Resolución del examen de Selectividad (PevAU) de Matemáticas II
Andalucía – Junio de 2021

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

Miércoles, 16 de junio de 2021

Ejercicio 1:

(2.5 puntos) Se sabe que la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$$

(para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblícua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b.

Solución : La asíntota oblícua de la función f debe ser de la forma $y = mx + n$. Como esta recta tiene pendiente 2, entonces $m = 2$, resultando $y = 2x + n$. Para que esta recta pase por el punto $(1, 1)$, debe cumplirse que si $x = 1$, entonces $y = 1$. Así $1 = 2 \cdot 1 + n$, resultando que $n = -1$. Deducimos que la asíntota oblícua posee ecuación $y = 2x - 1$.

Primer método. Dado que sabemos que f posee una asíntota oblícua[1], los parámetros m y n (cuyos valores $m = 2$ y $n = -1$ ya son conocidos) pueden ser calculados mediante las expresiones:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - mx \,]$$

(utilizamos el límite en $+\infty$ por sencillez). Por consiguiente:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{a + 0 + 0}{1 - 0} = a.$$

* Profesor de la Universidad de Granada - http://www.ugr.es/~aroldan

[1] Lo indica explícitamente el enunciado, pero también es conocido basándonos en el hecho de que f posee, como expresión general, una función racional cuyo numerador es un polinomio de grado una unidad mayor que el grado del denominador, y el dominio es no acotado.

Así, $a = m = 2$. Igualmente:

$$n = \lim_{x\to+\infty} [\, f(x) - mx \,] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+bx+2-2x^2+2x}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(b+2)x+2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(b+2)+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{(b+2)+0}{1-0} = b+2 = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -3.$$

Segundo método. Realizamos la división de polinomios, y el cociente coincidirá con la asíntota oblícua.

$$\begin{array}{rcccc|l}
ax^2 & + & bx & + & 2 & x-1 \\ \cline{6-6}
-ax^2 & + & ax & & & ax+(a+b) \\ \cline{1-3}
 & & (a+b)\,x & + & 2 & \\
 & & -(a+b)\,x & + & (a+b) & \\ \cline{3-5}
 & & & & a+b+2 &
\end{array}$$

De la división anterior deducimos que, para cada $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\frac{ax^2+bx+2}{x-1} = \underbrace{ax+(a+b)}_{\text{asíntota oblícua}} + \frac{a+b+2}{x-1}.$$

Así, la asíntota oblícua $y = 2x-1$ debe coincidir con $y = ax+(a+b)$, de donde $a = 2$ y $b = -3$.

$$\boxed{a = 2 \quad \text{y} \quad b = -3.}$$

■

Ejercicio 2:

(2.5 puntos) Considera la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x-6)\,\mathrm{e}^x, & \text{si} \quad x \le 0, \\ \dfrac{36\,(\operatorname{sen} x - ax)}{x^3}, & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

(a) Calcula a. **(1.5 puntos)**

(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$. **(1 punto)**

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** El enunciado nos indica que la función f es continua en $\mathbb{R}$, por lo que debe ser continua en $x = 0$. Por ello, deben existir los siguientes valores y deben ser iguales:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Claramente

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = (3\cdot 0 - 6)\,\mathrm{e}^0 = (-6)\cdot 1 = -6.$$

Por otro lado, el siguiente límite debe existir, y debe tomar el valor -6:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -6.$$

Llamemos L al límite

$$L = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{36(\operatorname{sen} x - ax)}{x^3}.$$

Claramente, este límite presenta una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$. Para resolver esta indeterminación, nos inspiramos en la *regla de L'Hôpital* y tratamos de calcular el límite del cociente de las derivadas de las funciones numerador y denominador (al que llamamos L'):

$$L' = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\,36(\operatorname{sen} x - ax)\,]'}{[\,x^3\,]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{36(\cos x - a)}{3x^2}.$$

El numerador de este límite tiende a $1-a$, y el denominador tiende a cero. Si ocurriese que $a \neq 1$, este límite no existiría: tendría un valor infinito (cuyo signo dependería del signo del número $1-a$).

$$\text{si} \quad a \neq 1 \quad \text{entonces} \quad L' = \text{signo}(1-a)\infty = \begin{cases} -\infty, \text{ si } a > 1, \\ +\infty, \text{ si } a < 1. \end{cases}$$

Lo que establece la *regla de L'Hôpital* es que si el segundo límite L' existe, entonces también existe el primero L y son iguales, incluyendo los posibles valores infinitos (¡ojo!: es posible que exista el primer límite aunque no exista el segundo límite). Esto nos hace sospechar que el valor que debe tomar el parámetro a para que el primer límite exista es $a = 1$. Vamos a comprobar que si $a = 1$, entonces L existe y vale -6, aplicando tres veces la *regla de L'Hôpital* (el siguiente argumento es válido porque el último limite existe y toma un valor finito).

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{36(\operatorname{sen} x - ax)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{36(\operatorname{sen} x - x)}{x^3} = \left[\text{Indet. } \frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{[\,36(\operatorname{sen} x - x)\,]'}{[\,x^3\,]'}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{36(\cos x - 1)}{3x^2} = \left[\text{Indet. } \frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{[\,36(\cos x - 1)\,]'}{[\,3x^2\,]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{36(-\operatorname{sen} x)}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-6\operatorname{sen} x}{x} = \left[\text{Indet. } \frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{[\,-6\operatorname{sen} x\,]'}{[\,x\,]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-6\cos x}{1} = -6.$$

Por consiguiente, tomando $a = 1$, la función f es continua en $x = 0$, como afirma el enunciado (cualquier otro valor de a llevaría a que f no es continua en $x = 0$).

$$\boxed{a = 1.}$$

Apartado (b). En general, la ecuación de la recta tangente a una función f en un punto x_0 viene dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Dado que deseamos hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0 = -1$, basta con determinar $f(-1)$ y $f'(-1)$. Para ello, consideramos la restricción de f al intervalo $(-\infty, 0)$, donde es continua y derivable, siendo

$$f(x) = (3x - 6)\,\mathrm{e}^x \quad \text{para cada } x \in (-\infty, 0).$$

Así

$$f(x_0) = f(-1) = (3 \cdot (-1) - 6)\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{-9}{\mathrm{e}}.$$

Derivando f en el intervalo abierto $(-\infty, 0)$ deducimos que

$$f'(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^x + (3x - 6) \cdot \mathrm{e}^x = (3x - 6 + 3)\,\mathrm{e}^x = (3x - 3)\,\mathrm{e}^x = 3(x - 1)\,\mathrm{e}^x$$

para cada $x \in (-\infty, 0)$. De esta forma,

$$f'(x_0) = f'(-1) = 3(-1 - 1)\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{-6}{\mathrm{e}}.$$

Así la ecuación de de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x_0 = -1$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{-9}{\mathrm{e}} = \frac{-6}{\mathrm{e}}(x - (-1)) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-6}{\mathrm{e}}(x + 1) + \frac{-9}{\mathrm{e}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{-6x - 6 - 9}{\mathrm{e}} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-6x - 15}{\mathrm{e}} = \frac{-3}{\mathrm{e}}(2x + 5).$$

$$\boxed{y = \frac{-3}{\mathrm{e}}(2x + 5).}$$

■

Ejercicio 3:

(2.5 puntos) Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1 punto)**

(b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** Para estudiar la monotonía de f, calculamos su función primera derivada, que viene dada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3-x).$$

Esta función únicamente se anula en los puntos $x = 0$ y $x = 3$, que son los puntos críticos de f. Estudiamos el signo de la primera derivada de f empleando una tabla como la siguiente, donde incluimos sus puntos críticos:

f'	$+$	máx	$+$	mín	$-$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$

$$\begin{cases} f'(-1) = 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 > 0, \\ f'(1) = 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8 > 0, \\ f'(4) = 4 \cdot 16 \cdot (-1) < 0. \end{cases}$$

Por consiguiente,

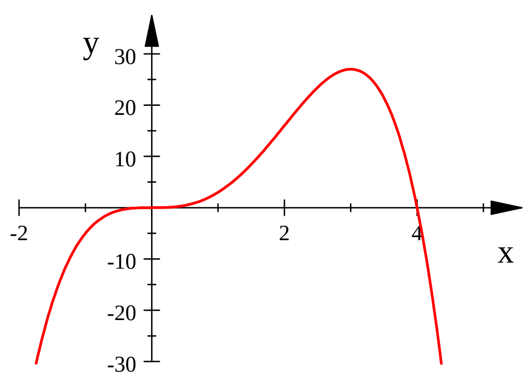
$$\boxed{\text{la función } f \text{ es estrictamente creciente en } (-\infty, 3) \text{ y estrictamente decreciente en } (3, +\infty).}$$

Apartado (b). Teniendo en cuenta que la función f viene definida por una expresión general de tipo polinómico de grado 4 en la que el coeficiente líder es negativo, sabemos que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(4x^3 - x^4\right) = -\infty.$$

Conociendo la monotonía de f, una sencilla tabla de valores nos puede servir para esbozar su gráfica.

x	$f(x)$
-1	-5
0	0
1	3
2	16
3	27
4	0
5	-125



Los puntos de corte de f con el eje de abscisas son las soluciones de la ecuación:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - x^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3(4-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0, 4\}.$$

Por consiguiente, el área del recinto delimitado por la gráfica de f y el eje de abscisas, calculada utilizando la *regla de Barrow*, es:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \left(4x^3 - x^4\right) dx = \left(x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=4} = \left(4^4 - \frac{4^5}{5}\right) - 0 = \frac{256}{5} = 51.2.$$

El área entre f y el eje de abscisas es de 51.2 unidades cuadradas de superficie.

■

Ejercicio 4:

(2.5 puntos) Considera la función $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}\,)\, dt.$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución: Consideremos la función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ para cada $x \in [0, +\infty)$. Dado que la función f es continua, el *teorema fundamental del Cálculo Integral* afirma que la función F es derivable en $[0, +\infty)$ y que su primera derivada es precisamente la función f, es decir, $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [0, +\infty)$. Dado que F es derivable en $x_0 = 1$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x_0 = 1$ es:

$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0).$$

Solo necesitamos calcular $F(x_0)$ y $F'(x_0)$. Por un lado,

$$F'(x_0) = F'(1) = f(1) = 2 \cdot 1 + \sqrt{1} = 3.$$

Por otro lado,

$$F(x_0) = F(1) = \int_0^1 (2t + \sqrt{t}\,)\, dt = \int_0^1 (2t + t^{1/2}\,)\, dt = \left(t^2 + \frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_{t=0}^{t=1} = \left(1 + \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{5}{3}.$$

De esta forma,

$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{5}{3} = 3(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3(x-1) + \frac{5}{3} = 3x - \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{y = 3x - \frac{4}{3}.}$$

■

Ejercicio 5:

(2.5 puntos) Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 5x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3my & & & = & m+\frac{2}{5} \end{array}\right.$$

(a) Discute el sistema según los valores de m. **(1.5 puntos)**

(b) Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

Solución: **Apartado (a).** Calculamos el determinante de la matriz del sistema:

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{vmatrix} = (0+4-15m) - \left(4+0+6m^2\right) = -6m^2 - 15m = -3m\,(2m+5)\,.$$

Este determinante se anula únicamente cuando $m = 0$ ó $m = -5/2$. Por consiguiente, si $m \in \mathbb{R}\setminus\{0, -5/2\}$, la matriz del sistema es inversible y el sistema es compatible determinado. Estudiamos ahora los casos $m = 0$ y $m = -5/2$ de forma independiente aplicando el método de Gauss-Jordan.

- $m = 0$

$$\left\|\begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2/5 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \end{array}\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

En este caso, dado que la matriz del sistema y la matriz ampliada poseen el mismo rango, que es 2, y el sistema posee tres incógnitas, el *teorema de Rouché-Fröbenius* afirma que el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico.

- $m = -5/2$

$$\left\|\begin{array}{cccc} -5/2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -15/2 & 0 & -21/10 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 5 & -4 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 10 & -75 & 0 & -21 \end{array}\left\| \begin{array}{cccc} 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -67 & -4 & -17 \end{array}\right\| \begin{array}{cccc} 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 67 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|$$

Cuando $m = -5/2$, la matriz del sistema posee rango 2, mientras que la matriz ampliada posee rango 3. En este caso, el sistema es incompatible.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \text{Si } m \in \mathbb{R}\setminus\{0,-5/2\}\text{, el sistema es compatible determinado.} \\ \bullet\ \text{Si } m = 0\text{, el sistema es compatible indeterminado (uniparamétrico).} \\ \bullet\ \text{Si } m = -5/2\text{, el sistema es incompatible.} \end{array}\right.}$$

Apartado (b). Como hemos demostrado en el apartado anterior, si $m = 0$, el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x = 2/5, \\ 2y - z = 1. \end{cases}$$

Si llamamos $\lambda = y$, entonces $z = 2y - 1 = 2\lambda - 1$, por lo que la solución del sistema es:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2/5, \\ y = \lambda, \qquad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 2\lambda - 1 \end{cases}}$$

La primera ecuación pone de manifiesto que no puede haber ninguna solución en la que $x = 0$, ya que todas las soluciones han de cumplir $x = 2/5$.

$$\boxed{\text{Si } m = 0, \text{ no existe ninguna solución del sistema en la que } x = 0.}$$

■

Ejercicio 6:

(2.5 puntos) En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Solución: Llamemos x, y y z al número de botellas, garrafas y bidones, respectivamente, que produce esa empresa cada hora. Las condiciones del enunciado nos llevan a las siguientes ecuaciones:

- se debe producir el doble de botellas que de garrafas: $x = 2y$;
- las máquinas producen en total 52 productos cada hora: $x + y + z = 52$;
- se emplean 10 kg = 10.000 gramos de polietileno cada hora: $50x + 100y + 1000z = 10000$.

Por consiguiente, debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x + y + z = 52, \\ 50x + 100y + 1000z = 10000. \end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss-Jordan, simplificando la tercera ecuación entre 50:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 52 \\ 1 & 2 & 20 & 200 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 52 \\ 0 & 4 & 20 & 200 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 52 \\ 0 & 1 & 5 & 50 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 50 \\ 0 & 0 & -14 & -98 \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{matrix} \right\| \qquad \begin{cases} x - 2y = 0, \\ y + 5z = 50, \\ z = 7. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 30, \\ y = 15, \\ z = 7. \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\text{esa empresa fabrica 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones cada hora.}}$$

■

Ejercicio 7:

(2.5 puntos) Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

(a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$. **(1.5 puntos)**

(b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$. **(1 punto)**

Solución: **Apartado (a).** Un vector director de la recta s es $\vec{u}_s = (-2, 1, 2)$. Por consiguiente, el haz de planos perpendiculares a la recta s es:

$$-2x + y + 2z + k = 0 \qquad \text{donde } k \in \mathbb{R}.$$

Entre todos estos planos, el único que contiene al punto $P(1, 0, -5)$ verifica:

$$-2 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot (-5) + k = 0,$$

de donde $k = 12$. Por tanto,

$$\boxed{\text{el plano es} \quad -2x + y + 2z + 12 = 0.}$$

Apartado (b). Un vector director de la recta r puede calcularse como el siguiente producto vectorial:

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Un vector normal al plano π es $\vec{n} = (-2, 1, 2)$. El ángulo α que forma la recta r con el plano π es el ángulo complementario del ángulo $\beta = 90° - \alpha$ que forman los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{n}$.

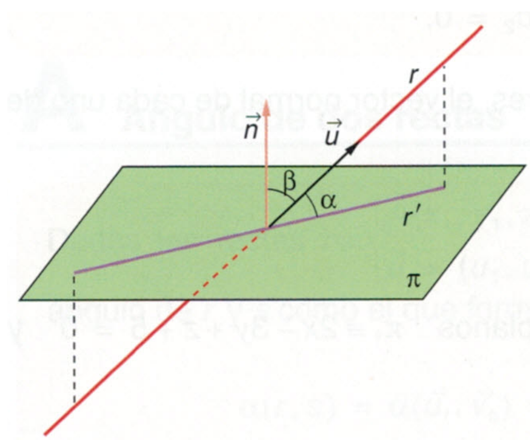


Imagen extraída de: R. Rodríguez, J. Soler, A. Nevot, Matemáticas 2° Bachillerato, McGraw Hill, Madrid, 2003 (figura 7.4, página 176).

Así, el seno del primer ángulo (que debe estar entre 0° y 90°) es el valor absoluto del coseno del segundo ángulo, que se puede calcular como:

$$\operatorname{sen}\alpha = |\cos(\vec{u}_r, \vec{n})| = \frac{|\,\vec{u}_r \cdot \vec{n}\,|}{\|\,\vec{u}_r\,\| \cdot \|\,\vec{n}\,\|} = \frac{|\,(8,7,5)\cdot(-2,1,2)\,|}{\sqrt{8^2+7^2+5^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}}$$
$$= \frac{|\,1\,|}{\sqrt{138}\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{138}}{414} \approx 0.0283752.$$

$$\boxed{\text{El seno del ángulo que forma la recta } r \text{ con el plano } \pi \text{ es } \frac{\sqrt{138}}{414} \approx 0.0283752.}$$

■

Ejercicio 8:

(2.5 puntos) La recta

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$$

y la recta s, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución: Un punto de la recta s es $P(1,0,2)$ y un vector director de dicha recta es $\vec{u}_s = Q-P = (a,1,0)-(1,0,2) = (a-1,1,-2)$. Por consiguiente,

$$s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda\,(a-1)\,, \\ y = \lambda, \\ z = 2-2\lambda \end{cases} \qquad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dado que hay un punto de la recta s que también está sobre la recta r, dicho punto debe cumplir las dos ecuaciones de r. En particular, para $y=\lambda$ y $z = 2-2\lambda$,

$$\frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda+4}{2} = \frac{(2-2\lambda)-3}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3\lambda+12 = -4\lambda-2$$

$$\Leftrightarrow \quad 7\lambda = -14 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2.$$

Sabiendo que $\lambda=-2$, el punto de s que pertenece también a r es:

$$\begin{cases} x = -2a+3, \\ y = -2, \\ z = 6. \end{cases}$$

Utilizando $x = -2a+3$ e $y=-2$ en la otra ecuación de la recta r:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(-2a+3)+3}{2} = \frac{-2+4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2a+6}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2.$$

Por consiguiente

$$\boxed{a = 2 \text{ y el punto de corte es } (-1,-2,6).}$$

■