations of generalizations (Ayala-Altamirano & Molina, 2019).

We analyze each student's responses according to two categories: strategies used and representations of the proposed functional relationship. Then, we connect this information with the characteristics of the problems and identify those that seem to be associated with students' functional thinking. To ensure reliability of our analysis, after the first author carried out initial coding, his decisions were discussed with each of the two other authors until we arrived at a consensus.

4.4.1. Students' strategies. To answer the first research question (*What characteristics of word problems are associated with students' use of functional* *strategies?*), we first determined the strategies the students used in each section of the word problems. Table 4-23 shows the strategies we identified, based on earlier research.

Table 4-23.

Strategies used when solving word problems

Strategy	Description	Example
Functional	Students who generalize understand the data in the various sections of the word problem as different values for the same variable, using letters, natural language, and/or tables. They identify the quantities involved and their relationship, recognizing covariation between two simultaneously varying quantities (Blanton & Kaput, 2011) or the correspondence between pairs of dependent and independent variables (Blanton, 2008; Smith, 2008). They follow the same process they used in the various sections of the problem to find the solution and generalize the relationship when answering the section involving an indeterminate quantity.	S_{21} (in WP3): The final price depends on the rides, you pay three euros and one euro for the rides you want to go on.
Arithmetic	Students use elementary arithmetic operations to find the solution, without realizing that the relationship between data and solution is the same across the various sections. The arithmetic strategy is based on the correct choice of operations (Vergnaud, 2009).	S_9 (in WP1): I knew it because I knew that from two to five I was adding. Then I thought that the difference between two and five was three. And between five and eleven, six. And between nine and nineteen, nine. And then I went, from three to seven, four. And from ten to twenty-one, eleven.

Table 4-23.

Strategies used when solving word problems

Strategy	Description	Example
Manipulative/visual-graphic	The strategy is based on information drawn directly from visual representations (Krutetskii, 1976) or manipulatives. These two approaches were combined here in a single category, for students were found not to be using arithmetic operations but counting, reorganizing manipulatives, or similar.	S_{23} (in WP5): That he had to give his classmates three, three, three, three, three, three and three. The same amount to each, one was left over, but we put it on the door [while physically distributing the balloons across his drawings].
Other	The strategy used was unclear or the student did not respond.	

For each student, we identified the strategy (i.e., manipulative/visual, arithmetic, functional, or other) that they used to provide an answer to the most complex section of the problem (i.e., small, large, and indeterminate quantities). We considered the indeterminate section of the problem (see Table 4-21) to be the most complex, followed by large quantities, and finally with small quantities being the least complex.

4.4.2. Students' representations. In order to answer the second research question (*How do students who recognize functional relationships represent the generalizations?*), when students used a functional strategy, we analyzed the external representation each student used in each word problem. Note that in this study no student used more than one representation for generalization. External representations were defined as "assertions in natural language, algebraic formulas, graphs or geometric figures, among others, [constituting] the medium whereby individuals exteriorize their mental images and representations to make them accessible to others" (Rico et al., 1997, p. 101). The three categories used in the analysis and described in Table 4-24 are based on a proposal by Ureña et al. (2019).

Table 4-24.

Representations of generalizations used when solving word problems

Representation	Description	Example
Verbal	Students generalize the relationship in natural language with allusions to indeterminate quantities, but without using algebraic expressions.	S_{16} (in WP3): From what it says about rides, you have to add the rides with the pass plus three euros.
Generic	Students describe the relationship with generic examples, in which the specific quantities used as examples are meant to represent several values at the same time.	S_{12} (in WP1): An example, for example if I have two and after two comes three, you have to add three and you get five (when asked to explain to a friend how the machine works).
Symbolic	Students generalize using algebraic expressions (letters to represent any value, equations, and so on).	None of the students in this study used this type of representation. As an example, we expected that in the WP5 they would indicate that $3x + 1$ allows you to know the number of balloons knowing the number of guests.

5. Results

In response to our first research question (*What characteristics of word problems are associated with students' use of functional strategies?*), Table *4-25* presents our findings regarding the strategy used by the 25 students in this study (i.e., functional, arithmetic, and manipulative/graphic-visual). None of the students used several strategies in the same section of the problem. In addition, we also indicate the scope of the quantities in which the strategy was used (i.e., small, large, and indeterminate quantities).

Table 4-25.

Strategies, scope, and representation of functional relationships

Word problem	Manipulative/ Visual	Arithmetic		Functional	Other	N[a]
	Quantities					
	Small	Small	Large	Indeterminate		
			Classroom Sessions			
WP1[b]	0	4 (18%)	0	6 (27%)	12 (55%)	22
WP2	0	8 (44%)	3 (17%)	3 (17%)	4 (22%)	18
WP3	0	1 (5%)	6 (32%)	11 (58%)	1 (5%)	19
WP4	0	1 (4%)	12 (52%)	10 (43%)	0	23
			Final Interview			
WP5	1 (17%)	2 (33%)	1 (17%)	2 (33%)	0	6

[a]N for the classroom sessions is not always 25 due to student absences. N for the individual interview was only 6 due to two students being absent. [b]WP1 was presented both in the first classroom session and in the initial interview.

To respond to our second research question (*What characteristics of word problems are associated with students' use of functional strategies?*), Table 4-26 presents our findings regarding the kind of representation used when students generalized the functional relationship. Note that all students who used a functional strategy did so with indeterminate quantities.

Table 4-26.
Students' representations of functional relationships

Word problem	Representations		N[a]
	Generic	Verbal	
	Classroom Sessions		
WP1[b]	1 (5%)	5 (23%)	22
WP2	1 (6 %)	2 (11%)	18
WP3	8 (42%)	3 (16%)	19

Table 4-26.

Students' representations of functional relationships

Word problem	Representations		N[a]
	Generic	Verbal	
WP4	3 (13%)	7 (30%)	23
	Final Interview		
WP5	1 (17%)	1 (17%)	6

[a] N for the classroom sessions is not always 25 due to student absences. N for the individual interview was only 6 due to two students being absent. [b]WP1 was presented both in the first classroom session and in the initial interview.

The strategies identified and the features of the word problems that were most frequently associated with the use of functional strategies are described in the sub-sections below, followed by a discussion of how generalization was represented and an overall analysis of student performance across word problems.

5.1. Strategies. Eight students (S_{05}, S_{06}, S_{07}, S_{08}, S_{09}, S_{10}, S_{11}, S_{14}) did not use a functional strategy in any of the problems in this study (see Table 4-27).At some point during the study, each of the students used the arithmetic strategy with large quantities.

Table 4-27.

Strategies used among students who did not use a functional strategy

Student	WP1	WP2	WP3	WP4	WP5
S_{05}	Arithmetic (Small quant.)	A (S)	A (Large quant.)	A (L)	N/A
S_{06}	A (S)	Other	A (L)	A (L)	N/A
S_{07}	N/A	Other	N/A	A (L)	N/A
S_{08}	Other	A (S)	A (L)	A (L)	N/A
S_{09}	Other	N/A	A (S)	A (L)	A (S)
S_{10}	A (S)	N/A	N/A	A (L)	N/A
S_{11}	N/A	A (L)	N/A	N/A	N/A
S_{14}	Other	A (S)	NR	A (L)	N/A

Note. The information in brackets indicates the most complex scope in which the strategy was used. N/A refers to students being absent or not participating in these sessions.

When they did not generalize, students exhibited difficulty in understanding what the questions involving indeterminate quantities (expressed as many, any, a question mark, or a blotch) meant. They tended to answer with a specific value and use expressions that were not general, such as in the following example (S_{09}'s response in WP3).

I: How do we know how much no-matter-how-many rides (the blotch) can cost?

S_{09}: I said you go on four rides and then I added five. And I said you go on five rides.

I: Why?

S_{09}: I saw that when there was a blotch it meant four. So, I put four and added one. And that gave five so I said there were five rides.

The other 17 students did use a functional strategy at some point in the study (see Table 4-28).

Table 4-28.

Students who did use a functional strategy at some point in the study

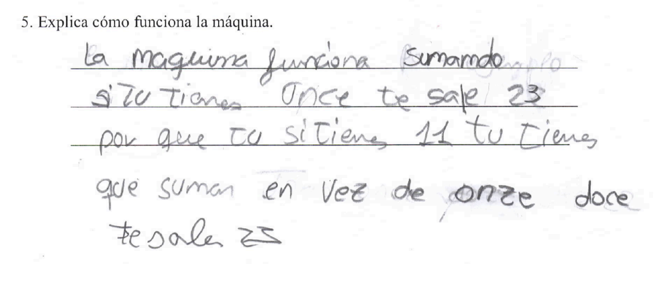
Student	WP1	WP2	WP3	WP4	WP5
S_{01}	N/A	N/A	F (Generic repr.)	F (V)	N/A
S_{02}	Arithmetic (Small quant.)	N/A	F (V)	F (V)	N/A
S_{03}	Functional (Verbal repr.)	F (V)	F (G)	F (G)	N/A
S_{04}	F (V)	N/A	N/A	F (V)	N/A
S_{12}	F (V)	A (Large quant.)	F (G)	F (G)	A (L)
S_{13}	F (G)	F (G)	F (G)	A (L)	N/A
S_{15}	Other	N/A	A (L)	A (L)	F (G)
S_{16}	Other	A (S)	F (V)	A (L)	A (S)
S_{17}	Other	A (S)	F (G)	A (L)	N/A
S_{19}	Other	A (S)	F (G)	N/A	N/A
S_{21}	Other	A (L)	F (V)	F (V)	F (V)
S_{22}	Other	Other	N/A	F (V)	N/A
S_{23}	F (V)	F (V)	F (G)	F (G)	M (S)
S_{24}	F (V)	N/A	N/A	F (V)	N/A
S_{25}	Other	Other	F (G)	F (V)	N/A

Note. For students who used an arithmetic strategy, we indicate the most complex scope in which they used this strategy. For students who used a functional strategy, we indicate the representation they used, since they all dealt with indeterminate quantities. N/A refers to students being absent or not participating in these sessions.

When using a functional strategy, students understood the data in the various sections of the word problem as different values for the same variable. S_{12}, for instance, answered WP1 as shown in Figure 4-37.

Figure 4-37.

S_{12}'s written answer to WP1 in classroom Session 1


5. Explica cómo funciona la máquina.

la maquina funciona sumando
si tu tienes once te sale 23
por que tu si tienes 11 tu tienes
que suman en vez de onze doce
te sale 23

The machine works by adding. If you have eleven it gives twenty-three, because if you have eleven, instead of adding eleven it adds twelve. And you get twenty-three.

During the interview, S_{12} explained her strategy and pointed out that she added the next number. She explained her answer in the interview as follows:

I: OK! You mean that if I enter a number the result will be… What do I have to do to that number?

S_{12}: Add it to the next number.

When using a functional strategy, students perceived the regularity in the various sections of the problem and understood the functional rule as the relationship between the information provided in the problem (the independent variable) and their answers (the dependent variable). For instance, S_{23} perceived the functional relationship $x + (x + 1)$ in the section of the problem that included specific cases and was able to explain that the machine "works by adding the same number and then one more" because he recognized that pattern in his answers (see Figure 4-38).

Figure 4-38.

S_{23}'s answer to WP1 in the interview

$5+5+1$

$2+2+1$

$9+9+1.$

$3+3+1$

$10+10+1$

Student S_{21} provided another example of students' interpretation of the functional relationship as the dependence between one variable and another. After initially using manipulative and arithmetic strategies, he used a functional strategy to express the general relationship when queried about indeterminate quantities. The following extract illustrates S_{21}'s response to WP5.

S_{21}: Multiply and give three balloons to each. Multiply times three.

I: And when you multiply times three if there are many, what do you do then?

S_{21}: Many times three… equals… many balloons.

I: You only multiply times three? What about the door?

S_{21}: Plus one equals… many balloons plus one.

I: So, let's summarize, what do you do when there are many guests? Many...

S_{21}: Multiply times three. And then I add one more for the door.

In addition, in WP4 student S_{21} established the functional relationship and answered both directly (calculating the number of boxes from the number of tables) and inversely (calculating the number of tables from the number of boxes).

I: When there were twenty tables, how many boxes did she need?

S_{21}: twenty boxes… forty.

I: And how did you find that answer?

S_{21}: Using half.

I: Half?

S_{21}: Of forty, yes. If you multiply twenty times two, you get forty.

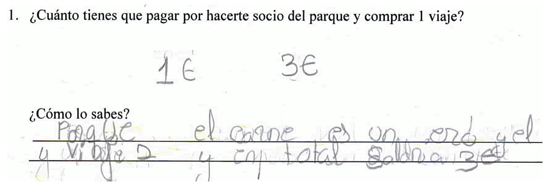
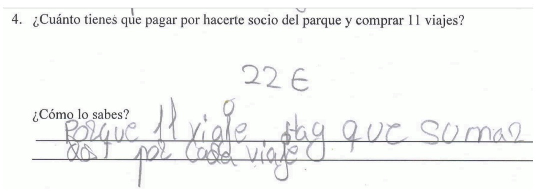
I: And half?

S₂₁: Half of forty is twenty.

Students who used arithmetic strategies showed no signs of recognizing regularity in the operations they performed in the successive sections and in some problems were not able to answer all sections. In WP2, S_{16}, for instance, used the operation *1 + 2 = 3* to answer the question "How much does it cost for a pass into the park and one ride?", adding the price of the pass (1 Euro) and one ride (2 Euros), while for his answer to the question involving 11 rides he used the operation *2 x 11 = 22* since he only took into account the price of the rides (see Figure 4-39).

Figure 4-39.

S_{16}'s answers to WP2

1. How much does it cost for a pass into the park and one ride?	4. How much does it cost for a pass into the park and 11 rides?
 1. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 1 viaje? 1€ 3€ ¿Cómo lo sabes?	 4. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 11 viajes? 22€ ¿Cómo lo sabes? Porque 11 viaje, hay que sumar 2€ por cada viaje
3€ [euros], because the pass is 1 [euro] and the ride is 2 [euros], so 3[euros] altogether	22€ [euros]Because 11 rides. You have to add 2 euros for each ride

When using arithmetic strategies, students' use of repeated addition instead of multiplication constituted an obstacle to subsequently apply that strategy to large quantities, such as in the following example. In WP5 S_{16} replied using repeated addition when asked about the number of balloons needed if 15 guests attended the party and explained his answer as follows:

I: Eighteen? How did you find the answer?

S_{16}: By adding.

I: How? What did you add?

S_{16}: Three, plus three, plus three, plus three…three plus three, six and three more, nine

Student S_{23} used a manipulative strategy in WP5, where he based his solution for the various sections without using the underlying arithmetic operation. "Well I handed them out… I hand them out… like you explained, one on the door and the ones the three guests had to have.” This strategy enabled him to solve the problem for small quantities but not to find the answer for larger quantities or to generalize for an indeterminate quantity.

6. Discussion

The inference drawn from these findings is that the strategy students used was associated to the extent to which the strategy was used. Our results show that students who solved the section with indeterminate quantities consistently did so using the functional strategy. When they used manipulative strategies, they only solved the section that involved small quantities. With arithmetic strategies students were able to solve the sections of the problems that included large quantities, but were unable to generalize beyond numerical examples.

6.1. Characteristics associated with the use of functional strategies. WP3 was the word problem in which the functional strategy was most frequently used (58% of students). WP3 involved an additive functional relationship ($y = x + 3$) and explicitly described the rule. Given that the sole difference between WP3 and WP2 was the linear function involved ($y = x + 3$ for WP3 versus $y = 2x + 1$ for WP2), employing less complex functions may have facilitated students’ use of functional strategies. Four students (S_{12}, S_{16}, S_{17}, and S_{19}) who used arithmetic strategies when working on WP2 ($y = 2x + 1$) were only able to solve the sections that included small or large quantities, whereas they used functional strategies for the sections that included indeterminate quantities and an additive relationship in WP2 ($y = x + 3$). Only three students (S_{03}, S_{13}, and S_{23}) used a functional strategy in WP2, which is 17% lower than the percentage of students who used a functional strategy in WP3.

Of the four problems that included multiplicative relationships (WP1, WP2, WP4, and WP5), WP4 is the one in which most students used a functional strategy (43%). The function in WP4 was $y = 2x$, while the functions in WP1, WP2, and WP5 included a constant or a larger coefficient ($y = 2x + 1$ in WP1 and WP2 and $y = 3x + 1$ in WP5).

While WP1 involved the same functional relationship ($y = 2x + 1$) as WP2, the function machine problem, WP1 posed a greater difficulty for students than WP2, for in WP1 55% of students were unable to provide an answer, even for small quantities. Students unable to use a functional strategy in WP1 found it more difficult to generate further examples or propose other pairs of numbers that illustrated the functional relationship proposed in the examples set out in the problem. Such difficulties did not arise in WP2, for the information provided about the functional relationship was enough for students to apply it to other specific cases.

WP1 and WP5 were the problems in which information was provided as pairs of values. The percentage of functional strategies for each of these problems were 27% and 33% respectively. Although WP5 provided students with information to complete the problem, only two of the six students interviewed (S_{21} and S_{15}) used functional strategies. The use of manipulatives in WP5 had unequal effects on students. Whilst it helped some students solve the sections that included small quantities and subsequently enabled them to adopt functional strategies, for others the dependence on their use prevented them from using strategies that were not manipulative.

6.2. Representation of generalizations in functional strategies. Functional strategies were represented verbally or generically almost the same number of times (eighteen and fourteen, respectively; see Table 4-26). Students who used verbal representations defined the general functional rule. In WP4 S_{21}'s explanation was "to multiply times two [the number of] boxes on each table." When they did so generically, in contrast, they resorted to an example of their own to represent the indeterminate quantity, such as the example below, also for WP4.

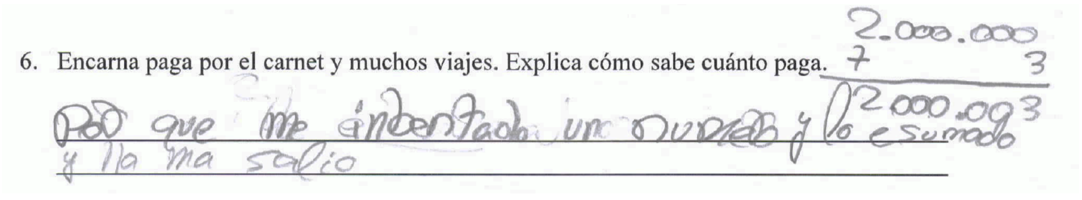
I: How do you know how many tables there are when you know the number of boxes?

S_{23}: Because if there are twenty tables, you double it and you get the answer.

In some cases, students tended to use very large quantities to represent indeterminate quantities. S_{23}'s answer to WP3, shown in Figure 4-40, illustrates this approach.

Figure 4-40.

S_{23}'s answer when asked about an indeterminate quantity in WP3.


6. Encarna paga por el carnet y muchos viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.

2.000.000
+ 3
2.000.003

Por que me inbentado un nuero y lo e sumado y lla ma salio

6. Encarna bought a pass and rode on a lot of rides. Explain how to figure out how much she paid.
Because I invented a number and I added it

None of the students used symbolic representations and all interpreted letters in the same ways as reported by other authors for students (albeit much younger) using notation for the first time (Brizuela et al., 2015; Molina et al., 2018). They did not understand that letters could represent indeterminate quantities but spontaneously assigned to them a very large quantity (e.g., S_{12}:*V + 3 = 1000003*) or values based on the letters' position in the alphabet (e.g., S_{15}: Well, since B is the second letter, I added two times three, because three plus three is six…), the first letter of the number (e.g., S_{12}: V for twenty; S_{21}: Q for fifteen[20]), or the letters' shape (e.g., S_{12} said R was nine and S_{21} said Z was quantities seven).

6.3. Overall student performance. Our findings show that, prior to instruction in variable notation, grade 4 students already have the potential to use functional strategies. Among the six students who were interviewed twice, we also identified a relationship between students' use of functional strategies and their academic performance. None of the six students used functional strategies across all of the word problems. However, one student, S_{23}, used such strategies in all but WP5, a word problem involving a multiplicative function defined by three pairs of values (a, f(a)). S_{12} tended to represent generalizations generically more frequently than verbally, whereas S_{23} used verbal and generic representations the same number of times. These two students were chosen for the study on the grounds of their high performance both in Session 1 and in classroom mathematics beyond this study.

[20] The word for '20' in Spanish is 'veinte' and for '15', 'quince'.

Two students, S_{21} and S_{15}, used functional strategies in WP5. S_{21} represented generalizations verbally in all three problems in which he used a functional strategy. Although his performance in Session 1 was low, his teachers deemed him to be a high performer in mathematics. He spontaneously transformed expressions involving operations with letters and numbers (e.g., in WP5, he said: 2*R* times three is equal to 6*R*; plus one, 7*R*) and even used infinity to represent the indeterminate quantity in WP5:

S_{21}: Well multiplying three times infinity is equal to infinity.

I: Anything else? Only the guests, nothing for the door this time?

S_{21}: Yes, the door also counts, so infinite number of balloons plus one is infinite one balloons.

One student, S_9, did not use functional strategies and was only able to answer the sections with small quantities. She was not able to respond to WP1 during classroom Session 1 or during the individual interview. She also exhibited low performance on Session 1 and was believed by her teachers to have a poor grasp of mathematical content.

These findings suggest a relationship between students' performance level (low, medium, high) and their use of functional strategies. In this study, the high performers used functional strategies, whereas the students with more tentative mathematical skills were unable to use functional strategies. With instruction and more class sessions, the results would very likely have differed, for other authors have reported that children younger than those studied here recognized functional relationships and used symbolic representations (Brizuela & Earnest, 2008; Blanton & Kaput, 2011; Blanton et al., 2015).

7. Conclusions

The present findings show that prior to early algebra instruction, grade 4 students are able to generalize relationships between two quantities, i.e., to think functionally (Blanton et al., 2011). With one exception, they all generalized the relationship in at least one of the five word-problems, perceiving the information in each section as different values of a given variable (Blanton, 2008; Carraher & Schliemann, 2007). Once the students recognized a functional relationship, they were able to represent it verbally or with generic examples, although none used algebraic notation (Mason, 1996; Radford, 2006c, 2011). Certain word problem characteristics such as the use of additive functions (which are less complex than multiplicative functions) and the explicit mention of the functional relationship in the problem wording facilitated students' use of functional strategies (Merino et al., 2013; Moss & Beatty, 2006; Pinto et al., 2016). With no prior instruction in the use of variable notation, the students in this study exhibited a lower level of symbolic representation of functional relationships than younger students analyzed by other authors (Brizuela et al., 2015; Molina et al., 2018).

7.1. Characteristics associated with students' use of functional strategies. When using functional strategies, students perceived the regularity in the sections comprising each problem. Although they generalized primarily for indeterminate quantities, they sometimes did so as well in the sections involving large quantities (McEldoon & Ritte-Johnson, 2010; Zapatera, 2018). When they used arithmetic strategies, students were able to solve only small and large quantity sections, whilst when they used manipulative or visual strategies their solutions were limited to small quantity sections (Merino et al., 2013).

The use of functional strategies was more frequent in word problems that involved explicit additive functions and situations familiar to students, like the number of euros or the number of rides in an amusement park. As in other studies, the use of less complex linear functions (additive rather than multiplicative) was found to facilitate students' use of functional strategies (McEldoon & Rittle-Johnson, 2010; Blanton et al., 2017).

A second feature that facilitated students' use of functional strategies was wording that enabled students to generate more examples of associated (a, f(a)) pairs of values. In problems where functional relationships were explicit or exemplified with a drawing from which the pattern could be identified, students were able to generate other specific cases or verify their conjectures about the general expression with other examples. That was not possible in the function machine problem, where the information provided was limited to a series of examples. Nonetheless, students who recognized how the machine worked used functional strategies only, which helped them identify the variables involved. The use of manipulatives to help students understand the situation described in the problem constituted an obstacle in some cases, inducing over-dependence on such material. Although it was helpful for small quantities, its use did not facilitate the development of functional strategies (Pinto et al., 2016).

7.2. Representations of generalizations in functional relationships. Students who used functional strategies tended to represent the general rule either verbally or with generic examples (Merino et al., 2013; Pinto et al., 2016). Unlike other grade 4 students (McEldoon & Ritte-Johnson, 2010) and even younger children (Blanton et al., 2015), none of the students in this study used symbolic representations to express functional relationships. Students need experience in recognizing and describing functional relationships. Some students in this study perceived functional relationships but could not express them clearly, as reported in other studies (e.g., MacGregor & Stacey, 1995). These findings underscore the importance of instruction or prior experience with symbolic notation for 9- to 10-year-olds (Carraher & Schliemann, 2007; Radford, 2018; Ureña et al., 2019). When asked about indeterminate quantities, they spontaneously associated the letters used with positions in the alphabet, numbers beginning with the same letter, or with large numbers (Ayala-Altamirano & Molina, 2020; Brizuela et al., 2015; Molina et al., 2018).

7.3. Implications for teaching. Although the small number of students in this study and the fact that they had received no prior instruction precludes generalizing our findings, this study may nonetheless provide some implications for early algebra instruction in grade 4. Students' performance in the word problems was related to their performance in mathematics class. Given the differing results between high and low performing students, we should design problems with various levels of difficulty to accommodate such differences, whilst exercises used to perceive students' ability to use functional strategies should be designed bearing in mind the complexity of the operations involved relative to other mathematical skills. This study found that inductive problems (from small to large to indeterminate quantities) explicitly stating an additive functional relationship may pose fewer difficulties than problems that include multiplicative relationships. Other features that facilitate the use of functional strategies are the use of familiar situations to contextualize variables (Lannin et al., 2006) and visual patterns to complement the sequence to be generalized (Moss & McNab, 2011).

The finding that manipulatives may hinder children's thinking is an important one as many teachers assume that providing concrete objects may help children learn. Perhaps there is a need to add a caveat that manipulatives may support strategies but equally important that children need to relinquish their use of manipulatives to make a leap to generalization. Word problems that included the use of manipulatives revealed that the effect on performance depended not on the resource itself but on its effective use. The presence of these materials in WP5 limited student S_{23}'s strategies to the manipulative approach, preventing him from solving the sections that included large or indeterminate quantities. In contrast, the other five students who worked on this problem used arithmetic or functional strategies in WP5. Our results seem to indicate that children cannot rely on their use of manipulatives to make a leap to generalizations. Instruction plays a significant role in this regard, guiding students to use several strategies: manipulative/visual for small, arithmetic for large, and functional for indeterminate quantities. The importance of early algebra instruction was observed to be greatest for the use of symbolic representation. Students found it difficult to understand what they were being asked when indeterminate quantities expressed as 'any, many…' were involved and symbols posed a particular limitation. Students should consequently be afforded the opportunity to employ and reflect on the use of letters. Viewed as the acquisition of an external system of representation, the use of letters constitutes an element that facilitates students' ability to solve situations involving indeterminate quantities (Martí & Pozo, 2000).

References

Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (2019). Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de primaria [Justification and expression of the generalization of a functional relationship by fourth grade students]. In J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz- Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 183-192). Valladolid: SEIEM.

Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (2020). Meanings Attributed to Letters in Functional Contexts by Primary School Students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5.

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra: Accounting for the reasonings and notations developed by students. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 69–78). Victoria, Australia: University of Melbourne.

Bills, L., & Rowland, T. (1999). Examples, generalisation and proof. *Research in Mathematics Education*, *1*(1), 103-116. https://doi.org/10.1080/14794809909461549

Blanton, M. L. (2008). *Algebra in elementary classrooms: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen, Norway: Bergen University College.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education: A Global Dialogue from Multiple Perspective* (pp. 5-23). Berlinm Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first- grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181–202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5. In R. M. Zbiek (Ed.), *Essential understanding series*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273–301). Mahwah: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group; Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*, 1–30. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939.

Cai, J., & Howson, A. G. (2012). Toward an international mathematics curriculum. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & K.S. F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education research* (pp. 949-974). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_29

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87–103. https://doi.org/10.1016/j. jmathb.2015.10.004.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*,*1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., & Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de Educación Primaria: Un estudio exploratorio [Functional thinking in first-year primary teacher students: An exploratory study]. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 211–220). Alicante, Spain: SEIEM.

Cañadas, M. C., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas [Patterns, Generalization and Inductive Strategies of Secondary Students Working on the Tiles Problem]. *PNA, 2* (3), 137-151.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*(1), 3–22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing

Earnest, D. (2014). Exploring functions in elementary school: Leveraging the representational context. In K. Karp (Ed.), *Annual perspectives in mathematics education: Using research to improve instruction* (pp. 171–179). Reston, VA: NCTM

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the pscyhology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11– 49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching. ICME-13 Topical Surveys*. Cham, Germany: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Krutetskii, V.A (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, MI: University of Chicago Press.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(*3*), 3–28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Larson, R., & Hostetler, R. (2008). *Precálculo* (7.ª ed.). México DF, Reverté Ediciones.

Larsson, K., & Pettersson, K. (2015). Discerning multiplicative and additive reasoning in co-variation problems. In X. Sun, B. Kaur, & J. Novotná (Eds.), *Proceedings of the International Commission of Mathematical Instruction (ICMI) Study 23 Conferenceon the Primary Mathematics Study on Whole Numbers* (pp. 559-566). Macau, China: University of Macau.

Lee, K., Ng, S. F., & Bull, R. (2018). Learning and solving algebra word problems: The roles of relational skills, arithmetic, and executive functioning. *Developmental psychology*, *54*(9), 1758-1772. https://doi.org/10.1037/dev0000561

MacGregor, M., & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perception of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7(*1), 69-85. https://doi.org/10.1007/BF03217276

Martí, E., & Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: La adquisición de los sistemas externos de representación [Beyond mental representations: The acquisition of external systems of representation]. *Infancia y Aprendizaje*, 90, 11–30. https://doi.org/10.1174/021037000760087946

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57–94). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2018). Structuring structural awareness: A commentary on Chap. 13. In M. G.B. Bussi & X. H. Sun (Eds.) *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades* (pp. 325–340). Cham, Germany: Springer International Publishing

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277–289. https://doi.org/10.1007/BF00312078

McEldoon, K. L., & Rittle-Johnson, B. (2010). Assessing elementary students' functional thinking skills: The case of function tables. In P. Brosnan, D. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the Thirty Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Optimizing Student Understanding in Mathematics* (p. 202). Columbus, OH: Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Educationn.

Merino, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización [Use of representations and patterns by fifth grade primary school students in a generalization task]. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* [Royal Decree 126/2014 of February 28, which establishes the basic curriculum of Primary Education]. BOE, 52, 19349-19420.

Molina, M., Ambrose, R., & del Rio, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 monographs* (pp. 261–280). Cham, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_11

Morales, R., Cañadas, M., Brizuela, B., & Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional [Functional relationships and strategies of first graders in a functional context*]. Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59–78. https://doi.org/10.5565 /rev/ensciencias.2472.

Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building and knowledge forum: Grade 4 students collaborate to solve linear generalizing problems. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 193-199). Prague, Czech Republic: PME.

Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co- variation. In J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Berlin, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_16

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33–49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Pang, J., & Kim, J. (2018). Characteristics of Korean Students' Early Algebraic Thinking: A Generalized Arithmetic Perspective. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 monographs* (pp. 141-165). Cham, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_6

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018c). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional [Generalization and inductive reasoning by a fourth grader. A case study from the functional thinking approach]. In L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457-466). Gijón, Spain: SEIEM

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A., & Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan [Functional relationships evidenced by third graders and the representation they systems used]. In C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, Juan A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (417-426). Málaga, Spain: SEIEM.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Radford, L. (2006c). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In J. L. C. S. Alatorre, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 2–21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4* (2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series* (pp. 303–322). Berlin, Germany: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización [Concerning three problems of generalization]. In L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.), *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, Spain: Editorial Comares.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 monographs* (pp. 3–25). Cham, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA [Mathematical competence in PISA]. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Rico, L., Castro, E. Castro, E, Coriat, M. Marín, A., & Puig, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* [Mathematical education in secondary education.]. Barcelona, Spain: Editorial Horsori.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston, VA: NCTM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, M. L. Blanton, & D. W. Carraher (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133–160). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I., & Gardiner, A. M. (2015). Just Say Yes to Early Algebra! *Teaching Children Mathematics,* *22*(2), 92-101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Stephens, A. C., Isler, I., Marum, T., Blanton, M. L., Knuth, E. J., & Gardiner, A. M. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. In L. R. Van Zoest, J.-J. Lo, & J. L. Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 821–828). Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford: Oxford University Press.

Ureña, J., Ramírez-Úcles, R., & Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 570–614. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020.

Vergnaud, G. (2009) The theory of conceptual fields. *Human Development*, *52*(2), 83–94. https://doi.org/10.1159/000202727

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356–366. https://doi.org/10.2307/749441

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 305–312). Melbourne, Australia: PME

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8-year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171-185. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 73–108). Rotterdam, NL: SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_3

Zapatera, A. (2018). Cómo Alumnos De Educación Primaria Resuelven Problemas De Generalización De Patrones. Una Trayectoria De Aprendizaje. [How Primary Education students solve problems of generalization of patterns: a learning trajectory]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(1), 87-114. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

Capítulo 5
SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo describimos cómo se relacionan entre sí los cuatro estudios que forman parte de esta memoria y exponemos cómo sus resultados contribuyen a dar respuesta al problema de investigación planteado, sintetizando sus principales hallazgos.

5.1. ESTRUCTURA Y ENCUADRE ESTUDIO 1

En el primer estudio el foco está puesto en las letras como una representación convencional de una cantidad indeterminada. Basándonos en estudios previos (Blanton, Brizuela, et al., 2015; Blanton et al., 2017; Blanton, Stephens, et al., 2015; Brizuela et al., 2015), diseñamos tareas las cuales nos permitieron contrastar en el contexto español los hallazgos de dichos estudios. Su principal aporte es identificar los significados que le otorgan a las letras estudiantes de primaria sin instrucción previa al respecto y relacionar aquellos significados con las formas de representar la variable dependiente de la función cuando la variable independiente está representada por una letra.

En cuanto a los resultados, se observa que los estudiantes aceptan el uso de letra como una forma de representar cantidades indeterminadas, no obstante, su significado y uso varía según la tarea que se proponga. En el primer acercamiento a la letra, los estudiantes le asociaron significados basándose en referentes familiares para ellos, tales como la aritmética o el orden en el alfabeto. Sin embargo, las discusiones y puestas en común permitieron que comprendieran que la letra puede representar un valor desconocido y variable. Esto se vio favorecido por aquellas actividades donde los alumnos debían responder sentencias de verdadero o falso.

Sobre el significado asociado a las letras, investigaciones previas indican que cuando los estudiantes relacionan la letra con su posición en el alfabeto evidencian que la interpretan de modo estático, es decir, que tiene un valor único asociado a dicha posición. No obstante, en este estudio se evidenció que, aunque los estudiantes se refirieran al alfabeto el significado asociado podría ser *letra como una variable*. Esto está estrechamente relacionado con el modo de representar las variables. En ocasiones los estudiantes escogen dos letras para representar las variables independiente y dependiente de problema, luego las asocian con su posición en el alfabeto para aplicar la relación funcional. Por ejemplo, si la relación funcional era $x + 5$, los estudiantes podrían escoger la letra "F" para representar la variable independiente y la letra "K" para representar la variable dependiente, dado que en el alfabeto hay cinco letras que las separan. Pero esto no quiere decir que las letras tengan asociadas una cantidad en concreto, pueden ser cantidades indeterminadas.

Asimismo, observamos que el significado *letra como variable* se asoció a la idea de que "la letra puede ser el número que tú quieras". Este argumento influyó en la forma en que los estudiantes representaron la variable dependiente: repetían la misma letra para ambas variables, pero pensando que representan valores distintos; sugerían una letra dejando la relación funcional implícita o explícita; sugerían un número. Para ellos era válido escoger un número para representar la otra variable dado que la letra que representaba la variable independiente era cualquier número (una cantidad que ellos escogieran *como ejemplo*, es decir, un ejemplo genérico o una cantidad desconocida o indeterminada). Esto nos permitió evidenciar que el uso de números para representar la variable dependiente tampoco es sinónimo de una visión estática de la letra. Este tipo de respuestas puede estar influenciada por sus conocimientos aritméticos que los induce a buscar soluciones numéricas. También podría ser que aún no cuentan con las competencias necesarias para expresar ideas abstractas.

5.2. ESTRUCTURA Y ENCUADRE ESTUDIO 2

En el segundo estudio, en comparación con el Estudio 1, se describió en mayor profundidad las justificaciones y explicaciones de los estudiantes. Ya no solo se analizaron las preguntas que involucraban letras para representar cantidades indeterminadas, sino que se analizó el proceso de generalización en su totalidad y se incluyeron otros medios semióticos que permitieron expresar y generalizar la relación funcional. Los objetivos fueron, por una parte, identificar cómo el proceso de justificación permite expresar de modo más sofisticado la generalización y, por otra, caracterizar las tareas identificando cómo influyen en el modo en que los estudiantes abordaron cada una de las situaciones propuestas. La originalidad de este estudio es caracterizar las tareas considerando dos tipos de justificación (de elaboración y de validación) y diversas formas de representación (lenguaje natural, expresiones aritméticas, representación tabular y lenguaje alfanumérico).

Uno de sus principales resultados es mostrar cómo la justificación oral ayuda a generalizar en términos más sofisticados, en contraste con la justificación escrita. Otros aportes de la justificación oral es que motiva a los estudiantes a verbalizar con mayor precisión sus ideas y adoptar ideas y/o estrategias de sus compañeros, también permite a los docentes analizar el conocimiento de sus estudiantes a partir de lo que dicen para ayudarlos a expresarse de modo más general.

Las evidencias de este estudio también muestran que los estudiantes no necesariamente emplean las representaciones sugeridas en las tareas. Si bien se observa que comprenden la situación propuesta, ya que pueden extender y aplicar la relación funcional en distintos casos numéricos, no llegan a expresar la relación de modo indeterminado empleando el simbolismo alfanumérico, tal como lo hicieron los estudiantes que participaron en el Estudio 1. Los alumnos del Estudio 2 principalmente representaron la relación entre las variables haciendo uso del lenguaje natural. Y según el tipo de justificación solicitada, mencionan uno u otro elemento de la función. Por ejemplo, en las justificaciones de elaboración principalmente mencionan la relación funcional, dejando implícita las variables, mientras que en las justificaciones de validación dejan implícita la relación funcional y se centran en las variables.

5.3. Estructura y Encuadre Estudio 3

El tercer estudio viene a complementar el Estudio 2, ya que en dicho trabajo se evidenció que los estudiantes comprendían la situación, pero no expresaban de modo indeterminado la relación entre las variables. Teniendo en cuenta esto, se buscó indagar con mayor detalle en qué es lo que realizan los estudiantes durante el proceso de generalización, cuáles son las evidencias que nos permiten concluir que sí generalizan aun cuando no lo verbalizan o no lo expresan con simbolismo alfanumérico y cómo esto se relaciona con las características de las tareas.

Dentro del marco teórico específico se profundizó en la generalización y, se introdujo la idea de *generalización en acto*, constructo teórico que nos permitió describir las incipientes formas de pensar algebraicamente que manifiestan los estudiantes al resolver los problemas presentados y fue una adaptación de la propuesta de Mason (1996).

En cuanto a los resultados obtenidos, se observó que los tres estudiantes que forman parte de la muestra manifiestan distintos grados de sofisticación en su pensamiento, lo que se evidencia en los medios semióticos que emplean en sus respuestas. Mientras que un estudiante expresó de forma explícita la relación y lo hizo refiriéndose a cantidades indeterminadas, los otros dos expresan la relación implícitamente, es decir, no la verbalizan, pero la evidencian en sus actos, ya que son consistentes al momento de aplicar o extender la relación funcional a distintos casos presentados y emplean de forma consistente la misma estructura. El primer estudiante representa las cantidades indeterminadas por medio del lenguaje natural empleando los términos *muchos* e *infinitos*. En cambio, los otros dos estudiantes responden a las preguntas sobre cantidades indeterminadas proponiendo ejemplos de casos numéricos. A diferencia del Estudio 1 y en coherencia con los resultados del Estudio 2, en el Estudio 3 los estudiantes no emplean las letras para expresar la relación en forma general. En las preguntas que se propone su uso ellos se olvidan de la situación problema y se centran en darle sentido a las letras. Lo anterior lo hacen de forma similar a como lo hacen en un principio los estudiantes del estudio 1, recurriendo a referentes familiares, tales como su conocimiento aritmético, al orden en el alfabeto o asociando la forma de la letra con la forma de algún número.

Otro aporte de este trabajo es que su análisis en detalle del proceso de generalización permitió identificar en qué momento los estudiantes empleaban una u otra estrategia, qué preguntas favorecían el empleo de cada estrategia y cuáles permitían que los estudiantes expresaran de modo más sofisticado la relación entre las variables. Además, evidencia la efectividad de preguntar por lo indeterminado de distintos modos (conceptos como *muchos*, *infinitos*, letras). Esto complementa los resultados del Estudio 1 que solo se centra en el análisis de las preguntas que involucran letras.

5.4. Estructura y Encuadre Estudio 4

Finalmente, en el cuarto estudio se analizan los problemas propuestos a lo largo del segundo experimento de enseñanza, esto con el objetivo de identificar qué caracteriza a aquellos problemas que favorecen estrategias funcionales y la expresión de la relación entre las variables en términos generales.

Los resultados del Estudio 3 y el Estudio 4 se complementan ya que ambos atienden a las características de las tareas, no obstante, el cuarto estudio realiza un análisis más amplio de distintas situaciones problemas. En ambos se puede observar que los estudiantes recurren al conteo o al uso del material manipulativo o estrategias aritméticas cuando responden preguntas que involucran cantidades pequeñas, mientras que cuando se pregunta por cantidades mayores los estudiantes cambian de estrategias e incluso generalizan.

A partir de las respuestas de los estudiantes se evidencia cuáles problemas resultan más fáciles o difíciles. Entre los principales hallazgos del Estudio 4 se muestra que los problemas que involucran una relación aditiva de la forma $y = x + b$ son los que más favorecen el uso de estrategias funcionales. Luego, le siguen los problemas que involucran una relación multiplicativa sin constante ($y= ax$), siendo los más difíciles los problemas multiplicativos con una constante ($y= ax + b$). Además, los problemas que favorecen estrategias funcionales incluyen la relación funcional de manera explícita en el enunciado. Aquellos problemas en los que los estudiantes tuvieron que descubrir la relación a partir de un par de valores fueron más complejos. Estos hallazgos son relevantes dado que al momento de planificar sesiones de clases que fomenten habilidades algebraicas y, en particular el pensamiento funcional, sirven de parámetros para secuenciar la enseñanza y comenzar con problemas que favorezcan la discusión y el desarrollo de dichas habilidades.

Sobre la forma en que los estudiantes representan la relación funcional refiriéndose a cantidades indeterminadas, el Estudio 4 corrobora lo expuesto en los estudios 2 y 3, mostrando que este grupo de estudiantes prefiere expresar sus ideas empleando el lenguaje natural o empleando los números como ejemplos genéricos. Las evidencias sobre el empleo de la letra como notación para las variables son similares a los estudios previos donde se observa que los estudiantes las interpretan tomando en cuenta referentes familiares para ellos.

Capítulo 6
CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de esta Tesis Doctoral considerando los principales resultados y conclusiones de los cuatro estudios llevados a cabo. El capítulo consta de tres secciones. En primer lugar, se discute la consecución de cada uno de los objetivos propuestos en esta tesis y se aclara su conexión con los objetivos de los proyectos de investigación que sirven de contexto. En segundo lugar, describimos los aportes del trabajo y las posibles implicancias para la docencia. Finalmente, planteamos posibles limitaciones y perspectivas futuras que surgen del proceso de esta Tesis Doctoral.

6.1. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En esta memoria, dentro del enfoque funcional del álgebra escolar, el foco estuvo puesto en las concepciones y representaciones de cantidades indeterminadas de estudiantes de tercero y cuarto de primaria, las que se enmarcan en el enfoque funcional del álgebra escolar. Para esto caracterizamos el aprendizaje como un fenómeno multimodal y semióticamente mediado, en este contexto los signos y su representación son relevantes dado que por una parte ayudan a entender cómo las personas conocen y comprenden los objetos matemáticos y, por otra, permiten hacerlos presentes. El aprendizaje se origina en interacción con otras personas y el medio; este se desarrolla según las demandas de la comunicación y de las necesidades y objetivos de las tareas o actividades propuestas. Teniendo en consideración lo anterior es que se definió el objetivo de investigación en este trabajo, el cual se recuerda en la Tabla 6-1. En dicha tabla también se ilustra cómo se abordaron los objetivos específicos en cada uno de los estudios que componen la investigación realizada (presentados en el Capítulo 4).

Tabla 6-1.

Relación entre los objetivos de investigación y estudios

		Estudios			
Objetivo general	Objetivos específicos	1	2	3	4
O.G. Describir y analizar el proceso de representación de la generalización de relaciones funcionales llevado a cabo por estudiantes de Educación Primaria y relacionar dicho proceso con las características y demandas de las tareas propuestas.	O.1. Identificar las concepciones de los estudiantes sobre las letras como representación de cantidades indeterminadas, a partir de sus intervenciones orales y producciones escritas en el marco de un experimento de enseñanza en el que se proponen tareas funcionales de generalización.	x			
	O.2. Describir cómo cambian las concepciones de las letras como representación de cantidades indeterminadas puestas de manifiesto por los estudiantes.	x			
	O.3. Identificar las representaciones utilizadas por los estudiantes para expresar la relación funcional involucrando cantidades indeterminadas.	x	x	x	x
	O.4. Describir los cambios de las representaciones de la relación funcional involucrando cantidades indeterminadas, puestas de manifiesto por los estudiantes.		x	x	
	O.5. Relacionar las representaciones empleadas por los estudiantes para expresar cantidades indeterminadas y las características de las tareas propuestas.	x	x	x	x

6.1.1. Objetivos Específicos

En esta sección se analiza la consecución de cada uno de los objetivos específicos que nos permiten demostrar el cumplimiento de nuestro objetivo general.

O.1. Identificar las concepciones de los estudiantes sobre las letras como representación de cantidades indeterminadas, a partir de sus intervenciones orales y producciones escritas en el marco de un experimento de enseñanza en el que se proponen tareas funcionales de generalización.

El primer objetivo específico se abordó en el Estudio 1. Este objetivo fue diseñado teniendo en cuenta que investigaciones previas evidencian que estudiantes de primaria aceptan el uso de letras como representación de cantidades indeterminadas. En consecuencia, se buscó conocer el significado que le otorgan a las letras estudiantes españoles de primaria y evidenciar su capacidad de emplear formas de representación convencionales.

Con base en los trabajos de Blanton y colaboradores (2017), Küchemann, (1981) y Molina y otros (2018) se plantean unas categorías iniciales que permitieron analizar las producciones escritas de los estudiantes y sus intervenciones en las puestas en común. Estas categorías luego fueron refinadas tomando en consideración las respuestas de los estudiantes y se constata que, tal como ocurrió en las investigaciones previas, los estudiantes aceptan el uso de las letras y las pueden interpretar asociando a ellas la idea de variabilidad.

Asimismo, el identificar los significados de los estudiantes contribuyó a comprender los motivos por los cuales proponían una u otra representación para la variable dependiente, cuando la variable independiente era una letra. Estas evidencias fueron significativas, dado que muestran que los estudiantes pueden interpretar las cantidades indeterminadas como variables, no obstante, al momento de expresar la generalización recurren a medios de representación personales. Este resultado inspiró a incluir otros medios de representación en la siguiente toma de datos, para así dar la oportunidad a los estudiantes de representar de diversos modos sus ideas. También destaca la importancia de considerar las explicaciones de los estudiantes sobre su elección de cierta representación, ya que, aunque pareciera que cuando representaban la variable dependiente empleaban las letras o números de modo incorrecto, sin seguir las convenciones matemáticas, sus respuestas tienen una consistencia interna relacionada con sus interpretaciones personales de las letras que representaban la variable independiente y demuestran aplicar la relación funcional involucrada en cada situación problema.

O.2. *Describir los cambios de las concepciones de las letras como representación de cantidades indeterminadas puestas de manifiesto por los estudiantes.*

Tal como se mencionó en el apartado anterior, en el Estudio 1 se evidencia que los estudiantes interpretan la letra como una cantidad indeterminada y asocian a ella la idea de variabilidad. Esto se logró a lo largo de las tres sesiones de clases implementadas y en estrecha relación con las demandas de las tareas propuestas. Tal como otras investigaciones lo han constatado, los estudiantes tomaron conciencia de modo progresivo de los significados y sentidos sobre la notación de las variables (Blanton et. al., 2017). Las concepciones de los estudiantes se movilizaron desde referentes familiares para ellos (iniciales de palabras claves, alfabeto, aritmética) hasta comprenderlas como cantidades indeterminadas que podrían tener asociada un número, cuyo rol era un ejemplo genérico, o permanecer como cantidades generales y desconocidas. Los cambios en las concepciones de los estudiantes surgieron en la interacción, las discusiones y puestas en común. Además, la interpretación de la letra como variable/valor indeterminado se vio favorecida por aquellas actividades donde los alumnos debían responder sentencias de verdadero o falso.

Los estudiantes que forman parte de la muestra de los estudios 2, 3 y 4, también en primera instancia manifestaron asociar la letra con referentes familiares, no obstante, no lograron cambiar sus concepciones, tal como lo hicieron los estudiantes del Estudio 1, para ellos emplear otras formas de representación fue más significativo.

O.3. *Identificar las representaciones utilizadas por los estudiantes para expresar la relación funcional involucrando cantidades indeterminadas.*

Este objetivo se abordó de manera transversal en todos los estudios. En el primero de estos el foco estuvo en las representaciones convencionales, mientras que en los siguientes se consideraron diversas formas de comunicar ideas matemáticas, tales como: lenguaje alfanumérico, lenguaje natural, gestos, entre otros.

Para identificar y caracterizar las representaciones empleadas en el Estudio 1 se establecieron unas categorías basadas en investigaciones previas (Blanton et al., 2015: Molina et al., 2018) y en las repuestas de los estudiantes. Estas permitieron mostrar distintas formas de emplear las letras y los números para representar la variable dependiente de la función cuando la variable independiente estaba representada por una letra. Se logró evidenciar que las representaciones de los estudiantes están estrechamente relacionadas con el significado asociado a la letra y se amplió los hallazgos que la literatura reportaba. Por un lado, se muestra que los estudiantes pueden referirse al alfabeto sin que esto implique una visión estática de la letra, en la cual la letra solo puede tomar un valor específico relacionado con su posición en la secuencia del alfabeto. Por otro lado, se muestra que, aunque los estudiantes en sus respuestas propongan un número, no quiere decir que lo consideren como una única respuesta posible, por lo general lo emplean como un ejemplo genérico ya que interpretan la letra como una variable que puede representar *el número que quieras*.

El uso de la letra como representación para cantidades indeterminadas no se observó del mismo modo en los dos grupos de estudiantes (tercero y cuarto de primaria). Mientras los estudiantes de tercero del centro A (Estudio 1) aceptaron el uso de la letra como representación indeterminada, los estudiantes de cuarto del centro B (Estudios 2, 3 y 4) tuvieron mayor dificultad para emplearla. Por lo general, los estudiantes de cuarto cuando se enfrentaron al uso de las letras como una representación convencional no respondían a las preguntas, sino que trataban de darle sentido olvidándose de la relación funcional y de responder a las preguntas planteadas. Sin embargo, que los estudiantes no emplearan las letras no es sinónimo de que no expresaran la generalización o que no pensaran algebraicamente. Los estudios 2, 3 y 4 permiten evidenciar aquellas representaciones que emplearon, las cuales se vieron favorecidas al incorporar otras formas de preguntar por lo general o indeterminado, por ejemplo, al emplear palabras claves como *muchos* o *infinitos*.

Durante la discusión en las puestas en común se observó que los estudiantes podían expresar de modo más sofisticado la relación funcional, en contraste con la expresión escrita (Estudio 2). En las justificaciones los estudiantes generalizaron principalmente haciendo uso del lenguaje natural y proponiendo ejemplos genéricos. Se observa que al responder no necesariamente recurren a los medios de representación propuestos en las preguntas, más bien emplean entidades de confianza para manipular, dar sentido y expresar las relaciones identificadas. Por ejemplo, en las preguntas que involucran expresiones aritméticas o letras se observó que recurren a gestos y dibujos para representar la situación y darle sentido, dada la dificultad que significaba para ellos expresarse en el medio semiótico sugerido.

Un rasgo importante a destacar es que se logró evidenciar que los estudiantes manifiestan distintos grados de sofisticación en su pensamiento, lo que se evidencia en los medios semióticos que emplean. En el Estudio 3, se describe el trabajo realizado por tres estudiantes que no necesitan emplear simbología alfanumérica para generalizar la relación funcional. El Estudio 3 complementa el Estudio 2 ya que permite observar que los estudiantes, aunque no expresan la relación entre las variables explícitamente empleando simbolismo alfanumérico, lo hacen a través de sus acciones o empleando lenguaje natural.

Finalmente, el Estudio 4 corrobora que a lo largo de todo el segundo experimento de enseñanza los estudiantes prefieren el lenguaje natural y los ejemplos genéricos como medio para expresar la generalización.

O.4. *Describir los cambios en las representaciones de la relación funcional involucrando cantidades indeterminadas, puestas de manifiesto por los estudiantes.*

La idea de *contracción semiótica* contribuyó a describir los cambios en las representaciones de los estudiantes y determinar su grado de sofisticación. En los estudios 2 y 3 este constructo teórico sirvió para analizar las representaciones de los estudiantes a lo largo del proceso de generalización. Se logró apreciar los cambios producidos en la expresión de la relación funcional desde el trabajo con casos particulares hasta cuando los estudiantes se referían a cantidades indeterminadas. Esto ayudó a observar la coherencia en las respuestas de los estudiantes y cómo le daban sentido a las fórmulas que empleaban para hallar la variable dependiente cuando la independiente era dada o cuando debían evaluar la coherencia de la información propuesta en preguntas de verdadero o falso.

En ambos estudios, en primera instancia, cuando los estudiantes describen la relación entre las variables recurren a elementos cercanos para dar sentido a la situación. Es así como los gestos de reparto, el conteo, dibujos o el cálculo de sumas son el primer recurso que emplean para expresar la relación, luego, cuando se enfrentan a preguntas que involucran cantidades mayores proponen estrategias más sofisticadas e identifican una estructura, la que extienden aun cuando se refieren a cantidades indeterminadas.

O.5. *Relacionar las representaciones empleadas por los estudiantes para expresar cantidades indeterminadas y las características de las tareas propuestas.*

Este objetivo también se abordó de manera transversal en todos los estudios. Para caracterizar las tareas se contemplan factores como: la interacción social, los medios semióticos involucrados, el tipo de justificación solicitada y las características del enunciado del problema. Estos factores se estudiaron progresivamente a través de los cuatro estudios.

De modo general, un rasgo importante a destacar de los resultados es que la interacción social favoreció el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, en el Estudio 1 se observó que las discusiones orales ayudaron a comprender que las letras pueden representar cantidades indeterminadas y asociarlas al sentido de variabilidad. En el Estudio 2 las justificaciones orales favorecieron la expresión de la generalización en términos más sofisticados. Los estudiantes adoptaron estrategias que otros compañeros exponían en las discusiones, corrigieron sus errores a través de diálogo y fueron cada vez más precisos en sus intervenciones.

La consideración de distintos medios semióticos en las tareas fue una oportunidad para que los estudiantes respondieran empleando aquel medio que más les acomodara. Otros estudios solo incluyen tareas que involucran números y letras en los problemas, parte de la originalidad de esta tesis es ampliar estos medios (por ejemplo, incluir sentencias aritméticas en el Estudio 2) y describir las reacciones de los estudiantes. Las preguntas que involucraban cantidades indeterminadas representadas en lenguaje natural, sin involucrar lenguaje alfanumérico, mantuvieron a los estudiantes en una zona de confianza, lo que les permitió focalizar su atención en la situación problema y transferir la relación identificada en casos particulares (Estudio 3).

Sobre la inclusión de la justificación en la sala de clases (Estudio 2), en esta tesis se propone trabajar dos tipos de justificación con los estudiantes: de elaboración y de validación. Al respecto se evidenció que al pedir a los estudiantes explicar cómo han obtenido la respuesta (justificación de elaboración), la exigencia comunicativa de la tarea los llevó a centrarse más en la regla funcional que en las variables, dejando estás últimas implícitas en la pregunta. La justificación de validación tuvo una demanda comunicativa distinta, los estudiantes principalmente se basan en la relación directa y se refieren a pares de valores concretos dentro de un contexto.

Sobre las características de los problemas y tareas propuestas, entre los principales hallazgos del Estudio 4 se muestra que el uso de estrategias funcionales se vio favorecido en aquellos problemas que involucran una relación aditiva e incluyen la relación funcional de manera explícita en el enunciado. Aquellos problemas en los que los estudiantes tuvieron que descubrir la relación a partir de un par de valores fueron más complejos. Los resultados también muestran que las tareas de verdadero o falso propician la discusión (Estudios 1 y 2), mientras que la actividad de completar tablas supuso mayor dificultad para los estudiantes (Estudio 1). Estos resultados permiten concluir que la enseñanza se podría ver favorecida si en primera instancia los estudiantes son motivados a interpretar presentaciones de cantidades indeterminadas dadas e interpelarlos a identificar si la forma como se representan las variables tiene sentido en el contexto del problema a través de preguntas verdadero o falso. Luego que los estudiantes estén familiarizados con las diversas formas de representación, solicitar que produzcan sus propias representaciones de las variables involucradas en los problemas.

6.1.3. Objetivos relacionados con el proyecto de investigación

El trabajo desarrollado en la presente Tesis Doctoral busca atender a cuatro objetivos generales propuestos en los dos proyectos de investigación I+D de los que forma parte. Estos objetivos se presentan en la Tabla 6-2. A continuación, describimos cómo desde esta investigación se contribuye a dar respuesta a los mismos.

Tabla 6-2.

Objetivos de los proyectos de investigación abordados

Proyecto de investigación	Objetivo general	Objetivo específico
EDU2013-41632-P (Cañada y Molina, 2013)	OG2. Mostrar evidencias del pensamiento funcional de estudiantes españoles de Educación Primaria.	OE3. Describir las estrategias que emplean los estudiantes de Educación Primaria cuando abordan tareas que pretenden poner de manifiesto y promover su pensamiento funcional. OE4. Obtener conclusiones que sean útiles para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria.

Tabla 6-2.

Objetivos de los proyectos de investigación abordados

Proyecto de investigación	Objetivo general	Objetivo específico
	OG3. Producir materiales que puedan ser útiles para la introducción del pensamiento funcional en Educación Primaria.	OE1. Diseñar tareas que permitan poner de manifiesto y promover el desarrollo del pensamiento funcional de estudiantes de Educación Primaria.
EDU2016-75771-P (Molina y Cañada, 2016)	OG1. Profundizar en la descripción del pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes de Educación Primaria en España.	OE1. Describir el pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes españoles de los diferentes cursos de Educación Primaria.
		OE5. Identificar dificultades que encuentran estudiantes españoles de Educación Primaria de diferentes niveles en el proceso de pensamiento funcional y formas para ayudarlos a superarlas.
	OG2. Desarrollar materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo de pensamiento funcional y la superación de los obstáculos que lo limitan.	OE4. Diseñar materiales didácticos y tareas útiles para la introducción y desarrollo del pensamiento funcional en Educación Primaria.

En relación a la descripción del pensamiento funcional de los estudiantes (OG2-EDU2013- 41632-P y OG1- EDU2016- 75771-P), en los cuatro estudios se evidenció las formas que emplean los estudiantes para representar la relación entre las variables. En el Estudio 1 se describen detalladamente los significados asociados a las representaciones convencionales del álgebra cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez a ellas. Mientras que en los estudios 2, 3 y 4 se centran en el estudio de las formas personales de representación, mostrando que los estudiantes manifiestan su pensamiento funcional de diversos modos, que no siempre coinciden con los propuestos en las tareas. A través de la observación de las múltiples representaciones empleadas por los estudiantes se puede evidenciar su potencial para pensar algebraicamente.

Sobre el desarrollo de materiales (OG3-EDU2013- 41632-P y OG2- EDU2016-75771-P), en los cuatro estudios se describen las tareas que favorecieron el desarrollo del pensamiento funcional de los estudiantes y la expresión de la generalización recurriendo a cantidades indeterminadas. En el primer estudio se destaca el rol de las sentencias verdadero o falso. En el estudio 2 se muestra los beneficios de fomentar la justificación oral y escrita a través de tareas que involucran distintos sistemas semióticos. En el estudio 3, se evidencia cuáles son las preguntas que ayudan a generalizar y representar la relación funcional involucrada en los problemas presentados. Finalmente, en el estudio 4 se caracterizan los problemas que favorecen las estrategias funcionales.

6.2. Contribuciones Específicas de la Investigación y Aportes para la Docencia

En los resultados que se han reportado en este trabajo se destacan dos principales contribuciones de especial relevancia para la docencia.

En primer lugar, adoptando una perspectiva multimodal del pensamiento se evidencian diversas formas en las que los estudiantes representan la relación entre las variables involucradas en los problemas propuestos. Al identificar y describir los medios semióticos empleados por los estudiantes se contribuyó a describir el proceso de generalización seguido por estos y descubrir sus posibilidades de pensar algebraicamente. El análisis de los signos y su representación, por una parte, permitió entender cómo los estudiantes conocen y comprenden los objetos matemáticos y, por otra, permitió observar qué elementos de la función están presentes en sus respuestas.

Mostrar el proceso de generalización y los medios semióticos que emplean los estudiantes es una información relevante para los docentes, quienes pueden observar en sus estudiantes respuestas o actuaciones similares y en vez de interpretarlas como una limitante, pueden potenciarlas para que los estudiantes confíen en sus capacidades de expresión y de forma progresiva adopten otros medios de representación más sofisticados. En el contexto del pensamiento algebraico, en la medida que se incentiva a los estudiantes a tener confianza en la expresión de sus ideas y surgen múltiples representaciones de la misma cosa, la expresión de la generalización es más fácil (Mason, 1996). Asimismo, es importante que los maestros actúen atendiendo a lo que los estudiantes hacen y dicen, que se sensibilicen con sus experiencias y los escuchen.

En segundo lugar, tal como fue mencionado en la presentación de esta tesis, una línea abierta de investigación es caracterizar las tareas que fomentan el pensamiento algebraico (Dörfler, 2008; Lannin, 2005) y responder a la interrogante de *cómo* introducir el álgebra en primaria. Otro aporte de esta tesis tiene relación con esto, ya que se caracterizó las tareas considerando distintos elementos (la interacción social, los medios semióticos involucrados, el tipo de justificación solicitada y las características del enunciado del problema). En coherencia con la metodología seguida, se buscó proporcionar información convincente para que los profesores den sentido a su experiencia en aula (Confrey, 2006).

La originalidad de esta tesis tiene relación con los elementos que se consideraron para caracterizar las tareas, entre ellos la justificación y su relación con los medios semióticos (propuestos en las tareas y los que efectivamente emplean los estudiantes). Promover la justificación en el aula nos llevó a generar instancias de comunicación en las que identificamos cómo los estudiantes pensaban y se expresaban a través de signos. En particular, cómo pensaban y hablaban sobre las funciones. Otros estudios solo proponen tareas que involucran números y simbolismo alfanumérico. En este trabajo se evidenció que la existencia de variedad de medios semióticos permitió abordar la situación con uno que les resultara familiar, así como justificar y responder a las preguntas aun cuando algo les era difícil de entender. También el análisis de las características de los enunciados de los problemas fue una contribución de esta investigación dada la poca evidencia al respecto.

La caracterización de las tareas tiene una gran implicancia para la docencia dado que ofrece oportunidades para que los docentes reflexionen sobre sus propias prácticas y evalúen si están presentando tareas variadas y ricas a los estudiantes. Los docentes pueden tomar como referencia las actividades descritas extensamente en el marco metodológico y los distintos estudios presentados en el Capítulo 4. Se busca motivar a los docentes a comprender cómo, cuándo y porqué nuestra propuesta de enseñanza puede funcionar en el aula.

6.3. LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

En primera instancia nos referiremos a la generalización de los resultados. Los estudios que componen esta Tesis Doctoral se realizaron bajo el paradigma de la investigación de diseño y como tal sus resultados no pretenden ser generalizados directamente. Se comparte la idea de que los fenómenos educativos son sensibles al contexto, por tanto, se pretende que las referencias reales descritas en los distintos capítulos de esta tesis orienten la acción futura a través de la reflexión (Radford y Sabena, 2015). No se pretende que los resultados sean directamente generalizables a otros contextos sin que haya una reflexión de las evidencias. Tal como menciona Cobb (2000), es importante notar que los fenómenos estudiados en los experimentos de enseñanza son ejemplos situados en una realidad local, por tanto, para poder ser replicados en otras realidades es importante que los docentes o investigadores comparen las evidencias proporcionadas con el contexto al cual quieren llevar a cabo.

Sobre las limitaciones identificadas, una de estas tiene relación con el tiempo. En los dos experimentos de enseñanza implementados solo se realizaron cuatro sesiones de clases. Si bien esta investigación ofrece ejemplos interesantes de cómo los estudiantes pueden dar sentido a la notación para expresar cantidades indeterminada, este tiempo no fue suficiente para trabajar con mayor profundidad la habilidad de expresar la relación funcional y lograr que los estudiantes conectaran sus representaciones personales con las representaciones convencionales del álgebra. A su vez, el límite de tiempo no permitió discutir sobre cómo mejorar la expresión escrita de las respuestas y justificaciones de los estudiantes. En esta tesis se evidenció que las respuestas escritas proporcionan información útil sobre el pensamiento de los estudiantes, pero deben ir acompañadas de explicaciones orales porque muchas veces no es evidente los motivos por las que los estudiantes las propusieron, es por esto que una línea futura de investigación es buscar propuestas que favorezcan la comunicación escrita.

Otra limitación tiene relación con las posibilidades de realizar un seguimiento más profundo al trabajo de cada estudiante a través de grabaciones que captaran lo que realizaban en cada momento. En nuestros trabajos contamos con una cámara que registraba el trabajo de toda la clase y otra cámara móvil que registraba la actividad realizada en los grupos, sin embargo, se podría ampliar las evidencias al realizar un seguimiento más individualizado que permita estudiar con más detalle cómo cada estudiante construye, da sentido y expresa la generalización de las relaciones que identifican.

Una línea abierta que se desprende de los resultados del Estudio 2 es evidenciar cómo el pensamiento funcional podría favorecer una visión estructural de expresiones aritméticas. El desarrollo de la visión estructural de expresiones aritméticas ha sido estudiado en el contexto de la aritmética generalizada (Knuth et al., 2005; Molina y Mason, 2009) y se ha evidenciado que la estructura de las expresiones aritméticas en educación primaria ayuda a comprender el álgebra en secundaria (Kieran, 1989; 2018). La inferencia de los resultados del Estudio 2 es que el pensamiento funcional y la aritmética generalizada están relacionadas y es necesario profundizar en el estudio de la relación entre el pensamiento funcional y el pensamiento relacional. Así conectar los distintos enfoques que se distinguen en la literatura para abordar la enseñanza del álgebra escolar.

Por otro lado, dado que el álgebra se ha implementado en primaria en currículos de distintos países, otra línea abierta de investigación es implementar propuestas de enseñanza y aprendizaje en distintos contextos y comparar los resultados obtenidos. Estas comparaciones favorecerían la caracterización de las tareas y permitirían definir con mayor detalle posibles trayectorias para desarrollar el pensamiento algebraico de los estudiantes. Finalmente, desde la perspectiva de la formación docentes y desarrollo profesional se podría considerar la participación de docentes que imparten clases en primaria. Motivarlos a participar del diseño e implementación de la investigación y discutir con ellos cuáles serían los modos más apropiados para desarrollar el pensamiento funcional de estudiantes cuyos marcos curriculares explicitan el desarrollo el pensamiento algebraico.

REFERENCIAS

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood, 45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Alsina, Á. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8*(1), 1-19.

American Psychological Association. (2020). *Publication Manual of the American Psychological Association* (7ma ed.). Autor.

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 111-129. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2015). *Australian Curriculum. Mathematics: Sequence of content F-10.* Autor.

Ayala-Altamirano, C. (2016). *Desigualdades e inecuaciones en textos escolares chilenos de educación básica: análisis praxeológico según la teoría antropológica de lo didáctico* (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Los Andes, Chile.

Ayala-Altamirano, C. (2017). *Evolución del significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales* (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Granada, España.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2017). El significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales. [Resumen de presentación] Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico, en el *XXI Simposio de Investigación en Educación Matemática.* SEIEM.

https://www.seiem.es/docs/grupos/pna/SEIEM_2017_XXI_PNA_HMEM.pdf

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2018a). Representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de tercero de primaria: El caso de la variable dependiente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, Á. Aguilar-González,

P. Alonso, F. J. García y A. Burno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 141-150). SEIEM.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2018b). Representation of indeterminate quantities in functional contexts by third grade students. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 16). PME.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2019). Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz- Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 183-192). SEIEM.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020a). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1271-1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020b). Modos de dar sentido a una relación funcional por estudiantes de cuarto de primaria. En M. P. Bermúdez (Ed.), *Libro de Abstracts 8th International Congress of Educational Sciences and Development* (pp. 184-185). AEPC.

Ayalon, M. y Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, *49*(1), 163-173. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y graficas*. Síntesis.

Banes, L. C., López, G., Skubal, M. y Perfecto, L. (2017). Co-constructing written explanations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 23*(1), 30-38. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.23.1.0030

Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-Based research: putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 1-14. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1

Bartolini-Bussi, M. y Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artefacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M.

Bartolini-Bussi, G.A. Jones, R.A. Lesh, B. Sriraman y D. Tirosh (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education, (2nd revised edition)* (pp. 746-783). Routledge Handbooks.

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra: Accounting for the reasonings and notations developed by students. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 69-78). University of Melbourne.

Bermejo, V. (2005). Microgénesis y cambio cognitivo: adquisición del cardinal numérico. *Psicothema, 17*(4), 559-562.

Bills, L. y Rowland, T. (1999). Examples, generalisation and proof. *Research in Mathematics Education*, *1*(1), 103-116. https://doi.org/10.1080/14794809909461549

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M. L. (2017). Algebraic reasoning in Grades 3-5. En M. Battista (Ed.), *Reasoning and sense making in grades 3-5* (pp. 67-102). NCTM

Blanton, M.L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En A. Berit y M. Johnsen (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education: A global dialogue from multiple perspective* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181-202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Blanton, M. L., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis, F. y Confrey, J. (2007). Early Algebra. En V. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to a technological future* (pp. 7-14). The Mathematical Association of America.

Blanton, M. L., Stephens, A. C., Knuth, E. J., Gardiner, A. M., Isler, I. y Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039.

Boaler, J. y Greeno, J. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematics worlds. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 171-200). Ablex Publishing.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A. Coxforf y A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12: 1988 yearbook* (pp. 20-32). NCTM.

Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología – Segunda época (UNLP), 14,* 37-57.

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-301). Lawrence Erlbaum Associates.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. y Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation/Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología*, *36*(1), 138-165. https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17(1), 34-63*. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction* (Vol. 59). Harvard University Press.

Cai, J. y Knuth, E. J. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 37(1), 1-4*. https://doi.org/10.1007/BF02655891.

Cai, J. y Howson, A. G. (2012). Toward an international mathematics curriculum. En M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y K. S. F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education research* (pp. 949-974). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_29

Callejo, M. L., García-Reche, Á. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano en estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) en problemas de generalización lineal. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 5-25.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de Educación Primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). *Memoria del proyecto de investigación I+D+i "Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico", con referencia EDU2013-41632-P. Documento no publicado.* Universidad de Granada, España.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E.

Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas *PNA*, *2*(3), 137-151.

Cantoral, R., Farfán, R.-M., Lezema, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *RELIME*, *9*(4), 83-102.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol.2, pp. 669-705). NCTM.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2010). Algebraic reasoning in elementary school classrooms. En D. Lambdin y F. K. Lester (Eds.), *Teaching and learning mathematics: Traslating research to the classroom* (pp. 23-29). NCTM.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 191-208). Routledge.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: the global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 107-138). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 3–22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Horsori.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Eduación Matemática en la Infancia*, *6*(2), 1-13.

Castro, E, Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361-371.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: Insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(1), 57-76. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9803-x.

Chua, B. L. (2016). Justification in Singapore secondary mathematics. En P. C. Toh, y B. Kaur (Eds.), *Developing 21st century competencies in the mathematics classroom* (pp. 165-188). World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789813143623_0010.

Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 115-122). DCU Institute of Education y ERME.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiment in collaboratuin with teachers. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. Lesh y J. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Yackel, E. y McClain, K. (2012). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Routledge.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009.

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15-42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (1.ª ed., pp. 135-152). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511816833.010.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research. En Anthony E Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research and design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Lawrence Erlbaum Associates.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 23-37. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0066-8.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning early algebraization. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education* (pp. 187-214). Springer.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME, 9*(4), 177-196.

D'Amore, B., Pinilla, M. F., Iori, M. y Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177-212. https://doi.org/10.12802/relime.13.1822.

Davis, R. (1989). Research studies in how humans think about algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 266-274). NCTM y Laurence Erlbaum Associates.

Davydov, V. V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*, *5*(1), 27-37. https://doi.org/10.2753/RES1060-9393050127.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. V. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 61-85). Kluwer Academic Publishers.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: Comments and reflections. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 143-160. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0071-y.

Driscoll, M. J. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Heinemann.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37-65.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Springer.

Earnest, D. (2014). Exploring functions in elementary school: Leveraging the representational context. En K. Karp (Ed.), *Annual perspectives in mathematics education: Using research to improve instruction* (pp. 171-179). NCTM.

Ellis, A. B. (2007a). A Taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221-262. https://doi.org/10.1080/10508400701193705

Ellis, A. B. (2007b). Connections between generalizing and justifying: students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 194-229. https://doi.org/10.2307/30034866

English, L. D. y Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(1), 53-71.

Finnish National Board of Education. (2014). *National core curriculum for basic education: National core curriculum for basic education intended for pupils subject to compulsory education*. Finnish National Agency for Education.

Flick, U. (2012). *Introducción a la investigación cualitativa*. Morata.

Freiman, V. y Fellus, O. O. (2021). Closing the gap on the map: Davydov's contribution to current early algebra discourse in light of the 1960s Soviet debates over word-problem solving. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09989-6.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, *5*(4), 391-412. https://doi.org/10.1007/BF01420653.

Fujii, T. y Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 127-140). NCTM.

Furinghetti, F. y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: A little difference? En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 368-375). PME.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics*, *1*(3), 4-11.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Cambridge University Press.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebraización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (6a ed). McGraw-Hill.

Hitt, F. y Quiróz-Rivera, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*, *73*(1), 151-175.

Ingram, J., Andrews, N. y Pitt, A. (2019). When students offer explanations without the teacher explicitly asking them to. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(1), 51-66. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9873-9.

Iori, M. (2014). Matemática y semiótica en el aula: Un punto de vista necesario. En C. J. Mosquera Suárez (Ed.), *Miradas contemporáneas en educación: algunos puntos clave para el debate* (pp. 27-44). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra with Understanding. En E. Fenema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from a engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435-11.

Kaput, J. J. (2009). Building intellectual infrastructure to expose and understand ever-increasing complexity. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 211-215. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9169-6.

Kaput, J. J., Blanton, M. L. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 33-56). NCTM y Laurence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). S. A. E. M. Thales.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Sense Publishers.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 579-593). Springer.

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 27-32). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 79-105). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2005). Middle School Students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 37*(1), 68-76.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 259-276). Springer.

Knuth, E., Choppin, J. y Bieda, K. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. En D. Stylianou, M. L. Blanton, y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 153-170). Routledge.

Krummheuer, G. (2013) The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the contex of the development of mathematical thinking in the early years. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 249-265. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9471-9.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* University of Chicago Press.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). John Murray.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3.

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(*3*), 3-28. https://doi.org/10.1007/BF03217440.

Larson, R. y Hostetler, R. (2008). *Precálculo* (7ª ed.). Reverté Ediciones.

Larsson, K. y Pettersson, K. (2015). Discerning multiplicative and additive reasoning in co-variation problems. En X. Sun, B. Kaur y J. Novotná (Eds.), *Proceedings of the International Commission of Mathematical Instruction (ICMI) Study 23 Conferenceon the Primary Mathematics Study on Whole Numbers* (pp. 559-566). University of Macau.

Lee, K., Ng, S. F. y Bull, R. (2018). Learning and solving algebra word problems: The roles of relational skills, arithmetic, and executive functioning. *Developmental psychology*, *54*(9), 1758-1772. https://doi.org/10.1037/dev0000561.

Leont'ev, A. N. (1974). the problem of activity in psychology. *Soviet Psychology*, *13*(2), 4-33. https://doi.org/10.2753/RPO1061-040513024.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 113-120. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90026-8.

Lins, R. y Kaput, J. J. (2004). the early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En H. Chick y K. Stacy (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra The 12th ICMI Study* (pp. 45-70). Springer.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perception of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7(*1), 69-85. https://doi.org/10.1007/BF03217276.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1–19.

Malara, N. A. y Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with*

5- to 12-year-olds: the global evolution of an emerging field of research and practice (pp. 51-77). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_3.

Martí, E. y Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: La adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje*, 23(90), 11-30. https://doi.org/10.1174/021037000760087946.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernarz, C. Kieran, y L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5.

Mason, J. (2003). Generalisation and algebra: Exploiting children's powers. En L. Haggarty (Ed.) *Aspects of teaching secondary mathematics* (pp.105-120). Routledge.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. Kaput, D.W. Carraher y M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2017). Overcoming the Algebra Barrier: Being Particular About the General, and Generally Looking Beyond the Particular, in Homage to Mary Boole. En S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 97-117). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6.

Mason, J. (2018). Structuring structural awareness: A commentary on Chap. 13. En M. G.Bartolini-Bussi y X. H. Sun (Eds.) *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades* (pp. 325-340). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_14-

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277-289. https://doi.org/10.1007/BF00312078.

Mason, J., Grahamn, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. The Open University Press.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Sage Publications.

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2004a). *Designing and using mathematical tasks*. Tarquin.

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (Eds.). (2004b). *Fundamental constructs in mathematics education*. Routledge Falmer.

McEldoon, K. L. y Rittle-Johnson, B. (2010). Assessing elementary students' functional thinking skills: The case of function tables. En P. Brosnan, D. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the Thirty Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Optimizing Student Understanding in Mathematics* (p. 202). ERIC.

Merino, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el curriculo básico de la Educación Primaria. *BOE, 52*, 19349-19.420). Madrid, España: Autor.

Ministerio de Educación de Chile. (2012a). *Bases curriculares educación básica*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile (2012b). *Matemática. programa de estudio. Primer año básico*. Autor.

Mitchell, J. (2001). Interactions between natural language and mathematical structures: The case of «wordwalking». *Mathematical Thinking and Learning*, *3*(1), 29-52. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0301_02.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M. (2012). *Proyecto investigador. Plaza de Profesor Titular de Universidad.* Departamenteo de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *La Gaceta de la RSME, 17*(3), 559-579.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2016). *Memoria del proyecto de investigación I+D+i "Pensamiento funcional en Educación Primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización", con referencia EDU2016-75771-P.* Documento no publicado. Universidad de Granada, España.

Molina, M., y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez y I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.

Molina, M. y Castro, E. (2021). Third grade students' use of relational thinking. *Mathematics*, *9*(2), 187. https://doi.org/10.3390/math9020187.

Molina, M. y Mason, J., (2009). Justifications-on-demand as a device to promote shifts of attention associated with relational thinking in elementary arithmetic. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(4), 224-242. https://doi.org/10.1080/14926150903191885.

Molina, M., Ambrose, R. y Del Río, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade spanish Students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs.* (pp. 261-280). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_11.

Molina, M., Castro, E. y Mason (2008). Elementary students' approaches to solving true/false number sentences. *PNA, 2*(2), 75–86.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29*(1), 75-88.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(6), 1137-1156. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9739-5.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472.

Morgan, C., Craig, T., Schuette, M. y Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: An overview of research in the field. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education, 46*(6), 843-853. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0624-9.

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building and knowledge forum: Grade 4 students collaborate to solve linear generalizing problems. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 193-199). PME.

Moss, J. y McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_16

Moss, J., Beatty, R., Barkin, S. y Shillolo, G. (2008). What is your theory? What is your rule? Fourth graders build an understanding of function through patterns and generalising problems. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 155-168). NTCM.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Autor.

National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers [NGA Center y CCSSO]. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* NGA & CCSSO.

Ontario Ministry of Education and Training. (2020). *The ontario curriculum grades 1–8: Mathematics*. Ministry of Education.

Pang, J. y Kim, J. (2018). Characteristics of korean students' early algebraic thinking: a generalized arithmetic perspective. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 monographs* (pp. 141-165). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_6.

Panizza, M. (2018). *Las transformaciones semióticas en los procesos de definición de objetos matemáticos*. [Tesis Doctoral]. Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.

Pinto, E. (2019). *Generalización de estudiantes de 3º a 6º de Educación Primaria en un contexto funcional del álgebra escolar* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En A. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018a). *Generalization in fifth graders within a functional approach.* PNA, *12*(3), 173-184.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018b). Structures and generalisation in a functional approach: The inverse function by fifth graders. En Gómez, D. M. (Ed.), *Proceedings of the First PME Regional Conference: South America* (pp. 89-96). PME.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018c). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457-466). SEIEM.

Pinto, E., Cañadas, M. C. (2020) Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal, 33* (1), 113–134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, Juan A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). SEIEM.

Pitta-Pantazi, D., Chimoni, M. y Christou, C. (2020). Different types of algebraic thinking: an empirical study focusing on middle school students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(5), 965-984. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10003-6.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Prediger, S., Gravemeijer, K. y Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *47*(6), 877-891. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. y Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education. ICME-13 Topical Surveys.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31370-2_1.

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra: una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática, 11*(3), 25-53.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *9*(4), 103-129.

Radford, L. (2006b). Introducción. semiótica y educación matemática. *RELIME*, *9*(4), 7-21.

Radford, L. (2006c). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En J.Alatorre, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 83-96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111-126. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Springer. http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-17735-4_17.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Comares.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2.

Radford, L. (2018a). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. *PNA*, *12*(2), 61-80.

Radford, L. (2018b). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 3-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1.

Radford, L. (2020). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa.*, *5*(2), 15-31.

Radford, L. y Sabena, C. (2015). The question of method in a vygotskian semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 157-182). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7.

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. En *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91–95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y.

Radford, L. y Grenier, M. (1996). On dialectical relationship between signs and algebraic ideas. En Puig, L. y Gutiérrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 179-186). PME

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En R. Leinhardt, R. Putnam, y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis de arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Lawrence Erlbaum Associates.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21-40). Pirámide.

Rico, L., Castro, E. Castro, E, Coriat, M. Marín, A. y Puig, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Editorial Horsori.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas*, *70*(1), 48-54.

Rivas, M. U. (1996). Frege y Peirce: en torno al signo y su fundamento. *Anuario Filosófico. Universidad de Navarra*, *29*(3), 1211-1224.

Rivera, F. D. (2017). Abduction and the emergence of necessary mathematical knowledge. En L. Magnani y T. Bertolotti (Eds.), *Springer Handbook of Model-Based Science* (pp. 551-567). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-30526-4_25.

Rivera, F. D., y Rossi Becker, J. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(2), 140-155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001.

Sabena, C. (2018a). Multimodality and the semiotic bundle lens: a constructive resonance with the theory of objectification. *PNA*, *12*(4), 185-208.

Sabena, C. (2018b). Exploring the contribution of gestures to mathematical argumentation processes from a semiotic perspective. En G. Kaiser, H. Forgasz, M.

Graven, A. Kuzniak, E. Simmt y B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 541-559). Springer.

Saussure, F. (1995). *Cours de linguistique générale*. Payot.

Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The Mathematics Teacher, 81*(6), 420-427.

Simon, M. A. y Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 3-31. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90036-X.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. En J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). NCTM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460.

Stacey, K. y MacGregor, M. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, *7*(1), 69-85. https://doi.org/10.1007/BF03217276.

Staples, M. E., Bartlo, J. y Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. En *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(4), 447-462. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: illustrations and implications. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177-194). Kluwer Acedemic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47201-5_9.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of* *research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Lawrence Erlbaum Associates.

Stephan, M. L. (2015). Conducting classroom design research with teachers. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *47*(6), 905-917. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0651-6.

Stephens, A. C., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. y Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching Children Mathematics, 22*(2), 92-101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092.

Stephens, A. C., Ellis, A., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education. Third handbook of research in mathematics education.* (pp. 386-420). NCTM.

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. y Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 143-166. https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636.

Stephens, A. C., Isler, I., Marum, T., Blanton, M. L., Knuth, E. J. y Gardiner, A. M. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. En L. R. Van Zoest, J.-J. Lo y J. L. Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 821-828). Western Michigan University.

Strachota, S., Knuth, E. y Blanton, M. L. (2018). Cycles of generalizing activities in the classroom. En C. Kieran (Ed.), *teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: the global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 351-378). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_15.

Stylianides, A. (2015). The role of mode of representation in students' argument constructions. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* (pp. 213–220).

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.

Swan, M. (2020). Design research in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 192-195). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_180.

The Design-Based Research Collective [DBRC]. (2003). Design-based research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Thompson, P. W. y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). NTCM.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). *Diseño de un cuestionario de diagnótico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra*. *14*(3), 351-363.

Ureña, J. (2021). *Representaciones de generalización y estrategias empleadas en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales. Una investigación con estudiantes de primaria y secundaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representaciones de la generalización de una relación funcional y el vínculo con la mediación del entrevistador. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 570-614. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática, 6*(3), 90–108.

Ursini, S. (2001). General methods: A way of entering the world of algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (Vol. 22, pp. 209-229). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_12.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford y A. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). NCTM.

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios,* 39(1), 65-76. https://doi.org/10.17227/01234870.39folios65.76.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193-215.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 189-199). La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (2009) The theory of conceptual fields. *Human Development*, *52*(2), 83–94. https://doi.org/10.1159/000202727.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education,* *20*(4), 356–366. https://doi.org/10.2307/749441.

Vygotski, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (Trad. S. Furió). Crítica. (Trabajo original publicado en 1978).

Vygostki, L. S. (1981) The instrumental method in psychology. En J. V. Wertsch (Ed.) *The concept of activity in Soviet Psychology* (pp. 134-143). Sharpe. (Trabajo original publicado en 1930).

Vygotski, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje* (Trad. J. Tosaus). Paidos. (Trabajo original publicado en 1986).

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *The Mathematics Teacher*, *76*(7), 474-479.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. Chick y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 305-312). PME.

Warren, E. y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8-year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171-185. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84.

Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 73–108). Sense. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_3.

Wertsch, J. V. (ed.) (1981). *The concept of activity in soviet psychology.* Sharpe.

Wertsch, J. V. (1988). *Vygotsky y la formación de la mente social*. (Trad. J.Zanón y M. Cortés). Ediciones Paidos. (Trabajo original publicado en 1985)

Wertsch, J. V. (1993). *Voces de la mente: un enfoque sociocultural para el estudio de la Acción Mediada.* (Trad. A. Silvestri). Visor. (Trabajo original publicado en 1991).

Wertsch, J. V. (1995). *Vygotsky and the social formation of mind* (J. Zanón & M. Cortés, Trans.; 2nd ed.). Ediciones Paidós. (Original work published 1985).

Wertsch, J. y Stone, C. A. (1978). Microgenesis as a tool for developmental analysis. *Quaterly Newsletter Laboratory of Comparative Human Cognition*, *1*(1) 8-10.

Yakubinskii, L.P. (1923). *O dialogicheskoi rechi* [On Dialogic Speech]. Trudy Foneticheskogo Instituta Prakticheskogo Izucheniya.

Zapatera, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *RELIME*, *21*(1), 87-114. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114.

Zazkis, R. y Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(4), 429-439. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00006-1.

ANEXOS

Anexo 1. Extended summary

CONCEPTION AND REPRESENTATION OF INDETERMINATE QUANTITIES BY PRIMARY SCHOOL STUDENTS FROM A FUNCTIONAL APPROACH

In this Doctoral Thesis our general aim is to describe and to analyze the process of representation of the generalization of functional relations carried out by Primary students (8 to 10 years old) and to relate this process with the characteristics and demands of the proposed tasks. This study is part of the research line on school algebra. Adopting a historical-cultural semiotic perspective and a multimodal perspective of thinking, it complements other research on functional thinking in the context of the Early algebra approach.

In order to study students' functional thinking, we assume that thinking is a multimodal and semiotically mediated phenomenon, i.e., thinking is not only a mental activity but a process mediated and evidenced by language, gestures, rhythm and all the means used to interact with the environment (Radford et al., 2009). Furthermore, we consider that learning is a kind of action mediated by signs and limited by the situation in which it takes place (Leont'ev, 1974; Vygotsky, 1978/1979; Wertsch, 1981), i.e., it depends on the needs, demands and motives of the activity.

In this context, this Doctoral Thesis is presented in the modality of a group of publications. It is structured in six chapters followed by a list of bibliographical references and appendices.

RESEARCH PROBLEM AND OBJECTIVES

Chapter 1 presents the research problem. Its relevance is justified and the motivations that encouraged the author to carry out this research are explained. The objectives and questions which guide the research are also presented.

From a research perspective, there are three main reasons for conducting this research. Firstly, there is evidence that tasks involving functional relationships develop a sense of variability and contribute to the construction of a solid learning base for further studies of algebra (Blanton, Brizuela et al., 2015; Blanton & Kaput, 2011; Cañadas et al., 2016). Secondly, an open line of research is to deepen the study of students' personal representations and the process followed towards the use of conventional forms of representation (Dörfler, 2008; Kaput, 2009). Finally, what, when and how to introduce algebra are still points of discussion (Freiman & Fellus, 2021), which is why we intend to contribute to the characterization of the tasks that foster algebraic thinking.

From a curricular perspective, since school algebra has been incorporated in the curricular guidelines of several countries (e.g. Australia, Canada, Chile, Spain, United States, Finland) it is relevant to report about: the development of algebraic thinking of elementary school students, the first meanings and reactions of such students when dealing with various algebraic elements and the characteristics of the proposed tasks that favors the development of algebraic thinking, among others issues. As a consequence of the above, from a teaching perspective we aim to provide relevant information to teachers about what students do when faced with tasks that foster algebraic thinking and how such tasks are characterized. For this purpose, we consider factors such as social interaction, the semiotic means involved, the type of justification requested and the characteristics of the statements of the problems presented.

Based on the aforementioned the research general and specific objectives were defined as they appear in Table A1. This table illustrates how the specific objectives were approached in each of the studies that composed the research developed (presented in Chapter 4).

Table A1

Relationship between research objectives and studies

General objective	Specific objectives	Studies			
		1	2	3	4
G.O. Describe and analyze the process of representation of the generalization of functional relations performed by students of Primary	**O.1.** Identify students' conceptions of letters as representations of indeterminate quantities, based on their oral interventions and written productions in the framework of a teaching experiment in which functional generalization tasks are proposed.	X			

Table A1

Relationship between research objectives and studies

General objective	Specific objectives	Studies			
		1	2	3	4
Education and relate this process with the characteristics and demands of the proposed tasks.	**O.2.** Describe how students' conceptions of letters as representations of indeterminate quantities change.	x			
	O.3. Identify the representations used by students to express the functional relationship involving indeterminate quantities.	x	x	x	x
	O.4. Describe the changes in the representations of the functional relationship involving indeterminate quantities, manifested by the students.		x	x	
	O.5. Relate the representations used by students to express indeterminate quantities and the characteristics of the proposed tasks.	x	x	x	x

THEORETICAL FRAMEWORK

Chapter 2 contains the theoretical framework that supports this research. Following the ideas of Vygotsky and Leont'ev, our characterization of learning emphasizes the role of social interaction (Vygotsky, 1978/1979; Wertsch, 1991/1993) and semiotic means (Vygotsky, 1930/1981). In addition, learning is described as a form of action that is characterized by being limited by the situation in which it occurs, i.e., depending on the needs, demands and motivations of the activity (Leont'ev, 1974; Wertsch, 1981).

Our specific theoretical assumptions include the definition we adopt of algebraic thinking, functional thinking, generalization, representation and justification. In this study we assume that algebra refers to indeterminate quantities (unknowns, variables, parameters or generalized numbers) which are used in an analytical manner. Analyticity is key to differentiate what is arithmetical from what is algebraic. Thinking algebraically involves reasoning about generality, recognizing the underlying algebraic structure in a situation and relations between quantities. In addition, algebra resorts to idiosyncratic or specific modes of representation culturally evolved (Radford, 2018).

On the other hand, functional thinking is part of algebraic thinking and focuses on the study of functions and families of functions in real-life situations (Cañadas & Molina, 2016). It includes the generalization of relationships between quantities that covary, the expression of these relationships, and the use of these expressions to analyze the behavior of a function (Blanton et al., 2011; Blanton & Kaput, 2011). Functional thinking might be evidenced mainly when students establish covariation or correspondence relationships between variables involved in problems (Blanton & Kaput, 2011; Smith, 2008). Students might also evidence recurrence relationships, but we only consider them as functional when they connect both variables involved in the problem.

Generalization can be understood as a process (generalizing) as well as a product (generalization). The product of generalization is the form in which the generality is expressed, i.e., it is the result of this process (Ellis, 2007). The process implies: to identify elements common to all cases, to extend reasoning further than the range in which it was originated, to derive more wider results than the particular cases and to provide a direct expression that allows to obtain any term (Ellis, 2007; Kaput, 1999; Radford, 2013).

In the expression of the functional relation and its generalization, students can resort to different semiotic means. We relate the highest degree of sophistication in the expression of algebraic ideas to the idea of semiotic contraction. This means that there is a concentration of meanings in the least amount of signs through which generality is expressed (Radford, 2018b; Radford & Sabena, 2015). In general, we share the view that algebraic thinking may be cultivated before algebraic notation is introduced (Carraher & Schliemann, 2010; Radford, 2018b).

Finally, we consider that justification is a skill that develops gradually (Stephens, Ellis et al., 2017). We understand it as a social process that allows explaining, verifying and systematizing mathematical knowledge by making used of ideas, definitions, mathematical properties that are conceptually available to the classroom community as well as the representations used to express them. Promoting justification helps to refine generalization (Stephens, Ellis et al., 2017).

METHODOLOGICAL FRAMEWORK

Chapter 3 describes the methodological framework of the research performed in this Doctoral Thesis. Methodologically, we follow the guidelines of design research. In general terms, the data analyzed come from two teaching experiments implemented in two schools located in the province of Granada and carried out in the framework of two research projects of the National R&D Plan (EDU2013-41632-P and EDU2016-7477-P). The objectives of these experiments are to investigate the capabilities of elementary school students when solving problems involving a functional relationship, as an approach to algebraic thinking. In particular, these projects intend to deepen in the description of functional thinking and to develop materials, tasks and strategies that favor the development of such thinking. In order to explore the students' abilities, class sessions were implemented and semi-structured interviews were conducted.

Of the four studies that constitute this thesis, one is framed in the first teaching experiment (2014/2015) and the other three in the second (2017/2018). In the first study we worked with a group of 25 students in the third year of Primary Education (8 to 9 years old). In the other studies we worked with students in the fourth year of Primary Education (9 to 10 years old): the entire group of 25 students in the case of studies 2 and 4, and three of those students in study 3.

The design of the class sessions included three moments: presentation of the general situation (large group), small group or individual work and discussions of the students' responses. The moments were not linear: after a group discussion the class could end, return to small group work or continue to address a new task.

The questions proposed in each session were structured to guide students toward generalizing the functional relationship by moving from the particular to the general through three moments: a) identifying the elements common to all cases, b) extending the reasoning beyond the range in which it originated, and c) obtaining general results (Ellis, 2007a; Kaput, 1999; Radford, 2013).

In addition, students were motivated to explore, formulate, revise and validate conjectures, organize data, and identify a structure (Blanton, 2008; Cañadas & Castro, 2007; Pinto & Cañadas, 2018). These actions were expected to lead students to raise conclusions through reasoning such as abduction, induction or deduction. In Table A2, the objectives of each study, the sessions or interviews analyzed and the information collection instruments are presented.

Table A2

General information about the methodology of the studies

Characteristic	Study 1	Study 2	Study 3	Study 4
Objective	Describe the use and meanings attributed to letters by third grade elementary school students when faced with verbal problems requiring to generalize a functional relationship.	Analyze the process of expressing a functional relationship and its relation to oral and written justifications.	Describe different ways of expressing the generalization of a functional relationship through personal and/or conventional representations.	Characterize problem situations that favor functional strategies and students' ability to represent generalization.
Participants	25 third grade students.	25 fourth grade students.	3 fourth grade students.	25 fourth grade students.
Sessions and/or interviews analyzed	Class sessions: 1, 2 and 3. (2014/2015)	Class sessions: 3 and 4. (2017/2018)	Final interviews. (2017/2018)	Initial and final interviews. All sessions. (2017/2018)
Data collection instruments	Worksheets. Transcripts of group discussions. Written productions of group discussions. Video recording.	Worksheets. Transcripts of group discussions. Written productions of group discussions. Video recording.	Interview transcripts. Written productions. Video recording of interviews.	Worksheets. Transcripts of group discussions. Video recording of sessions and interviews.

In the interviews, the students worked individually and in constant dialogue with the interviewers. A protocol detailing the type of questions to be asked and possible assistance was followed. The objective of the interviews was to deepen the knowledge of the processes carried out by the students, as well as to observe in detail each of the steps in the problem-solving process and to identify and express a functional relationship.

The data analysis of each of the studies was carried out in coherence with their objectives. In the first study, to achieve the specific objectives 1 and 2, the students' written responses and their oral interventions were analyzed. To analyze the data, two groups of categories were established in accordance with previous research: categories referring to the meanings given to letters (Blanton et al., 2017; Küchemann, 1981; Molina et al., 2018) and categories to represent indeterminate quantities (Blanton et al., 2015; Molina et al., 2018).

In the second study we conducted a qualitative analysis of the students' written responses and oral interventions to achieve the specific objectives 3, 4 and 5. We analyzed the degree of sophistication of the students' responses and justifications considering the semiotic means involved, the way they referred to the variables, how they expressed indeterminacy and the characteristics of the task.

In the data analysis in Study 3, we did a microgenetic analysis of the students' activity (Radford et al., 2009; Vygotsky, 1978/1979). As in Study 2, this study is related to the specific objectives 3, 4 and 5. The sources of information were the videotaping of the final interview, its transcription and the students' written productions. From the observation of the students' work and previous research we established two sets of categories: strategies to answer the questions (Cañadas & Fuentes, 2015; Morales et al., 2018) and actions to generalize. (Blanton, 2008; Cañadas & Castro, 2007; Dörfler, 1991; Pinto & Cañadas, 2018).

Finally, in the data analysis in study 4, we also analyzed the students' written responses and oral interventions, in this case to achieve the specific objectives 3 and 5. For this purpose, we established categories that were based on previous research that referred to how students approach problems involving functions (Blanton, 2008; Blanton & Kaput, 2011; Krutteskii, 1976; Smith, 2008; Vernaud, 2009). Next, we focused our attention on students who recognized a functional relationship and identified how they represent it. For this purpose, we used three categories proposed by Ureña et al. (2019).

COMPENDIUM OF PUBLICATIONS AND SYNTHESIS OF RESULTS

Chapter 4, Compendium of publications, contains four manuscripts (two already published, one accepted and other under review which includes the research developed in this Doctoral Thesis. The results of these studies are integrated and synthesized in Chapter 5. Below we present a brief summary of each of them based on the abstracts included in the original reports.

Study 1. Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. International Journal of Science and Mathematics Education, 18(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5.

Abstract. This article describes part of the findings of a teaching experiment whose objective is to investigate the algebraic abilities of elementary students when they solve situations that involve a functional relationship. In particular, we focus on describing the use and meanings attributed to letters by third-year primary students when faced with verbal problems related to the generalization of a functional relationship. Drawing from the functional approach to early algebra and set in Spain, the study expands on earlier research conducted on primary students' use of letters in algebraic contexts. Their initial reactions to the use of letters to represent indeterminate quantities and how those reactions changed in the course of three sessions are described. Analyses of the students' written answers together with their participation in group discussions yield qualitative data on how students associate the idea of variability with indeterminate quantities and use letters, numbers or both to represent that notion.

Keywords. Algebraic symbolism, algebraic thinking, Early algebra, functional thinking, variables

Study 2. Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (In press). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. Educational Studies in Mathematics.

Abstract. In the context of early algebra research and as part of a classroom teaching experiment (CTE), we investigated fourth grade (9- to 10-year-old) students' justifications of how they performed tasks involving the functional relationship y = 2x. We related their written justifications (part of the task) to the task characteristics, which included various semiotic systems (verbal, numerical and alphanumeric, among others) and the demand of different type of justifications. The role of classroom discussion in helping express the functional relationship orally in more sophisticated terms was also investigated. The findings showed that students' written justifications changed with the semiotic system involved in the task. Oral discussion helped students generalize in more sophisticated terms than in their written justifications, in which they omitted information or used less precise language.

Keywords, Early algebra, generalization, justification, functional thinking, semiotic system

Study 3. Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (under review). El Proceso de Generalización y la Generalización en Acto. Un Estudio de Casos.

Abstract. Drawing on a microgenetic analysis of the generalization process of three fourth-grade students, we describe how they construct, make sense of and express a functional relationship in a problem-solving context. The results contribute to the understanding and reflection on the inclusion of the functional approach in primary school classrooms. Different degrees of sophistication in the generalization process are distinguished according to the semiotic means employed by the students. One of the students expresses the generalization explicitly while the other two students express it implicitly through their actions. The latter suggests that these two students have shown an incipient awareness of the indeterminacy or presence of analyticity, which in this study has been referred to as generality in action.

Keywords. primary education; generalization; functional thinking; semiotic means.

Study 4. Ramírez, R., Brizuela, B.M., & Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. Mathematics Education Research Journal, 33(1), 1-25. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Abstract. This article discusses the characteristics of word problems that are associated with students' use of functional strategies and their ability to represent the generalization of functions. In the context of a broader research project designed to explore and foster functional thinking among elementary school students, twenty-five grade 4 (9- to 10-year-old) students were asked to identify functional relationships in five problems involving specific or indeterminate quantities. Their responses to a number of

questions involving the generalization of the relationships in the problems were analyzed and associated to the characteristics of the problems. The type of representation of generalization used (verbal, generic, or symbolic) were also identified. Our findings indicate that grade 4 students showed potential for functional thinking prior to receiving instruction on variables and their notation. Such thinking was most effectively prompted when they worked with word problems that explicitly involved an additive function. When students generalized functional relationships, they represented them verbally or with generic examples. None of the students used symbolic representation. The originality of this study lies in the description of the specific characteristics of word problems that are associated with functional thinking; this information will prove useful to both teachers and curriculum designers. Identifying these characteristics could help build and propose tasks that encourage students to use more than one and more sophisticated strategies.

Keywords. Early algebra, Functional thinking, Generalization, Representations, Word problems

CONCLUSIONS

Finally, in Chapter 6, Conclusions, we positively evaluate the achievement of the five specific objectives that allow to reach the general objective. In the results reported in this work, two main contributions of special relevance for teaching stand out. In the first place, there is evidence of the different ways in which students represent the relationship between the variables involved in the proposed problems. Identifying and describing the semiotic means used by the students contributed to describe the generalization process followed by them and to discover their possibilities of thinking algebraically. This information is relevant for teachers: they can observe similar responses or performances in their students and instead of interpreting them as a limitation, they can encourage them to trust their expression abilities and progressively adopt other more sophisticated means of representation.

Secondly, we point out to the characterization of tasks provided distinguishing different elements (social interaction, semiotic means involved, type of justification requested and characteristics of the problem statement). Task characterization has a great implication for teaching since it offers teachers opportunities to reflect on their own practices and evaluate the tasks they present students.

This research has opened up new perspectives and lines of research. For example, showing how functional thinking could favors a structural vision of arithmetic expressions. Thus, connecting two different approaches distinguished in the literature to address the teaching of school algebra. In terms of teacher training and professional development, the participation of elementary school teachers in the design and implementation of the sessions could be considered to discuss with them about the most appropriate ways to develop functional thinking in students.

Anexo 2. Conclusions

This chapter presents the conclusions of this doctoral thesis considering the main results and conclusions of the four studies conducted. The chapter is organized in three sections. Firstly, we discuss the achievement of each of the objectives proposed in this thesis and clarify their connection to the objectives of the research projects which serve as context. Secondly, we describe the contributions of the research developed and the possible implications for teaching. Finally, we discuss possible limitations and future perspectives arising from the process of this doctoral thesis.

RESEARCH OBJECTIVES

In this report, within the functional approach to school algebra the focus was on the conceptions and representations of indeterminate quantities of third and fourth grade students. For this purpose, we characterize learning as a multimodal and semiotically mediated phenomenon. In this perspective, signs and their representation are relevant since, on the one hand, they allow us to understand how people know and understand mathematical objects and, on the other hand, they serve to make them present. Learning is originated in interaction with other people and the environment; it develops according to the demands of communication and the needs and objectives of the proposed tasks or activities. Based on the aforementioned ideas, the research objective was defined in this work as shown in Table A3. This table also illustrates how the specific objectives were approached in each of the studies that composed the research developed (presented in Chapter 4).

Table A3

Relationship between research objectives and studies

General objective	Specific objectives	Studies 1	2	3	4
G.O. Describe and analyze the process of representation of the generalization of functional relations performed by students of Primary Education and relate this process with the characteristics and demands of the proposed tasks.	**O.1.** Identify students' conceptions of letters as representations of indeterminate quantities, based on their oral interventions and written productions in the framework of a teaching experiment in which functional generalization tasks are proposed.	x			
	O.2. Describe how students' conceptions of letters as representations of indeterminate quantities change.	x			
	O.3. Identify the representations used by students to express the functional relationship involving indeterminate quantities.	x	x	x	x
	O.4. Describe the changes in the representations of the functional relationship involving indeterminate quantities, manifested by the students.		x	x	
	O.5. Relate the representations used by students to express indeterminate quantities and the characteristics of the proposed tasks.	x	x	x	x

SPECIFIC OBJECTIVES

In this section we discuss the achievement of each of the specific objectives that allow us to demonstrate the accomplishment of our general objective.

O.1. Identify students' conceptions of letters as representations of indeterminate quantities, based on their oral interventions and written productions in the framework of a teaching experiment in which functional generalization tasks are proposed.

The first specific objective was addressed in Study 1. This objective was designed taking into account previous evidence of primary school students' acceptance of the use of letters as a representation of indeterminate quantities. Consequently, the aim was to identify the meaning given to letters by Spanish primary school students and to evidence their ability to use conventional forms of representation.

Based on the contributions of Blanton and colleagues (2017), Küchemann, (1981) and Molina and others (2018), some initial categories were proposed that allowed us to analyze the students' written productions and their interventions in the group discussions. These categories were then refined by taking into account the students' responses. It was confirmed that, as in previous research, the students accept the use of letters and can interpret them by associating them with the idea of variability.

Furthermore, identifying students' meanings for letters contributed to understanding the reasons why they proposed one or the other representation for the dependent variable, when the independent variable was a letter. This evidence was important, as it shows that students can interpret indeterminate quantities as variables, but when expressing generalization, they resort to personal means of representation. This result inspired to include other means of representation in the next data collection to give students the opportunity to represent their ideas in different ways. It also highlights the importance of considering the students' explanations of their choice of a certain representation, since, although it seemed that when representing the dependent variable they used the letters or numbers incorrectly not following any mathematical convention, their answers have an internal consistency related to their personal interpretations of the letters representing the independent variable and demonstrate the application of the functional relationship involved in each problem situation.

O.2. Describe how students' conceptions of letters as representations of indeterminate quantities change.

As mentioned in the previous section, Study 1 provides evidence that students interpret the letter as an indeterminate quantity and associate the idea of variability with it. This was achieved throughout the three class sessions implemented and in close relation to the demands of the proposed tasks. As other research has shown, students become progressively aware of the meanings and senses of the notation for variables (Blanton et. al., 2017). Students' conceptions of letters moved from referents familiar to them (initials of key words, alphabet, arithmetic) to understanding them as indeterminate quantities that could have a number associated with them, whose role was a generic example, or remained as general as unknown quantities. Changes in students' conceptions emerged in the interaction, discussions and sharing of ideas. In addition, the interpretation of the letter as an indeterminate variable/value was enhanced by those activities where students had to answer true or false sentences.

Likewise in the first study, the students in the sample of studies 2, 3 and 4 associated the letter with familiar referents, but they did not manage to change their conceptions, as did the students in Study 1 for whom using other forms of representation was more significant.

O.3. Identify the representations used by students to express the functional relationship involving indeterminate quantities.

This objective was addressed in a transversal manner in all the studies. In the first one, the focus was on conventional representations, while in the following studies, various forms of communicating mathematical ideas were considered, such as alphanumeric language, natural language, gestures, among others.

In order to identify and characterize the representations used in Study 1, categories were established based on previous research (Blanton et al., 2015: Molina et al., 2018) and students' responses. These showed different ways of using letters and numbers to represent the dependent variable of the function when the independent variable was represented by a letter. Students' representations were closely related to the meaning associated with the letter, and the findings reported in the literature were extended. On the one hand, it was evidenced that students can refer to the alphabet without this implying a static view of the letter (i.e. letter can only assume a specific value related to its position in the alphabet sequence). On the other hand, it showed that although students in their answers proposed a number, this did not mean that they considered it as the only possible answer; they usually used it as a generic example as they interpreted the letter as a variable that could represent "any number you want".

The use of the letter as a representation for indeterminate quantities was not observed in the same way in the two groups of students. While third grade students in school A (Study 1) accepted the use of the letter as an indeterminate representation, fourth grade students in school B (Studies 2, 3 and 4) found it more difficult to use it. In general, fourth grade students when confronted with the use of letters as a conventional representation did not answer the questions, but tried to make sense of them. They forgot both about the functional relationship and about answering the questions posed. However, the fact that students did not use letters is not synonymous with not expressing generalization or not thinking algebraically. Studies 2, 3 and 4 provide evidence of the representations they used, which were favored by the incorporation of other forms of asking about the general or indeterminate, for example, by using key words such as *many* or *infinite*.

It was observed that students were able to express the functional relationship in more sophisticated ways during the discussion with the whole group of students than in written expressions (Study 2). In the justifications, students generalized mainly by using natural language and giving generic examples. It is observed that in answering they did not necessarily resort to the means of representation proposed in the questions, but rather used trusted entities to manipulate, make sense of and express the relationships identified. For example, in the questions involving arithmetic expressions or letters, they resorted to gestures and drawings to represent the situation and make sense of it, given the difficulty for them to express themselves in the semiotic means suggested.

An important aspect to highlight is that students manifested different degrees of sophistication in their thinking as evidenced by the semiotic means they use. Study 3 describes the work of three students who did not need to use alphanumeric symbolism to generalize the functional relationship. Study 3 complements Study 2 by observing that although students did not express the relationship between variables explicitly using alphanumeric symbolism, they did so through their actions or by using natural language.

Finally, Study 4 corroborates that throughout the second teaching experiment students preferred natural language and generic examples as means of expressing generalization.

O.4. Describe the changes in the representations of the functional relationship involving indeterminate quantities, manifested by the students.

The idea of *semiotic contraction* helped to describe the changes in students' representations and to determine their degree of sophistication. In studies 2 and 3 this theoretical construct was used to analyze students' representations throughout the generalization process. It was possible to appreciate the changes in the expression of the functional relation from working with particular cases to when students referred to indeterminate quantities. This helped to observe the coherence in the students' answers and how they made sense of the formulas they used to find the dependent variable when the independent variable was given or when they had to evaluate the coherence of the information proposed in true or false questions.

In both studies, when students described the relationship between variables, they initially resorted to elements that are familiar to them in order to make sense of the situation. Thus, gestures of sharing, counting, drawing or calculating sums were the first resource they used to express the relationship. Then, when faced with questions involving larger quantities, they proposed more sophisticated strategies and identified a structure, which they extended even when they refered to indeterminate quantities.

O.5. Relate the representations used by students to express indeterminate quantities and the characteristics of the proposed tasks.

This objective was also addressed in a transversal manner in all the studies. To characterize the tasks, factors such as social interaction, the semiotic means involved, the type of justification requested and the characteristics of the problem statement were considered. These factors were studied progressively across the four studies.

In general, an important finding to note from the results is that social interaction favored students' learning. For example, in Study 1, it was observed that oral discussions helped students to understand that letters can represent indeterminate quantities and to associate them with a sense of variability. In Study 2, oral justifications contributed to the expression of generalization in more sophisticated terms. Students adopted strategies that other classmates exposed in the discussions, corrected their mistakes through dialogue, and became increasingly more precise in their interventions.

The inclusion of different semiotic means in the tasks was an opportunity for students to respond using the most comfortable means for them. Other studies only include tasks involving numbers and letters in the problems. Part of the originality of this thesis is to extend these means (e.g., including arithmetic sentences in Study 2) and to describe students' reactions. Questions involving indeterminate quantities represented in natural language, without involving alphanumeric language, kept students in a zone of confidence, allowing them to focus their attention on the problem situation and transfer the identified relationship to particular cases (Study 3).

Regarding the inclusion of justification in the classroom (Study 2), this thesis proposes to work with students on two types of justification: elaboration and validation. In this respect, it became evident that when students were asked to explain how they obtained the answer (justification of elaboration), the communicative demand of the task led them to focus more on the functional rule than on the variables, leaving the latter implicit in the question. The justification of validation had a different communicative demand, students mainly relied on the direct relationship and referred to concrete pairs of values within a context.

Regarding the characteristics of the problems and tasks proposed, the main findings of Study 4 show that the use of functional strategies was favored in those problems that involve an additive relation and include the functional relation explicitly in the statement. Those problems in which students had to discover the relationship from a pair of values were more complex. The results also evidence that true/false tasks were conducive to discussion (Studies 1 and 2), while the table completion activity was more difficult for students (Study 1). These results lead to the conclusion that teaching could be favored if in the first instance students are encouraged to interpret representations of indeterminate quantities and challenged to identify whether the manner in which the variables are represented makes sense in the context of the problem through true or false questions. Once students are familiar with the various forms of representation, they could be asked to produce their own representations of the variables involved in the problems.

OBJECTIVES RELATED TO THE RESEARCH PROJECTS

The work developed in this doctoral thesis attempts to achieve four general objectives proposed in the two R&D research projects of which it forms part. These objectives are presented in Table A4. Below, we describe how this research contributes to achieving them.

Table A4

Objectives of the research projects addressed

Research project	General objective	Specific objective
EDU2013-41632-P (Cañada and Molina, 2013)	GO2. Show evidence of functional thinking in Spanish primary school students.	EO3. Describe strategies used by elementary students when addressing tasks that aims to demonstrate and promote their functional thinking.
		EO4. Draw conclusions that are useful for the teaching and learning process of mathematics in Primary Education.
	GO3. Produce materials that can be useful for the introduction of functional thinking in Primary Education.	EO1. Design tasks to highlight and promote the development of functional thinking in primary school students.
EDU2016-75771-P (Molina and Cañada, 2016)	GO1. Deepen the description of the functional thinking that reveal primary school students in Spain	EO1. Describe the functional thinking exhibited by Spanish students in different grades of Primary Education.
		EO5. Identify difficulties faced by Spanish primary school students at different levels in the process of functional thinking and how to guide them in overcoming them.
	GO2. Develop materials, tasks and strategies that favors the development of functional thinking and the overcoming of obstacles that limit it.	EO4. Design didactic materials and tasks useful for the introduction and development of functional thinking in Primary Education.

In relation to the description of students' functional thinking (GO2-EDU2013-41632-P and GO1- EDU2016- 75771-P), in the four studies, the forms used by students to represent the relationship between variables were evidenced. Study 1 describes in detail the meanings associated with conventional representations of algebra when students first encounter them. Studies 2, 3 and 4 focus on the study of personal forms of representation, showing that students manifest their functional thinking in a variety of manners, which do not always coincide with those proposed in the tasks. Through the observation of the multiple representations used by the students, their potential for algebraic thinking can be evidenced.

On the development of materials (GO3-EDU2013- 41632-P and GO2-EDU2016- 75771-P), the four studies describe the tasks that favored the development of students' functional thinking and the expression of generalization using indeterminate quantities. The first study highlights the role of true or false sentences. Study 2 shows the benefits of encouraging oral and written justification through tasks involving different semiotic means. Study 3 shows which questions help to generalize and represent the functional relationship involved in the problems presented. Finally, study 4 characterizes the problems that favors functional strategies.

SPECIFIC RESEARCH CONTRIBUTIONS AND TEACHING INPUTS

The results reported in this paper highlight two main contributions of particular relevance to teaching.

Firstly, by adopting a multimodal perspective of thinking, it is possible to see the different ways in which the students represent the relationship between the variables involved in the proposed problems. Identifying and describing the semiotic means used by the students helped to describe the generalization process followed by them and to discover their possibilities of thinking algebraically. The analysis of the signs and their representation allowed us to, on the one hand, understand how the students know and understand the mathematical objects and, on the other hand, observe which elements of the function are present in their answers.

Showing the process of generalization and the semiotic means used by students is relevant information for teachers. They can observe similar responses or performances in their students and, instead of interpreting them as a limitation, they can promote them so that students become confident in their abilities of expression and progressively adopt other more sophisticated means of representation. In the context of algebraic thinking, as students are encouraged to be confident in expressing their ideas and multiple representations of the same thing emerge, the expression of generalization becomes easier (Mason, 1996). It is also important for teachers to act on what students do and say, to be sensitive to their experiences and to listen to them.

Secondly, as mentioned in the presentation of this thesis, an open line of research is to characterize the tasks that foster algebraic thinking (Dörfler, 2008; Lannin, 2005) and to answer the question of *how* to introduce algebra in primary school. Another contribution of this thesis is related to this, since the tasks were characterized by considering different elements (social interaction, semiotic means, type of justification requested and characteristics of the problem statement). In coherence with the methodology followed, we aimed to provide convincing information for teachers to make sense of their classroom experience (Confrey, 2006).

The originality of this thesis is related to the elements that were considered to characterize the tasks, among them justification and its relationship with the semiotic means (proposed in the tasks and those actually used by the students). Promoting justification in the classroom led us to generate instances of communication in which we identified how students thought and expressed themselves through signs. In particular, how they thought and talked about functions. Other studies only propose tasks involving numbers and alphanumeric symbolism. In this work, the existence of a variety of semiotic means made it possible for the students to approach the situation with one that was familiar to them, as well as to justify and answer the questions even when something was difficult for them to understand. The analysis of the characteristics of the problem statements was also a contribution of this research given the lack of evidence in this regard.

Task characterization has great implications for teaching as it provides opportunities for teachers to reflect on their own practices and assess whether they are presenting rich and varied tasks to students. Teachers can draw on the activities described extensively in the methodological framework and the four studies presented in Chapter 4.

LIMITATIONS AND FUTURE PERSPECTIVES

In the first instance we will refer to the generalizability of the results. The studies that constitute this doctoral thesis were conducted under the paradigm of design research and as such its results are not intended to be generalized directly. The idea is shared that educational phenomena are context-sensitive, therefore, the actual references described in the different chapters of this thesis are intended to guide future action through reflection (Radford & Sabena, 2015). The results are not intended to be directly generalizable to other contexts without reflection on the evidence. As mentioned by Cobb (2000), it must be noted that the phenomena studied in teaching experiments are examples situated in a local reality, therefore, in order to be replicated in other realities it is important that teachers or researchers compare the evidence provided with the context to which they want to apply it.

On the limitations identified, one of these is related to time. In the two teaching experiments implemented, only four class sessions were conducted. Although this research offers interesting examples of how students can make sense of notation to express indeterminate quantities, this time was not enough to work in greater depth on the ability to express the functional relationship and to have students connect their personal representations with conventional representations of algebra. At the same time, the time limit did not allow for discussion on how to improve the written expression of the students' answers and justifications. In this thesis it was evident that the written answers provide useful information about the students' thinking, but they must be accompanied by oral explanations because many times it is not evident why the students proposed them. Therefore, a future line of research is to pursue proposals that favors written communication.

Another limitation is related to the possibilities of monitoring the work of each student in more depth by means of recordings that capture what they are doing at each moment. In our work we had a camera that recorded the work of the whole class and another mobile camera that recorded the activity performed in the groups; however, the evidence could be expanded by performing a more individualized monitoring that would allow us to study in more detail how each student constructed, gave meaning to and expressed the generalization of the relationships they identified.

An open line that emerges from the results of Study 2 is to show how functional thinking could favors a structural view of arithmetic expressions. The development of the structural view of arithmetic expressions has been studied in the context of generalized arithmetic (Knuth et al., 2005; Molina & Mason, 2009) and it has been shown that the recognition of the structure of arithmetic expressions in primary education helps to understand algebra in secondary school (Kieran, 1989; 2018). The inference from the results of Study 2 is that functional thinking and generalized arithmetic are related and there is a need to further study the relationship between functional thinking and relational thinking. Thus, connecting the different approaches that are distinguished in the literature to address the teaching of school algebra.

On the other hand, given that algebra has been implemented in primary school curricula in different countries, another open line of research is to implement teaching and learning proposals in different contexts and compare the results obtained. These comparisons would favor the characterization of the tasks and would allow to define in greater detail possible trajectories for developing students' algebraic thinking. Finally, from the perspective of teacher training and professional development, the participation of primary school teachers in the research process could be considered to discuss with them what would be the most appropriate ways to develop functional thinking in students.