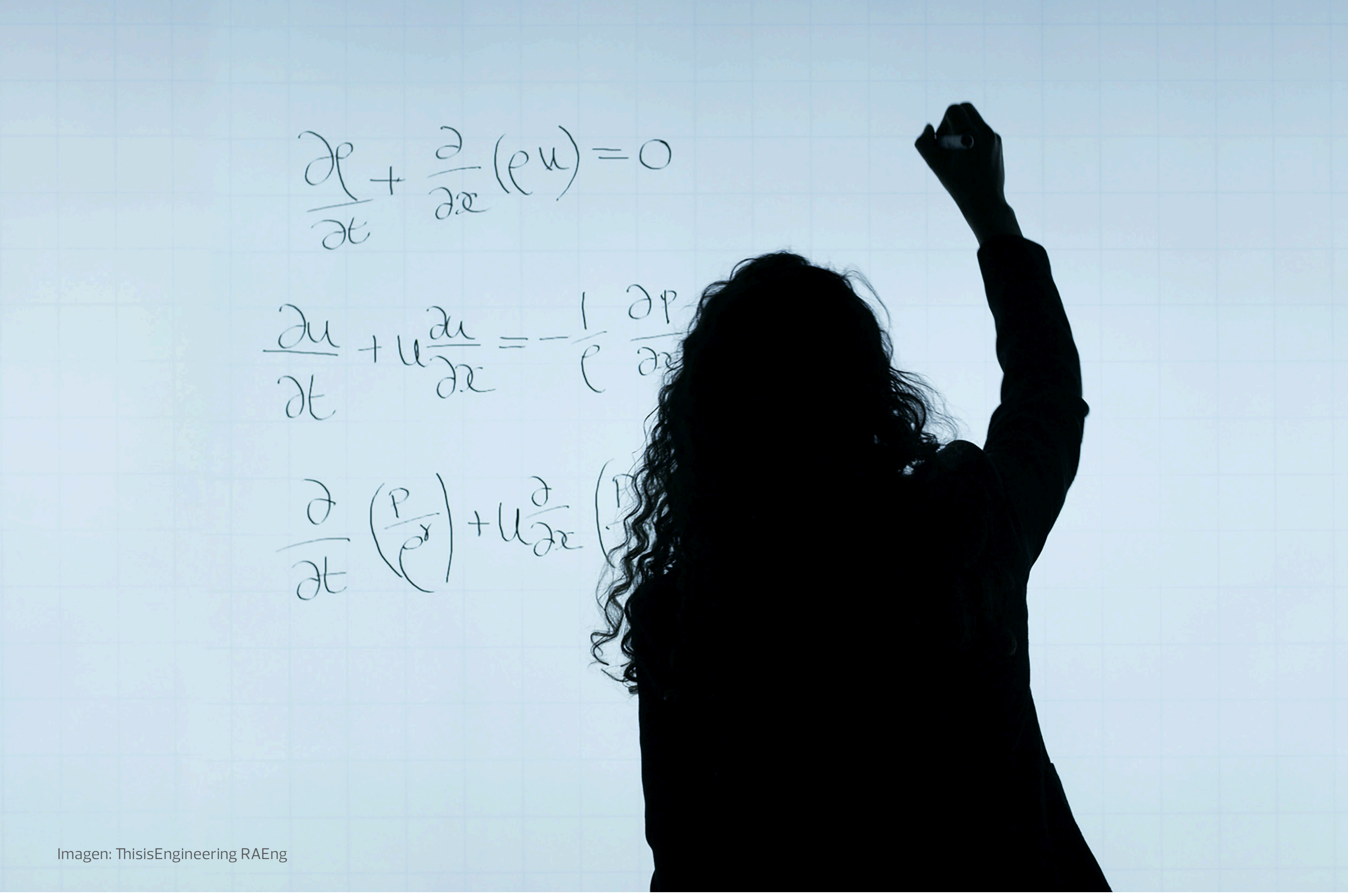


Imagen: ThisisEngineering RAEng

Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática

Universidad de la Rioja
Logroño (España)
19 y 20 de noviembre de 2020

Ángel Gutiérrez, María José Beltrán-Meneu,
Juan Miguel Ribera, Rafael Ramírez-Uclés,
Adela Jaime, Eva Arbona, Camilo Sua, Lucía Rotger,
Clara Jiménez-Gestal, Ángel Alberto Magreñán
y Alba María Damián

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática

Universidad de la Rioja

Logroño (España), 19 y 20 de noviembre de 2020

Sede virtual: bit.ly/JornadasACM

Editores:

Ángel Gutiérrez, María José Beltrán-Meneu, Juan Miguel Ribera, Rafael Ramírez-Uclés, Adela Jaime, Eva Arbona, Camilo Sua, Lucía Rotger, Clara Jiménez-Gestal, Ángel Alberto Magreñán, Alba María Damián.

JORNADAS INTERNACIONALES DE INVESTIGACIÓN Y PRÁCTICA DOCENTE EN ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA

Universidad de la Rioja (Logroño, España)

Sede virtual: bit.ly/JornadasACM

Editores

Ángel Gutiérrez, María José Beltrán-Meneu, Juan Miguel Ribera, Rafael Ramírez-Uclés, Adela Jaime, Eva Arbona, Camilo Sua, Lucía Rotger, Clara Jiménez-Gestal, Ángel Alberto Magreñán, Alba María Damián

Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática

International Meeting of Research and Teaching Practice on Mathematical Giftedness

ISBN: 978-84-09-25785-0

Citar como

Gutiérrez, A., Beltrán-Meneu, M. J., Ribera, J. M., Ramírez-Uclés, R., Jaime, A., Arbona, E., Sua, C., Rotger, L., Jiménez-Gestal, C., Magreñán, A. A. y Damián, A. M. (eds.) (2021). *Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática*. Logroño, España: Universidad de la Rioja.

Las comunicaciones y talleres presentados en el congreso y publicados en estas actas han sido sometidos a evaluación doble ciega por pares y selección por parte de miembros del Comité Científico.

Entidades colaboradoras

Universidad de La Rioja

Depto. de Didáctica de la Matemática
Universitat de València

Depto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Depto. de Matemática Aplicada
Universitat Politècnica de València

Societat d'Educació Matemàtica de la
Comunitat Valenciana "al-Khwarizmi

EDU2017-84377-R (Miciu/Feder)

ÍNDICE

TALLERES

PRESENTACIÓN

El 19 y 20 de noviembre de 2020 tuvieron lugar las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática, celebradas virtualmente en la Universidad de la Rioja (bit.ly/JornadasACM).

Las personas con alta capacidad matemática destacan por encima de la media en el desarrollo de razonamiento matemático y en la realización de actividades como definir, demostrar o resolver problemas. Diferentes autores, como Freiman, Greenes y Krutetskii, han identificado diversas características que presentan estos estudiantes, tales como rapidez inusual en el aprendizaje de las matemáticas, habilidad para identificar patrones y relaciones, transferir ideas y generalizar, desarrollar estrategias eficientes y originales, etc.

NCTM (1980) reconocía que los estudiantes con altas capacidades matemáticas suelen recibir escasa atención en sus centros de enseñanza. A pesar del tiempo transcurrido, lamentablemente esta carencia sigue presente en la mayoría de los sistemas educativos. Esto se traduce en que estudiantes que podrían contribuir con grandes aportaciones a la sociedad ven frustrados sus intentos de originalidad o su interés por aprender a causa de un sistema educativo que ignora su potencial (Jaime y Gutiérrez, 2014). Además, esta falta de atención puede generar dificultades de aprendizaje, así como alteraciones de personalidad y comportamiento (Ramírez, 2012). Por ello, es necesario detectar a estos estudiantes y llevar a cabo un conjunto de acciones relacionadas, “fundamentalmente, en el contexto escolar y junto a otros/as agentes educativos, con el objetivo de potenciar todas las capacidades del alumnado” (Aretxaga, 2013, p. 46).

Los estudiantes con alta capacidad matemática son los destinatarios últimos de estas Jornadas, pues todas las presentaciones realizadas muestran enfoques, desde diversos puntos de vista, dirigidos a mejorar la atención y la formación matemática de estos estudiantes. Por ello, hemos querido conocer las opiniones de dos estudiantes con alta capacidad matemática sobre su interés por las matemáticas, la ayuda que reciben de sus familias y profesorado y otros temas relacionados con su gusto por las matemáticas. Sus respuestas se pueden leer después de esta presentación.

La finalidad de estas Jornadas fue visibilizar iniciativas de innovación, investigación y práctica educativa que se están realizando actualmente en el campo de la alta capacidad matemática en España, Portugal e Iberoamérica, así como facilitar el contacto entre investigadores, profesores y estudiantes de postgrado de diferentes países interesados en la atención a este tipo de estudiantes.

En las Jornadas hubo una amplia representación internacional, con 215 asistentes procedentes de Argentina (6), Brasil (2), Chile (4), Colombia (29), Costa Rica (9), Ecuador (8), España (135), Finlandia (1), Gran Bretaña (1), Guatemala (1), México (11), Perú (4) y Venezuela (4). También participaron profesores de todos los niveles educativos, desde educación infantil hasta universidad, así como estudiantes de doctorado. Esta diversidad de participantes permitió establecer vínculos entre la investigación que se realiza en las universidades y la práctica docente en los centros de enseñanza.

A lo largo de los dos días de las Jornadas se presentaron un total de 2 conferencias plenarias, 21 comunicaciones y 6 talleres. Las conferencias plenarias fueron impartidas por profesores expertos en alta capacidad matemática. La conferencia inaugural fue a cargo del profesor Charlie Gilderdale del NRICH Mathematics Project (University of Cambridge), y la de clausura fue desarrollada por el profesor Pablo Flores Martínez, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Las comunicaciones, de 15 minutos cada una, se estructuraron en bloques de 2 sesiones paralelas, y versaron sobre experiencias curriculares y extracurriculares, recursos educativos, competiciones matemáticas, investigación sobre procesos de enseñanza y aprendizaje e investigación sobre formación inicial o actualización de profesores de matemáticas. Después de cada bloque de comunicaciones, se realizó un grupo de discusión, centrado en el contenido de todas las comunicaciones presentadas. Los talleres, de 45 minutos de duración, se realizaron en bloques de 3 sesiones paralelas.

El proceso de selección de propuestas de comunicaciones y talleres se realizó mediante una evaluación doble ciega de las propuestas recibidas, siendo los evaluadores miembros del comité científico. De las 37 propuestas recibidas, 13 fueron rechazadas, 14 fueron aceptadas después de realizar determinados cambios solicitados por los evaluadores y 10 fueron aceptadas sin cambios.

Queremos manifestar nuestro agradecimiento a la Universidad de la Rioja por acoger con entusiasmo la propuesta de colaborar en la organización de las Jornadas y poner a nuestra disposición los medios humanos y técnicos necesarios para su organización. También queremos agradecer a las personas integrantes del comité científico, por la labor realizada en el proceso de evaluación de las comunicaciones, al comité organizador, por su esfuerzo a la hora de llevar a cabo por primera vez la organización de unas jornadas virtuales, y a las distintas entidades colaboradoras: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València y Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al-Khwarizmi". Las Jornadas se enmarcan dentro de una de las acciones del Proyecto de Investigación Modelos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas: análisis racional y empírico, financiado por el Gobierno de España (EDU2017-84377-R. AEI/FEDER, UE).

Referencias

Aretxaga, L. (Ed.) (2013). *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales*. Vitoria, España: Servicio de Publicaciones del Gobierno Vasco.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia, España: PUV.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An agenda for action: recommendations for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7461/descargar

Logroño, marzo de 2021

Los editores

ESTUDIANTES CON TALENTO MATEMÁTICO OPINAN

Opinion of mathematically gifted students

Jaime, A. [a], Contreras, D. [b], Mora, M. [c]

[a] Depto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València (España). [b] Universidad de La Serena (Chile). [c] Universidad de Costa Rica (Costa Rica)

Resumen

Dado que estas Jornadas se centran en la presentación de experiencias relacionadas con el talento matemático, mostramos aquí las entrevistas realizadas a dos estudiantes con esa característica y les preguntamos por su interés por las matemáticas, la atención complementaria que puedan haber recibido, el papel que han desempeñado para ellas iniciativas como olimpiadas matemáticas y alguna reflexión por su parte hacia la atención de este colectivo por parte de los profesores.

Palabras clave: *talento matemático, opinión de estudiantes*

Abstract

As this Meeting focuses on the presentation of experiences related to mathematical talent, we show here the interviews to two of these students, and we ask them about their interest in mathematics, the complementary help they may have received, the role of initiatives such as math Olympics and some reflection on the attention payed by teachers to talented students.

Keywords: *mathematical talent, students opinion*

INTRODUCCIÓN

En estas Jornadas hay propuestas y experiencias de profesores y de resultados de investigación, todo con el interés de desarrollar el potencial de los estudiantes con alto nivel matemático. Por ello, hemos querido también saber lo que piensan algunos de esos estudiantes, en relación con su interés por las matemáticas, la atención complementaria que puedan haber recibido, el papel que han desempeñado para ellos iniciativas como olimpiadas matemáticas y alguna reflexión por su parte hacia la atención de este colectivo por parte de los profesores.

Tres jóvenes de diferentes edades y países se brindaron a ello, un joven, una niña y una adolescente pero por problemas con la tecnología, el primero no pudo hacernos llegar su entrevista y mostramos las ideas expresadas por las dos estudiantes, Bianca Daniela, de 10 años, natural de Costa Rica, y Charlyn A., chilena de 16 años.

Presentamos las preguntas a las que respondieron las jóvenes, sus respuestas y finalmente un breve comentario a raíz de esas intervenciones.

PREGUNTAS DE LA ENTREVISTA

Las preguntas las dividimos en tres bloques: General, sobre el interés, la motivación y lo que las matemáticas suponen para estas estudiantes, Olimpíadas, con preguntas relacionadas sobre la

Jaime, A., Contreras, D. y Mora, M. (2020). Estudiantes con talento matemático opinan. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 3-7). Logroño: Universidad de La Rioja.

repercusión de estas competiciones, y Sugerencias o comentarios a niños o jóvenes y a profesores. Estas son las preguntas:

A - *De carácter general*

1. ¿Puedes decirnos tu nombre, edad, curso en el que estás y el país en el que resides?
2. ¿Qué te aportan a ti, personalmente, las matemáticas?
3. ¿Quién o qué ha influido en tu interés por las matemáticas?: Profesores, interés personal, competiciones, talleres de matemáticas escolares o extraescolares.
4. ¿Has estado en algún programa, escolar o extraescolar específico de matemáticas, sólo para interesados? En caso afirmativo, ¿qué te ha supuesto?
5. ¿Te divierte hacer matemáticas en lugar de seguir otro tipo de juegos o deportes?

B - *Sobre olimpiadas matemáticas*

6. ¿Qué papel han jugado las olimpiadas matemáticas y las competiciones de ese estilo? (en términos de conocimiento, competitividad, relación con personas afines, ...)
7. ¿Has tenido la oportunidad de conocer a otros compañeros gracias a este tipo de competiciones matemáticas?¿Sigues manteniendo la relación con ellos?
8. ¿Qué papel ha tenido la preparación de los profesores en tu formación para las competiciones matemáticas?
9. Si no hubieras participado en olimpiadas, ¿habrías intentado aprender lo mismo que sin competiciones?

C - *Comentarios a niños/jóvenes y a profesores*

10. ¿Quieres añadir algo que consideres importante para los niños y niñas que te están escuchando y les gusta hacer matemáticas? ¿Y para los profesores de matemáticas?

ENTREVISTA A BIANCA DANIELA. 10 AÑOS. COSTA RICA

General

2. ¿Qué te aportan a ti, personalmente, las matemáticas?

Considero que las matemáticas son muy importantes. A mi me ayudan a desarrollar mi pensamiento lógico y me facilitan muchas de las actividades que hago todos los días.

3. ¿Quién o qué ha influido en tu interés por las matemáticas?: Profesores, interés personal, competiciones, talleres de matemáticas escolares o extraescolares.

Desde muy pequeña me han gustado las matemáticas y han influido tanto en mi interés personal como mi mamá, que me ha animado y me ha apoyado a seguir aprendiendo.

4. ¿Has estado en algún programa, escolar o extraescolar específico de matemáticas, sólo para interesados? En caso afirmativo, ¿qué te ha supuesto?

Anteriormente no había estado en ningún programa de matemáticas hasta este año que he tenido la oportunidad de participar en dos talleres, uno del grupo de alta dotación y el otro de Apotema[1]. También en la escuela me han brindado la oportunidad de una clase extracurricular una vez a la semana en la que me he. propuesto aprender álgebra.

5. ¿Te divierte hacer matemáticas en lugar de seguir otro tipo de juegos o deportes?

Definitivamente me divierten más las matemáticas que cualquier otro deporte.

Sobre olimpíadas

6. ¿Qué papel han jugado las olimpiadas matemáticas y las competiciones de ese estilo? (en términos de conocimiento, competitividad, relación con personas afines, ...)

Las competiciones matemáticas han jugado un papel muy importante en mi superación ya que me han brindado mucho conocimiento y me han hecho más competitiva conmigo misma

7. ¿Has tenido la oportunidad de conocer a otros compañeros gracias a este tipo de competiciones matemáticas?¿Sigues manteniendo la relación con ellos?

Las olimpiadas de matemáticas también me han permitido conocer muchos otros niños y niñas a los cuales admiro por su gran esfuerzo y dedicación.

8. ¿Qué papel ha tenido la preparación de los profesores en tu formación para las competiciones matemáticas?

Para las competiciones matemáticas el primer año me preparé en casa con ayuda de mi mamá. Ahora tengo la ayuda de una maestra de mi escuela que me enseña y me motiva a seguir adelante.

9. Si no hubieras participado en olimpiadas, ¿habrías intentado aprender lo mismo que sin competiciones?

Si no hubiera participado en las olimpiadas o en alguna competencia siempre seguiría aprendiendo matemáticas porque es algo que me gusta y me divierte.

Comentario para profesores y para otros niños

10. ¿Quieres añadir algo que consideres importante para los niños y niñas que te están escuchando y les gusta hacer matemáticas? ¿Y para los profesores de matemáticas?

A los niños y niñas que le gustan las matemáticas y que han ido a una competencia pero no clasifican les digo: No se desanimen. Al menos les queda mucho conocimiento y experiencia porque lo más importante es disfrutar.

A los profesores les digo que, por favor, apoyen tanto a los estudiantes si les gustan las matemáticas como a los que no les gustan para que sigan aprendiendo. Su apoyo es muy importante para nosotros.

[1] APOTEMA, es una asociación sin ánimo de lucro de Costa Rica, creada para ayudar a estudiantes con interés y talento por las matemáticas.

ENTREVISTA A CHARLYN A. 16 AÑOS. CHILE

General

2. ¿Qué te aportan a ti, personalmente, las matemáticas?

Las matemáticas las encuentro entretenidas. Son un reto. Yo las veo así. problemas que resolver. Es como una forma de medir mis capacidades, hacerme crecer a mi misma.

3. ¿Quién o qué ha influido en tu interés por las matemáticas?: Profesores, interés personal, competiciones, talleres de matemáticas escolares o extraescolares.

Yo siempre tuve buen promedio en matemáticas. Pero no fue hasta 2018, con las JOMAT[2], cuando a mi me empezaron a gustar de verdad. En parte fue gracias al profesor de matemáticas que tuvimos ese año, que fue el profesor Ángelo, que era como un profesor nuevo, pero su metodología para enseñar era completamente distinta. Hizo que yo le tuviera amor a las matemáticas y que yo sintiera de verdad ganas de seguir aprendiendo.

4. ¿Has estado en algún programa, escolar o extraescolar específico de matemáticas, sólo para interesados? En caso afirmativo, ¿qué te ha supuesto?

No. En una academia no.

5. ¿Te divierte hacer matemáticas en lugar de seguir otro tipo de juegos o deportes?

Yo soy bastante variada con mis hobbies pero sí me gustan las matemáticas para entretenerme. Por ejemplo, cuando estoy aburrida a veces tiendo a tomar los libros de álgebra, álgebra me gusta sobre todo. Y para resolver ejercicios.

Sobre olimpíadas

6. ¿Qué papel han jugado las olimpiadas matemáticas y las competiciones de ese estilo? (en términos de conocimiento, competitividad, relación con personas afines, ...)

Para mi han tenido un aporte fundamental en mi vida en el sentido de lo que he aprendido durante el tiempo que uno practica para ir a la competición. Yo he tenido la oportunidad de repasar los contenidos de años anteriores y eso ha hecho que memorice las cosas de alguna forma. Y eso me ha ayudado mucho a futuro y también ha sido una experiencia grata estar con distintas personas y enfrentarse a otros colegios, además de que yo soy una persona bastante competitiva. Igual me ha reforzado eso, a ser mejor siempre.

7. ¿Has tenido la oportunidad de conocer a otros compañeros gracias a este tipo de competiciones matemáticas?¿Sigues manteniendo la relación con ellos?

En mi caso fue 2018 más que nada porque ese año las JOMAT fueron presenciales y ahí me hice amiga de una niña de ... y sigo manteniendo contacto con ella.

8. ¿Qué papel ha tenido la preparación de los profesores en tu formación para las competiciones matemáticas?

[2] La Jornada matemática JOMAT ULS es una competición matemática, con carácter regional, tradicionalmente dirigida al curso “octavo básico” (4º de Eso español), organizada por la Universidad de La Serena (Chile). En 2020 también se ha extendido a 5º y 6º de primaria para colegios de todo el país, con la selección de los representantes chilenos en OLIMPRI, competición internacional de primaria.

Fundamental. Los dos profes que nos prepararon tuvieron disposición total conmigo y con nuestro equipo a resolvernos las dudas y repetirnos las cosas que no entendíamos. Iban al ritmo que nosotros necesitábamos. Por ejemplo, si estábamos practicando a las 10 de la noche y teníamos alguna duda, ellos tenían la disposición, hacían el sacrificio de respondernos incluso a esa hora esa duda específica.

9. Si no hubieras participado en olimpiadas, ¿habrías intentado aprender lo mismo que sin competiciones?

Yo creo que no. Principalmente porque a mi las olimpiadas, cuando yo participé, cuando fui, pude medir mis capacidades y me sentí de una forma capaz al ganar, y ni siquiera al ganar, estar ahí me hizo pensar que yo tenía talento o habilidad para eso y que quería seguir aprendiendo.

Comentario para profesores y para otros niños y jóvenes

10. ¿Quieres añadir algo que consideres importante para los niños y niñas que te están escuchando y les gusta hacer matemáticas? ¿Y para los profesores de matemáticas?

A los niños, yo creo que si les gustan las matemáticas y sienten un amor por ellas y en general por cualquier otra cosa, otro ámbito, que practiquen, que lo aprendan realmente porque la educación o aprender algo nunca va a estar de más, siempre aporta algo personal. Aprender cosas te ayuda a crecer. Y si realmente les gustan, que se esfuercen porque yo creo que uno es capaz de conseguir todo lo que quiere si se esfuerza por ello.

¿Y para los profes de matemáticas?

Tienen un papel fundamental en el amor que puede tener un alumno por cualquier materia, sobre todo por matemáticas, que igual es una materia difícil, con la que algunos tienen como esa relación de amor-odio; el hecho de que algunos profes tengan la consideración de ir al ritmo del estudiante y que muestren ese amor. Cuando yo veo un profesor que realmente ama lo que hace, me hace querer, tener ese mismo amor por la materia.

CONCLUSIÓN

Tras estos testimonios, no podemos menos que atender a nuestra responsabilidad de fomentar este interés por las matemáticas. Bianca Daniela y Charlyn han manifestado lo que venimos oyendo de muchos estudiantes con talento matemático. Las matemáticas les divierten y para ellas son un entretenimiento entretenimiento; les interesa aprender, incrementar su potencial matemático y superar los retos que surgen en el quehacer matemático.

Además, eventos como las olimpíadas matemáticas resultan muy eficaces, porque incentivan el interés por aprender, se constituyen en retos a superar y se encuentran con otros estudiantes con sus mismos intereses, con los cuales en ocasiones llegan a establecer cierta amistad.

Ambas estudiantes lanzan un mensaje de estímulo a los niños y jóvenes interesados en las matemáticas, centrado en el disfrute, el esfuerzo y el conocimiento que se adquiere. Y muy interesante es la opinión que manifiestan ambas sobre la importancia de los profesores, tanto en el apoyo y el estímulo que brindan a los estudiantes, como en la formación que les proporcionan y en la transmisión del gusto por las matemáticas. Merece la pena leer las palabras textuales que emplean estas dos estudiantes al respecto.

Lo que aquí hemos leído se puede hacer extensivo a muchos estudiantes de talento matemático. Por ello, ánimo a los profesores de matemáticas. En sus manos está abrir puertas, ampliar horizontes y permitir que esas mentes dotadas para las matemáticas desarrollen su potencial.

Muchas gracias a Bianca Daniela. Muchas gracias a Charlyn A.

CONFERENCIAS PLENARIAS

RESPUESTA DESDE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA A LA ATENCIÓN DE LA ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA

Answers by the mathematics education research to the attention to mathematical giftedness

Flores Martínez, P.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada (España)

Resumen

El análisis didáctico es una herramienta para la planificación de sesiones de clase. El enriquecimiento curricular es una propuesta de atención a las altas capacidades que demanda una mayor profundización en los contenidos, tanto para el estudiante como para el profesor. A través de ejemplos, se propondrá un esquema de diseño de tareas y sesiones de enriquecimiento que considera las características de los estudiantes, los contenidos y elementos de razonamiento matemático y las metodologías recomendadas desde la investigación en la alta capacidad matemática. Además, se mostrarán diferentes publicaciones y recursos que permitirán profundizar al asistente tanto en los aportes de la investigación como en ejemplos prácticos.

Palabras clave: *Alta capacidad matemática, análisis didáctico, enriquecimiento curricular*

Abstract

Didactic analysis is a tool for planning class sessions. Curricular enrichment is a proposal for attention to high ability students that demands a greater depth of content, both for the student and the teacher. Through examples, a design scheme of tasks and enrichment sessions will be proposed that considers the characteristics of the students, the contents and elements of mathematical reasoning and the recommended methodologies from research in high mathematical ability. In addition, different publications and resources will be displayed that will allow the attendee to deepen both the research contributions and practical examples.

Keywords: *High mathematical ability, didactic analysis, curricular enrichment*

INTRODUCCIÓN

En algunas investigaciones que indagan sobre las habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático (Ramírez, 2012), se destaca que estos estudiantes tienen capacidades visuales, pero prefieren elementos formales que les dan más seguridad para afrontar los problemas. Además, presentan algunas deficiencias en el razonamiento visual que podrían mejorarse con enriquecimiento curricular.

Por ejemplo, uno de los problemas que se resuelve de manera rutinaria, sin darle más significado, es el del cálculo del volumen de cuerpos, generalmente resuelto por medio de fórmulas que encierran una medida indirecta. Pero... ¿se comprende el concepto de volumen cuando se aplican estas fórmulas? Si bien las fórmulas tienen cierta correspondencia con intuiciones cuando se trata

Flores Martínez, P. (2021). Respuesta desde la investigación en didáctica a la atención de la alta capacidad matemática. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 9-16). Logroño: Universidad de La Rioja.

de calcular el volumen de poliedros, no resulta tan claro en el caso de las pirámides. ¿Por qué P_{i2} en la Figura 1 tiene el mismo volumen que P_{i3} o por qué es la mitad de P_{i1}?

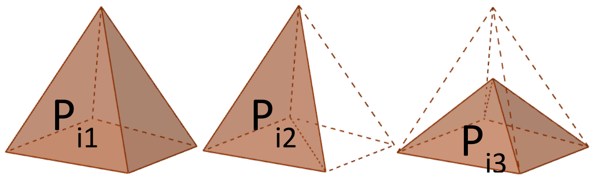


Figura 1. Tetraedro y pirámides de mitad de volumen.

En el plano podemos descomponer cualquier polígono en triángulos y calcular su área por medio de la de estas figuras. Sin embargo, esto no ocurre en el espacio. Comprender el concepto de volumen, especialmente el de las pirámides, requiere realizar procesos más complejos, que nos hemos tomado como punto de partida para algunas de las sesiones de Estalmat, para los estudiantes con talento.

REPOSO CURRICULAR Y ANÁLISIS DIDÁCTICO

Para afrontar estas sesiones, y teniendo decidido el contenido a tratar, hemos realizado lo que se ha denominado "reposo curricular" (Ramírez y Flores, 2016). Su nombre se debe a una oposición declarada a la aceleración curricular, que se propone como medida para alumnos con talento, en algunos campos. Se trata de reposo para el profesor, quien tiene que profundizar en significados de los conceptos matemáticos, así como en ampliar su visión mediante la incorporación de elementos de razonamiento que emplean los matemáticos en su práctica profesional. Pero también propone favorecer que el alumno mire con cierto reposo problemas supuestamente conocidos, para ampliar su campo de significados.

La propuesta de "reposo curricular" supone buscar buenas prácticas docentes que permitan realizar la atención a la diversidad que requiere el enriquecimiento, profundizando en los significados del contenido, incorporando elementos de práctica matemática, siempre cuidando hacer una enseñanza funcional, que contribuya a desarrollar habilidades que lleven a un uso de los contenidos. Las actividades planificadas están dirigidas a dar sentido a los elementos matemáticos, encerrando procesos que barren los diferentes aspectos cognitivos del contenido. Para operativizar la sesión, se buscan problemas novedosos para los estudiantes, siempre alineados a lograr el objetivo particular de la sesión.

El profesor que imparte módulos en cursos para alumnos con talento matemático, también está en situación de planificar la enseñanza sobre un contenido, para un estudiante. Realiza una planificación que interpretamos a través de la herramienta Análisis Didáctico (Lupiáñez, 2013), usada actualmente en nuestro grupo de investigación (PNA-DDM).

El Análisis Didáctico es una herramienta funcional que permite al profesor profundizar en las dimensiones curriculares, para tomar decisiones fundamentadas. Su origen está en el Proyecto Docente de Luis Rico, convertido en texto compartido a partir de diversos textos (Flores y Rico, 2015; Rico y Moreno, 2018; Rico et al., 2013; Segovia y Rico, 2013), y que recoge una formulación a partir de la teoría curricular de las decisiones y caracterizaciones de la didáctica útil para el profesor, que se consensuó entre investigadores y formadores de profesores españoles, en la colección "Matemáticas: Cultura y Aprendizaje" y en la posterior "Educación Matemática en Secundaria", editadas por el profesor Rico en la editorial Síntesis.

Las dimensiones ética, cultural, social y cognitiva del currículo llevan a proponer diversos análisis previos a la intervención en el aula (Figura 2).

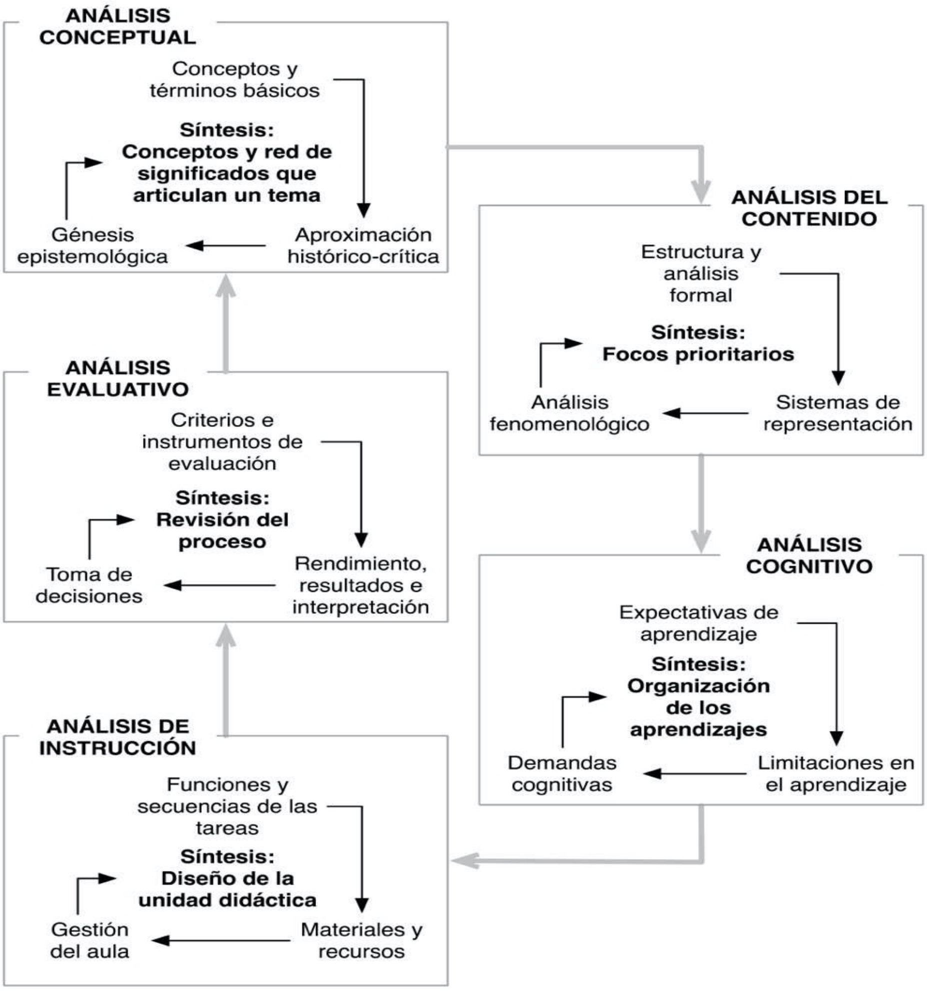


Figura 2. Proceso cíclico del Análisis Didáctico (Lupiáñez, 2013).

Estos análisis constituyen un ciclo de profundización que llevan al profesor a ampliar el significado del contenido matemático que trabajará, y de las dimensiones didácticas que pondrá en juego. El proceso de planificación encierra, preferentemente, los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción, pero si se quiere comprender mejor el contenido, conviene comenzar por realizar un análisis conceptual. Con este ciclo de análisis se llegará a disponer de un repertorio de elementos matemáticos y didácticos que deberán sintetizarse para convertirse en la propuesta de sesión de enriquecimiento.

ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL VOLUMEN

Vamos a esbozar algunos elementos que han derivado del análisis didáctico del concepto de volumen, señalando algunos de los resultados y cuestiones clave que nos han llevado a diseñar varias sesiones de ESTALMAT.

Analizar el concepto de volumen comienza por examinar el de magnitud, cuya formulación matemática como semimódulo de clases de objetos, nos hace ver que arranca de una relación de equivalencia establecida entre objetos, mediante una “comparación”. El criterio de comparación es la clave para determinar cuál es la cualidad que tratamos, cuál es la magnitud.

El volumen en concreto, se aplica a objetos diversos (en geometría se suele basar en cuerpos sólidos), que se comparan mediante descomposición, o mediante aspectos externos, como el principio de Arquímedes a partir de un fluido, o el principio de Cavalieri (medida de superficies y alturas). La suma supone juntar los sólidos, y esta suma es compatible con el orden.

Si profundizamos algo más, apreciaremos que el concepto de volumen se define como espacio ocupado. Pero Janvier (1997) nos llama la atención sobre la diferencia entre el espacio ocupado o magnitud, y su medida o volumen.

Para realizar la medida, solemos recurrir a la unidad, lo que obliga a poder comparar cuerpos con esa unidad, que se define en forma cúbica. No hay problema en comparar cuerpos con paralelepípedos, pero no está tan claro cuando se compara con pirámides. De hecho, Hilbert pone en cuestión la posibilidad de transformar de manera finita una pirámide en otro cuerpo congruente en volumen, constituyendo con esto su tercer problema. Esta conjetura quedó demostrada con el teorema de Dehm, quien demostró que no son equicompuestos de manera finita, un cubo y un tetraedro del mismo volumen (Dehm, 1901).

Sin embargo, la matemática formal avanza mediante procesos de descomposición infinita de los poliedros en simplex rampantes (cuya única intersección es la frontera) (Zorío, 1975). Esto permite definir el volumen como la magnitud general de medida, extensible a cualquier dimensión, pues no impide el uso de un proceso infinito (tal como se ha empleado en el método de exhaución y la medida que se obtiene mediante el cálculo infinitesimal).

Observamos pues que hay un problema de trasformación de cuerpos geométricos, que dificulta la relación de descomposición que permite comparar de manera finita los volúmenes, pero hay herramientas matemáticas para calcularlo, aunque sea por otros procedimientos. Realizar el análisis de contenido significa destacar por una parte la estructura conceptual del volumen, que arranca de los elementos básicos obtenidos en el análisis anterior, y los elementos formales que lo constituyen. Observemos que en este análisis reforzamos la idea de que la fórmula del volumen de la pirámide, basada en la descomposición de un paralelepípedo en tres pirámides, obliga a emplear el principio de Cavalieri (a igual base y altura, las pirámides tienen igual volumen), que se basa en un proceso infinito.

Los significados se enriquecen mediante el análisis de los fenómenos que se relacionan con el volumen, sus variedades, como destacan Piaget et al. (1970), o la necesidad de realizar actividades que permitan crear lo que Freudenthal (1983) llama “objeto mental volumen”. El concepto es complejo y requiere realizar comparaciones, antes de establecer los procedimientos formales que permiten su medida o cálculo.

El análisis de contenido se cierra examinando formas de representar el concepto volumen, que puede hacerse desde el uso de sólidos representantes de la cantidad de volumen hasta el uso de las fórmulas más sofisticadas para obtener el volumen como una integral triple, o como un determinante.

El análisis cognitivo consiste en el estudio de las expectativas de aprendizaje, las limitaciones y las oportunidades, junto con las demandas cognitivas.

La intención de la sesión que estamos planteando es que los estudiantes con talento den más sentido al concepto de volumen, no conformándose con su obtención a partir de superficies y longitudes. Pretendemos, por tanto, que desarrollen su sentido de medida (Moreno et al., 2015). Esto supone apreciar la diferencia entre el volumen como magnitud, de su medida, siempre establecida a partir de la unidad que se establezca. Tenemos una serie de expectativas de aprendizaje que van hacia una profundización en la comparación y obtención de fórmulas de manera justificada, llevando a cabo incluso medidas de volumen que hemos de reconocer que no son habituales de manera directa. Para poder realizar estas comparaciones, se requieren descomposiciones y composiciones, lo que exige reforzar las dimensiones visuales que comentábamos antes, y que constituyen los elementos del sentido espacial (Flores et al., 2015).

Frente a estas expectativas, no podemos evitar limitaciones de aprendizaje reseñadas en diversas investigaciones. Los trabajos de Janvier (1992, 1994 y 1997) nos llaman la atención sobre las dificultades generales de los estudiantes, como las confusiones entre superficie y volumen, o las confusiones entre volumen y capacidad (volumen ocupado y continente). Pero también los trabajos realizados con alumnos con talento nos advierten de su predisposición a apoyarse en los razonamientos formales, o las dificultades para realizar razonamientos que encierren visualizaciones (Ryu et al., 2007). Por último, los diversos documentos encontrados nos ofrecen oportunidades, experiencias sobre descomposición de cuerpos, actividades de comparación de volúmenes y construcción de cuerpos mediante piezas (Buckminster, 2001).

Todos estos aportes nos hacen buscar tareas de enseñanza y organizarlas (análisis de instrucción) en secuencias que permitan alcanzar la profundización en significados que requiere el reposo curricular.

Si queremos que los estudiantes lleven a cabo procesos de comparación mediante descomposiciones, deberemos repasar elementos de relleno de figuras, composición de figuras, especialmente de pirámides. Pero para que se aprecie la medida, mediante relleno con unidades, necesitamos relacionar este relleno de formas con el relleno del espacio, para poder apreciar cómo se pueden medir volúmenes de figuras, como las pirámides, que sabemos no son equidescomponibles de manera finita por el teorema de Dehn.

Siguiendo las recomendaciones de textos como los de la didáctica francesa (Janvier, 1994; Vergnaud, 1983), pero también de Freudenthal (1983) tenemos que promover la comparación directa, la estimación de relaciones de equivalencia y orden, pese a la escasa disposición de los estudiantes con talento a hacer conjeturas no demostradas.

Las búsquedas sobre relleno del espacio, tanto de manera continua como de manera discreta, nos llevan a plantear la comparación de rellenos de bolas, y de los números piramidales, que guardan regularidades que ayudan a confirmar o reforzar conjeturas (Roldan, 2018).

Por último, los procesos de razonamiento sin fórmulas (Nelsen,1999) nos llevan a buscar nuevas construcciones, como la basada en relacionar los procesos de relleno del espacio como los de pirámides y tetraedros con los del cubo.

SESIONES DE CLASE

La clase se inicia con la presentación y planteamiento del problema (obtener razonadamente la fórmula del volumen del tetraedro, mediante descomposiciones), y se formulan distintas actividades encaminadas a resolver finalmente dicho problema.

Durante varios cursos hemos puesto en juego una sesión dedicada al relleno del espacio, que se basa en un puzle de construcción de pirámides y tetraedros, que parece oportuno considerar (Flores, 2006).

Arrancamos con el problema de estudiar los tetrabrik (¿por qué se llaman así?), para apreciar dos aspectos relacionados con la forma de los envases, la facilidad de construcción y la de empaquetamiento, que lleva al interés de buscar rellenos del espacio.

Utilizando el puzle de la Pirámide de Keops, formado por Picos, Zuecos (en notación de Ghyca, 1953), Tejados y Pirámides, buscamos construir nuevas figuras, para finalmente apreciar cómo todas las piezas están constituidas por Tetraedros y Pirámides de base cuadrada, y de hecho estas figuras son la base de diversos puzles para formar nuevas pirámides. Estas figuras además determinan redes de piezas que alcanzan diferentes dificultades, pues los tetraedros se apoyan sucesivamente en caras inclinadas, mientras que las pirámides se prestan a cortarlas en rodajas horizontales (pirámides truncadas) que se apilan, hasta la última que contiene el ápice. Esta sesión termina estableciendo el modelo de relleno del espacio en Tetraedros y Pirámides.

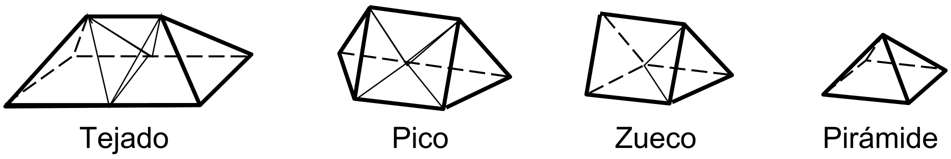


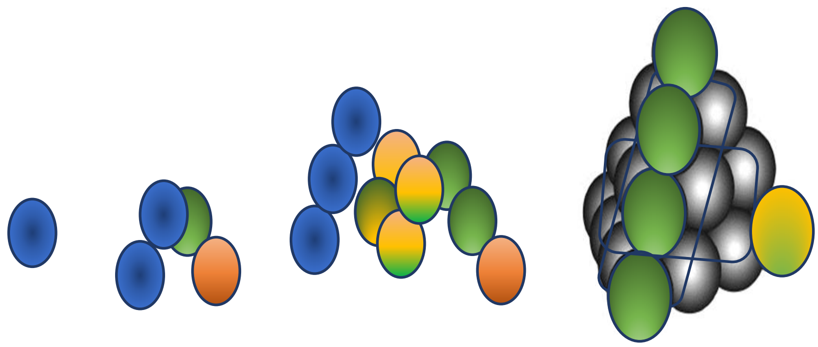
Figura 3. Piezas del puzle de la Pirámide de Keops.

La sesión sobre el volumen del tetraedro arranca con la comparación de los volúmenes de la pirámide (P) y el tetraedro (T), lo que obliga a mirar cantidades de volumen, más que dimensiones. Tiene como fin llegar a obtener la fórmula del volumen del tetraedro por descomposiciones, basado en la relación con figuras de las que sea más fácil apreciar su volumen, pero mediante razonamientos intuitivos. Decidimos emplear como elementos matemáticos el propio concepto de fórmula matemática y las descomposiciones continuas y discretas del espacio, como veremos.

El problema de partida es la comparación de los volúmenes de P y T, de misma arista, a partir de figuras en madera. Para llevar a cabo esta descomposición se pueden establecer diversos caminos. Tras la observación y comparación directa, nos hemos decantado por los dos que describimos a continuación.

El primer camino consiste en formar nuevos P y T de lados dobles y triples, tal como acepta el puzle de la Pirámide de Keops. Como resultado del análisis de las piezas y de la formación de P y T dobles y triples, aparece una relación que determina una superioridad del volumen de P sobre el de T, pero no se puede cuantificar. En las experiencias realizadas en Estalmat, no se ha visto ningún estudiante que utilizara las razones de semejanza entre volúmenes para apreciar la relación entre los P y T iniciales, aunque no se hubiera aceptado como definitiva, por carecer de justificación suficiente.

Formar P y T con bolas lleva a los números tetraédricos y piramidales, muy interesantes por aceptar procesos de construcción recursivos, lo que genera soluciones sugerentes, tanto desde la obtención de las fórmulas (Figura 4), como por la gran riqueza de elementos (véase la relación con el triángulo de Pascal y la relación entre ellos, Roldán, 2018).



T1=1 T2=2+2 T3=1.3+2.2+3.1 T4=1.4+2.3+3.2+4.1

Figura 4. Tetraedro formado por bolas.

Con estas fórmulas obtenidas de manera recursiva, se puede realizar el cálculo de valores muy avanzados empleando el programa *Excel*, o calcular límites para n tendiendo a infinito. En ambos casos se confirma que Volumen de P = 2 · Volumen de T.

Todos estos elementos encierran un proceso infinito, pero también cierta oscuridad, por basarse en razonamientos formales. Buscamos entonces nuevos procedimientos, llegando a plantear el incluir T y P en un cubo. Esta situación arranca de ver el tetraedro delimitado por 6 diagonales del cubo. El cubo se completa con 4 figuras que llamamos triedros trirrectángulos, que se unen formando una pirámide de igual arista (Figura 5).

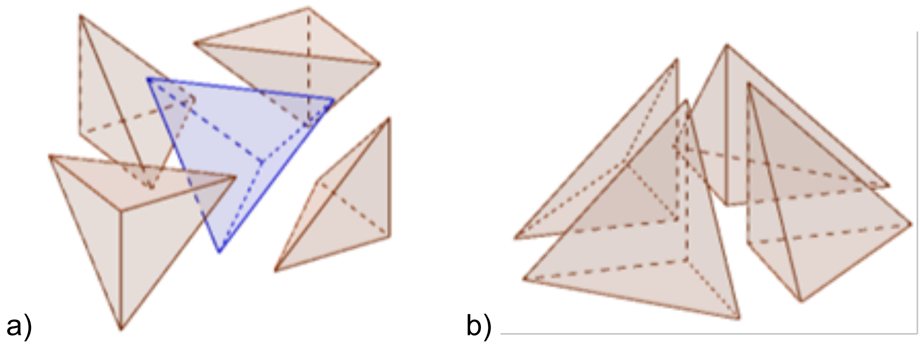


Figura 5. Descomposición de un cubo en un tetraedro y cuatro triedros trirrectángulos (a) que se unen para formar una pirámide (b).

Uniendo dos de estos triedros trirrectángulos obtenemos una pirámide de igual base y altura que un tetraedro, lo que confirma que P=2T, pero para aceptarlo como demostrado, tenemos que recurrir a la fórmula, basada en el Principio de Cavalieri.

Describimos a los estudiantes un proceso (sin esperar que ellos lo encuentren), en el que vamos truncando el triedro trirrectángulo por un plano paralelo a una de las bases formadas por triángulos rectángulos, en la mitad de la altura, y girando el triedro trirrectángulo superior sobre el tronco de triedro, con lo que aparece un cubo con dos triedros trirrectángulos de lado mitad, a los lados. Reiterando el proceso con los nuevos triedros, vemos que aparece un fractal, formado por una serie de cubos (Flores y Ramírez, en prensa), que llegan a rellenar un tercio de medio, lo que se demuestra mediante un recubrimiento del que calculamos la suma de volúmenes a partir de la suma de las áreas que proyectan en una de las caras del cubo, y empleando una demostración conocida (Nelsen, 1999).

Esta ubicación de T y P dentro del cubo reafirma la relación entre rellenos del espacio, especialmente relaciona el clásico relleno en cubos con el relleno en P y T. Y esta cualidad es interesante para poder relacionar la medida del tetraedro y de la pirámide en metros cúbicos.

CONCLUSIONES

En esta exposición hemos mostrado cómo el reposo curricular ayuda (más que da respuesta) a emplear elementos de investigación en didáctica y en matemáticas, para generar sesiones de atención a los estudiantes con alta capacidad matemática.

Hemos mostrado que, como consecuencia del reposo curricular, el profesor ha profundizado en el significado del concepto de volumen, por medio de un análisis didáctico del mismo. Dentro de los análisis parciales llegamos a aportar elementos novedosos y evocadores que se han empleado para proponer actividades que muestran que las fórmulas y cálculos formales de las matemáticas se pueden relacionar con razonamientos visuales y prácticos, lo que da ocasión de tratar explícitamente con los estudiantes elementos de razonamiento que se emplean en matemáticas, llevándolos a realizar un reposo sobre conceptos curriculares tratados anteriormente. Esperamos que estos aportes sean útiles para dar más apoyo al tratamiento enriquecedor del currículo que requieren estos estudiantes, sin suponer un avance hacia nuevos resultados.

REFERENCIAS

Buckminster, R. (2001). *Synergetics. Explorations in the geometry of thinking*. Nueva York, NY: Macmillan.

Dehn, M. (1901). Über den Rauminhalt. *Mathematische Annalen, 55*(3), 465-478.

Flores, P. y Ramírez, R. (en prensa). *A note for the Third Problem of Hilbert. A fractal construction*.

Flores, P., Ramírez, R. y Del Río, A. (2015b). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Flores, P. y Rico, L. (Coords.) (2015). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en educación primaria*. Madrid: Pirámide.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Ghyca, M. C. (1953). *Estética de las proporciones y de las artes*. Buenos Aires: Poseidón.

Janvier, C. (1992). Le volume comme instrument de conceptualisation de l'espace. *Topologie Structurale,18*, 63-75.

Janvier, C. (1994). *Le volume. Mais où sont les formules*. Montreal, Canadá: Modulo Editeur.

Janvier, C. (1997): Grandeur et mesure: la place des formules et l'exemple de volume. *PLOT, 83*, 25-38.

Lupiáñez, J. L. (2013). Artículos académicos para análisis didáctico: La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-101). Granada: Comares.

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, B. (2015). Sentido de medida. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. (pp. 147-168). Madrid: Pirámide.

Nelsen, R. B. (1999). *Proofs without words*. *Exercises in visual thinking*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1970). *The child's conception of geometry*. Londres: Routledge and Kegan Paul.

Ramírez, R. (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Ramírez, R. y Flores, P. (2016). Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular. *Suma, 83*, 33-41.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds) (2013). *Análisis didáctico en educación primaria*. Granada: Comares.

Rico, L. y Moreno, A. (Coords.) (2018). Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria. Madrid: Pirámide.

Roldan, A. (2018). Números piramidales. *Colección hojalmat.es*. http://www.hojamat.es

Ryu, H., Chong, Y. y Song, S. (2007). Mathematically gifted students´ spatial visualization ability of solid figures. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 137-144). Seúl, Corea del Sur: PME.

Segovia. I. y Rico, L. (Coords.) (2011). *Matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Pirámide.

Vergnaud G. (1983). Didactique du concept de volume. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(1), 9-25.

Zorío, V. (1975). Reflexión didáctica: teoría de la medida. En *Cursillos sobre Didáctica de la Matemática, IX* (pp. 58-73). Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

LA ADICCIÓN A LAS MATEMÁTICAS NO PERJUDICA LA SALUD

Addiction to mathematics is not harmful

Gilderdale, C.

NRICH, Faculty of Mathematics, University of Cambridge (Gran Bretaña)

Resumen

Explorar, plantearse preguntas, conjeturar, establecer conexiones, justificar, generalizar, … son actividades que forman parte del corazón de los descubrimientos matemáticos y que los matemáticos practican continuamente. Los buenos profesores de matemáticas intentan que estudiar matemáticas sea una experiencia enriquecedora para sus alumnos. Mostraré cómo ayudar a los estudiantes a introducirse en el mundo de la exploración matemática y a que avancen por el camino de trabajar y pensar como un matemático. Este tipo de clases resulta especialmente atractivo para los estudiantes con alta capacidad matemática, que siempre están deseando enfrentarse a un nuevo reto matemático.

Palabras clave: *NRICH, resolución de problemas, motivación, alta capacidad matemática*

Abstract

Exploring, asking questions, guessing, making connections, justifying, generalizing,… are activities that are at the heart of mathematical discoveries and that mathematicians continually practice. Good mathematics teachers try to make studying mathematics an enriching experience for their pupils. I will show how to help students enter the world of mathematical exploration and move down the path of working and thinking like a mathematician. This type of class is especially attractive for mathematically gifted students, who are always eager to face a new mathematical challenge.

Keywords: *NRICH, problem solving, motivation, mathematical giftedness*

Usamos NRICH para publicar problemas, recursos para enriquecer la dieta de matemáticas y quiero hablar un poco de nuestros pensamientos, así que, para los que no han visto la página de NRICH les voy a mostrar la página de inicio (Figura 1). Pueden ver aquí que tenemos recursos para profesores o maestros de primaria, profesores de secundaria y también post-16, para estudiantes que quizás van a estudiar matemáticas después en la universidad o ingeniería, por ejemplo, y para sus profesores. Pero también tenemos páginas para los estudiantes, publicamos problemas e invitamos a los estudiantes a que nos manden sus soluciones a los problemas y también publicamos sus soluciones. Todos los problemas tienen su identificación, todas las páginas empiezan por nrich.maths.org y después, si yo pongo / y el número 900, sé que ese número me lleva a un problema que se llama “Attractive Tablecloths” (Manteles Atractivos), y hay problemas de manteles del lunes, del martes, del miércoles, del jueves y del viernes. Sé que, por ejemplo, el número 1053 nos lleva a un problema que se llama “What’s it Worth?”. Les explico esto porque todo de lo que voy a hablar, y las diapositivas que voy a compartir, las he puesto en una página que he publicado, pero es difícil acordarse de los números, así que en vez de un

Gilderdale, C. (2021). La adicción a las matemáticas no perjudica la salud. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 17-26). Logroño: Universidad de La Rioja.

número he llamado a esta página jornadas2020 (nrich.maths.org/jornadas2020); la página es libre para todos, no se necesita contraseña ni palabra de paso. Todas las diapositivas que voy a mostrar están ahí y también hay enlaces a otro recurso del que no voy a tener tiempo de hablar, pero los que estén interesados van a poder verlos. Desafortunadamente es todo en inglés, pero todas las diapositivas (en español) van a estar compartidas en esa página.

Figura 1. Página web de NRICH.

Quiero empezar mostrándoles este modelo que Jeremy Kilpatrick y sus colegas publicaron hace 20 años porque esto informa bastante de lo que hacemos en NRICH (Figura 2). Esto es una imagen de una soga y lo que estaba diciendo Jeremy es que hay cinco ingredientes que se ven cuando se ve gente que funciona matemáticamente; la preocupación es que quizás hay demasiado interés, o demasiado enfoque, en dos cabos de la cuerda, pero lo importante es que están los cinco trabajando juntos, se soportan entre sí. Nosotros hemos convertido esto en un *modelo para estudiantes* (Figura 3) y esto es lo que les quiero compartir.

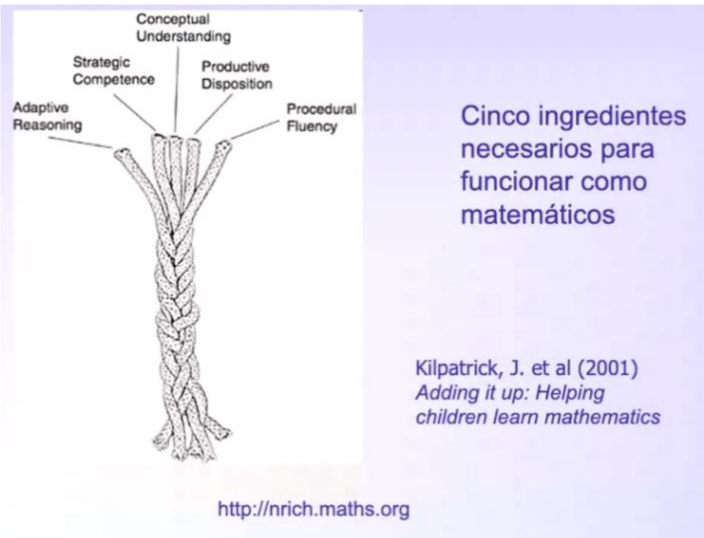


Figura 2. Modelo de la soga de Kilpatrick et al. (2001).

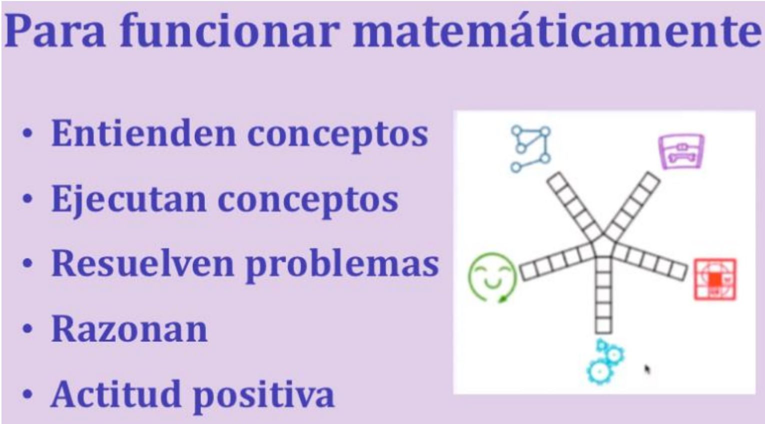


Figura 3. Modelo de la soga de NRICH.

- El primer ingrediente son los *conceptos* que están interrelacionados - hay conexiones. Queremos que los estudiantes entiendan los conceptos que van a utilizar.
- Y es necesario tener una caja de herramientas para poder *ejecutar algoritmos*. Lo que nos preocupaba en NRICH es que en la mayor parte del tiempo, en las escuelas los estudiantes se estaban centrando solamente en estas dos categorías y nosotros pensábamos que había otras tres que eran importantes y eso es lo que quiero compartir.
- En rojo está la habilidad de *resolver problemas*. Para funcionar matemáticamente es importante que nuestros estudiantes puedan ver problemas que nunca han visto antes, que no han sido demostrados por sus profesores y maestros, pero sepan qué hacer o tengan la confianza para probar, para experimentar por ejemplo.
- El siguiente icono corresponde a que es importante que los estudiantes puedan *razonar*, puedan explicar, puedan justificar lo que hacen, comprobar. Esto es muy importante en matemáticas.
- Y finalmente el otro icono representa que los estudiantes tengan una *actitud positiva*. Queremos que nuestros estudiantes se sientan positivos en dos sentidos distintos:
    - ◊ respecto a la materia, queremos que sean positivos hacia las matemáticas,
    - ◊ pero también positivos respecto a su propia capacidad como estudiantes de matemáticas. Carol Dweck ha escrito un libro que se titula Mindset (Mentalidad) (Dweck, 2006) y ella habla de *mentalidad de crecimiento*, mentalidad en la que los estudiantes saben que pueden crecer. Y que esos estudiantes funcionan de distinta manera a los estudiantes que piensan que todo viene heredado.

Tenemos estas cinco categorías y lo que queremos hacer en NRICH cuando estamos publicando problemas es darles a nuestros estudiantes oportunidades para que usen los conceptos que tienen, que tengan que escoger qué algoritmos, qué herramientas van a tener que usar, el contexto es problemas que les damos y tratamos de dar problemas que no sean igual a los problemas que han visto en las aulas, donde quizá ha sido todo demostrado. Queremos darles oportunidades para pensar y quizás que no sea inmediatamente obvio lo que tienen que hacer. Van a tener que razonar y justificar y esperemos que al final de esa experiencia tengan una actitud positiva.

Nosotros tenemos que pensar qué experiencias, qué es lo que tenemos que ofrecer a los estudiantes si queremos que terminen en el colegio, que terminen en nuestras aulas con estas cinco maneras de funcionar y muchos de nuestros problemas siguen este trayecto matemático (Figura 4):

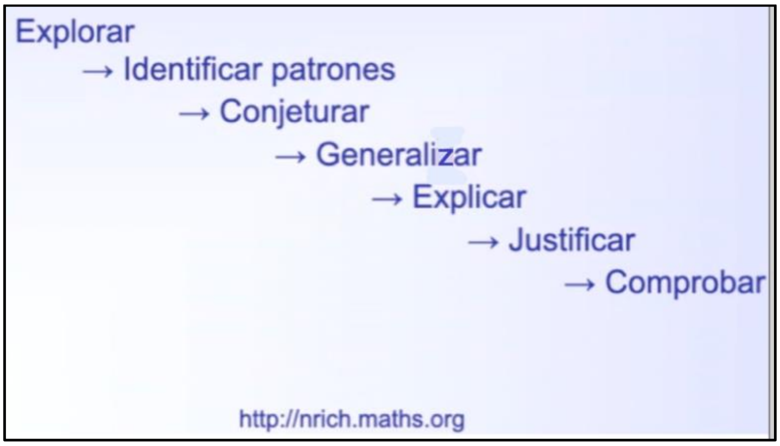


Figura 4.Trayecto matemático.

Les damos oportunidades para explorar, esperamos que identifiquen patrones, queremos que conjeturen, queremos que descubran, que generalicen, y también que puedan explicar, justificar y a veces comprobar.

Así que empezamos con problemas, empezamos con la posibilidad de que los estudiantes puedan trabajar de una manera muy matemática.

Lo que quiero hacer ahora es trabajar con ustedes de esta manera con un problema para darles una idea de este proceso: Consideremos números que se pueden expresar como la suma de dos o más números consecutivos.

Estoy pensando en números positivos. Así por ejemplo, el número 7 = 3+4 se puede expresar como la suma de dos números consecutivos. Ahora les voy a dar el 15. Pero antes de mostrarles el 15 quizá quieran pensar ¿es posible expresar 15 como la suma de dos números consecutivos? ¿Es posible expresar 15 como la suma de más de dos números consecutivos?

Algunos participantes han encontrado que 15 es un número muy especial. Se puede escribir como la suma de dos, de tres y de cinco números consecutivos:

$$15 = 7 + 8$$

$$15 = 4 + 5 + 6$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Finalmente les voy a dar 22. El número 22 es especial porque se puede escribir como la suma de cuatro números consecutivos. Lo que les quiero pedir es si pueden elegir unos números y ver cuántas formas pueden encontrar para expresar su número como suma de números consecutivos.

Esto es como el principio de este trayecto matemático (Figura 4), donde inicialmente les estoy invitando a explorar matemáticamente.

H escribió que 33 se puede expresar como la suma de dos números consecutivos. Creo que 33 se puede expresar también como la suma de tres números y como la suma de seis números consecutivos. ¿Así que, H, puedes buscar esas sumas?

D ha escrito que 18 es la suma de tres números consecutivos. Creo que también es la suma de cuatro números.

J ha escrito que 30 es la suma de tres números. Creo que también es la suma de cuatro números y también de cinco números. ¿Alguien ha encontrado 33 como la suma de tres números?

M está comenzando a usar álgebra. ¿Qué significado tiene n, n+1, n+2, como 3n+3?

Bastantes han escrito 33 como la suma de tres números. Mi desafío es cómo escribir 33 como la suma de 6 números. Si estuviéramos trabajando con estudiantes, quizás algunos, después de explorar, podrían escribir sus números sistemáticamente, y quizás en una tabla:

Oportunidad para trabajar sistemáticamente

	2	**3**	**4**
1 =			
2 =			
3 =	1 + 2		
4 =			
5 =	2 + 3		
6 =		1 +2 + 3	
7 =	3 +4		
8 =			
9 =	4 + 5	2 + 3 +4	
10			1 + 2 + 3 + 4

Lo que me interesa es si alguien ha visto patrones. Esto es una oportunidad para identificar patrones. Por ejemplo, algunos se dan cuenta de que los números impares se pueden escribir como la suma de dos números consecutivos. Por ejemplo, 7 = 3+4, 15 = 7+8. Este era uno de los patrones. Algunos quizás se dieron cuenta de que los múltiplos de tres se pueden escribir como la suma de tres números consecutivos. Por ejemplo, 15 = 4+5+6, 9 = 2+3+4, 60 = 19+20+21. Y quizás, aunque esto no es tan obvio, que algunos números pares se pueden escribir como la suma de cuatro números consecutivos. 22 era un ejemplo que teníamos y cuando vi que alguien había escrito 18 sabía que era 18 = 3+4+5+6.

Oportunidad para identificar patrones

- Los números impares se pueden escribir como la suma de dos números consecutivos.
- Los múltiplos de 3 se pueden escribir como la suma de tres números consecutivos.
- Algunos números pares se pueden escribir como la suma de cuatro números consecutivos.

Una vez que hemos hecho una lista de los patrones que hemos visto quizá es una oportunidad para conjeturar y generalizar. Quizás una oportunidad despierta algunas preguntas. (Pide a los participantes que escriban en el chat qué preguntas han aparecido para ustedes después de haber trabajado en algunos ejemplos y haber visto lo que ha presentado el resto del grupo). Este es un ejemplo de cuando la matemática es adictiva. ¡Mi adicción a la matemática hace que siga con el problema y me olvide de hablar de NRICH!

P ha escrito qué números NO se pueden escribir como suma de números consecutivos. S ha escrito: “primos?” Esto es una forma de conjeturar. Queremos esta cultura en las clases, donde no solamente hablan los estudiantes cuando están seguros de algo, hablan también cuando tienen preguntas, les interesa algo, tienen curiosidad. Tengo una respuesta para los primos: 7 = 3+4, pero quizás sólo se puede escribir de una manera. Veremos…

M ha escrito qué tipos de números se pueden escribir como suma de 2, 3, 4 números consecutivos. ¿Es posible, por ejemplo, escribir un número como la suma de dos números consecutivos y también como la suma de cuatro números consecutivos? Me interesaría ver un ejemplo. No estoy seguro…

J pregunta: "¿cómo saber de cuántas formas distintas se puede escribir un número concreto dado?" Quizás algunos de ustedes vieron que yo enseguida supe que 18 se puede escribir de cuatro maneras, 60 sé que se puede escribir como suma de tres números, 60 también se puede escribir como suma de cinco números. Yo no he memorizado todo esto, pero sé que hay algo especial en el número 60 y por eso sé que se puede hacer.

J escribe: "Todos los primos excepto el 2 se pueden escribir como suma de consecutivos". O ha respondido: "No. No es posible. Cuando sumamos dos números consecutivos el resultado es siempre impar. 5+6 = 11. Pero cuando sumamos cuatro números consecutivos la suma va a ser par". Creo que ha escrito esto como respuesta a mi pregunta de si un número se puede escribir como suma de dos números consecutivos y como suma de cuatro números consecutivos. Y parece que es imposible porque la suma de dos consecutivos da impar y la de cuatro da par. ¿Es posible tener sumas de cuatro consecutivos y de ocho consecutivos? Porque ambos van a ser pares. Pero no sé si es posible encontrar un número que se puede...

Aquí tenemos ejemplos de conjeturas, oportunidad de generalizar, y esto quizá son preguntas que han aparecido.

Oportunidad para conjeturar y generalizar

- Me pregunto si todos los números pares que no son múltiplos de 4 se pueden escribir como la suma de cuatro números consecutivos.
- Me pregunto si todos los números de x, cuando x es impar, se pueden escribir como la suma de x números consecutivos.

Pero lo importante para funcionar matemáticamente no es solamente responder, poder contestar, poder resolver problemas. También es importante ser curioso, tener preguntas, porque con las preguntas y la curiosidad uno empieza en este trayecto matemático. No es necesario tener siempre otras personas -maestros, profesores- dándonos las preguntas, es muy bueno tener preguntas nuestras. En los vídeos de las dos estudiantes, una de Costa Rica y otra de Chile, que se mostraron en la presentación de las Jornadas, parecía que a ellas les encantaba trabajar matemáticamente. Así que tenemos que acostumbrar a los estudiantes a que tengan sus preguntas, que no solamente trabajen en las preguntas de los libros o de los profesores.

También hay ahora oportunidad para ofrecer explicaciones. Yo he explicado algunas de las cosas, pero también alguien dijo que dos números consecutivos iban a dar una respuesta impar y cuatro números consecutivos iban a dar una respuesta par. No pedí explicación. Quizá si estuviera en un aula con profesores pediría que me explicaran eso. Y quizá algunos se dieron cuenta de que tres números consecutivos son siempre múltiplos de 3 y quizás usen álgebra: x, $x+1$, $x+2$.

Si quitamos 1 al número más grande y se lo damos al más pequeño entonces acabamos con $x+1$, $x+1$, $x+1$. Es como tener 4+5+6 = 15. Si quito 1 al 6 y se lo doy al 4, termino con 5+5+5 = 3x5, es decir 3 multiplicado por el número de en medio. Así, cuando cogí el número 60, por ejemplo, yo sabía que era el número 20+20+20 y es lo mismo que 19+20+21. Estoy usando el mismo razonamiento, pero aquí lo estoy representando algebraicamente. Y queremos que nuestros estudiantes hagan lo mismo:

$$x + (x+1) + (x+2) = (x+1) + (x+1) + (x+1) = 3(x+1)$$

Y quizá se den cuenta de que podemos hacer lo mismo cuando tenemos cinco números consecutivos o siete números consecutivos o nueve números consecutivos.

Oportunidad para ofrecer explicaciones

La suma de tres números consecutivos es siempre múltiplo de 3:

$x + (x+1) + (x+2) = (x+1) + (x+1) + (x+1) = 3(x+1)$

Puedo hacer lo mismo con cualquier número impar porque puedo emparejar números a ambos lados del número del medio.

Ahora les pido que escriban cómo explicarían, cómo comprobarían que algo que han visto (en esta sesión) es correcto.

J ha escrito que es imposible que un número pueda expresarse como cuatro consecutivos y como ocho. Mi desafío es: ¿Me puedes convencer? En Inglaterra, nuestro colega John Mason dice: “convince yourself, convince your friend, convince the enemy”, Hay que convencerse, después hay que convencer a los amigos y después hay que convencer a los enemigos. Lo que quiere decir es que cuando estás en un aula, se puede convencer a un compañero que está al lado nuestro, pero después hay que convencer a toda la clase.

O ha escrito: “la suma de cuatro números consecutivos no es múltiplo de cuatro pero la suma de ocho consecutivos sí es múltiplo de cuatro”. Yo quiero saber ¿Cómo sabes eso?, ¿cómo estás seguro? ¿cuál va a ser la verdad cuando tenemos números muy, muy grandes? L ha escrito que la suma de dos números consecutivos se puede escribir como $2n+1$ y eso se puede usar para justificar que va a ser un número impar.

Alguien ha escrito ocho números consecutivos $8n+28$, que es lo mismo que $8n+24+4$. Eso es lo mismo que $8n+8+8+8+4$, que es múltiplo de 8 más 4, y me convence de que el resultado va a ser par, pero no va a ser múltiplo de 8, pero sí va a ser múltiplo de 4.

El álgebra nos abre una ventana al patrón, nos ayuda a entender lo que está pasando. C escribe “cuatro consecutivos suman $4n+2$” y ha empezado con n-1. Si hubiese empezado con n nos habría dado $4n+6$, que es lo mismo a $4n+4 + 2$.

Creo que generalmente los estudiantes no se dan cuenta de que el álgebra les da “insight”, percepción, pueden entender algo mejor porque el álgebra condensa lo que es significante. Lo que es interesante en lo que estamos haciendo es que el problema con el que empezamos ha originado toda esta conversación matemática y eso es de lo que quiero hablar ahora.

Les propongo una tarea para llevarse a casa, “homework” en Gran Bretaña:

Oportunidad para comprobar …

… que las potencias de 2

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

No se pueden escribir como la suma de dos o más números consecutivos.

Algunos se habrán dado cuenta de que las potencias de 2 no se pueden escribir como suma de dos o más números consecutivos. Mi desafío es que comprueben que eso es cierto.

Tenemos que pensar qué es lo que ofrecemos a nuestros estudiantes. Y esto es lo que nosotros pensamos cuando estamos trabajando en NRICH. Cuando decidimos publicar un problema, ¿qué hacemos?

¿Qué ofrecemos a nuestros estudiantes?

- Actividades que se adaptan a las capacidades de los estudiantes: inicio bajo, alcance alto.
- Oportunidades para expresar lo que piensan y refinar su comprensión.
- Una cultura donde es aceptable cometer errores.
- Usar con mesura preguntas que guían a la resolución de problemas.
- “HOTS not MOTS”: aumentar el grado de dificultad en vez de ofrecer más de lo mismo.
- Oportunidades para discutir matemáticas.
- Profesores que modelan el comportamiento matemático.
- Profesores que celebran los comportamientos matemáticos que desean promover: razonamiento en lugar de respuestas.

- Actividades que se adaptan a las capacidades de los estudiantes. Tenemos problemas que son fáciles para que todos los estudiantes los puedan entender y que todos los estudiantes puedan empezar. Pero también tenemos desafíos que son difíciles. Para el ejemplo que estamos considerando, los estudiantes pueden encontrar números que se pueden escribir como suma de dos o de tres o de cuatro números consecutivos, pero convencerse de que no se puede hacer con las potencias de dos es mucho más difícil y hemos usado álgebra, que está en el medio, ahí. En Inglaterra y en NRICH verán que escribimos “Low Threshold High Ceiling” LTHC, que significa que es fácil entrar a un edificio cuando no hay una escalera, no hay que subirse para entrar al problema.
- Oportunidades para expresar lo que piensan y refinar su comprensión. Y por eso quería que tuvieran la oportunidad de usar el chat. John Holt escribió un libro que se llama “How children fail” (Cómo fallan los estudiantes), y él decía que es muy importante que los profesores tengan la experiencia de trabajar como estudiantes de vez en cuando para que recuerden cómo es esa experiencia; yo quería que ustedes tuvieran también la experiencia de explorar, identificar patrones, conjeturar, generalizar.
- Y lo bueno es tener una cultura donde es posible hablar cuando uno no está seguro. Cuando yo era estudiante los únicos que hablaban eran los que estaban muy seguros de que tenían la respuesta. Es mucho más interesante trabajar en una clase donde los que no están completamente seguros son los que hablan y quizás el resto de la clase se da cuenta de que eso no es tan simple y que hay que encontrar maneras para que todos entiendan. Volviendo a John Mason, yo he estado en una clase con él y él ha pedido que los estudiantes que están seguros no hablen, y que hablen los que no están seguros. También prestaba atención a lo que decía cuando estábamos trabajando con mis estudiantes. Una vez, cuando estábamos trabajando todo el día, empezó la tarde diciendo que algunos estudiantes habían trabajado mucho por la mañana, hablando mucho, y quería que se pasaran la tarde trabajando en escuchar, y durante la mañana habían estudiantes que habían escuchado mucho, y él quería que ellos trabajaran por la tarde en hablar. Y la tarde era completamente distinta a la mañana. Los que generalmente hablaban estaban escuchando, y los que generalmente escuchaban estaban hablando, y tenían mucho interesante por decir, pero no tenían quizá la confianza. Necesitamos esa cultura en la clase donde todos pueden hablar.

  El problema es que nuestros estudiantes realmente no nos ven trabajando en problemas que son nuevos para nosotros. Si nos viesen trabajando en esos problemas se darían cuenta de que muchas veces tachamos todo y tiramos el papel a la basura y empezamos desde el principio. Pero generalmente cuando nos ven trabajando en la pizarra no nos ven haciendo fallos, y piensan que para trabajar matemáticamente tienen que trabajar como nosotros. Es difícil a veces tener una cultura donde es aceptable cometer errores.

- Usar con mesura preguntas que guían a la resolución de problemas. Queremos que nuestros estudiantes salgan de nuestra clase con una actitud positiva, que piensen que han podido resolver la mayoría de los problemas. Han tenido un poco de nuestra ayuda, pero quiero que piensen que han podido hacer bastante ellos, que no nos necesitaban todo el tiempo, que pueden trabajar matemáticamente con un poco de nuestra ayuda.
- “HOTS not MOTS”. Lo pongo acá por si acaso van a la página web de NRICH y lo ven. “HOTS” significa “Higher Order Thinking Skills”, estrategias de pensamiento de alto nivel. “not MOTS” significa “not More Of The Same”, no más de lo mismo. A veces, cuando yo era estudiante y trabajaba bastante rápido y le preguntaba al profesor “¿Qué hago ahora?”, me daba más de lo mismo. Eso no es lo que necesitaba, necesitaba algo de un grado de dificultad más alto. Necesitaba que me desafiase con algo más interesante.
- Oportunidades para discutir matemáticas, como hemos hecho en el chat, y eso lo podemos hacer. Uno de mis estudiantes, que ahora es un profesor en una escuela, tiene en su clase, en vez de un póster donde se muestren los resultados del trabajo de sus estudiantes, pide que sus estudiantes escriban sus conjeturas. Es un “conjecturing board”. Los estudiantes van a ver lo que otros estudiantes han conjeturado, y a veces otros estudiantes dicen “Tengo un ejemplo que comprueba que esto no es verdad” o “Puedo comprobar que esto es verdad”. Ofrece una oportunidad para discutir. Las matemáticas son una materia viva, donde podemos discutir y no tenemos solamente que trabajar con estos problemas que han sido demostrados en los libros.
- Profesores que modelan el comportamiento matemático, porque somos curiosos y estamos interesados.
- Y también profesores que celebran los comportamientos matemáticos que desean promover, no solo la respuesta correcta sino también estudiantes que son curiosos y que, cuando tienen un desafío que es difícil, no se rinden fácilmente. Queremos que los profesores se den cuenta de que hay estudiantes ahí que se comportan de esta manera muy matemática. Si son curiosos, si razonan, si usan álgebra de maneras que no se ha pedido, por ejemplo.

Si quieren saber más de este modelo que hemos usado, se trata del modelo de la soga de Jeremy Kilpatrick (Figura 2), y lo hemos cambiado a este modelo para estudiantes (Figura 3). En la página https://nrich.maths.org/14718 hay un artículo donde explicamos cómo se puede usar esto con estudiantes. Quizás si los estudiantes han estudiado un tema, al final de trabajar en algo durante una o dos semanas, el profesor o los estudiantes pueden escribir o colorear: “Ah, entiendo esto muy bien, voy a colorear 5 cuadrados”, y “Los algoritmos de esto los entiendo también muy bien, pero no estoy seguro de si puedo resolver problemas, voy a colorear solo 2 o 3”, y también “Mi razonamiento de esto tiene que mejorar, pero todavía tengo una actitud positiva, así que voy a colorear bastante”. En la página https://nrich.maths.org/jornadas2020 hay también recursos en inglés que tienen enlaces a muchos problemas que están en el plan de estudios de primaria y de secundaria (Figura 5).

Nuestros problemas favoritos los hemos puesto en “Plan de estudios” y también tenemos ideas para enriquecer el plan de estudios para profesores. Si quieren saber un poco más de qué hemos leído, y que informa lo que hacemos, tenemos las páginas “Qué pensamos” y “Por qué lo pensamos”. Y también tenemos páginas para estudiantes de primaria y secundaria que quieren pensar matemáticamente (“Pensando matemáticamente”). Así que, si yo fuese un profesor de estos estudiantes, estas son las páginas a las que iríamos.

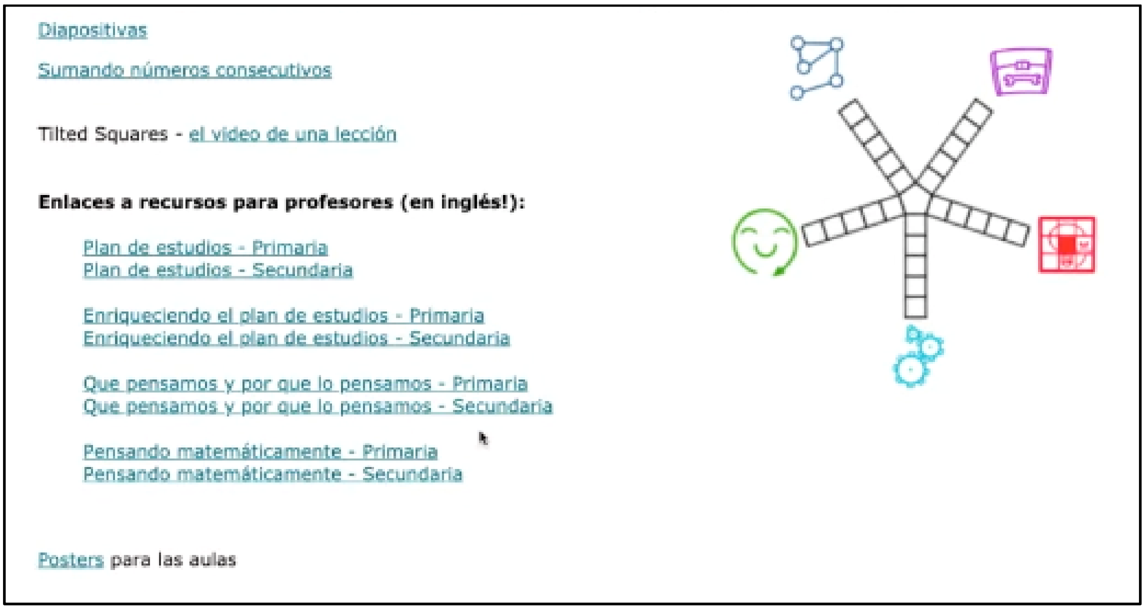


Figura 5. Página de recursos en la web de NRICH.

Quiero terminar diciéndoles que he estado trabajando con profesores en Noruega los últimos dos o tres años y en Noruega han traducido nuestros problemas favoritos y están usándolos en escuelas en Noruega. Este es el enlace que han producido https://www.mattelist.no/. Estoy un poco celoso porque a veces el “Mattelist” parece más lindo que NRICH, más limpio y tiene imágenes muy lindas. Nosotros hemos escogido nuestros problemas favoritos y los han traducido al noruego. Entonces una invitación aquí, a todos los que están participando hoy y mañana. Quizás algún día podríamos trabajar juntos y tener una versión de NRICH, o de nuestros problemas favoritos, en español. Así que, si alguien tiene tiempo y sabe cómo podemos financiar esto, me encantaría poder ofrecer problemas de NRICH no solamente a los profesores y estudiantes que hablen inglés, sino también a los profesores y estudiantes de España y Latinoamérica.

He disfrutado trabajar con ustedes en esta conferencia. Hay alguien, que se llama María, que está participando y que me ayudó con mi español, así que voy a usar esta oportunidad para agradecer a María. Fuimos caminando el martes y le dije lo que quería decir en inglés, y ella me ayudó a traducir mucho. Espero que hayan podido entender lo que decía, y les quiero desear un buenísimo resto del día hoy y mañana, que disfruten de todas las jornadas.

“Over to you”, como se dice en inglés.

REFENCIAS

Dweck, C. S. (2006). *Mindset: the new psychology of success*. Nueva York, NY: Random House.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Academy Press.

COMUNICACIONES

CARACTERÍSTICAS DIFERENCIADORAS DE ESTUDIANTES CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS

Discriminating characteristics of mathematically gifted students when solving geometric pattern problems

Arbona, E. [a], Gutiérrez, A. [a], Beltrán-Meneu, M.J. [b]

[a] Depto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València (España). [b] Depto. de Educación y Didácticas Específicas, Universitat Jaume I (España)

Resumen

Presentamos un estudio comparativo de las estrategias empleadas por estudiantes medios y superdotados de los últimos cursos de Educación Primaria al resolver problemas de patrones geométricos. El análisis nos ha permitido descubrir las diferencias existentes entre ambos grupos e identificar algunas características diferenciadoras de la alta capacidad matemática, como la rapidez de aprendizaje y la habilidad para invertir procesos mentales.

Palabras clave: *pre-álgebra, patrones geométricos, alta capacidad matemática, educación primaria*

Abstract

We present a comparative study about strategies used by average and gifted students from lasts grades of Primary School while solving geometric pattern problems. Our analysis has shown existing differences between both groups of students and has led us to identify discriminating characteristics of mathematically gifted students, such as quickness of learning and ability to reverse mental processes.

Keywords: *pre-algebra, geometric pattern problems, mathematical giftedness, primary school*

INTRODUCCIÓN

Una de las principales novedades en el currículo de los últimos cursos de educación primaria o los primeros de educación secundaria, dependiendo de los países, es la aparición del lenguaje algebraico, necesario para poder avanzar en el aprendizaje de las diferentes áreas matemáticas. En cualquier caso, tradicionalmente, el uso del lenguaje algebraico aparece de manera brusca y muchos estudiantes tienen dificultades para comprenderlo y utilizarlo correctamente, a causa de los obstáculos epistemológicos presentes en ese primer contacto con el lenguaje simbólico. Es por ello que, desde hace bastante tiempo, la investigación en educación matemática se ha ocupado de analizar el periodo de transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, periodo que suele denominarse pre-álgebra. Entre los aspectos clave de esta transición destacan el cambio de significado de los símbolos usados en las operaciones aritméticas (=, +, -, etc.) y la necesidad de desarrollar razonamiento abstracto para realizar actividades como la generalización de procesos matemáticos y la identificación de relaciones

Arbona, E., Gutiérrez, A. y Beltrán-Meneu, M. J. (2020). Características diferenciadoras de estudiantes con alta capacidad matemática en la resolución de problemas de patrones geométricos. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 29-36). Logroño: Universidad de La Rioja.

funcionales. Las investigaciones realizadas en este contexto muestran que resolver problemas de pre-álgebra es beneficioso para los estudiantes cuando inician el estudio del álgebra.

Un contexto muy usado en la enseñanza de pre-álgebra es la resolución de problemas de patrones geométricos (ppg). La manera típica de formular estos problemas consiste en presentar un contexto realista, que sea significativo para los estudiantes, en el cual se realiza una actividad relacionada con una sucesión estrictamente creciente de números naturales; generalmente son progresiones aritméticas, pero también pueden ser progresiones geométricas u otros tipos de sucesiones (Friel y Markworth, 2009). El enunciado del problema muestra representaciones gráficas de los primeros términos de una sucesión y plantea diversos tipos de preguntas relativas a los términos de la sucesión; las más habituales en la literatura son (Arbona, 2016): preguntas *directas*, en las que se pide calcular el valor del término que está en una posición concreta indicada (la posición puede ser *inmediata*, *próxima* o *lejana*); preguntas de *generalización*, en las que se pide expresar una forma de calcular el valor de cualquier término, es decir una aproximación a la expresión algebraica del término general; preguntas *inversas*, en las que se pide calcular la posición del término que tiene un valor concreto indicado. En nuestra investigación, además de estos problemas, hemos preparado otros ppg dirigidos a estudiantes más avanzados, que ya han superado la fase inicial, centrada en aprender a generalizar los patrones, y están en condiciones de empezar a escribir y manipular expresiones algebraicas.

En educación matemática, se caracteriza a los estudiantes con alta capacidad matemática (acm) en base a diversos rasgos de su forma de hacer matemáticas, que tienen principalmente que ver con su capacidad de resolver problemas, superior a la media de los estudiantes de su edad o curso (Krutetskii, 1976). Por ello, la resolución de problemas es el mejor contexto para que los profesores puedan identificar a sus alumnos con acm y es importante tener criterios para identificar las formas de resolver problemas de diversos tipos y contenidos matemáticos (aritmética, geometría, álgebra, etc.) que son propias de los estudiantes con acm. En pre-álgebra, varias investigaciones han mostrado que los niños de Primaria con acm son capaces de progresar rápidamente para lograr el nivel de razonamiento abstracto necesario para resolver problemas algebraicos (Fritzlar, Karpinski-Siebold, 2012; Gutiérrez, Benedicto, Jaime, Arbona, 2018).

El uso de las TICs para la enseñanza a estudiantes con acm resulta igual de beneficioso que con cualquier otro estudiante. Las TICs pueden facilitar el trabajo individual de los estudiantes, lo cual es muy útil para dar autonomía a los estudiantes con acm y que puedan avanzar a su ritmo y resolver actividades o problemas en más cantidad o diversidad que sus compañeros. Existen distintas aplicaciones informáticas creadas para la enseñanza inicial del álgebra, en especial para ayudar a los estudiantes a entender el significado de las ecuaciones y a aprender las manipulaciones de simplificación, cambio de término, etc. durante la resolución. Los tipos de aplicaciones más frecuentes son las que modelizan las ecuaciones mediante balanzas (p. ej., las balanzas algebraicas de la NLVM), mediante regiones rectangulares (p. ej., Algebra Tiles) y mediante regiones de la pantalla (p. ej., Dragon Box). Sin embargo, son muy escasas las aplicaciones utilizables en pre-álgebra para representar los ppg (por ejemplo, eXpresser), ninguna de las cuales resultaba útil en el contexto de nuestros experimentos. Por ello, decidimos crear una aplicación específica.

En este contexto, estamos realizando una investigación cuyos objetivos globales son diseñar y experimentar una secuencia de actividades de pre-álgebra, orientadas a la resolución de varios estilos de ppg basados en progresiones aritméticas, para estudiantes de 4º a 6º cursos de educación primaria, así como analizar la actividad de los estudiantes y su avance en la comprensión de los contenidos algebraicos iniciales. El objetivo específico de investigación en el que se centra este artículo es observar cómo razonan y resuelven los ppg estudiantes con acm, con el fin de encontrar en este contexto características diferenciadoras entre estudiantes con acm y estudiantes medios de igual edad o curso.

MARCO TEÓRICO

Para alcanzar el objetivo de investigación formulado, el marco teórico está formado por dos componentes, uno centrado en la resolución de ppg y el otro centrado en las características diferenciadoras de los estudiantes con acm.

El clásico estudio de Küchemann (1978) muestra que una de las primeras dificultades que deben superar los estudiantes de álgebra es dotar de significado a las letras en las expresiones algebraicas en general y las ecuaciones y funciones en particular. Las preguntas que planteamos durante la resolución de los sucesivos ppg tienen como finalidad guiar a los estudiantes para que realicen procesos de generalización, desde valores numéricos específicos hasta el término general de la progresión, aprendan a expresar algebraicamente dichas generalizaciones y, finalmente, descubran la resolución de ecuaciones como la forma adecuada de encontrar la respuesta a algunas de esas preguntas.

Tomando como referencia varios estudios previos, hemos formulado un referente teórico para analizar las respuestas de los estudiantes, integrado por los componentes teóricos propuestos por estos autores o variantes de ellos y otros componentes definidos por nosotros para diferenciar determinados tipos de respuestas, que nos están permitiendo hacer un análisis completo y detallado de las respuestas de los estudiantes. Por la limitación de extensión de este texto, aquí solo mencionamos los componentes teóricos utilizados en el análisis de los datos presentados.

El primer paso de la resolución de un ppg es interpretar la información gráfica proporcionada en el enunciado para calcular los valores de términos específicos de la sucesión y el término general, en respuesta a las preguntas planteadas. Basándonos en Rivera y Becker (2005), definimos dos tipos de interpretaciones:

- Las *visuales* son aquéllas en las que los estudiantes descomponen en partes las figuras del enunciado, observan el cambio de tamaño de las partes al avanzar en la sucesión y usan esas relaciones para realizar los cálculos.
- Las *numéricas* son aquéllas en las que los estudiantes, prestando poca o nula atención a la información gráfica, cuentan la cantidad total de piezas que componen cada figura del enunciado y usan esas cantidades para realizar los cálculos.

Los estudiantes utilizan diversas estrategias para calcular los valores de términos específicos pedidos, las cuales se diferencian por las formas de relacionar la información disponible con el término cuyo valor se pide. A partir de García-Reche, Callejo y Fernández (2015), definimos varios tipos y sub-tipos de estrategias de cálculo de valores de términos, entre los cuales están:

- *Funcional*: consiste en establecer una relación entre la posición de cualquier término y su valor, de manera que, solo conociendo la posición del término, es posible calcular su valor.
- Un sub-tipo de estrategia funcional es la *descomposición*, que consiste en dividir la representación gráfica de un término en partes, con el fin de encontrar una relación entre la posición del término y la cantidad de piezas que tiene cada parte.
- *Ensayo-error*: consiste en probar diferentes valores numéricos para el término demandado hasta encontrar el valor correspondiente a la posición indicada.

El objetivo de pedir a los estudiantes que calculen valores de términos particulares es proporcionarles una base experimental para que puedan identificar regularidades y generalizarlas en forma de descripción de un procedimiento de cálculo del valor de cualquier término. Cuando esta descripción está bien formulada, coincide con una expresión del valor del término general de la progresión basada únicamente en la posición del término. Nos basamos en Radford (2006) para definir diversos tipos de generalización, entre ellos los siguientes:

- *Algebraica factual*: cuando se expresa aludiendo a términos específicos y mediante operaciones con números concretos, pero permite calcular el valor de cualquier término.
- *Algebraica contextual*: cuando consiste en una relación general abstracta, válida para calcular el valor de cualquier término, expresada en forma verbal y contextualizada.
- *Algebraica simbólica*: cuando consiste en una relación general abstracta, válida para calcular el valor de cualquier término, expresada en forma algebraica.

Para inducir a los estudiantes a dar el paso de producir expresiones verbales a expresiones algebraicas, a plantear y resolver ecuaciones basadas en esas expresiones, nuestros ppg incluyen preguntas de relación inversa. Los estudiantes utilizan diversos tipos de estrategias para resolver estas preguntas (Arbona, 2016), algunos de los cuales son:

- *Inversión*, que consiste en realizar los cálculos aritméticos inversos a los hechos en las preguntas directas (en cuanto a los tipos de operaciones y al orden de realización).
- *Ensayo-error*, que consiste en probar diferentes valores numéricos para el valor demandado hasta encontrar el término correspondiente a la cantidad indicada.

En las literaturas didáctica y psicológica, existe una diversidad de términos, y una variedad de significados de estos, para referirse a las personas que destacan por encima de la media. En el contexto de nuestro estudio, los términos más usados son talento, superdotación y alta capacidad. Hay bastante consenso en considerar que una persona es superdotada cuando destaca por encima de la media en una amplia variedad de actividades intelectuales (Torrego, 2011). En este texto, tomando como referente la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner, consideramos que una persona tiene *alta capacidad matemática* cuando destaca por encima de la media en el desarrollo de razonamiento matemático y en la realización de actividades típicamente matemáticas como definir, demostrar o resolver problemas (independientemente de que pueda o no destacar también en otras áreas). En la literatura didáctica, suele usarse el término “talento matemático” como equivalente a acm.

La literatura de investigación en educación matemática ha prestado atención a la necesidad de definir características discriminadoras de las formas de resolver problemas de los estudiantes con acm respecto de los estudiantes ordinarios. Freiman, Greenes y Krutetskii, entre otros, han identificado diversas características que presentan los estudiantes de altas capacidades matemáticas, agrupadas en Jaime y Gutiérrez (2014). Las más relevantes en el contexto de nuestra investigación son la identificación de patrones y relaciones entre diferentes elementos, la generalización y la inversión de procesos de razonamiento matemático. Por otra parte, la mejor forma de identificar la acm es mediante la realización de actividades que requieran usar razonamiento matemático, siendo la resolución de problemas matemáticos la más genuina.

METODOLOGÍA

Para dar respuesta al objetivo de esta investigación, empleamos una metodología cualitativa enfocada a analizar las resoluciones de un ppg que forma parte de una amplia intervención educativa con estudiantes de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria. Para dicha intervención hemos realizado diversas experimentaciones utilizando la metodología de *investigación de diseño* (Cobb, Jackson, y Dunlap, 2015).

En el presente trabajo nos centramos, por una parte, en las respuestas de un grupo de 8 estudiantes superdotados de 5º (1) y 6º (7) de Primaria que asistían a un taller extraescolar de matemáticas y, por otra, en las respuestas de 16 estudiantes de un grupo de clase ordinario de 6º de Primaria. Los 8 estudiantes superdotados no habían recibido instrucción previa en resolución de ppg ni en álgebra. En cambio, los estudiantes del grupo ordinario formaban parte de un estudio longitudinal de resolución de ppg de tres años, que empezó cuando este grupo estaba en 4º de Primaria, para el cual habíamos diseñado una secuencia de actividades con una duración de 3 sesiones por año. En cada sesión de la unidad de enseñanza, de 45 minutos, los estudiantes resolvían de forma individual varios problemas y después la profesora (la primera autora) proporcionaba algunas directrices y resolvía los problemas en la pizarra, animando a los estudiantes a compartir sus repuestas. En el conjunto de las sesiones de los tres años, habían aprendido a realizar generalizaciones expresándolas 1) verbalmente, 2) algebraicamente, primero combinando los números y operaciones con palabras y después combinándolos con letras y 3) algebraicamente siendo, además, capaces de simplificar las expresiones iniciales.

Los datos que presentamos corresponden a un problema que resolvieron durante la tercera sesión del tercer año del estudio longitudinal. El objetivo de dicha sesión era iniciarles en el planteamiento y la resolución de ecuaciones. Dicho problema (Figura 1) está basado en una progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 3n + 2$ y presenta una variación respecto a la estructura usual de los ppg, pues está dirigido a estudiantes que han superado la fase inicial de aprender a generalizar patrones y que se encuentran en la fase de afianzar la escritura de expresiones algebraicas y aprender a manipularlas. Por ello, el problema incluye preguntas pidiendo explícitamente escribir (b), simplificar (c) y utilizar (d) una expresión algebraica para calcular el valor del término general de la sucesión.

Nuestro primo Nacho quiere organizar una comida familiar. El problema es que somos muchos primos y no sabe si acudirán todos. Además, hay primos de todas las edades y, por tanto, algunos acudirán con su pareja e hijos. Quiere distribuir las mesas del siguiente modo:

a) ¿Cuántos invitados cabrán en 53 mesas? ¿Cómo lo sabes?
b) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular los invitados que cabrán dependiendo del número de mesas.
c) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela.
d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos invitados cabrán en 12 mesas.
e) Si hay 83 invitados, ¿cuántas mesas necesitará? ¿Cómo lo sabes?

Figura 1. Enunciado del ppg planteado.

El ppg empieza con una pregunta directa en la que se pide calcular el valor de un término lejano, sin preguntar primero por términos inmediatos o próximos. A continuación, omitiendo la fase previa usual de pedir verbalizar una generalización, el problema pide explícitamente una fórmula para calcular el valor de cualquier término. En los siguientes apartados, pide simplificar la fórmula y utilizarla para averiguar el valor de un término de una posición próxima. El problema termina con una pregunta inversa (e).

Todos los estudiantes de esta muestra resolvieron el ppg con *GeoPattern*, una aplicación para tabletas Android diseñada expresamente para la investigación de la que forma parte este trabajo.

GeoPattern (Figura 2) permite la presentación, resolución de problemas de patrones geométricos y su autocorrección, pues la aplicación informa a los estudiantes de si su respuesta es correcta o errónea. Además, guarda la traza digital que el estudiante deja durante su actuación y permite obtener información sobre las diferentes estrategias seguidas por los estudiantes, las operaciones que han realizado con la calculadora integrada en la aplicación, el número de intentos realizados o las preguntas contestadas correctamente. En Arbona y otros (2018) se puede ver una descripción más detallada de *GeoPattern* y su uso.

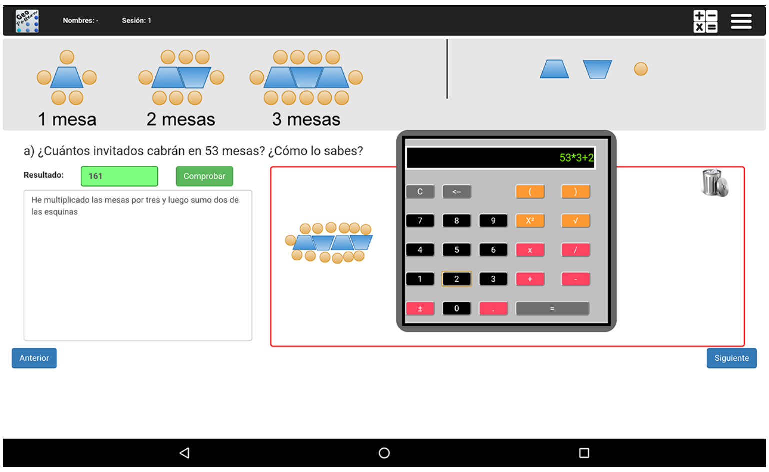


Figura 2. Pantalla de *GeoPattern*.

Los datos recogidos durante las experimentaciones fueron las respuestas de los estudiantes a los distintos apartados del ppg –registrados por la aplicación y exportados en forma de datos Excel– y las grabaciones de audio y video (captura de pantalla) generadas por las tabletas.

ANÁLISIS DE DATOS

La Tabla 1 muestra la clasificación de las respuestas al ppg de la Figura 1 proporcionadas por los 8 estudiantes superdotados y los 16 estudiantes del estudio longitudinal. La cantidad total de respuestas obtenidas varía en cada apartado, pues hubo estudiantes que dejaron apartados sin responder, por falta de tiempo o por el incremento de la dificultad.

Para el análisis de las respuestas, nos hemos basado en sus tipos de: estrategias de interpretación gráfica: numérica (N), visual (V); estrategias de cálculo de valores de términos (preguntas directas a-d): funcional (F), su subtipo descomposición (FD), ensayo-error (E-E); generalización realizada: factual (GF), contextual (GC), simbólica (GS); y estrategias de cálculo de posiciones de términos (pregunta inversa e): inversión (I), ensayo-error (E-E). Además, indicamos si las respuestas son correctas (Ct), si las estrategias son erróneas (EE) y si cometen errores algebraicos (EAg). Hemos contabilizado también las respuestas no categorizables (NC).

Tras analizar los datos, podemos observar que, en las cuestiones de relación directa (a-d), ambos grupos de estudiantes utilizaron los mismos tipos de estrategias, pero existe una mayor diversidad en el grupo ordinario. Por ejemplo, en los apartados b, c y d, todos los estudiantes superdotados emplearon la generalización más apropiada para el tipo de cuestión (simbólica en b y c y factual en d), sin embargo, los estudiantes ordinarios presentaron distintos niveles de generalización mostrando incluso, en algunos casos, generalizaciones inferiores a la esperada. Así pues, los estudiantes con acm, en general, eligieron estrategias más eficientes para dar respuestas correctas a las preguntas planteadas.

Tabla 1. Clasificación de las respuestas proporcionadas por los participantes en el estudio.

Preguntas	a)		b)		c)		d)			e)	
	Sup	Long	Sup	Long	Sup	Long	Sup	Long		Sup	Long
Cant. de respuestas	8	16	5	15	5	13	5	13		5	14
N	2	3	1	2	1	2	1	3	I	5	7
V	1	5	1	4	1	5	1	5	E-E	0	4
NC	5	8	3	9	3	6	3	5	NC	0	3
F	5	4	4	8	4	6	4	7			
FD	1	4	1	3	1	4	1	4			
E-E	1	5	0	0	0	0	0	1			
NC	1	3	0	4	0	3	0	1			
Ct	6	12	5	10	5	10	5	12	Ct	5	10
EE	1	2	0	0	0	0	0	1	EE	0	2
EAg	0	0	0	1	0	0	0	0	EAg	0	0
NC	1	2	0	4	0	3	0	0	NC	0	2
GF	2	7	0	0	0	0	5	7			
GC	1	3	0	4	0	3	0	2			
GS	3	0	5	7	5	7	0	2			
NC	2	6	0	4	0	3	0	2			

Centrándonos en la cuestión de relación inversa (e), podemos observar también cómo existe una mayor diversidad en el grupo de estudiantes ordinarios, siendo sus estrategias menos eficientes que aquellas utilizadas por los superdotados. Tan solo 7 estudiantes de 14 consiguieron resolver correctamente esta cuestión frente a la totalidad (5 de 5) de estudiantes superdotados.

Otra característica diferenciadora de los estudiantes superdotados en la resolución de ppg es el número de intentos a la hora de resolver los apartados con cuestiones numéricas, pues *GeoPattern* permite la autocorrección del resultado numérico obtenido en las preguntas a, d y e del problema. Los estudiantes ordinarios realizaron entre 1 y 9 intentos (media de 2'9 intentos) durante la resolución del apartado a y entre 1 y 11 intentos (media de 2'4 intentos) en el apartado e. En cambio, los estudiantes superdotados realizaron entre 1 y 6 intentos (media de 2'5 intentos) durante la resolución del apartado a y entre 1 y 2 intentos (media de 1'2 intentos) en el apartado e. No hemos tenido en cuenta el número de intentos del apartado d debido a que se pedía a los estudiantes que aplicaran la fórmula que habían desarrollado previamente.

CONCLUSIONES

En este texto hemos presentado un estudio comparativo de las estrategias empleadas por estudiantes superdotados y estudiantes ordinarios en el último curso de Educación Primaria, con el fin de encontrar características diferenciadoras entre ambos tipos de estudiantes en el contexto de los problemas de patrones geométricos que puedan usarse para identificar a estudiantes con acm.

El análisis de las respuestas muestra que los estudiantes con acm proporcionan respuestas más eficaces y eficientes que los estudiantes ordinarios, y necesitan menos intentos para llegar a la respuesta correcta. Esto hecho ocurre pese a la diferencia existente en la formación recibida, pues los estudiantes ordinarios realizaron 3 sesiones de ppg en cada uno de los tres últimos cursos escolares mientras que los estudiantes superdotados tuvieron una única sesión.

El análisis que hemos realizado muestra que los estudiantes superdotados han puesto en práctica algunas de las habilidades características de la acm señaladas por la literatura, concretamente las de generalizar, desarrollar estrategias eficientes y, sobre todo, invertir los procesos mentales y rapidez de aprendizaje.

AGRADECIMIENTOS

Los resultados presentados son parte del proyecto de investigación *Modelos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas: análisis racional y empírico* (EDU2017-84377-R, AEI/FEDER) y de la ayuda predoctoral FPU16/04513FPU.

REFERENCIAS

Arbona, E. (2016). *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de educación primaria con altas capacidades matemáticas* (Tesis de máster de investigación). U. de Valencia, Valencia. Disponible en http://roderic.uv.es/handle/10550/56731.

Arbona, E., García, D., Beltrán, M. J. y Gutiérrez, Á. (2018). GeoPattern, una app para resolver problemas de patrones geométricos en Primaria. *Educación Matemática en la Infancia (Edma 0-6), 7*(2), 1-23.

Cobb, P., Jackson, K. y Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). Nueva York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203448946

Friel, S. N. y Markworth, K. A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(1), 24-33.

Fritzlar, T. y Karpinski-Siebold, N. (2012). Continuing patterns as a component of algebraic thinking - An interview study with primary school students. Manuscrito presentado en el *12th International Congress on Mathematical Education* (ICME 12), Seúl, Corea del Sur.

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Gutiérrez, Á., Benedicto, C., Jaime, A. y Arbona, E. (2018). The cognitive demand of a gifted student's answers to geometric pattern problems. Analysis of key moments in a pre-algebra teaching sequence. En F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 169-198). Cham, Suiza: Springer.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th PME-NA Conference* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: PME-NA.

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(4), 198-203.

Torrego, J. C. (Ed.) (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa*. Madrid: Fundación SM.

ENRIQUECIENDO ACTIVIDADES PARA TALENTOS MATEMÁTICOS

Enriching activities for mathematically gifted students

Ariza-Ruiz, D. [a], Gutiérrez-Jaime, P. [b]

[a] Universitat de València (España). [b] Universidad Católica de Valencia (España)

Resumen

Presentamos una propuesta atención a estudiantes de alta capacidad matemática en un entorno extracurricular basada en la resolución de tareas matemáticas, las cuales presentan alguna o las dos características siguientes: se plantean casos cada vez más complejos y admiten distintos enfoques para su resolución. En relación con este último aspecto, incluimos, cuando es posible, ópticas originales y diferenciadas de lo que los estudiantes han experimentado en sus clases, proporcionando de esa manera conocimiento, estrategias y enfoques que enriquecen los problemas y la formación de los estudiantes. En este trabajo mostramos dos tareas (o secuencias de tareas), uno para primaria y otro para secundaria, que cumplen los requisitos señalados anteriormente.

Palabras clave: *alta capacidad matemática, problemas ricos, educación primaria, educación secundaria*

Abstract

We present a proposal for mathematically gifted students in an extracurricular environment based in problem solving, which presents both or one of the next properties: the problems increase in difficulty and can be answered in more than one way. Regarding the last characteristic, we present, when possible, original ways, different from those proposed in a regular class. In this paper we show two different activities, one for primary and middle school and the other for high school, that have the properties exposed above.

Keywords: *mathematical giftedness, rich problems, primary school, middle school, high school*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO

La presente comunicación se enmarca en la atención a estudiantes de alta capacidad en un entorno extracurricular de resolución de problemas y es fruto de la propia experiencia con participantes identificados con sobredotación.

Cuando se habla de estudiantes con talento matemático, se puede caer en el error de considerarlos como un grupo homogéneo, con potencial de aprendizaje análogo y procesos semejantes de resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, la literatura y la propia experiencia han confirmado ampliamente que esto no es así. En relación con el nivel de dominio matemático, hay diferencias notables en sujetos de una misma edad o curso. Respecto al procesamiento y resolución de los problemas, hay diversos estilos de actuación.

El Modelo Diferenciado de Dotación y Talento de Gagné (2015) se muestra útil para explicar el

Ariza-Ruiz, D. y Gutiérrez-Jaime, P. (2020). Enriqueciendo actividades para talentos matemáticos. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 37-44). Logroño: Universidad de La Rioja.

primero de los aspectos anteriores: Existe un potencial, los “dones” (gifts), que se convertirá en talento si se dan las condiciones adecuadas (si lo que Gagné denomina “catalizadores” interviene positivamente). Los catalizadores son de dos tipos: intrapersonales (entre los que se encuentran factores físicos y psicológicos) y ambientales (entorno, incluidas las personas). La motivación y la voluntad, desde el plano interpersonal, y la intervención educativa adecuada, desde el plano ambiental, son clave para lograr el desarrollo del talento.

Por lo tanto, incluso suponiendo que el potencial genético de varios sujetos fuera el mismo, su desempeño en matemáticas puede diferir considerablemente. Si tenemos en cuenta que el potencial inicial de dos estudiantes puede ser diferente, está claro que sus resultados de éxito, en cuanto al logro del talento matemático, probablemente serán dispares y la instrucción educativa juega un papel fundamental (Figura 1).

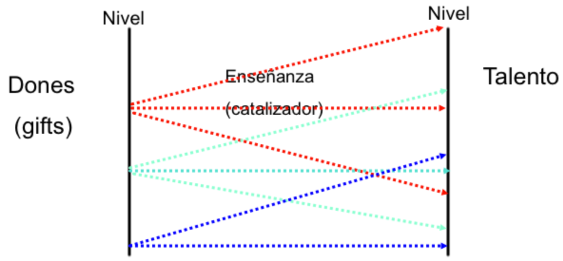


Figura 1. Influencia de la enseñanza sobre la posible evolución del potencial de un sujeto (propia).

Respecto a las distintas formas de procesar la información, ya Krutetskii (1976) observó la existencia de pensadores geométricos, pensadores analíticos y pensadores armónicos, lo cual no significa una mayor o menor dotación para las matemáticas, sino una forma distinta de procesarlas. Los primeros hacen más hincapié en aspectos visuales y se sirven de figuras y diagramas en sus razonamientos; los analíticos utilizan más las relaciones lógicas per sé; en los armónicos se produce una combinación equilibrada de ambas tendencias.

Lo expuesto anteriormente nos lleva a un panorama que justifica la presencia de estudiantes con diversos niveles de dominio de matemáticas y diferentes estilos de pensamiento en un mismo taller extraescolar para estudiantes de una edad concreta y que, además, pueden procesar la información matemática de manera distinta, incluso siendo todos de alta capacidad matemática También pone de manifiesto la importancia de una propuesta matemática que posibilite el incremento del nivel de dominio matemático y que resulte motivadora.

Para la atención a estudiantes de talento matemático, Diezmann (2005), entre otro tipo de tareas, propone tareas cuya complejidad se pueda aumentar (problematising tasks). Esto se encuentra en la línea de los problemas ricos (rich tasks) desarrollados en Nrich (Piggot 2011). Por otra parte, Ellerton (1986) utiliza el planteamiento de problemas (problem posing) por estudiantes de talento matemático y la resolución de dichos problemas, resultando estructuras más complejas que cuando esas tareas las realizan estudiantes que no son de talento matemático. Por su parte, Manuel y Freimann (2017) comprueban que este tipo de tareas, el planteamiento de problemas, les resulta atractivo a estudiantes de talento matemático.

OBJETIVO DEL TRABAJO

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, realizamos una propuesta de atención extraescolar a estudiantes de talento matemático a través de resolución de problemas. Pretendemos que los problemas supongan un reto para los participantes en las sesiones y que, aprendan y perciban que han aprendido. Esta última característica no aparece en la literatura sobre talento matemático, pero, sin embargo, es una constante en los talleres que a lo largo de un año hemos realizado con estudiantes de talento matemático.

Nos marcamos como objetivos:

1. Variar la complejidad del problema mediante:
    a. Diseño de ejercicios o problemas que, en sí mismos, permitan graduar la dificultad, haciendo posible la formulación de variantes de distinta complejidad.
    b. Problem posing: planteamiento por los estudiantes de variantes de los ejercicios o problemas que han resuelto anteriormente.
2. Posibilitar el uso de diversas estrategias de resolución.

Además, en la medida de lo posible, potenciamos y/o utilizamos recursos visuales (dibujos, esquemas o diagramas) que permitan el desarrollo del potencial de los pensadores geométricos y no sólo de los analíticos.

Este último objetivo incluye, en algunos problemas, la visión desde una perspectiva diferente a las que posiblemente se emplearían en el contexto escolar, proporcionando un enriquecimiento que puede llevar al planteamiento de problemas diferentes y originales.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y ADECUACIÓN

A continuación mostramos dos ejemplos para mostrar cómo diseñamos las tareas para que varíen en complejidad y/o permitan enfoques matemáticos variados e interesantes en su resolución. El primer ejemplo es para primaria y 1º ESO (6-12 años) y el segundo para Secundaria (12-17años).

Ejemplo 1. Problema con variación en su complejidad

Se trata de una batería de sub-problemas en torno al concepto de operador como transformación numérica que actúa sobre un número, lo cual permite tener en cuenta diversas variables que modifican su complejidad. Para niños pequeños, se puede asociar con la transformación realizada por una máquina o robot sobre un número (la “entrada”), que produce un resultado (la “salida”). ENTRADA ----> TRANSFORMACIÓN ----> SALIDA

Empleamos como variables a modificar las que mostramos a continuación, las cuales se pueden combinar dando lugar a diversos tipos de problemas:

a1. **Tipo de números**: Naturales, Enteros, Racionales-expresión decimal, Racionales-expresión fraccionaria.

a2. Tipo de operación.

b. **Posición de la Incógnita**: Salida, Entrada, Transformación.

c. **Complejidad de la máquina**: Una única transformación, Dos o tres transformaciones encadenadas, proporcionando o sin dar información de alguna de las transformaciones que intervienen.

d. Resolución de problemas/Planteamiento de problemas (**Problem solving**/**Problem posing**). Utilizamos también la variante de que sean los estudiantes quienes planteen los ejercicios.

Por otra parte, tenemos en cuenta la utilización de diagramas que representan **visualmente** las entradas, transformaciones y resultados, con el fin de que los estudiantes visualizadores que requieren este tipo de recursos aprendan y puedan utilizarlas en sus resoluciones.

A continuación mostramos varios ejemplos de diversos tipos de sub-problemas; en cada uno de ellos indicamos al principio, entre paréntesis, las variables que se utilizan, de las señaladas anteriormente, para este problema.

Se puede contextualizar, por ejemplo, como mostramos en el párrafo siguiente.

El papá de Lucas ha construido una máquina de números. Metes un número y te sale otro. Al acabar el cole, van amigos de Lucas para descifrar la transformación que realiza la máquina. Cada día la modifica el papá de Lucas.

(Máquina simple. Números naturales. Incógnita la salida) El LUNES Rosa metió un 1 y la máquina devolvió el 7, Miguel metió un 8 y la máquina devolvió el 14, Laura metió un 0 y la máquina devolvió el 6. La máquina ... ¿qué hacía? SOLUCIÓN: Sumar 6 (Figura 2).

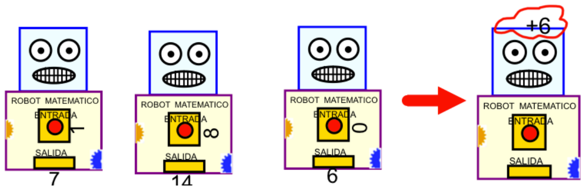


Figura 2. Máquina de transformación actuando sobre varios números (propia).

(Cambio tipo números. Decimales en este ejemplo**)** El MARTES los tres números que metieron y lo que salió fueron estos: 7’5 ----> 10’2; 9’1 ----> 11’8; 10’3 ---->13. SOLUCIÓN: Sumar 2’7.

(Cambio de operación. División en este ejemplo**)** El MIÉRCOLES sucedió lo siguiente:

8 ----> 2; 10 ----> 2’5; 34 ---> 8’5. SOLUCIÓN: Dividir entre 4.

(Incógnita la entrada) El MARTES, después de que los niños obtuvieran la transformación (recordemos que era +2’7), el papá de Lucas tocó un botón. Entonces la máquina sacó el 15’5 y dijo, con voz metálica: ¿Qué número entró? SOLUCIÓN: Como la transformación es +2’7, ahora hay que utilizar la operación contraria, -2’7; 15’5 - 2’7 = 12’8, que es la solución (Figura 3).

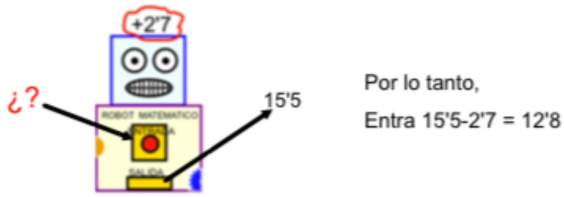


Figura 3. Máquina de transformación. Incógnita la entrada (propia).

(Dos **Transformaciones encadenadas. Incógnita una transformación**) El JUEVES el papá de Lucas construyó una máquina de dos partes, de manera que hay dos transformaciones encadenadas (Figura 4). La segunda es +7 y hay que adivinar la primera. También hay que decir la transformación total de la máquina. Al probar sale esto: 10 ----> 15; 19 ----> 24; 16 ---> 21.

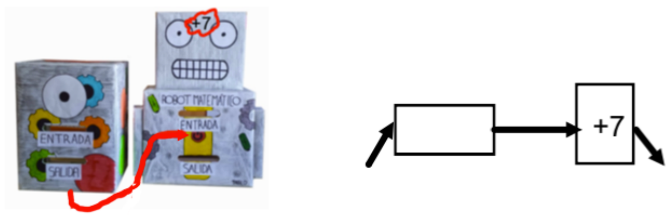


Figura 4. Máquina de dos transformaciones encadenadas y diagrama (propia).

SOLUCIÓN: Como la segunda es +7, al número final hay que restarle 7 para saber lo que sale de la primera parte de la máquina. Así, para la primera parte tenemos

10 ---> 8; 19 ---> 17; 16 ---> 14.

Por lo tanto, la transformación de la primera parte es -2. La transformación total es -2+7 = +5.

(Tres transformaciones encadenadas. Incógnita UNA transformación) El VIERNES la máquina se hace más compleja, con tres partes (Figura 5).

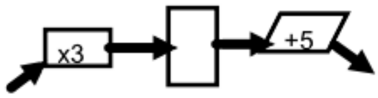


Figura 5. Máquina de dos transformaciones encadenadas y diagrama (propia).

En la primera se multiplica por 3 y en la última se suma 5, pero hay que averiguar cuál es la de la parte central. Estos son números que entran en la máquina y los que salen al final:

6 ---> 16;   20 ---> 58;   10 ---> 28.

SOLUCIÓN: 6 pasa en la primera máquina a 6x3 = 18. Como al final se suma 5, en la segunda parte de la máquina 18 se transforma en 16-5 = 11. En la segunda parte de la máquina 18 ----> 11. Análogamente se ve que en la segunda parte de la máquina 60 ----> 53 y 30 ---->23. Por lo tanto, la segunda parte resta 7 y la máquina hace (x3), (-7), (+5). En total, x3-2.

(Composición de dos transformaciones. Incógnita las DOS transformaciones) El SÁBADO, en la máquina de dos transformaciones distintas tenemos lo siguiente:

6 ---> 8;   20 ---> 36;   10 ---> 16;   17 ---> 30;   5 ---> 6.

¿Cuáles pueden ser las transformaciones sabiendo que las operaciones son, por este orden, producto y resta? SOLUCIÓN: x2 y -4

(Problem posing) El DOMINGO los niños se lo pasan programando la máquina para hacer transformaciones. Propón tú una máquina sencilla, de una sola transformación y da ejemplos para que tus compañeros o tus amigos averigüen la operación. Propón una máquina de dos transformaciones. Indica la primera. Da ejemplos para que tus compañeros o tus amigos averigüen la otra operación. Inventa alguna máquina con dos o tres transformaciones, plantea una pregunta y proporciona información suficientes para que tus amigos la puedan resolver.

(Transformación algebraica. Incógnita el resultado) Alejandra diseña MÁQUINAS ALGEBRAICAS. Realizan dos transformaciones encadenadas que puedes ver o averiguar. Esta es una máquina, que primero multiplica por 3 y luego resta 1: n ----> 3xn ----> (3xn)-1. Si metes un número, debes saber qué sale. Por ejemplo, ¿Qué saldría al introducir 7, -2, 6’8?

SOLUCIÓN: 7 ----> (3x7)-1 = 20;   -2 ----> (3x(-2))-1 = -7;   6´8 ----> (3x6’8) - 1 = 19’4.

(Transformación algebraica. Incógnita transformación) En esa máquina también puedes elegir averiguar la transformación. En este caso primero es una suma y después un producto.

Si tienes que 0 ----> 20; 1 ----> 24; 2 ----> 28; 10 ----> 60. SOLUCIÓN: (n+5)x4

Ejemplo 2. Figuras de n-cuadrados y Grafos inconexos

Niveles: Educación Secundaria y Bachillerato.

El problema 2 cumple los dos objetivos que nos planteamos en los problemas de enriquecimiento y que comentamos anteriormente. Permite modificación del nivel de dificultad y, además, utilizar varios enfoques o perspectivas matemáticas diferentes, alguna de ellas totalmente original, que confiere gran riqueza a este problema. Por motivos de espacio no se pueden plantear ni desarrollar aquí todas las posibilidades de este problema ni de sus posibles extensiones o enfoques, por lo que destacamos una de ellas, totalmente original, basada en la realización de grafos.

El contenido matemático origen del problema 2 es la relación área-perímetro en figuras planas.

Conocidas son las propuestas clásicas de buscar y comprobar las relaciones y no relaciones entre estas características, así como las figuras con mayor y menor área. En nuestra propuesta buscamos una óptica diferente, cuyo resultado es una clasificación no convencional sobre figuras con la misma área, en la que intervienen representaciones en forma de grafos, la consideración de equivalencia de grafos, figuras asociadas a un grafo, perímetros posibles de las figuras, y más propiedades que se pueden plantear.

El planteamiento inicial del problema es el siguiente: *Nos vamos a convertir en detectives matemáticos. Tenemos que identificar figuras planas formadas por una cantidad determinada de cuadrados (celdas básicas de una cuadrícula) y dibujados en un papel cuadriculado. Dos cuadrados pueden unirse compartiendo un mismo único lado completo o por un vértice, figura 6.*

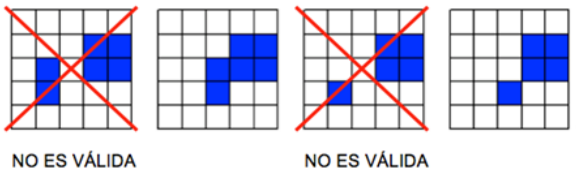


Figura 6. Tipos de figuras válidas y no válidas de 6, 6, 5 y 5 cuadrados, respectivamente (propia).

Después de enseñar a los alumnos las seis diferentes figuras de 2-cuadrados, podemos plantear como primera pregunta ¿cuántas figuras formadas por tres cuadrados hay?

Notar que cualquier figura de 3-cuadrados puede estar contenida en una cuadrícula 3x3. Por esa razón, si queremos listar todas las posibilidades de figuras formadas por 3-cuadrados en dicha cuadrícula, nos sale que existen 84. Pero entre estas figuras, hay muchas que hemos mencionado anteriormente que no son válidas (aquellas que tienen al menos dos trozos que no se tocan, ya sea por contacto de lado o de vértice). Además, al resolver esta pregunta se nos plantea una cuestión que debemos abordar: las figuras isométricas ¿se consideran iguales o son diferentes? Si adoptamos el convenio que son diferentes, en total tendremos 20 figuras de 3-cuadrados tal como se observa en la figura 6. Teniendo esa lista, saber cuál es el perímetro de cada figura de 3-cuadrados será un mero ejercicio de conteo. Sin embargo, ya en este punto se pueden observar tres propiedades que se extrapolarán a cualquier figura de *n*-cuadrados. 1) Figuras de igual área pueden tener diferentes perímetros. 2) El perímetro siempre es un número par. Para figuras de 3-cuadrados, el perímetro es 12, 10 u 8. 3) Existen figuras isoperimétricas que no son iguales (considera, por ejemplo, las dos primeras de arriba a la izquierda). Por lo tanto, no se puede dar una clasificación a partir del valor de su perímetro. No obstante, se pueden apreciar diferentes clases de figuras de 3-cuadrados según su perímetro.

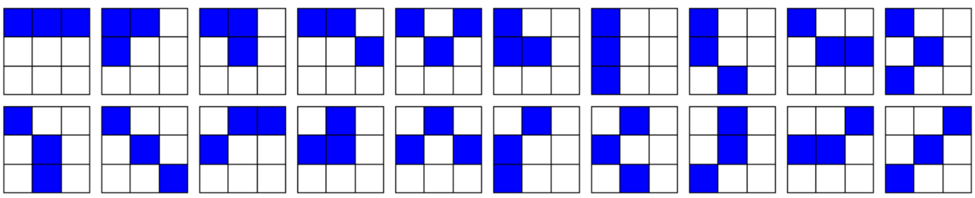


Figura 7. Las 20 formas diferentes de disponer tres cuadrados, según nuestro criterio (propia).

Después de haber terminado con el estudio de las figuras de 3-cuadrados, podemos analizar el caso de las de 4-cuadrados. En este caso, existen 1820 posibles formas de colocar cuatro cuadrados en una cuadrícula 4x4. Y aunque se reduzcan las posibilidades a 110 figuras de 4-cuadrados válidas[1] (según nuestro requisito de contacto entre piezas), ya en este punto se ve

[1] El listado completo se puede consultar en https://www.uv.es/aruizda/jacm2020/4cuadrados.png

inviable poder obtener una clasificación de las diferentes formas de las figuras y los diferentes valores de perímetro que pueden dar. Por esta razón, tenemos la necesidad de buscar otra estrategia para contestar a la pregunta planteada.

Tal y como se muestra en la figura 8, cada figura de *n*-cuadrados podemos identificarla a través de su grafo (no necesariamente conexo) asociado, el cual está definido por sus nodos, que serán los centros de los cuadrados y sus arcos vienen dados por la relación “uniremos dos nodos por un arco si y sólo si los cuadrados correspondientes tienen un lado en contacto común”.

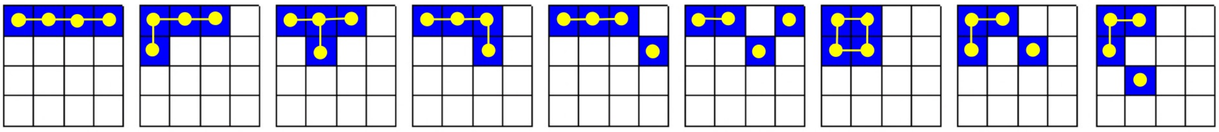


Figura 8. Disposición de cuatro cuadrados y sus correspondientes “esqueletos” (propia).

De esta forma vamos a obtener 110 grafos[2] (algunos de ellos inconexos, como las figuras quinta, sexta, octava y novena). Pero, de nuevo, de esos 110 grafos, hay muchos repetidos. Para evitar la complejidad de la terminología matemática, al grafo asociado a una figura de *n*-cuadrados le llamaremos esqueleto de la figura. Observando los ejemplos de la figura 8, podemos plantearnos las preguntas ¿qué figuras de 4-cuadrados tienen diferente esqueleto? ¿Se puede clasificar ahora las figuras de 4-cuadrados? Por ejemplo, en la figura 8, el grafo 1, el 2 y el 4 son iguales. Pero, el grafo 3 no es igual[3] a ninguno de los grafos 1, 2 y 4. Por otro lado, cabe enfatizar, que los grafos 5, 8 y 9 son iguales entre ellos, aunque las figuras no tengan la misma forma geométrica.

De esta manera hemos traducido el problema de encontrar todas las clases de figuras de 4-cuadrados a dar todas las formas distintas de conectar como mucho cuatro puntos en el plano, es decir, solo tenemos que responder cuántos grafos (conexos o inconexos) de cuatro nodos hay. Esta pregunta es respondida por la Teoría de Grafos, y nos dice que solo existen 11 grafos de cuatro nodos (Figura 9).

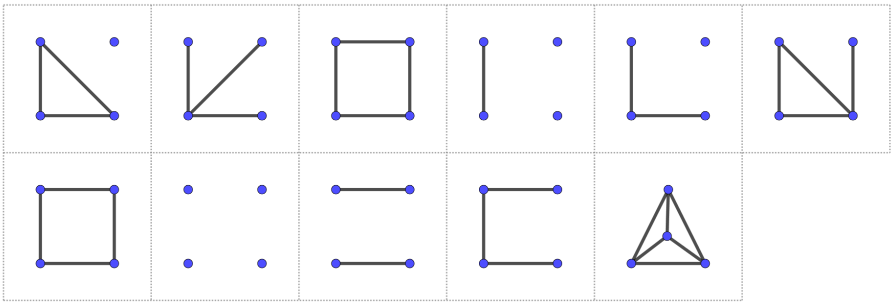


Figura 9. Los 11 grafos distintos de cuatro nodos (propia).

Al intentar encajar los cuatro cuadrados en cada uno de los grafos dados en la figura 9, notaremos que cualquier grafo con un ciclo de longitud 3 no puede ser el esqueleto de una figura de 4-cuadrados. Este hecho nos ayudará a reducir la lista de los grafos de *n* nodos que sean realmente el esqueleto de una figura de *n*-cuadrados. La listas reducidas con los grafos de 3, 4, 5, 6 y 7 nodos sin 3-ciclos pueden ser consultadas en www.uv.es/aruizda/jacm2020/conectarpuntos3.

En www.uv.es/aruizda/jacm2020/conectarpuntos se puede encontrar la lista de los 34 grafos

[2] El listado completo se puede consultar en www.uv.es/aruizda/jacm2020/grafos4v110.jpg

[3] En Teoría de Grafos, se dice que el grafo 1 y el grafo 2 de nuestra imagen son isomorfos mientras que el grafo 1 y el grafo 3 no son isomorfos, pues el grafo 3 tiene un nodo con tres aristas mientras que el grafo 1 no.

distintos que hay con 5 nodos. Con esa lista plantearemos la pregunta de cuáles de esos grafos son realmente el esqueleto de una figura de 5-cuadrados.

Finalmente, para las figuras de 3 o 4-cuadrados, se puede encontrar las figuras que tienen mayor perímetro y las de menor perímetro. Se propondrá al alumno hacerlo con las figuras de 5-cuadrados. Para ello, hemos reducido la lista[4], anteriormente mencionada, quitando algunos grafos que no son esqueletos de una figura de 5-cuadrados ya que dicho grafo tenía un ciclo de longitud 3.

Extensiones: Hay diversas posibles extensiones del ejercicio, como la consideración de figuras de más área (más cuadrados), el tipo de figuras (qué uniones se permite entre los cuadrados que conforman las figuras), qué grafos se consideran equivalentes, utilización de otro tipo de tramas, figura 10. Mencionar que, si la trama es isométrica/hexagonal, las figuras a considerar están formadas por triángulos/hexágonos dando lugar a esqueletos formados por grafos con 3-ciclos.

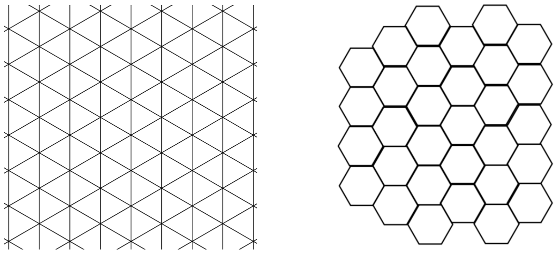


Figura 10. Las dos tramas que se pueden usar como variación de la plantilla cuadrangular (propia).

CONCLUSIONES

Los ejemplos que hemos planteado corresponden a problemas matemáticos que permiten aumentar su complejidad para que supongan un reto a los estudiantes que requieran mayor complejidad en las tareas que se les proponen. Asimismo, hemos mostrado la posibilidad de abordar algunos problemas desde una óptica diferente a la usual, lo cual incrementa conocimiento y relaciones matemáticas en los estudiantes.

REFERENCIAS

Ariza, D. (2020). www.uv.es/aruizda/jacm2020

Diezmann, C. M. (2005). Challenging mathematically gifted primary students. *Australasian Journal of Gifted Education, 14*(1), 50-57.

Ellerton, N. (1986). Children’s made-up mathematics problems -A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 261-271.

Gagné, F. (2015) De los genes al talento: la perspectiva DMGT/CMTD. *Revista de Educación, 368*(2),12-39.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Manuel, D. y Freiman, V. (2017). Differentiating instruction using a virtual environment: a study of mathematical problem posing among gifted and talented learners. *The Challenge of Providing Gifted Education, 4*(1), 78-97.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, de mejora de la calidad de la educación (LOMCE). *Boletín Oficial del Estado, 295,* 97858-97921.

Piggot, J. (2011). *Rich tasks and contexts.* https://nrich.maths.org/5662.

[4] Se puede consultar en www.uv.es/aruizda/jacm2020/conectarpuntos3

CARACTERÍSTICAS DE TALENTO MATEMÁTICO EN LAS RESPUESTAS DE UN NIÑO DE 9 AÑOS A UNA CUESTIÓN DE GEOMETRÍA

Characteristics of mathematical talent in the answer of a 9-year-old boy to a question of geometry

Bernabeu, M., Buforn, À.

Universidad de Alicante (España)

Resumen

El foco de esta investigación es identificar características de las altas capacidades en matemáticas en un estudiante de 3º de Educación Primaria (9 años) al establecer relaciones entre polígonos cuando resuelve tareas geométricas. El estudiante participó en un experimento de enseñanza diseñado para fomentar la comprensión del concepto de polígono y las relaciones entre polígonos. El instrumento de recogida de datos fueron tareas sobre identificar el atributo común de un conjunto de polígonos. El análisis consistió en identificar características de las altas capacidades matemáticas descritas por Greenes (1981) en las respuestas del estudiante. Los resultados ejemplifican tres de estas características: originalidad de la interpretación, capacidad de transferir ideas y capacidad de generalizar, mostrando la necesidad de usar este tipo de tareas para fomentar el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes con altas capacidades.

Palabras clave: *alta capacidad matemática, educación primaria, geometría, talento matemático*

Abstract

The focus of this research is to identify characteristics of high mathematical abilities in a 3rd grade student (9 years old) by establishing relationships between polygons when solving geometrical tasks. The student participated in a teaching experiment designed to promote understanding of the concept of polygon and relationships between polygons. The data collection instrument was tasks about identifying the common attribute of a set of polygons. The analysis consisted of identifying characteristics of the high mathematical abilities described by Greenes (1981) in the student's answers. The results exemplify three of these characteristics: originality of interpretation, ability to transfer ideas, and ability to generalize, showing the need to use these types of tasks to encourage the development of geometric reasoning by students with high abilities.

Keywords: *high mathematical abilities, primary school, geometry, mathematical talent*

INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre alta capacidad han manifestado de manera reiterada la necesidad de atender de forma especializada las necesidades educativas especiales de los estudiantes que presentan estas características (Diezman y Watters, 2002; Escrivà, Beltrán-Meneu, Gutiérrez y Jaime, 2016; Krutestskii, 1976; Ramírez, Flores y Castro, 2010). Además, esta necesidad también se ve

Bernabeu, M. y Buforn, À. (2020). Características de talento matemático en las respuestas de un niño de 9 años a una cuestión de geometría. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 45-52). Logroño: Universidad de La Rioja.

reflejada en la LOMCE, en la que se especifica que se asegurarán *“los recursos necesarios para que los alumnos y alumnas que requieran una atención educativa diferente a la ordinar, […] por sus altas capacidades intelectuales, […], puedan alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales*”.

Actualmente, se considera que la alta capacidad no es un rasgo inmutable y constante en todas las áreas. Según Gardner (1993) y su modelo de las *inteligencias múltiples*, es posible que haya estudiantes que desarrollen alguna de estas inteligencias, pero no todas. Así, centrándonos en las altas capacidades en matemáticas, podríamos encontrar estudiantes bien dotados para las matemáticas y que no lo estén tanto en otras áreas, o viceversa. Hay diversos términos para designar a los estudiantes que destacan por encima de la media y, si bien no es universal, en la actualidad se suele utilizar alumno con talento si destaca en un área determinada (talento en música, matemáticas,…) y superdotado si destaca en todos los ámbitos mostrando un coeficiente intelectual superior a la media (Aretxaga, 2013).

Tradicionalmente, para identificar a los estudiantes con alta capacidad matemática, se han utilizado test psicológicos de inteligencia. Sin embargo, cuando se trata de alta capacidad matemática, son varios los estudios que han mostrado que cuestionarios basados en resolución de problemas matemáticos son más eficaces que los test psicológicos (Butto, Andrade y Lanz, 2016; Castro, Benavides y Segovia, 2006; Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández, 2008; Niederer, Irwin, Irwin y Reilly, 2003). Así, Díaz y sus colaboradores (2008) utilizaron pruebas psicológicas y resolución de problemas matemáticos, comprobando que algunos estudiantes con talento matemático no habían sido identificados como tales en los test psicológicos estandarizados. Por otro lado, Castro y colaboradores (2006) mostraron que el cuestionario de resolución de problemas de estructura multiplicativa (PME) que habían diseñado, produjo más diferencias entre el grupo de talento matemático y el grupo estándar que los resultados del test de Raven, y por tanto este instrumento tiene mayor poder de discriminación de niños con talento matemático. Este mismo instrumento fue usado por Butto y colaboradores (2016), revelando la potencialidad del mismo al comprobar la variedad de estrategias que usaron los estudiantes al resolver los problemas.

Sin embargo, para identificar correctamente el talento matemático hay que incluir problemas pertenecientes a diferentes dominios matemáticos. Así, el test PME (Castro et al., 2006), se ha mostrado útil para la identificación del talento matemático en varios trabajos, pero no resultó adecuado en el estudio de Escrivà y colaboradores (2016), centrado en tareas matemáticas de visualización. En este estudio se utilizaron tareas específicas de visualización, un test psicológico estandarizado y una variación del test PME de Castro y colaboradores (2006).

Respecto a las características para identificar o verificar si un sujeto posee o no ciertas habilidades matemáticas, diferentes autores han elaborado listados de descripciones de talento matemático (Díaz et al., 2008; Greenes, 1981; Jaime y Gutiérrez, 2014; Leikin, 2018). En este estudio nos centraremos en los atributos que caracterizan a un estudiante con talento matemático desarrollados por Greenes (1981), las cuales se han empleado en estudios anteriores (Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodriguez, 2004; Díaz et al., 2008). Estos son: formación espontánea de problemas, flexibilidad en el manejo de datos, capacidad de organización de datos, agilidad mental de fluidez de ideas, originalidad de interpretación, capacidad para transferir ideas, y capacidad de generalizar.

El objetivo de este estudio es identificar rasgos característicos de las altas capacidades en matemáticas en un estudiante de 3º de Educación Primaria (9 años) al establecer relaciones entre polígonos cuando resuelve tareas geométricas.

MÉTODO

Participantes y contexto

En el estudio completo participaron 59 estudiantes de dos clases de tercero de educación primaria (8-9 años) de un colegio público de la provincia de Alicante (España). Se realizó un experimento de enseñanza basado en el desarrollo de la comprensión del concepto de polígono (figura plana cerrada con lados rectos y no cruzados) y las relaciones entre polígonos (polígonos cóncavos-convexos; según el número de lados; simétricos; clases de triángulos y de cuadriláteros). De entre estos 59 estudiantes se seleccionaron 9 a partir de las respuestas a un cuestionario previo a la instrucción: 3 con rendimiento bajo; 3 con rendimiento medio; y 3 con rendimiento alto. Nuestro sujeto como referencia en esta investigación es uno de los 9 estudiantes entrevistados (G2E18 = estudiante 18 del grupo 2), el cual estaba diagnosticado con Altas Capacidades (AC). No obstante, también haremos referencia a alguno de los otros 8 estudiantes entrevistados para comparar las respuestas proporcionadas del estudiante con AC y el resto durante el experimento de enseñanza.

Instrumento: Experimento de Enseñanza

El experimento de enseñanza estaba formado por una secuencia de enseñanza de 10 sesiones, un cuestionario antes y después de la secuencia de enseñanza y tres entrevistas (antes, durante y después de la secuencia de enseñanza) (Figura 1).

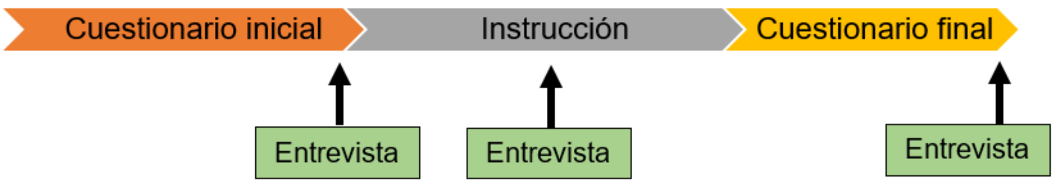


Figura 1. Secuenciación del experimento de enseñanza.

El experimento de enseñanza, centrado en el concepto de polígono y en las relaciones entre polígonos, se basaba en realizar tareas relativas a tres focos:

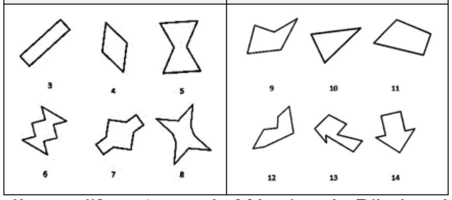
- Reconocer atributos relevantes de la definición de polígono.
- Reconocer y dibujar polígonos con determinados atributos.
- Identificar el atributo común en un conjunto de polígonos.

Estos tres focos indican la progresión que consideramos que se debería seguir para la constitución del concepto de polígono y las clases de polígonos. En este estudio nos vamos a basar en las tareas relativas a *identificar el atributo común en un conjunto de polígonos* que son las que implican un razonamiento más sofisticado y donde vamos a poder identificar características sobre las Altas Capacidades. En estas tareas empleamos la metáfora de la *Máquina de Dibujar* (Battista, 2012) donde la Máquina puede hacer polígonos con determinados atributos (ejemplos de una clase) y no puede hacer polígonos que no cumplan esos atributos (no-ejemplos de una clase). Los estudiantes deben reconocer qué atributos presenta un polígono de un conjunto, relacionar estos con el resto de los atributos de las figuras del mismo conjunto para identificar el atributo común que los diferencia de los polígonos del otro conjunto. La Figura 2 muestra un conjunto de polígonos con al menos dos ejes de simetría (la máquina puede hacer) y otro con polígonos con uno o ningún eje de simetría (la máquina no puede hacer), por lo que los estudiantes deben ir más allá de la simetría y fijarse que en el conjunto de polígonos que no puede hacer hay dos polígonos con un eje de simetría (10 y 14).

TAREA 4

Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer estos polígonos. Todos los polígonos que puede hacer tienen algo en común.

PUEDE HACER	NO PUEDE HACER



a) Dibuja otro polígono diferente que la Máquina de Dibujar sí pueda hacer y di por qué, y otro polígono diferente que no pueda hacer y di por qué.

PUEDE HACER	NO PUEDE HACER
Dibuja:	Dibuja:
Explica:	Explica:

Figura 2. Tarea de la Entrevista Intermedia: Identificar el atributo que define la clase (tener dos ejes de simetría), representar ejemplos y no ejemplos de la clase.

Para contextualizar cómo se desarrolló el experimento de enseñanza se va a sintetizar la descripción de los componentes de este: cuestionario, sesiones y entrevistas. El cuestionario, el cual fue el mismo antes y después de la instrucción, contenía tareas para comprobar qué nivel de comprensión mostraban los estudiantes en relación con los polígonos. Las sesiones del experimento de enseñanza estaban diseñadas para que los estudiantes construyeran el concepto de polígono y las clases de polígonos de manera progresiva a través de tareas relativas a los tres focos citados anteriormente. Las entrevistas, que es donde vamos a poner nuestro foco de atención en esta investigación, se diseñaron para poder seguir la progresión de la comprensión de los estudiantes conforme iban adquiriendo nuevos conceptos y destrezas para usarlos (reconocer, representar e identificar). Estas se realizaron antes, a mitad y al finalizar la instrucción con los mismos 9 estudiantes. Durante todo el experimento de enseñanza introdujimos definiciones inclusivas de las clases de polígonos para que los estudiantes pudieran realizar un razonamiento más allá del simple reconocimiento de los atributos, y que pudieran establecer relaciones jerárquicas entre las clases de polígonos. Por ejemplo, definimos triángulo isósceles como triángulo con dos lados iguales por lo que el equilátero es un tipo de triángulo isósceles porque al menos tiene dos lados iguales.

Análisis

El análisis tiene como objetivo identificar que hace que las respuestas del estudiante con AC sean superiores al resto de las respuestas de sus compañeros en relación con las características de talento matemático desarrolladas por Greenes (1981). Para ello, vamos a analizar todos los razonamientos expuestos por el estudiante con AC durante las entrevistas del experimento de enseñanza y para evidenciar estas características las compararemos con respuestas de otros estudiantes.

RESULTADOS

Durante todo el experimento de enseñanza el estudiante G2E18 mostró razonamientos más rápidos y originales que el resto de sus compañeros en la resolución de tareas mostrando varias de las características descritas por Greenes (1981). A continuación, ejemplificamos tres evidencias de estas características comparando las respuestas de este estudiante con la de sus compañeros.

Originalidad de interpretación

Esta característica se basa en que los estudiantes con AC presentan razonamientos poco comunes, visualizando las figuras geométricas desde diferentes enfoques. Esto se pudo evidenciar ante la tarea de identificar el atributo común de un conjunto de cuadriláteros con lados congruentes (rombos y cuadrados) en la entrevista final (Figura 3). Mientras que sus compañeros identificaron el ser cuadrilátero con lados congruentes como el atributo que define el conjunto de polígonos, el estudiante G1E18 fue más allá de este razonamiento y justificó que en un conjunto las *"*diagonales marcan ejes de simetría y hacen unas rectas perpendiculares" (puede hacer) y que, en el otro, "aunque marquen unas rectas perpendiculares no marcan ejes de simetría" (no puede hacer). Mientras que sus compañeros se fijaron en partes presentes en las figuras, el estudiante G1E18 visualizó estas figuras desde otra perspectiva como son las diagonales y los ejes de simetría, interpretando elementos de los polígonos que no son visibles a simple vista.

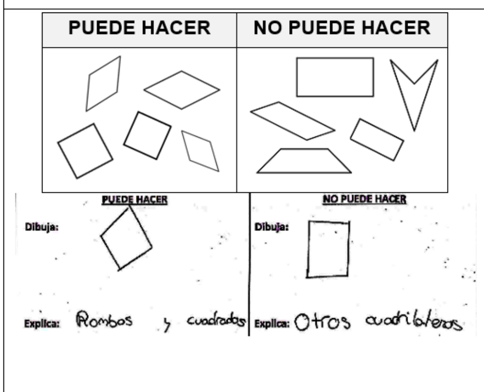
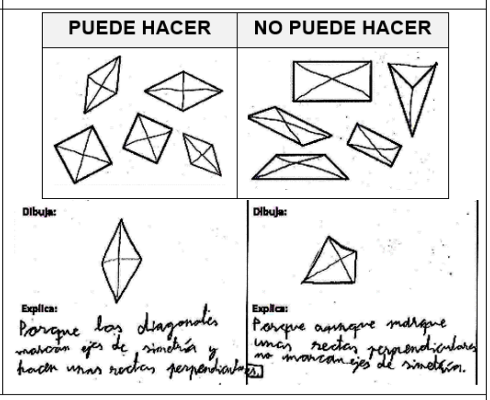
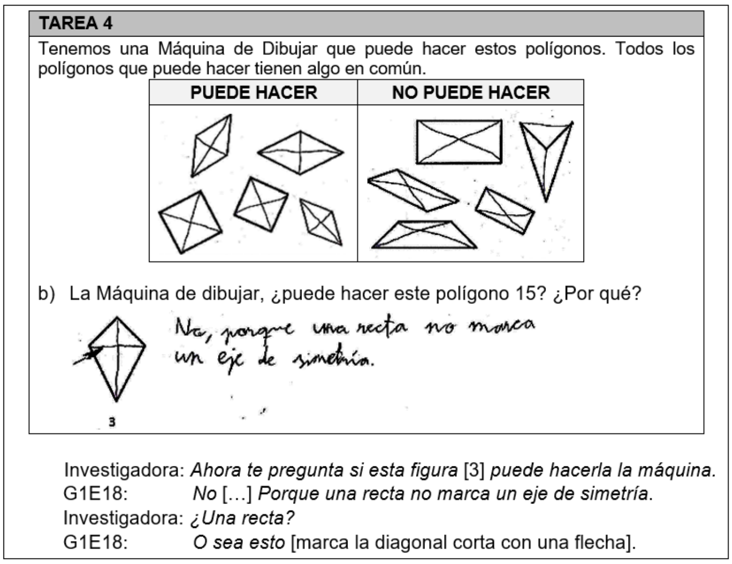
TAREA 4	
Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer estos polígonos. Todos los polígonos que puede hacer tienen algo en común.	
Respuesta de G2E7 en el cuestionario	Respuesta de G1E18 en el cuestionario
	
Transcripción entrevista:	
G2E7: *Estos son rombos y cuadrados…* [puede hacer] *y estos son otros cuadriláteros* [no puede hacer]. […] *Porque para ser un rombo tiene que tener los cuatro lados iguales.*	G1E18: *Porque aquí las diagonales marcan ejes de simetría y forman rectas perpendiculares* [puede hacer], *y aquí no* [no puede hacer].

Figura 3. Respuestas de los estudiantes G2E7 y G1E18 ante la tarea de identificar el atributo que define la clase (cuadrilátero con cuatro lados congruentes/cuadrilátero con diagonales perpendiculares coincidentes con sus ejes de simetría).

Capacidad de transferir ideas

Esta capacidad está vinculada aplicar información aprendida en un contexto a un problema en otro contexto diferente. En la segunda sesión de la secuencia de enseñanza se introdujo el concepto de diagonales y en la tercera los ejes de simetría donde se preguntó a los estudiantes si las diagonales podían coincidir con los ejes de simetría. En la última sesión, los estudiantes estuvieron aprendiendo las propiedades de los paralelogramos, donde una de ellas es que los cuadrados y los rombos tienen diagonales perpendiculares. El estudiante G1E18 trasladó los conceptos de las primeras sesiones (diagonales y ejes de simetría) y los combinó con los de la última (propiedades de los paralelogramos) para justificar, en la entrevista final, que los cuadrados y los rombos tienen diagonales perpendiculares y que estas coinciden con sus ejes de simetría (Figura 4). Además, supo razonar que la cometa no es un ejemplo de rombo o cuadrado ya que, aunque tenga diagonales perpendiculares, *una de ellas no marca un eje de simetría*. Por lo tanto, el estudiante evidencia que ha combinado y aplicado los conceptos adquiridos durante las sesiones de enseñanza para resolver un problema diferente a los realizados anteriormente.


TAREA 4

Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer estos polígonos. Todos los polígonos que puede hacer tienen algo en común.

PUEDE HACER	NO PUEDE HACER

b) La Máquina de dibujar, ¿puede hacer este polígono 15? ¿Por qué?

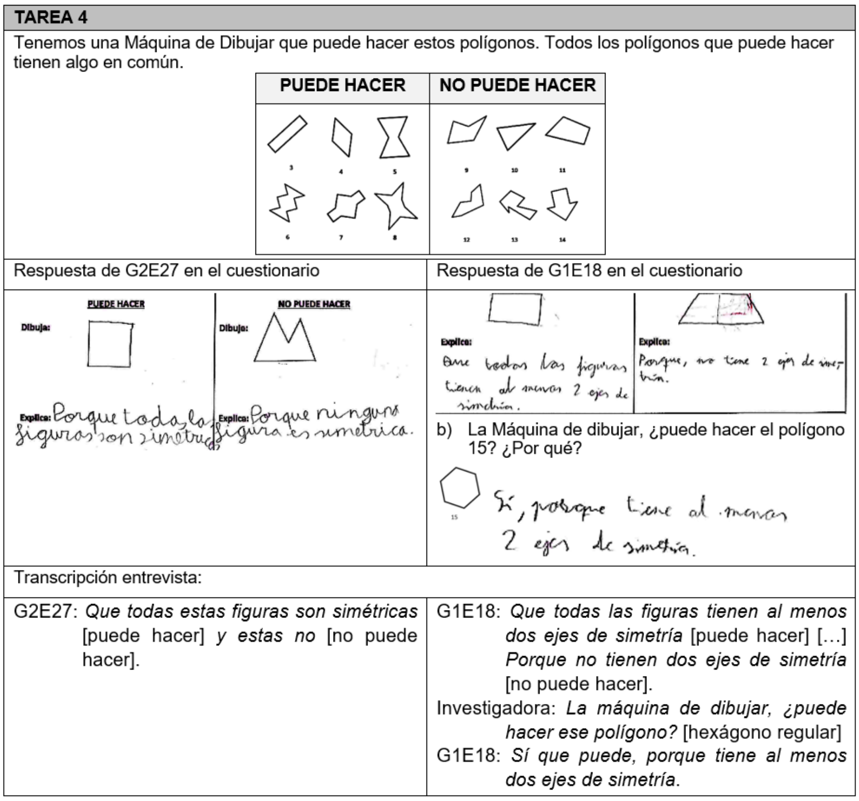
No, porque una recta no marca un eje de simetría.

Investigadora: *Ahora te pregunta si esta figura* [3] *puede hacerla la máquina.*
G1E18: *No* […] *Porque una recta no marca un eje de simetría.*
Investigadora: *¿Una recta?*
G1E18: *O sea esto* [marca la diagonal corta con una flecha].

Figura 4. Respuestas de G1E18 ante la tarea de identificar el atributo que define la clase (cuadrilátero con cuatro lados congruentes/cuadrilátero con diagonales perpendiculares coincidentes con sus ejes de simetría).

Capacidad de generalizar

Esta capacidad se evidencia cuando los estudiantes son capaces de examinar las figuras geométricas a fondo, observan las relaciones y pueden generalizar estas relaciones. Una tarea que implicaba un análisis exhaustivo de las figuras geométricas fue en la tarea de identificar el atributo común de un conjunto de polígonos con al menos dos ejes de simetría de la entrevista intermedia (Figura 5).


TAREA 4

Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer estos polígonos. Todos los polígonos que puede hacer tienen algo en común.

PUEDE HACER	NO PUEDE HACER
3 4 5 6 7 8	9 10 11 12 13 14

Respuesta de G2E27 en el cuestionario	Respuesta de G1E18 en el cuestionario
PUEDE HACER Dibuja: Explica: Porque toda la figuras son simetricas / NO PUEDE HACER Dibuja: Explica: Porque ninguna figura es simétrica.	Explica: Que todas las figuras tienen al menos 2 ejes de simetría. / Explica: Porque, no tiene 2 ejes de simetría. b) La Máquina de dibujar, ¿puede hacer el polígono 15? ¿Por qué? Sí, porque tiene al menos 2 ejes de simetría.
Transcripción entrevista:	
G2E27: *Que todas estas figuras son simétricas* [puede hacer] *y estas no* [no puede hacer].	G1E18: *Que todas las figuras tienen al menos dos ejes de simetría* [puede hacer] […] *Porque no tienen dos ejes de simetría* [no puede hacer]. Investigadora: *La máquina de dibujar, ¿puede hacer ese polígono?* [hexágono regular] G1E18: *Sí que puede, porque tiene al menos dos ejes de simetría.*

Figura 5. Respuestas de los estudiantes G2E27 y G1E18 ante la tarea de identificar el atributo que define la clase (polígonos con al menos dos ejes de simetría).

En esta tarea se presentaba un conjunto de polígonos con al menos dos ejes de simetría (la máquina puede hacer) y otro conjunto con polígonos con uno o ningún eje de simetría (la máquina no puede hacer). La mayoría de los estudiantes que resolvieron esta tarea lo realizaron incorrectamente ya que determinaron que el atributo que definía la clase era ser *simétrico* o *tener dos lados paralelos*. Estos estudiantes no analizaron en profundidad las figuras del conjunto que la máquina no podía hacer, pues en este conjunto había figuras simétricas (10 y 14) o con lados paralelos (14). Sin embargo, G1E18 fue el único que analizó todas las figuras de los conjuntos y pudo comparar las semejanzas y diferencias entre los polígonos de los conjuntos para justificar que en un conjunto *todas las figuras tienen dos ejes de simetría* (puede hacer) y el en el otro conjunto *no tienen dos ejes de simetría* (puede hacer). Además, pudo justificar que el hexágono regular es un ejemplo de la clase identificada ya que *tiene al menos dos ejes de simetría*.

CONCLUSIONES

El foco de esta investigación es identificar rasgos característicos de las altas capacidades en matemáticas en un estudiante de 3º de Educación Primaria (9 años) al establecer relaciones entre polígonos cuando resuelve tareas geométricas. El análisis de las respuestas aportadas por el estudiante con altas capacidades durante las entrevistas del experimento de enseñanza nos ha permitido identificar tres características de los estudiantes con altas capacidades desarrolladas por Greenes (1981). La primera de ellas es la relativa a la *originalidad de interpretación* pues el estudiante mostraba razonamientos inusuales para un estudiante de su edad fijándose en partes de las figuras que conllevan un nivel cognitivo superior al demandado en el currículum de tercero de primaria (coincidencia de las diagonales con los ejes de simetría). La segunda hace referencia a la *capacidad de transferencia de ideas* donde se pudo comprobar cómo el estudiante, conforme iba adquiriendo nuevos conceptos relativos al concepto de polígono y a las clases de polígonos, era capaz de combinar estos para poder resolver las diversas tareas geométricas, volviendo a mostrar la *originalidad de interpretación*. La tercera muestra la *capacidad de generalizar* donde pudimos comprobar que el estudiante no realiza un análisis simple de las figuras geométricas, sino que profundiza en todos los atributos que presenta o se pueden inferir de una figura geométrica, estableciendo relaciones entre estos para resolver una tarea geométrica, evidenciando a la vez, la originalidad y la capacidad de transferencia de ideas. Pasarín (2004), establece como criterio para considerar un estudiante con talento matemático si presenta al menos dos características de las propuestas por Greenes. Por tanto, podemos concluir que nuestro sujeto es un estudiante con talento matemático ya que cumple al menos tres de las siete características de Greenes. Además de las características aportadas por Greenes, hemos podido observar otras de las características reseñadas por investigadores citados al inicio de este texto, como la rapidez de sus repuestas. Globalmente se podría pensar que *conoce mayor cantidad de elementos geométricos y relaciones matemáticas que sus compañeros, y los sabe utilizar, junto a una alta capacidad para incorporar los resultados de su experiencia en la red de conocimientos y contenidos que ya posee*, lo cual es la síntesis que hacen Jaime y Gutiérrez (2014) de los estudiantes de altas capacidades matemáticas.

Las tareas que realizamos durante el experimento de enseñanza sobre identificar el atributo común de un conjunto de polígonos sirvieron para poder obtener evidencias de un razonamiento más abstracto sobre los atributos de los polígonos y así, poder identificar rasgos característicos de las altas capacidades (Butto, Andrade y Lanz, 2016; Castro, Benavides y Segovia, 2006; Díaz et al., 2008). Este tipo de tareas favorecen el desarrollo de los alumnos con altas capacidades ya que exigen un nivel cognitivo superior al tratado en clase. Por tanto, sería necesario instruir a los futuros maestros sobre las necesidades que presentan este tipo de alumnado para diseñar tareas que favorezcan el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes con altas capacidades. Es decir, no llevar a cabo tareas donde solo se reconozca o represente polígonos con condiciones, sino que se fomente la relación entre polígonos.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2017-87411-R del Ministerio de Ciencia e Innovación (España), el proyecto Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana (España) y de la Universidad de Alicante (FPU2017-014).

REFERENCIAS

Aretxaga, L. (2013). *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades matemáticas*. Vitoria-Gasteiz: Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco.

Battista, M. (2012). *Cognition-based assessment & teaching of geometric shapes. Building on students' reasoning*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Butto, C., Andrade, A. y Lanz, M. Y. (2016). Identificación de estudiantes con altas capacidades matemáticas en educación primaria. *Horizontes Pedagógicos*, *18*(2), 66-85.

Castro, E., Benavides, M. y Segovia, A. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faisca: Revista de Altas Capacidades*, *11*(13), 4-22.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faisca: Revista de Altas Capacidades*, *13*(15), 30-39.

Diezmann, C. M. y Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. En B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch y M. O. J. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the MERGA* (pp. 219-226). Auckland: MERGA.

Escrivà, M. T., Beltrán-Meneu, M. J., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). Habilidades de visualización de estudiantes de primaria en actividades de geometría espacial. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 595). Málaga: SEIEM.

Gardner, H. (1993). *Multiple intelligences: the theory into practice*. New York, NY: Basic Books.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *28*(6), 14-17.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: Universidad de Valencia.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Leikin, R. (2018). Characteristics of mathematical challenge in problem-based approach to teaching mathematics. En A. Kajander, J. Holm y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning secondary school mathematics* (pp. 413-418). Cham, Suiza: Springer.

Niederer, K., Irwin, R. J., Irwin, K. C. y Reilly, I. L. (2003). Identification of mathematically gifted children in New Zealand. *High Ability Studies, 14*(1), 71-84.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O. y Rodriguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *Faisca: Revista de Altas Capacidades*, *11*(13), 83-102.

Ramírez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. Moreno, J. Carrillo y A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lleida: SEIEM.

EL CONTEXTO DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS COMO RECURSO FORMATIVO DOCENTE PARA ATENDER ESTUDIANTES CON ALTAS CAPACIDADES

The context of math olympics as a teaching training resource to attend gifted students

Carrillo, C., López-Flores, J.I., Mier, R.

Universidad Autónoma de Zacatecas (México)

Resumen

En México, como en muchos otros países, la formación inicial de docentes suele enfocarse en la preparación para la atención de estudiantes considerados dentro del promedio y, en algunos casos, hacia aquellos que están considerados por debajo de la media pero difícilmente en estudiantes con altas capacidades (EAC). Este panorama dificulta contar con una visión de la problemática y las necesidades educativas específicas de esta población. Como parte de un proyecto de desarrollo profesional docente, contemplando el contexto de la Olimpiada de Matemáticas, se realizó una observación situada en dos escenarios: un curso para entrenadores y el entrenamiento de olímpicos, con el fin de observar estrategias que permitan la atención de las necesidades de EAC. Se reportan aquellas características de problemas olímpicos, así como aspectos de los entrenamientos que consideramos pueden ser implementados en el aula regular.

Palabras clave: *alta capacidad matemática, resolución de problemas, olimpiada*

Abstract

In Mexico, as in many other countries, initial teacher training tends to focus on preparing for the attention of students considered within the average and, in some cases, towards those who are considered below average but hardly in students with high skills (EAC). This panorama makes it difficult to have a vision of the problem and the specific educational needs of this population. As part of a teacher professional development project, contemplating the context of the Olympiad in Mathematics, an observation was carried out in two settings: a course for coaches and the training of Olympians, in order to observe strategies that allow the attention of the EAC needs. Those characteristics of Olympic problems are reported, as well as aspects of the training that we consider can be implemented in the regular classroom.

Keywords: *giftedness in mathematics, problem solving, olympiad*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, bajo el paradigma de la *Educación para todos* que permea diversos sistemas educativos, poco a poco se ha tenido que tomar consciencia de la diversidad de alumnos que recibimos en nuestras aulas, con diferentes características de aprendizaje. Sin embargo, en México, como en muchos otros países, los profesores de escuelas regulares no cuentan con la preparación necesaria para la atención de estudiantes con necesidades educativas especiales.

Carrillo, C., López-Flores, J. I. y Mier, R. (2020). El contexto de Olimpiadas de Matemáticas como recurso formativo docente para atender estudiantes con altas capacidades. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales de Alta Capacidad Matemática* (pp. 53-60). Logroño: Universidad de La Rioja.

Esto debido, principalmente, a que su formación inicial suele tener un enfoque hacia una población estudiantil considerada homogénea, en la que la distinción principal está dada por la edad; lo cual dificulta una visión más amplia de la educación inclusiva y de las necesidades educativas específicas de estudiantes que quedan fuera del promedio.

Siguiendo con el contexto mexicano, si bien en la formación de docentes, los planes de estudio incluyen temas relacionados con la inclusión y la atención a la diversidad, un análisis más profundo de su abordaje permite ver que estos términos suelen desarrollarse en torno a aquellos casos en los que los estudiantes por algún motivo se encuentran por debajo de la media de aprendizaje, dejando fuera de observación a los que se encuentran en el extremo opuesto: los que tienen capacidades sobresalientes (Jiménez, 2016). En este punto el lector quizás podría preguntarse de manera genuina sobre la necesidad de requerir esta preparación en un docente.

Pensemos en la asignatura que despierta mayor cantidad de emociones en los estudiantes: las matemáticas. Tener estudiantes con altas capacidades en matemáticas (EACM) podría parecer el sueño de cualquier profesor que enseñe esta asignatura; sin embargo, si hemos tenido al menos un caso en el aula sabemos que el sueño puede transformarse en pesadilla si no contamos con el conocimiento especializado para atenderlo. Si bien es cierto que los EACM no presentan problemas de aprendizaje que se pueden observar en sus compañeros, sí presentan otro tipo de necesidades especiales que también merecen atención (Jaime y Gutiérrez, 2017). En los últimos años ha habido un incremento del reconocimiento por profesionales de la educación de diversos países del apremio de poner en práctica estrategias de aula que ayuden a estos estudiantes a explotar su potencial, así como evitar que incurran en problemas de conducta, desinterés o incluso la pérdida de este potencial por falta de una atención debida, como advierten varias investigaciones (Valadez y Valencia, 2011; Martínez y Guirado, 2013; Acosta y Alsina, 2017).

En particular, en México ha habido algunos proyectos en los cuales se ha abordado este tema, algunos desde centros de investigación, otros desde la iniciativa personal académica de investigadores o profesores, vinculados generalmente a universidades. Ejemplo de ello podemos mencionar el Programa “Construcción social de la ciencia entre las niñas y los niños del Programa Niños Talento” (Farfán *et al.*, 2013), desarrollado en la Ciudad de México, cuya coordinación académica estuvo bajo la dirección de investigadores especialistas en Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV). Por otra parte, Carrillo y Jiménez (2015) reportan los resultados de una observación situada en centros de atención de estudiantes con Talento Matemático, con el fin de rescatar aspectos que permitan ser incorporados en la práctica de los docentes de aula regular. Asimismo, Butto, Andrade y Lanz (2016) realizan un trabajo experimental, en el que proponen un programa de intervención pedagógica para la atención de niños con alta capacidad matemática en nivel primaria. Finalmente, aunque desde un enfoque en la didáctica general y no propiamente de la matemática, otro investigador digno de mencionar en el contexto mexicano es Pedro Sánchez, quien ha hecho aportes desde el ámbito de la educación especial y, en los últimos años, en colaboración con otros autores presenta un enfoque específico hacia la Inteligencia y el Desarrollo de Talento (Sánchez, Martín y Medrano, 2005; Sánchez y Medrano, 2010; Camelo-Lavadores, Sánchez-Escobedo y Pinto-Sosa, 2017).

Por otra parte, a pesar de que en los últimos años se ha evidenciado mayor concientización de la importancia de brindar una atención efectiva a los alumnos con aptitudes sobresalientes para las matemáticas, no abundan las propuestas con acciones concretas y prácticas para invertir en estos alumnos desde el medio áulico y escolar en general. En concordancia con el enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas según las normativas vigentes de la Secretaría de Educación Pública (SEP) de México para la Educación Secundaria, diversos autores (Castro, 2008; Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández, 2008; Benavides y Maz-Machado, 2012) sostienen que una de las corrientes de investigación más prolíficas es la centrada en la resolución de problemas, y en general se converge hacia su idoneidad tanto para la detección de las altas capacidades como para su desarrollo. Es de mencionar que la SEP también advierte la importancia de atender a los alumnos sobresalientes, definiendo el enriquecimiento curricular (desde el aula, la escuela o fuera de la escuela) y la aceleración como los modelos de atención educativa a implementar.

Es en este contexto, en el que se reconoce tanto la necesidad de atender a la población de EACM como la falta de formación inicial de los docentes, que se plantea un proyecto de desarrollo profesional de un docente con 14 años de experiencia como profesor de matemáticas en el nivel secundario del sistema educativo cubano, estudiante de una Maestría en Matemática Educativa en México en el momento del desarrollo de esta investigación. Contemplando el contexto de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas como un espacio de actividad que potencia las altas capacidades naturales en matemáticas, el profesor en capacitación realizó una observación situada en dos escenarios, con el fin de observar estrategias que le permitan la atención de las necesidades de EACM.

REFERENTES TEÓRICOS

Dadas las características de esta población, es importante reflexionar sobre el reto que los problemas le pueden representar. Respecto a la idoneidad de los problemas, Leikin (2004) considera que entre las condiciones que deben cumplir es que deben ser motivadores, que no se resuelvan fácilmente con procedimientos disponibles, que requieran que el estudiante realice un intento y tener varios enfoques para obtener la solución. Curra (2015) plantea que los problemas propuestos en las Olimpiadas de Matemática no requieren del conocimiento de muchos contenidos, pero sí constituyen un desafío para los estudiantes que los intentan resolver. Asegura que los referidos problemas se escogen de manera que, en la búsqueda de sus soluciones, los alumnos adquieran habilidades y destrezas de gran utilidad, proceso que les permita, a la vez, redescubrir conceptos básicos.

Los fundamentos teóricos base para este proyecto y el análisis de resultados fue el Modelo Diferenciador de Dotación y Talento (MDDT) de Francoys Gagné. Más allá de la forma en que se nombra a esta población, y de la que podríamos sostener una discusión en torno a las similitudes y diferencias conceptuales, lo consideramos representativo de la explicación sociocultural del talento asumida por la SEP. En este modelo se definen cinco componentes con categorías, cuyas interacciones contribuyen al desarrollo de las capacidades. Además, marca diferencia entre la conceptualización de superdotación y el talento, aludiendo con el primero a las aptitudes naturales del individuo que mediante los procesos de desarrollo, tales como el aprendizaje y la práctica, se convierten en talentos expresados en distintos campos particulares de la actividad humana, incluyendo el matemático.

Asimismo, reconoce la figura del profesor como persona significativa dentro de los catalizadores ambientales influyentes en los de tipo intrapersonales y en los procesos de desarrollo, cuyo centro son las actividades de aprendizaje y práctica por las que atraviesa el talento en desarrollo y donde se ponen bajo foco como categorías esenciales para el logro: el contenido específico hacia el que éstas se encaminan y el contexto de aprendizaje o formato en el que tienen lugar, lo que en este proyecto se expresa en la dirección que se le dio al estudio para el pretendido desarrollo profesional, es decir, a través de los problemas y entrenamientos de olimpiadas de matemáticas respectivamente.

Asimismo, tomamos el enfoque teórico de Resolución de Problemas para definir posturas en cuanto al significado de Altas Capacidades desde el punto de vista del desempeño práctico del alumno. En este sentido, asumimos como referencias principales las experiencias de líderes en el campo, como George Pólya y Alan Schoenfeld, incorporando además su visión del proceso de enseñanza.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para el desarrollo de esta práctica profesional el profesor en capacitación llevó a cabo una investigación de campo de tipo descriptivo, utilizando como método principal la observación *in situ* en dos escenarios:

- La Segunda Edición del Curso para Entrenadores de Olimpiadas Matemáticas auspiciado por el Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas (CARMA), con sede en San Luis Potosí. Modalidad en línea. Periodo: octubre 2019-enero 2020.
- Los entrenamientos del preselectivo zacatecano de primaria y secundaria para su participación en olimpiadas matemáticas de 2020. Presencial. Periodo: enero-abril 2020.

Ambos escenarios fueron seleccionados por su amplia experiencia y resultados destacados en el campo de las olimpiadas mexicanas de matemáticas. El instructor del curso, director de CARMA, ha fungido como entrenador de la selección nacional de primaria para olimpiadas internacionales. Asimismo, los entrenadores han conseguido mantener a Zacatecas entre los primeros lugares a nivel nacional en los últimos años.

Para concentrar los resultados de la observación realizada en el curso de entrenadores se llenaron tablas diseñadas para tal fin, en las que se recogieron recursos, estrategias, habilidades y sugerencias que pueden ser puestos en juego en el proceso de entrenamiento de dichos temas. Por otra parte, en los entrenamientos de los olímpicos se usó un instrumento que recopiló información relativa a dos aspectos: la planeación del entrenador y la interacción de los participantes con el contenido.

RESULTADOS

En esta sección se reportan aquellas características de problemas olímpicos, así como aspectos de los entrenamientos que el profesor en capacitación analizó.

Análisis del curso para entrenadores

Por cuestiones de espacio, se presenta el análisis de un tema de los primeros dos módulos para ejemplificar el trabajo. Esta información se presenta en las Tablas 1 y 2.

Tabla 1. Análisis del tema de áreas.

<table>
<tr><td colspan="3">Módulo: Geometría</td><td colspan="2">Tema: Áreas</td></tr>
<tr><td colspan="5">Objetivo(s): Calcular áreas a partir de razones conocidas y otras estrategias creativas</td></tr>
<tr><td>Unidades de análisis</td><td>Recursos</td><td>Estrategias</td><td>Habilidades</td><td>Sugerencias</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Problemas de áreas</td><td rowspan="2">Intuición.</td><td>Manipulación geométrica.</td><td rowspan="3">Calcular la longitud de segmentos, calcular áreas.</td><td>Dividir las figuras complejas.</td></tr>
<tr><td>Búsqueda del complemento.</td><td>Mirar la figura como parte de un todo.</td></tr>
<tr><td>Relación del área de triángulos con un vértice en común. Teoremas del ángulo común, de semejanza, Pitágoras y de las alfombras.</td><td>Buscar relaciones con la razón entre segmentos conocidos.</td><td>Calcular razones entre áreas.</td></tr>
</table>

En la participación en el curso para entrenadores, el profesor construyó conocimiento profesional en dos sentidos: por una parte, se ejercitó en la resolución de problemas tipo y avanzados de los diferentes temas que de manera clásica se presentan en los certámenes de la Olimpiada de Matemáticas. Éstos están agrupados en cinco módulos: Lógica y Aritmética, Geometría, Teoría de Números, Combinatoria y miscelánea de problemas.

Tabla 2. Análisis del tema de Lógica.

Módulo: Lógica y aritmética			Tema: Lógica		
Objetivo(s): Promover el razonamiento lógico-deductivo a partir de las implicaciones lógicas en juegos, acertijos y problemas que despierten el interés del estudiante					
Unidades de análisis		Recursos	Estrategias	Habilidades	Tipos
Juegos		Observar. Cumplir reglas.	Deducciones lógicas.	Comunicar información (verbalizar), seguir instrucciones, autoevaluarse.	En general se puede partir de la identificación de lo que se está pidiendo y seguidamente analizar los casos que son posibles para determinar cuáles de ellos o contradicen las reglas o no nos permiten avanzar y quedarnos con la que sí lo permite.
Acertijos	Algoritmos	Intuición, ingenio, paciencia, orden.	Construir tablas y/o diagramas para registrar los movimientos que se van haciendo y los nuevos resultados que se van obteniendo.		
	Verdadero y falso	Observar, paciencia orden.	Considerar la referencialidad, buscar la contradicción, Identificación de contrarios, Utilizar tablas de valores de verdad, analizar casos.		
	Conocimien-to perfecto	Interpretar el "no sé"	Cuestionarse, hacer listas.		

Cada sesión fue analizada y codificada como se presenta en las tablas anteriores, constituyendo de este modo un conjunto de herramientas para el profesor.

Observación de los entrenamientos de olímpicos

Los entrenamientos proporcionaron información importante para el profesor, en el sentido de que la experiencia de observación *in situ* le permitió conocer los pormenores del trabajo que representa entrenar a estudiantes con altas capacidades en matemáticas.

El profesor reportó sus observaciones de manera escrita al finalizar el proyecto; los aspectos más relevantes de su reporte se sintetizan a continuación.

Sobre el entrenador y la planeación de las sesiones

La planeación fue poco detallada y en ocasiones inexistente, ya que fundamentalmente trabaja desde los propios textos seleccionados, percibiéndose en más de una oportunidad, que la elección de los problemas propuestos fue realizada “en el momento”. Las fuentes preferentes fueron la Serie de Cuadernos de Olimpiadas, que se presentan en la sección “Prepárate” de la página web de la OMM, en los apartados de “Nivel Estatal”, “Nivel Nacional” y “Bibliografía Avanzada”, según el tema a abordar, con la excepción de los contenidos relativos a la geometría, para los que el entrenador manifiesta su preferencia por lo expuesto en Jerónimo (2010). Con independencia de la planeación concebida, la cantidad de problemas a resolver en cada sesión siempre fue subordinada al ritmo de trabajo de los estudiantes.

Las acciones que típicamente condujeron los entrenadores dentro de cada momento de los entrenamientos y cuyas cualidades estuvieron estrechamente ligadas a la forma en que se conciben en los textos tomados como referencia, el epicentro lo constituye la propuesta y resolución de problemas.

Los aprendizajes esperados, vistos como las habilidades o capacidades que en función de las tipologías de problemas propias a la temática se deben promover para tener un buen desempeño en la Olimpiada, por lo general, no fueron declarados.

Sin incluir el empleo de materiales didácticos o el trabajo colaborativo; acciones estas que pueden tener, bien la finalidad desde su concepción, o bien la repercusión en la práctica, de elevar el grado de motivación de los estudiantes; se identificaron estrategias motivacionales en el 40% de las sesiones de entrenamientos observadas.

En el 80% de las sesiones observadas los entrenadores implementaron en su práctica alguna estrategia para evocar los conocimientos previos necesarios para resolver los problemas propuestos.

La regularidad (70%) estuvo marcada por el desarrollo de sesiones cuyo método principal fue el trabajo en equipos.

Sobre la interacción de los estudiantes con los contenidos

La planeación fue poco detallada y en ocasiones inexistente, ya que fundamentalmente trabaja desde los propios textos seleccionados, percibiéndose en más de una oportunidad, que la elección de los problemas propuestos fue realizada “en el momento”.

En el 80% de las observaciones, para la mayor parte de los problemas presentados, se hizo algún tipo de aclaración con mayor o menor nivel de profundidad, y sólo en dos sesiones; una cuya dinámica estuvo marcada por la escritura en el pizarrón de los problemas por pares mientas los estudiantes resolvían los anteriormente propuestos

En este punto se percibió un apego casi total (90%) a la metodología clásica de la resolución de problemas donde se plantea que el estudiante “redescubre” el conocimiento bajo la guía del profesor. Se debe destacar que la guía del entrenador fundamentalmente tuvo lugar al momento de la concepción del plan para atacar el problema, teniendo su principal manifestación en las preguntas reflexivas que de forma sistemática formulaba cuando los estudiantes, después de batallar un tiempo razonable, no lograron avanzar, o para invitarlos a evaluar el procedimiento que estos proponen.

Los estudiantes tuvieron en todo momento la libertad de cometer errores, como recomienda Pólya para crear un buen clima en el salón. En el tratamiento al error por parte del entrenador se realizó de diferentes formas, inclusive ante su detección en los problemas de una misma sesión, por lo que la cuantificación que se presenta también tiende a la generalidad.

El material didáctico es prácticamente ausente.

El entrenador gestionó evidencias de aprendizaje en el 100% de las sesiones observadas. El mecanismo más habitual fue el de pasar por los puestos de trabajo y constatar avances en el camino a la solución o una versión completa de la misma, escuchando la explicación de alumnos y pasándole la vista a sus anotaciones en los cuadernos.

Un punto importante son las estrategias heurísticas promovidas en las sesiones, tanto la selección de problemas como la interacción promovida estuvo centrada en ellas, en la Tabla 3 se presentan divididas por áreas.

Tabla 3. Estrategias heurísticas gestionadas por el entrenador.

Geometría	Teoría de números	Combinatoria
Hacer dibujos. Prolongar segmentos. Trazar perpendiculares o paralelas. Trazar circunferencias. Trazar tangentes y cuerdas comunes. Trazar líneas y puntos notables. Argumentar por contradicción.	Escoger la notación efectiva o específica. Uso de los productos notables. Factorización de trinomios cuadrados perfectos. Transformación de potencias. Perseguir la paridad y residuos. Dividir en casos. Generalizar.	Hacer una coloración de ajedrez. Hacer uso del principio de Casillas, paridad o invarianza. Dividir en casos. Considerar casos extremos y argumentar por contradicción. Hacer una coloración de acuerdo con el peor de los casos o intentar de llegar a lo contrario. Utilizar separadores (combinaciones con repetición).

En todo momento los entrenadores evidenciaron que el éxito en el proceso de resolución no depende la aplicación aislada de una de ellas sino de su combinación e integración consecuente y juiciosa, con base en la intuición que desarrolla la práctica.

Se apuesta por la construcción de suficientes analogías para tener un buen desempeño sobre la base de experiencias propias del alumno resolviendo problemas y de su observación del cómo otros lo hacen, incluyendo a los compañeros y entrenadores.

CONCLUSIONES

Como resultado de este desarrollo de práctica profesional podemos destacar que el profesor tuvo un crecimiento en torno al desarrollo de su conocimiento profesional respecto a 3 aspectos principales:

- Conocimiento de un contenido matemático propio de la olimpiada.
- En torno a la resolución de problemas como un marco que le permite gestionar el quehacer de él como profesor y del estudiante como resolutor de problemas en formación.
- Hace una reflexión sobre el modo en que su práctica puede verse beneficiada a partir de la observación de estrategias y métodos de trabajo del contexto olímpico.

Consideramos que esta inmersión en el contexto de la olimpiada y la visión que obtuvo, más integradora acerca de los problemas de olimpiada de matemáticas de la enseñanza secundaria y en lo relativo a los procesos de enseñanza-aprendizaje en los entrenamientos de estudiantes olímpicos, puedan permitirle mejorar su formación inicial de manera que pueda atender a los futuros EACM que en su trayectoria docente se presenten.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo económico del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología que posibilitó la realización de este proyecto. Asimismo, se agradece a CARMA y a los entrenadores del preselectivo zacatecano por las facilidades brindadas para la observación.

REFERENCIAS

Acosta, Y. y Alsina, A. (2017). Conocimientos del profesorado sobre las altas capacidades y el talento matemático desde una perspectiva inclusiva. *Números, 94*, 71-92.

Benavides, M. y Maz-Machado, A. (2012). ¿Qué deben conocer los profesores y padres sobre el talento matemático? *IX Congreso Iberoamericano Superdotación, Talento y Creatividad* (pp. 167-179). Buenos Aires, Argentina.

Butto, C., Andrade, A. y Lanz, M. Y. (2016). Identificación de estudiantes con altas capacidades matemáticas en educación primaria. *Revista Horizontes Pedagógicos, 18*(2), 66-85.

Camelo-Lavadores, A. K., Sánchez-Escobedo, P. y Pinto-Sosa, J. E. (2017). Academic self-efficacy of high achieving students in Mexico. *Journal of Curriculum and Teaching, 6*(2), 84-89.

Carrillo, C. y Jiménez, O. (2015). El talento matemático. Un privilegio que requiere atención especial. En J. M. López-Mojica y J. Cuevas (Coords.), *Educación especial y matemática educativa. Una aproximación desde la formación docente y procesos de enseñanza* (pp. 125-146). México: CENEJUS.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 1-34). Badajoz: SEIEM.

Curra, D. A. (2015). Olimpiadas de Matemática en la Educación Superior Cubana: su relevancia en la formación del profesional. *VI Taller Científico Metodológico sobre la Matemática y su Enseñanza*. Holguín, Cuba: Universidad de Holguín.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faísca, 13*(15), 30-39.

Farfán, R., Cantoral, R., Vidal, R., Méndez, C., Alonso, G., Jaso, G., Marín, L. y Robles, I. (2013). *Construcción social de la ciencia entre las niñas y los niños del Programa Niños Talento*. México: Gobierno del Distrito Federal, Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). Zaragoza: SEIEM.

Jerónimo, J. (2010). *Geometría en olimpiadas de matemáticas*. Documento interno. Universidad Autónoma de Guerrero, México. Recuperado el 14 de febrero de 2020 de http://www.matetam.com/sites/default/files/libro_shuyriguin.pdf

Jiménez, O. (2016). *El talento matemático. Estrategias de atención extracurricular* (Tesis de maestría no publicada). Unidad Académica de Matemáticas. Universidad Autónoma de Zacatecas. México.

Leikin, R. (2004). Towards high quality geometrical tasks: reformulation of a proof problem. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 209-216). Bergen, Noruega: PME.

Martínez, M. y Guirado, A. (Coords.) (2013). *Altas capacidades intelectuales. Pautas de actuación, orientación, intervención y evaluación en el periodo escolar*. México: Editorial Graó/Colofón.

Sánchez, P., Martín S. y Medrano, R. (2005). Necesidades de capacitación a profesores de primaria y estudiantes normalistas para la detección de niños con capacidades y aptitudes sobresalientes. *Revista Educación y Ciencia, Nueva Época, 9*(18/32), 55-66.

Sánchez, P. y Medrano, R. (2010). Pruebas académicas para la acreditación y ubicación adelantada (aceleración) de los niños sobresalientes en México. *Ideacción*, *31*, 1-8.

Valadez, M. y Valencia, S. (2011). *Desarrollo y educación del talento en adolescentes*. México: Editorial Universitaria, Universidad de Guadalajara.

UNA CÚPULA GEODÉSICA CONVERTIDA EN PLANETARIO: UNA EXPERIENCIA EXTRACURRICULAR PARA ALUMNADO DE ALTA CAPACIDAD EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

A geodesic dome becomes a planetarium: an extracurricular experience for high-capacity students in Secondary.

Conejo Pérez, I., Valero Gutiérrez, C.

BRAINS International School (España)

Resumen

Se presenta una experiencia extracurricular de nuestro centro escolar de Secundaria, que incluye el contenido de las sesiones, detallando paso a paso las sesiones de matemáticas y el proceso de construcción de la cúpula geodésica. Esa cúpula geodésica se usó finalmente como planetario. El programa Aula Abierta nace para cubrir la atención a la diversidad del alumnado con altas capacidades en nuestro centro de Secundaria. Comenzó durante el curso 2017/18 y seguimos desarrollándolo hasta hoy.

Palabras clave: *alta capacidad, extracurricular, Educación Secundaria*

Abstract

Our Secondary school presents an extracurricular experience for gifted students. This includes the content of the sessions, outlining step by step the mathematics session, and the construction process of the geodesic dome. That geodesic dome was finally used as a planetary. The Open Classroom program was created to address student differentiation of gifted students in our Secondary school. It started during the 2017/18 academic year and we continue to develop it today.

Keywords: Differentiation*, Extracurricular, Secondary Education*

INTRODUCCIÓN

Aula Abierta da nombre al proyecto que, de manera extracurricular, desarrollamos en nuestro centro escolar en Ed. Secundaria, dentro del horario escolar. El alumnado que asiste a Aula Abierta es seleccionado en base a los test realizados por el departamento de Orientación del centro.

A continuación se presentan las generalidades de Aula Abierta, como la justificación o la organización. Más adelante, se indican las sesiones de un curso completo de Aula Abierta, en el que el alumnado realizó una cúpula geodésica de madera para convertirla en un planetario en el que poder explicar las constelaciones más importantes al alumnado de cursos inferiores. Se detalla la sesión de Matemáticas, en la que se explican las diferentes tipos de cúpulas y cómo hicimos una maqueta de la cúpula elegida. También se enumeran las dificultades encontradas.

Conejo Pérez, I. y Valero Gutiérrez, C. (2020). Una cúpula geodésica convertida en planetario: una experiencia extracurricular para alumnado de alta capacidad en Educación Secundaria. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 61-68). Logroño: Universidad de La Rioja.

Justificación

El proyecto Aula Abierta nace para cubrir una necesidad cada vez mayor, al detectar en nuestro centro escolar un elevado número de estudiantes con altas capacidades (CI superior a 120) y superdotación (CI superior a 130). Antes de comenzar el curso 2017/18, se recogían datos de un 21% de los alumnos de 1º ESO y un 30% ente los de 2º ESO que cumplían estas características. Del total se seleccionan 11 alumnos teniendo en cuenta, además del CI, su estilo de aprendizaje, creatividad, persistencia en las tareas, así como motivación e intereses de cada uno (Tabla 1).

Tabla 1. Alumnos seleccionados para el programa Aula Abierta en el curso 2017/18.

	1º ESO	2º ESO	TOTAL
NIÑAS	1	2	3
NIÑOS	5	3	8
TOTAL	6	5	11

Estos estudiantes están reconocidos en la LOMCE[1] como alumnado que forma parte de la atención a la diversidad: “corresponde a las Administraciones educativas adoptar las medidas necesarias para identificar al alumnado con Altas Capacidades intelectuales y valorar de forma temprana sus necesidades”. La Ley señala dos formas de actuación concretas con este alumnado: el enriquecimiento y la flexibilización curricular.

Objetivos del programa Aula Abierta

El objetivo general es mejorar la atención de las necesidades del alumnado con altas capacidades. Antes de la existencia de este programa en nuestro centro, se diseñaban actividades de enriquecimiento dentro del aula por materias (Reyzabal, 2007).

Algunos de los objetivos específicos son los siguientes:

- *Aumentar la motivación del alumnado*, evitando así posibles problemas de conducta.
- *Prevenir el fracaso escolar* que en ocasiones aparece en alumnos con altas capacidades.
- *Desarrollar habilidades sociales* a través del trabajo en equipo.
- *Facilitar la integración social* al conocer a compañeros con intereses comunes.
- *Mejorar su autoestima*, a veces dañada por el rechazo de los demás o una alta exigencia personal. (Sanz Chacón, 2014)

ORGANIZACIÓN GENERAL

Se desarrolla por primera vez este programa de Aula Abierta durante el curso 2017/18. Desde entonces, seguimos desarrollándolo bajo las mismas premisas:

- *Horario:* dentro del horario escolar, una sesión doble cada quince días, en horario y día de la semana variable, para evitar que el alumnado se ausente siempre de la misma materia.
- *Contenido:* extracurricular, interdisciplinar y que sea de interés para el alumnado.
- *Selección del alumnado*: Se encarga el departamento de Orientación del centro, teniendo en cuenta las observaciones de aula del profesorado. Se entrevista a las familias y al alumnado de Aula Abierta.

---

[1] La LOMCE (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa) es el marco legal aplicable en el ámbito educativo en nuestro país.

- *Producto final colectivo* que sirva a la vez para exponer su trabajo y sea para los demás.

SESIONES DEL PROYECTO "UN VIAJE AL ESPACIO"

En la Tabla 2 se resume la temporalización de las sesiones de Aula Abierta durante el curso 2017/18.

Tabla 2. Temporalización de sesiones del proyecto del curso 2017/18.

SESIONES DEL PROYECTO DE AULA ABIERTA "*UN VIAJE AL ESPACIO*"				
Sesión	Descripción	Profesorado	Objetivo	Producto
¿Cómo llegaríamos a Marte? 21/02/2018	Sesión sobre Astronomía	Biología y Geología	Nociones básicas de Astronomía.	Diseñar un viaje
¿A quién llevarías a Marte? 09/03/2018 21/03/2018	Sesión sobre técnicas de investigación social.	Departamento de Orientación	Trabajar habilidades sociales. Conocer las principales herramientas de investigación social	Diseñar por grupos una encuesta, un experimento y entrevistas para ver qué atributos son los más valorados.
Debate Copérnico vs Galileo 26/04/2018 03/05/2018	Sesión de investigación sobre los sistemas de Copérnico y Galileo. Debate en inglés.	Inglés	Habilidades de oratoria en inglés.	Preparación del debate.
Los relatos de las estrellas. 16/05/2018	Sesión sobre mitología	Lengua y Literatura, Cultura Clásica.	Descubrir los principales mitos relacionados con las constelaciones.	Elaboración de carteles sobre los diferentes mitos.
Una cúpula geodésica 31/05/2018	Sesión sobre cúpulas geodésicas	Matemáticas	Geometría de las cúpulas geodésicas.	Maqueta de la cúpula geodésica
Construcción de la cúpula geodésica y exhibición. 18/06/2018 al 22/06/2018	Sesiones para construir la cúpula y taparla con una tela opaca para poder proyectar en ella.	Tecnología	Habilidades de construcción. Habilidades de exposición a los compañeros.	Cúpula geodésica que muestra las constelaciones.

CONTENIDOS DETALLADOS

A continuación, se concretan las sesiones de Matemáticas y la de construcción de la cúpula geodésica.

Descripción de la sesión de Matemáticas

El contenido de esta sesión, preparada por la profesora de la asignatura de Matemáticas, es extracurricular, con apoyo en contenidos curriculares de nivel superior de la asignatura de Matemáticas. Se trata de conocer las cúpulas geodésicas como poliedros. Los poliedros son contenido de la asignatura de Matemáticas, en el bloque de Geometría de 3º ESO. Como los alumnos participantes eran de los niveles de 1º y 2º ESO, no suponían para ellos conocimientos previos, sino nuevos. Además, las cúpulas geodésicas no forman parte del contenido curricular de la asignatura.

Se introduce el tema a través de la figura de Richard Buckminster Fuller (1895-1893), un arquitecto estadounidense que se especializó en este tipo de construcciones (llegando incluso a tener la patente) y que es conocido por haber diseñado el edificio de Estados Unidos para la Expo de 1967. Aquel edificio sufrió daños terribles debido a un incendio en 1976, pero la estructura principal, la de los triángulos que forman la cúpula geodésica, soportaron aquel terrible incidente. Rehabilitaron el edificio, dejando la estructura original, y se convirtió en el Enviroment Museum en 1995 (Buckminster Fuller Institute, 2020).

Se ven usos de las cúpulas geodésicas en diferentes estructuras arquitectónicas, siendo de especial interés para la arquitectura sostenible y los invernaderos.

Se introducen los poliedros, llegando hasta los poliedros platónicos y finalmente se define cúpula geodésica y se nombran algunas características de las cúpulas:

- Las cúpulas son poliedros cuyas caras son triángulos, formando hexágonos u otros polígonos.
- Las cúpulas pueden generarse a partir de icosaedros o dodecaedros.
- Los vértices de la cúpula pertenecen a una misma esfera, que la contiene.
- La frecuencia de la cúpula es el número de veces que las aristas del icosaedro o dodecaedro son subdivididas, dando lugar a triángulos más pequeños (Figura 1).

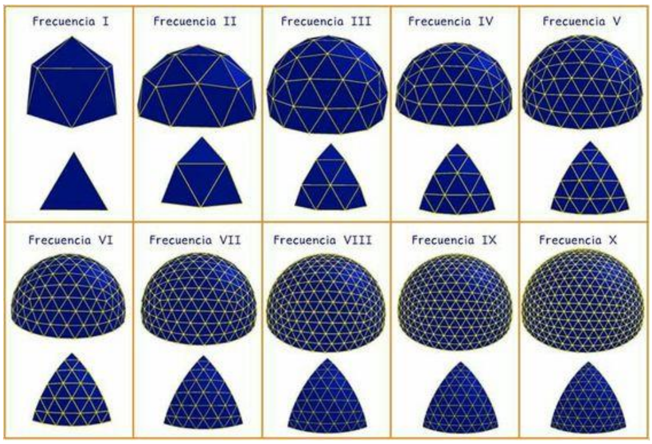


Figura 1. Frecuencia de las cúpulas geodésicas. Fuente: https://images.app.goo.gl/WEAGuhCem5ssgbQw9

Tras ver los diferentes tipos de cúpula, se les plantea realizar una maqueta de la cúpula que construirán en sesiones posteriores con el profesor de Tecnología. Para esa cúpula se utilizaron aristas de madera que compramos para añadir a un kit adquirido por internet.

Para la realización de la maqueta, seguimos las instrucciones que encontramos en la web "educaconbigbang" (Educa con Bing Bang, 2017). Para la construcción de esa maqueta de cúpula, se utilizaron:

- Nodos: limpiapipas (Figura 2).
- Aristas: pajitas, también llamadas popotes (Figura 3).
- Herramientas: Tijeras, regla de medir, rotulador fino para marcar las medidas.

Figura 2. Limpiapipas. Fuente: https://conideade.com/manualidades-varias/1592-pack-de-10-limpia-pipas-de-6-mm-.html

Figura 3. Pajitas (también llamadas popotes). Fuente: https://www.puntoqpack.com/pajitas/12471-pajita-recta-extra-gruesa-de-23cm-y-o-08-cm-de-boca.html

Descripción del proceso de construcción

A continuación se concretan los detalles acerca de los materiales utilizados y del proceso de construcción de la cúpula que realizaron los alumnos.

Materiales utilizados en la construcción:

- Listones de madera de perfil redondo. Pueden usarse listones entre 16mm y 32mm de diámetro debido a las características de los nodos y los tornillos que deben insertarse. En nuestro caso, se usaron listones de 20mm de diámetro.
- Kit de construcción para los nodos. El kit puede encontrarse y comprarse aquí: https://buildwithhubs.co.uk/thekit.html (Figuras 4 y 5). En este kit se incluyen los tornillos necesarios para el ensamblaje

Figura 4. Kit utilizado para las uniones de las aristas. Fuente: web https://buildwithhubs.co.uk/thekit.html

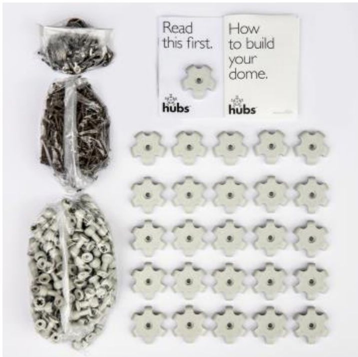


Figura 5. Contenido del kit utilizado para las uniones de las aristas. Fuente: https://shop.buildwithhubs.co.uk/

Proceso de construcción:

1. Realizar una maqueta de la cúpula geodésica que se desea construir. En nuestro caso, seguimos las instrucciones encontradas en el blog “educa con Big Bang”. https://educaconbigbang.com/2017/01/construye-una-cupula-geodesica-pajitas-popotes/
2. Calcular las medidas de los dos tipos de aristas: hubs = geodesic domes made simple : dome calculator (buildwithhubs.co.uk)
3. Cortar los listones en las medidas calculadas previamente: 35 unidades de las aristas largas (63.5 cm) y 30 unidades de las aristas cortas (56.5cm).
4. Lijar todos los listones.
5. Atornillar los listones a los nódulos siguiendo la maqueta construida o las instrucciones del kit (Figura 6).

Complicaciones y soluciones

A lo largo de la preparación de esta actividad surgieron varias dudas y problemas que fuimos resolviendo y por ellos se exponen aquí, para allanar el camino a aquellos que quieran realizar una actividad similar.

1. En primer lugar, nos dimos cuenta de que la mayor complicación radicaba en el tamaño de la cúpula, puesto que queríamos que cupiera dentro de un aula. Obviamente, el diámetro de la base de la cúpula está relacionado con la longitud de las aristas, que se puede calcular. La web en la que compramos el kit para los nódulos tiene una calculadora online en la que, al introducir el ancho o alto deseado, se calculan automáticamente el resto de

longitudes, como el alto o el ancho y también las longitudes de los dos tipos de aristas (https://buildwithhubs.co.uk/domecalc.html). De esta manera, pudimos recalcular rápidamente la longitud a la que teníamos que cortar los listones para que se convirtieran en nuestras aristas, ya que al principio simplemente hicimos un cálculo a escala de la maqueta que habíamos realizado previamente. Como profesora de Matemáticas, me pareció que habría sido muy interesante haber construido una tabla con medidas de aristas, las medidas del diámetro y la altura de la cúpula, pero, lamentablemente, no tuvimos tiempo.

2. Sufrimos falta de tiempo y hubo que buscar alternativas. Se acercaba el final de curso, los alumnos participantes necesitaban preparar sus exámenes de evaluación y no queríamos ampliar la cantidad de sesiones que habíamos planeado a principio de curso. Esto nos hizo cambiar de material para las uniones o nódulos. A pesar de haber planeado dos sesiones de 50 minutos para la construcción de la cúpula, nos dimos cuenta de que ese tiempo era el necesario para el proceso de cortar los listones en las medidas calculadas previamente y lijarlos. Necesitábamos, además, el tiempo para atornillar las aristas a los nódulos y luego montar la cúpula.
3. Habíamos pensado en diferentes tipos de uniones para los nódulos, pero finalmente recurrimos a comprar el kit para evitar posibles problemas. El montaje de la cúpula con ese kit nos llevó más de una hora, con los listones ya cortados y preparados.
4. Nuestra mayor duda con el kit era que los nódulos parecían ser todos iguales, lo que quizá podría dificultar que, en algunos casos, las uniones fueran de cinco aristas y, en otros, los nódulos unían seis aristas. Finalmente, el uso del kit no implicó estas dificultades.
5. Las mayores complicaciones que recuerdan los alumnos, tres años después de realizar la cúpula de la que hablamos, fueron que fue necesario comprar un desatornillador eléctrico porque atornillar los tornillos del kit a los listones requería mucha fuerza manual y que la tela que cubría la cúpula no tenía la opacidad suficiente, por lo que hubo que comprar más tela, para poner una segunda capa. Además, recomendarían que se colocase la tela desde dentro, no desde fuera, porque si no, las aristas obstaculizan la buena disposición de las estrellas en la superficie.

CONCLUSIÓN

La valoración de este primer proyecto de Aula Abierta es positiva, ya que cumplimos los objetivos principales de Aula Abierta y del proyecto. Además, conseguimos la motivación y el entusiasmo de los alumnos en cada una de las sesiones.

Desde el punto de vista de recogida de evidencias, se ha entrevistado al alumnado participante acerca de aquella experiencia. A pesar de que sigue presente en su memoria el problema de la tela y tener que esperar a tener desatornilladores eléctricos, todos sonríen cuando recuerdan la experiencia, lo que nos da la seguridad de que fue un gran proyecto. Por eso, hemos decidido realizarlo de nuevo este curso académico, con las mejoras aprendidas de aquella primera vez.

Después de tres años, hemos descubierto en una de esas entrevistas que una de las alumnas ha dicho que aquella experiencia le abrió el horizonte y despertó su interés por la arquitectura y espera hacer de esta pasión su profesión. En ocasiones, los docentes no somos conscientes de lo determinantes que pueden ser las actividades que diseñamos para el alumnado.

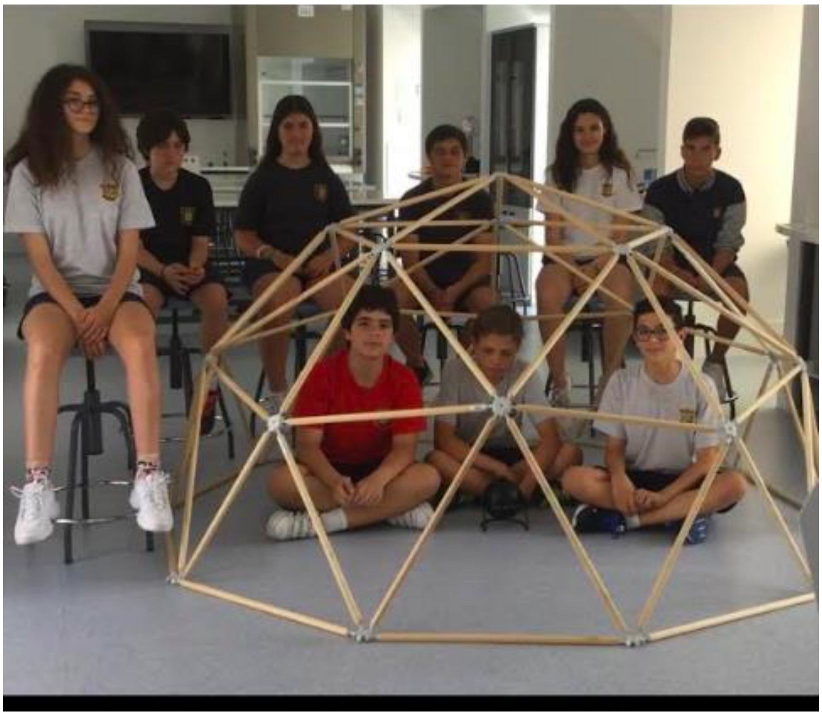


Figura 6. Cúpula terminada con los alumnos, exhaustos tras la última sesión de construcción.

REFERENCIAS

Buckminster Fuller Institute (1 de Noviembre de 2020). Obtenido de Buckminster Fuller Institute: https://www.bfi.org/about-fuller/biography

Educa con Bing Bang. (21 de Febrero de 2017). Obtenido de Educa con Bing Bang: https://educaconbigbang.com/2017/01/construye-una-cupula-geodesica-pajitas-popotes/

Reyzabal, M. (2007). *Respuestas educativas al alumnado con altas capacidades intelectuales.* Madrid: Consejería de Educación.

Sanz Chacón, C. (2014). *La maldición de la inteligencia.* Madrid: Editorial Plataforma Actual.

PROGRAMA JOMAT ULS, JORNADAS MATEMÁTICAS PREUNIVERSITARIAS Y VOCACIONALES DE LA UNIVERSIDAD DE LA SERENA

JOMAT ULS Program, pre-universitary and vocational mathematics days of the University of La Serena

Contreras, D.

Universidad de La Serena (Chile)

Resumen

Esta comunicación tiene como objetivo dar a conocer el trabajo que se realiza desde el año 2012, como respuesta al desafío que se plantearon un grupo de estudiantes de pedagogía comprometidos con la educación matemática, a través de la realización de jornadas matemáticas destinadas a distintos niveles educativos, ya sea de educación básica y media. De esta manera, el Programa JOMAT ULS, se ha convertido en un referente de competiciones matemáticas en el norte de Chile, potenciando la identidad docente de futuros profesores de matemática y trabajando con estudiantes con interés y alta capacidad en matemática.

Palabras clave: *jornadas, matemáticas, vocación, olimpiadas*

Abstract

This communication aims to publicize the work that has been carried out since 2012, in response to the challenge posed by a group of pedagogy students committed to mathematics education, through the realization of mathematical conferences aimed at different educational levels, either primary and secondary education. In this way, the JOMAT ULS Program has become a benchmark for mathematical competitions in northern Chile, enhancing the teaching identity of future mathematics teachers and working with students with interest and high ability in mathematics.

Keywords: *educational days, mathematics, vocation, olympics*

PROGRAMA JOMAT ULS

El Programa JOMAT ULS, Jornadas Matemáticas Preuniversitarias y Vocacionales de la Universidad de La Serena, Chile, nace el año 2012 bajo el Programa de Emprendimiento e Innovación Social "Chilecree", instancia impulsada por las empresas Entel, Ericsson y la Fundación Desafío de Humanidad y surgió por la inquietud que se planteó un grupo de alumnos de pedagogía, sobre la falta de equidad que existe en estudiantes con alta vulnerabilidad social para el ingreso a la Educación Superior. Si bien desde su fundación, el Programa JOMAT ULS ha estado enfocado en ayudar a disminuir la brecha que existe entre estudiantes de cuarto año medio (17 años) de establecimientos vulnerables y particulares en la prueba de selección universitaria de matemática, han salido a la luz otros objetivos que hacen referencia al quehacer docente de los futuros profesores de matemática de la Universidad de La Serena y al poder potenciar a los estudiantes con interés y talento en matemáticas.

Contreras, D. (2020). Programa JOMAT ULS, jornadas matemáticas preuniversitarias y vocacionales de la Universidad de La Serena. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 69-74). Logroño: Universidad de La Rioja.

Identidad docente

Si bien en los últimos años las políticas públicas sobre el acceso y atracción de estudiantes de enseñanza media a las carreras del área pedagógica han mejorado con la implementación de diversos beneficios estudiantiles, tales como: la Beca Vocación de Profesor, gratuidad y otras oportunidades estudiantiles; se ha podido evidenciar que existen diversos factores que impactan en la permanencia de éstos estudiantes en las carreras de formación inicial docente. Entre los factores de deserción más comunes encontramos: bajos rendimientos académicos, poca adaptabilidad a la vida universitaria, una percepción desfavorable de la pedagogía, entre otros con menor impacto. Considerando lo anteriormente mencionado, uno de los objetivos del Programa JOMAT ULS es fortalecer la vocación e identidad docente de los estudiantes de pedagogía a través del trabajo colaborativo y el fomento de habilidades tanto en el área académica y social, lo cual ha permitido que los estudiantes universitarios participantes, en los diferentes roles que ofrece el Programa, presenten una mayor identificación con la carrera docente.

Si bien los programas formativos de las distintas carreras de pedagogía de nuestra institución presentan a lo largo de sus años distintas prácticas pedagógicas en un contexto profesional, el Programa JOMAT ULS les ha permitido a esos futuros profesores la construcción de un saber a partir de la experiencia, mediada por una reflexión en y sobre la acción (Schön, 2010), fortaleciendo la identidad profesional docente, potenciando su capacidad creativa, innovadora, transformadora y crítica para generar soluciones pertinentes en diversos contextos.

Figura 1. Equipo Organizador Campamento JOMAT 2015.

Es importante destacar que durante sus 9 años de vida, el Programa JOMAT ULS ha sido organizado y ejecutado exclusivamente por estudiantes de pregrado, contando con la participación en los equipos de: organizadores, tutores, monitores y de producción; con estudiantes universitarios de diversas áreas del saber, destacando principalmente la participación de las carreras de Pedagogía en Matemáticas y Computación, Pedagogía en Matemáticas y Física, Pedagogía en Biología y Ciencias Naturales, entre otras (Figura 1).

Altas capacidades

Desde hace algunos años los establecimientos educacionales en Chile deben asegurar el derecho a la educación de las y los estudiantes de toda la comunidad educativa, trabajando sobre ello en dos puntos: la eliminación de la discriminación y el abordaje de la diversidad (Gobierno de Chile, 2015). En este sentido, se busca que cada establecimiento promueva la inclusión de sus estudiantes utilizando diversas prácticas educativas, que permitan reconocer la diversidad de éstos, realizando un trabajo más pertinente a cada realidad, identidad, necesidad y motivaciones que puedan presentar estos estudiantes.

Si bien los programas y estrategias que se han implementado en el sistema educativo chileno han sido exitosos para la atención de estudiantes en el ámbito de dificultades de aprendizaje y discapacidad, no se han visto a nivel gubernamental programas que permitan atender a los estudiantes con altas capacidades.

Para Greenes (1981) es importante que se pueda ser capaces de identificar, caracterizar y ver que necesidades tienen los estudiantes con altas capacidades matemáticas, con el fin de brindarles una formación diferenciada acorde a sus características particulares, teniendo cuidado en la correcta diferenciación de los buenos alumnos en matemática y los superdotados.

De esta manera, el Programa JOMAT ULS en sus últimos años, se ha enfocado en promover la participación en sus distintas actividades, de estudiantes con interés en las matemáticas, potenciando principalmente el trabajo colaborativo a través de la resolución de diferentes tipos de tareas matemáticas en las Olimpiadas Matemáticas JOMAT ULS, ayudando al trabajo pedagógico que realizan los profesores de matemática en sus diversas comunidades educativas, promoviendo la participación de sus estudiantes en esta competición matemática.

Campamentos y Jornadas JOMAT ULS

Los formatos de participación en el Programa JOMAT ULS varían dependiendo del nivel educativo en el cual se participe, yendo desde el formato tipo Jornada de 1 día, destinada a estudiantes de octavo año básico (13 años; Figura 2), a los Campamentos para estudiantes de cuarto año medio (17 años) que tienen una duración de entre 4 o 5 días de actividades formativas divididas en diversas áreas de trabajo.

Figura 2. Fotografía Oficial Jornada JOMAT ULS 2019 para Octavos Básicos (última actividad realizada en modalidad presencial).

Es importante destacar que, en el formato de Campamento, el trabajo previo que lleva los distintos equipos organizadores de estudiantes en la preparación de tutorías, talleres y otro tipo de asignaciones, se presentan como tareas que llevan meses de organización previa a la celebración de la actividad presencial. Dentro de los días del Campamento JOMAT ULS, donde se reúnen las delegaciones participantes, junto al equipo de estudiantes universitarios, en dependencias de un establecimiento educacional para vivir el campamento (durante 4 o 5 días), tradicionalmente se realizan actividades en las siguientes áreas:

1. *Área Académica:* realización de tutorías (8 bloques de 90 minutos) en los ejes temáticos de la prueba de admisión universitaria de matemática y la realización de las Olimpiadas de Matemáticas.
2. *Área Vocacional:* realización de charlas con la implementación de diversos test de intereses vocacionales, talleres de ciencias preparados por estudiantes de distintas carreras de la

Facultad de Ciencias, charla vocacional con oferta académica de la Universidad de La Serena, etc.

3. *Área Recreativa:* actividades recreativas, actividades deportivas, visitas a lugares históricos de la ciudad, entre otras.

Olimpiadas de Matemáticas JOMAT ULS

Uno de los objetivos del Programa JOMAT ULS es promover la participación de los estudiantes con interés en la matemática en las Olimpiadas de Matemáticas JOMAT ULS, que, a diferencia de la mayoría de las competiciones matemáticas, buscan potenciar el trabajo en equipo a través de la resolución de diferentes tipos de tareas matemáticas, con un sistema de competencia dinámico, que lo hace atractivo para el público presente que puede ir viendo a medida que van transcurriendo las preguntas, los resultados obtenidos por sus equipos participantes.

Figura 3. Etapa Grupal Olimpiadas de Matemáticas Jornada JOMAT ULS 2019 para Octavos Básicos.

El formato de competición de las Olimpiadas de Matemáticas JOMAT ULS se ha mantenido con pocas variaciones desde su origen el año 2012, presentando las siguientes características tanto para la forma de la competencia, como para el equipo participante:

1. *Equipo Participante:* cada establecimiento debe ser representado por un equipo de 6 estudiantes liderados por un Capitán (en algunas ocasiones han sido equipos de 5 estudiantes).
2. *Etapa Grupal:* los establecimientos participantes se dividen en grupos mediante un sorteo previo a la competencia. En cada grupo se realizan 6 Preguntas Abiertas y 6 Preguntas con Alternativas. Clasifican a la Gran Final 2 equipos, los mejores puntajes de cada grupo. En caso de empate en un lugar de clasificación, se realiza un “Duelo” entre los capitanes de cada equipo hasta obtener un ganador (Figura 2).
3. *Repechaje:* los establecimientos que no logren clasificar de manera directa a la Gran Final, se enfrentan en un Repechaje con la misma cantidad de preguntas y condiciones de la Etapa Grupal.

4. *Gran Final:* participan los equipos clasificados de la Etapa Grupal y del Repechaje, donde se realizarán 3 rondas de preguntas: Ronda 1: Puntaje Secreto (actividad variadas dependiendo del año), Ronda 2: Preguntas Abiertas (12 preguntas) y Ronda 3: Preguntas con Alternativas (12 preguntas). Gana la competencia el equipo que acumule más puntaje en las 3 Rondas. En caso de empate en el Puntaje Final, se realiza un "Duelo" entre los capitanes hasta obtener un ganador.
5. *Formato y tipos de preguntas:* en todas las etapas de la competencia, las Preguntas Abiertas y con Alternativas deberán ser respondidas en 1 minuto y los contenidos que se evalúan corresponden a los Objetivos de Aprendizaje correspondientes para el nivel, propuestos por el Ministerio de Educación.

Modalidad remota

Si bien este año, debido a la pandemia del COVID-19, se han visto afectadas la realización de actividades en modalidad presencial, se ha generado una nueva oportunidad de realizar actividades en modalidad remota. Es así como el Programa JOMAT ULS ya ha realizado dos actividades en esta modalidad (Figura 4), pudiendo reunir a estudiantes de distintos lugares del país, mediante las versiones a distancia de la Jornada para Octavos Básicos realizada durante el mes de septiembre, y la realización de la Jornada para Segundos Medios realizada durante el mes de octubre.

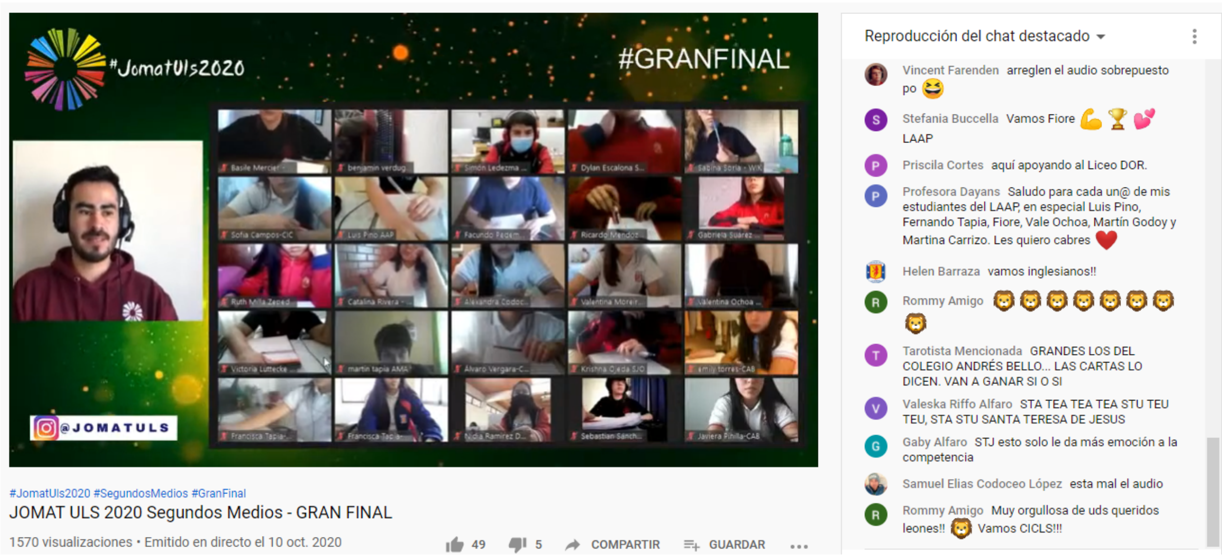


Figura 4. Gran Final Jornada JOMAT ULS 2020 para Segundos Medios en modalidad remota.

Es importante mencionar que la realización de la competencia en modalidad remota, ha permito seguir manteniendo el formato de competición, y al ser transmitida por YouTube, además ha continuado la dinámica de participación de las comunidades educativas mediante el seguimiento y la realización de comentarios de apoyo a sus equipos participantes durante toda la transmisión. Continuando con la modalidad remota, la próxima Jornada será la celebración de la competencia para estudiantes Quinto y Sexto Básico, las cuales servirán en su modalidad individual como clasificatoria a la 1° Edición de la Olimpiada Internacional de Matemática para Educación Primaria.

Finalmente, es importante destacar que a través de los 9 años de vida del Programa JOMAT ULS, se ha podido beneficiar a más de 1000 jóvenes de distintos niveles educativos de establecimientos de las regiones de Atacama, Coquimbo y Valparaíso, con un promedio de asistencia de 100 estudiantes por actividades, dónde entre un 15% y 25% de los participantes del nivel preuniversitario, ingresa a alguna de las carreras de pregrado que ofrece la Universidad de La Serena, demostrando de esta manera el gran impacto que tiene esta actividad tanto en el ámbito interno (con los estudiantes de pedagogía), como en la vinculación con el medio regional y nacional.

REFERENCIAS

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Gobierno de Chile (2015). Ley N° 20.845. *Diario Oficial de la República de Chile, 29 de mayo*.

Schön, D. (2010). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Madrid: Paidós.

ESTRUCTURAS EN FUNCIONES CON VARIABLES CONTINUAS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UN PROGRAMA DE ENRIQUECIMIENTO CURRICULAR

Structures in functions of continuous variables by Primary students in a curriculum enrichment program

Damián, A., Cañadas, M.C., Ramírez, R.

Universidad de Granada (España)

Resumen

Este trabajo se enmarca en el ámbito del pensamiento algebraico en las primeras edades. Nuestra investigación es parte de otra más amplia cuyo objetivo es describir el pensamiento funcional de seis estudiantes de 6º de primaria que pertenecen a un programa de enriquecimiento curricular, cuatro de ellos de alta capacidad matemática. En el presente documento, nos centramos en la descripción de las estructuras evidenciadas por los estudiantes en una tarea de generalización en un contexto geométrico que involucra una función cuadrática de variable continua. Implementamos dicha tarea durante dos sesiones: en la primera de ellas, los alumnos trabajan de forma individual y colectiva, siendo la segunda una entrevista individual. Los estudiantes establecen varias estructuras y evidenciamos que tienen capacidad para representar de forma verbal y simbólica.

Palabras clave: pensamiento funcional, enriquecimiento curricular, estructura, representación, variable continua

Abstract

This work is part of the field of algebraic thinking in the early ages. Our research is part of a broader one whose objective is to describe the functional thinking of six 6th grade students who belong to a curricular enrichment program, four of them with mathematical talent. In this document, we focus on the description of the structures evidenced by the students in a generalization task in a geometric context that involves a quadratic function of a continuous variable. We implement this task during two sessions: in the first one, the students work individually and collectively, the second being an individual interview. The students establish various structures, and we show that they have the ability to represent verbally and symbolically.

Keywords: *functional thinking, enrichment program, structure, representation, continuous variable*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Desde la década de los 90 se han llevado a cabo múltiples investigaciones en torno al desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria. Con las primeras investigaciones surge la conocida propuesta curricular conocida como *early algebra*, que busca promover modos de pensamiento algebraico, generar un mayor grado de generalización en el pensamiento de

Damián, A. Cañadas, M. C. y Ramírez, R. (2020). Pensamiento funcional con variables continuas en estudiantes de educación primaria en un programa de enriquecimiento curricular. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 75-82). Logroño: Universidad de La Rioja.

alumnos de educación primaria y aumentar su capacidad para expresar la generalización (e.g., Brizuela y Blanton, 2014; Molina, 2005).

Uno de los focos de investigación en el contexto de la propuesta *early algebra* es el pensamiento funcional. Se entiende por pensamiento funcional "la componente del pensamiento algebraico basada en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 3). En la última década se han publicado diferentes estudios en este contexto con estudiantes en España, en el marco de dos proyectos investigación I+D centrados en el pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (e.g., Pinto y Cañadas, 2019; Torres, Cañadas y Moreno, 2019). Estos autores indagan en las relaciones funcionales y las estructuras de las mismas establecidas por los estudiantes, entre otros aspectos.

Hasta ahora, tanto en el ámbito nacional como en el internacional, las investigaciones se han centrado en el trabajo con funciones lineales de variable discreta, por lo que consideramos relevante el estudio con funciones no lineales. Es por ello que introducimos funciones cuadráticas, por ser las más simples dentro de las no lineales. Consideramos interesante explorar también las variables continuas, pues describen muchos de los fenómenos que podrían contextualizar otros problemas con funciones.

Como primera aproximación a este tipo de funciones con estudiantes de primaria, en este estudio trabajamos con alumnos de 6º de educación primaria que pertenecen a un programa de enriquecimiento curricular mediante el uso de una tarea que implica una función cuadrática de variable continua. En este tipo de programas se añaden "nuevos contenidos o temas que no están cubiertos por el currículo oficial o trabajo en un nivel de mayor profundidad de determinados contenidos de éste" (Benavides, Maz, Castro y Blanco, 2004, p. 54). La elección de dicho colectivo es minimizar las potenciales dificultades que podrían derivarse de la falta de conocimientos matemáticos previos o de una actitud negativa hacia las tareas matemáticas propuestas.

El presente estudio se justifica con base en dos dimensiones: curricular e investigadora. Desde el punto de vista curricular, el Ministerio de Educación y Ciencia (2014) establece el currículo básico de educación primaria. En matemáticas, encontramos la referencia al pensamiento funcional cuando se expone que el estudiante debe conseguir "describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (MECD, 2014, p. 19.387). En cuanto a la potenciación usada en la estructura de la tarea, la potencia es parte del bloque 2 y el área y el área del cuadrado aparecen en los bloques 3 y 4.

Desde el ámbito investigador, encontramos evidencias de la importancia de promover el pensamiento funcional en los primeros niveles educativos en estudios como Cañadas y Fuentes (2015) o Torres et al. (2019), entre otros. Dichos estudios cuentan con elementos comunes: tipo de variables (discreta) y tipo de funciones (lineales). Por tanto, destacamos la necesidad de indagar en el pensamiento funcional con tareas que impliquen variables continuas y funciones no lineales.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El foco matemático del pensamiento funcionales la función (Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). Se denomina pensamiento funcional al proceso de construir, describir y razonar con y sobre funciones, entendiendo como función la relación de dependencia entre cantidades covariantes. "Es una componente del pensamiento algebraico basada en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 3).

Nos centramos en funciones de variable continua. Se llama variable continua a aquella cuyos posibles valores son todos los valores pertenecientes a un intervalo y, por tanto, infinitos valores (Asencio, Romero y de Vicente, 2003).

De entre las diferentes concepciones de la estructura en el pensamiento algebraico (Molina y Cañadas, 2018), en el contexto funcional consideramos la noción de estructura como los números y las variables numéricas (expresadas mediante el uso de diferentes representaciones), operaciones y sus propiedades presentes cuando los estudiantes identifican una regularidad (Pinto y Cañadas, 2018).

Diferentes autores abordan las estructuras que los estudiantes de educación primaria utilizan en la resolución de tareas de generalización de involucran funciones lineales. Torres et al. (2019) indagan en el pensamiento funcional de tres estudiantes de 2º de educación primaria (7-8 años), mediante el uso de tareas que implican tres funciones lineales: (a) $f(x) = x + 3$ (aditiva), (b) $(x) = 2x$ (multiplicativa) y (c) $f(x) = 1 + 2x$ (aditiva y multiplicativa). Los autores destacan la escasa variedad de estructuras diferentes por parte de los alumnos para una misma regularidad, en ocasiones porque identifican y usan la misma para todas las situaciones planteadas (correcta). También se evidencia la dificultad en el establecimiento de estructuras que implican una combinación de operaciones.

Pinto y Cañadas (2018) realizan un estudio a 24 estudiantes de 5º de educación primaria (10-11 años) que implicaba la función lineal $f(x) = 2x + 6$. Entre los resultados, destacan que los alumnos fueron capaces de establecer la generalización y que 10 estudiantes establecieron diferentes estructuras, expresadas de varias formas (hecho que permite interpretar y entender el proceso seguido por los estudiantes para generalizar, según los autores). Los autores conjeturaron que algunos estudiantes generalizaron pero no lo expresaron hasta que se les requirió. Pinto y Cañadas (2019) plantean la tarea anterior a alumnos de 3º de educación primaria (8-9 años) y 5º de educación primaria, observando una mayor variedad de estructuras en 3º que en 5º. Más estudiantes en 5º (19 de 24) que en 3º (11 de 24) establecieron la estructura. De hecho, los estudiantes de 3º hicieron uso de casos particulares en sus producciones, en ocasiones porque no necesitaban la regularidad para responder a las preguntas.

OBJETIVOS

El presente trabajo forma parte de una investigación más general cuyo objetivo general es describir el pensamiento funcional manifestado por un grupo de estudiantes de un programa de enriquecimiento curricular de 6º de educación primaria. Los sujetos E1, E3, E4 y E6 estaban nominados como alta capacidad matemática. El objetivo de este trabajo es describir las estructuras establecidas por dichos estudiantes.

METODOLOGÍA

Este estudio posee un enfoque cualitativo. Su naturaleza es, en consecuencia, descriptiva. Con base en la escasez de literatura de investigación en materia de estructuras cuadráticas y variables continuas en el contexto de educación primaria, este trabajo es de carácter exploratorio.

Trabajamos con 6 estudiantes de 6º de educación primaria (11-12 años) de un colegio concertado de Granada (España). Se trata de una muestra de carácter intencional. Los estudiantes pertenecían a un programa de enriquecimiento curricular en el área de matemáticas para atender a la diversidad dentro del aula.

El instrumento de recogida de información es un cuestionario que trabajamos con los estudiantes durante el desarrollo de dos sesiones, compuesto por diferentes preguntas. Dicha tarea involucra la función cuadrática $A(L) = 36 - L^2$ con una contextualización geométrica, hecho que permite el análisis de la continuidad de la variable, los valores extremos de las mismas y el uso de representación pictórica. Entendemos en el presente estudio por continuidad de la variable que los estudiantes reconozcan que la misma puede tomar todos los valores comprendidos en un intervalo (para los estudiantes, que puede tomar valores decimales); en este caso, el valor de la variable L está comprendido entre los valores 0 y 6.

La tarea consiste en la determinación del área resultante de quitar una esquina cuadrada de lado indeterminado (L) a un cuadrado de lado 6 (Figura 1).

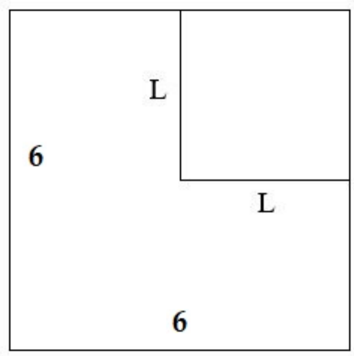


Figura 1. Tarea correspondiente a la primera sesión.

Diseñamos la recogida de información en dos sesiones en las que dos investigadores estuvieron presentes, así como la tutora de los estudiantes, aunque esta última no participó. Ambas sesiones fueron video grabadas.

En la primera sesión propusimos a los estudiantes trabajar con un cuadrado de lado 6 al que se le quita la esquina superior derecha. Les preguntamos por la relación existente entre el área de la figura resultante y el lado de la esquina que se elimina, siendo la misma $A(L) = 36 - L^2$, donde $A(L)$ es el área de la figura resultante y L es el lado de la esquina suprimida. La tarea se compone de tres apartados. En el primero de ellos, los estudiantes calcularon el área de un cuadrado de lado 6. En el segundo, el área de un cuadrado de lado 6 al que se le suprimen esquinas de lados 2 y 4; en el último, el área de un cuadrado de lado 6 al que se le suprime una esquina de lado L. Tras trabajar de forma individual cada uno de los apartados, los estudiantes hicieron una puesta en común junto con los investigadores, donde expusieron sus respuestas y llegaron a conclusiones comunes.

La segunda sesión fue una entrevista individual con cada uno de los estudiantes. La llevamos a cabo los dos investigadores del equipo que realizamos la sesión anterior, siendo uno de ellos el entrevistador y el otro, el encargado de grabaciones y observación. Les planteamos dos tareas similares a la de la primera sesión: un cuadrado al que se le quitan cuatro esquinas iguales y un cuadrado al que se le sustraen dos esquinas opuestas, no necesariamente iguales. En la primera tarea (Figura 2, izquierda), la relación es $A(L) = 36 - 4L^2$, donde $A(L)$ es el área de la figura resultante y L es el lado de la esquina suprimida; en la segunda (Figura 2, derecha), $A(X, Y) = 36 - X^2 - Y^2$, donde $A(X, Y)$ es el área de la figura resultante, X es el lado de una de las esquinas suprimidas y Y es el lado de la otra. La entrevista individual tuvo una duración máxima de media hora, aunque hubo estudiantes que la realizaron en menos tiempo.

La información con la que contamos son la grabación y transcripción de las sesiones y el material escrito de los estudiantes.

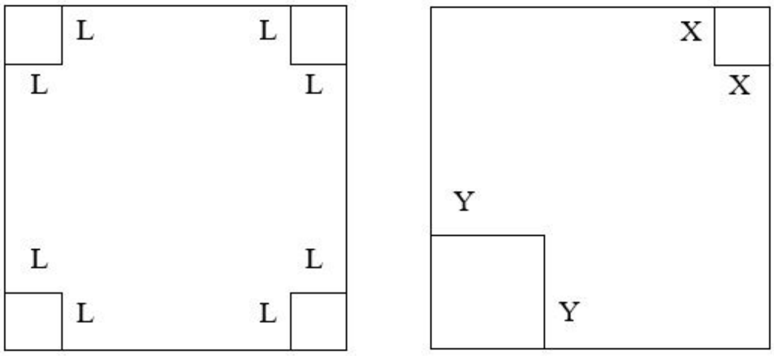


Figura 2. Tarea correspondiente a la segunda sesión.

La unidad de análisis del presente trabajo son las respuestas dadas por los estudiantes a cada pregunta de la tarea en cada sesión. Para analizar la estructura establecida por los estudiantes, tenemos en cuenta tres momentos de la recogida de datos: trabajo individual, puesta en común, entrevista.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Presentamos el análisis de datos y los resultados en tres partes, según los momentos temporales en los que recogimos la información: trabajo individual de la sesión grupal, puesta en común de dicha sesión y entrevista.

En el trabajo individual en el cuestionario, tres estudiantes establecieron una estructura, aunque incorrecta $(36 - L)$. Los otros tres dieron valores concretos a la variable, pero no llegaron a establecerla.

En la puesta en común, cinco los estudiantes intervinieron. En general, todos establecieron una relación entre las dos variables al decir que necesitaban conocer el lado de la esquina para poder calcular el área de cuadrado y por extensión, el área de la figura resultante. Los investigadores ayudaron a los estudiantes a establecer la estructura de forma simbólica mediante pasos, comprobando al final que todos ellos la entendieron y eran capaces de establecerla. Aunque los seis llegaron a establecer la estructura, solamente tres de ellos (E2, E3 y E6) establecieron por sí solos que el área pequeña es $L \times L$ (aunque en la estructura establecieron $36 - L$). Uno de los estudiantes usó la expresión “doble L” para representar el área del cuadrado pequeño.

Como síntesis de los resultados obtenidos durante la entrevista, en la tarea de las 4 esquinas, los seis estudiantes establecieron la estructura: uno mediante el uso de casos particulares, dos de forma incorrecta $(36 - 4L,\ 36 - L)$ y tres de forma correcta $(36 - 4L^2)$. Teniendo en cuenta que todas las esquinas son iguales, analizamos si los estudiantes hicieron uso de una sola variable, concluyendo que 5 de ellos lo hicieron. En relación al hecho de usar la misma letra para las cuatro esquinas (pues son iguales las cuatro), cuatro de los cinco estudiantes lo tuvieron en cuenta y lo incluyeron en la estructura que establecieron. La dificultad de poner $4L$ en lugar de $4L^2$ puede provenir del hecho de que identificasen que debían quitarle cuatro veces algo que depende de L, pero no diferenciasen que L fuese la longitud del lado o el área de la esquina suprimida.

En la tarea de las 2 esquinas, dos estudiantes respondieron de forma correcta mientras que los restantes establecieron estructuras incorrectas $(36 - X - Y)$. Dada la presencia en esta ocasión de dos variables y la existencia de la condición $X + Y = 6$ que liga ambas en caso de rellenar todo el lado, analizamos también la respuesta de los estudiantes con base en este hecho. En referencia al uso de dos variables diferentes, fueron todos los alumnos los que utilizan dos letras diferentes para notar cada una de las esquinas. Esto evidencia que los estudiantes asociaron que a esquinas diferentes le correspondían letras diferentes. Cuatro de ellos precisaron de ayuda pues sostenían argumentos como “si no fueran iguales pues a uno le pondría L y a otro pues un número o una letra más grande, multiplicando L por L” o “las llamaría igual porque al fin y al cabo hago lo mismo, puedes utilizar la misma letra”. También es interesante notar la agrupación de términos llevada a cabo por E4: en lugar de expresar $36-X^2-Y^2$, hizo uso de otras letras para indicar los productos ($M \times M = N$, $L \times L = A$), de forma que la relación final fue $36-N-A$.

Atendiendo a los estudiantes, haremos una breve síntesis de la evolución de cada uno de ellos (Tabla 1).

Tabla 1. Síntesis de los resultados obtenidos por estudiante.

Estudiante	Trabajo individual	Puesta en común	Entrevista: Tarea 2 esquinas	Entrevista: Tarea 4 esquinas
E1	No establece estructura	No hay información	No establece estructura	$36-X=32$ $36-Y=30$
E2	$36-L$	$36-L$	$36-4L^2$	$36-X^2-Y^2$
E3	No establece estructura	No hay información	$36-4L^2$	$36-X^2-Y^2$
E4	No establece estructura	No hay información	$36-L$	$36-X^2-Y^2$
E5	$36-L$	$36-L$	$36-4L$	$36-X-Y$
E6	$36-L$	$36-L$	$36-4L^2$	$36-X^2-Y^2$

Vemos así que E2, E3 y E6 establecen de forma correcta las estructuras de las tareas de la entrevista, por lo que los estudiantes evolucionan con respecto a la primera sesión. Sin embargo, E5 no consigue establecer correctamente la estructura y E4 establece bien la relativa a la tarea de las 4 esquinas.

CONCLUSIONES

La principal contribución del presente estudio estriba en la introducción de una tarea que implica variable continua y una función cuadrática en un contexto geométrico. Ello ha permitido evidenciar las capacidades de los estudiantes de generalizar en contextos funcionales diferentes a los usuales en la literatura, que suelen contemplar variable discreta y funciones lineales.

Los estudiantes, que no habían recibido instrucción previa en el uso de las letras, establecieron $L \times L$ como área de la esquina eliminada, hecho que consideramos un logro importante por la generalización conseguida y la identificación de la estructura (equivalente a L^2). Sin embargo, cuando restaron esta cantidad a 36 (área del cuadrado original), no fueron capaces de agrupar como potencia cuadrada. Algunos estudiantes mencionaron la potencia, aunque no hicieron uso de ella de forma correcta. Ello puede deberse al hecho de que, si bien conocían la potencia aplicada a una situación con números, aritmética, no les era conocida en una situación con letras, algebraica (siendo el uso el mismo en ambas situaciones, pueda ser que los estudiantes no lo identifiquen como tal y consideren que el uso de la potencia es diferente con letras y con números). Puede deberse también al hecho de no haber adquirido bien los conocimientos previos relativos a la potencia.

Evidenciamos que los estudiantes tienen capacidad para representar de forma verbal y simbólica. No rechazan la notación simbólica, pero cometen errores, por lo que no creemos que la dificultad provenga de la función cuadrática, sino por agrupación de términos o uso de la notación simbólica. Concordamos con Pinto y Cañadas (2018) en que los estudiantes fueron capaces de generalizar y usar para ello estructuras de varias formas.

Torres et al. (2019) exponen la dificultad que presentaron los estudiantes de su estudio al establecer estructuras cuando estas implican una combinación de operaciones. En su caso, dichas estructuras son aditivas y multiplicativas. Si bien la estructura aquí es diferente, por ser combinación de potencia y diferencia, coincidimos con los autores en su conclusión de la dificultad de los estudiantes asociada a la combinación de estructuras.

Destacamos el papel de los investigadores en su interacción con los estudiantes durante las sesiones. Dichos estímulos ayudaron en varias ocasiones a los estudiantes a la consecución de las tareas, de forma similar a lo expuesto por Ureña, Ramírez y Molina (2019), donde los investigadores evidenciaron que los estímulos influyeron mucho en las respuestas de los estudiantes. La reformulación de las preguntas, la verbalización de las reflexiones de los estudiantes o la repetición de las preguntas son algunos de los estímulos que se llevaron a cabo en las sesiones. De acuerdo con Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020), permitieron a los estudiantes en diversas ocasiones cambiar la estrategia en la que se aproximaban a la tarea o comprender lo que se les estaba pidiendo en la misma. El conocimiento de los estímulos que permiten avanzar a los estudiantes en el reconocimiento de estructuras y su representación simbólica es de interés para el posterior diseño de investigaciones docentes.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo de investigación se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y en el seno del grupo de investigación FQM-193: “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” (FQM-193) de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

REFERENCIAS

Asencio, M. J., Romero, J. A. y de Vicente, E. (2003). *Estadística*. Madrid, España: McGraw-Hill.

Benavides, M., Maz, A., Castro, E. y Blanco, R. (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. Santiago de Chile: Oficina Regional de Educación de la Unesco para América Latina y el Caribe.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students’ capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: PME.

Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología – Segunda épica (UNLP), 14,* 37-57.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp.209-218). Granada, España: Comares.

Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA, 14*(3), 204-225.

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52,* 19349-19420.

Molina, M. (2005). La integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 53-69). San Cristóbal de la Laguna, España: SEIEM.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Granada, España: Atrio.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifthgraders within a functional approach. *PNA*, *12*(3), 173-184.

Pinto, E. y Cañadas, M. (2018). Structures and generalisation in a functional approach: the inverse function by fifth graders. En D. M. Gómez (Ed.), *Proceedings of the first PME regional conference: South America* (pp. 89-96). Santiago, Chile: PME.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). Valladolid, España: SEIEM.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 570-614.

LA MOTIVACIÓN DE LOS ALUMNOS EXCELENTES HACIA LAS MATEMÁTICAS

The motivation of excellent students towards mathematics

Domingues Carlos, F.S. [a], González-Astudillo, M.T. [b]

[a] Escola Secundária Dr. Mario Sacramento, Aveiro (Portugal). [b] Universidad de Salamanca (España)

Resumen

En este documento se presenta un estudio sobre las motivaciones de los estudiantes excelentes hacia el estudio de las matemáticas. Para ello se diseñó un cuestionario organizado en torno a seis factores motivacionales, que fue validado a través de un estudio estadístico después de su aplicación a 440 estudiantes de educación superior. Se aplicó, posteriormente, a cuatro estudiantes excelentes en matemáticas. En general, los cuatro estudiantes encuestados muestran altos niveles motivacionales, en todos los factores salvo en la actitud de sus padres.

Palabras clave: *excelencia, motivación, educación superior*

Abstract

This document presents a study about the motivations of excellent students towards mathematics. A questionnaire organized around six motivational factors was designed and was validated through a statistical study after its application to 440 higher education students. It was subsequently applied to four excellent students in mathematics. In general, the four students surveyed show high motivational levels, in all factors except the attitude of their parents.

Keywords: *excellent, motivation, higher education*

INTRODUCCIÓN

El término excelencia se usa a menudo sin una comprensión previa de su significado por lo que depende de cada individuo el sentido en el que se use. Esto da como resultado una multiplicidad de interpretaciones que dificultan la comunicación efectiva sobre el tema.

La definición de excelencia se refiere a la manifestación de competencias que resulta de la acumulación de un amplio cuerpo de conocimientos (Chi, 2006). Esto implica que, si se quiere entender cómo actúa un individuo que es excelente y por qué es más capaz que otra persona que no tiene esta capacidad, debemos entender cómo está organizado y estructurado su conocimiento, y cómo sus representaciones difieren de las de los principiantes (Chi, 2006). Además de esta definición de carácter absoluto, existe otra posible aproximación a este tema, de carácter relativo, basada en las diferencias individuales. En este sentido, un experto es alguien cuyo nivel de desempeño supera al de la mayoría de las personas (Cianciolo, Matthew, Sternberg y Wagner, 2006). En este documento, cuando usamos la palabra excelencia nos referimos a "desempeño muy por encima de la media", ya que este es el denominador común entre numerosas definiciones de excelencia.

Domingues Carlos, F. S. y González-Astudillo, M. T. (2020). La motivación de los alumnos excelentes hacia las matemáticas. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 83-90). Logroño: Universidad de La Rioja.

Según la literatura, la excelencia es específica para un dominio dado. Sin embargo, las capacidades transversales de procesamiento de información, como la resolución de problemas, también se consideran importantes (Cianciolo, Matthew, Sternberg y Wagner, 2006). Por lo tanto, independientemente del dominio específico del desempeño, parece haber cierto consenso en la comunidad científica sobre la influencia tanto de habilidades cognitivas como metacognitivas en el desarrollo del dominio. Nosotros nos vamos a centrar en estas últimas.

En este contexto, al enfocar nuestro estudio en la excelencia académica en Matemáticas de los estudiantes de Educación Superior, nos interesa conocer las percepciones, procesos, dinámicas, y circunstancias que culminan en un alto desempeño en esta disciplina. Por ello, nuestra intención es explorar la motivación que muestran los estudiantes con excelencia académica en Matemáticas.

MARCO CONCEPTUAL

La motivación ha sido investigada desde diferentes perspectivas y utilizando diferentes términos, a veces con significados total o parcialmente superpuestos (Murphy y Alexander, 2000). Pero a pesar de la diversidad de perspectivas sobre la motivación, es importante comprender la relación entre motivación y excelencia en Matemáticas.

Entre las investigaciones sobre la importancia de motivación en el desempeño en matemáticas Schiefele y Csikszentmihaly (1995) realizaron un estudio en el que incluyeron dos variables motivacionales: el interés o gusto por las Matemáticas como algo específico ligado a la materia y la motivación por el desempeño como algo más genérico, lo que permitió concluir que el gusto por las Matemáticas contribuyó significativamente en la predicción del nivel de competencia en ellas.

En el camino hacia la excelencia se plantean dos tipos de catalizadores motivacionales: uno propio del individuo en forma de autorregulación y otro a nivel de su entorno, que muchas veces frente a la combinación de potencial y motivación, proporciona formas de apoyarlo, fomentando oportunidades para obtener más conocimientos (Hunt, 2006).

A menudo el individuo tiene en su entorno figuras que considera significativas y que contribuyen a la mejora de su desempeño, influyendo favorablemente en su trayectoria. En contextos académicos, el estudiante con talento a menudo atribuye el papel de figura significativa a sus maestros (Csikszentmihalyi, Rathunde y Whalen, 1997). El apoyo brindado por la sociedad al estudiante que puede convertirse en un experto en matemáticas puede materializarse de varias formas, por ejemplo, el apoyo de los padres, la valoración de los maestros o la percepción de los compañeros.

Otro aspecto a tener en cuenta es la utilidad, es decir, la relevancia que les concede el sujeto a las matemáticas tanto para la vida cotidiana como para el futuro (Wigfield y Eccles, 2000). Aunque hay investigaciones que relacionan el éxito académico con la percepción de la utilidad (Wigfield y Cambria, 2010), otros no han encontrado dicha relación cuando se aplican tests estadarizados (Gilbert y otros, 2014). Dado que no hay acuerdo en este tema consideramos que debería ser uno de los factores para tener en cuenta en nuestro estudio.

En cuanto a la autoconfianza o la percepción que tiene un individuo de su propia capacidad para realizar las acciones que le permiten alcanzar los resultados deseados (Bandura, 1986), Pintrich y Schunk (2002) consideran que un individuo que tiene la expectativa de poder realizar una determinada tarea con éxito tiende a estar más motivado por el esfuerzo que otros con menor percepción de competencia.

Aunque antiguamente se consideraba la excelencia como una consecuencia de las capacidades innatas de los individuos, algunos investigadores han mostrado la influencia de algunas características motivadoras y de personalidad (Gagné, 2004) en dicha excelencia. Para otros, el papel de la dotación genética no es determinante, pues aunque se reconoce su importancia, consideran que los altos niveles de desempeño se explican mejor por la práctica deliberada prolongada (Zimmerman, 2006). Así, podemos ver la existencia de un continuo de perspectivas teóricas, desde aquellas que enfatizan el peso de la dotación genética, generalmente más asociada a la sobredotación, hasta aquellas que enfatizan la importancia de la práctica continua, generalmente aquellas consideradas más cercanas al concepto de excelencia.

Todos estos factores (motivación, interés, relaciones con terceros, autoconfianza, utilidad) contribuyen al nivel de desempeño de un individuo, y por lo tanto a la excelencia. Además, hemos incluído la teoría de la inteligencia percibida (Dweck, 1999) por los estudiantes para comprobar cómo perciben los estudiantes este aspecto.

METODOLOGÍA

Este estudio tiene dos partes claramente diferenciadas, por un lado, se refiere al diseño de un cuestionario previo sobre la motivación de los estudiantes en matemáticas, al que se le realiza un estudio estadístico para comprobar su validez y consistencia. A partir de este estudio se diseña el cuestionario definitivo que se aplica a cuatro alumnos excelentes en matemáticas para averiguar sus motivaciones. Concretamente, con este instrumento queríamos conocer los factores motivacionales de los estudiantes excelentes, lo que les atrae hacia la matemática y de que forma la valoran, como evalúan su competencia en esta disciplina e, incluso, el grado de acompañamiento de los padres hacia su aprendizaje de la matemática. Además, después de la lectura de varios trabajos de Dweck (1999) sobre las implicaciones de adopción de una teoría de la inteligencia que el estudiante adopta en la fijación de sus objetivos, decidimos también incluir en el cuestionario algunas afirmaciones que permitieran situar a cada participante con respecto a la teoría que adopta.

A partir de los cuestionarios de actitudes en relación con la matemática elaborados por Fennema y Sherman (1976) y de Tapia y Marsh (2004) elaboramos una primera versión de un cuestionario en la que se añadieron nuevos ítems diseñados por nosotros mismos, en función de los factores descritos en el marco conceptual y eliminamos aquellos identificados con variables que no eran el objetivo de este estudio pues parecían vinculados a contextos culturales distintos a nuestra realidad.

El cuestionario previo estaba conformado por cuarenta y cuatro ítems en los cuales los estudiantes debían indicar su grado de concordancia en una escala de tipo Likert con cinco alternativas y organizado en torno a seis dimensiones: niveles de motivación de los estudiantes (10); gusto por las matemáticas (8); percepción de los participantes sobre la apreciación de terceros de su relación con las matemáticas (5); niveles de autoconfianza (10); utilidad de las matemáticas (7); y teoría de la inteligencia percibida, adoptada por los estudiantes (4).

Este cuestionario previo se aplicó a cuatrocientos cuarenta estudiantes de educación superior de diferentes cursos que incluían en sus planes de estudios asignaturas de Matemáticas. Los estudiantes procedían de cuatro universidades públicas de España y Portugal. Cabe mencionar que estos estudiantes no fueron elegidos por su nivel de desempeño en Matemáticas, y podían ser o no ser buenos en esta materia.

Para que este instrumento cumpliera con los criterios de validez y confiabilidad, se realizaron análisis de valores atípicos, validez y fiabilidad mediante el software SPSS y posteriormente fue sometido a una serie de sucesivos refinamientos que culminaron en su versión definitiva. Los resultados de estos análisis se presentan en el apartado de resultados.

Una vez asegurada su calidad, este proceso culminó en una versión que se aplicó a cuatro estudiantes excelentes que participaron en un estudio empírico posterior que incluía otros instrumentos además de este (una entrevista personal para conocer sus características contextuales y afectivas y la resolución de dos problemas de matemáticas avanzadas para asignarles un nivel de creatividad), para tener una visión más global acerca de la excelencia, pero que no se presentan en este documento por cuestiones de extensión. La selección de los estudiantes tuvo en cuenta aquellos que obtuvieron excelentes resultados en dos materias universitarias de Matemáticas en el primer año universitario. Para ello, se usó la clasificación de una universidad pública portuguesa y se eligió a los alumnos que obtuvieron al menos diecisiete puntos (sobre veinte) en dos asignaturas de matemáticas.

Después de contactar con los estudiantes que cumplieron con los requisitos de clasificación, cuatro (dos hombres y dos mujeres) aceptaron participar en nuestra investigación. Para garantizar el anonimato de los participantes, a cada entrevistado se le asignó un código conocido solo por los investigadores A, B, C y D. De esta forma, adoptando una perspectiva relativa de excelencia. el hecho de que, en Matemáticas, los cuatro participantes obtuvieran mejores resultados que la mayoría de sus pares, asegura su excelencia en esta disciplina.

El cuestionario final estaba organizado en treinta y cuatro ítems en los que se pedía a los estudiantes su concordancia o discordancia a través de una escala tipo Likert de cinco niveles. Los ítems estaban agrupados en torno a seis factores: competencia percibida (12), utilidad/valor de las matemáticas (6), teoría de la inteligencia adoptada (4), motivación (6), afectividad hacia la matemática (4) y actitud de los padres (2).

RESULTADOS

En este apartado presentaremos primeramente el estudio estadístico realizado al cuestionario previo y en segundo lugar los resultados correspondientes a la aplicación del cuestionario definitivo con cuatro estudiantes excelentes.

Estudio de validez y confiabilidad del cuestionario

Se eliminaron los cuestionarios en los que no había respuesta en todos los ítems y para analizar los oulier se usó la distancia D2 de Mahalanobis que requiere que las variables se expresen en una razón o escala ordinal, en una escala Likert, que se corresponde con este caso. El proceso se hizo tres veces, identificándose 31 casos como valores atípicos que fueron eliminados del análisis. Así, la muestra finalmente estuvo compuesta por 382 estudiantes, 209 mujeres y 173 hombres, cuya edad promedio era de 19,95 años, desviación estándar de 3,46 años y cuyos valores mínimo y máximo son, respectivamente, 17 y 46 años.

Posteriormente, se realizó un análisis factorial de todos los ítems del cuestionario con el objetivo de detectar los factores responsables de la correlación entre las variables observables. Para verificar la idoneidad de la muestra para realizar el análisis factorial, se calculó la Medida de Adecuación de la Muestra KMO (MAA) (Kaiser-Meyer-Olkin) que resultó ser KMO = 0.932, lo que permitió concluir sobre la posibilidad de un análisis factorial de los datos con una calidad muy buena.

Se procedió a la extracción de los factores de las 44 variables (items), utilizando el método de los componentes principales que fueron todas superiores al mínimo normalmente requerido de 32%, para todas las variables. Se calculó, para cada uno de los factores obtenidos de las 44 variables originales, cuál es su propio valor, es decir, la variación total que ocurre en las variables originales explicadas por él, así como el porcentaje respectivo. Además, para poder asignar más fácilmente un significado a los factores extraídos, la matriz de los pesos de los factores se rotó mediante el método Varimax. Para que cada factor explique al menos una variable, se excluyeron los factores cuyos autovalores eran menores que 1 y se excluyeron tres factores más porque, aunque estos tienen autovalores ligeramente mayores que 1, creemos que no debemos exceder las seis dimensiones.

De esta forma se obtuvieron seis factores que explican el 58,2% de la variación total observada en las 44 variables originales, aunque las correlaciones entre ítems no justificaron la constitución teórica inicialmente prevista en seis factores. En consecuencia, en el siguiente análisis, se eliminaron los ítems con un factor mayor a 0.40 en un segundo factor. Se realizaron sucesivos refinamientos hasta que los análisis de validez y fiabilidad de la escala fueron positivos por lo que cada uno de los seis factores, explora un constructo diferente, lo que permite distinguir entre motivaciones positivas o negativas en matemáticas. Los pesos factoriales de las variables en cada factor son siempre mayores que el mínimo requerido de 40%. Sin embargo, dos elementos se saturan en más de un factor, con valores de segunda saturación solo marginalmente superiores a 0,30, lo que se considera aceptable. Se redefinieron las designaciones de dos factores debido a la asociación verificada entre ellos y las variables y se les dio el nombre que mejor se correspondía con su contenido.

El análisis de consistencia interna se realizó mediante la alfa de Cronbach. El análisis de consistencia interna se realizó por separado para cada factor. Sin embargo, por cuestiones de espacio, los resultados de ese análisis se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Alfa de Cronbach para cada uno de los factores.

Factor	Alfa de Cronbach	Número de Items
A - Competencia percibida	0,908	12
U - Utilidad/ valor de la matemática	0,812	6
T - Teoría de inteligencia adoptada	0,862	4
M - Motivación	0,695	6
G - Afectividad por la Matemática	0,729	4
P – Actitud de los padres	0,723	2

Los valores de alfa de Cronbach son altos (>70) para casi todos los factores, incluso el más pequeño de ellos se considera aceptable y el resto muy bueno. De esta forma, se considera que los datos de cada factor son unidimensionales, es decir, que las variables de cada uno de ellos miden adecuadamente una sola categoría.

En consecuencia, la escala resulta en un instrumento apropiado para evaluar la motivación de los estudiantes universitarios en matemáticas, y puede ser utilizada en nuestro estudio empírico posterior, así como, en el futuro, por otros investigadores.

Resultados de la aplicación del cuestionario en cuatro estudiantes excelentes

Se presentan a continuación los resultados obtenidos para los cuatro estudiantes excelentes a los que se aplicó el cuestionario. Para cada uno de ellos se resumen sus respuestas en torno a los seis factores que organizan el cuestionario.

El estudiante A evidencia unos elevados índices de competencia percibida en matemáticas; considera que es bueno en esta disciplina y que aprende fácilmente. Revela también confianza en sus capacidades para aprender la matemática, incluso la más avanzada. A pesar de aprender fácilmente, se posiciona de forma neutral en la relación entre esa facilidad y la motivación. Por otro lado, tanto sus profesores (actuales y pasados) como los de sus colegas tienen mucha confianza en sus capacidades. En cuanto valor de las matemáticas, las respuestas permiten concluir que no sabe si usará las matemáticas en el futuro aunque considera que tener un buen desempeño en matemáticas será importante para su presente y su futuro. Piensa que estudiar matemáticas le puede ayudar en la resolución de problemas de otras áreas y que es una disciplina necesaria. En suma, aprecia claramente la utilidad y el valor de la Matemática. Sobre la teoría de la inteligencia que adopta, las respuestas son menos concluyentes, puesto que, aunque parezca tender hacia la teoría incremental de la capacidad, no es posible extraer una conclusión categórica al respecto. En lo que concierne a los factores que lo motivan a aprender matemáticas excluye la competición con otros estudiantes, así como deseo de agradar a alguien o para evitar consecuencias negativas. Por el contrario, revela su motivación y deseo de tener éxito y de logar un objetivo final. Es notoria la afectividad de este estudiante hacia la matemática, pues no se aburre, tiene curiosidad intelectual en esta disciplina y está dispuesto a profundizar en sus conocimientos y a realizar el esfuerzo necesario para logar ese aprendizaje. Sus respuestas nos permiten afirmar que está intrínsecamente motivado para estudiar esta disciplina. Los padres no tratan de monitorizar ni alentar el estudio de las matemáticas de su hijo.

El alumno B está seguro de su competencia para aprender matemáticas, porque en casi todas las doce afirmaciones de este factor expresa la convicción de que es capaz, y además, otros también piensan que es capaz. Las únicas excepciones son dos de esos enunciados en los que se encuentra en una posición neutral, a saber, en el enunciado “Creo que soy bueno / buena en matemáticas” y en el que se establece una relación causal entre la facilidad para aprender matemáticas y la motivación que podría derivarse de ella. En cuanto a la utilidad y el valor de las matemáticas, aunque no tiene una idea definitiva de si las matemáticas son importantes en la vida cotidiana y si le ayudarán a ganarse la vida, en todas las demás declaraciones se puede ver su acuerdo con el alto valor y utilidad de esta disciplina. Muestran mucha afinidad con la teoría incremental de la capacidad. En cuanto a su motivación, todavía no está seguro, ya que solo pone un pequeño énfasis en su deseo de triunfar y no está de acuerdo con el resto de las afirmaciones. Sin embargo, le gustan las Matemáticas, tiene una curiosidad intelectual por las Matemáticas y le gustaría seguir estudiando. Lo que nos permite decir que está intrínsecamente motivado para estudiar matemáticas. Sus padres no están alentando ni interesados en su progreso en matemáticas.

El alumno C, específicamente en la competencia percibida, notamos la falta de definición con respecto a las dificultades que le plantean las matemáticas, así como su capacidad para aprender matemáticas aún las más avanzadas. En el resto de las respuestas a este factor se nota la confianza que tiene en sus habilidades, a pesar de confesar que las matemáticas le asustan moderadamente. Sus profesores de matemáticas no le dan ninguna impresión de confianza (o falta de confianza) en sus habilidades, a diferencia de sus colegas que tienen mucha fe en sus resoluciones. En cuanto a la apreciación del valor/utilidad de las Matemáticas, para él la Matemática es necesaria e importante al más alto grado, para el presente y para el futuro (donde también piensa usarla). En cuanto a la teoría de la inteligencia que adopta, si bien se percibe una ligera tendencia hacia la perspectiva incremental de capacidad, no es posible una inferencia completa al respecto. Respecto a los aspectos que motivan a este alumno a aprender matemáticas, no lo hace para agradar o competir con alguien. Los problemas de autoimagen y el miedo a las consecuencias negativas no interfieren con su motivación. Lo que más motiva a C es el deseo de éxito y la consecución de una meta final. La afectividad de C para Matemáticas es clara, ya que solo es neutral en relación con evitar estudiar más Matemáticas, y en el resto de las respuestas a este factor, muestra afecto por la disciplina y disponibilidad para el esfuerzo. Por tanto, está intrínsecamente motivado. Sus padres no lo animan a estudiar matemáticas (ni lo desaniman) pero están interesados en su progreso en esta disciplina.

Por su parte, D expresa altos niveles de competencia percibida en matemáticas. Es una asignatura fácil para él y tiene mucha confianza en su capacidad para aprender matemáticas. Sólo es neutral la confianza que sus colegas tienen en sus resoluciones. Refiriéndose a la utilidad y valor de las matemáticas, este alumno es categórico: es importante y útil para el presente y para su futuro. Las creencias de D sobre la teoría de la inteligencia también son decisivas, apoya la teoría de la capacidad incremental. En cuanto a las causas de su motivación para aprender matemáticas, revela mucha incertidumbre. En todas sus respuestas se mantiene en el nivel neutral, con solo dos excepciones: no lo hace para agradar a alguien y, por el contrario, lo hace por tener éxito. Tiene gran curiosidad intelectual en esta disciplina y está dispuesto a aprender más matemáticas, pero no está completamente disponible para dedicar el esfuerzo necesario para hacerlo. Finalmente, aunque sus padres lo animan a estudiar matemáticas, aunque no suelen estar interesados en su progreso en esta disciplina.

Por las respuestas al cuestionario, este alumno, aunque no deja de estudiar y planificar el estudio de acuerdo con lo que decide ser apropiado para él, presenta una actitud más relajada hacia el estudio, sin cumplir con las reglas y rutinas, y sin excesivas preocupaciones, pero, sin embargo, sus resultados académicos validan su metodología. Esta actitud, que se diferencia del patrón de comportamiento de los otros tres estudiantes, no es única en el universo de la excelencia, ya que, por ejemplo, Lave (1988) y Hutchins (1995) (citado por Hoffman y Gavan, 2006), revelaron que los expertos no realizan tareas a ciegas o se adhieren a las reglas de trabajo, sino que desarrollan heurísticas informales que, aunque pueden ser contrarias a la intuición, a menudo son sólidas, eficaces y cognitivamente económicas. Este parece ser el caso del estudiante D.

DISCUSIÓN

Tratando de resumir y extraer conclusiones de las respuestas de los participantes a la encuesta de actitudes hacia las matemáticas, podemos decir que los cuatro estudiantes encuestados tienen altos niveles de competencia percibida, es decir, autoconfianza, aunque C en niveles inferiores al resto, y colegas y profesores también comparten su confianza en el trabajo de los participantes en matemáticas. Por lo tanto, podemos asumir que los cuatro estudiantes tienen un alto sentido de autoconfianza.

Por otro lado, a pesar de las respuestas de B, globalmente podemos decir que les gusta y están intrínsecamente motivados para el estudio de las Matemáticas porque, aunque la mayoría apunta al deseo de éxito como factor motivador - lo que se refiere al nivel de motivación extrínseca más cerca de la motivación intrínseca (Ryan y Decy, 2000), debemos tener en cuenta el afecto por las Matemáticas que expresan los cuatro estudiantes. De esta forma, si miramos simultáneamente las respuestas del factor motivación y el gusto que tienen por las Matemáticas, podemos concluir que están intrínsecamente motivados para estudiar esta disciplina.

Un elemento común a todas las respuestas es el reconocimiento de la utilidad y valor de las Matemáticas, sin respuestas disonantes en este factor específico.

Hablando de sus padres, los alumnos encuestados no reportan excesiva diligencia en su seguimiento en Matemáticas, y este hecho es particularmente evidente en el caso del alumno B, quizás debido a su edad (41 años).

Finalmente, aunque las respuestas dadas no son globalmente decisivas, los cuatro estudiantes parecen compartir la teoría incremental de la inteligencia. Este hecho no es de extrañar porque, según la concepción de Dweck (1999), las personas que adoptan esta perspectiva de la inteligencia, creen que sus habilidades pueden ser cultivadas y desarrolladas a lo largo de la vida, y que con esfuerzo y aprendizaje pueden llegar a ser más inteligente y talentoso. Y como se percibe por el análisis de las entrevistas, estos estudiantes, en su mayor parte, valoran el esfuerzo y el aprendizaje.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por los proyectos EDU2017-84276-R y PCC2018-098603-B-I00 del plan Nacional de I+D+i y el proyecto SA050G19 de la Junta de Castilla y León.

REFERENCIAS

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Chi, M. T. H. (2006). Laboratory methods for assessing experts' and novices' knowledge. En K. A. Ericsson, N. Charness, R. R. Hoffman y P. J. Feltovich (Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (pp. 167-184). Cambridge, G.B.: Cambridge University Press.

Cianciolo, A. T., Matthew, C., Sternberg, R. J. y Wagner, R. K. (2006). Tacit knowledge, practical intelligence, and expertise. En K. A. Ericsson, N. Charness, R. R. Hoffman y P. J. Feltovich (Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (pp. 613-632). Cambridge, G.B.: Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M., Rathunde, K. y Whalen,S. (1997). *Talented teenagers: The roots of success and failure.* Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Dweck, C. S. (1999). *Self-theories: their role in motivation, personality, and development*. Filadelfia: Psychology Press.

Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *Catalog of Selected Documents in Psychology*, *6*(1), 31.

Gagné, F. (2004). Transforming gifts into talents: the DMGT as a developmental theory. *High Ability Studies, 15*(2), 119-147.

Gilbert, M. C., Musu-Gillette, L. E., Woolley, M. E., Karabenick, S. A., Strutchens, M. E. y Martin, W. G. (2014). Student perceptions of the classroom environment: Relations to motivation and achievement in mathematics. *Learning Environments Research, 17*(2), 287-304.

Hoffman, R. R., y Gavan, L. (2006). Eliciting and Representing the Knowledge of Experts. En K. A. Ericsson, N. Charness, R. R. Hoffman y P. J. Feltovich (Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (pp. *203*-222). Cambridge, G.B.: Cambridge University Press.

Hunt, E. (2006). Expertise, talent, and social encouragement. En K. A. Ericsson, N. Charness, R. R. Hoffman y P. J. Feltovich (Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (pp. 31-38). Cambridge, G.B.: Cambridge University Press.

Murphy, P. K. y Alexander, P. A. (2000). A motivated exploration of motivation terminology. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 3-53.

Pintrich, P. R. y Schunk, D. H. (2002). *Motivation in education: theory, research, and applications* (2ª ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall.

Ryan, R. M. y Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology, 25*(1), 54-67.

Schiefele, U. y Csikszentmihalyi, M. (1995). Motivation and ability as factors in mathematics experience and achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 163-181.

Tapia, M. y Marsh II, G. E. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. *Academic Exchange Quarterly, 8*(2), 16-21.

Wigfield, A. y Cambria, J. (2010). Students' achievement values, goal orientations, and interest: Definitions, development, and relations to achievement outcomes. *Developmental Review, 30*, 1-35.

Wigfield, A. y Eccles, J. (1992). The development of achievement task values: A theoretical analysis. *Developmental Review, 12,* 265-310.

Zimmerman, B. J. (2006). Development and adaptation of expertise: The role of self-regulatory processes and beliefs. En K. A. Ericsson, N. Charness, R. R. Hoffman y P. J. Feltovich (Eds.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (705-722). Cambridge, G.B.: Cambridge University Press.

ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA EN PRIMARIA. ANÁLISIS BIBLIOMÉTRICO DE PUBLICACIONES EN ESPAÑOL

Mathematical giftedness in primary school. A bibliometric analysis of publications in Spanish

Gutiérrez-Jaime, P. [a], Arteaga, F. [b], Casino-García, A.M. [b]

[a] Escuela de Doctorado. Universidad Católica de Valencia San Vicente Mártir

[b] Universidad Católica de Valencia San Vicente Mártir

Resumen

La atención a los estudiantes de alta capacidad está actualmente contemplada en los currículos de muchos países. Conocer las conclusiones de la investigación permite tomar medidas adecuadas para atender correctamente a ese colectivo y avanzar para hacerlo mejor. Nuestra contribución, centrada en alta capacidad matemática, es el resultado de un análisis bibliométrico de artículos escritos en español de los últimos veinte años. Describimos el proceso de búsqueda, basado en términos como Primaria, Talento matemático, etc., y presentamos una clasificación de los artículos seleccionados en temas como Identificación, Propuestas de aula, Afectividad, etc. En las conclusiones destaca la necesidad de más investigación en los países hispanohablantes.

Palabras clave: *alta capacidad matemática, análisis bibliométrico, educación primaria*

Abstract

Attention to gifted students is currently included in the curricula all over the world. Being informed about the conclusions of research allows take appropriate measures to properly serve this group of students and advance to do it better. Our contribution, focused on high mathematical ability, is the result of a bibliometric analysis of papers written in Spanish during last twenty years. We describe the search process, based on terms like Primary, Mathematical high ability, etc., and present a classification of the selected papers on themes like Identification, Classroom proposals, Afectivity, etc. Among the conclusions, we emphasise the need of more research in the Spanish speaking countries.

Keywords: *high ability in mathematics, bibliometric analysis, primary education*

JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO

La atención a la diversidad está contemplada actualmente en diversos países, en particular, en España está regulado por la (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013). Dentro del grupo de diversidad se encuentran los estudiantes de alta capacidad y un subgrupo de este lo conforman los alumnos con alta capacidad matemática (acm en adelante), que es en los que vamos a centrar nuestra atención.

Pero tener éxito en la educación de esos estudiantes requiere la consideración de diversos factores, tanto inherentes al sujeto como procedentes del exterior, factores psicológicos y entorno social. Por

Gutiérrez-Jaime, P., Arteaga, F., Casino-García, A. M. (2020). Alta capacidad matemática en primaria. Análisis bibliométrico de publicaciones en español. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 91-98). Logroño: Universidad de La Rioja.

lo tanto, aspectos como afectividad, autoestima, autocontrol, esfuerzo, etc, por una parte, y la familia, la escuela, el entorno social y otros factores por otro, influyen en el interés y rendimiento de los estudiantes. Estas características han sido estudiadas por psicólogos, con sus modelos de inteligencia y de superdotación (Gagné, 2015; Gardner, 1993; Reis y Renzulli, 2004; Renzulli, 1998, 2004; Renzulli y Geasser, 2015; Stenberg, 1993) con las implicaciones que algunos de ellos tienen para favorecer el aprendizaje de los más dotados intelectualmente. Por otro lado, aunque comenzó con posterioridad, actualmente también son objeto de estudio los estudiantes de acm desde el campo de educación matemática, por lo que existe información con la perspectiva de esa especialidad (Leikin, 2013; Leikin y Lev, 2013).

Atender a esos estudiantes pasa frecuentemente por su identificación, pues no todos son visibles por su comportamiento. Por ello, hay diversos trabajos que presentan procedimientos de identificación, desde la realización de tests psicométricos hasta la consideración de los procesos seguidos por los estudiantes en tareas de resolución de problemas (Andreu y Acosta, 2018; Díaz y otros, 2009). Relacionada con lo anterior, la formación del profesorado sobre acm es imprescindible para dotarles de herramientas adecuadas para la atención a los alumnos de acm y por ello también hay estudios en este campo (Cabrera-Murcia y Udaquiola, 2016). Otro enfoque relevante de la investigación es el socio-cultural, en el que se incluyen los estudios relativos a las diferencias de género relacionadas con la acm (Canché y Farfan, 2017).

El conocimiento de la mayor información posible en torno a las características particulares de los estudiantes de acm y a su atención requiere la lectura de material especializado. Por ello, el objetivo de esta presentación es realizar una revisión bibliométrica de artículos de revistas actuales que aborden el tema de la acm. Nos hemos centrado en artículos sobre acm en enseñanza primaria en los últimos 20 años (desde el año 2000), escritos en español. No incluimos libros ni trabajos de investigación, como tesis doctorales o trabajos de maestría.

MÉTODO

Hemos realizado la búsqueda de artículos en español de los últimos 20 años (desde el año 2000), utilizando varias de las bases de datos y repositorios más conocidos —Dialnet, EBSCO, Google Académico, JCR, ProQuest, ResearchGate, SciELO y Scopus. Hemos buscado artículos centrados en enseñanza primaria o en los que este nivel educativo se considera junto a otros niveles, en particular a enseñanza secundaria.

En relación con los términos empleados en la búsqueda, recurrimos a operadores booleanos, incluyendo varias opciones con el mismo significado. Esto se debe a que un concepto puede ser expresado de distintas maneras, y más todavía si tenemos en cuenta la diferente utilización del idioma en distintos países. Tras leer algunos artículos, finalmente seleccionamos "Educación/Enseñanza Primaria, Educación/Enseñanza Elemental, Educación/Enseñanza Básica, Identificación, Talento Matemático, Talentoso, Superdotado en matemáticas". La Figura 1 muestra el proceso de búsqueda y selección de artículos. Las particularidades en ese procedimiento fueron las siguientes:

En Google Académico se obtuvieron 2820 artículos. En este repositorio los artículos están ordenados de manera que el ajuste a las palabras utilizadas en los booleanos es cada vez menor. Observamos que a partir de la página 12 ya no había artículos de interés, por lo que nos centramos en las 12 primera páginas, con un total de 120 artículos.

En SciELO no salieron resultados con esos operadores booleanos, por lo que los redujimos a (Matematic*) AND (Superdota* OR Talent* OR sobredota*), con lo que obtuvimos 23 artículos.

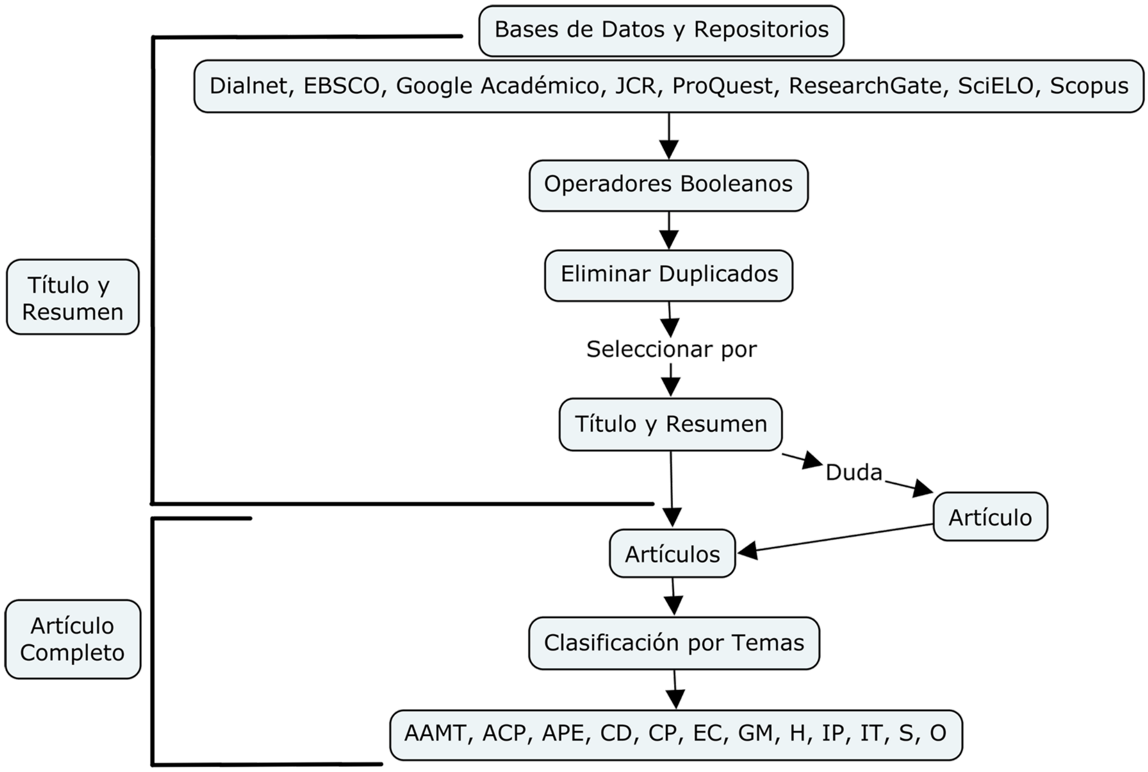


Figura 1. Diagrama del proceso de búsqueda y selección de artículos.

En la Web of Science no aparecían artículos con esos operadores booleanos, por lo que los redujimos a ALL=(Matemátic* AND (Superdota* OR Talent* OR sobredota*)), con lo que obtuvimos tres artículos, los cuales resultaron eliminados en la selección posterior. Los resultados iniciales fueron:

En Dialnet 16 artículos, en EBSCO 105, en Google Académico 120, en JCR tres, en ProQuest 102, en Research Gate siete, en SciELO 23 y en Scopus 42.

Las cantidades anteriores se refieren al total de los artículos que hemos encontrado en cada fuente de información. Después se procedió a eliminar repeticiones y a revisar el contenido expresado en el título y el resumen, recurriendo a la lectura del artículo completo cuando no quedaba claro si se ajustaba a la búsqueda que nos interesaba. De esa manera quedaron 38 artículos que cumplían los requisitos que buscamos.

Al mismo tiempo, y con el fin de incrementar la utilidad de este estudio, hemos agrupado los artículos por temas, dentro de la acm en primaria, y los hemos codificado de la manera que mostramos a continuación:

- AAMT: aplicación o análisis de propuestas para el aula según modelos teóricos, metodologías determinadas propuestas anteriormente o por quienes realizan la propuesta. En esta parte hemos incluido todos los artículos que, basándose en alguna teoría o metodología, se ha propuesto algún tipo de actuación en la clase sobre cómo tratar a dichos alumnos, pero no se aborda una experimentación en sí.
- ACP: afectividad, creencias de los propios estudiantes y las que la población tiene sobre ellos, y en general características psicológicas de los alumnos de alta capacidad.
- APE: análisis de formas de procesamiento y trabajo de estudiantes con acm. En general se trata información obtenida a partir de las respuestas de un grupo de alumnos con altas capacidades matemáticas a ciertas tareas y se extraen conclusiones generalizables al colectivo de acm.

- CD: currículo diferenciado. En esta parte hemos separado todos aquellos artículos en los que se explica cómo se ha creado un currículum diferenciado para alumnos de alta capacidad con el fin de satisfacer sus necesidades educativas.
- CP: creencias de profesores y padres de estudiantes sobre los alumnos con acm. Aquí normalmente se incluyen mitos y creencias populares sobre dichos alumnos y muchas veces se contrastan con información real para destacar la falsedad de algunas convicciones populares.
- EC: hemos incluido los artículos que desarrollan su trabajo a partir de un “estudio de casos”, entendiendo por tal la recopilación de la información a partir de unos pocos sujetos, con los que se interactúa normalmente en varias ocasiones o en una sesión larga.
- FPA: formación de los profesores en activo. En estos artículos se tratan actividades y creencias que los profesores en activo tienen sobre los alumnos de alta capacidad y qué estamos haciendo como sociedad para que los profesores dispongan de herramientas que les permitan atender adecuadamente a ese colectivo.
- GM: género y minorías. Son estudios en los que se analiza si influye el sexo o el ser de una raza o minoría étnica en el alto rendimiento y/o si se descuida la alta capacidad en esos colectivos.
- H: evolución del tratamiento de la acm a lo largo del tiempo.
- IPE: intervenciones puntuales en clase, intervenciones o actividades extraescolares. También incluimos todos aquellos programas especiales que están pensados para los alumnos con alta capacidad de los que se muestran experimentaciones concretas.
- IT: identificación de la acm mediante tests. Entendemos por tests pruebas para identificación, tanto si se trata de pruebas psicológicas como de resolución de problemas. Se incluyen tanto artículos teóricos como prácticos, estos últimos con administración del test.
- S: aspectos sociales. Aquí hay diferentes tipos de artículos que abordan aspectos sociales relacionados con la alta capacidad: influencia de la religión, del nivel económico, de diferentes culturas, etc.
- O: otros. Había algunos artículos que no hemos podido catalogar en las otras clases, pero que sí abordaban la acm en primaria y son los que hemos incluido en esta clase.

Entre los artículos que hemos descartado destacamos los que hacen referencia a la formación de futuros profesores, ya que se trata de enseñanza universitaria y no se corresponde con nuestro objetivo. Obsérvese que, sin embargo, sí hemos tenido en cuenta la formación de profesores de primaria en activo (categoría FPA), pues las actitudes y acciones de estos profesores tienen repercusión directa en la atención a los estudiantes de acm.

RESULTADOS

Para cada categoría de la clasificación anterior mostramos a continuación la cantidad de artículos que hemos obtenido (Tabla 1). Hemos encontrado tres artículos que se solapan en dos categorías. Esto hace que la cantidad total de artículos cuando se suman los de cada categoría no sea 47 artículos, que es el total de artículos considerados válidos a través de la búsqueda que hemos realizado de acm en primaria en los últimos 20 años.

AAMT: cuatro artículos. ACP: seis artículos. APE: dos artículos. CD: un artículo. CP: dos artículos. EC: dos artículos. GM: tres artículos. H: un artículo. IPE: siete artículos. IT: ocho artículos. O: dos artículos. S: tres artículos.

A continuación mostramos el listado de las referencias de los artículos, ya clasificados por temática. Los artículos que están en dos categorías tienen al final las siglas de ambas dentro de un paréntesis. En concreto, (S/ACP), (EC/ACP) y (IT/S).

Tabla 1. Artículos clasificados en las categorías de análisis.

Tema	Artículo
AAMT - Aplicación y/o Análisis de propuestas para el aula según modelos teóricos o metodologías determinadas.	Escorcia, I. A. P. (2018). El juego y la inteligencia lógico-matemática de estudiantes con capacidades excepcionales. *Educación y Humanismo*, *20*(35), 166-183. Giraldo, E. E. P. (2012). Descubrir talentos en educación básica primaria: una obligación docente. *Uni-Pluriversidad*, *12*(3), 75-86. Inostroza, F. A. (2016). Análisis crítico del discurso de profesores de matemáticas y sus estudiantes: Subjetividades y saberes en aulas heterogéneas. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, *42*(3), 223-241. Perales, R. G. (2017). Desempeño docente para la identificación de los más competentes para la matemática. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *21*(2), 271-278.
ACP - Afectividad, creencias, aspectos psicológicos de estudiantes	Escámez, A. S., y Sánchez, M. J. B. (2017). Identificación del alumno con altas capacidades intelectuales:¿ responsabilidad del maestro o del departamento de orientación educativa y psicopedagógica?. *Aula de Encuentro*, *19*(1), 69-91. González, M. D. L. L., Leal, D., Segovia, C., y Arancibia, V. (2012). Autoconcepto y talento: una relación que favorece el logro académico. *Psykhe (Santiago)*, *21*(1), 37-53. (S/ACP) Martín, I. R., y Martín, L. R. (2012). Creatividad y educación: el desarrollo de la creatividad como herramienta para la transformación social. *Prisma Social: Revista de Investigación Social, 9*, 311-351. Mejía, C. S., Encalada, G., Vélez, M. J. P., Pontón, Y. D., y Calvo, X. V. (2019). ¿ Puede la formación en altas capacidades afectar las actitudes de los maestros en educación primaria?. *INFAD. Revista de Psicología, 5*(1), 441-450. Merino, J. M., Mathiesen, M. E., Mora, O., Castro, G., y Navarro, G. (2014). Efectos del Programa Talentos en el desarrollo cognitivo y socioemocional de sus alumnos. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *40*(1), 197-214. Sánchez, M. D. P., y Avilés, R. M. H. (2000). Competencias del psicopedagogo en la evaluación del superdotado. *Faisca: revista de altas capacidades, 8*, 86-103. (EC/ACP)
APE - Análisis de formas de procesamiento y trabajo de los estudiantes de acm.	do Carmo Gonçalves, F., y de Souza Fleith, D. (2013). Creatividad en el aula: percepciones de alumnos superdotados y no-superdotados. *Revista de Psicología (PUCP)*, *31*(1), 37-66. Reyes-Santander, P., Aceituno, D., y Cáceres, P. (2018). Estilos de pensamiento matemático de estudiantes con talento académico. *Revista de Psicología (PUCP)*, *36*(1), 49-73.
CD - Currículo diferenciado	Bullejos, M. M. (2008). ¿Atendemos adecuadamente a los niños super-dotados? *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas, 14,* 1-10.
CP - Creencias de profesores y de padres.	Cabrera-Murcia, E. P., y Udaquiola, C. (2016). ¿Qué piensan los profesores sobre los niños con talento académico? Una aproximación

	a las concepciones de profesores de segundo ciclo de educación básica en Chile. *Universitas Psychologica*, *15*(2), 121-134. Campo Mon, M. Á., Castro Pañeda, M. P., Álvarez Martino, E., y Álvarez Hernández, M. (2005). Actitudes de los maestros ante las necesidades educativas específicas. *Psicothema, 17*(4), 601-606.
EC – Estudio de Casos	Parra, D. J. L., Rojas, M. J. L., y Díaz, R. H. (2016). Altas capacidades intelectuales y trastorno de déficit de atención con hiperactividad: a propósito de un caso. *Perspectiva Educacional*, *56*(1), 164-182. Sánchez, M. D. P., y Avilés, R. M. H. (2000). Competencias del psicopedagogo en la evaluación del superdotado. *Faisca: Revista de Altas Capacidades, 8*, 86-103. (EC/ACP)
GM - Género / minorías	Canuto González, I., Cebrián Martínez, A., y García Perales, R. (2019). Alta capacidad y género: La autoestima como factor influyente en las diferencias entre sexos. *Contextos educativos, 24,* 77-93. Márquez, R. M. F., y Ramos, M. G. S. (2018). El Desarrollo del talento de las mujeres en matemáticas desde la socioepistemología y la perspectiva de género: un estudio de biografías. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 946-966. Mathiesen, M. E., Castro Yánez, G., Merino, J. M., Mora Mardones, O., y Navarro Saldaña, G. (2013). Diferencias en el desarrollo cognitivo y socioemocional según sexo. *Estudios Pedagógicos*, *39*(2), 199-211.
H - Historia	Hernández, M. Á., Mon, M. Á. C., Pañeda, P. C., y Martino, E. Á. (2005). Los maestros del Principado de Asturias y las necesidades educativas específicas. *INFAD. Revista de Psicología, 2*(1), 563-574.
IPE - Intervención para clase o extraescolar. Programas especiales. Propuestas con enfoques particulares. Experiencias puntuales en clase.	Araujo Guijo, I., Fernández Reyes, M. T., Núñez Valdés, J., y Sanz Gil, F. J. (2015). Aprendiendo de al tiempo que enseñando a alumnos de altas capacidades. *Pensamiento Matemático, V*(1), 7-16. Castro, E., Benavides, M., y Segovia, I. (2008). Diagnóstico de errores en niños con talento. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*, 123-140. Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula, 21,* 85-104. Escrivà, M. T., Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (2018). Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *7*(1), 42-62. Extremiana, A. A. (2017). Intervención Educativa en la Superdotación Intelectual. *Revista Internacional de Educación y Aprendizaje*, *5*(2), 85-95. Navarro, J. (2017). Talento matemático excepcional y destino profesional. Trayectorias de participantes mexicanos en olimpiadas internacionales de matemáticas. *Innovación educativa (México, DF)*, *17*(73), 49-77. Rojo, Á., Martínez, G. S., Sainz, M., Fernández, C., Hernández, D., y Gil, C. F. G. (2010). Talleres de enriquecimiento extracurricular para alumnos de altas habilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *13*(1), 137-146.
IT - Identificación Mediante test psicológicos o resolución de problemas	Andreu, C., y Acosta, Y. (2018). Diseño, construcción y validación de una rúbrica para la detección del talento matemático. *Revista de Educación Inclusiva*, *11*(2), 139-158. Etchepare, G. C., Ortega, R., Pérez, C., Flores, C., y Melipillán, R. (2011). Inteligencia lógica y rendimiento académico en matemáticas: un

	estudio con estudiantes de Educación Básica y Secundaria de Chile. *Anales de Psicología*, *27*(2), 389-398. (IT/S) Etchepare, G. C., Wilson, C. P., Araneda, R. M., y Ortega-Ruiz, R. (2015). Examen psicométrico del IQ Test como herramienta de discriminación de individuos normales y talentosos en la población escolar chilena. *Universitas Psychologica*, *14*(3), 899-912. Flanagan, A., y Arancibia, V. (2005). Talento académico: Un análisis de la identificación de alumnos talentosos efectuada por profesores. *Psykhe (Santiago)*, *14*(1), 121-135. Perales, R. G., y Fernández, C. J. (2016). Diagnóstico de la competencia matemática de los alumnos más capaces. *Revista de Investigación Educativa*, *34*(1), 205-219. Tourón, J., y Tourón, M. (2016). La Identificación del talento verbal y matemático: la relevancia de las medidas fuera de nivel. *Anales de Psicología*, *32*(3), 638-651. Vélez-Calvo, X., Dávila, Y., Seade, C., del Carmen Cordero, M., y Peñaherrera-Vélez, M. J. (2019). Las altas capacidades en la educación primaria, estudio de prevalencia con niños ecuatorianos. *INFAD. Revista de Psicología*, *5*(1), 391-400. Zarzar, C. B., y Delgado, J. (2020). Programa de talento matemático con estudiantes de educación básica: un estudio con los procesos de generalización. *Zona Próxima, 32*, 1-33.
S - Aspectos sociales	Canché, E., Farfan, R. M. (2017) El talento en matemáticas desde una perspectiva sociocultural: Un eje para el logro de la equidad educativa. *La matemática e la sua didattica, 25*(2), 97-118. Etchepare, G. C., Ortega, R., Pérez, C., Flores, C., y Melipillán, R. (2011). Inteligencia lógica y rendimiento académico en matemáticas: un estudio con estudiantes de Educación Básica y Secundaria de Chile. *Anales de Psicología*, *27*(2), 389-398. (IT/S) González, M. D. L. L., Leal, D., Segovia, C., y Arancibia, V. (2012). Autoconcepto y talento: una relación que favorece el logro académico. *Psykhe (Santiago)*, *21*(1), 37-53. (S/ACP)
O - Otros	Fraile, M. O., y Álvarez, C. D. Á. (2014) Una experiencia personal: trabajando con un alumno superdotado en educación primaria. *Revista Arista Digital, 48,* 248-252. Olivares, D., Lupiáñez, J. L., y Segovia, I. (2020). Roles and characteristics of problem solving in the mathematics curriculum: a review. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Online first*.

COMENTARIO FINAL Y LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Como comentario final, diremos que es poca la literatura existente en relación con la acm en primaria, dado que hemos tenido en cuenta los últimos 20 años. No obstante, esta búsqueda se ha realizado en español, con unas fuentes bibliográficas concretas y sólo en revistas. Si se amplía cualquiera de las variables mencionadas anteriormente seguro que existe más información. Asimismo, algunos artículos se ajustan sólo puntualmente a la temática en la que se han clasificado, pero abordan la alta capacidad, por lo que se han incluido en las clases establecidos y no se ha creado una nueva clase para cada uno de ellos.

Referencias

Andreu, C., y Acosta, Y. (2018). Diseño, construcción y validación de una rúbrica para la detección del talento matemático. *Revista de Educación Inclusiva, 11*(2), 139-158.

Cabrera-Murcia, E. P., y Udaquiola, C. (2016). ¿Qué piensan los profesores sobre los niños con talento académico? Una aproximación a las concepciones de profesores de segundo ciclo de educación básica en Chile. *Universitas Psychologica, 15*(2), 121-134.

Canché, E., Farfan, R. M. (2017) El talento en matemáticas desde una perspectiva sociocultural: Un eje para el logro de la equidad educativa. *La matemática e la sua didattica, 25*(2), 97-118.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C., y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: Análisis de una muestra. *Faisca, 13*(15), 30-39.

Gagné, F. (2015). De los genes al talento. *Revista de Educación, 368*, 66-91.

Gardner, H. (1993). *Multiple intelligences: the theory into practice*. Nueva York, NY: Basic Books.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling, 55*(4), 385-400.

Leikin, R., y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM – Mathematics Education, 45*(2), 183-197.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, de mejora de la calidad de la educación (LOMCE). *Boletín Oficial del Estado, 295*, 97858-97921.

Reis, S. M., y Renzulli, J. S. (2004). Current research on the social and emotional development of gifted and talented students: Good news and future possibilities. *Psychology in the Schools, 41*(1), 119-130.

Renzulli, J. S. (1998). Three-ring conception of giftedness. En S. M. Baum, S. M. Reis y L. R. Maxfield (Eds.), *Nurturing the gifts and talents of primary grade students*. Mansfield Center, CT, EE.UU.: Creative Learning Press.

Renzulli, J. S. y Gaesser, A. H. (2015). Un sistema multi-criterial para la identificación del alumnado de alto rendimiento y de alta capacidad creativo-productiva. *Revista de Educación 368*, 96-131.

Singer, F.M., Sheffield, L.J., Freiman, V., Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students*. Cham, Suiza: Springer.

Sternberg, R. J. (1993). The concept of 'giftedness': A pentagonal implicit theory. En G. R. Bock, y K. Ackrill (Eds.), *The origins and development of high ability* (pp. 5-16). Chichester, G.B.: John Wiley.

RETO Y APRENDIZAJE PARA ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA EN LA COMPETICIÓN DIVMATSÉ

Challenge and learning for math gifted in the DIVMATSÉ competition

Mora, M. [a], Aristizábal, J. H. [b], Barquero, J. [c], Jaime, A. [d]

[a] Universidad de Costa Rica (Costa Rica). [b] Universidad del Quindío (Colombia). [c] Ministerio de Educación Pública, Dirección Regional de Educación de Puriscal (Costa Rica). [d] Depto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València (España)

Resumen

Los[1] estudiantes de alta capacidad matemática necesitan retos y problemas que les permitan aprender. Estas dos características las cumple la competición DIVMATSÉ, organizada para un grupo reducido de niños de 3º de Primaria de Costa Rica, Colombia y España. Se estructuró en tres fases con problemas para resolver en casa y una cuarta fase presencial. En las tres primeras sesiones se presentan contenidos o métodos de resolución de los problemas diferentes a los usuales. En la cuarta sesión los problemas responden a algunos de los objetivos de aprendizaje propuestos en las sesiones anteriores, promoviendo el aprendizaje porque para quedar en puestos altos hay que saber ese contenido. En esta presentación explicamos la estructura de la competición y mostramos cuatro problemas concretos y algunas resoluciones de los niños.

Palabras clave: *alta capacidad matemática, competición, enseñanza primaria, aprendizaje*

Abstract

High mathematical ability students need challenges and problems that help them learn new things. These two characteristics are fulfilled by the DIVMATSÉ competition. It was organized for 3rd grade students from Costa Rica, Colombia and Spain. There were three phases in which the problems were solved at home, and the final phase, in person. In the first three phases we presented the students with new content and new engaging methods of problem solving with respect to these they were used to. In the last phase the content or the strategies to solve the problems had been worked upon in the past phases. In this presentation we show the mathematical organization of the competition, some of the problems and some of the students answers.

Keywords: *High mathematical ability, competition, primary, learning*

LA COMPETICIÓN. JUSTIFICACIÓN Y ORGANIZACIÓN

La atención y formación a estudiantes de alta capacidad matemática (acm en adelante) se puede realizar en el contexto de clase o en actividades extraescolares y el contenido puede ser curricular o extracurricular. Entre las acciones contempladas se encuentran las olimpiadas matemáticas.

---

[1] Por comodidad en la lectura, en todo el texto utilizaremos el género masculino para referirnos a situaciones en las que hay participantes de los dos géneros, niños y niñas.

Mora, M., Aristizábal, J. H., Barquero, J. y Jaime, A. (2020). Reto y aprendizaje para alta capacidad matemática en la competición DIVMATSÉ. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 99-106). Logroño: Universidad de La Rioja.

En general, estas competiciones se entienden en términos del planteamiento de problemas o ejercicios que requieran conocimientos matemáticos, razonamiento lógico, demostración avanzada o incluso una "idea feliz" en relación con el nivel educativo al que están dirigidas. Sirven de estímulo para muchos estudiantes que necesitan preparar y resolver este tipo de tareas que suponen un reto para ellos (Bicknell, 2008; Cervantes, 2013; Falk, 2001, Kalman, 2002; Subotnik, Miserandino, Olszewski-Kubilius, 1996). Por ello, las olimpiadas y su preparación se convierten en uno de los recursos útiles para atender a estudiantes de acm, los cuales se dedican a resolver los problemas planteados en esas competiciones y así aprenden matemáticas inherentes a esos problemas y a su resolución, bien sea sobre conocimiento, estrategias de resolución, o situaciones particulares.

Es posible ir más allá en el aspecto de enseñanza-aprendizaje y diseñar una competición en la que los estudiantes aprendan matemáticas específicas en la propia competición y que ese aprendizaje sea evaluado de alguna forma.

Precisamente con ese objetivo se diseñó para el curso 2019-20 DIVMATSÉ, una competición en la que participaron estudiantes de 3º de primaria de Costa Rica, Colombia y España. En la Figura 1 mostramos la información facilitada a los interesados sobre los objetivos de la competición:

> Objetivos
>
> 1 - Promover el aprendizaje de la matemática de una forma distinta a la usual.
>
> 2 - Implicar a niños de diversos países y culturas en la resolución de una tarea matemática común.
>
> 3 - Involucrar a los participantes en una competición en la que cada uno conoce en cada fase su posición, pero no conoce (porque utilizan un pseudónimo) quiénes son los que le aventajan o los que tienen menos puntos, lo cual promueve que cada niño juegue a superarse a sí mismo.

Figura 1. Objetivos de la competición DIVMATSÉ.

Se partía de una experiencia similar, realizada en España el curso anterior, 2018-2019, con 27 participantes (14 de 3º de primaria y 13 de 4º de primaria), identificados con sobredotación intelectual, que tuvo buena acogida y resultados excelentes en lo que al aprendizaje se refiere.

La muestra de DIVMATSÉ, era de 55 estudiantes en total, con 25 de Colombia, 16 de España y 14 de Costa Rica. La muestra era pequeña, pues se trataba de una experimentación piloto con vistas a mejorarla en el futuro tras corregir los posibles errores por la novedad de la iniciativa.

Se planteó inicialmente en 4 fases con frecuencia semanal. En las tres primeras fases los problemas se les proporcionaban a los participantes y estos tenían una semana para resolverlos y podían realizar consultas. La última fase era presencial en cada país. Esta fase presencial puntuaba el doble que las anteriores, debido a que era precisamente aquí cuando los estudiantes mostraban lo que podían hacer por sí mismos.

En el caso de Costa Rica y España, el intercambio de problemas o soluciones se realizaba a través de internet: se enviaban por correo electrónico los problemas y los participantes los devolvían escaneados o fotografiados. En Colombia la entrega y la recogida era presencial, la profesora de la clase la repartía a los participantes y la recogía pasada la semana.

Las soluciones se enviaban cuando finalizaba el plazo de entrega, al mismo tiempo que se proporcionaban los nuevos problemas. La puntuación era la indicada en la Figura 2.

A partir de las resoluciones, tras cada fase se iba elaborando una tabla de puntuaciones que se hacía llegar a todos los participantes. Con el fin de que nadie se sintiera mal por quedar atrás en el listado, se pedía, de manera voluntaria, un pseudónimo, que era lo que aparecía en las puntuaciones. Así, por ejemplo, participaban *Agatha Potter, Lightman, Pikapato,* etc.

· La puntuación a asignar para los ejercicios que se trabajarán en la sesión presencial será de 2, 3, 4 en cada problema, donde 2 es si el estudiante tiene el ejercicio incorrecto, 3 se asigna si el estudiante tiene algún(os) error(es) en el procedimiento o está inconcluso y 4 se asigna únicamente si el ejercicio está totalmente correcto.

· Las resoluciones consideradas muy originales serán premiadas con un punto extra.

Figura 2. Puntuación de las preguntas en la competición DIVMATSÉ.

Por otra parte, para destacar el carácter internacional de esta competición y que los niños percibieran que estaban resolviendo los mismos problemas que niños de otros países, estaba previsto proyectar al inicio de la sesión presencial vídeos de participantes de los otros países saludando a sus pares.

Se diseñaron diplomas, que se concedían por tramos de puntuación, y correspondías a oro, plata, bronce y participación, como se puede ver en la Figura 3.

Figura 3. Diplomas para participantes según la puntuación obtenida.

La organización por fases, cuyos problemas se resolvían en el propio domicilio, y la última presencial, así como la puntuación extra a la resolución más original. Toda esta estructura se inspiró en la competición "Open Matemático", que desde hace 30 años se realiza anualmente en España, con sede en Requena, cuyo creador y organizador principal es el profesor de enseñanza secundaria y miembro de la Real Sociedad Matemática Española Antonio Ledesma López. El calendario inicial era el indicado en la Figura 4.

Fechas

1er problema: fecha de entrega a estudiantes es el 22 de febrero

fecha límite para recoger es 29 de febrero.fecha límite para recoger es 29 de febrero.

2do problema: fecha de entrega a estudiantes es el 7 de marzo

fecha límite para recoger es el 14 de marzo.

3er problema: fecha de entrega a estudiantes es el 21 de marzo

fecha límite para recoger es el 28 de marzo.

Sesión presencial: 4 de abril.

Figura 4. Calendario previsto inicialmente para la competición DIVMATSÉ.

La novedad de la competición DIVMATSÉ respecto al resto de olimpiadas es que se trata de una **propuesta de aprendizaje en sí misma**, ya que en los problemas se proponen conceptos, o estrategias de resolución de problemas, de los cuales se facilita con frecuencia un ejemplo, además de su resolución (esta tras la entrega por parte de los participante de la suya propia), y los problemas de la fase final, presencial, corresponden a conocimientos y estrategias de resolución de los que se han presentado en alguna de las fases anteriores.

La competición DIVMATSÉ 2020 no pudo finalizar a causa de la covid-19, pues el hecho de que en el grupo de Colombia la entrega y recogida de problemas se realizara de forma presencial obligó a cancelar la competición en ese país tras la primera recogida de soluciones. En Costa Rica y España continuó una entrega más que ya se había lanzado por mail, pero se cerró entonces debido al espíritu de grupo con el que se creó este evento, que se perdía con la ausencia de uno de los países participantes. Cortada repentinamente y con el confinamiento obligado en todos los países, no se pudo realizar la sesión presencial, por lo que se facilitó el listado ordenado de las puntuaciones de cada participante hasta ese momento.

Los problemas per sé y la participación en un evento de estas características en general motiva a los estudiantes de acm, y así sucedió en DIVMATSÉ, ampliada esta disposición por el hecho de competir con pares lejanos, misteriosos de alguna manera para estudiantes de 3º de primaria.

COMENTARIOS RESPECTO A PLANTEAMIENTO FUTURO

Tras la experiencia anterior, pensamos que tres fases para que resuelvan los participantes con tiempo ilimitado, en sus casas, y después una cuarta sesión, en modalidad presencial, con puntuación mucho más alta que las anteriores, es una buena distribución, pues en tres sesiones da tiempo a proponer tareas que desarrollen habilidades matemáticas y en la sesión presencial los estudiantes pueden mostrar lo que han asimilado.

Por otra parte, creemos que es interesante la preparación y presentación de un vídeo para compartir en los países participantes, pues eso les motiva y les ayuda a establecer algún vínculo con otras culturas, aunque sea esporádico y en un contexto limitado. No es aconsejable plantear una final posterior que requiera el desplazamiento de estudiantes de estas edades a otros países, tanto por la edad como por el coste económico.

Finalmente, decir que la utilización de un pseudónimo para figurar en las tablas con la puntuación ha resultado importante para que ningún participante se sintiera perdedor ante sus compañeros.

CONTENIDO MATEMÁTICO DE LA COMPETICIÓN

A continuación presentamos el contenido de aprendizaje matemático a través de la competición completa propuesta para 2020:

- Área de figuras planas: Utilización de estrategias (en particular de descomposición y recomposición) para obtener el área de figuras planas dibujadas sobre papel cuadriculado.
- Producto - Diagramas en árbol.
- 3D - representaciones ortogonales
- Ecuaciones (se espera resolución con ayuda visual).
- Geometría 2D y visualización identificación de formas (triángulos)
- Geometría 3D y sólidos: Primas, pirámides y bipirámides. Caras, vértices y aristas,
- Polígono regular. Diagonales de un polígono.

Ejemplos comentados de problemas

A continuación mostramos y comentamos algunos de los problemas diseñados para la competición. Corresponden a los contenidos “Área en de figuras planas” (Figura 5) y “Productos-

Diagramas en árbol" (Figuras 8a y 8b). Mostramos el problema planteado en las sesiones en las que los participantes disponían de una semana para resolverlos y podían realizar consultas, y su correspondiente par propuesto para la sesión presencial, en la cual hay tiempo limitado y no se pueden realizar consultas. Estos problemas de la sesión presencial no se pudieron proponer debido a la covid-19. Presentamos también las soluciones que facilitamos a los estudiantes tras la entrega de sus respuestas, así como las soluciones aportadas por algunos estudiantes para cada uno de los dos problemas de la fase no presencial (para la que disponían de una semana y podían consultar).

Problemas sobre área de figuras planas

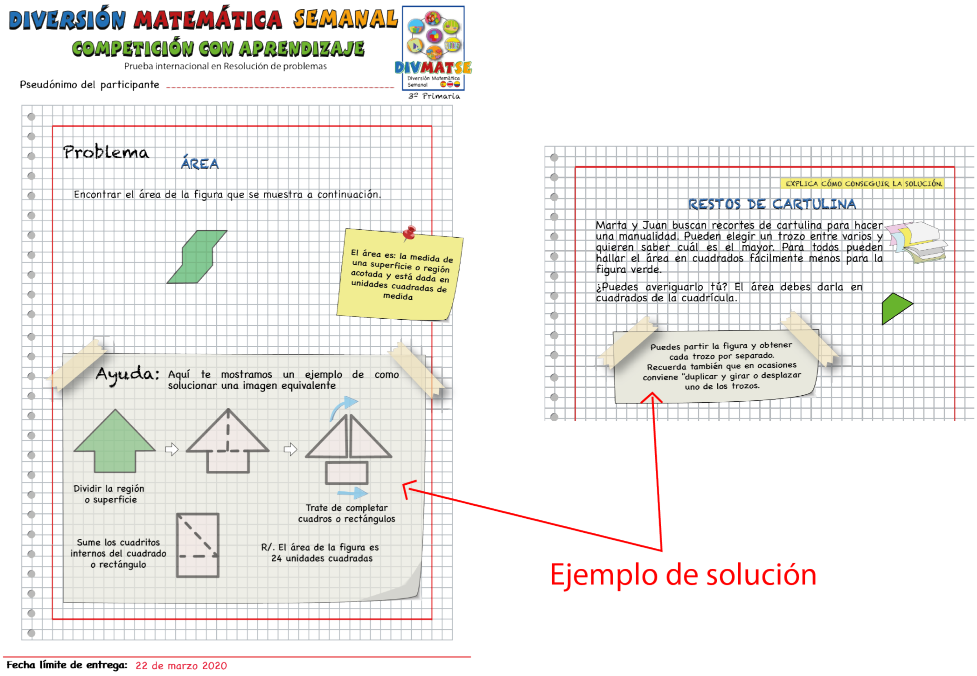


Figura 5. Problema de áreas de la sesión 1 y su correspondiente de la última sesión.

En este caso, el primero de los problemas se propuso en la sesión inicial. Se propone la obtención del área de una figura plana a partir de recuento de cuadrados. Pero se requiere alguna técnica especial para resolverlo, pues no se ven directamente los cuadrados completos. En particular, aquí se promueven las transformaciones de descomposición y recomposición. Por ello, además del enunciado del problema que se les plantea a los participantes de DIVMATSÉ, proporcionamos, en la misma hoja, un ejemplo y luego es el método que aparece en la solución del ejercicio propuesta para esa semana. No obstante, se admite cualquier tipo de solución.

El problema previsto para la sesión última, que estaba relacionado con el anterior, es el que se muestra a la derecha. El procedimiento para obtener el área tampoco es el recuento directo de cuadrados. De nuevo se muestra un ejemplo en la hoja del enunciado del problema, con indicaciones sobre dónde poner el énfasis.

Por lo tanto, los dos problemas, el que realizan a lo largo de la semana y el que se propone en la prueba presencial, abordan el mismo contenido y se plantean situaciones más complejas que las propias del entorno escolar. Pero en el primer ejercicio se potencian unos procedimientos, *descomposición y recomposición,* y en el segundo se sugiere *descomponer, duplicar y girar*. Por lo tanto, este ejercicio de la fase presencial no es una copia del primero; se espera que, a partir de la experiencia adquirida con el primer problema y las ayudas proporcionadas a través del ejemplo de la sesión presencial, los participantes desarrollen habilidades matemáticas para calcular el área por otras estrategias, que se sugieren en la anotación que acompaña al enunciado. En la Figura 6 están las soluciones a estos problemas aportadas desde la organización de las Jornadas.

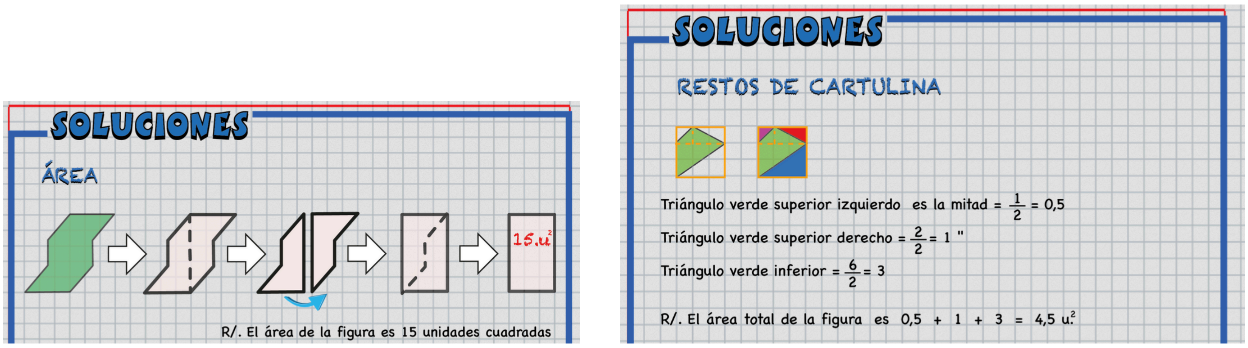
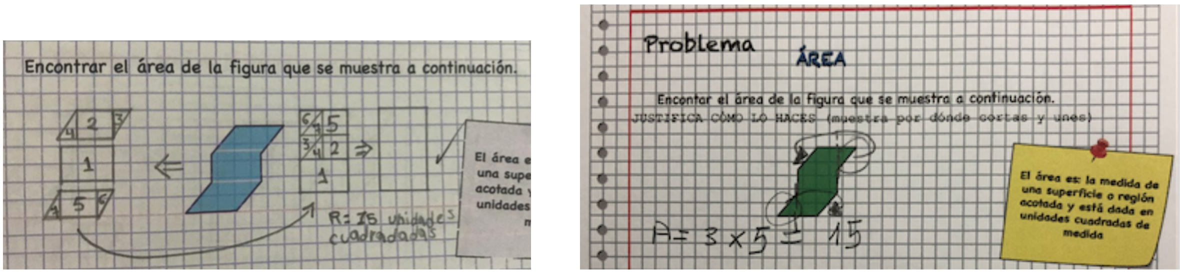
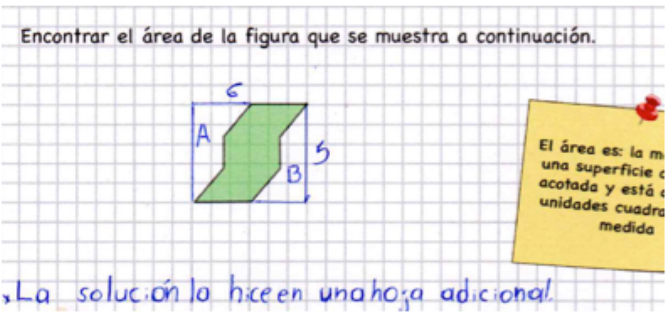


Figura 6. Soluciones a los problemas de áreas de sesión presencial y final.

En la Figura 7 mostramos las soluciones de tres estudiantes al primer ejercicio. Como se puede apreciar, todos utilizan la descomposición y la recomposición.





Solución1
1- La figura tiene cuadros enteros e incompletos.
2- Cuento los completos y son 10.
3- Los incompletos los uno con sus opuestos y son 5.
4- Sumo 10+5 = 15
5- R/ La figura tiene 15 unidades cuadradas.

Solución2
1- Amplío la figura como se ve en el ejercicio de arriba.
2- Observo que las figuras que nombré A y B forman al unirlas una figura exacta a la del ejercicio.
3- 3- Cuento todos lso cuadrados que se forman y son 30 en total.
4- los divido entre dos 30:2 = 15..
5- La f tiene 15 unidades cuadradas.

Solución3
1- Al ampliar la figura se forma un rectángulo de 6 cm de largo y 5 cm de ancho.
2- Entonces se puede multiplicar 6x5 que es igual a 20.
3- Como la figura que me dieron es la mitad, ya que la recorté y armé entonces divido 30:2 = 15.
4- La f tiene 15 unidades cuadradas.

Figura 7. Soluciones de tres estudiantes al problema de áreas de la sesión 1.

Problemas sobre Productos - Diagramas en árbol

El primero de los problemas tiene dos apartados, gatos y piruletas (Figura 8), y se planteó en la segunda sesión de la competición. Su objetivo era presentar la herramienta del diagrama en árbol como ayuda para la comprensión de los problemas que se resuelven mediante una multiplicación múltiple cuya estructura se puede representar mediante ese diagrama. Se considera la situación directa y la inversa.

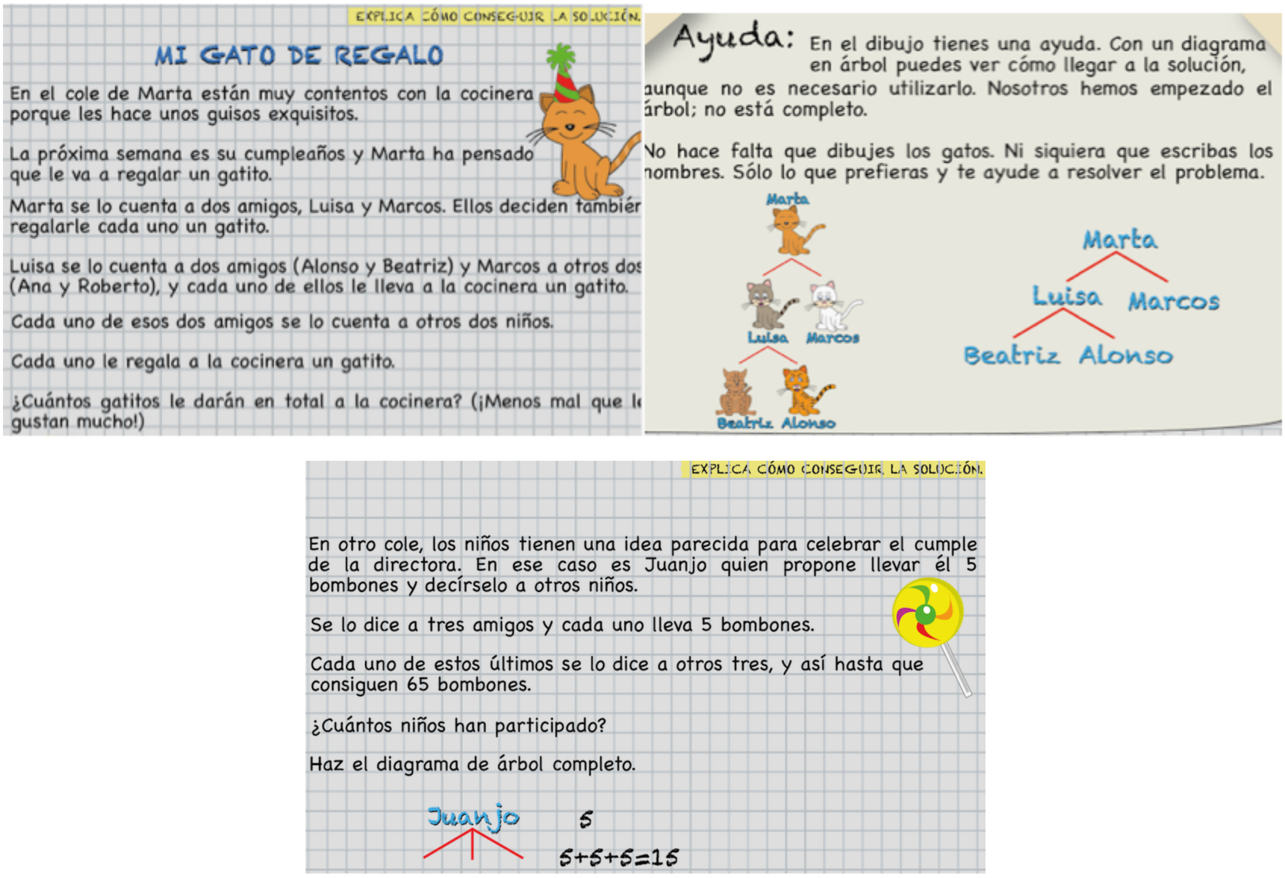


Figura 8. Problema de producto-Diagrama árbol de sesión 2.

El problema previsto para la sesión presencial (cajas dentro de cajas, Figura 9) obedece a la misma estructura, si bien hay más cambios en las cantidades de los diferentes niveles.

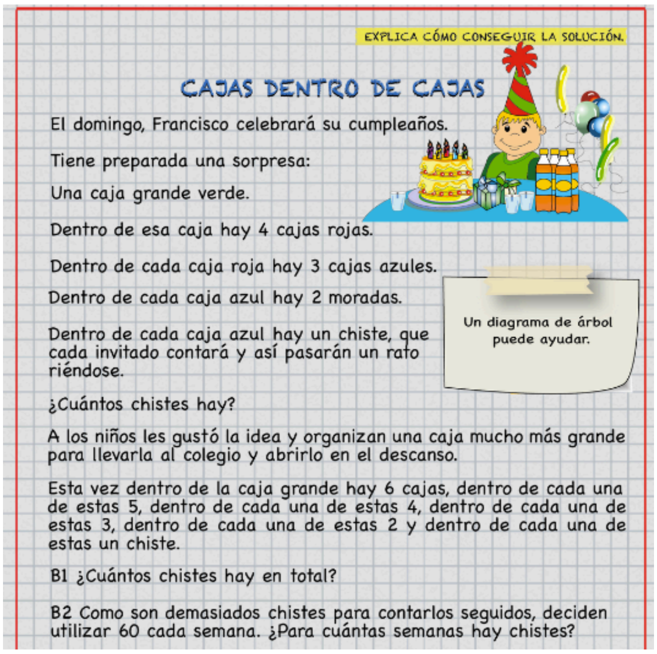


Figura 9. Problema de producto-Diagrama árbol de sesión final.

Por limitación de espacio, no mostramos las soluciones que presentamos a los participantes, pero sí incluimos en la Figura 10 la aportada por un estudiante, la cual es representativa de la mayoría de resoluciones por los niños; estos se sirvieron del diagrama de árbol para obtener y razonar la solución, tanto en el problema directo como en el inverso.

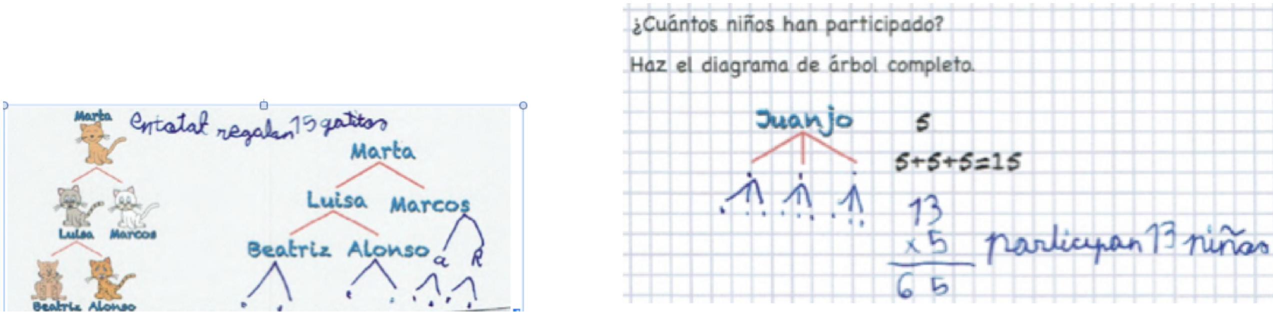


Figura 10. Solución de un estudiante al problema de producto-Diagrama árbol de sesión 2.

CONCLUSIONES

Por lo que hemos podido comprobar, estas competiciones sirven de estímulo para estudiantes de alta capacidad matemática que necesitan retos, tareas que no supongan una rutina ni sean la repetición de las propuestas en su aprendizaje ordinario. Además, como hemos mostrado, se puede incluir aprendizaje específico a través de la información que se proporciona en los propios problemas, de los intentos de resolución por los estudiantes y en las resoluciones que se les facilitan a los participantes tras la realización de las pruebas correspondientes.

REFERENCIAS

Bicknell, B. (2008). Gifted students and the role of mathematics education. *APMC, 13*(4), 15-20.

Cervantes, I. (2013). *Math Olympiads for gifted and talented students at Larsen Elementary* (tesis de maestría). Channel Islands, CA: California State University at Channel Islands.

Falk. M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 8*(1), 15-26.

Kalman, R. (2002). Challenging gifted students. The math olympiads. *Understanding our Gifted, 14*(4), 13-14.

Subotnik, R. F., Miserandino, A. D. y Olszewski-Kubilius, P. (1996). Implications of the olympiad studies for the development of mathematical talent in schools. Texo de la presentación en el *Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA)*.

HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN EN NIÑOS DE PRIMARIA CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA

Visualization skills in primary school mathematically gifted children

Mora, M. [a], Gutiérrez, Á. [b]

[a] Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica (Costa Rica). [b] Depto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València (España)

Resumen

La alta capacidad matemática es un tema por el que la investigación didáctica está mostrando interés creciente en los últimos años, con cada vez más iniciativas en marcha para atender a esta población. Sin embargo, aún existe debate sobre la forma de caracterizarlas. Presentamos un avance de nuestra investigación sobre la caracterización de la alta capacidad matemática a partir de las habilidades mostradas por estudiantes olímpicos de educación primaria. Particularmente nos centramos en una muestra de estudiantes de 7-8 y de 11-12 años y en habilidades de visualización. Para ello, establecimos una serie de indicadores sobre esta habilidad que pretendemos evidenciar, construimos problemas apropiados, los aplicamos y analizamos las estrategas de resolución, para determinar en que medida se presentan los indicadores en los diferentes grupos de población.

Palabras clave: *habilidades de visualización, alta capacidad matemática, educación primaria, olimpiada matemática*

Abstract

Mathematical giftedness it is a topic that has received increasing attention by researchers in recent years, with more and more initiatives to care this population. However, there is still debate on how to characterize it. In this paper, we inform on the advances of our research on the characterization of mathematical giftedness, based on the skills presented by Olympic students in primary school. Particularly, we focus on a sample of 7-8- and 11-12-years old students and visualization abilities. To do it, we established indicators on these abilities that we intend to demonstrate, we built problems, applied them, and analyzed the resolution strategies, to determine the way those indicators are present in the different population groups.

Keywords: *visualization skills, mathematical giftedness, primary school, mathematical Olympiad*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha dado énfasis al tema de la alta capacidad matemática (acm), ya que representa un grupo importante de niños que pueden llegar a enfrentar dificultades para adaptarse al sistema educativo por poseer capacidades por encima de la media, las cuales no les son requeridas y ello puede llevarlos a desmotivación, inhibición de sus capacidades e incluso al fracaso escolar. Aún así, muchos de estos estudiantes no han sido identificados o no reciben la atención requerida (Jaime y Gutiérrez, 2014; Miller, 1990).

Por ello, algunos países (Estados Unidos, España, Rusia, Australia, Colombia, Ecuador, Cuba, Costa Rica, etc.) han desarrollado programas para la atención a los estudiantes con acm, iniciativas

Mora-Badilla, M. y Gutiérrez, Á. (2021). Habilidades de visualización en niños de Primaria con alta capacidad matemática. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 107-114). Logroño: Universidad de La Rioja.

que cada vez cobran más fuerza. Una de las estrategias para la atención a esta población es la olimpiada. En el caso de Costa Rica, desde el 2015 se desarrolla la olimpiada matemática OLCOMEP, que pretende estimular y desarrollar las capacidades de resolución de problemas de los niños de primaria, mediante una competencia sana entre estudiantes de todo el país, de centros educativos públicos y privados, con pruebas que responden al enfoque del Programa de Estudio de Matemática (Ministerio de Educación Pública, 2012). La participación en dicho certamen crece cada año y se espera que continúe incrementando (Tabla 1).

Tabla 1. Participantes en la OLCOMEP periodo 2015-2019.

	Estudiantes participantes		
Año escolar	Fase II	Fase III	Fase IV
2015	1880	220	90
2016	5800	425	132
2017	10200	3600	225
2018	11450	----*	----*
2019	11800	3650	285

* En 2018 no se pudo concluir la olimpiada por una huelga de profesores.

Diversas investigaciones han propuesto caracterizaciones que asocian la acm a la posesión de determinadas habilidades y destrezas que le permiten al individuo un rendimiento por encima de la media. Destacan aportaciones desde la psicología (Gagné, 1993; Greenes, 1981; Krutetskii, 1976) y la didáctica de las matemáticas (Espinoza, 2018; Freiman, 2006; Jaime y Gutiérrez, 2014). En nuestra investigación, realizamos una caracterización de la acm basada en planteamientos de estos y otros autores, centrando nuestro objetivo general de investigación en determinar habilidades que caractericen la acm y en definir indicadores para evidenciarlas en estrategias de resolución de los estudiantes que participan en la olimpiada OLCOMEP.

Una de las capacidades consideradas es la visualización, la cual permite interpretar y manejar la información relativa a figuras o imágenes planteadas en los problemas, e incluso establecer relaciones entre ellas. La visualización es considerada de importancia en el razonamiento y en el proceso de resolución de cierto tipo de tareas matemáticas (Arcavi, 2003; Gutiérrez, 1996), al ser un elemento clave en el razonamiento y facilitar la comprensión de los problemas. Además, diversas investigaciones aportan datos que señalan a los estudiantes con acm como buenos visualizadores (Díaz y otros, 2008; Ramírez y Flores, 2017; Van Garderen, 2006).

Presentamos una parte de la investigación que estamos desarrollando, cuyo objetivo general es profundizar en estas preguntas: ¿qué tan desarrollada está la visualización en los estudiantes de primaria con acm?, ¿cuál es su peso en el desempeño de estos niños?, ¿hay indicadores que se presentan con más frecuencia en los niños más exitosos o que discriminan más? Dar respuesta a estas preguntas representa un aporte a la información actual sobre estudiantes con acm. El objetivo específico de este texto es presentar definiciones de indicadores concretos para las principales habilidades de visualización, el diseño de problemas en los que puedan evidenciarse dichos indicadores, la ejemplificación de respuestas de los estudiantes y el análisis de estrategias de resolución, para determinar en qué medida se presenta cada indicador en la muestra.

MARCO TEÓRICO

La visualización en matemática se considera "como el tipo de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos visuales o espaciales, de forma mental o física, dirigida a resolver problemas o probar propiedades. La visualización está integrada por cuatro elementos principales: imágenes mentales, representaciones externas, procesos de visualización y habilidades de visualización" (Gutiérrez, 1996, p. 9). Una *imagen mental* es una representación mental de un concepto o propiedad matemática que contiene información basada en elementos pictóricos, gráficos o diagramáticos; una *representación externa* es cualquier tipo de representación verbal o gráfica de conceptos o propiedades que incluye fotos, dibujos, esbozos, diagramas, etc.; un *proceso de visualización* es una acción física o mental en la cual se implican las imágenes mentales; y las *habilidades de visualización* son un conjunto de disposiciones estables del sujeto, que utiliza para ejecutar procesos de visualización con las imágenes mentales y que puede desarrollar con la práctica (Gutiérrez, 1996).

Pretendemos evidenciar las formas de uso de la visualización por los estudiantes mediante la identificación de las habilidades de visualización (Del Grande, 1990; Gutiérrez, 1996) que manifiesten durante la resolución de los problemas. En esta investigación nos centramos en las habilidades de identificación visual, rotación mental, conservación de la percepción, reconocimiento de posiciones en el espacio, reconocimiento de relaciones espaciales y discriminación visual. La Tabla 2 muestra las definiciones de las habilidades e indicadores que hemos elaborado para analizar las estrategias de respuesta de los estudiantes.

Tabla 2. Indicadores de las habilidades de visualización.

Código	Indicadores de las habilidades
DV1	*Identificación visual*. Identifica la figura como una estructura formada por cubos e identifica cada uno de los cubos que la conforman, sus caras y aristas. Extrae los cubos aislándolos del contexto (figura completa) en el que están camuflados, deformados o superpuestos.
DV1.1	Aísla las formas poligonales que forman las caras de un cubo, así como los cubos u ortoedros que conforman una estructura.
DV2	*Rotación mental*. Produce imágenes dinámicas para visualizar una configuración en movimiento.
DV2.1	Produce imágenes dinámicas, es decir imágenes en movimiento.
DV3	*Conservación de la percepción*. Identifica regularidades en una figura que le permiten asumir propiedades que se mantienen, aunque se vea (semi) oculta o deformada.
DV3.1	Conservación de la percepción en imágenes parcialmente ocultas. Determina, a partir de la regularidad observada, que hay cubos o caras de los que solo es visible un trozo.
DV3.2	Conservación de la percepción en imágenes no visibles. Determina, a partir de la regularidad observada, que hay cubos o caras ocultas y sus características pertinentes.
DV4	*Reconocimiento de posiciones en el espacio*. Identifica relaciones entre diversos objetos ubicados en el espacio mediante referencias a uno mismo o a otro referente.
DV4.1	Reconoce relaciones de posición de los objetos con respecto al estudiante como observador.
DV4.2	Reconoce relaciones de posición de objetos respecto a un objeto de referencia.
DV5	*Reconocimiento de relaciones espaciales*. Identifica relaciones internas entre diversos objetos situados en el espacio o entre partes de un mismo objeto.
DV5.1	Reconoce relaciones internas entre diversos objetos figuras y/o imágenes.
DV5.2	Reconoce relaciones internas entre partes de un objeto o imagen mental.
DV6	*Discriminación visual*. Compara varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales, independientemente de su posición.
DV6.1	Compara las formas poligonales en la figura e identifica regularidades y diferencias entre ellas.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de tipo exploratorio y pretende establecer una relación entre los indicadores evidenciados por los estudiantes y el nivel de éxito alcanzado en la olimpiada, mediante el análisis de sus procesos de resolución de situaciones problema.

Población

La olimpiada tiene una prueba diferente para cada curso de Primaria. En este texto analizamos los datos de los estudiantes de 2º (7-8 años) y 6º (11-12 años) cursos. En cada fase, los estudiantes obtienen un puntaje entre 0 y 100. Hemos formado una muestra de conveniencia teniendo en cuenta que sea representativa de los diferentes puntajes obtenidos por los niños y que haya una amplia distribución geográfica. Hemos formado tres grupos de puntajes (P): grupo A (P<45), grupo B (45≤P≤65) y grupo C (P>65). La Tabla 3 muestra las cantidades de estudiantes participantes.

Tabla 3. Distribución de la población y la muestra.

Fases	**II**		**III**		**IV**	
Edades	7-8	11-12	7-8	11-12	7-8	11-12
Muestra, grupo A	3	15	9	11	2	4
Muestra, grupo B	2	5	5	2	12	11
Muestra, grupo C	1	2	4	6	4	10
Total de la muestra	6	22	18	19	18	25

Para encontrar evidencias de los indicadores en las soluciones de los estudiantes, analizamos las respuestas escritas de los estudiantes de la muestra y 17 entrevistas grabadas en video a 4 y 5 estudiantes de 2º y 6º, respectivamente, en la fase III y a 4 estudiantes de cada curso en la fase IV. Los estudiantes entrevistados pertenecían a los distintos grupos de puntajes. Los niños explicaban sus respuestas escritas y respondían a preguntas, para aclarar aspectos de su explicación verbal o de las respuestas escritas.

Instrumentos

Hemos construido seis problemas afines a la visualización, que se plantearon uno en cada una de las tres últimas fases de la olimpiada OLCOMEP 2019 de 2º y 6º. En todos ellos era posible evidenciar algunos de los indicadores mostrados en la Tabla 2. En cada fase, los problemas presentaban mayor dificultad.

Para el grupo de 7-8 años, creamos problemas que mostraban estructuras construidas con cubos. Los estudiantes debían determinar: en la fase II, las cantidades de cubos que componen dos estructuras (Figura 1a superior) y verificar si se puede construir otra estructura (Figura 1a inferior) con esas cantidades de cubos; en la fase III, cuántas estructuras como la dada (Figura 1b inferior) se pueden formar con la cantidad de cubos de otra estructura (Figura 1b superior); en la fase IV, cuántos cubos hay que añadir a la estructura dada (Figura 1c) para que tenga 72 cubos. En estos problemas se pueden evidenciar los indicadores DV1.1, DV3.1, DV3.2 y DV6.1.

Para el grupo de 11-12 años, el problema de la fase II mostraba una estructura de cubos (Figura 2a) que se pinta por el exterior y después se desarma en los cubos; se debía identificar cuántos cubos y cuáles quedan con dos y con tres caras pintadas. Este problema da oportunidad de evidenciar los indicadores DV1.1, DV3.1 y DV4.2. El problema de la fase III presentaba un edificio formado por prismas (Figura 2b) en el que deben identificar las diferentes vistas ortogonales, tanto las vistas visibles como las no visibles, y determinar la de mayor superficie. Se pueden evidenciar DV1.1, DV3.1, DV3.2 y DV4.2. El problema de la fase IV presentaba un cubo con filas vacías (Figura 2c) y se debía determinar cuántos cubitos hacen falta para rellenar los huecos del cubo grande. Se pueden evidenciar DV1.1, DV3.2 y DV4.2.

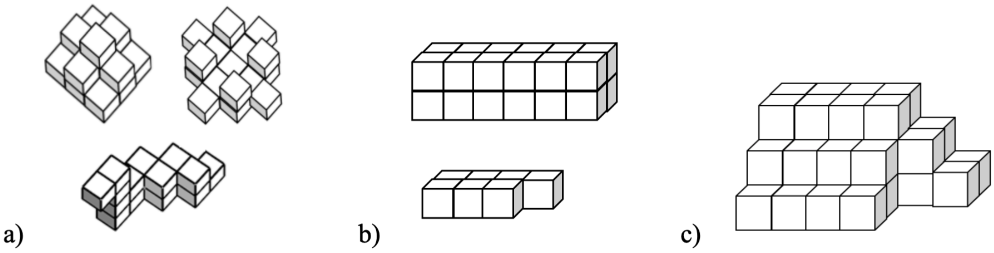


Figura 1. Torres o formas construidas con cajas.

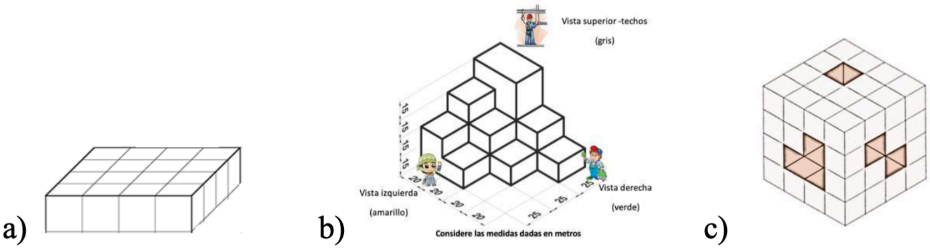


Figura 2. Figuras de las situaciones problema para niños 11-12 años.

ANÁLISIS DE DATOS

Para la organización de los datos, realizamos tablas de doble entrada con los indicadores y la forma en la que cada uno se evidencia en la respuesta del estudiante, en caso de evidenciarse alguno, ya que hay respuestas, tanto correctas como incorrectas, en las que no se evidencian indicadores. Para el análisis cualitativo de las estrategias de los estudiantes, identificamos detalles de las respuestas que nos informen sobre el razonamiento de los estudiantes, sus formas de evidenciar los indicadores, o si la presencia de los indicadores determina una resolución correcta o incorrecta, entre otros, que resultan de interés. A continuación, mostramos algunos ejemplos de análisis de respuestas. Hemos codificado a los estudiantes para asegurar el anonimato; así, E62015 es la respuesta del estudiante 015 de 6º curso en la fase II de la olimpiada.

Figura 3. Respuestas de E62015.

En la Figura 3 se observa la respuesta de un estudiante de 6º curso al problema de la fase II (Figura 2a), el estudiante señala con “H”/”J” los cubos que, según él, tienen dos/tres caras pintadas. Se evidencia el indicador DV1.1, ya que identifica cada uno de los cubos que lo forman con sus caras y aristas, señalando con una letra los cubos y, en caso de tener varias caras visibles, colocando la misma letra pues sabe que pertenecen al mismo cubo. También se evidencia DV3.1, pues observa que al cubo de la esquina frontal derecha y sus tres caras visibles le corresponde una “J” y, dada la regularidad observada en la estructura, traslada ese análisis a las otras tres esquinas, aunque no tengan la misma cantidad de caras visibles. Aún así, el estudiante no usa la habilidad de posiciones en el espacio, no reconoce correctamente las posiciones de los cubos en el espacio respecto a él mismo (DV4.2), pues no se da cuenta de que las caras del plano inferior (respecto a su punto de vista) son visibles y están pintadas, dando una respuesta incorrecta.

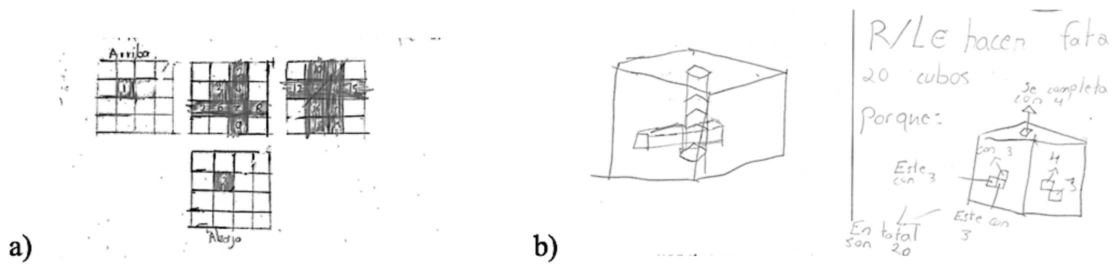


Figura 4. Respuestas de a) E64047, b) E64054.

La Figura 4 muestra dos formas distintas de responder al problema de la fase IV (Figura 2c). A partir de la observación del cubo, los dos estudiantes evidencian reconocer correctamente las posiciones de cubos en el espacio en relación con los otros cubos (DV4.2), identificando que hay filas y columnas de cubitos que se intersecan, a pesar de que en la figura no se ven completas las filas faltantes ni las intersecciones entre ellas. El primer estudiante realiza una representación del cubo por plantas, el segundo señala en su figura cuántos cubitos hay en cada fila, teniendo en cuenta no contar cubitos varias veces, y hace un dibujo para ejemplificar el tipo de intersecciones que se dan en el interior del cubo. Ambos evidencian el mismo indicador, pero de formas distintas.

Con los resultados del análisis de todas las respuestas hemos realizado una tabla que registra las habilidades de visualización presentadas por los estudiantes de la muestra en cada problema agrupados por edad y por puntaje (A bajo, B medio, C alto), en cada una de las fases II, III y IV de la olimpiada y el puntaje total en la prueba, para finalmente sintetizar la información. La Tabla 4 presenta las cantidades (%) de estudiantes que han evidenciado usar cada indicador en los seis problemas analizados en este texto.

Tabla 4. Porcentaje de indicadores evidenciados por grupo de edad, fase y grupo de puntaje.

	Grupo de 7 a 8 años								
	Fase II			Fase III			Fase IV		
Indicador	A	B	C	A	B	C	A	B	C
DV1.1	66,6	100	0	62,5	66,6	100	0	91,6	100
DV3.1	100	100	0	62,5	66,6	100	0	91,6	100
DV3.2	66,6	100	0	62,5	66,6	100	0	83,3	100
DV6.1	100	100	0	50	66,6	100	0	91,6	100
	Grupo de 11 a 12 años								
	Fase II			**Fase III**			**Fase IV**		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
DV1.1	86,6	100	100	36,4	50	83,3	75	90,9	90
DV3.1	33,3	80	50	27,3	50	83,3	----*	----	----
DV3.2	----	----	----	18,2	50	100	25	90,9	90
DV4.2	33,3	80	100	45,4	50	100	0	72,7	80

* Indicador no pertinente en la resolución de este problema.

Hay estudiantes que evidencian no tener las habilidades de visualización requeridas y otros no evidenciaron los indicadores en su respuesta escrita porque realizaron los procesos, verificaciones o justificaciones mentalmente y no necesitaron escribir o dibujar algo para ello. En cuanto a la habilidad de identificación visual (DV1), se observa que la mayoría de los niños tienen la capacidad de identificar diferentes elementos en una figura, ya sea para extraer las unidades que la conforman o algunos grupos de ellas. La diferencia principal se observa en que, si estas partes se ven claramente, la mayoría lo logra (pero no el 100%), no así en figuras distorsionadas por la perspectiva, camufladas o con partes superpuestas. Particularmente en los estudiantes de 11-12 años, hay más detalles (líneas incompletas o partes faltantes) que ponen más a prueba la identificación visual. En cuanto a la conservación de la percepción (DV3), se obtienen porcentajes más bajos en los problemas más complejos, lo que indica que es un indicador de mayor dificultad, e incluso dentro de la misma habilidad, es de mayor complejidad la conservación de la percepción en imágenes ocultas que en imágenes parcialmente visibles. Esto en es más marcado en figuras más complejas (grupo 7-8 versus 11-12) y con mayor diferencia entre grupos de puntaje que en la habilidad anterior (DV1). La discriminación visual (DV6) solo se presentó en los problemas del grupo de 7-8 años y la habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio (DV4) solo en el grupo de 11-12 años, con diferencias importantes entre grupos de puntaje.

CONCLUSIONES

En respuesta a los objetivos específicos planteados al comienzo de este texto, hemos definido indicadores específicos de las habilidades de visualización para problemas basados en manipular estructuras de cubos, lo cual supone un aporte al conocimiento actual sobre el uso de la visualización en geometría espacial.

También hemos diseñado diversos problemas, que fueron planteados en la olimpiada OLCOMEP y que han mostrado ser adecuados para que los estudiantes ofrezcan evidencias del uso de habilidades de visualización. Con el análisis realizado concluimos que los problemas plantados pueden usarse para evaluar la capacidad de visualización en niños de 7-8 y de 11-12 años con acm. También hemos detectado aspectos de los problemas que permiten una mejor identificación de las habilidades de visualización y que dan pie a elaborar secuencias de problemas que incluyan elementos cada vez más específicos y permitan identificar niveles en estas habilidades. No necesariamente el manejo de las habilidades de visualización garantiza que el problema se resuelva de forma correcta, pero el no manejo de ellas sí implica lo contrario. Por ende, puede darse que los estudiantes manejen y evidencien ciertas habilidades que le permitan resolver un problema, pero el no dominio de una habilidad particular les impida concluirlo con éxito.

Como conclusión importante a considerar para posteriores experimentaciones en este tema destacamos la dificultad que representa obtener evidencias de las habilidades de visualización por medio de respuestas escritas. Algunos niños no están acostumbrados a escribir todo su procedimiento y justificaciones. Otros, al observar las figuras, realizan acciones con imágenes mentales que no representan por escrito. Para abordar estas dificultades, ha sido determinante el complemento de las respuestas escritas con las entrevistas.

El análisis de los procedimientos de los estudiantes con acm es de gran valor ya que, aunque todos los niños resuelven el mismo problema, no todos realizan el mismo procedimiento. Incluso el mismo indicador no es evidenciado por todos ellos de la misma forma, así que plantear problemas que permitan esta variedad de procesos de resolución enriquece el análisis.

Aunque esperábamos que se evidenciasen las seis habilidades de visualización (Tabla 2) en las resoluciones de los estudiantes, no todas surgieron en las respuestas que hemos analizado. Por ello, se plantea la necesidad de construir otros problemas que permitan observar la rotación mental (DV2) y el reconocimiento de relaciones espaciales (DV5) en la población en estudio. En cuanto a la identificación visual (DV1), se observa que cuando las imágenes incluyen partes distorsionadas por la perspectiva, camufladas o con partes superpuestas son más notables las diferencias entre los niños de diferentes grupos de puntajes. Particularmente, en la muestra de 11-12 años, pues al ser la dificultad de los problemas mayor, hay más de estos detalles; esto permite mayor precisión en la identificación de los indicadores, ya que se puede agregar información visual más compleja (líneas incompletas o partes faltantes).

Las habilidades que implican mayor complejidad, así como los problemas más complejos muestran mayores diferencias de aparición entre los distintos grupos de población según el puntaje. Esto indica que discriminan más a los estudiantes con acm, ya que se presentan en mayor medida en los estudiantes con mejor puntaje, mientras que otras habilidades menos complejas no discriminan tan claramente, pues se presentan con frecuencia similares en los diversos grupos según puntaje.

Es importante continuar analizando con profundidad la puesta en práctica de la visualización en distintos grupos de estudiantes con acm, para extraer conclusiones que sean de utilidad para el proceso de detección de esta población escolar.

AGRADECIMIENTOS

Estos resultados son parte de las actividades de los proyectos de investigación 820-CO-081 de la Universidad de Costa Rica y EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) del Gobierno de España.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher*, *37*(6), 14-20.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faisca, Revista de Altas Capacidades, 13*(15), 30-39.

Espinoza, J. (2018). *Caracterización de estudiantes con talento en matemática mediante tareas de invención de problemas* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Disponible en http://hdl.handle.net/10481/54709

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51-75.

Gagné, F. (1993). Constructs and models pertaining to exceptional human abilities. En K. Heller, F. Mönks y A. Passow (Eds.), *International handbook of research and development of giftedness and talent* (pp. 69-87). Nueva York, NY: Pergamon.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *28*(6), 14-17.

Gutiérrez, Á. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E.* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: PME. Disponible en https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Krutetskii, V. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Miller, R. (1990). *Discovering mathematical talent* (documento ED321487). Washington DC: ERIC.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Reforma curricular en ética, estética y ciudadanía. Programas de estudio de matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de educación general básica y educación diversificada*. San José, Costa Rica: M.E.P. Disponible en https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Ramírez, R. y Flores, P. (2017). Habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(2), 179-196.

Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities, 39*(6), 496-506.

UNA EXPERIENCIA DE ATENCIÓN A LAS ALTAS CAPACIDADES EN MATEMÁTICAS: SEMILLERO DE MATEMÁTICAS

AN EXPERIENCE OF ATTENTION TO THE HIGH ABILITIES IN MATHS: MATH'S RESEARCH GROUP

Mora, L. [a], Monroy, Z. [a], Peraza, L. [b], Zapata, Z. [a]

[a] Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). [b] Colegio Calasanz Bogotá (Colombia)

Resumen

En el siguiente documento se presenta una experiencia de atención a las altas capacidades en Matemáticas de niños y jóvenes en Bogotá, D.C.-Colombia, el proyecto Semillero de Matemáticas del Colegio Calasanz Bogotá, un espacio que potencia el talento matemático de estudiantes de 9-14 años, liderado por profesores de la institución, apoyado por estudiantes de grado décimo (15-16 años) y acompañado por estudiantes de últimos semestres de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, D.C., Colombia.

Palabras clave: *talento matemático, enseñanza, matemáticas*

Abstract

The next paper presents an experience of attention to the high children and teenagers learners' skills in the maths subject through the research group is an environment that enhance the mathematical' abilities in students from nine to fourteen years old. It is led by teachers and high school students from the same institution and supported by last semester students from the Universidad Pedagogica Nacional in Bogotá, Colombia.

Keywords: mathematical *talent, teaching, mathematics*

EL SEMILLERO DE MATEMÁTICAS DEL COLEGIO CALASANZ BOGOTÁ

El Colegio Calasanz Bogotá [CCB] es una de las instituciones escolares más reconocidas en la ciudad de Bogotá, tanto por su formación académica como por su formación en valores.Desde la década del setenta, el CCB comenzó a impulsar la participación de sus estudiantes en las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, en la cuales siempre obtuvo una destacada presencia clasificando en muchas oportunidades a rondas finales en competencias regionales, nacionales e internacionales, participación que inició con estudiantes de la educación media (15-17 años), luego se extendió a la Educación Secundaria (12-14 años) y posteriormente a los grados superiores de la básica primaria (9-11 años).

Dado lo anterior, en el año 2009, por iniciativa de algunos profesores del Colegio, se creó el Semillero de Matemáticas del CCB como una actividad extracurricular, con el fin de atender a los niños y jóvenes del Colegio que participaban en las competencias o que demostraban alto interés por las Matemáticas y tenían altas capacidades en esta área. De esta manera los estudiantes que

Mora, L., Monroy, Z., Peraza, L. y Zapata, Z. (2021). Una experiencia de atención a las altas capacidades en matemáticas: semillero de matemáticas. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 115-122). Logroño: Universidad de La Rioja.

participaban en el Semillero usualmente eran quienes representaban a la institución en las olimpiadas matemáticas.

En el año 2019, el Semillero de Matemáticas, se estableció, además, como una opción de servicio social para estudiantes de grado décimo que muestran habilidades de comunicación y capacidades matemáticas superiores, para que apoyaran las sesiones del Semillero, allí los estudiantes liderarían las actividades y acompañarían su desarrollo con los estudiantes más pequeños (Departamento de Matemáticas, 2019). Sin embargo, debido a la emergencia sanitaria que se presentó en el año 2020, los estudiantes de grado décimo asumieron el servicio social adaptándose al uso de herramientas digitales para el desarrollo de sus habilidades matemáticas y para incentivar a que otros compañeros se animaran a potenciar sus capacidades matemáticas.

En la presencialidad, el Semillero de Matemáticas del CCB es liderado por docentes de matemáticas (uno cada sesión), durante los miércoles en horario extracurricular de 3:15 P.M. a 4:55 P.M. Estas sesiones se dividen en tres partes; en un primer momento, los estudiantes de grado décimo realizan una actividad lúdica entre los participantes del semillero, estas actividades implican desplazamientos y movimientos en el aula, el uso de material concreto y la interacción entre todo el grupo. En un segundo momento, los participantes del Semillero desarrollan cuadernillos de pruebas previamente acopiados por los docentes de matemáticas a partir de problemas de olimpiadas matemáticas tomadas de diferentes certámenes, esto pueden hacerlo de forma individual o en grupos según lo programan los estudiantes de grado décimo. Finalmente, se hace una socialización de los procedimientos, las operaciones y las respuestas de los problemas propuestos identificando diferentes formas de resolverlos y las estrategias usadas por los estudiantes.

Sin embargo, en el año 2020, debido a la emergencia sanitaria, los estudiantes de grado décimo no pudieron realizar el servicio social en el Semillero de Matemáticas ya que el CCB decidió cancelar las actividades extracurriculares como una forma de evitar mayor exposición a los dispositivos tecnológicos fuera de la jornada escolar. Pero para permitirles cumplir las horas programadas como requisito para su graduación, desde Desarrollo Humano se estableció que los estudiantes diseñaran dos videos en los que expusieran la solución a tres problemas tipo olimpiadas de diferentes niveles, los cuales se proyectarían a los estudiantes de la institución.

Como a partir del 2020 se decidió que sería interesante que estudiantes para profesor pudieran acompañar este proyecto, la Universidad Pedagógica Nacional – líder en la formación de profesores en Colombia – se vinculó a esta iniciativa a través de la práctica educativa, y son los estudiantes para profesores quienes acompañarían el proceso de servicio social de los estudiantes de grado décimo durante la virtualidad, aportando el desarrollo de los problemas matemáticos, la presentación de los videos, la forma de expresar los procedimientos matemáticos para promover la interacción entre todos los participantes del semillero del CCB, así fuese de manera asincrónica.

FUNDAMENTACIÓN DEL SEMILLERO DE MATEMÁTICAS COMO PROYECTO INSTITUCIONAL

El Semillero de Matemáticas del CCB está fundamentado jurídicamente dentro de la normatividad nacional colombiana en la Ley 115 de 1994, particularmente en el Capítulo 1. Educación para personas con limitaciones o capacidades excepcionales, del Título III. Modalidades de atención educativa a poblaciones (MEN, 1994, p.13). En este capítulo se determina la necesidad de organizar programas para la atención educativa de estas poblaciones.

> Las preguntas en Colombia sobre los estudiantes con capacidades excepcionales nacen por parte del sector privado, pero aun así, la iniciativa del Estado surge después de la divulgación de la legislación que reconoce quién es un estudiante excepcional. Entonces para construir

> una sociedad más igualitaria y menos excluyente, el Estado integra a los estudiantes con capacidades excepcionales en la educación para promover la inclusión en los colegios. (MEN, 2017)

El Decreto 1075 de 2015, Decreto Único Reglamentario del Sector Educación en el Artículo 2.3.3.5.1.1.2., define a los estudiantes con capacidades excepcionales como "aquel que presenta una capacidad global que le permite obtener sobresalientes resultados en pruebas que miden la capacidad intelectual y los conocimientos generales, o un desempeño superior y precoz en un área específica." (MEN, 2015, p.132). De otro lado, en este mismo decreto, se posibilita la conformación de aulas de apoyo especializadas para la atención de estudiantes excepcionales.

De esta manera el Semillero de Matemáticas del CCB se corresponde con una de esas aulas de apoyo especializado que busca atender a los estudiantes con capacidades o talentos excepcionales hacia las Matemáticas, liderada por docentes de la institución, estudiantes para profesores de Matemáticas y apoyada por estudiantes del Colegio de grados superiores para estudiantes de grados quinto a octavo.

Por otro lado, el Semillero que se lleva a cabo en jornada extraescolar responde a lo que en Colombia se denomina Jornadas Escolares Complementarias (MEN, 2014). Estas se consideran una oportunidad para que los estudiantes aprendan sobre temáticas de su interés en espacios dinámicos, con actividades estimulantes y motivadoras que beneficien la exploración de los estudiantes. Así, el Colegio Calasanz Bogotá junto con el Departamento de Matemáticas apoyan las acciones orientadas a que los estudiantes con talento matemático sean atendidos y potencien sus capacidades en el Semillero de Matemáticas, como espacio extracurricular durante un día a la semana.

Ahora, desde el punto de vista teórico, el Semillero de Matemáticas del CCB es un programa de enriquecimiento para estudiantes con talento matemático. Sánchez et al. (2008) establece que los programas de enriquecimiento son unos de los métodos más habituales de apoyo para los alumnos de alta capacidad y sus familias para desarrollar habilidad más allá del currículo escolar.

Los programas de enriquecimiento para estudiantes con talento matemático tienen diferentes orientaciones, para Jiménez (2000, citado por Fernández, 2020), los hay de tres tipos:

- Enriquecimiento orientado al contenido**:** en este tipo de medida se toman una o más áreas del currículum y se desarrollan con mayor extensión y profundidad de lo habitual. Puede realizarse a través de cursos, programas o actividades que requieran recursos externos como pueden ser museos, salidas, bibliotecas, exposiciones.
- Enriquecimiento orientado al proceso: el objetivo es desarrollar en los estudiantes habilidades de pensamiento de alto nivel del tipo de técnicas de resolución de problemas, habilidades de pensamiento divergente o estrategias metacognitivas que le llevarán a realizar productos creativos.
- Enriquecimiento orientado al producto: el objetivo va dirigido a preparar a los alumnos para elaborar productos reales significativos y con impacto en el sector adecuado. En este tipo de programas se potencia el trabajo independiente, trabajo de investigación en los que, ofreciendo unas pautas científicas y profesionales propias de adultos, sean capaces de ofrecer unos resultados propios también de personas de más edad. (p.60)

De acuerdo con esto, el Semillero de Matemáticas del CCB es un programa de enriquecimiento orientado al producto y al proceso. Al primero, en tanto su medio de estudio son problemas de Olimpiadas Matemáticas y uno de sus objetivos es que los estudiantes representen a la institución en tales competencias. Al proceso porque su objetivo principal es el desarrollo de las habilidades matemáticas de alto nivel en quienes participan en él.

Algunas de las habilidades que más se evidencian en los semilleros de Matemáticas son las asociadas al pensamiento divergente, en particular estas emergen cuando se seleccionan problemas (más que ejercicios) como medio de estudio. Por lo cual, cuando se opta por elegir problemas de olimpiadas matemáticas el desarrollo de este tipo de pensamiento se evidencia con frecuencia, incluso aunque muchas veces este no sea el que más se potencie en la escolaridad regular; pues a pesar de reconocerse que las Matemáticas que estudiamos son fruto de la invención humana, en el aula escolar regular prevalece la ejercitación de técnicas y algoritmos así como el aprendizaje memorístico de hechos o propiedades, privilegiándose el pensamiento convergente, que si bien es cierto hace parte del dominio matemático, no es el único.

Es bien sabido y hace parte del conocimiento común que estudiar Matemáticas está vinculado con la puesta en juego de habilidades y procesos asociados a la visualización, la generalización, la rigurosidad, el análisis, el establecimiento de relaciones, la simbolización, entre otras; todas ellas referidas al pensamiento convergente; usualmente muy valoradas en el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas (Soriano, 1996). No obstante, en la actualidad se reconoce que las Matemáticas no solo pueden sino que deben fomentar el pensamiento divergente, materializado en cuatro características o habilidades: fluidez (riqueza en las ideas, abundancia de respuestas al resolver problemas), originalidad (en las respuestas, en las preguntas, en las estrategias, en la interpretación), búsqueda de soluciones simples y directas, y flexibilidad (búsqueda de múltiples respuestas, desarticulación de esquemas rígidos, establecimiento de asociaciones innovadoras, formulación de problemas de manera espontánea) (Sánchez, García y Mora, 2009). Ambos tipos de pensamiento a desarrollarse en espacios de enriquecimiento como los semilleros de Matemáticas.

SERVICIO SOCIAL EN EL SEMILLERO DE MATEMÁTICAS

El Semillero de Matemáticas del CCB permite que los estudiantes de grado décimo cumplan su servicio social como requisito de graduación. Para ello, deben acompañar las sesiones del Semillero y en ellas apoyar el liderazgo de las actividades programadas. Sin embargo, en el año 2020, la emergencia sanitaria obligó a los docentes y estudiantes a asumir la educación a través de plataformas virtuales, y esto hizo que la metodología del servicio social en el Semillero pasara también por modificaciones significativas.

Se estableció entonces desde el Departamento de Desarrollo Humano y el Departamento de Matemáticas del CCB que los estudiantes de grado décimo produjeran videos en los cuales comunicaran a sus compañeros las formas en que se pueden resolver problemas matemáticos planteados en certámenes de olimpiadas matemáticas para estudiantes de quinto a undécimo (9-17 años aproximadamente). De acuerdo con los ajustes que se llevaron a cabo para continuar con el servicio social por esta modalidad, los estudiantes de grado décimo están acompañados por docentes del CCB del área de Matemáticas y Desarrollo Humano, y una estudiante para profesora de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Conforme a los criterios suministrados por las docentes del CCB y la estudiante para profesora para la realización de los videos, los estudiantes debían solucionar los problemas de acuerdo con los conocimientos que hasta el momento habían adquirido, además de que los problemas en las olimpiadas deben ser resueltos en poco tiempo. Dentro de los problemas que fueron resueltos por los estudiantes se destacaron las estrategias que algunos utilizaron para su solución.

Enseguida se ejemplifica lo citado anteriormente.

El problema fue tomado de la XXXIX Olimpiada Colombiana de Matemáticas, Prueba clasificatoria nacional - Nivel superior, dirigida a 10° y 11° y dice lo siguiente:

“Existe un único número entero positivo *n* tal que:

$$\log_2 (\log_{16} n) = \log_4 (\log_4 n)$$

¿Cuál es la suma de los dígitos de *n?*

a) 13   b) 7   c) 8   d) 4"

Este fue uno de los problemas suministrado a los estudiantes de décimo, para el cual la solución dada por la estudiante para profesora fue la siguiente (ver Tabla 1).

Tabla 1. Solución propuesta por estudiante para profesora de matemáticas.

$\log_2(\log 16\ n) = \log_4 (\log_4 n)$	Dado
$\log_{16} n = \log_4 n / \log_4 16$	Propiedad cambio de base
$\log_{16} n = \log_4 n / 2$	Definición de logaritmo
$\log_4 (\log_4 n) = \log_2 (\log_4 n) / \log_2 4$	Propiedad cambio de base
$\log_4 (\log_4 n) = \log_2 (\log_4 n) / 2$	Definición de logaritmo
$\log_2(\log_4 n / 2) = (\log_2 (\log_4 n)) / 2$	Sustitución
$\log_2(\log_4 n) - \log_2 2 = (\log_2 (\log_4 n)) / 2$	Propiedad Logaritmo de un cociente
$\log_2(\log_4 n) - 1 = (\log_2 (\log_4 n)) / 2$	Definición de logaritmo
$\log_2(\log_4 n) - (\log_2 (\log_4 n)) / 2 = 1$	Definición de igualdad
$\log_2(\log_4 n) - ½ (\log_2 (\log_4 n) = 1$	Propiedad de los números
$\log_2 (\log_4 n) / 2 = 1$	Sustracción
$2^{\log_2 (\log_4 n)} = 2^2$	Propiedad de los logaritmos
$\mathrm{Log}_4\ n = 4$	Propiedad $a^{\log a\ C} = c$
$4^{\mathrm{Log}_4 n} = 4^4$	Propiedad de los logaritmos
$n = 4^4$	Propiedad $a^{\log a\ C} = c$
$n = 256$	Definición potenciación

Así, la respuesta es 13.

Por su parte, el estudiante de grado décimo planteó como estrategia de solución buscar la intersección de las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = \log_4 x$, para lo cual hace su representación gráfica (Figura 1).

Funciones $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_4 x$

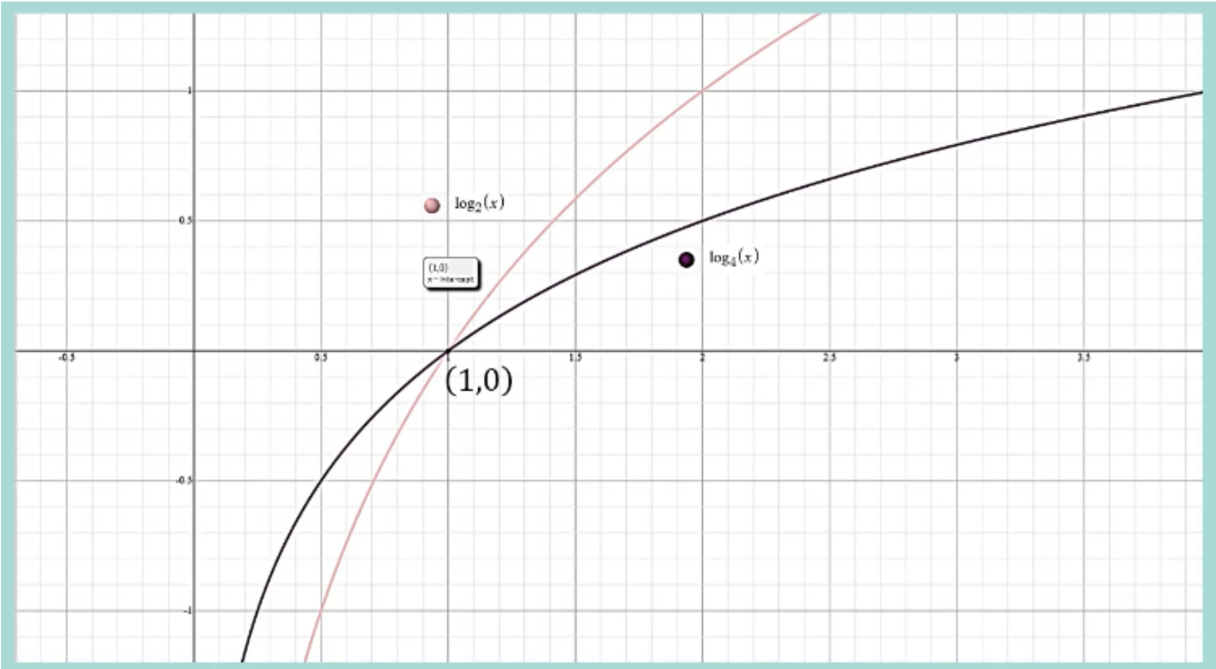


Figura 1. Gráfica de las funciones f(x) y g(x).

Observando que el punto de intersección es la coordenada (1,0), por lo cual escribe:

$$\log_2 1 = \log_4 1$$

Por lo tanto, establece que: $\log_{16} n$ y $\log_4 n$ deben ser iguales a 1 para que la igualdad dada originalmente sea verdadera. A partir de esto, llega a que $16^1 = 16 = n$ y $4^1 = 4 = n$, lo cual es una contradicción. Entonces, el estudiante propone una nueva estrategia de solución (Figura 2), evidenciando flexibilidad en su pensamiento. Así, cambia su planteamiento y supone que si

$$\log_{16} n = 2 \;\text{ y }\; \log_4 n = 4 \text{ (hipótesis)}$$

también se cumpliría la igualdad dada:

$$\log_2 (\log_{16} n) = \log_4 (\log_4 n)$$

siendo esta igual a 1 ya que $\log_a a = 1$.

Sobre su hipótesis, utiliza la definición de logaritmación, obteniendo:

$$16^2 = n \text{ y } 4^4 = n$$

De donde llega a que:

$$256 = n$$

Así, suma los dígitos de n seleccionado como correcta la opción (A) 13.

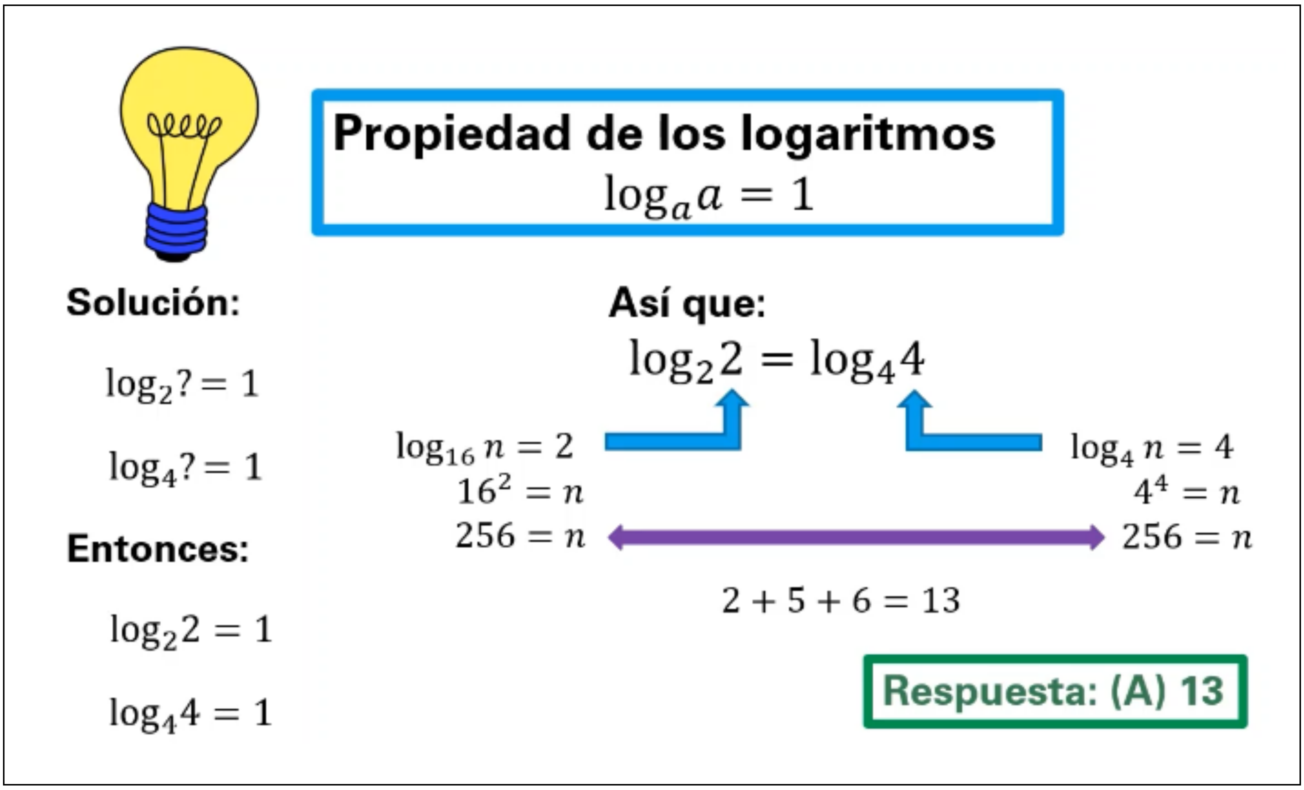


Figura 2. Solución al problema por parte del estudiante de grado décimo.

El procedimiento efectuado por la estudiante para profesora permite evidenciar su pensamiento convergente: conjunto de pasos rigurosos y deductivos argumentados con propiedades de los logaritmos, a diferencia del realizado por el estudiante quien explora, plantea hipótesis y algunas veces erróneas, otras no, pero a partir de las cuales logra llegar a una solución (pensamiento divergente). Claramente ambas soluciones son correctas, pero con gran distinción en sus procedimientos y estrategias. Ejemplos como el anterior han puesto en evidencia que la vinculación de estudiantes para profesor al Semillero aporta no solo a la formación matemática de los estudiantes del semillero sino a la formación de los futuros profesores en tanto, entre otros aspectos, reconocen esas capacidades superiores en Matemáticas que tienen los jóvenes y sobre lo cual es muy poco lo que se aborda en los programas de formación inicial de docentes.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Colegio Calasanz Bogotá y a la Universidad Pedagógica Nacional por hacer posible que espacios como el Semillero de Matemáticas continúen aportando a la formación de niños, jóvenes y futuros profesores de matemáticas.

REFERENCIAS

Departamento de Matemáticas (2019). *70 años de Educación matemática en Calasanz*. Bogotá: Colegio Calasanz Bogotá.

Fernández, R. T. (2020). Programas de enriquecimiento cognitivo. Programa ingenia. *Almoraima. Revista de Estudios Campogibraltareños, 44*, 57-64.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1994). *Ley General de Educación*. Bogotá: Ediciones Populares.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2014). *Guía para la implementación de la Jornada Escolar Complementaria*. Santiago de Cali. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-358656_foto_portada.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2015). *Decreto Único Reglamentario del Sector Educación. Decreto 1075 de 2015*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2017). *Documento de orientaciones técnicas, administrativas y pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con capacidad en el marco de educación inclusiva*. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-360293_foto_portada.pdf

Sánchez, L. P., Cobeñas, E. T. L., del Valle Chauvet, L. y Belinchón, E. R. (2008). Más allá del curriculum: programas de enriquecimiento extraescolar: La experiencia del programa estrella. *Faisca. Revista de altas capacidades, 13*(15), 4-29. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3537454.

Sánchez, L., García, O. y Mora, L. C. (2009). *Ver, describir y simbolizar en el club de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional*. Texto presentado en el 10° Encuentro Colombiano de Matemática Eductiva. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/740/1/ver.pdf.

Soriano, E. (1996). Enseñar a pensar al alumnado del primer ciclo de primaria a través de la matemática. *Suma, 23,* 7-20.

EL PROYECTO ESTALMAT. MÁS DE 20 AÑOS ESTIMULANDO EL TALENTO MATEMÁTICO

The ESTALMAT project. More than 20 years nurturing the mathematical talent

Ramírez, R. [a], Sánchez, M. [b]

[a] Universidad de Granada (España). [b] Universidad Complutense de Madrid (España)

Resumen

ESTALMAT (Estímulo del Talento Matemático) es un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que trata de detectar, orientar y estimular de manera continuada, a lo largo de dos cursos, el talento matemático excepcional de estudiantes de 12-13 años, sin desarraigarlos de su entorno, mediante una orientación semanal que se efectúa cada semana por tres horas. En esta comunicación se describe la organización y estructura del proyecto y se muestran ejemplos de las tareas que se desarrollan en las sesiones de enriquecimiento.

Palabras clave: *Enriquecimiento curricular, talento matemático, alta capacidad matemática*

Abstract

ESTALMAT (Estímulo del Talento Matemático) run under the auspices of the Royal Spanish Academy of Sciences. The objective is to detect, stimulate and guide the talent of mathematically gifted children, aged twelve to thirteen, without removing them from their social and school environment. In this paper we describe the organization and structure of the project and we show some tasks developed in it.

Keywords: *curricular enrichment, mathematical talent, high mathematical ability*

EL PROYECTO ESTALMAT

El proyecto comenzó en la Comunidad de Madrid en 1998 y desde entonces se ha ido extendiendo a otras comunidades: Cataluña, Castilla y León, Andalucía, Canarias, Galicia, Comunidad Valenciana, Cantabria, Castilla La Mancha e Islas Baleares. Su fundador, Miguel de Guzmán, aseguraba: *"en nuestras comunidades escolares existe un cierto número de estudiantes con una dotación intelectual para las matemáticas verdaderamente excepcional. Son talentos que pasarán a veces más o menos inadvertidos y más bien desatendidos por la imposibilidad de que los profesores dediquen la atención personal que se necesitaría"*.

Bajo estas premisas y el auspicio de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales se inició el proyecto con un claro objetivo: Detectar, orientar y estimular el interés de estudiantes de 12 a 14 años que se sienten especialmente atraídos por la belleza, la profundidad y la utilidad de las matemáticas (De Guzmán, 2002; Hernández, 2009). Es fundamental que no estén desarraigados de su entorno familiar, para poder conjugar un desarrollo armonioso de sus capacidades intelectuales con las emotivas y afectivas. Los antecedentes principales del proyecto provienen de

Ramírez, R. y Sánchez, M. (2021). El proyecto ESTALMAT. Más de 20 años estimulando el talento matemático. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 123-128). Logroño: Universidad de La Rioja.

Willian Durden de la Universidad John Hopkins de Baltimore (USA) y del modelo de Hamburgo de Karl Kiebmetter y Bernd Zimmermann.

En esta primera parte de la comunicación, daremos información relativa al proceso de selección y otras cuestiones organizativas en relación a la gestión del proyecto. En la segunda parte, mostraremos algunos ejemplos de las tareas que se llevan a cabo

Proceso de selección

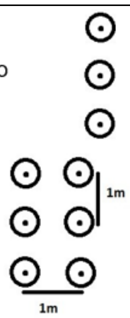
La selección de los estudiantes del primer curso se realiza mediante unas pruebas abiertas dirigidas a estudiantes de 12 a 14 años de Educación Secundaria y Ciclos Formativos. Se escogen 25 estudiantes por sede entre aquellos cuyas pruebas muestran mayor talento matemático y que tras una entrevista con el estudiante y la familia aceptan los compromisos de dedicación y permanencia en el proyecto. El segundo curso está formado por los 25 estudiantes que estuvieron en el primer curso en la edición anterior del proyecto. Los cursos de veteranos están formados por estudiantes que ya han participado en los dos primeros cursos ordinarios y desean continuar. Las sesiones semanales de trabajo en todos los cursos se realizan normalmente los sábados de 10 a 13:30, si bien en algunas sedes se realizan en otra franja horaria, pero siempre fuera del horario escolar. Para los cursos primero y segundo se imparten unas 20 sesiones cada curso, cuyo contenido detalla más adelante. En el caso de los veteranos son seis o siete sesiones las que se imparten, pues estos estudiantes tienen una carga de trabajo mayor en su educación reglada. En la página web del proyecto se puede obtener información más detallada (https://www.estalmat.org/).

Para la prueba se envía una convocatoria a los centros de Primaria y Secundaria de cada región y los padres y profesores presentan a los candidatos. Se elabora una prueba en la que se les plantean problemas con un lenguaje sencillo y claro, sobre aspectos muy variados: pensamiento visual, pensamiento lógico, intuición, creatividad, abstracción, manipulación matemática, etc. con cuestiones graduadas, de fácil a difícil de manera que todos puedan hacer algo, y sobre todo que se pueda valorar la aptitud y no sólo los conocimientos (ejemplo, en la Figura 1).

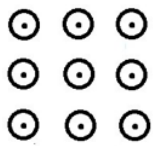
Un agricultor se dispone a sembrar semillas de patatas en su terreno.

El primer día, el agricultor siembra tres semillas en línea recta separadas 1 metro entre cada dos consecutivas (como se indica en la figura de la derecha).

El segundo día, vuelve a sembrar otras tres semillas en una línea paralela a la anterior a distancia 1 metro y también a distancia 1 metro entre cada nueva semilla.



1.- Tras la siembra del tercer día, el campo queda de la siguiente forma:



¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices en el tercer día? Dibújalos en el campo anterior y calcula el área de cada uno de ellos.

2. El agricultor sigue cultivando tres semillas cada día con la misma distribución anterior. Tras la siembra del cuarto día. ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices? Dibújalos en el campo del cuarto día y calcula el área de cada uno de ellos.

3. Si han pasado 100 días, responde justificando tu respuesta ¿cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices? ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?

4. Si han pasado “n” días (n representa cualquier valor de los días de siembra), responde justificando tu respuesta, ¿cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

Figura 1. Ejemplo de tarea en la prueba de selección.

A los estudiantes seleccionados se les realiza una entrevista personal y también, separadamente, se entrevista a los padres especialmente con la intención de conocer el interés y el compromiso con el proyecto.

Desarrollo de las sesiones

Dada la amplitud del proyecto, no existe una dinámica unificada, pero mayoritariamente la metodología es profundamente activa, basada en la resolución de problemas, la discusión y la participación constante de los estudiantes. En algunas sedes, cada sesión de trabajo se imparte por dos profesores, para poder atender la actividad desbordante que despliegan estos estudiantes. Los estudiantes disponen en cada sesión de un material escrito que les permite tener constancia precisa de los temas trabajados. Además de contenidos de las diferentes áreas de conocimiento matemático, se abordan sesiones STEM relativas a las Ciencias (Cosmología, Astronomía) a la Ingeniería (optimización de ubicaciones) y Tecnología (programación, utilización de software dinámico, etc.)

Además de las sesiones, se organizan campamentos con el fin de que los estudiantes se conozcan y se fortalezca el sentimiento de grupo. También se realiza una sesión “Matemáticas al sprint” en la que, por grupos, compiten con todos los participantes del proyecto a nivel nacional resolviendo problemas.

Muchos materiales se ponen a disposición de toda la comunidad educativa a través de la página web del proyecto. Se han publicado tres volúmenes (Matemáticas para estimular el talento matemático I, II y III) con actividades que se han desarrollado a través de los años, para que puedan ser utilizadas por los miembros de la comunidad educativa para la educación matemática y científica de sus alumnos. Anualmente se celebran Seminarios en los que participan profesores de todas las sedes para compartir los contenidos de algunas sesiones y coordinar aspectos relativos a la organización (diseño de la prueba, seguimiento del proyecto, etc.). También, desde el año 2018, el proyecto gestiona una sección con contenidos de las sesiones en la revista SUMA (una relevante revista de la Federación Española de Profesores de Matemáticas) con una gran difusión entre el profesorado.

En cada sede hay una distribución diferente de sesiones, pero como ejemplo, en la Tabla 1 mostramos la planificación de sesiones de Andalucía Oriental para el curso 2019/2020 para mostrar la variedad de temáticas tratadas:

Tabla 1. Sesiones de Andalucía Oriental para el curso 2019/2020.

Fecha	Primero	Segundo	Veteranos
	Campamento inaugural		
28/09	Números y calculadoras	Combinatoria: Triángulo de Pascal	
5/10	Resolución cooperativa de problemas	Geometría para entender el universo	Planificación de proyectos
19/10	Divisibilidad y primos	Actividades en una trama	
26/10	Estrategias y lógica	Criptografía	
9/11	Sólidos platónicos	Invariantes	Astronomía de posición
23/11	Programación matemática	Teselaciones en el espacio	
30/11	Geometría del triángulo	Escape room	
14/12	Matemáticas al sprint // Campamento intermedio		
11/01	Matemáticas y cocina	Números	A leer matemáticas
18/01	Grafos	Visualización	
25/01	Irracionales	Principio del palomar	

Fecha	Primero	Segundo	Veteranos
1/02	Juegos matemáticos	Aritmética modular	Geometría diferencial
15/02	Geometría con Geogebra	Programación	
22/02	Matemáticas en la vida cotidiana	Grafos 2	
14/03	Actividades en una trama	Visita matemática a la Alhambra	Economía
21/03	Estadística descriptiva	Mosaicos nazaríes con Geogebra	
28/03	Combinatoria	Simulación	
	Seminario nacional. Encuentro de profesores		
18/04	Sistemas de numeración	Cálculo simbólico	Redes
25/04	Juegos de probabilidad	Astronomía	
9/05	Puzzles topológicos	Policubos	Programacion avanzada
	Clausura		

En la comunicación compartiremos algunos de los ejemplos de las sesiones. A modo de ejemplo mostramos aquí algunas de las tareas propuestas en ESTALMAT Madrid.

EJEMPLOS DE TAREAS

Las sesiones que se hacen durante todo el curso académico constituyen la actividad presencial más importante para estimular el talento matemático de los alumnos que participan en el proyecto. En cada sesión profesores del proyecto dirigen a los estudiantes, a través de la resolución de problemas, para que desarrollen su capacidad creativa y el fortalecimiento de sus habilidades de razonamiento, a la vez que se les acerca a algunos de los retos aún por resolver. El trabajo de investigación para resolver los problemas planteados lo llevan a cabo los alumnos en grupos. La discusión de las ideas desarrolladas en cada grupo está guiada por los profesores del proyecto y los resultados obtenidos se revisan por estos. La participación activa en estas actividades es esencial para conseguir los objetivos del proyecto (Ramírez y Flores, 2016).

Sesión de Primero: Números Poligonales que son una caja de sorpresas con mucha historia

Mediante una serie de ejercicios se trata de conocer diferentes números poligonales; triangulares, cuadrado, pentagonales, hexagonales y algunas de las relaciones que hay entre ellos. La actividad está enfocada de manera que con un lenguaje adecuado pueda visualizarse el problema. Mediante la semejanza (a medida que se va adquiriendo cierta experiencia en la resolución de problemas, es frecuente, ante una nueva situación, encontrar semejanza con otras ya resueltas con anterioridad), la analogía, la generalización conocemos uno de los ejemplos más bonitos de la utilización de modelos geométricos para abordar problemas de la teoría de números. Por ejemplo, en esta sesión abordamos problemas como el siguiente (Figura 2): Halla una relación de recurrencia de números poligonales y utilízala para expresar el n-ésimo número poligonal como suma de ciertos enteros. ¿Sabrías dar una fórmula sencilla para T(n)? ¿Y para C(n)?

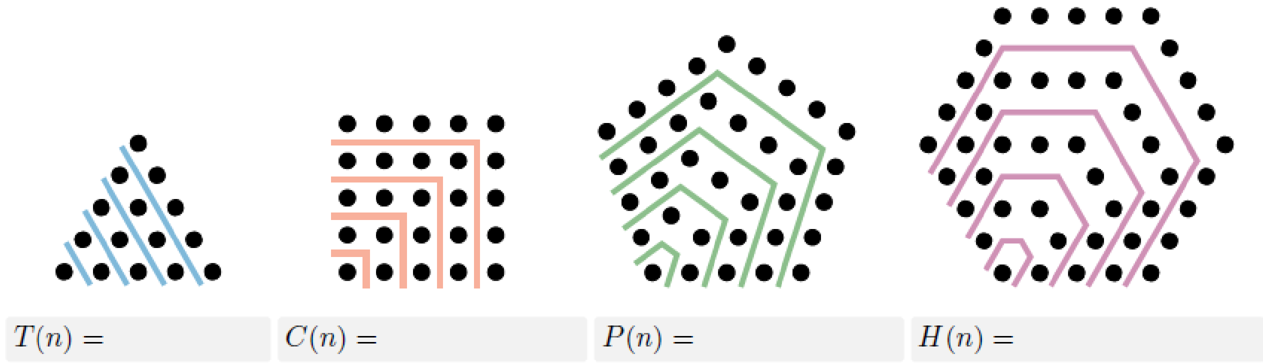


Figura 2. Ejemplo de tarea sobre números poligonales.

Sesión de Segundo: Medir con enteros, los secretos que esconden

Se trata de ver qué podemos medir y qué no con dos números enteros. Pero además se trata de avanzar en el lenguaje matemático: qué es una conjetura, qué es una demostración etc.

Es muy interesante ver como el enunciado de un problema puede ser muy complicado, pero se puede descomponer el problema en otros más sencillos y después recomponer la solución. Por ejemplo, tras trabajar un problema de una oficina de correos que sólo puede franquear sellos de 3 y 5 Euros, se investiga el siguiente teorema: *Todo número mayor o igual que 8 se puede escribir de la forma 3a+5b, donde a y b son enteros no negativos.*

Posteriormente se plantea la generalización del problema y nos tropezamos con que todavía no se conoce la solución.

Sesión de Veteranos/Egresados: Regla y compás (Geogebra), un paseo por lo construible y lo no construible

A partir de la regla y el compás que son los instrumentos que nos permiten construir las curvas más sencillas, que son las rectas y las circunferencias, vamos analizando las construcciones geométricas muy elementales que ya aparecen en los Elementos de Euclides y avanzamos hasta analizar qué polígonos son construibles. Es muy importante que los alumnos manipulen los objetos matemáticos para que ejerciten su creatividad y para que activen su propia actividad mental. Inicialmente se explora con Geogebra la construcción de dodecágonos, cuadrado y cualquier polígono que tenga el doble de lados que ellos. Más avanzada la sesión, se muestra una perspectiva más numérica y se indaga en Teoremas como: Si una ecuación cúbica con coeficientes racionales no tiene soluciones racionales, sus raíces reales no pueden construirse con regla y compás.

ALGUNAS PINCELADAS MÁS

Finalmente queremos cerrar la presentación nuevamente con las ideas de Miguel de Guzmán. El éxito a largo plazo de Estalmat se determinará si los participantes hacen “extraordinarias contribuciones al desarrollo cultural, científico y tecnológico del país". Durante numerosas convocatorias ESTALMAT ha recibido el respaldo de la FECYT como un proyecto consolidado para estimular las vocaciones científicas, particularmente estimulando el talento matemático de jóvenes de enseñanza secundaria. De los alumnos de las primeras ediciones algunos ya son doctores, otros trabajan en distintos campos profesionales y los de ediciones posteriores todavía están realizando estudios universitarios. Unas pocas pinceladas de las trayectorias de los alumnos de Estalmat pueden servir como muestra de los resultados. Muchos de nuestros alumnos han tenido medallas de oro/plata y bronce en la Olimpiada Matemática Española y en la Olimpiada Matemática

Iberoamericana. Algunos han tenido medalla de bronce/plata en la International Mathematical Olympiad (IMO). En la comunicación, le pondremos cara a algunos de los trayectorias y éxitos de nuestros estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Esta comunicación forma parte de los proyectos de la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT) de la convocatoria de ayudas para el fomento de la cultura científica, tecnológica y de la innovación con referencia FCT-18-13434 (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades) y FCT-19-14644 (Ministerio de Ciencia e Innovación).

REFERENCIAS

De Guzmán, M. (2002). Un programa para detectar y estimular el talento matemático precoz en la Comunidad de Madrid. *La Gaceta de la RSME, 5*(1), 131–144.

Hernández, E. (2009). Talento precoz en matemáticas: Modelos de detección y programas de estímulo. En A. Pérez y M. Sánchez (coords.), *Matemáticas para estimular el talento* (pp. 9-17). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Ramírez, R. y Flores, P. (2016). Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular. *SUMA. 83*, 33-41.

CREATIVIDAD EN ALUMNOS DE TALENTO MATEMÁTICO: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Creativity in math talented students: an exploratory study

Roldán, O. [a], Ferrando, I. [b]

[a] Dpto. de Análisis Matemático, Universitat de València (España). [b] Depto. De Didáctica de la Matemática, Universitat de València (España)

Resumen

En el presente trabajo se describe un estudio exploratorio en el que se pretende medir la creatividad en relación con el talento matemático. Para ello, se han seleccionado dos muestras de alumnos: una formada por estudiantes de entre 15 y 17 años participantes en el programa ESTALMAT (dirigido a estudiantes con talento matemático), y la otra formada por alumnos del máster, con una sólida formación matemática. El estudio incluye el diseño de un test de cuatro problemas de matemáticas que son tareas de resolución múltiple. El objetivo es analizar, en base a una muestra pequeña, la existencia de relación entre flexibilidad matemática, creatividad y talento, aunque, dadas las condiciones del experimento y el tamaño reducido de la muestra, los resultados son meramente orientativos.

Palabras clave: *talento matemático, flexibilidad, creatividad, tareas de resolución múltiple*

Abstract

In this project, an exploratory study is carried out in which creativity is measured in relation to mathematical talent. For this purpose, two samples of students have been selected: one formed by students between 15 and 17 years old participating in the ESTALMAT programme (aimed at students with mathematical talent), and the other formed by students of the master's degree, with a solid mathematical background. The study includes the design of a test of 4 mathematical problems that are multiple resolution tasks. The aim is to analyse, on the basis of a small sample, the existence of a relationship between mathematical flexibility, creativity and talent, although, given the conditions of the experiment and the small size of the sample, the results are merely indicative.

Keywords: *mathematical giftedness, flexibility, creativity, multiple-solution tasks*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

En los últimos años hay un interés creciente centrado en la problemática de detectar y atender a los alumnos superdotados y de altas capacidades matemáticas. En artículo 57 la LOMCE se incluye a los alumnos de altas capacidades intelectuales dentro del alumnado con necesidad específica de apoyo educativo, y en el artículo 58 se indica que hay que identificar y valorar cuanto antes cualquier caso de alumno de altas capacidades y adoptar el plan de actuación pertinente en cada caso para que los alumnos alcancen su máximo desarrollo personal. Sin embargo, el problema con los alumnos de altas capacidades es que muchas veces no se les identifica, o se les identifica, pero no se les proporciona una formación adaptada a su propio nivel.

Roldán, O. y Ferrando, I. (2021). Creatividad en alumnos de talento matemático: un estudio exploratorio. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 129-136). Logroño: Universidad de La Rioja.

Como indican Jaime y Gutiérrez (2014), a menudo el problema surge porque a los profesores no se les ha formado para atender al alumnado con altas capacidades, y no disponen de materiales específicos con los que atender las necesidades de dichos alumnos, lo cual hace que alumnos capaces y con ganas de aprender, se vean continuamente frustrados a causa de un currículo oficial en el que se considera al alumnado como un grupo homogéneo.

Conviene distinguir a un estudiante superdotado de un estudiante de alta capacidad matemática, que presenta un talento excepcional en matemáticas, pero no tiene por qué destacar en el resto de ramas. Jaime y Gutiérrez (2014) exponen una extensa lista de características que suelen presentar los alumnos de altas capacidades matemáticas, entre las que podemos destacar las siguientes: formular preguntas más allá de la tarea, flexibilidad, originalidad, reconocimiento de patrones y relaciones, estrategias eficientes, simplificación de procesos, rapidez para aprender y resolver problemas, generalización y transferencia. En particular, destaca su rapidez y su originalidad a la hora de resolver problemas.

Así, el objetivo de este trabajo es identificar, en base a un estudio exploratorio, la existencia de relación entre la alta capacidad matemática y la creatividad a la hora de enfrentarse a una secuencia de tareas de resolución múltiple en el sentido de Leikin (2011). El presente estudio es, en cierta medida, una adaptación a pequeña escala en el contexto español de los trabajos de Leikin y Lev (2007) y Leikin (2013).

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Características de los estudiantes de altas capacidades

Uno de los primeros referentes en relación a la caracterización de los estudiantes con altas capacidades matemáticas es el trabajo de Shapiro (1965) que apunta que, en dichos alumnos, el desarrollo de la generalización de resultados tras el proceso de resolución de un problema matemático se da a edades tempranas en este tipo de estudiantes. Davydov (1990) añade que la generalización es inseparable de las operaciones con lo abstracto y Krutetskii (1976), en base a un estudio que pretendía analizar y comparar la habilidad de generalizar en estudiantes tanto “normales” como talentosos, caracterizó tres tipos de razonamiento matemático en los alumnos cuyas características se resumen a continuación basándonos en la descripción de Callejo (1994). El tipo analítico, caracterizado por un predominio de la componente lógico-verbal y una componente visual-pictórica débil; este tipo de alumnos suele intentar enfrentarse a problemas de forma analítica incluso si el contexto sugiere plantearlos geométricamente. El tipo geométrico, caracterizado por una componente visual-pictórica más desarrollada que la lógico-verbal; este tipo de alumnos suele interpretar todo visualmente e intenta trabajar en base imágenes. El tipo armónico, capaz de usar tanto esquemas visuales como fórmulas abstractas y pasar de un modelo a otro; generalmente, a los alumnos de altas capacidades matemáticas se les asocia este tipo de razonamiento.

En las últimas décadas se han hecho más estudios con el fin de verificar y analizar la relación que existe entre el talento matemático y ciertas características como son la habilidad de resolver problemas. Sriraman (2003) hizo un estudio que verifica que hay una relación entre el talento matemático, la habilidad en la resolución de problemas, y la habilidad para generalizar. Mann (2006) incide en que a menudo se tiende a clasificar a los alumnos en base a su expediente cuando en realidad esto no siempre implica que el alumno tenga altas capacidades, y nombra la creatividad como un componente esencial en las matemáticas.

El proyecto ESTALMAT CV

Una vez establecidas las características de los alumnos de talento, conviene preguntarse qué acciones se pueden tomar para tratar adecuadamente a los alumnos con altas capacidades matemáticas. Jaime y Gutiérrez (2014) detallan las posibles acciones a tomar distinguiendo entre aquellas que pueden o no desarrollarse en el ámbito escolar, el proyecto ESTALMAT encaja en la segunda categoría. Se trata de un proyecto iniciado en Madrid en 1998, gracias a Miguel de Guzmán, apoyado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales véase De Guzmán (s. f.). Así, ESTALMAT selecciona a cientos de estudiantes españoles de unos 12 años en base a cómo de creativos son resolviendo problemas, y se les entrena extraescolarmente en matemáticas no curriculares para potenciar su talento. En la Comunitat Valenciana, el proyecto se estableció en 2007 gracias a Rafael Crespo y su éxito es indiscutible: el número de participantes a la prueba de selección crece año tras año. Miralles (2008) describe el inicio de ESTALMAT en la Comunitat Valenciana, explicando el proceso de selección y el diseño del programa en su primera edición, que fue durante el curso 2007-2008.

Las tareas de resolución múltiple como herramienta para medir la creatividad

Según Leikin y Lev (2007), es comúnmente aceptado que relacionar ideas matemáticas y entender cómo se puede abordar problemas de diferentes formas es un elemento esencial en el desarrollo del razonamiento matemático. En efecto, Polya (1945) incide en que resolver problemas de múltiples formas caracteriza al matemático con experiencia, porque requiere mucho conocimiento matemático, y Krutetskii (1976) afirma que los problemas con múltiples resoluciones permiten estudiar la flexibilidad del pensamiento matemático individual, al permitir investigar los cambios que se hacen de una operación mental a otra.

Una tarea de solución múltiple (denominada MST, acrónimo en inglés de Multiple Solution Task) es, según la definición de Leikin (2011), una tarea en la cual se pide explícitamente resolver un problema de matemáticas de diferentes formas. Dos soluciones se consideran diferentes si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

1. Se basan en representaciones diferentes de algunos conceptos matemáticos involucrados en la tarea.
2. Se basan en propiedades (definiciones o teoremas) diferentes de objetos matemáticos de un mismo campo en particular.
3. Se basan en propiedades diferentes de un objeto matemático en campos distintos.

Leikin y Lev (2007) y Leikin (2013) proponen el uso de las MST para evaluar la creatividad de los estudiantes; sin embargo, para poder analizar la calidad de una solución, es necesario poder incluirla dentro de lo que estos autores denominan “espacios expertos de soluciones”, que incluyen tanto las resoluciones convencionales sobre contenidos del currículo, como las no convencionales, no introducidas en el currículo en general. Así, para analizar la calidad de una resolución y poder evaluar la creatividad, Leikin (2013) propone analizar cuatro aspectos:

- *Fluidez*: se refiere a la continuidad de ideas, flujo de asociaciones y uso de conocimiento básico y universal.
- *Flexibilidad*: está asociada a los cambios de ideas, a la capacidad de afrontar problemas de múltiples formas y obtener múltiples soluciones.
- *Originalidad*: se caracteriza por una forma única de pensar y de crear productos de actividad mental únicos. Es el principal componente de la creatividad.
- *Elaboración*: es la capacidad de describir, explicar y generalizar ideas.

Así, en base a un sistema de puntuaciones que se comentará en el siguiente apartado, Leikin y Lev (2007) y Leikin (2013) analizan las resoluciones de una serie de MST con el objeto de tratar de medir la creatividad de los estudiantes de altas capacidades matemáticas. En este estudio se adaptará esta idea para comparar la creatividad de estudiantes de talento matemático con matemáticos expertos. En la siguiente sección se describe la metodología del trabajo.

METODOLOGÍA

El objetivo de este estudio es adaptar, a pequeña escala, la experiencia descrita por Leikin (2013), para ello se ha diseñado una secuencia de 4 problemas que se ajustan a lo que se denominan MST, se ha realizado una selección de participantes en el estudio, se ha implementado la experiencia y, por último, se han analizado las resoluciones. En los siguientes apartados se presentan los detalles de estos cuatro aspectos metodológicos.

Secuencia de tareas MST

Para la elección de los problemas, se han traducido los enunciados de las MST que Leikin describe cuidadosamente en Leikin (2011) y, además, se ha añadido un problema propuesto por uno de los autores para la Olimpiada Matemática de Educación Secundaria organizada por la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana (SEMCV). Se pretende así obtener una secuencia de tareas en la cual se tengan bien determinados los espacios de soluciones y que sean adecuadas para estudiantes de últimos cursos de educación secundaria.

A continuación, se presentan los cuatro problemas de la secuencia. Las restricciones de espacio impiden dar los detalles precisos de las resoluciones, pero todas ellas se encuentran en los anexos del Trabajo Fin de Máster de Óscar Roldán[1].

- *Problema 1*: Probar que, en cualquier triángulo rectángulo, la mediana que une el vértice del ángulo recto con el punto medio de la hipotenusa, mide igual que media hipotenusa.
- *Problema 2*: Si a y b son dos números que suman 1, ¿qué relación hay entre a^2+b y b^2+a?
- *Problema 3*: De todos los rectángulos con un mismo perímetro, ¿cuál es el que tiene la diagonal más pequeña?
- *Problema 4*: En un triángulo rectángulo, los catetos miden 5 y 12. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia inscrita?

Si bien el presente estudio está realizado a pequeña escala y tiene un carácter exploratorio, su reducido tamaño permite analizar con mucho nivel de detalle una gran cantidad de factores: cantidad y orden de sus soluciones, cuál dan en primer lugar, o los valores de creatividad calculados según la fórmula que propone Leikin (2013). Es por ello que se ha limitado a cuatro el número de problemas propuestos, ya que tampoco se pretendía exigir un tiempo excesivo a los participantes en el estudio, cuyas características se describen en el siguiente apartado.

Elección de participantes

El objetivo del trabajo es identificar las características de los estudiantes de talento matemático en relación a estudiantes con una sólida formación matemática, así, se han hecho dos grupos diferenciados de participantes, para poder analizar por separado las distintas características de cada grupo, y poder establecer comparaciones posteriores. Todos los participantes han decidido acceder de forma voluntaria a hacer la experiencia y la elección de la muestra es intencional y fundamentada en unos criterios que se detallan a continuación para cada grupo.

El primer grupo está compuesto por cinco estudiantes del Máster Universitario en Profesor/a de Secundaria (especialidad Matemáticas) de la Universitat de València. Se trata de personas que

[1] El TFM está accesible en el repositorio Roderic a través del siguiente enlace: http://roderic.uv.es/handle/10550/75764

han finalizado con éxito sus estudios en los Grados de Matemáticas o Física, es decir, se adaptan al perfil de personas que tienen una formación matemática sólida. Tres de ellos tienen 22 años, los otros dos, 23 y 24. Ninguno de ellos ha participado en programas de formación complementaria por altas capacidades ni se les ha formado en resolución de problemas como tal hasta ahora. El criterio para elegirlos ha sido la calificación obtenida en la materia dedicada a resolución de problemas del máster: se ha elegido a aquellos que han sacado las mejores notas.

El segundo grupo está formado por seis alumnos que participan en el proyecto ESTALMAT de la Comunitat Valenciana y que, actualmente, forman parte del grupo de veteranos del programa. Se trata de alumnos muy despiertos, que participan de forma activa en todo tipo de olimpiadas matemáticas y competiciones. Dos de los alumnos, de 15 y 16 años respectivamente, cursaban 4º de ESO en la fecha de realización de la experiencia, y los otros 4 (tres de 16 años y el cuarto de 17) cursaban 1º de Bachiller.

Diseño de la experiencia

Dado que no fue posible, por cuestiones logísticas, agrupar en un mismo lugar al mismo tiempo a todos los participantes, se establecieron unas instrucciones muy claras que todos los participantes se comprometieron a cumplir:

- La experiencia se debe realizar en un tiempo total de 2 horas, no dediques más de 30 minutos a cada problema.
- No se puede consultar apuntes, a otras personas, internet, ni otros durante la prueba, tampoco recibir ningún tipo de pista o ayuda.
- Resuelve los siguientes 4 problemas por tantos caminos distintos como se te ocurran.
- Se permite el uso de calculadora y de herramientas de dibujo.

Si bien los perfiles de los voluntarios indican que, dado que estaban comprometidos con la tarea y con el presente estudio, seguirían las instrucciones acordadas, una de las limitaciones del presente trabajo es que no hay forma de comprobar que los participantes realmente cumplieran las normas. Para establecer el tiempo límite máximo de dos horas se comprobó que este tiempo era suficiente para hallar más de una resolución para cada uno de los cuatro problemas.

Análisis de las resoluciones

Primero se ha establecido una codificación para poder trabajar con los datos de forma eficiente:

- A los alumnos se les asignará la letra A, seguida de una letra (M si es del Máster y E si es de ESTALMAT) y un número del 1 al 11 (AM1, AM2, …), de forma que los primeros 5 se corresponden con los alumnos del máster y los últimos 6 se corresponden con los estudiantes del proyecto ESTALMAT.
- A los problemas se les va a asignar la letra P seguida del número del problema, numerados en el orden en el que fueron presentados en el trabajo (P1, P2, P3 y P4).
- Para cada problema se va a establecer un espacio de soluciones codificadas de la siguiente forma: S, seguida del número de problema, y una letra, en orden alfabético, de forma que las soluciones del problema 1, por ejemplo, serán S1a, S1b, S1c, y así sucesivamente. Además, en este espacio de soluciones las posibles soluciones se agrupan en una misma categoría cuando incluyen procedimientos muy similares.

Se analizarán las aportaciones de cada participante de forma individual, y luego se identificarán posibles semejanzas y diferencias entre miembros de un mismo grupo o entre miembros de grupos distintos en base a los siguientes aspectos:

- Fluidez, flexibilidad, originalidad y creatividad en términos de Leikin (2013).
- Primera solución dada. Normalmente, al resolver un problema con tiempo limitado, la primera solución que se escribe es distintiva, puede ser que sea la primera que viene a la mente o puede que al resolutor se le ocurran varias y empiece por la que le resulta más corta o que le da más seguridad. Esto puede dar una idea de cómo piensan los participantes y de si están más cómodos razonando analíticamente o geométricamente.

También se analizarán otros aspectos de las resoluciones de cada participante:

- Grado de formalidad con el que presentan sus resoluciones (Alto: dominan las matemáticas formales, definen todo lo que van a usar, asignan nombres a todo lo que necesita tenerlo, escriben los detalles, las referencias al dibujo son claras, argumentan bien sus deducciones; Medio: son menos formales escribiendo, se conforman con el dibujo a la hora de definir cosas, razonan deductivamente, obvian algunos detalles; Bajo: definen las cosas en referencia al dibujo o no las definen, son poco formales escribiendo y razonando, se dejan pasos por hacer).
- Grado de eficiencia: entendiendo la eficiencia como el uso económico del tiempo y el espacio de trabajo (buscar soluciones cortas, escribir sólo las cosas que sean necesarias, ocupar poco espacio a la hora de expresar sus ideas).
- El estilo de razonamiento de su primera solución, es decir, cómo han abordado de primeras el problema (geométricamente, algebraicamente, analíticamente…).
- El estilo de razonamiento en general en el problema, no refiriéndonos a su primera solución esta vez, sino al global de sus soluciones.

En cada problema se asignará una puntuación a cada participante, el sistema de puntuación se basará en el descrito en Leikin (2013):

- *Fluidez*: simplemente se cuenta la cantidad de resoluciones correctas.
- *Flexibilidad*: se suman 10 puntos por cada solución que pertenezca a grupos distintos de soluciones dentro del espacio de soluciones. Se suma 1 punto por cada solución que pertenezca a un grupo de soluciones al que ya pertenecía una de las soluciones dadas. Por último, se suman 0,1 puntos por cada solución que es casi idéntica a otra solución ya dada (por ejemplo, resolver un sistema de ecuaciones por igualación igualando las x, y resolverlo por igualación igualando las y). Una puntuación de 0,1 refleja la falta de razonamiento crítico del estudiante (esencial para la flexibilidad) y la inhabilidad para reconocer que dos soluciones proporcionadas son idénticas. Esta forma de puntuar la flexibilidad nos permite saber, viendo el resultado final, cuántas soluciones de cada tipo se han dado (siempre y cuando no se haya llegado a 10 soluciones de un mismo tipo, claro; si se llegase a 10 soluciones de un tipo, se puede reformular fácilmente la puntuación a una escala 100-1-0,01): por ejemplo, si un alumno obtiene un valor de 31,2 de flexibilidad, eso nos dice que hay 3 soluciones de grupos distintos, 1 solución de un grupo ya mencionado, y 2 soluciones casi idénticas a soluciones ya dadas.
- *Originalidad*: de nuevo, se va a usar un sistema decimal bastante similar al de la flexibilidad. Se sumarán 10 puntos por soluciones perspicaces, que se salen por completo de lo convencional. Se sumará 1 punto por soluciones poco convencionales, basadas en modelos o en estrategias aprendidas en otros contextos. Por último, se sumarán 0,1 puntos por cada solución algorítmica, la que te han enseñado o has aprendido específicamente para resolver ese tipo de problemas.
- *Creatividad*: la creatividad de cada problema se define como el producto de su flexibilidad y

su originalidad, y la creatividad total es la suma de los valores de creatividad de cada solución. Esto se basa en que para ser creativo es importante ser flexible y ser original. Un número alto de creatividad dice que hay buena flexibilidad y buena originalidad; un número bajo se dice que ambas flaquean; y un número intermedio significa que falta algo.

RESULTADOS

Se han estudiado exhaustivamente todos los factores descritos antes para cada uno de los participantes en cada problema, y se han juntado los datos de toda la prueba como un global, simplemente sumando los valores obtenidos en cada problema. Los resultados deben entenderse como meramente orientativos, dadas las características de la prueba. Los valores de fluidez de los 11 alumnos en orden (los cinco primeros corresponden a los estudiantes del máster –AM1 hasta AM5– y los siguientes a los del proyecto ESTALMAT –AE6 hasta AE11–) fueron 5, 7, 10, 6, 7, 9, 3, 16, 3, 14 y 5. Teniendo en cuenta el espacio de soluciones de cada problema, y en base a unos criterios lo más objetivos posible, los valores de flexibilidad en orden fueron 41, 61, 72,1, 51, 43, 70,2, 30, 115, 21, 122 y 41, y los de originalidad fueron, respectivamente, 3,2, 11,5, 12,7, 2,4, 11,5, 21,6, 10,2, 35,8, 0,3, 37,4 y 31,1. En cuanto a la creatividad, para cada problema se obtuvo como el producto de la flexibilidad y la originalidad, y luego se sumó la de los 4 problemas, obteniendo las siguientes puntuaciones respectivas: 23, 114,1, 124,21, 23,1, 104,2, 214,02, 102, 337,3, 2,1, 356 y 221.

También se han analizado ciertos aspectos cualitativos ya mencionados antes. En general, se ha notado que los estudiantes que escribían más formal eran los del máster y el alumno AE10. En cuanto a la eficiencia, en ambos grupos ha habido resolutores muy eficientes (AM1, AM3, AM4, AE6, AE8, AE10) y gente menos eficiente. Y por lo que respecta al tipo de razonamiento, en ambos grupos ha habido estudiantes que parecían combinar razonamientos analíticos y geométricos en igual proporción (AM3, AM4, AE8, AE9, AE11) y otros que parecían más inclinados a abordar los problemas de una forma analítico-algebraica.

Conclusiones

Este estudio exploratorio pone de manifiesto, pese al reducido número de estudiantes involucrados, una serie de cosas que ya se recogen en los estudios desarrollados por investigadores del área. En primer lugar, tener una formación sólida en matemáticas no implica ser experto en la resolución de problemas (de hecho, ha habido estudiantes de máster que no han conseguido resolver alguno de los problemas en el tiempo dado). Además, los estudiantes del máster solían intentar soluciones algebraicas desde un principio, mientras que los de ESTALMAT se las dejaban como último recurso (esto podría deberse a que los estudios superiores se suelen centrar en ramas más teóricas y muchas veces dejan de lado áreas como la geometría euclídea). También se aprecia que los estudiantes de máster eran generalmente más formales escribiendo, aunque en los alumnos ESTALMAT se aprecia un grado de formalismo elevado teniendo en cuenta los estudios cursados en el momento de realizar la prueba.

En cuanto a las características medidas en el estudio de Leikin (2013), en todos los aspectos evaluados parece que los estudiantes de talento, por lo general, han predominado en esta prueba. De hecho, las 4 puntuaciones más altas de creatividad han pertenecido a estudiantes de ESTALMAT, pero la más baja también, apoyando la tesis de que el talento matemático no es lo único que cuenta, hay que complementarlo con una buena formación. También se pone de manifiesto que no por ser de un curso superior se te debe dar mejor resolver problemas (de hecho, el alumno AE10, el que ha obtenido la mayor puntuación, es el más joven de los 11 participantes). Por último, se aprecia que los valores obtenidos por los alumnos del máster eran más uniformes, con desviaciones típicas notablemente menores, lo cual tiene sentido teniendo en cuenta que la formación matemática es estándar para todos mientras que el talento es algo innato, distinto en cada individuo, aunque también puede tratarse de una mera coincidencia dado el tamaño reducido de la muestra.

Así, la metodología inspirada por el trabajo de Leikin y Lev (2007) parece muy acertada, pues permite evaluar varios factores de muchos estudiantes a la vez de una forma rigurosa y objetiva, y en base a los resultados de su trabajo se evidencia una fuerte correlación entre tener talento matemático y obtener valores altos de creatividad. En el presente estudio, mucho más pequeño en cuanto al tamaño de la muestra y con determinadas limitaciones previamente comentadas, se han podido confirmar la hipótesis de partida: la relación entre talento matemático y creatividad.

AGRADECIMIENTOS

Los autores de este texto desean agradecer a la profesora Roza Leikin por permitirnos poner en práctica sus métodos para nuestro experimento y a los 11 participantes voluntarios en la misma. El primer autor está siendo financiado por la beca FPU17/02023 y el proyecto MINECO y FEDER MTM2017-83262-C2-1-P. La segunda autora agradece la ayuda del proyecto de Investigación del Plan Nacional de I+D+I, EDU2017-84377-R financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad / Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

REFERENCIAS

Callejo, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. España: Narcea.

Davydov, V. V. (1990). *Type of generalization in instruction: soviet studies in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

De Guzmán, M. (s.f.). El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas. Disponible en http://elclubdelamatematica.blogspot.com.es/2010/06/talento-matematico.html.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Krutetskii, V. A. (Ed.) (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Leikin, R. (2011). Multiple-solution tasks: from a teacher education course to teacher practice. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *43*(6-7), 993-1006.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling*, *55*(4), 385-400.

Leikin, R. y Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 161-168). Seúl, Corea: PME.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, *30*(2), 236-260.

Miralles, A. (2008). La experiencia ESTALMAT en la Comunidad Valenciana. *Modelling in Science Education and Learning*, *1*(5), 39-44.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Shapiro, S. I. (1965). A study of pupil's individual characteristics in processing mathematical information. *Voprosy Psikhologii, 2*.

Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences of Four Gifted Students. *Journal of Secondary Gifted Education*, *14*(3), 151-165.

UN CURSO ONLINE DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS PARA LA ATENCIÓN AL ESTUDIANTADO CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA

An online course of mathematical competitions to gifted students

Rotger, L., Ribera, J.M.

Universidad de La Rioja (España)

Resumen

La resolución de problemas de matemáticas es uno de los contenidos de más interés para el estudiantado con altas capacidades matemáticas. En esta propuesta se presenta las características del Curso Online de Olimpiadas Matemáticas creado por un equipo docente interuniversitario con la finalidad de disponer de un material complementario en la formación en resolución de problemas. Se incluye, además, recomendaciones tanto para el diseño de vídeos educativos como para la elaboración de secuencias de vídeos. Por último, se facilita el acceso a todo el material generado y se pone a disponibilidad de toda la comunidad educativa.

Palabras clave: *talento matemático, resolución de problemas, estrategias de resolución, vídeos educativos*

Abstract

Math problem solving is one of the most interesting contents for mathematically talented students. In this proposal, we detail the characteristics of the Mathematical Olympics Online Course created by an interuniversity team to have complementary material in problem-solving training. It is also included recommendations both for the design of educational videos and for the production of video sequences. Finally, access to all the material generated is facilitated and made available to the entire educational community.

Keywords: *mathematical talent, problem solving, resolution strategies, educational videos*

INTRODUCCIÓN

La deslocalización del estudiantado con alta capacidad matemática (ACM) es uno de los factores fundamentales para la búsqueda de alternativas que favorezcan su aprendizaje autónomo de matemáticas. Su deslocalización dificulta el acceso a contenido extracurricular de matemáticas que pueda ser de su interés. Este estudiantado, en particular, presenta una sensibilidad más desarrollada para la resolución de problemas, cálculo o geometría (Gutiérrez y Jaime, 2013). Así mismo, la resolución de problemas toma un papel relevante en la investigación del estudiantado con ACM, siendo usada tanto para la caracterización del talento como para la intervención (Davis, Rimm y Siegle, 2014).

Más allá de los programas de atención al talento matemático, como Estalmat, existe un gran número de competiciones matemáticas en el que este estudiantado puede participar activamente entre las que destacan internacionalmente la International Mathematical Olympiad

Rotger, L. y Ribera, J. M. (2021). Un curso online de olimpiadas matemáticas para la atención al estudiantado con alta capacidad matemática. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 137-142). Logroño: Universidad de La Rioja.

(https://www.imo-official.org/) y la prueba Canguro (http://www.aksf.org/). En la preparación para dichas competiciones se pueden utilizar diversas plataformas como puede ser la base de datos NRICH Project de la Universidad de Cambridge (http://nrich.maths.org), Art of Problem Solving (https://artofproblemsolving.com/) o Brilliant (https://brilliant.org/). Además, existe un amplio número de textos dedicados al perfeccionamiento de las destrezas de resolución de problemas como Lehoczky y Rusczyk (1994), Rusczyk y Lehoczky (1994), Engel (1998), Andreescu y Gelca (2008), Larson (2012) y Schoenfeld (2014). Sin embargo, el contenido en vídeo para la formación en resolución de problemas de matemáticas es muy reducido.

Paralelamente, la disponibilidad de dispositivos tecnológicos entre la sociedad aporta un canal de comunicación con el estudiantado que puede ser aprovechado para compartir contenido educativo, como puede ser el vídeo. Los vídeos educativos son uno de los recursos más utilizados por los estudiantes para complementar el material de las clases de matemáticas que están cursando (Howard, Meehan y Parnell, 2017). Por ello, se hace patente la necesidad de disponer de materiales audiovisuales evaluados por especialistas y diseñados con el objetivo de atender a la curiosidad que el estudiantado con ACM muestra.

Por todo esto, el objetivo principal de esta comunicación es la presentación de las características del Curso Online de Olimpiadas Matemáticas (COOM) de la Universidad de La Rioja disponible en una plataforma abierta para el perfeccionamiento de las destrezas de resolución de problemas entre el estudiantado con ACM.

CURSO ONLINE DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

Este curso está formado por una colección de aproximadamente veinte módulos correspondientes a diferentes destrezas de resolución de problemas de matemáticas. Cada uno de estos módulos ha sido diseñado por un docente participante del proyecto; entre los que se encuentra profesorado de secundaria, universidad e incluso estudiantado de grado que presenta ACM y que quiere compartir su experiencia.

Diseño de los módulos del COOM

Cada uno de los módulos confeccionados en el proyecto está formado por una secuencia de más de cuatro vídeos y un material complementario a la visualización de los vídeos.

Aspectos técnicos

Desde un punto de vista técnico (Pérez-Navío, Rodríguez y García, 2015), se recomienda que los vídeos educativos tengan duraciones de entre cinco y diez minutos, no superando esta última duración en ningún caso. Así mismo, se considera necesario que los vídeos formativos incluyan tanto elementos gráficos como elementos narrativos que pueden ser introducidos tanto en la grabación como en el momento de la edición. Debido a las limitaciones de tiempo, se recomienda realizar tanto una introducción con los puntos a tratar en el vídeo como un breve sumario final donde se recojan todas las ideas tratadas en el vídeo y la relación con otros vídeos de la secuencia.

Además de las recomendaciones anteriores, se debe cuidar tanto la calidad de la visualización como la del audio. De esta forma, se han usado diferentes metodologías de grabación que permitieran eliminar las posibles problemáticas técnicas. Así, en los vídeos del COOM se pueden encontrar unos pocos vídeos grabados en un aula habitual, donde se producían ocultaciones, al interponerse el docente entre la cámara y la pizarra, y alteraciones de audio producidas por no desarrollar el discurso directamente hacia el micrófono. Esto ha provocado la necesidad de modificar el proceso de grabación mediante la construcción de una pizarra de luz hecha por el proyecto (Ribera, Sota y Rotger, 2020). Con la pizarra de luz se ha podido resolver la problemática presentada anteriormente, a la vez que facilita la labor de grabación del docente. Otras alternativas de grabación usadas ha sido el aprovechamiento de programas de captura de pantalla y el uso de pizarras blancas digitales que registran la interacción del docente con ellas. Estas últimas grabaciones, además, se pueden realizar con los equipos informáticos personales sin la necesidad de trasladarse a las aulas de grabación.

Aspectos metodológicos

Por otro lado, cada una de las secuencias de vídeos diseñados sigue la estructura metodológica propuesta por Rotger y Ribera (2019) y que se especifica de la siguiente forma:

1. *Introducción*: Se presenta una motivación para el uso de la destreza de resolución de problemas o un ejemplo de aplicación de cierto contenido matemático en la resolución de problemas.
2. *Elementos teóricos*: Se detalla la estrategia de resolución de problemas desde un punto de vista formal, tratando de aportar ejemplos sencillos que favorezcan la comprensión de esta.
3. *Ejemplos de aplicación*: Se aplica la destreza presentada en ejercicios de resolución directa o casi directa y en problemas de olimpiadas matemáticas preuniversitaria de nivel local. En algunos casos se proponen problemas alternativos abiertos para facilitar el perfeccionamiento de la destreza.
4. *Aplicación en problemas olímpicos de matemáticas*: Se muestra el potencial de la destreza en la resolución de problemas de olimpiadas matemáticas preuniversitarias de nivel nacional o internacional. En algunas destrezas, este punto se encuentra en más de un clip de vídeo con la finalidad de mostrar diferentes aplicaciones de una misma destreza en problemas de diferente tipo.

El esquema presentado ha sido aplicado por los integrantes del proyecto de forma variada tratando de adecuarlo a las destrezas y contenidos de resolución de problemas diferentes. Aunque inicialmente el curso estuviera formado por destrezas habituales de las competiciones matemáticas preuniversitarias como son el principio del palomar, el principio extremal, el principio de invarianza, la coloración, la inducción matemática, la aritmética modular, la potencia de un punto o los teoremas de Ceva; estas se han completado con otras secuencias de interés para la formación en resolución de problemas. Entre las secuencias, se encuentran contenidos formativos correspondientes a la matemática universitaria que pueden ser aplicados en la resolución de problemas (como la teoría de grafos o la variable compleja) y otras secuencias en las que se presentan consejos para la resolución de problemas en competiciones matemáticas basados en la experiencia de participantes recientes.

Además de las secuencias de video, se han generado otros materiales que favorecen el aprendizaje de las destrezas. Así, se han enlazado las secuencias de vídeo a un material teórico generado por el Seminario de problemas para alumnos de ESO y Bachillerato de la Universidad de La Rioja. Este material, en texto, sirve de apoyo para el estudiantado y puede ser consultado en la realización de los problemas propuestos en el COOM.

Por último, se ha completado todo el material formativo con dos instrumentos para la autoevaluación. Por un lado, se ha generado una colección de problemas abiertos en vídeo asociados a cada una de las destrezas que en los que poder aplicar los conocimientos obtenidos a partir de la visualización para la resolución de problemas en los que interviene la destreza presentada. Estos vídeos, a su vez, están acompañados de otros vídeos donde se presenta la solución detallada de los planteamientos, lo cual favorece el análisis de las soluciones propias por parte de los participantes. Por otro lado, se ha planteado una prueba de autoevaluación con corrección automática asociada a cada destreza grabada. En esta prueba, de tipo test, se han diseñado preguntas que atienden tanto al contenido grabado en los vídeos como a la aplicación particular de mismo en la resolución de problemas.

Caso práctico: Principio extremal

A modo de ilustración de la propuesta, se comparte la secuencia de problemas donde se aplica el principio extremal diseñada por la profesora Ana Navarro de la Universitat de València. Esta técnica de resolución de problemas se basa en examinar los objetos que maximizan o minimizan una función relacionada con la condición del problema con el objetivo de llegar a una contradicción. Entre los problemas propuestos se encuentran los siguientes:

1. *Problema de Introducción*: $n\sqrt{2}$ no es entero para cualquier entero positivo *n*.
2. *Problema de aplicación directa:* Sea S un conjunto finito de puntos en el plano, con la propiedad de que la recta determinada por dos puntos cualquiera del conjunto S pasa al menos por un tercer punto de S. Entonces, todos los puntos de S están alineados.
3. *Problema de competición matemática local:* Todas las calles de Valdemadera son de un único sentido. Cada par de casas están conectadas exactamente por un camino de sentido dirigido. Mostramos que existe una casa que se puede alcanzar desde cada casa directamente o, como mucho, vía otra vivienda.
4. *Problema de competición matemática internacional:* Considera un camino en el plano siguiendo las siguientes reglas. Dado un punto *(x, y)* nos podemos mover en un paso a uno de los cuatro puntos *(x, y + 2x), (x, y - 2x), (x + 2y, y), (x + 2y, y)* con la restricción que no podemos volver atrás un paso que acabamos de hacer. Probar que, si comenzamos en el punto $P = (1,\sqrt{2})$ no podemos volver a dicho punto.
5. *Otro problema de competición matemática internacional*: No existen cuatro enteros positivos *(x, y, z, u)* que cumplan la siguiente relación: $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$ (Figura 1).

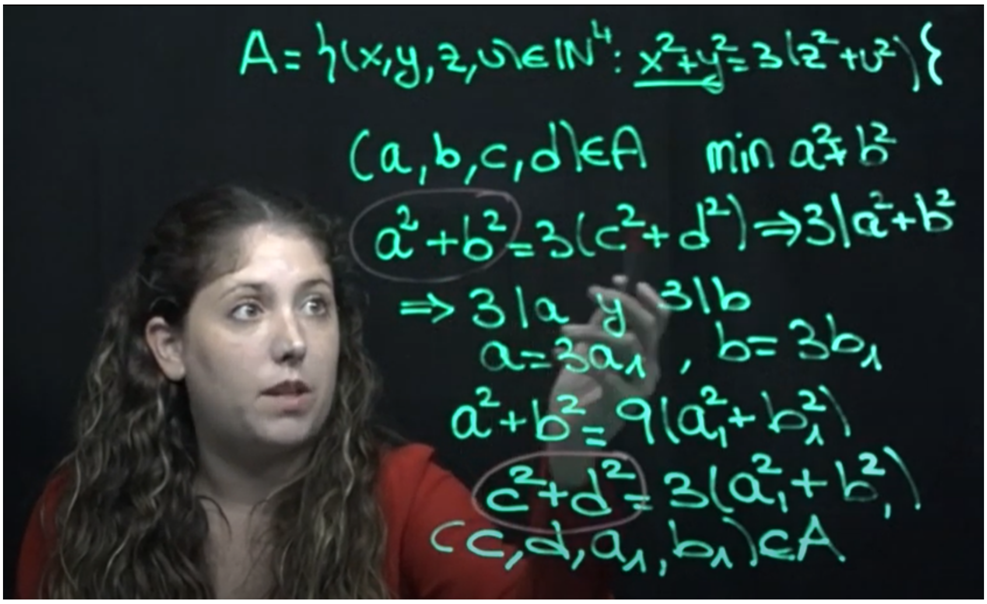


Figura 1. Ejemplo de resolución de problema de la secuencia sobre pizarra de luz.

De forma complementaria, en la plataforma donde se aloja el COOM se pueden encontrar otros problemas y una prueba para la autoevaluación de los conocimientos adquiridos en el aprendizaje de esta destreza.

CONCLUSIONES

Se ha generado un material en vídeo en español para la atención al estudiantado con ACM abierto y disponible para el perfeccionamiento de las destrezas en resolución de problemas. Este material está formado por una colección de secuencias (Figura 2) que aglutinan tanto destrezas de resolución de problemas como contenido matemático universitario. Está previsto que el material se siga ampliando en número de secuencias y en número de vídeos en cada secuencia.

- Técnicas Básicas de Resolución (Miguel Bastida)
- Conjugado de un número (Adrián Latorre)
- El principio del palomar (Víctor Lanchares)
- Geometría plana (Jesús Murillo)
- Problemas de coloración (Eva Primo)
- Principio Extremal (Ana Navarro)
- Principio de Inducción (Judit Mínguez)
- Aritmética Modular (Jorge Roldán)
- Aritmética Modular (Miguel Marañón)
- Series Numéricas (Daniel José Rodríguez)
- Recurrencias (José Manuel Gutiérrez)
- Potencia de un punto (Adrián Rodrigo)
- Teoremas de Ceva y Menelao (José Ignacio Extremiana)
- Teoría de Grafos (Patricia Pascual)
- Experiencia Olímpica OME (Alejandro Mahillo)

Figura 2. Listado de secuencias de vídeos completas en el COOM.

Este material ha sido evaluado por estudiantado con ACM del grado en matemáticas de la Universidad de La Rioja siguiendo la rúbrica generada en Ribera y Rotger (2020). Su evaluación ha permitido identificar los problemas de ocultamientos y de autocontenido que presentaban algunos vídeos. En lo que sigue, se pretende evaluar el uso del material y la utilidad para la enseñanza-aprendizaje en el estudiantado con ACM.

Debido a las condiciones especiales de alerta sanitaria vividas, el equipo docente del COOM, ha dejado disponible todo el material para toda la comunidad educativa. Este material se puede encontrar en la plataforma Moodle de la Universidad de La Rioja <https://urabierta.unirioja.es/>.

AGRADECIMIENTOS

Los contenidos presentados son parte del proyecto de investigación Modelos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas: análisis racional y empírico (EDU2017-84377-R, AEI/FEDER) y del proyecto Evaluación y puesta en marcha del Curso Online de Olimpiadas Matemáticas (EVACOOM) financiado por los proyectos de Innovación Docente de la Universidad de La Rioja.

REFERENCIAS

Andreescu, T. y Gelca, R. (2008). *Mathematical olympiad challenges*. Berlín: Birkhäuser.

Davis, G. A., Rimm, S. B. y Siegle, D. (2014). *Education of the gifted and talented* (6th ed.). Boston, MA: Pearson.

Engel, A. (1998). *Problem-solving strategies*. Berlín: Springer.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Howard, E., Meehan, M. y Parnell, A. (2017). Live lectures or online videos: students' resource choices in a first-year university mathematics module. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. DOI: 10.1080/0020739X.2017.1387943

Larson, L. (2012). *Problem-solving through problems*. Cham, Suiza: Springer.

Lehoczky, S. y Rusczyk, R. (1994). *The art of problem solving, vol. 1: the basics*. Alpine, CA: AoPS Incorporated.

Pérez-Navío, E., Rodríguez, J. y García, M. (2015). El uso de mini-videos en la práctica docente universitaria. *EDMETIC. Revista de Educación Mediática y TIC*, *4*(2), 51-70.

Ribera, J. M. y Rotger, L. (2020). *Herramientas para la evaluación técnica y didáctica de la creación de vídeos cortos de resolución de problemas de matemáticas*. Pendiente de publicación.

Ribera, J.M., Sota, J.M. y Rotger, L. (2020). Uso de una pizarra de luz para la creación de vídeos de resolución de problemas de matemáticas. Una aproximación «DIY». En A. I. Allueva y J. L. Alejandre (Ed.), *Prácticas docentes en los nuevos escenarios tecnológicos de aprendizaje* (pp. 161-168). Prensas de la Universidad de Zaragoza.

Rotger, L. y Ribera, J.M. (2019). Designing a video course. The case of the online course of mathematical olympiads. En L. Uden, D. Liberona, G. Sanchez y S. Rodríguez-González (Eds.), *Learning technology for education challenges 2019. Communications in computer and information science 1011*, (pp. 79-89). Cham, Suiza: Springer.

Rusczyk, R. y Lehoczky, S. (1994). *The art of problem solving, vol. 2: and beyond*. Alpine, CA: AoPS Incorporated.

Schoenfeld, A. (2014). *Mathematical problem solving*. Amsterdam: Elsevier.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD EN LAS OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

Analysis of probability problems in Mathematical Olympiads

Rubio-Chueca, J.M., Muñoz-Escolano, J.M., Beltrán-Pellicer, P.

Universidad de Zaragoza (España)

Resumen

En este trabajo se analiza la demanda cognitiva, lenguajes y procedimientos de las tareas matemáticas propuestas en los problemas sobre probabilidad en las pruebas individuales de la semifinal y final en la Olimpiada Matemática Aragonesa (1989-2019) y los problemas llevados a cabo en la prueba individual de la Olimpiada Matemática Nacional (1990-2019). Los resultados muestran que todas las tareas propuestas en las olimpiadas son de nivel alto según el modelo de demanda cognitiva, lo cual es adecuado como propuesta para estudiantes de alta capacidad matemática, con inclusión de tareas del nivel superior según ese mismo modelo, cuya resolución podría convertirse en un indicador de alta capacidad matemática, si bien no se he realizado este análisis en nuestro estudio. Por otro lado, evidencian la necesidad de proponer más problemas en estos concursos promoviendo el aprendizaje de la probabilidad en la Educación Secundaria.

Palabras clave: *olimpiada matemática, tarea matemática, demanda cognitiva, enfoque onto-semiótico, aprendizaje de la probabilidad*

Abstract

This paper analyses the cognitive demand of mathematical, languages and procedures tasks proposed in the problems on probability in the individual tests of both the semi-final and the final in the Aragonese Mathematical Olympiad (1989-2019) and the problems carried out in the individual test of the National Mathematical Olympiad (1990-2019). The results show that all the tasks proposed in the Olympics are of a high level according to the cognitive demand model, which is suitable as a proposal for students of high mathematical ability, including tasks of the higher level according to the same model, whose resolution could become an indicator of high mathematical ability, although this analysis was not carried out in our study. On the other hand, they show the need to propose more problems in these competitions promoting the learning of probability in Secondary Education

Keywords: *mathematical olympiad, mathematical tasks, cognitive demand, onto-semiotic approach, probability learning*

INTRODUCCIÓN

Jaime y Gutiérrez (2014) señalan cuatro tipos de acciones de apoyo extraescolar a los estudiantes con alta capacidad matemática que se realizan en la actualidad: acciones de tipo curricular, de tipo lúdico, de actividades mixtas y de resolución de problemas. Dentro de esta última categoría se ubican las competiciones matemáticas (Ortega, Berciano, y Pecharromán, 2018), donde las

Rubio-Chueca J. M., Muñoz-Escolano, J. M. y Beltrán-Pellicer, P. (2021). Análisis de los problemas de probabilidad en las olimpiadas matemáticas. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 143-150). Logroño: Universidad de La Rioja.

Olimpiadas matemáticas, organizadas por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, son un claro y exitoso ejemplo en España.

Este hecho no es solo propio del contexto español, puesto que las competiciones matemáticas son una actividad usualmente realizada por estudiantes con alta capacidad matemática de gran número de países. En un estudio con entrevistas con más de 230 estudiantes con altas capacidades, Olszewski-Kubilius y Lee (2004) señalan que estos concursos son una actividad extraescolar que caracteriza a los estudiantes de altas capacidades matemáticas, por encima de otras, tanto en áreas científicas como humanísticas.

Además, Jaime y Gutiérrez (2017, p. 83) apuntan que "los estudiantes con alta capacidad matemática se sienten con frecuencia solos en el contexto de sus clases ordinarias, porque ninguno de sus compañeros tiene su capacidad matemática ni su interés por resolver problemas difíciles". De esta manera, valoran positivamente el papel de las olimpiadas matemáticas, ya que la participación en estos concursos permite a los estudiantes dotados y talentosos obtener una imagen más realista de sus habilidades (Subotnik, Miserandino, y Olszewski-Kubilius, 1996).

Por otro lado, otro aspecto valioso de las olimpiadas es servir de banco de tareas y problemas como material complementario para alumnos de altas capacidades matemáticas (Toh, 2013).

Las olimpiadas u otros concursos matemáticos plantean diversas líneas de investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas, si bien nuestra búsqueda bibliográfica arroja pocas referencias en este sentido. Algunos trabajos se centran en los estudiantes y analizan cómo se comportan cuando resuelven algunas de las tareas de estos concursos (Gairín y Escolano, 2009; Guinjoan, Gutiérrez, y Fortuny, 2015), otros trabajos se centran el profesor y tratan de comprender el conocimiento que ponen en juego los evaluadores de olimpiadas matemáticas al analizar errores cometidos por estudiantes (Huitrado y Climent, 2014), mientras que otros estudian los recursos tecnológicos necesarios para la creación y diseño de materiales online para la formación y preparación de estudiantes (Rotger y Ribera, 2019).

En su amplia revisión bibliográfica, Jaime y Gutiérrez (2017) señalan distintas investigaciones nacionales e internacionales sobre análisis de enunciados de tareas (no necesariamente de olimpiada). En una de ellas, Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015) emplean el constructo de demanda cognitiva de una tarea (Smith y Stein, 1998) para analizar teóricamente problemas de patrones geométricos con estudiantes de alta capacidad. Este modelo es refinado y adaptado por los autores cuando es contrastado con resoluciones reales a problemas de patrones geométricos de estudiantes de alta capacidad.

Por otro lado, numerosos estudios e investigaciones consideran de suma importancia el estudio de la probabilidad. No solo son los profesionales e investigadores los que deben tener ciertos conocimientos de probabilidad, sino cualquier persona, en su día a día, para tomar decisiones que le pueden afectar, emitir juicios sobre relaciones entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones (Gigerenzer, 2002). En este sentido, la conexión de la probabilidad con la vida cotidiana es mucho más directa que el resto de los bloques de contenido de las matemáticas escolares. Inspirados por la noción de alfabetización matemática (mathematical literacy), que surge en el contexto de los estudios PISA de la OCDE, diversos autores como Jones (2005) o Batanero (2006, 2014), señalan la necesidad de que toda la ciudadanía alcance un alto grado de alfabetización probabilística.

Así mismo, es destacable el creciente interés que recibe la enseñanza de la probabilidad y estadística debido a la necesidad mostradas por la UNESCO y otras instituciones, como el Instituto Internacional de Estadística (ISI), de ofrecer una formación estadística y probabilística a los estudiantes con la finalidad de que sea competente en una sociedad dominada por la información (Engel, 2019). Tal demanda ha impulsado la enseñanza de la probabilidad incluyéndola en los currículos de secundaria y primaria (CCSSO, 2010; MEC, 2007; NCTM, 2000).

Esto responde a la necesidad de contar con ciudadanos alfabetizados estocásticamente. Siguiendo el modelo de alfabetización probabilística propuesto por Gal (2005) se trata de ofrecer a los alumnos herramientas para contestar a preguntas cuyas respuestas no son inmediatas, a la vez que les faciliten tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. Desde esta perspectiva, y de acuerdo con Batanero et al. (2016), se requiere prestar especial atención a los problemas prácticos y pedagógicos vinculados a la incorporación y tratamiento de la estocástica.

Producto de lo anterior surge este estudio, cuya finalidad es investigar los problemas matemáticos presentes en la Olimpiada Matemática Autonómica de Aragón y Nacional con el propósito de observar la representatividad de los contenidos de probabilidad en estas competiciones, y abrir la puerta a realizar acciones para reconocer y promover el aprendizaje de la probabilidad (y la estadística) en la Educación Secundaria.

Para realizar este estudio se va a analizar los problemas que abordan contenidos de probabilidad desde dos puntos de vista: tipos de tareas implicadas en cuanto a la demanda cognitiva y objetos matemáticos asociados desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

MARCO TEÓRICO

Tipos de tareas matemáticas

Un posible criterio de categorización de los problemas es a partir de la demanda cognitiva que la tarea implica para el sujeto que las enfrenta y desarrolla. De acuerdo con Stein, Grover y Henningsen (1996) la demanda cognitiva de una tarea puede variar según sus características propias y según cómo estas sean presentadas o realizadas. Desde esta perspectiva proponen una categorización para las tareas matemáticas de acuerdo con el tipo de pensamiento que se requiere para solucionarlas, caracterizando a las tareas matemáticas en niveles de exigencia o demanda cognitiva: memorización, procedimientos sin conexión, procedimientos con conexión y construir matemática (Smith y Stein, 1998). En ocasiones, se consideran dos grandes niveles, correspondiendo los niveles 1 y 2 a una baja demanda cognitiva, y 3 y 4 a una alta demanda cognitiva.

Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

El EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero, y Font, 2007, 2019) concede herramientas para el análisis de la enseñanza, de los recursos involucrados en ella y del aprendizaje llevado a cabo por los alumnos. Este enfoque centra su interés en las prácticas matemáticas (Godino y Batanero, 1998) cobrando gran relevancia la noción de situación problema (tarea, problema, etc.) y los objetos matemáticos intervinientes que emergen en tales prácticas. Desde esta perspectiva, Godino, Batanero y Font (2007, 2019), proponen tipos de objetos matemáticos, entendidos como “cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización”. Tales objetos matemáticos se pueden clasificar en: situación-problema, lenguaje, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos.

METODOLOGÍA

En el estudio para la demanda cognitiva y análisis de los objetos matemáticos ligados a la probabilidad se utiliza como método el análisis de contenido (Krippendorff, 2013) realizando un estudio de tipo exploratorio-descriptivo. Para el análisis de contenido se adopta la metodología propuesta por Cobo (2003) adaptada: identificar y seleccionar las partes de los problemas de las olimpiadas que presenten tareas matemáticas relacionadas con probabilidad; establecer las unidades de análisis (UA) y categorías a considerar para codificar la información (indicadores para el análisis de la demanda cognitiva, el lenguaje y los procedimientos); selección de ejemplos específicos de tareas y objetos según las UA y categoría; registrar los datos en una hoja de cálculo permitiendo realizar un análisis descriptivo.

Muestra y unidades de análisis

La muestra fue intencional y las UA se corresponden con los problemas de probabilidad llevados a cabo en las pruebas individuales de la semifinal y final en la Olimpiada Matemática Aragonesa desde 1989 (I Olimpiada Aragonesa) al 2019 (XXVIII Olimpiada Aragonesa) y los problemas planteados en las prueba individual de la Olimpiada Matemática Nacional desde 1990 (I Olimpiada Nacional) al 2019 (XXX Olimpiada Nacional) en los que se abordan contenidos de probabilidad.

Categorías de análisis

De acuerdo con la *demanda cognitiva*, las tareas matemáticas vinculadas al estudio de la probabilidad fueron clasificadas de acuerdo con la disposición y taxonomía. Para ello se definió un conjunto de indicadores que fueron utilizados en el proceso de codificación (Tabla 1).

Tabla 1. Indicadores utilizados en el proceso de codificación de la demanda cognitiva.

Tipo de tarea	Indicadores
Memorización	I1: Foco en la reproducción memorística de aprendizajes previos asociados a la probabilidad. I2: Son tareas sobre probabilidad con un propósito claramente establecido, sin ambigüedades. I3: Uso de reproducción exacta de material visto previamente para el estudio de la probabilidad en su nivel curricular correspondiente, y lo que se reproduce se establece clara y directamente.
Procedimientos sin conexiones	I1: Usan procedimientos, relacionados con la la probabilidad, están específicamente intencionados, o bien son evidentes según el nivel curricular y el planteamiento del problema. I2: Existe poca ambigüedad sobre qué se hace y cómo se hace. I3: No tienen conexión con conceptos o significados subyacentes de los procedimientos vinculados a la probabilidad que se usan I4: Están enfocadas en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar una comprensión de nociones asociadas a la probabilidad. I5: No requiere explicaciones o éstas solo se enfocan en describir el procedimiento utilizado.
Procedimientos con conexiones	I1: Se focalizan en el uso de procedimientos con el propósito de desarrollar niveles profundos de comprensión de los conceptos e ideas asociadas a la probabilidad. I2: Sugieren, explícita o implícitamente, caminos a seguir que son procedimientos amplios y generales que tienen conexiones cercanas con el significado o con diferentes representaciones de un concepto vinculadas a la probabilidad. I3: Aunque se puede seguir un procedimiento general, no pueden seguirse sin pensar (requiere de cierto grado de esfuerzo cognitivo). Se necesitan ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos usados para completar la tarea satisfactoriamente desarrollando una comprensión de los conceptos e ideas asociadas a la probabilidad.

Tipo de tarea	Indicadores
Hacer matemáticas	I1: Requiere de un pensamiento complejo y no algorítmico en torno a la probabilidad. I2: El problema no sugiere, de forma explícita, un camino predecible. I3: Requiere que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos y relaciones vinculadas a la probabilidad. I4: Requiere que los estudiantes accedan a conocimientos y experiencias relevantes en torno a la probabilidad y que hagan uso de ellas al resolver el problema. I5: Requiere que se analice la tarea y se examinen las restricciones de la misma pudiendo darse alguna limitación I6. Requiere una alta demanda cognitiva que puede provocar una cierta ansiedad inicial dada la naturaleza impredecible del proceso de resolución requerido.

En cuanto a las *categorías de análisis del lenguaje*, en primer lugar, distinguimos las expresiones verbales, considerando el trabajo de Shuard y Rothery (1984), quienes distinguen las palabras del lenguaje cotidiano que se usan en los problemas con sentido específico para referirse a procedimientos que tengan que ver con la probabilidad. Dentro de las expresiones específicas se ha diferenciado las propias de la probabilidad y las de juegos de azar (Gómez et al., 2013). Además del verbal, se han analizado otros registros:

- El tipo de lenguaje numérico empleado, encontrando expresiones numéricas relacionadas con los números enteros, decimales y fracciones.
- Lenguaje simbólico-conjuntista, que incluye en el análisis las expresiones de igualdad, operaciones aritméticas, desigualdades, aproximación, letras como símbolos y notación funcional, al igual que en el trabajo de Gómez et al. (2013).
- Lenguaje tabular, cuyo principal uso es la presentación de datos y se relaciona explícitamente con la probabilidad. Los tipos de tablas que analizaremos son: listado de datos, tabla de recuento, de frecuencia sin agrupar, con datos agrupados, de doble entrada y frecuencias relativas.
- Lenguaje gráfico-diagramático, donde se tienen en cuenta los diagramas de barra, de sectores y pictogramas puesto que sirven como base para la comprensión de la distribución de probabilidades y el significado frecuencial. Además, también podemos encontrar el diagrama en árbol para representar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio de varias etapas, pudiendo o no establecer una conexión explícita con el cálculo de probabilidades compuestas o condicionadas.

Por otro lado, se han categorizado las tareas de acuerdo con los procedimientos que movilizan. Siguiendo el trabajo de Gómez, Batanero y Contreras (2014) se han tenido en cuenta los procedimientos relacionados con los significados de la probabilidad: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo, axiomático que se pueden consultar en Batanero (2005).

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una vez seleccionadas las unidades de análisis se codificaron de acuerdo con los indicadores descritos. Para ello se dicotomizaron asignando puntuaciones a cada indicador según su presencia (1) o ausencia (0) en cada uno de los problemas sobre probabilidad.

Representatividad de los problemas vinculados a la probabilidad

En la fase semifinal de la olimpiada autonómica de 162 problemas, sólo 2 problemas (1,2%) corresponden a tareas relacionadas con la probabilidad, mientras que, en la final de la olimpiada autonómica de 165 problemas, se identifican un total de 4 (2,4%). De la Tabla 2 se desprende que, en total, en la olimpiada autonómica de 327 problemas analizados en 6 (1,8%) tienen que ver con la probabilidad. De la misma manera, analizando los problemas de la fase nacional, de 164 problemas en 8 (4,8%) se tiene que realizar alguna tarea relacionada con la probabilidad. Por tanto, de un total se analizó 491 problemas, de los cuales 14 (2,8%) corresponden a tareas relacionadas con la probabilidad.

Tabla 2. Distribución por Olimpiada de los problemas de probabilidad (elaboración propia).

Olimpiada	Nº Problemas	Nº Problemas Probabilidad
Autonómica (semifinal)	162	2
Autonómica (final)	165	4
Nacional	164	8

Demanda cognitiva de los problemas de probabilidad propuestos

Se ha observado en el estudio un predominio total de tareas matemáticas de un alto nivel de exigencia cognitiva (100%) en los problemas propuestos en las olimpiadas, destacando aquellas tareas vinculadas al uso de procedimientos con conexión (64,4%). También cabe destacar la presencia de tareas vinculadas al hacer matemáticas en la nacional (57%) frente a la autonómica (0%). En lo que respecta a las tareas que implican un bajo nivel de demanda cognitiva, se observa que, no aparecen en ninguno de los problemas analizados en las olimpiadas. En el caso de la Olimpiada Autonómica, tanto en la fase semifinal como en la final predominan los problemas con procedimientos con conexión (100%). En la Olimpiada Nacional, en la fase final predominan los problemas con procedimientos con conexión (42,6%) y hacer matemáticas (56,8%).

Lenguaje y procedimientos en los problemas de probabilidad propuestos

Es destacable que, en el apartado de lenguajes, predominan las expresiones verbales específicas de juegos de azar (47,1%), seguido de las cotidianas (30,7%) y específicas de probabilidad (22,2%). Resaltar que no encontramos, pese a la importancia que tiene, el registro tabular y, encontramos en muy pocas ocasiones, el uso del lenguaje gráfico-diagramático destacando los diagramas de árbol. En cuanto a los procedimientos, el 98,3% corresponden a procedimientos relacionados con el significado clásico destacando la regla de Laplace (23,3%) y enumerar casos favorables (23,3%).

CONCLUSIONES

Se desprende de este trabajo la poca representatividad que ocupan los contenidos de probabilidad en las Olimpiadas Matemáticas. Aunque desde 2013 se vienen celebrando Olimpiadas de Estadística (conocidas desde 2017 como Competición Estadística Europea), pensamos que las Olimpíadas Matemáticas como tales deberían tener una mayor representación de la probabilidad y la estadística, ya que forman parte de los contenidos curriculares de matemáticas. Esto es algo que podría estar relacionado con los sistemas de creencias del profesorado que imparte matemáticas en las diferentes etapas educativas (Estrada, Batanero, y Fortuny, 2004), lo cual abre una línea de investigación.

En cuanto al lenguaje, sorprende que en ningún momento aparezca el registro tabular. Si bien es cierto, aparece de forma implícita en los procedimientos llevados a cabo en la resolución de problemas para facilitar la enumeración de casos favorables.

Para finalizar, en este análisis a priori que hemos realizado, se constata que las tareas que plantean los problemas de olimpíada son de demanda cognitiva alta correspondiendo en su mayoría a lenguajes específicos de juegos de azar y probabilidad con procedimientos relacionados con enumerar casos favorables y cálculo de la regla de Laplace. Si bien es cierto, sólo en las olimpiadas nacionales encontramos tareas de nivel superior, “hacer matemáticas” lo cual nos hace pensar que los estudiantes que resuelvan dichos problemas sí tendrán un perfil de alta capacidad matemática. No obstante, habría que contrastar estos resultados con los sistemas de prácticas puestos en juego en la resolución de los problemas, ya que, como señalan Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015), la realidad puede no corresponderse con este modelo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 y el grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

REFERENCIAS

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. *Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Estadística y azar.* Granada: Thales.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Cham, Suiza: Springer.

Batanero, C. (2014). Probability teaching and learning. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante, España: SEIEM.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de , Granadasecundaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.

Council of Chief State School Officers (CCSSO). (2010) *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: NGA Center and CCSSO. Recuperado de http://www.corestandards.org/Math/

Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad: ¿Qué es la estadística cívica? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Granada: Universidad de Granada.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática*, *16*(1), 89-111.

Gairín, J. M. y Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma, 62*, 35-48.

Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, (pp. 39-63). Nueva York, NY: Springer.

Gigerencer, G. (2002). *Calculated risks: How to know when numbers deceive you*. Nueva York, NY: Simon & Schuster.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon, 31*(2), 25-42.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión, 35*, 75-91.

Guinjoan, M., Gutiérrez, Á. y Fortuny, J. M. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 29-46.

Huitrado, J. L. y Climent, N. (2014). Conocimiento del profesor en la interpretación de errores de los alumnos en álgebra*. PNA, 8*(2), 75-86.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp.71-89). Zaragoza: SEIEM.

Jones, G. A. (Ed.) (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Nueva York: Springer.

Krippendorff, K. (2013). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidos.

Olszewski-Kubilius, P. y Lee, S. (2004). The role of participation in in-school and outside-of-school activities in the talent development of gifted students. *Journal of Secondary Gifted Education, 15*(3), 107-123.

Ortega, T., Berciano, A. y Pecharromán, C. (2018). *Complementos de formación matemática*. Madrid: Síntesis.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)*, *5*, 677-773.

Rotger, L. y Ribera, J. M. (2019). Designing a video course. The case of the online course of mathematical olympiads. En L. Uden, D. Liberona, G. Sanchez y S. Rodríguez-González (Eds.), *International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 79-89). Cham, Suiza: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics.* Londres: Murray.

Smith M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 344-350.

Stein, M. K., Grover, B. W. y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-488.

Subotnik, R. F., Miserandino, A. D. y Olszewski-Kubilius, P. (1996). Implications of the Olympiad studies for the development of mathematical talent in schools*. International Journal of Educational Research, 25*, 563–573.

Toh, T. L. (2013). Mathematics Competition Questions and Mathematical Tasks for Instructional Use. En B. Kaur (Ed.) *Nurturing reflective learners in mathematics: yearbook 2013* (pp. 189-207). Singapur: World Scientific, AME.

ANÁLISIS DE PRUEBAS DE SELECCIÓN DE ESTUDIANTES DE TALENTO MATEMÁTICO Y CARACTERIZACIÓN DEL PERFIL DE LOS PARTICIPANTES

Analysis of selection tests of mathematically talented students and characterisation of the profile of the participants

Sancho, R., Ferrando, I.

Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València (España)

Resumen

El programa Estalmat CV selecciona cada año a 25 estudiantes de entre 11 y 13 años para participar en un proyecto de estímulo del talento matemático. En este trabajo se analizan las pruebas de selección y los resultados de 2018 y 2019. Los objetivos son, por un lado, analizar las características de los problemas de las pruebas de selección y reflexionar sobre su adecuación para detectar alumnos con altas capacidades y, por otro, analizar los datos de participación y los resultados en busca de regularidades en los perfiles de estudiantes. Entre las variables que se tendrán en cuenta en la caracterización de los perfiles, se presta especial atención al género, que tiene un gran interés en las investigaciones en este campo, pero también la edad, el tipo de centro y la provincia de origen de los participantes y seleccionados. Las conclusiones obtenidas pueden ser útiles para futuras investigaciones y para la elaboración y corrección de pruebas posteriores.

Palabras clave: *talento matemático, características, detección, Estalmat CV, diferencias de género*

Abstract

The Estalmat CV program selects 25 students aged 11-13 each year to participate in a project to stimulate mathematical giftedness. This work analyses the selection tests and the results of 2018 and 2019. The aims are, on the one hand, to analyse the characteristics of the problems of the selection tests and to reflect on their suitability for detecting students with high abilities and, on the other hand, to analyse participation data and results in search of regularities in student profiles. Among the variables taken into account in the characterization of the profiles, special attention is paid to gender, which is of great interest in research in this field, but also age, type of centre and province of origin of the participants and selected. The conclusions obtained can be useful for future research and for the elaboration and correction of subsequent tests.

Keywords: *mathematical talent, characteristics, detection, Estalmat CV, gender differences*

CONTEXTO Y OBJETIVOS DEL ESTUDIO

La identificación y apoyo a los alumnos con altas capacidades matemáticas supone un reto para el sistema educativo. La legislación actual en España, tanto a nivel estatal como autonómico, contempla a este tipo de alumnado entre los que presentan necesidades educativas especiales. Los decretos que establecen el currículum, el RD 1105/2014 y el Decreto 87/2015 de la Generalitat Valenciana, indican que se debe adoptar medidas de atención a la diversidad adaptadas a las

Sancho, R. y Ferrando, I. (2021). Análisis de pruebas de selección de estudiantes de talento matemático y caracterización del perfil de los participantes. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 151-158). Logroño: Universidad de La Rioja.

necesidades de cada alumno. En la Comunitat Valenciana, la Orden 20/2019, la más reciente a nivel autonómico sobre atención a la diversidad, establece la identificación, valoración y el plan de actuación a seguir con alumnos con necesidades educativas especiales, aunque de forma muy general y con muy pocos detalles por lo que respecta al alumnado con altas capacidades. Las únicas medidas concretas que se detallan son el enriquecimiento curricular y la aceleración.

En efecto, según Jaime y Gutiérrez (2014), las posibles actuaciones en el ámbito escolar son la aceleración, el agrupamiento (grupo de trabajo con varios alumnos de capacidades similares), el enriquecimiento curricular y la profundización. En el ámbito extraescolar Jaime y Gutiérrez (2014) distinguen entre acciones de tipo curricular (talleres organizados por los centros), de tipo lúdico (actividades y juegos en contextos informales no específicamente matemáticos), actividades de resolución de problemas (olimpiadas matemáticas, páginas web como Nrich[1]…), y mixtas. El proyecto ESTAMAT (Estimulación del Talento Matemático), que se ajusta a esta última categoría, surgió en Madrid en 1998 de la mano de Miguel De Guzmán para la detección y estímulo del talento precoz en matemáticas en la Comunidad de Madrid. Desde entonces se ha ido extendiendo a otras comunidades, llegando por primera vez a la Comunitat Valenciana en 2007 (Miralles, 2008). Cada año, se realiza una prueba de selección (con una serie de problemas comunes a todas las sedes en España) que permite seleccionar a 25 estudiantes de cada sede de entre 12 y 13 años de edad.

Las pruebas de selección del proyecto ESTALMAT se basan en la resolución de problemas. Son varios los estudios que coinciden en que esta es la mejor forma de identificar a los alumnos con altas capacidades matemáticas (Díaz et al, 2008). Esto se debe a que los aspectos que caracterizan a estos estudiantes son fácilmente reconocibles en esta situación, como indica por ejemplo Greenes (1981). Jaime y Gutiérrez (2014) realizan una recopilación de características de este tipo de alumnado a partir de distintos estudios: flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente, originalidad de las ideas, identificación de patrones y relaciones, abreviación de procesos al resolver problemas similares, capacidad de generalización y transferencia, capacidad de abstracción, utilización del pensamiento lógico, etc.

Uno de los retos del proyecto ESTAMAT es llegar al mayor número de estudiantes, es decir, que la muestra de estudiantes seleccionados sea heterogénea tanto en género como en perfil sociocultural. En efecto, en lo que respecta al género y el rendimiento matemático, diversos estudios demuestran que las diferencias intelectuales entre chicas y chicos en este aspecto son prácticamente inexistentes. Sin embargo, en el ámbito escolar estas diferencias son patentes y se agravan con el paso de los años, debido a factores sociales, afectivos y educativos (Farfán y Simón, 2017). De hecho, estas diferencias son aún mayores entre estudiantes con altas capacidades matemáticas, teniendo las chicas un interés y una confianza en sí mismas bastante más bajos que los chicos (Preckel et al, 2008), lo que se traduce en una menor motivación para participar en actividades de estímulo del talento como ESTALMAT. De hecho, Niederle y Vesterlund (2010) concluyen que en contextos competitivos la respuesta de las chicas es distinta debido a una mayor sensibilidad ante la presión, lo que se traduce en una diferencia aún mayor en los resultados que la obtenida fuera de competición. Sin embargo, Liu y Wilson (2009) recogen algunos resultados de investigaciones y los comprueban analizando las pruebas PISA, que indican que las chicas obtienen mejores resultados en problemas más académicos, directamente relacionados con lo aprendido en clase, mientras que en las pruebas basadas en actividades extracurriculares suelen destacar en mayor medida los chicos.

En este estudio, a partir de las pruebas y los datos recogidos durante los años 2018 y 2019 en el proyecto ESTAMAT de la Comunitat Valenciana, se pretende abordar los siguientes objetivos:

[1] https://nrich.maths.org/

- Identificar las características de los problemas que componen las pruebas de selección para justificar su adecuación a los objetivos del proyecto ESTALMAT.
- Analizar el perfil de los participantes y de los seleccionados.
- Identificar la existencia de un posible sesgo de género en la participación y en el rendimiento en las pruebas de selección.

Así, en base a algunas de las investigaciones previamente citadas, en el siguiente apartado se analiza un problema de la prueba de selección de 2018 (el análisis completo de las pruebas está descrito en Sancho, 2020). A continuación, mediante el análisis estadístico de los presentados y seleccionados se tratará de identificar la posible existencia de sesgos en el proceso de selección. Finalmente, se resumirán los resultados, las limitaciones y las posibles líneas de trabajo futuro.

ANÁLISIS DE LA PRUEBA DE SELECCIÓN

La prueba, que cada año se realiza a finales del mes de mayo o principios de junio, consta de 5 problemas con varios apartados de dificultad variable. La duración es de dos horas y media y se divide en dos partes, una de una hora y media con los tres primeros problemas y otra de una hora con los dos últimos. Para analizar cada problema se identificarán los siguientes aspectos:

- *Conceptos matemáticos involucrados*: no suelen ser muchos y en la mayoría de los casos no es necesario conocerlos en detalle, o si lo es, el enunciado proporciona la información imprescindible sobre ellos. La intención es que las pruebas sean autocontenidas, de modo que los conocimientos previos del alumnado no supongan una limitación.
- *Habilidades necesarias*: se remiten a las características de los alumnos de talento matemático descritas en la introducción que pueden ser reconocibles en cada problema, y justifican que los problemas son adecuados en una prueba de este tipo.
- *Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema*: en este punto el análisis se basará en identificar, para cada problema, los heurísticos necesarios para su resolución (en el sentido de Polya, 1945): considerar un caso más sencillo (particularizar), razonar por contradicción, buscar regularidades, hacer un dibujo, dividir en subproblemas, empezar desde el final, introducir hipótesis auxiliares, resolver un caso general y tratar de particularizar y, finalmente, hacer conjeturas.
- *Grado de abstracción*: es una de las características del problema que más dificulta su resolución por parte de los estudiantes, y ayuda a detectar el talento matemático.
- *Grado de dificultad y puntuación media obtenida*: se realiza una valoración de la dificultad general de cada problema teniendo en cuenta el nivel académico esperado en los estudiantes, relacionándola con la puntuación media obtenida en cada uno de ellos.
- *Complejidad matemática*: en este punto se valorará el nivel de los conceptos matemáticos involucrados en la resolución del problema en función de la edad y del curso académico.

El análisis de los problemas requiere una reflexión sobre las posibles estrategias de resolución de cada apartado. En esta contribución se presentará únicamente el análisis del primer problema de la prueba de 2018[2], cuyo enunciado se detalla a continuación.

Problema 1, prueba 2018. En una de las orillas de un río hay 3 adultos, 2 niños y una barca de remos muy pequeña. Queremos que todas las personas crucen el rio utilizando la barca. En la barca

---

[2] La prueba de selección de 2018 está disponible en https://estalmatcv.blogs.uv.es/files/2019/04/Prueba2018-def.pdf y la de 2019 en https://estalmatcv.blogs.uv.es/files/2020/06/prueba2019_valencia.pdf

sólo caben o bien un solo adulto o bien 2 niños. Todos saben remar y está permitido que un niño vaya solo en la barca.

Si entendemos por "viaje" a remar de un lado al otro del río:

1. ¿Cuál es el mínimo número de viajes que habrá que hacer para que todas las personas crucen el río? Explica cómo has llegado al resultado.
2. ¿Y si hubiera 8 adultos y 2 niños? ¿Y si hubiera 100 adultos y 2 niños? Explica cómo has llegado a tus respuestas.
3. Explica cómo podemos encontrar el mínimo número de viajes necesarios para cualquier número de adultos y 2 niños.
4. Si ahora, en una de las orillas, hay 4 adultos y 3 niños, ¿cuál es el número mínimo de viajes que habrá que hacer para que todas las personas crucen el río? ¿Cómo los harías?
5. ¿Y si hubiera 8 adultos y 3 niños? ¿Y si hubiera 100 adultos y 3 niños? Explica cómo podemos encontrar el mínimo número de viajes necesarios para cualquier número de adultos y 3 niños.
6. Explica cómo podemos encontrar el mínimo número de viajes necesarios para cualquier número de adultos y cualquier número de niños.

En la Tabla 1 se recogen los resultados del análisis de este problema.

Tabla 1. Análisis del problema 1 de la prueba de 2018.

Conceptos matemáticos involucrados	Habilidades necesarias
Sucesión y término general. Lenguaje algebraico para representar números arbitrarios.	Flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente. Abreviación de los procesos al resolver problemas similares. Capacidad de generalización y transferencia. Capacidad de abstracción.
Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema	
Considerar casos sencillos, particularizaciones (por ejemplo, empezar con dos niños sin adultos e ir añadiendo adultos uno a uno). Buscar regularidades (a partir de los casos sencillos ver qué es común a todos ellos). Dibujar un esquema (para contar los viajes en los primeros casos). Dividir el problema en subproblemas (esto lo facilita la separación en apartados). Resolver un problema más general y luego particularizar .	
Grado de abstracción: Alto	
Es un problema bastante abstracto por el hecho de introducirse en el campo del álgebra. El nivel de generalización que requiere es elevado, sobre todo en el último apartado.	
Grado de dificultad: Alto	Puntuación media obtenida: 4,47
Se trata de un problema difícil para estudiantes que aún no han sido introducidos en el lenguaje algebraico o lo han sido con muy poca profundidad.	
Complejidad matemática: Media	
Desde el punto de vista matemático el problema no es excesivamente complejo si se dominan las sucesiones y su término general, ya que en este caso la generalización es sencilla.	

Una vez analizados los cinco problemas de las pruebas de selección de 2018 y 2019, se comparan los resultados llegando a la conclusión de que ambas pruebas son muy similares en su diseño ya que en las dos hay problemas que permiten identificar las características de los alumnos de altas capacidades matemáticas descritas previamente. Respecto al uso de heurísticos hay ligeras diferencias, ya que dos de ellos (resolver un caso general para luego particularizar e introducir hipótesis auxiliares) sólo son necesarios en la prueba de 2018. Los grados de dificultad y abstracción son similares y se distribuyen de forma uniforme en ambas pruebas: hay siempre un problema más sencillo que el resto en cada parte de cada prueba lo cual, indudablemente, puede contribuir a conseguir una actitud positiva por parte de los participantes reduciendo la frustración. Respecto a las puntuaciones medias, se observa que la prueba de 2019 resultó algo más difícil, aunque no es posible establecer comparaciones directas ya que los estudiantes presentados no son los mismos. No obstante, sí es cierto que la complejidad matemática general de la prueba es más alta, lo que significa que los conceptos matemáticos involucrados en los problemas son de mayor nivel, pudiendo influir en la dificultad que supone la prueba para el alumnado.

En el siguiente apartado se describirá el perfil de los alumnos presentados y finalmente seleccionados en las dos últimas ediciones de la prueba de acceso al proyecto ESTALMAT CV.

PERFIL DE LOS ESTUDIANTES PRESENTADOS

En este apartado se detallarán, en primer lugar, las características de los estudiantes que se presentaron a las pruebas de selección en 2018 y en 2019, incidiendo en los siguientes aspectos: género, tipo de centro educativo (público o bien privado/concertado), edad cumplida en el año de la prueba y provincia. En aquellas características en que sea posible, se compararán los datos de la muestra de presentados a la prueba con los datos sobre el total de estudiantes de esa edad en la Comunitat Valenciana para, en base a una prueba inferencial χ^2, identificar la existencia de diferencias significativas (las asumiremos cuando el p-valor sea inferior a 0,05).

Respecto al género, en 2018 se presentaron 81 chicas y 139 chicos, lo cual supone un 71% más de chicos que de chicas. Suponiendo que la distribución por género de la población total es aproximadamente del 50%, esta diferencia es significativa. En 2019 la diferencia se mantiene e incluso se incrementa moderadamente, ya que se presentaron 70 chicas y 121 chicos.

Respecto a la edad, en 2018 el 52% de los presentados nacieron en 2005 mientras que el 48% nacieron en 2006, no hay por tanto diferencias significativas. En 2019 las diferencias sí son significativas, ya que se aprecia un aumento de los alumnos mayores, el 59% nacieron en 2006.

Respecto al tipo de centro educativo, nos basaremos en las estadísticas del Informe sobre la situación del Sistema Educativo en la Comunitat Valenciana en el Curso 2016/17 (el más reciente accesible actualmente[3]). Según este informe, el 67,3% de los estudiantes de la Comunitat Valenciana estudia en centros de titularidad pública. En 2018 se presentaron 118 estudiantes de centros privados o concertados de un total de 220, lo que supone 46 alumnos más de los esperado en base a los datos de distribución de estudiantes, es una diferencia significativa. En 2019, sin embargo, los datos se ajustan algo mejor (aunque a la baja en cuanto a los centros públicos) a la distribución general de estudiantes, pues el 60% están matriculados en centros públicos.

En relación a la provincia de origen, se contrastarán de nuevo los datos de presentados con la distribución presentada en el Informe sobre la situación del Sistema Educativo en la Comunitat Valenciana en el Curso 2016/17. Según este informe, el 51,8% de los estudiantes están en la provincia de Valencia, el 36,4% en Alicante y el 11,8% en Castellón. En 2018 se presentaron 77 estudiantes a las pruebas en la sede de Alicante, 34 en Castellón y 109 en Valencia, por lo que teniendo en cuenta la distribución general las diferencias no son significativas. Sin embargo, en 2019 hay una caída importante de los estudiantes presentados en la provincia de Alicante (49 de un total de 191) mientras que en Valencia se presentan 116 y 26 en la provincia de Castellón.

---

[3]Disponible en http://www.ceice.gva.es/es/web/consell-escolar-cv/informes

PROCESO DE CORRECCIÓN DE LA PRUEBA

Como ya se ha comentado previamente, la prueba consta de cinco problemas, la corrección de las pruebas (anónimas) se realiza por un equipo de profesores de ESTALMAT formado por entre 8 y 10 personas que trabajan por parejas. En primer lugar, se realiza una plantilla de corrección de cada problema y se consensúa una puntuación para cada apartado de forma que cada problema se puntúa sobre 10. Cada pareja de correctores se encarga de corregir uno o, a lo sumo, dos problemas y se recogen las puntuaciones de cada estudiante en una tabla que incluye también comentarios (para recoger, por ejemplo, una resolución particularmente original en una prueba determinada). Una vez finalizada la corrección de los cinco problemas, se recogen las puntuaciones de cada estudiante en una hoja de cálculo. A partir de este momento, la forma de ordenar a los estudiantes según sus puntuaciones (para seleccionar a los 25 mejores y a 7 participantes que actuarán como reservas) no ha sido la misma en 2018 y en 2019.

En 2018 se empieza ordenando a los estudiantes por suma de puntuaciones obtenidas en los problemas. A continuación, se calcula la media aritmética de las puntaciones obtenidas en cada uno de los problemas por los 50 primeros alumnos. Finalmente, se calcula la suma ponderada de las notas de los cinco problemas con pesos inversamente proporcionales a las medias calculadas, y se vuelve a ordenar a los alumnos ahora usando las sumas ponderadas. Los 25 primeros estudiantes resultantes de esta ordenación son los seleccionados y los 7 siguientes quedan como reservas. En 2019, la diferencia consiste en usar como ponderación la media aritmética global de cada problema, es decir, la media de las puntuaciones de todos los estudiantes y no solamente de los 50 primeros. En ambos casos el objetivo de esta ponderación es dar más valor a aquellos problemas que, en base a las puntuaciones obtenidas, han resultado más complejos. En la sección 5.1 de Sancho (2020) se realiza un análisis comparativo minucioso para identificar el efecto de usar ponderaciones según la dificultad. No se detectan diferencias entre las dos formas de ponderar según la dificultad (usando a todos o solo a los 50 primeros), pero sí que hay ciertas diferencias al valorar o no más los problemas que resultan más complejos (en 2018 hay una diferencia de 4 estudiantes seleccionados mientras que en 2019 hay solo 2). Finalmente, conviene recordar que tras la selección de 25+7 estudiantes, se inicia la fase de entrevistas. Esta última fase tiene como objetivo explicar a los estudiantes seleccionados y a sus familias en qué consiste el proyecto ESTALMAT para asegurar el compromiso de permanencia durante los dos años siguientes. En caso de que, tras la entrevista, algún estudiante seleccionado renuncie a participar, se entrevista a los estudiantes de reserva.

PERFIL DE LOS ESTUDIANTES SELECCIONADOS

En la Tabla 2 se recogen las distribuciones de los seleccionados en 2018 y 2019 según las características de la muestra de presentados previamente comentadas.

Respecto al género, se observa que el 68% de los seleccionados son chicos, misma proporción a la de los presentados (pues, sumando los participantes de ambas ediciones, los chicos suponen exactamente un 68% del total). No parece existir una dependencia entre el género y el resultado de la prueba de selección, sin embargo, sí que hay una diferencia significativa en la voluntad de chicos y chicas por participar en el proyecto.

En relación a la edad, el 55,7% de los presentados cumplían 12 años en el año de la selección, mientras que el 26% de los seleccionados tienen dicha edad. La diferencia, en base al test χ^2, es significativa (p=0,013). En efecto, es lógico que a aquellos alumnos con más edad que cursan un curso superior, la prueba les resulte más accesible.

Tabla 2. Perfil de los estudiantes seleccionados.

	2018	2019	TOTAL
Chicas	9	7	16
Chicos	16	18	34
12 años	10	3	13
13 años	15	22	37
Alicante	5	6	11
Castellón	3	4	7
Valencia	17	15	32
Público	8	12	20
Privado/concertado	17	13	30

Respecto al tipo de centro educativo, el 52,7% de los presentados vienen de centros de titularidad pública, así como el 40% de los seleccionados. Pese a que la proporción se reduce levemente, no hay diferencias significativas entre las proporciones.

En principio en la distribución de seleccionados por provincia no debería haber diferencias entre las proporciones de presentados y de seleccionados de cada región. En efecto, la distribución de presentados en Alicante, Castellón y Valencia es, respectivamente, 30,6%, 14,6% y 54,8%, similar a la proporción de seleccionados (22%, 14%, y 64%) si bien sí se aprecia cierta diferencia a la baja de los alumnos seleccionados en la provincia de Alicante, aunque no es una diferencia significativa. Esta disparidad es posible que se explique por el hecho de que entre los alumnos presentados en Valencia la proporción de estudiantes más mayores es mayor que en Alicante.

También es interesante analizar los detalles de las puntuaciones de cada uno de los cinco problemas de las pruebas de selección con el objeto de identificar diferencias en el rendimiento en función del género y la edad. En relación al género, al analizar mediante un contraste unidireccional t de Student las medias de los resultados por problemas, se observa que en algunos problemas las chicas tienen un mejor rendimiento que los chicos y viceversa. Sin embargo, estas diferencias solo son significativas en el problema 3 de 2018, en el que la media de los chicos (6,38) es significativamente más alta que la de las chicas (5,18). En efecto se trata de un problema nada académico y estos resultados confirmarían los de algunas investigaciones de género que sugieren que las chicas suelen tener más dificultades en este tipo de actividades que los chicos. Respecto a la edad, la prueba de 2019 es significativamente más difícil para los candidatos más jóvenes, aunque las diferencias se reducen en los problemas 2 y 3 que tienen una complejidad matemática menor (ya que requieren menos procedimientos matemáticos, a diferencia del problema 4 que requiere una base importante sobre divisibilidad).

CONCLUSIONES

De los resultados de este estudio se concluye que los problemas de las pruebas son adecuados para identificar las características propias de alumnos de altas capacidades, detallando en cada problema cuáles de estas son observables. El hecho de incorporar apartados similares de dificultad creciente facilita la detección de estas características, que en muchos casos intervienen en la realización de tareas relacionadas. Algunas de estas son la identificación de patrones y relaciones, la abreviación de los procesos al resolver problemas similares y la capacidad de generalización y transferencia, que recopilan Jaime y Gutiérrez (2014).

Respecto al perfil de los estudiantes que participan en las pruebas de selección y de los que finalmente son seleccionados, el resultado más relevante es la necesidad de difundir el programa entre las chicas para tratar de reducir el sesgo de género entre los seleccionados, pues, tal y como se ha observado, el rendimiento de las chicas es prácticamente igual al de sus compañeros. Por tanto, el problema no está en el diseño de la prueba sino en la baja proporción de chicas que se presentan. Respecto al tipo de centro educativo, no hay diferencias significativas en el rendimiento en la prueba, pero sí que se observa una proporción baja (en relación a la población de estudiantes de la CV) de estudiantes que se presentan desde centros públicos, lo cual debería tratar de reducirse haciendo una mayor difusión de las pruebas entre el profesorado de la educación pública. También se observa, aunque los resultados no se han presentado con detalle por las limitaciones de espacio, que en los problemas cuya resolución se basa en manejar propiedades aritméticas, los alumnos de centros privados y concertados tienen un rendimiento significativamente mayor. Tal vez esto puede explicarse porque, a menudo, este tipo de centros dispone de grupos de enriquecimiento matemático en los cuales se practican este tipo de problemas.

Para finalizar, es importante tener en cuenta que este estudio se ha limitado a estudiar los datos de los dos últimos años de los presentados a las pruebas de ESTALMAT CV, por tanto, los resultados no pueden ser generalizables. Para completar este estudio puede ser interesante, en un trabajo futuro, realizar un análisis cualitativo de las resoluciones de los estudiantes con el objeto de identificar, por ejemplo, diferencias en el uso del formalismo matemático o de detectar aspectos ligados a la creatividad matemática en las resoluciones.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos sinceramente a Rafael Crespo, Alejandro Miralles y Ramón Esteban la colaboración prestada al darnos acceso a los datos de los participantes. La segunda autora agradece la ayuda del proyecto de Investigación del Plan Nacional de I+D+I, EDU2017-84377-R financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad / Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

REFERENCIAS

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: Análisis de una muestra. *Faisca*, *13*(15), 30-39.

Farfán, R. M. y Simón, M. G. (2017). Género y matemáticas: una investigación con niñas y niños con talento. *Acta Scientiae*, *19*(3), 427-446.

Greenes, C. (1981). Identify the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher*, *28*(6), 14-17.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Liu, O. L. y Wilson, M. (2009). Gender differences and similarities in PISA 2003 mathematics: a comparison between the United States and Hong Kong. *International Journal of Testing, 9*(1), 20-40.

Miralles, A. (2008). La Experiencia ESTALMAT en la Comunidad Valenciana. *Modelling in Science Education and Learning*, *1*(5), 39-44.

Niederle, M. y Vesterlud, L. (2010). Explaining the gender gap in math test scores: The role of competition. *Journal of Economic Perspectives*, *24*(2), 129-44.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Preckel, F., Goetz, T., Pekrun, R. y Kleine, M. (2008). Gender differences in gifted and average-ability students: comparing girls' and boys' achievement, self-concept, interest, and motivation in mathematics. *Gifted Child Quaterly*, *52*(2), 146-159.

Sancho, R. (2020). *Análisis de pruebas de selección de estudiantes con talento matemático y caracterización del perfil de los participantes y seleccionados* (Trabajo fin de máster). Universitat de València, Valencia. Obtenido de https://hdl.handle.net/10550/75987

ENRIQUECIMIENTO EXTRACURRICULAR PARA TALENTO MATEMÁTICO CON AYUDA DE RECURSOS MANIPULATIVOS

Extracurricular enrichment for mathematical talent with the help of manipulative resources

Sua, C., Jaime, A.

Depto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València (España)

Resumen

Los estudiantes con altas capacidades matemáticas requieren una atención adecuada que permita desarrollar favorablemente esta habilidad. Al ser una habilidad innata, esta puede apreciarse desde edades tempranas, por lo que se vuelve relevante atender de manera decidida a los estudiantes con estas capacidades desde los primeros años de escolaridad. Diversos autores han resaltado el potencial del material concreto en la adquisición del conocimiento matemático, lo que brinda una herramienta para el diseño de tareas. Presentamos en este documento una experiencia extracurricular en la que participaron estudiantes con altas capacidades matemáticas del nivel de primaria y en las que se involucró material concreto como recurso mediador.

Palabras clave: *altas capacidades matemáticas, material concreto, educación primaria*

Abstract

Mathematically gifted students require adequate attention to favourably develop this ability. As it is an innate ability, it can be appreciated from an early age, which is why it becomes relevant to decisively attend to students with these abilities from the first years of schooling. Various authors have highlighted the potential of the concrete material in the acquisition of mathematical knowledge, which provides a tool for the design of tasks. We present in this document an extracurricular experience in which mathematically gifted students of the elementary level participated and in which concrete material was involved as a mediating resource.

Keywords: *mathematically gifted students, concrete material, elementary level*

INTRODUCCIÓN

En la clase de matemáticas se pueden observar diferencias en la forma en que los estudiantes asimilan los contenidos matemáticos que son objeto de estudio (Benedicto, Acosta, Gutiérrez, Hoyos y Jaime, 2015). Particularmente, pueden identificarse estudiantes que no presentan dificultad en la apropiación de nuevos elementos conceptuales y que fácilmente establecen conexiones entre estos elementos y otros que ya conocen (Özdemir y Işiksal-Bostan, 2019). En la literatura especializada a estos estudiantes se les ha reconocido por contar con altas capacidades matemáticas (en adelante ACM). Contrario a lo que se podría considerar en un primer momento, esta población requiere una atención especial, pues esta habilidad, como cualquier otra, debe ser afianzada adecuadamente.

Sua, C. y Jaime, A. (2021). Enriquecimiento extracurricular para talento matemático con ayuda de recursos manipulativos. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 159-166). Logroño: Universidad de La Rioja.

Considerando que esta habilidad es innata de los estudiantes, su favorecimiento debe darse desde edades y niveles educativos iniciales. Este énfasis lleva a considerar también la naturaleza de las situaciones y tareas propuestas, así como los recursos de los que se dispongan para que los estudiantes, en interacción con estos, se aproximen a las ideas matemáticas que se desean construir y formalizar posteriormente.

Bajo estas premisas, un equipo de profesores de la Universitat de València, autores de este documento, gestionó un espacio de instrucción dirigida a estudiantes con ACM de primaria en un contexto extracurricular, con el objetivo de contribuir al desarrollo de estas habilidades matemáticas. Presentamos en este documento algunas de las tareas diseñadas y los correspondientes resultados obtenidos en esta intervención, haciendo especial énfasis en el potencial de los recursos involucrados y la naturaleza de las producciones de los estudiantes participantes. Pretendemos con ello ofrecer evidencia sobre la incidencia de los materiales concretos en el aprendizaje de las matemáticas por parte de estudiantes con ACM pertenecientes a niveles educativos iniciales.

REFERENTES CONCEPTUALES

El potencial del material concreto

Hay una larga tradición en la idea de que el uso de materiales concretos apoya considerablemente la comprensión de nuevas ideas matemáticas, motivo por el cual tienen presencia en distintos niveles educativos (McNeil y Uttal, 2009). Sarama y Clements (2009), apoyados en otras investigaciones, respaldan esta idea y señalan la utilidad de este material en las primeras aproximaciones a un concepto. Sin embargo, intentar definir lo que es un material concreto puede ser un asunto problemático, pues diferencias en las posturas adoptadas pueden ser reconocidas (Swan y Marshall, 2010).

Aunque el material concreto se puede considerar como todo objeto físico manipulable, que dota a quien lo usa de un significado íntimamente ligado a las acciones ejecutadas con este (Sarama y Clements, 2009), estos autores señalan que la manipulación de un objeto no debe llevar necesariamente al concepto que este corporeiza y que las ideas promovidas pueden distar del objeto matemático deseado. Kaminski, Sloutsky y Heckler (2009) profundizan en esta última idea al plantear que el material concreto puede transferir a quien lo usa una mayor e innecesaria información de la que posee su contraparte abstracta, por lo que puede interferir en el proceso de aprendizaje deseado.

Bajo este panorama, recurrimos a las ideas de Bruner (1966), quien señala que el aprendizaje de un nuevo concepto se da bajo una progresión en la que tiene lugar una interiorización del medio o ambiente concreto que corporeiza dicho concepto. Este desarrollo conceptual se da en tres fases: a) actuar con los objetos concretos, b) formar imágenes de las construcciones concretas y c) adoptar notaciones simbólicas. Esta progresión lleva a considerar que el profesor tiene el deber de dirigir la interacción de los estudiantes con el material, llevándolos a reconocer los conceptos encarnados en este. De igual forma, el uso del material concreto debe permitir acceder a múltiples representaciones del objeto matemático de estudio, todo esto antes de que se avance en las fases propuestas por Bruner, en las que el material desaparece y se cuenta apenas con representaciones simbólicas (McNeil y Uttal, 2009).

Altas capacidades matemáticas

Hoy en día es común encontrar estudiantes con diferentes habilidades matemáticas en cualquier salón de clases, incluyendo algunos con ACM (Benedicto et al., 2015). No hay una clara definición de estudiantes con ACM, pero, en términos generales, estos se reconocen por sus diferencias en la atención, memoria y habilidad para comprender y razonar al ser comparados con sus compañeros de clase o estudiantes con experiencias de aprendizaje similares (Özdemir y Işiksal-Bostan, 2019). De acuerdo con Krutestskii (1976), estos estudiantes tienen la habilidad de generalizar el conocimiento matemático con facilidad, así como establecer nuevas y no familiares formas de resolver problemas matemáticos. Otros investigadores, aseguran Özdemir y Işiksal-Bostan (2019, p. 3), han señalado que los estudiantes con ACM se distinguen de otros en aspectos como formación espontánea de problemas, flexibilidad en la manipulación de datos, originalidad en la interpretación, habilidad en la generalización y transferencia de ideas.

Lo anterior deja ver las ACM como un único potencial que incorpora distintas dimensiones. Este potencial requiere ser conservado y mejorado a través del contexto educativo, aspecto que no se reconoce claramente en la realidad (Jaime y Gutiérrez, 2017; Özdemir y Işiksal-Bostan, 2019). Muchos profesores no reconocen que los estudiantes con ACM requieren especial atención, ellos creen que estos estudiantes aprenden por sí mismos (Jaime, Gutiérrez y Benedicto, 2018). Por lo general, en la escuela, los estudiantes con ACM afrontan problemas sencillos, no interesantes ni desafiantes, lo que conduce a un desinterés por parte de ellos y un desaprovechamiento de sus capacidades (Özdemir y Işiksal-Bostan, 2019). Esto ha conducido a investigar los procesos de pensamiento matemático de los estudiantes con ACM, así como la forma en que asimilan nuevas ideas matemáticas (Dimitriadis, 2010).

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Un equipo de profesores de la Universitat de València trabajó durante cinco sesiones con estudiantes de primaria, específicamente de grados segundo y tercero, con edades que oscilaban entre los siete y nueve años. Cada sesión tuvo una duración de 90 minutos en promedio y se realizaba cada dos semanas. Los estudiantes participantes hacían parte de un programa de apoyo a estudiantes superdotados y talentosos de la comunidad valenciana (AVAST) y su selección atendía a su destacado desempeño en este programa, específicamente en el área de matemáticas. Los nombres de los estudiantes son pseudónimos.

Cada sesión presentaba a los estudiantes un conjunto de tareas alrededor de contenidos matemáticos, cuya naturaleza o grado de profundidad era diferente al trabajado en un contexto escolar (por ejemplo, permutaciones, coordenadas cartesianas, ecuaciones de primer grado y temas de aritmética). Cada situación propuesta involucraba algún material concreto, entre los que se pueden mencionar Regletas de Cuisenaire, Bloques multilink y simuladores virtuales. En un momento posterior uno de los profesores acompañantes gestionaba una discusión sobre los resultados obtenidos en las tareas y proponía algunas preguntas adicionales a los estudiantes, con el fin de hacer operativos los elementos conceptuales estudiados y evidenciar la apropiación de los estudiantes frente a dichos elementos. Cada sesión de trabajo se registró en audio y video, de igual manera se almacenaron las producciones escritas de los estudiantes.

En el siguiente apartado presentamos lo ocurrido en una sesión de trabajo, la cual tenía el objetivo de favorecer el razonamiento lógico en situaciones de ubicación espacial y visualización, con ayuda del juego *Utopía*. Por motivos de espacio nos limitamos a mostrar fragmentos de las interacciones de los estudiantes con el material concreto e interacciones con el profesor en los que pueden reconocerse aspectos sobre la naturaleza del conocimiento matemático construido y la actividad matemática ejecutada con el material concreto.

UBICANDO EDIFICIOS

En esta sesión se utilizó el juego *Utopía*, el cual consiste en un conjunto de 16 edificios con cuatro alturas diferentes (cuatro edificios por cada altura) que deben disponerse en un tablero cuadrado atendiendo a indicaciones sobre su ubicación respecto a los otros edificios (Figura 1a). La primera tarea propuesta a los estudiantes utilizaba nueve edificios (tres de cada tamaño) y solicitaba ubicarlos en una cuadrícula que presentaba algunos números del 1 al 3 (Figura 1b), cada uno representando la altura de una familia de edificios. La cuadrícula debía completarse, manteniendo presente que en cada fila y columna no podían aparecer edificios con la misma altura (Figura 1c). Posteriormente se les pidió a los estudiantes que, habiendo colocado todos los edificios en la cuadrícula, escribieran en las celdas vacías los números que representan sus alturas.

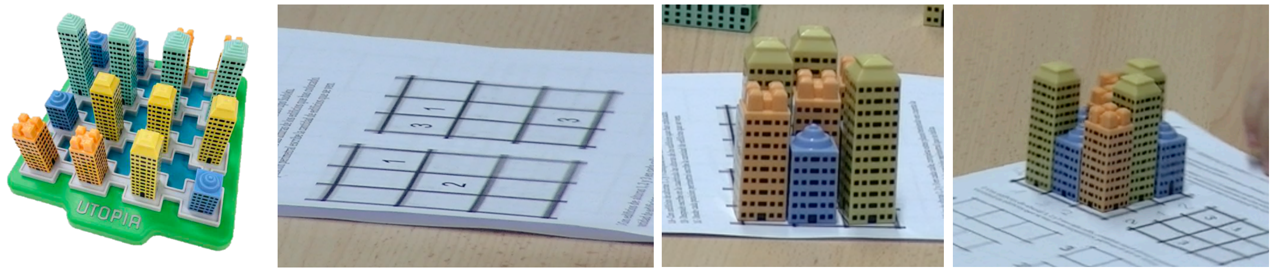


Figura 1. (a) Juego Utopía, (b) cuadrícula 3x3, (c) ubicación de los edificios en cuadrícula 3x3 y (d) edificios visibles desde cada fila y columna.

La segunda tarea pedía a los estudiantes que, al tener los edificios ya ubicados en la cuadrícula, escribieran frente a cada fila y columna la cantidad de edificios que se verían si un observador se hiciera frente a cada una de las líneas de edificios (Figura 1d). Posteriormente se les pidió a los estudiantes que proveyeran la respuesta utilizando solamente los números que se habían escrito en la cuadrícula. En ese momento acontece la siguiente conversación:

	1	3	2	
1	3	1	2	2
3	1	2	3	1
2	2	3	1	2
	2	1	2	

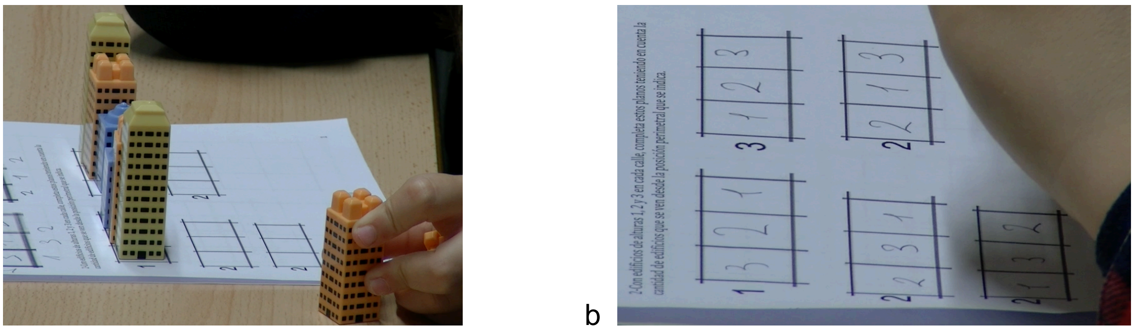
Figura 2. Configuración de la segunda tarea.

Profesor: *Si yo quiero saber cuántos* [edificios] *se ven desde aquí, ¿cómo lo sabría sin montar los edificios?*

Hugo: *Pues si este tiene dos alturas* [edificio inferior de la primera columna, Figura 2] *y este una* [edificio central de la primera columna, Figura 2], *este* [edificio de una altura] *no se ve. Y el de tres es más alto que el de dos, entonces se ven dos* [número ubicado en la parte inferior de la columna, Figura 2].

Profesor: *Perfecto, Elena, explícame cómo has conseguido este 1* [número ubicado a la derecha de la fila central, Figura 2].

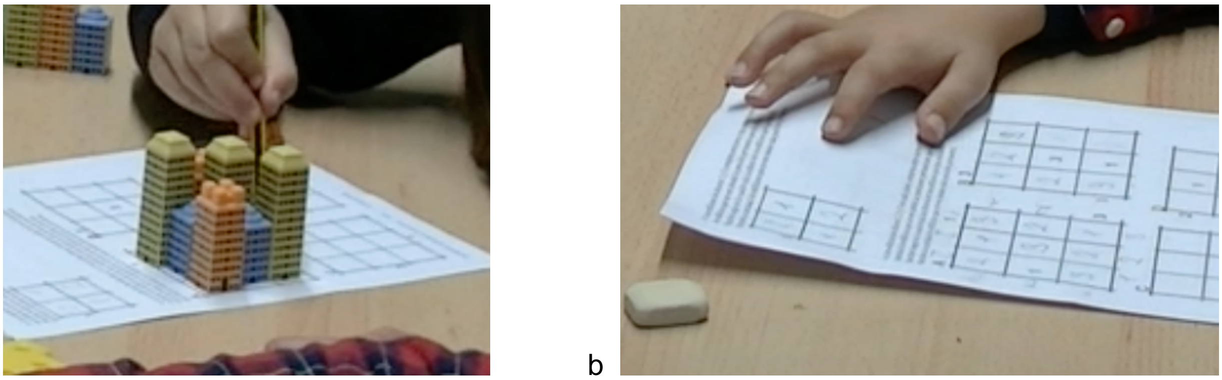
Elena: *Porque el tres es más alto que el de dos y el de uno.*



a b

Figura 3. Ubicando los edificios en una sola línea a partir de la cantidad visible.

La tercera tarea presentaba filas con tres celdas y un número al frente de cada fila (Figura 3a). Este número representaba la cantidad de edificios que se podían observar desde esa posición a lo largo de la fila. Los estudiantes debían ahora ubicar los edificios de tal forma que la condición impuesta por el número se satisfaciera y luego escribir en cada celda vacía el número que representa la altura del edificio a ubicar allí (Figura 3b). La cuarta tarea proponía una cuadrícula 3x3 en la que algunas celdas contenían números que representan la altura de los edificios. Los estudiantes debían ubicar los respectivos edificios en las celdas numeradas y colocar los edificios en las celdas restantes, conservando la condición de que en cada fila o columna no se repitieran edificios de la misma altura (Figura 4a). Posteriormente debían determinar la cantidad de edificios que se veía frente a cada fila de edificios (Figura 4b).



a b

Figura 4. (a) Configuración de la tarea 4. (b) Edificios visibles desde cada fila.

La quinta tarea ofrecía una cuadrícula de 4x4 (Figura 5). Ahora se debían utilizar todas las fichas disponibles en una configuración similar a la anterior tarea, con la novedad de contar ahora con más fichas.

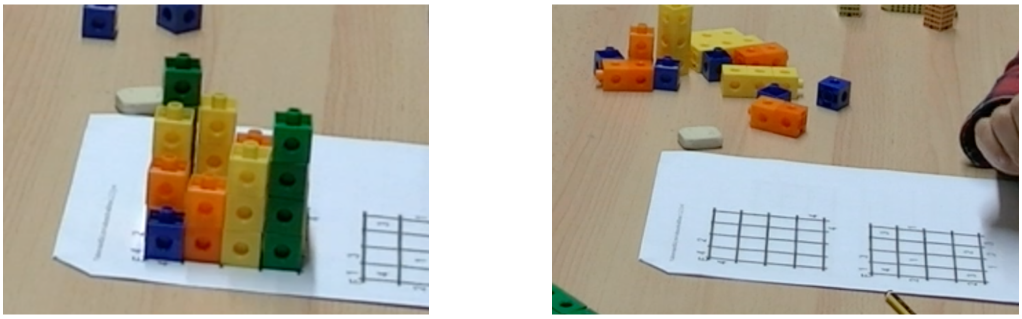


Figura 5. Configuración de la tarea 5.

En la última tarea, uno de los profesores realizó una representación en la pizarra como la mostrada en la Figura 6. Los estudiantes debían analizar cada una de las filas y columnas, descartando aquellas que contuvieran números en sus extremos para los cuales no fuese posible distribuir los edificios en esa fila, de forma tal que dichos números representaran la cantidad de edificios visibles desde cada extremo. La siguiente conversación tiene lugar al resolver las filas.

	2	2	1	
3				3
1				1
1				2
	3	2	3	

Figura 6. Cuadrícula presentada en la pizarra.

Profesor: [Señalando la primera fila] *¿Tiene sentido que acá aparezca un tres y acá aparezca otro tres?*

Hugo: *Um, no.*

Profesor: *¿Por qué no?*

Hugo: *Porque no se puede repetir en la fila… y no se pueden ver tres en el mismo* [refiriéndose a cada extremo].

Profesor: *O sea que si yo viera tres* [edificios] *desde acá* [señala uno de los extremos de la primera fila], *¿desde el otro lado cuántos tendría que ver?*

Hugo: *Uno*.

Profesor: *¿No puedo ver dos?*

Hugo: *Um, no.*

El recorrido que han seguido los estudiantes a través de las tareas los ha llevado a separarse del material concreto para determinar la solución. La naturaleza de las situaciones propuestas ha demandado un trabajo inicial con este material y posteriormente, dentro de la misma tarea, intentar dar respuesta a los interrogantes planteados sin acudir a estos recursos. Esta separación se aprecia en las conversaciones que se muestran en este apartado. Además, debe señalarse la complejidad de la tarea propuesta, pues el estudiante debe acudir a acciones mentales y procesos de visualización para contemplar la configuración estudiada desde distintos puntos de vista.

Profesor: *Miren esta segunda fila, un uno y un uno. ¿Tiene sentido que desde un lado se vea solo un edificio y desde el otro se vea un solo edificio?*

Elena: *No, porque si miras el primer uno* [a la izquierda], *tendrías que poner una ficha de dos, después una ficha de uno y después, para que desde el otro lado puedas ver uno, tendría que ser una ficha más grande que la del dos.*

Profesor: *Si quieres dime qué altura le coloco a cada uno* [valores numéricos en celdas].

Elena: *Dos* [celda izquierda], *después el uno* [centro] *y después el tres* [derecha].

Profesor: *Ah, pero desde aquí no estoy viendo uno, ¿desde aquí cuántos* [edificios] *veríamos?*

Elena: *Dos.*

Profesor: *Dos, y ¿hacia allá?* [de derecha a izquierda]

Elena: *Uno*.

Profesor: *¿Entonces no sería posible ver uno y uno? ¿De manera simultánea desde cada lado? Pues desde aquí sí se cumple, ¿pero desde el otro lado que pasaría*?

Elena: *Que se verían dos.*

Profesor: *¿Y no puede que se vea uno? ¿Ni siquiera si yo los cambio?*

Elena: *No*.

Una vez más los estudiantes, específicamente Elena, da solución a la pregunta formulada por el profesor sin acudir al material concreto. Ella tiene claro que el edificio más alto debe ir en uno de los extremos de la fila, para así garantizar que solo se pueda ver uno desde esa posición. También tiene claridad sobre la insuficiencia de intercambiar los otros edificios, pues el resultado no podría ser el deseado.

Profesor: *Que desde un lado se vea uno y desde el otro lado se vean dos* [última fila].

Hugo: *Yo creo que sí…*

Profesor: *Déjalo ahí, no me des valores* [numéricos para cada celda].

Elena: *Yo creo que no*.

Profesor: *Que no es posible. Están pensando diferente. Veamos quién convence a quién. ¿Tu argumento cuál es Elena?*

Elena: *Porque si yo tengo uno* [extremo izquierdo de la fila inferior], *tengo que poner, por ejemplo, primero el tres, dos y el uno. Y para la otra parte vería tres* [edificios].

Profesor: *Y ya con eso dices que por eso no es posible. ¿Qué dices Hugo?*

Hugo: *Que si donde está el uno pones el dos, donde está el dos pones el uno, se verían dos desde un lado y uno desde le otro.*

Profesor: *Qué dices Elena, ¿Cierto que sí?* [Elena asiente con la cabeza] *Depende de la forma como se articulen estos dos* [números uno y dos].

En este último intercambio entre el profesor y estudiantes, Hugo y Elena ofrecen ideas útiles para dar solución a la tarea. Mientras que Elena reconoce que en uno de los extremos debe ubicarse el edificio más grande, Hugo propone una configuración alternativa a la dada por Elena para poder dar solución a la pregunta hecha por el profesor.

CONSIDERACIONES

Nuestro objetivo era mostrar parte de la experiencia de nuestro diseño instruccional con estudiantes con ACM del nivel de primaria. Para ello presentamos el desarrollo de una de las sesiones de trabajo con los estudiantes involucrados, donde se hizo uso de material concreto, dada la población a la que iba dirigida nuestra propuesta y el potencial que en estos recursos se ha reconocido en la literatura especializada.

De los resultados mostrados en el documento puede reconocerse cómo el material concreto empleado apoyó la transición de los estudiantes por las fases descritas por Bruner (1966). En un momento inicial se requirió emplear los bloques que representaban los edificios para comprender las reglas del juego propuesto a los estudiantes. Sin embargo, por ser estudiantes con ACM, pudo apreciarse que fácilmente ellos se fueron movilizando desde el empleo de material concreto, hasta el empleo de símbolos matemáticos, como lo eran los números que representaban las alturas de los edificios. Esta transición no demandó mucho por parte de los estudiantes, como se pudo apreciar en los intercambios que sostenían con el profesor. Aun así, debe advertirse que el empleo del material dotó de significado la naturaleza de las preguntas elaboradas, específicamente cuando se quería saber cuántos edificios podrían observarse desde cualquier ángulo, por lo que no haber acudido a este recurso posiblemente hubiera llevado a obtener resultados no tan afortunados.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación forma parte del proyecto I+D+i EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) y la ayuda predoctoral EDU2017-84377-R.

REFERENCIAS

Benedicto, C., Acosta, C., Gutiérrez, A., Hoyos, E. y Jaime, A. (2015). Improvement of gifted abilities in a 3d computer environment. En *12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 24–28). Faro, Portugal: Universidad del Algarve.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction* (Vol. 59). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Dimitriadis, C. (2010). *Developing mathematical giftedness within primary schools: A study of strategies for educating children who are gifted in mathematics* (tesis doctoral no publicada). Brunel University School of Sport and Education, Londres. Obtenida de https://core.ac.uk/download/pdf/40030472.pdf

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). Zaragoza: SEIEM.

Jaime, A., Gutiérrez, Á. y Benedicto, C. (2018). Problemas con extensiones. Propuesta para estudiantes con alta capacidad matemática. *Uno*, *79,* 7-14.

Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M. y Heckler, A. (2009). Transfer of mathematical knowledge: The portability of generic instantiations. *Child Development Perspectives*, *3*(3), 151-155.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

McNeil, N. M. y Uttal, D. H. (2009). Rethinking the use of concrete materials in learning: Perspectives from development and education. *Child development perspectives*, *3*(3), 137-139.

Özdemir, D. A. y Işiksal-Bostan, M. (2019). Mathematically gifted students' differentiated needs: what kind of support do they need? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-19. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1658817

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). "Concrete" computer manipulatives in mathematics education. *Child Development Perspectives*, *3(*3), 145-150.

Swan, P. y Marshall, L. (2010). Revisiting mathematics manipulative materials. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *15*(2), 13-19.

COMPETICIONES MATEMÁTICAS

Math competitions

Torres-Moliner, I., Berzosa-Tejero, M.P.

Programa CRACMAT (España)

Resumen

Las competiciones son un espacio adecuado donde los alumnos de alta capacidad matemática desarrollan el reto personal para superar niveles y punto de encuentro con compañeros con los mismos intereses a través de la participación. Empezamos a nivel nacional y lo extendimos a nivel internacional. Challenge Day y Liga Cracmat se han realizado a nivel nacional con la proyección de extenderlas en futuras ediciones.

Palabras clave: *reto personal, superación, aprendizaje, participación, conocimiento*

Abstract

The competitions are properly place for high ability math children, because it is a situation to develop their math talent, also they improve their levels and it is a meeting point with another children as similar talent through participation. We began at national level and after we celebrated as international level. Challenge Day and Cracmat Ligue began only as national competition but they will be international in the future.

Keywords: *own level, overcoming, learning, participation, knowledge*

COMPETICIÓN

La competición es algo intrínseco en los seres humanos. Los alumnos/as con altas capacidades se sienten motivados cuando han de competir. Es muy importante para ellos/as sentirse aceptados por parte de su grupo, y esta actividad puede ser propicia para integrarse en la clase y relacionarse con otros alumnos/as con idénticos intereses matemáticos en otros espacios de encuentro donde cada alumno/a desarrolla sus habilidades, sus capacidades y sus metas intelectuales pueden avanzar a otro ritmo.

En este espacio se encuentran con retos y desafíos que les suponen dificultad y que responden a su necesidad de resolver actividades con niveles apropiados para su talento. Estas competiciones suponen una ayuda también para los padres y profesores porque se trabaja el aprendizaje, motivación, creatividad, precisión, comunicación.

También fomentamos en la competición matemática, el cálculo, la lógica matemática, resolución de problemas,… para alumnos de primaria ya que son menos frecuentes jornadas matemáticas en estas etapas.

COMPETIR

Competir lo unimos a motivación. Tenemos la experiencia de que los alumnos cuando participan en un campeonato tienen las expectativas con horizontes más amplios, así que cada curso

Torres-Moliner, I. y Berzosa-Tejero, M. P. (2021). Competiciones matemáticas. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 167-174). Logroño: Universidad de La Rioja.

procuramos desarrollar esta capacidad y aumentar la motivación presentando competiciones para que tengan un espacio donde poder hacerlo.

Para prepararlos para estas competiciones trabajamos principalmente el RETO PERSONAL y PARTICIPACIÓN. Reto personal para aprender a ganar y a perder y que sirva de punto de despegue para la próxima competición, reforzando así su preparación académica; la participación subyace en el modo de trabajar. Participación que desglosamos primero en haberse decidido a hacerlo, segundo en realizarlo, tercero en alegrarse de los resultados propios y ajenos. Descubriendo la cantidad de alumnos que hay con los mismos intereses.

MEDALLAS O LOGROS

La mejor compensación en un trabajo es el haberlo hecho. Pensamiento que se va adquiriendo con el tiempo. Tenemos la experiencia de que cuando hay un reconocimiento por el esfuerzo puesto, supone un incentivo para seguir trabajando. Vas tomando conciencia de que te consideran y de que tu trabajo sirve.

Se trata de conseguir logros y a ser posible medallas, no, colgarse medallas. Por eso nos planteamos si era conveniente otorgarlas. Con esta situación y en la forma de convivencia actual y por tantos motivos. Nuestra decisión fue clara, Sí a los premios por el esfuerzo y trabajo. Un niño distingue un premio y un logro lo tiene más complicado. No supuso un gran desembolso, si más trabajo, pero el resultado superó lo esperado.

COMPETICIONES REALIZADAS

Jornada Matemática Valencia

Este proyecto está dirigido a despertar y promover el sentido útil y lúdico de las matemáticas y de las habilidades que esta materia conlleva: la capacidad de cálculo, la lógica y el razonamiento. Y de este modo influir en el proceso de aprendizaje de esta asignatura más allá de lo que permite el currículo escolar.

Proyecto educativo que genera actividades escolares de refuerzo, estímulo y participación de profesores y padres que como sumandos hacen posible que suba el índice intelectual tanto a nivel personal como en el Centro escolar.

Actividad que sale adelante con el trabajo y el esfuerzo en la enseñanza, de profesores que forman el Comité y que se materializa con la colaboración económica de entidades que hacen posible su realización contribuyendo al desarrollo intelectual de la sociedad.

"CONSTRUIR FUTUROS, AYUDAR A PENSAR" es el lema de este Proyecto, teniendo como base la participación y el reto personal.

Dirigida a alumnos desde tercero de Primaria hasta primero de BAC agrupados por cursos.

Objetivos de la Jornada Matemática Valencia

Incentivar a los jóvenes mediante el juego y trabajo en Matemáticas. Potenciar el desarrollo de MEMORIA y RAZONAMIENTO. Proporcionar nuevas estrategias.

Mejorar el rendimiento Personal. Convivir con otros escolares. Participación alumnos/profesores, Intercambio de Métodos y Formación Profesores.

Challenge Day

“Saca punta a tu talento”

CHALLENGE DAY, actividad dirigida a alumnos desde 3º de primaria hasta 6º de primaria agrupados en 2 niveles. Primer nivel: 3º y 4º, Segundo nivel 5º y 6º.

La forma de participar es por parejas, siempre dentro de los niveles correspondientes. Los participantes, actuando los dos a la vez, tienen que resolver 7 desafíos: de ingenio, estrategia matemática y habilidad numérica. A veces con resultados sorprendentes por su forma de resolución y por su rapidez en la ejecución. Otros retos los tienen que resolver usando el ordenador con juegos lógicos y programas de cálculo.

Challenge Day es un espacio de acción para construir futuros matemáticos con el eslogan de Saca punta a tu Talento.

El contenido del CHALLENGE es: 1º) CHALLENGE resolver 3 RETOS de INGENIO, 2º) CHALLENGE resolver 2 RETOS de INGENIO, 3º) CHALLENGE resolver 2 RETOS de HABILIDAD NUMÉRICA, 4º) CHALLENGE resolver actividad para encontrar la clave para abrir el Candado, 5º-6º) CHALLENGE resolver 2-3 actividades de Matemática Recreativa, 7º) CHALLENGE resolver actividad de cálculo con material manipulativo.

ROL del MONITOR, se trata de incorporar principalmente los mismos criterios para que los participantes tengan la misma evaluación dentro de lo posible. Para ello además de reuniones previas para información del desarrollo del campeonato tienen su protocolo que sirve para aunar criterios, por ejemplo: Ajustarnos al tiempo previsto por pareja. Si hay relación familiar con algún participante, les hace la prueba otro de los jueces. Y algún aviso: Sobretodo llevar reloj (móvil sirve de cronómetro). Tendréis papel y lápiz. No hay goma, se tacha y se vuelve a hacer.

Tabla 1. Registro de cada participante.

CHALLENGE DAY				
NIVEL 1 NOMBRE-APELLIDOS Nº 1	1-	2-		
CHALLENGE	PUNTUACIÓN			TOTAL
INGENIO 1 5min	1 RETO 1	2 RETO 1	3 /RET 1	3+1
MATEMÁTICA/RECREATIVA 8 min	MAT/RECREATIVA 1 1	MAT/RECREATIVA 2 - 1		2+1
CANDADO 8 min	CLAVE 1 punto por letra			3+1
HABILIDAD/NUMÉRICA 5 min	Nº 1 1	Nº 2 1		2+1
INGENIO 2 3 min	1 RETO 1	2 RETO 1		2+1
MANIPULATIVO 7 min	CÁLCULO 1	TABLERO 1		2+1
INFORMÁTICA 8 min	CÁLCULO Nivel 1 y 2: 2/1	JUEGO LÓGICO 3		
TOTAL 44 min				

El registro de cada participante es el que adjuntamos (Tabla 1), de manera que en cada prueba son calificados y al final con los puntos conseguidos, lo entregan en el punto de encuentro al jurado.

Cada reto tiene su puntuación y se añade 1 punto cuando se realiza el reto con menos tiempo. La persona que controla el último reto, hace la suma total. Cada pareja lleva su ficha y la entrega al juez de la mesa cada vez que resuelve un CHALLENGE (Figura 1). Mientras el jurado calificador examina las mejores puntuaciones, los alumnos tienen un rato de ocio y la entrega de las medallas o premios se hace a continuación, así los participantes tienen el campeonato y los resultados en el mismo día. Facilita tanto a los padres como a los profesores.

Figura 1. Estudiantes resolviendo un Challenge.

Ejemplos CHALLENGE DAY nivel 1

SUSTITUYE las letras por números de manera que la misma letra tenga el mismo valor y que el resultado de la suma sea correcto.

$$\begin{array}{r} A\ B \\ +\ B\ B \\ \hline A\ A\ C \end{array}$$

EL RESULTADO es la clave para abrir el candado.

Fíjate y encuentra la relación que hay en los números y su resultado y sabrás escribir el número que falta:

1 2 3 = 2 3

2 4 5 = 8 5

6 3 1 = 1 8 1

2 7 9 = ...

Informática

Actividades de juegos lógicos por niveles y se les cronometra el tiempo, se evalúa el nivel alcanzado.

Liga CRACMAT Premium

Busca fomentar, sistematizar y promover la práctica de estrategias de razonamiento y procesos de Cálculo. La Liga convoca un Campeonato entre alumnos de distintos sitios y edades. La Liga –punto de unión- para lograr un determinado objetivo: en este caso, el reto personal de cada participante, se hace por compartir un interés, un esfuerzo, aplicar estrategias y planes de acción en vistas a un objetivo común.

Conseguir un espacio matemático

Los premios son virtuales pero el mayor premio es el que cada uno ha conseguido participando. Como en toda LIGA, cada premio puede tener varios alumnos al haber conseguido la misma puntuación.

Surgió dentro del tiempo de confinamiento para propiciar un espacio matemático dentro de la rutina obligada por la situación y comprobando la facilidad de usar herramientas como ordenador o Tablet por parte de los alumnos familiarizados con Zoom.

Dirigida a alumnos desde 2º de primaria hasta 1º de eso.

El contenido de la Liga es: resolución de actividades de habilidad numérica y actividades de reto lógico. Los participantes están agrupados por niveles. La duración es de 20 - 25 minutos máximo.

La parte administrativa ha sido muy asequible con los instrumentos que tenemos – QR - para la inscripción, para logística mail, drive etc… Como corresponde a todo campeonato tuvimos premios virtuales, Medalla de oro, plata y bronce. Accésits y diplomas.

El desarrollo de la prueba por Zoom fue con este horario según niveles y con el tiempo ajustado para mandar los ejercicios resueltos. Al hacerlo por Zoom se podía comprobar aproximadamente que cada alumno lo hacía solo y también daba la posibilidad de participar desde otras ciudades como así fue.

<u>HORARIO DE CONEXIÓN:</u> *2º y 3º de PRIMARIA*

17:55 ACCESO A ZOOM

18:00 EMPIEZA LA LIGA

18:25 MANDAR LAS RESPUESTAS POR CORREO

<u>INDICACIONES:</u>

<u>MATERIAL QUE SE NECESITA:</u>

herramienta digital para participar a través de la plataforma zoom, folio, lápiz, goma, bolígrafo

<u>CONTENIDO</u>

En la pantalla aparecerán las actividades:

3 actividades de habilidades numéricas para 2º, 3º, 4º y 5º de Primaria

4 actividades para 6º de Primaria y 1º de ESO

1 RETO LÓGICO PARA TODAS LAS CATEGORÍAS

DESARROLLO DE LA PRUEBA:

Desde 2º de primaria hasta 5º de Primaria disponen de 25 minutos para la prueba.

1º Aparecerá en pantalla la actividad

2º La resuelven en el folio que tienen de material en casa.

3º Rellenan el formulario con el resultado.

4º Hay que enviarlo en el tiempo indicado

Ejemplo 4º-5º Primaria (Figuras 2, 3 y 4)

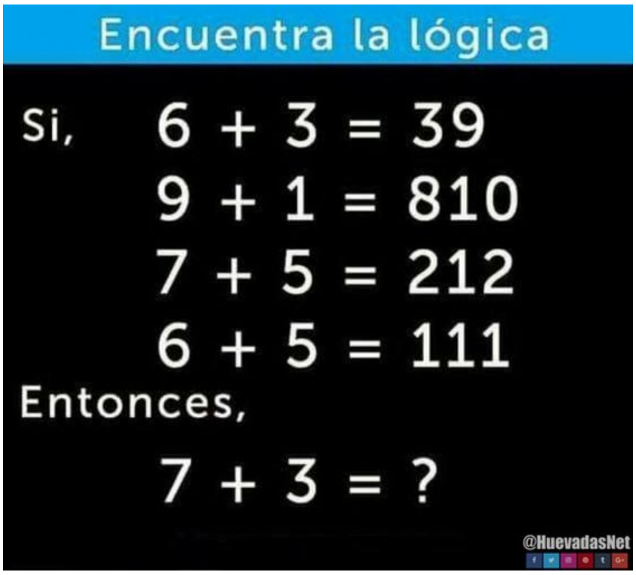


Figura 2.

Figura 3.

Figura 4.

Nos parece que trasmitir algunos testimonios de esta iniciativa reflejan el interés y eficacia del mismo. Estos son dos ejemplos:

> Gracias por todo.
> Independientemente del resultado, mi hijo ha disfrutado mucho estos pocos días de preparación para la prueba Cracmat con los materiales que me envió. Gracias por enviárnoslos.
> Es un niño que todo lo que sean retos matemáticos le encantan (que no impliquen las Matemáticas tal cual se enseñan habitualmente en los colegios...sino que vayan "más allá"). Eso y el ajedrez. Son su pasión.
> Enhorabuena por fomentar tanto el esfuerzo y la superación con esta idea de la Liga Cracmat.
> Lo ha pasado en grande.
> Saludos.

> Muchísimas Gracias por el esfuerzo y la colaboración altruista que habéis realizado.
> Por favor comunicadnos cualquier actividad de este estilo para participar.
> Un Saludo
> Gran idea y gran resultado.

Estas tres competiciones tienen en común proporcionar encuentros a alumnos con alta capacidad matemática a través de ejercicios de lógica matemática y Cálculo, si bien difieren en su puesta en práctica. La j.m.v. lleva ya 29 años y la participación tan grande nos ha llevado a realizarla en 2 fases con la colaboración de la UPV, Challenge Day la tuvimos en una escuela y el dinamismo de sus pruebas nos llevaba a disponer de varias aulas, informática … mientras que Liga Cracmat tiene como soporte el ordenador, tablet…. La realizamos por Zoom. También se diferencian en la duración y conocimiento de los resultados. En la 1ª y 3ª hay un espacio de tiempo para poder corregir e informar, mientras que en Challenge Day se resuelve en el mismo día. Respecto a lo académico la j.m.v. se presta a que los ejercicios sean más numerosos y complicados ya que el tiempo que disponen es mayor, en las otras dos se basa más en el ingenio y lógica matemática, además la j.m.v. va dirigida alumnos desde 3º de primaria hasta 1º de bachillerato, mientras que en las otras, los cursos son distintos, abarcan desde 1º de primaria hasta 1º de ESO en Liga Cracmat y desde 3º de primaria a 6º Challenge Day.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a Montse, jefe de estudios que oyó mi propuesta y me dio carta blanca para empezar, a Lola que colaboró full time desde el principio sin mirar el reloj y como no a los Sponsor La Caixa, U.P.V, y tantos que hicieron posible que creciera este proyecto en beneficio de la Comunidad educativa, también a la cantidad de padres y profesores que colaboraron en el

desarrollo de la misma y a las Fundaciones Dasyc, Iniciativa Social que hicieron lo mismo en las distintas competiciones.

OLIMPIADA RECREATIVA DE MATEMÁTICA 2019: UN DIAGNÓSTICO INICIAL DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA DE VENEZUELA

Olimpiada Recreativa de Matemática 2019: An initial diagnosis of primary education of Venezuela

Urdaneta, I. [a], Niño, L. [b], Trabucco, J. [b], Calatayud, L. [a]

[a] Fundación Motores por la Paz (Venezuela). [b] Universidad Metropolitana (Venezuela)

Resumen

Las evaluaciones estandarizadas de la competencia matemática han permitido identificar áreas en las que es necesaria la intervención con prácticas educativas especializadas. La investigación realizada tuvo como objetivo describir el rendimiento matemático de los niños de los últimos cuatro grados de educación primaria en Venezuela. La muestra estuvo compuesta por un total de 16194 niños y niñas. La evaluación se realizó a través de las pruebas de la fase preliminar de la Olimpiada Recreativa de Matemática, para las que se utilizó la prueba Canguro Matemático. Los resultados evidencian que, si bien no existen diferencias significativas por sexo, estas sí existen entre los tipos de colegio, siendo los colegios privados los que obtuvieron mejor rendimiento; el comportamiento del rendimiento en las competencias matemáticas analizadas es análogo en todos los grados.

Palabras clave: *competencia matemática, educación primaria, rendimiento matemático, olimpiadas matemáticas*

Abstract

Standardized assessments of mathematical competence have identified areas where intervention with specialized educational practices is needed. The research carried out was aimed at describing the mathematical performance of children in the last four grades of primary education in Venezuela. The sample was composed of a total of 16194 boys and girls. The evaluation was made through the tests of the preliminary phase of the Olimpiada Recreativa de Matemática, for which the Mathematical Kangaroo test was used. The results show that although there are no significant differences by sex, these do exist between the types of schools, with private schools being the ones that obtained the best performance; the behavior of mathematical competences is analogous in all grades.

Keywords: *mathematical competence, elementary education, mathematical performance, mathematical olympics*

INTRODUCCIÓN

Las Olimpiadas de Matemática iniciaron en el mundo con diferentes intereses, entre ellos la localización de estudiantes especialmente destacados en el área para potenciar su talento, así como una plataforma para promover el desarrollo e intercambio de programas y prácticas

Urdaneta, I., Niño, L., Trabucco, J. y Calatayud, L. (2021). Olimpiada Recreativa de Matemática 2019: Un diagnóstico inicial de la Educación Primaria de Venezuela. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 175-182). Logroño: Universidad de La Rioja.

docentes (Olimpiada Mexicana de Matemática, 2019, en adelante OMM). En 1992 se inicia la Olimpiada Recreativa de Matemática (en adelante ORM) en Venezuela, aplicando las pruebas del Canguro Matemático (Nieto, 2005), teniendo como objetivo “desarrollar estrategias para la enseñanza de la Matemática, mejorar el nivel académico y estimular en los niños el uso de sus capacidades intelectuales...” (ORM, 2019a, Inicio, párrafo 1).

Algunos autores (Campbell, 1996; Navarro, 2017) expresan que las Olimpiadas de Matemáticas generan grandes beneficios para los participantes, dado que los estudiantes de mejores resultados obtienen mayores oportunidades para ingresar a universidades élite y extender sus estudios a nivel de postgrado para continuar con investigaciones en áreas académicas usualmente relacionadas con las matemáticas, lo que también está relacionado con su motivación al logro y resultados escolares (Campbell, 1996). Por lo que las Olimpiadas Matemáticas en general constituyen un apoyo valioso en el desarrollo del talento intelectual matemático (Nieto, 2005; Kenderov, 2006; Borrero, 2020).

En cuanto al desarrollo de programas académicos en el área de matemática, varias son las estandarizaciones que intentan promover mejoras en el nivel académico de las diferentes etapas educativas, como por ejemplo los Informes PISA de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2019, 2020, en adelante OCDE) o las pruebas SABER del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (en adelante ICFES, 2018; Borrero, 2020). Las pruebas estandarizadas han permitido un análisis del desempeño académico de los estudiantes en diferentes países a partir del cual, por ejemplo, se caracterizó en Colombia la brecha de rendimiento entre establecimientos educativos, donde los colegios privados obtienen mejores resultados en las pruebas, como es común a nivel de Latinoamérica (Cerda, Ortega, Pérez, Florez y Melipillán, 2011); así mismo, se resaltó una diferencia entre géneros más amplia a la encontrada en la mayoría de los países, donde los estudiantes masculinos obtuvieron un rendimiento en matemática (ICFES, 2018; OCDE, 2019). Estas diferencias entre géneros, que evidencian mejor rendimiento en el área matemática o lógico-matemática en el grupo masculino, se han encontrado en investigaciones en otros países de América Latina como Chile donde también se caracterizó diferencias de rendimiento acordes a la edad y al grado en curso (Cerda et al., 2011).

Estos análisis han permitido un avance progresivo en los niveles de conocimiento en diferentes áreas evaluadas en Colombia (ICFES, 2018) y en la manera en la que internacionalmente se estudia la proficiencia matemática a través de un enfoque de competencias que originalmente fue propuesto por el National Council of Teachers of Mathematics (2014) en Estados Unidos. Ser matemáticamente competente no es solamente conocer los contenidos conceptuales y procedimentales, sino además saber usarlos en una variedad de situaciones y contextos de manera flexible, es decir, supone saber qué matemáticas usar, cómo usarlas, cuándo usarlas y por qué es pertinente usarlas (Rico, 2006).

Venezuela es uno de los pocos países de América Latina que no participa en ningún sistema de evaluación de la calidad educativa, dejando una falta de datos que son necesarios para el desarrollo de políticas públicas y prácticas docentes basadas en la evidencia (Marvez, 2018). A esta necesidad de una evaluación que permita cuantificar la calidad educativa de las diferentes instituciones, se le ha respondido con una iniciativa que busca no solo la estandarización nacional y la identificación y atención del talento matemático, sino además una respuesta recreativa, descentralizada y colaborativa al problema. Por ello, el objetivo de esta investigación es describir el rendimiento matemático de los niños de los últimos 4 grados de la educación primaria (3°, 4°, 5° y 6° grado) en Venezuela a través de los datos de la ORM en su edición Nº 27.

MARCO

Se asume la definición de competencia matemática como la “capacidad del individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos adecuados e implicarse en las matemáticas de una manera que satisfaga sus necesidades vitales como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (OCDE, 2006).

Las preguntas de la prueba preliminar ORM están planteadas como situaciones-problema en contextos cotidianos del niño y que para ser resueltas demandan de la activación de contenidos matemáticos y la vinculación de estos con la situación.

Las formas de pensar en matemáticas mediante las que se construyen y manipulan representaciones mentales relativas a sistemas matemáticos se pueden tipificar de acuerdo a grupos de contenidos: numérico, geométrico, métrico, aleatorio y variacional (Ministerio de Educación Nacional y Asociación Colombiana de Facultades de Educación, 2006).

Las competencias matemáticas generales (ver Tabla 1) se refieren a los procesos que conectan los contenidos con el objetivo a alcanzar: razonar, argumentar, comunicar, modelar, representar, plantear y resolver problemas, utilizar el lenguaje formal, simbólico y las operaciones (PISA, 2004, referido por Rico, 2006). Para efectos de diseño de la evaluación de la competencia matemática, se sigue el enfoque del ICFES (2017) que reorganiza los contenidos en tres componentes articulados entre sí, y las competencias matemáticas generales en tres bloques. Los componentes son: numérico-variacional (NV), geométrico-métrico (GM) y aleatorio (ALT). Las competencias matemáticas se reagrupan en los siguientes tres bloques:

- *Comunicación, representación y modelación (CRM)*: relacionada con expresar ideas, interpretar, utilizar distintos tipos de representación, describir relaciones matemáticas usando lenguaje escrito, concreto, pictórico, gráfico, algebraico. Describir argumentos, traducir lenguaje formal al lenguaje natural y viceversa.
- *Razonamiento y argumentación (RA)*: relacionada con la capacidad de justificar estrategias y procedimientos en el tratamiento de situaciones problema, de dar explicaciones, formular hipótesis, explorar ejemplos y contraejemplos, estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones, distinguir y evaluar cadenas de argumentos.
- *Planteamiento y resolución de problemas (PRP)*: relacionada con la capacidad para formular problemas a partir de situaciones (dentro y fuera de las matemáticas), justificar elección de métodos e instrumentos para la resolución de problemas; aplicar, comparar y elaborar estrategias y algoritmos; justificar pertinencia de cálculo exacto o aproximado y evaluar la respuesta en el contexto original.

Con esta estructura de componentes-competencias es posible describir, de forma general, habilidades y conocimientos articulados que debe poner en práctica un alumno para la resolución de un problema o el logro de un objetivo, de manera flexible, y tales enunciados dan cuenta de rasgos predominantes de una de las competencias matemáticas en determinado componente.

MÉTODO

Muestra

El análisis de los resultados se dividió en cuatro muestras pertenecientes a los cuatro grados de educación primaria donde se realizó la evaluación de rendimiento. Hubo un total de 3881 niños en 3º grado, con una edad media de 8,413 (D.E. 0,501). Así mismo, en 4º grado la muestra consistió de un total de 4057 niños, con una edad media de 9,431 (D.E. 0,604).

En 5º grado, la muestra estuvo compuesta por un total de 4149 niños, con una edad media de 10,429 (D.E. 0,589). Finalmente, en 6º grado la muestra fue de 4107 niños, con una edad media de 11,441 (D.E. 0,604).

En todos los grados, la muestra tuvo una distribución equitativa de niños y niñas. Los datos fueron recolectados en un total de 140 colegios oficiales y 97 colegios privados a lo largo del territorio nacional de Venezuela.

Variables e instrumentos de evaluación

Como variables descriptivas de la muestra se recolectaron las variables:

- *Tipo de Colegio*: variable dicotómica de dos opciones. Colegios Oficiales, que son aquellos bajo la administración pública o que son financiados en alguna medida por esta, y Colegios Privados, que son aquellos gestionados por un ente privado.
- *Edad*: variable continúa medida en años cumplidos al momento de presentar la prueba, por auto reporte del estudiante.
- *Sexo*: variable dicotómica de dos opciones (femenino o masculino), medida por auto reporte del estudiante.
- *Rendimiento matemático*: suma simple del número de respuestas correctas, medida con la prueba preliminar de la ORM compuesta por los 24 ítems diseñados por Canguro Matemático, correspondientes al año 2019, y traducidos desde el inglés por profesores locales; se aplicó la misma prueba para los grados 3º y 4º, y para 5º y 6º.
- *Competencias matemáticas y componentes matemáticos*: variable derivada del rendimiento matemático; cada ítem se corresponde con un rasgo de una competencia y componente específico. En total, la configuración de las pruebas es la siguiente (Tabla 1):

Tabla 1. Distribución de los ítems en la prueba en base a las competencias y componentes.

	3º y 4º Grado		
Competencias/Componentes	**NV (8)**	**GM (10)**	**ALT (6)**
CRM (3)		9	6, 7
RA (9)	1, 3, 5, 22	2, 4, 11, 13, 18	
PRP (12)	8, 17, 16, 19	14, 15, 21, 10	12, 20, 23, 24
	5º y 6º Grado		
Competencias/Componentes	**NV (14)**	**GM (8)**	**ALT (2)**
CRM (3)	2, 7	1	
RAZ (10)	3, 9, 14	4, 5, 6, 10, 11	22, 23
PRP (11)	8,12,13,15,16, 17, 19, 21, 24	18, 20	

Dentro de la tabla se incluye el número de ítem extraído de la prueba Canguro. Entre paréntesis, a la derecha de las iniciales, se señala el número total de ítems de cada competencia y/o componente.

A continuación, se ilustra con un ítem asociado a cada competencia y componente, el tipo de preguntas de la prueba analizada. Los señalados como 3.1, 3.2 y 3.3 corresponden a la prueba de 3° y 4°, y aquellos etiquetados como 5.1, 5.2 y 5.3 corresponden a la de 5° y 6°:

3.1 (CRM - ALT): "Jorge junta sus calcetines de tal manera que los números coincidan. ¿Cuántos pares puede juntar?" (Completa la pregunta un grupo de figuras: una docena de calcetines en distintas posiciones, con números entre 1 y 8, que aparecen, a lo sumo, en dos calcetines)

3.2 (RA - GM): "Cuatro tiras se tejen de forma como se muestra en la figura (dos tiras horizontales claras y dos verticales oscuros, entretejidas). ¿Qué puedes ver detrás de la figura?"

3.3 (PRP- NV) "En una granja hay solamente vacas y ovejas. El número de ovejas es igual al número de vacas más 8. El número de vacas es la mitad del número de ovejas. ¿Cuántos animales hay en total en la granja?"

5.1 (CRM - NV) "En la figura, cada punto vale 1 y cada barrita vale 5. Por ejemplo: (se provee una figura conformada por una barra horizontal con tres puntos encima) vale 8. ¿Qué figura representa al 12?"

5.2 (RA - ALT) "María tiene 9 triángulos pequeños: 3 de ellos son rojos (R), 3 son amarillos (A) y 3 son verdes (V). Ella desea formar un triángulo grande, juntando 9 triángulos pequeños tal que cualquier par de triángulos con un lado común tienen diferentes colores. María coloca unos triángulos pequeños como se muestra en la figura. (Del triángulo grande se conocen los colores de 4 triángulos componentes, pero falta por determinar el color de otros 5 componentes) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdad después de que ella ha finalizado?"

5.3 (PRP - GM) "Ana usó 32 pequeños cuadritos blancos para rodear una pintura 7x7, como se muestra en la figura. ¿Cuántos de esos cuadritos serán necesarios para rodear una pintura 10x10?"

Procedimiento

La prueba preliminar de la ORM, común para los grados 3° y 4°, y para los grados 5° y 6°, se realiza al mismo momento a nivel nacional en los diferentes planteles de educación primaria. Estos datos son recolectados por los educadores responsables en cada colegio y enviados a la sede en Caracas, Venezuela, para su análisis.

RESULTADOS

Diferencias de Rendimiento

Los resultados evidenciaron que no existen diferencias significativas entre las medias de rendimiento para Sexo ni en 3º (t: -1,406; sig.: ,159 > 0,05; gl 3805,751), 4º (t: ,139; sig.: ,889 > 0,05; gl 3960), 5º (t: ,346; sig.: ,730 > 0,05; gl 3942,180), ni 6º (t: ,368; sig.: ,714 > 0,05; gl 3866,431).

En cambio, se encontraron diferencias significativas entre las medias de rendimiento de Tipo de Colegio (Oficial y Privado) en 3º (t: 17,754; sig.: ,000 < 0,05; gl 3879), 4º (t: 19,882; sig.: ,000 < 0,05; gl 4055), 5º (t: 29,238; sig.: ,000 < 0,05; gl 2277,860) y 6º (t: 21,171; sig.: ,000 < 0,05; gl 2304,107), siendo que los colegios de tipo privado tienen sistemáticamente mejor rendimiento total así como en la mayoría de los ítems, en cada uno de los grados

Medias de rendimiento

Se observa que en 4º y 6º grado tuvieron mejores puntajes en sus respectivas pruebas (Tabla 2).

Tabla 2. Estadísticos descriptivos.

	3º			**4º**			**5º**			**6º**		
	N	Media	D.T.	N	Media	D.T.	N	Media	D.T.	N	Media	D.T.
Resultados Nacionales	3881	8,78	4,08	4057	9,79	4,02	4149	9,32	3,93	4107	10,50	3,98
Colegios Oficiales	2429	7,92	3,98	2638	8,91	3,78	2834	8,16	3,39	2812	9,62	3,64
Colegios Privados	1452	10,23	3,83	1419	11,42	3,94	1315	11,80	3,88	1295	12,40	4,02

Análisis de las competencias / componentes

Los resultados nacionales reflejan el promedio de respuestas correctas de los ítems ubicados en las categorías de análisis (componente, competencia). Para comparar los rendimientos por competencias, se toma el rendimiento promedio relativo al número de ítems vinculados con la competencia, que es un número real en el intervalo [0,1]:

Tabla 3. Rendimiento promedio relativo (RPN) de cada grado por competencia.

			RPN Rel.			RPN Rel.	
Competencias matemáticas	Planteles	Nº de Ítems	**3º**	**4º**	Nº de Ítems	**5º**	**6º**
Comunicación, representación y modelación (CRM)	Todos	3	0,534	0,605	3	0,728	0,799
	Oficiales		0,494	0,563		0,662	0,753
	Privados		0,603	0,683		0,872	0,900
Razonamiento y argumentación (RA)	Todos	9	0,503	0,549	10	0,377	0,430
	Oficiales		0,458	0,507		0,333	0,402
	Privados		0,578	0,627		0,472	0,491
Planteamiento y resolución de problemas (PRP)	Todos	12	0,221	0,253	11	0,305	0,345
	Oficiales		0,193	0,222		0,258	0,304
	Privados		0,268	0,312		0,406	0,435

Respecto a las competencias (Tabla 3), el comportamiento cualitativo del rendimiento es análogo en todos los grados, tanto en planteles oficiales como privados: el mayor rendimiento se observa en la interpretativa, y el menor, en la del planteamiento y resolución de problemas.

Tabla 4. Rendimiento promedio relativo (RPN) de cada grado por componente.

			RPN Rel.			RPN Rel.	
Componentes matemáticos	Planteles	Nº de Ítems	**3º**	**4º**	Nº de Ítems	**5º**	**6º**
Numérico - Variacional (NV)	Todos	8	0,426	0,471	14	0,398	0,445
	Oficiales		0,387	0,432		0,349	0,406
	Privados		0,491	0,544		0,504	0,530
Geométrico - Métrico (GM)	Todos	10	0,386	0,431	8	0,424	0,486
	Oficiales		0,345	0,395		0,370	0,449
	Privados		0,454	0,496		0,540	0,567
Aleatorio (ALT)	Todos	6	0,259	0,294	2	0,177	0,186
	Oficiales		0,232	0,257		0,159	0,169
	Privados		0,303	0,362		0,216	0,222

Referente a los componentes (Tabla 4), el menor rendimiento, por diferencia, se observa en los ítems asociados al componente aleatorio, en cualquier tipo de plantel. En 3° y 4°, el mejor rendimiento se concentra en ítems asociados al componente numérico-variacional, y en 5° y 6°, en el geométrico-métrico.

Análisis de Resultados

El análisis de diferencias de rendimiento permitió constatar que estas no son significativas entre niños y niñas en ninguno de los grados, como sí ocurre en otras poblaciones latinoamericanas (Cerda et al., 2011; ICFES, 2018; OCDE, 2019).

Entre las diferencias que sí resultaron significativas destacan las encontradas por Tipo de Colegio en todos los grados. Éstas podrían sugerir una brecha en la calidad instruccional entre los tipos de instituciones que si bien se ha encontrado en otros países (OCDE, 2020), resalta la falta de oportunidades equitativas que tienen los niños que estudian en colegios oficiales. Así mismo, entre las pruebas comunes por grados, se encontró mejor rendimiento en 4º y 6º; estas diferencias son consistentes con lo encontrado por Cerda, et al. (2011) y probablemente respondan tanto a la preparación instruccional como al proceso madurativo natural de los estudiantes.

En el análisis de competencias realizado de acuerdo a la organización propuesta por el ICFES (2017), se observa el mejor rendimiento, consistentemente, en la competencia interpretativa, en particular, en la capacidad de traducir relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente. El rendimiento en ítems de la competencia argumentativa orientados a identificar relaciones, generalizar propiedades, establecer conjeturas y verificarlas, explorar ejemplos y contraejemplos está ubicado en segundo lugar y en el último, el menor rendimiento, se encuentra en el grupo de ítems vinculados con la formulación de problemas a partir de una situación, en desarrollar estrategias para resolverlos y evaluar la respuesta en el contexto original; en todos los grados, este rendimiento es menor a la mitad del observado en la competencia interpretativa.

De las diferencias de rendimiento en las competencias, destaca que las mayores brechas entre planteles oficiales y privados se encontraron en la prueba de 5º y 6º grado, lo que sugiere que las diferencias se acentúan a lo largo de la escolaridad primaria. Así mismo, es importante destacar que existen menores diferencias entre los grados pareados por prueba de un mismo tipo de colegio (oficial o privado), que entre los diferentes tipos de colegios de un mismo grado (oficial y privado de tercer grado, por ejemplo). Estas diferencias parecen destacar la importancia de las oportunidades educativas en el desarrollo de la competencia matemática en general.

El análisis de componentes realizado según el marco definido por el ICFES (2017) evidencia que existe un rendimiento bastante más bajo en los ítems asociados al componente aleatorio, comparado con el rendimiento en los otros dos componentes, reflejado en una dificultad general para el razonamiento lógico relacionado con los procesos de conteo y para el manejo de situaciones que requieren estimar grados de posibilidad. En cuanto a las habilidades destacadas, los estudiantes de 3º y 4º parecen tener más desarrolladas las destrezas relacionadas con la capacidad para establecer diferencias y similitudes entre figuras bidimensionales acorde a sus propiedades y con resolver problemas de estructura aditiva sencilla. Consistentemente, los estudiantes de 5º y 6º reflejan buenas destrezas para comparar y clasificar figuras bidimensionales o tridimensionales de acuerdo a sus componentes y propiedades, así como para traducir relaciones numéricas expresadas de manera gráfica o simbólica.

Preliminarmente, este análisis nos permite concluir que los perfiles de más alto rendimiento parecen encontrarse mayoritariamente entre los estudiantes de colegios privados, teniendo probablemente mayor fortaleza para expresar ideas, e interpretar y utilizar distintos tipos de representación y relaciones matemáticas, simbólicas o gráficas, y con mayor dificultad para el manejo y resolución de problemas del componente aleatorio. Esto mismo puede observarse en los resultados de los siguientes ciclos de la ORM 2019, donde los primeros lugares los obtuvieron estudiantes con este perfil (ORM, 2019b).

De forma general, parece necesario que, para determinar de manera más precisa las características de los estudiantes de alto rendimiento, se construya una prueba con un mejor balance de los ítems considerando los componentes y las competencias. Una prueba mejor balanceada permitiría hacer una mejor comparación de las fortalezas y debilidades entre los diferentes grados, así como un análisis más adecuado de las áreas que se pudiesen abordar para desarrollar el talento matemático en las aulas de clase, especialmente en los colegios oficiales.

Para futuras investigaciones, es necesario abordar de manera más detallada el análisis de competencias y componentes, haciendo el estudio de las diferencias que pudiesen encontrarse no solo acorde al género o el tipo de colegio, sino también entre los estudiantes de rendimiento promedio y aquellos estudiantes que evidencian especial talento matemático.

REFERENCIAS

Borrero, O. F. (2020). *Análisis del nivel de calidad educativo en Colombia, a partir de los* *resultados de las pruebas PISA en el periodo 2012-2018*. Universidad Militar Nueva Granada. Recuperado de https://repository.unimilitar.edu.co/bitstream/handle/10654/35718/BorreroForeroOswaldoFarid2020.pdf

Campbell, J. R. (1996). Early identification of mathematics talent has long-term positive consequences for career contributions. *International Journal of Educational Research*, *25*(6), 467-522. DOI: https://dx.doi.org/10.1016/S0883-0355(97)86728-6

Cerda Etchepare, G., Ortega, R., Pérez, C., Flores, C. y Melipillán, R. (2011). Inteligencia lógica y rendimiento académico en matemáticas: un estudio con estudiantes de Educación Básica y Secundaria de Chile. *Anales de Psicología/Annals of Psychology*, *27*(2), 389-398.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (2017). *Saber 3º. Guía de orientación: 2017.* Colombia, Bogotá: Ministerio de Educación. Recuperado de https://www.icfes.gov.co/documents/20143/1353827/Guia+de+orientacion+saber+3+2017.pdf

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (2018). *Saber 11º. Guía de Orientación: 2018-2* (2ª ed). Colombia, Bogotá: Ministerio de Educación. Recuperado de https://www.icfes.gov.co/documents/20143/177687/Guia+de+orientacion-saber-11-2018-2.pdf

Kenderov, P. S. (2006, agosto). Competitions and mathematics education. En Institute of Mathematics and Informatics (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 1583-1598). Madrid: Bulgarian Academy of Sciences. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/41537655_Competitions_and_mathematics_education

Marvez, J. R. (2018). Pisa: Termómetro del fracaso escolar lationamericano. Venezuela un caso particular. *Revista Ciencias de la Educación, 28*(51), 434-457.

Ministerio de Educación Nacional y Asociación Colombiana de Facultades de Educación (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Eds.), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* (pp. 46-95). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf

Navarro Cendejas, J. (2017). Talento matemático excepcional y destino profesional. Trayectorias de participantes mexicanos en olimpiadas internacionales de matemáticas. *Innovación Educativa, 17*(73), 49-77.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principios para la acción: resumen ejecutivo*. Reston, VA: NCTM.

Nieto, J. H. (2005). *Olimpiadas Matemáticas: el arte de resolver problemas*. Caracas, Venezuela: Los Libros del Nacional.

Olimpiada Mexicana de Matemática. (2019). *¿Qué es la OMM?* [Artículo en Web]. Recuperado de http://www.ommenlinea.org/presentacion/objetivos/

Olimpiada Recreativa de Matemática. (2019a). *Página de Inicio: Historia.* [Artículo en Web]. Recuperado de https://ormve.org/

Olimpiada Recreativa de Matemática. (2019b). *Medallistas Olimpiada Recreativa Matemática 2019*. Recuperado de http://www.ormve.org/wp-content/uploads/ormfiles/Ganadores_2019.pdf

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2006). *PISA 2006: Marco de evaluación. Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*. París, Francia: OCDE. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2019). Colombia, Country Note. En OCDE (Eds.), *Pisa 2018 Results: Volume I-III* (pp. 1-12). París, Francia: OCDE Publishing. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_COL_ESP.pdf

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2020). Volume V: Effective Policies, Successful Schools. En OCDE (Eds.), *Pisa 2018 Results* (pp. 1-330). París, Francia: OCDE. DOI: https://dx.doi.org/10.1787/ca768d40-en

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

TALLERES

EL TRABAJO CON ESTUDIANTES DE ALTA CAPACIDAD EN MATEMÁTICAS COMO MOTOR DEL AULA EN GENERAL

Working with gifted students in mathematics as a motor for the whole classroom

Ledesma López, A.

Club Matemático IES Uno. Requena (España)

Resumen

En este taller te vamos a mostrar como el trabajo con alumnado de altas capacidades, con cierta predisposición y algo de imaginación, contribuye al enriquecimiento del entorno cercano, también del medio más próximo, el quehacer en el aula, la dinámica de grupo y la vivencia en el centro. Contaremos cómo nos fue la experiencia trabajando en grupos reducidos con alumnos del programa Estalmat, en tres promociones dilatadas en el tiempo, y por parejas con alumnos de 1º y 2º de ESO en dos cursos distintos. Abordaremos algunas cuestiones de las tres prácticas previstas para recrear el feedback que se produjo entre los alumnos del grupo y en la interacción entre los dos componentes de la pareja, heterogénea adrede, alumnos con necesidades especiales muy distintas.

Palabras clave: *altas capacidades, clubes matemáticos, resolución de problemas, papiroflexia y matemática*

Abstract

In this workshop we are going to show you how working with gifted students, with a certain predisposition and some imagination, contributes to the enrichment of the close environment, also of the closest environment, the work in the classroom, the group dynamics and the experience in the school. We will tell how our experience was working in small groups with students from the Estalmat program, in three promotions over time, and in pairs with students from 1st and 2nd of ESO in two different courses. We will address some issues of the three practices planned to recreate the feedback that occurred between the students in the group and in the interaction between the two components of the couple, purposely heterogeneous, students with very different special needs.

Keywords: *gifted, math clubs, problem solving, origami and math*

REFLEXIONES INICIALES

Trabajar con alumnado de altas capacidades (en adelante AAC) supone, sin duda, un gran reto para todos los docentes, pero debe contemplarse como una valiosa y apasionante experiencia de mejora, tanto desde el punto de vista profesional como personal. Esto exige, a grandes rasgos, como no puede ser de otra manera:

- Una *actitud positiva* para afrontar la situación, cosa que por el simple hecho de ser maestro o profesor, en general, ya se presupone.

Ledesma López, A. (2021). El trabajo con estudiantes de alta capacidad en matemáticas como motor del aula en general. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 185-194). Logroño: Universidad de La Rioja.

- Una *capacidad de observación*, tanto activa como pasiva, para el *diagnóstico*. Que no de pereza llevar un registro de lo que acontezca en el aula, incluso de todo lo que se pueda apreciar antes, durante y después de la sesión de clase.
- *Conocer, estudiar y valorar, experiencias* y trabajos de otros muchos profesores que nos precedieron en el tratamiento del AAC. La que mejor va a funcionar, cuando nos encontremos en esa tesitura, será la que diseñemos exprofeso para nuestros alumnos, aquella en la que creamos firmemente. Y no tengamos reparos en implementarla, ponerla en marcha, y, eso sí, no dejemos de valorarla, de evaluarla continuamente y de adaptarla a la situación concreta de cada aula y de cada alumno/a. Nada que no parezca razonable.
- Gran *flexibilidad en nuestras actuaciones*, en todas las acciones que realicemos y en cuantas tareas plantemos. No encontraremos una receta universal ni un recurso genial. Todos los que nos hemos enfrentado a AAC empezamos, más o menos, igual: le proponemos que colaboren con nosotros, los profesores; o que prepare e imparta una clase a sus compañeros; o que ayude a los que les cuesta más. Poco a poco, fuimos aprendiendo de la situación. Le planteamos una tarea distinta, o la misma que a todos pero con mayor profundidad. Pero, ojo, como también queremos que el AAC mejore, hoy día, o bien lo adelantamos de curso, o bien lo sometemos a tareas de enriquecimiento o de reposo curricular.

Ahora bien, necesitamos ser muy cautos, pues, bien por una tendencia actual, o una tremenda presión social, a veces tildamos, o nos catalogan de AAC a quien destaca en clase, en el instituto o en la localidad, en contextos muy concretos o en entornos muy reducidos; a quien estudia asiduamente, sigue la materia con la atención y dedicación requerida y, consecuentemente, logra unos óptimos resultados en su curso. Si la Alta Capacidad se tasara entre 0 y 10 puntos *(no confundamos con altas calificaciones)* y su distribución fuera una campana de Gauss muy ancha, entre los 3 y los 8 puntos, la alta capacidad estaría en 9 y 10 puntos, sin duda, toda una excepcionalidad.

En un difícil formato de taller, un taller telemático, donde no os veo ni mi interacción con vosotros resulta fácil, os contaré una de mis experiencias con esos alumnos destacados, algunos de ellos considerados de altas capacidades. Siempre movido en un contexto de *resolución de problemas (y ya sabemos que el instituto o el colegio no ofrecen espacios ni tiempos para resolver problemas, lo que obliga a proponerlos tomando horas de otras materias, fuera de horario o a buscarlos en certámenes extracurriculares como, por ejemplo, en nuestro caso, el Open Matemático, la Olimpiada Matemática Española o la Competición Matemática Mediterránea: Memorial Peter O'Halloran, o a crear un Club Matemático)* y, en esta ocasión, *plegando papel*.

No quisiera que desviarais vuestra atención, en exceso, a las actividades de papiroflexia que mostraremos. Tal vez sea inevitable ese proceder en las primeras etapas de nuestra profesión, a mi me pasó. (A*l final daremos una amplia selección bibliográfica para que os animéis a introducir la papiroflexia en el aula de matemáticas que satisfará ese primigenio interés).* La experiencia nos va revelando que la tarea es relativa, no importa tanto cuál sea, ni el tipo, ni la cantidad de las que se proponga, más bien, el porqué la eliges, el cómo se implementa, cómo la presentas, cómo gestionas tus intervenciones durante su ejecución y cómo le sacas partido.

PRESENTACIÓN DE LA EXPERIENCIA

Como dijimos en el resumen, la experiencia se llevó a cabo en tres contextos muy distintos:

- Con alumnos seleccionados en el programa Estalmat de la Comunidad Valenciana. En dos ocasiones durante el campamento de inicio, en grupos de seis participantes *(la última muy* *reciente, la semana pasada)* y, en otra, en una sesión sabatina regular con los veinticinco seleccionados.

- Con alumnos, en un curso, de un grupo de 1º de ESO donde coincidieron dos alumnos también seleccionados en el programa Estalmat-CV y, en otro, con alumnos de 2º de ESO. Siempre trabajando en parejas.
- Y con relativa frecuencia en las sesiones de resolución de problemas con miembros del Club Matemático de muy distintas promociones.

Y entre todos esos contextos resaltaría el trabajo en parejas, especialmente cuando la pareja, que elegía previamente, era tremendamente heterogénea: un componente de alta capacidad, o de los *mejores* de la clase, y otro con un manifiesto desdén e, incluso, un comportamiento disruptivo. Esa disparidad extrema en la capacidad matemática y en la conducta, también se daba, en sentido contrario, en la psicomotricidad fina, en la habilidad manual, de sus componentes. Y esto resultó siempre, en cuantas situaciones forcé ese desigual emparejamiento, el desencadenante de una simbiosis no esperada, de una riquísima complementariedad en la tarea.

DESARROLLO DEL TALLER

Ejemplos de las tareas llevadas a cabo son las que se indican en las páginas siguientes, que recrearemos y/o mostraremos durante la presentación de este taller virtual, y que iremos comentando sobre la marcha.

CONCLUSIONES

La resolución de problemas conlleva plantear tareas originales y proponer retos no habituales, enfrentar a los alumnos a sus debilidades y aumentar su tolerancia a la frustración, sacarlos de su entorno habitual y alejarlos de sus zonas de confort y, finalmente, forzar la colaboración y el apoyo entre pares y dispares. Esto exige, yo diría que es una imperiosa necesidad, sin duda y de ahí el título del taller, poner el énfasis en actividades de alta capacidad para todos los alumnos del aula regular, en contraposición a la idea de adaptar o diseñar actividades para los AAC, matiz éste doblemente importante, primero, por lo que anímica y emocionalmente supone para el grueso de la clase y, segundo, por su contribución a una acertada intervención en reposo curricular.

REFERENCIAS para llevar la papiroflexia matemática al aula

De la Peña Hernández, J. (2001). *Matemáticas y Papiroflexia*. Madrid: Asociación Española de Papiroflexia. Puede descargarse en: https://dokumen.tips/documents/jesus-de-la-pena-matematicas-y-papiroflexia.html o bien en https://www.caprichos-ingenieros.com/ewExternalFiles/Extraordinario%202000.pdf

Demaine, E.D. y O'Rourke, J. (2007). *Geometric folding algorithms*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Donovan, A. J. (1995). *Paper folding for the mathematics class*. Rexton, VA: NCTM.

Hull, T. (2006). *Project Origami. Activities for exploring mathematics*. Wellesley, MA: A.K. Peters.

Jones, R. (1995). *Paper folding. A fun and effective method for learning math*. San Luis, MI: LWCD Inc.

Lang, Robert J. (2003). *Origami design secrets. Mathematical methods for an ancient art*. Natick, MA: CRC Press.

Kasahara, K. (1988). *Origami omnibus. Paper-folding for everybody*. Tokio: Japan Publications.

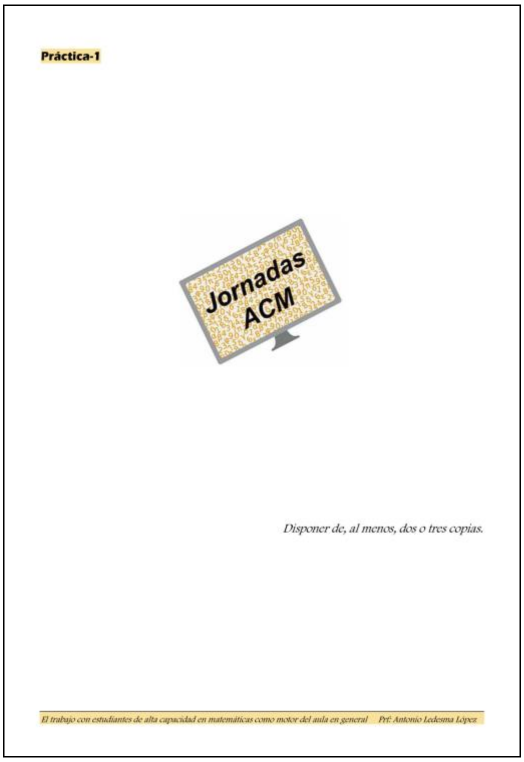
Kawasaki, T. (1998). *Rose, origami and mathematics*. Japón: Ak. Peters Ltd.

Ledesma López, A. (1992). Geometría con un folio. *Epsilon*, (24), 51-68.

Ledesma López, A. (1994). Estudio de cónicas con papel. *Educación Matemática, 6*(2), 87-100.

Ledesma López, A. (1996). Papiroflexia y Matemáticas. *Pajarita. Boletín de la Asociación Española de Papiroflexia*, (Extraordinario 1996).
Ledesma López, A. (2000). *El papel en la escuela: la papiroflexia como recurso*. Grupo de Cocotología. IES Uno. Curso 1999-2000. CEFIRE de Torrente. Extensión Utiel-Requena.
Ledesma López, A. (2010). Aventuras y desventuras matemáticas de un folio DIN-A en el instituto. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (53), 45-70.
Mitchell, D. (1997). *Exploring mathematical ideas with origami*. Kendal, Inglaterra: Water Trade.
Mitchell, D. (2001). *Mathematical origami. Tarquin*. Cambridge: Burlington Press.
Olson, A. T. (1975). *Mathematics trough paper folding*. Reston, VA: NCTM.
Prüfer, J. (1940). *Federico Froebel*. Barcelona: Editorial Labor.
Serra, M. (1994). *Patty Paper Geometry*. Berkley, California: Key Curriculum Press.
Sundara Row, T. (1905, re ed-1989). *Geometric exercises in paper folding*. Nueva York: Dover Publ. Disponible en: https://archive.org/details/tsundararowsgeo00rowrich/page/n1/mode/2up
VV.AA. (1989). *Proceedings of the 1st International Meeting of Origami Science and Technology*. Ferrara, Italia: Humiaki Huzita.

Práctica-1. Introducción a la geometría del papel plegado

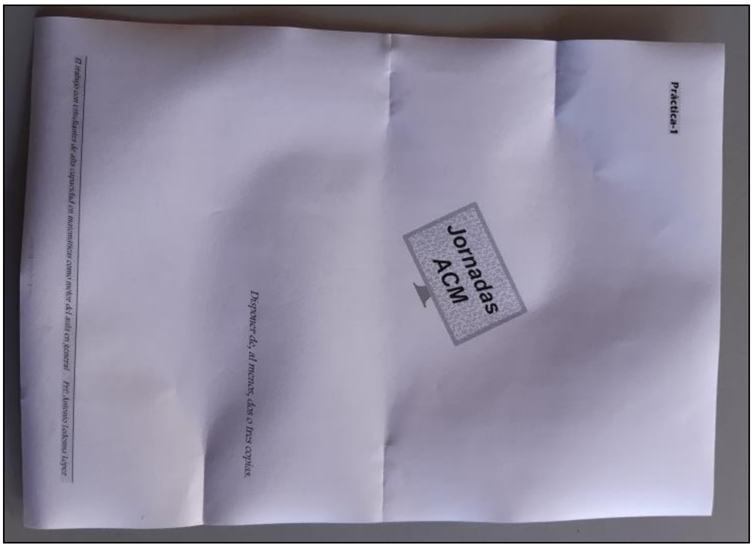


A partir de un folio rectangular, no necesariamente de tamaño DIN-A4, haremos consideraciones de cariz etnomatemático sobre el proceder del papiroflecta u origamista.

Plantearemos cuestiones de este tipo:

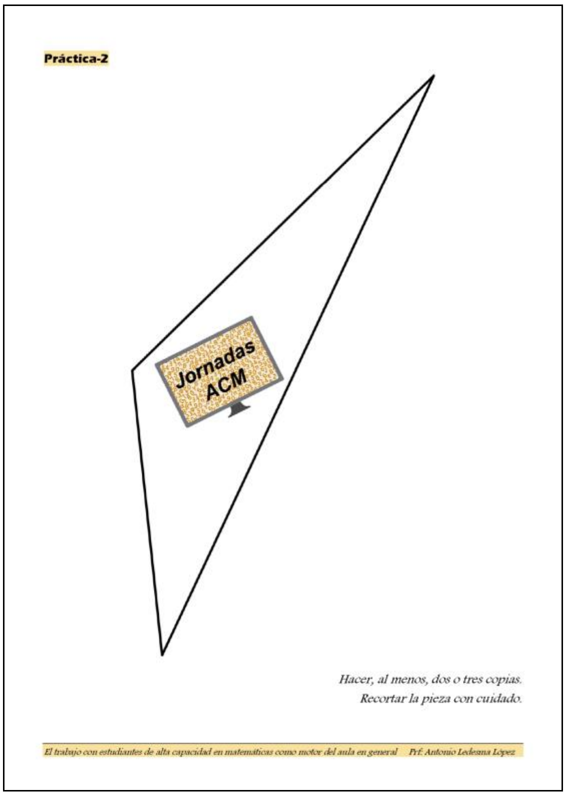
- ¿Cómo estar seguro de que tienes un rectángulo?
- ¿Cómo dividirlo en partes iguales? Formas de hacerlo.
- ¿Cómo reconocer si el folio es, o no, un rectángulo metálico: aúreo, de plata… o de unas dimensiones dadas
- ¿Cómo plegar, con la máxima precisión posible, la diagonal de un rectángulo cualquiera?
- … … …

Ejemplo de actividad a realizar: *Reconocimiento de un rectángulo de formato DIN-A:*



Si al unir los cuartos opuestos de los lados de un rectángulo, obtenemos una de sus diagonales, el rectángulo es un DIN-A y, si no, no. Según el nivel en el que se proponga la actividad, puede pedirse justificación o sólo constatación.

Práctica-2. Otras propiedades geométricas de un triángulo

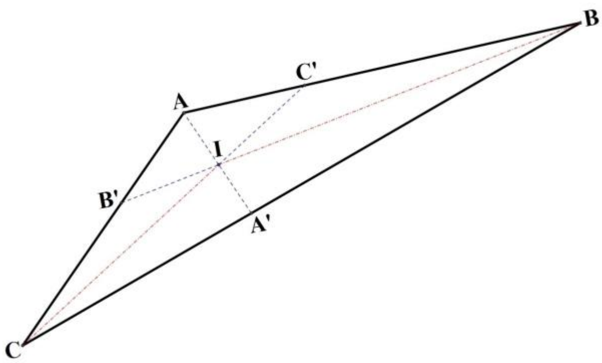


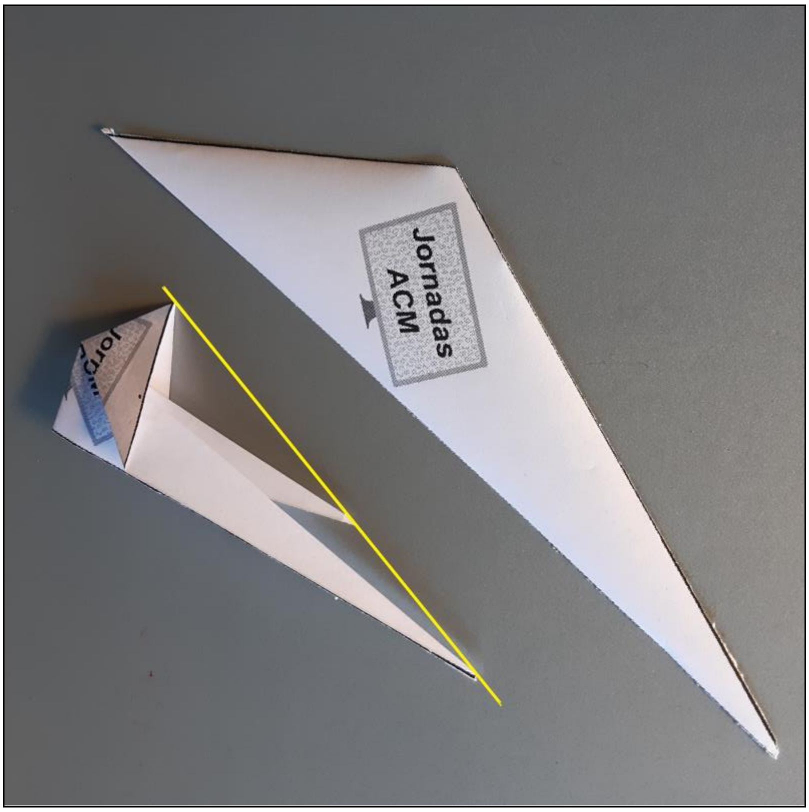
Ficha a fotocopiar. *Disponer de varias copias y recortar la figura con sumo cuidado.*

Primer ejemplo de actividad a realizar: *Alinear los vértices de un triángulo*

Dado un triángulo **ABC** cualquiera, plegando sus bisectrices obtenemos los puntos **A'**, **B'** y **C'** en los lados opuestos a los vértices **A**, **B** y **C** respectivamente y, en la confluencia de esos tres plegados, **I**, su incentro.

Remarca en valle y monte los pliegues indicados en la figura, trata de acercar los tres vértices y, aplastando todo, sin forzar ningún pliegue más, comprueba, y prueba, que los tres vértices **A**, **B** y **C** quedarán siempre alineados.



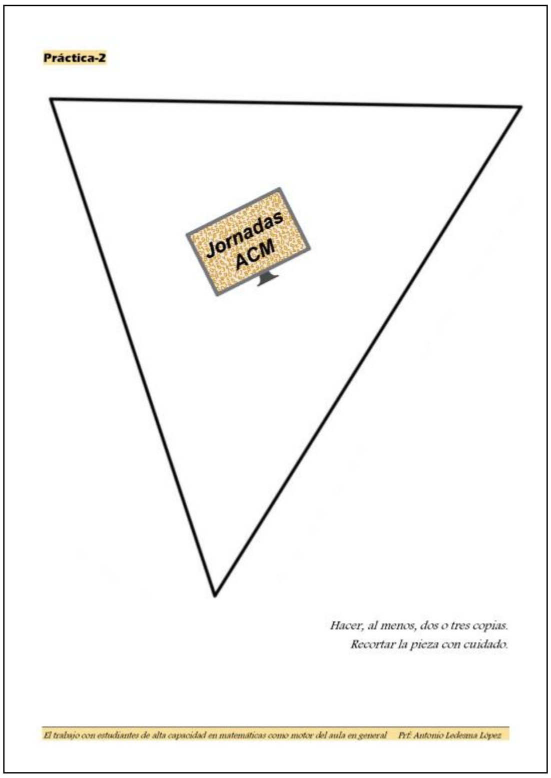


Segundo ejemplo de actividad a realizar:

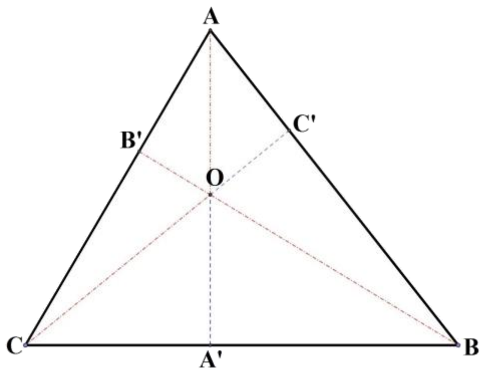
Alinear los vértices del triángulo órtico de un triángulo acutángulo.

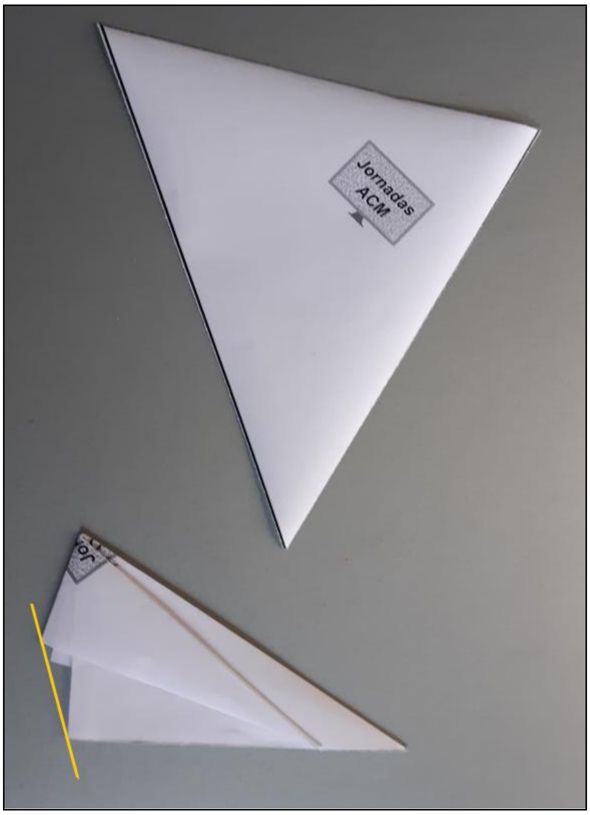
Dado un triángulo **ABC** cualquiera, plegando sus **alturas** obtenemos los puntos **A'**, **B'** y **C'** en los lados opuestos a los vértices **A**, **B** y **C** respectivamente y, en la confluencia de esos tres plegados, **O**, su **ortocentro**.

Remarca en valle y monte los pliegues indicados en la figura, trata de acercar los tres vértices y, aplastando todo, sin forzar ningún pliegue más, comprueba, y prueba, que los tres pies de las alturas **A'**, **B'** y **C'** quedarán siempre alineados.

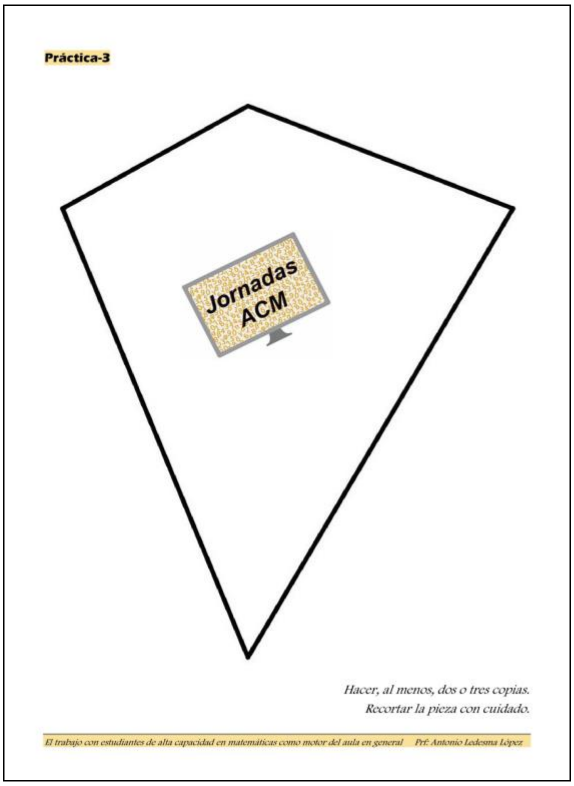


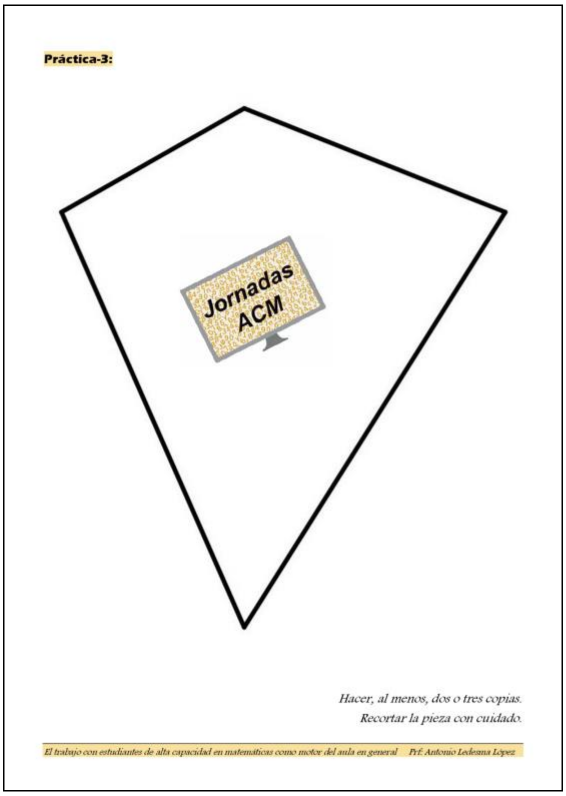
Ficha a fotocopiar. *Disponer de varias copias y recortar la figura con sumo cuidado*.

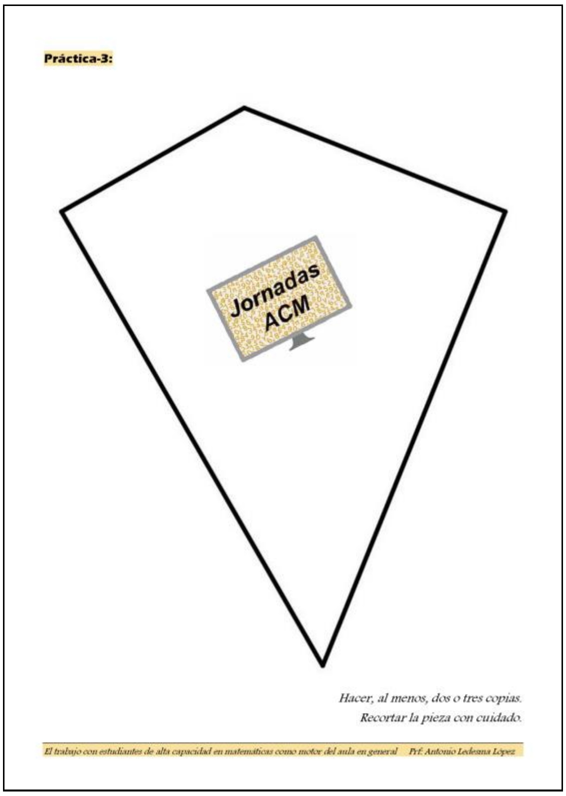


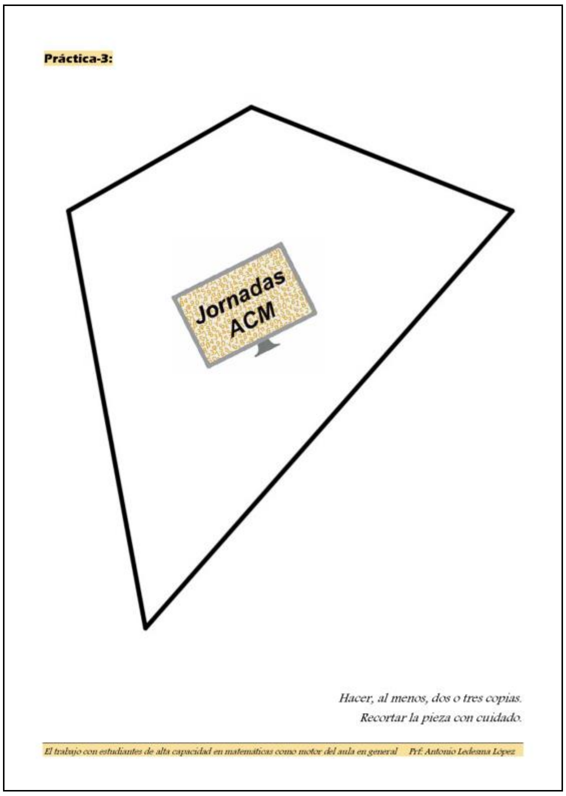


Práctica-3. Análisis de cuadriláteros inusuales





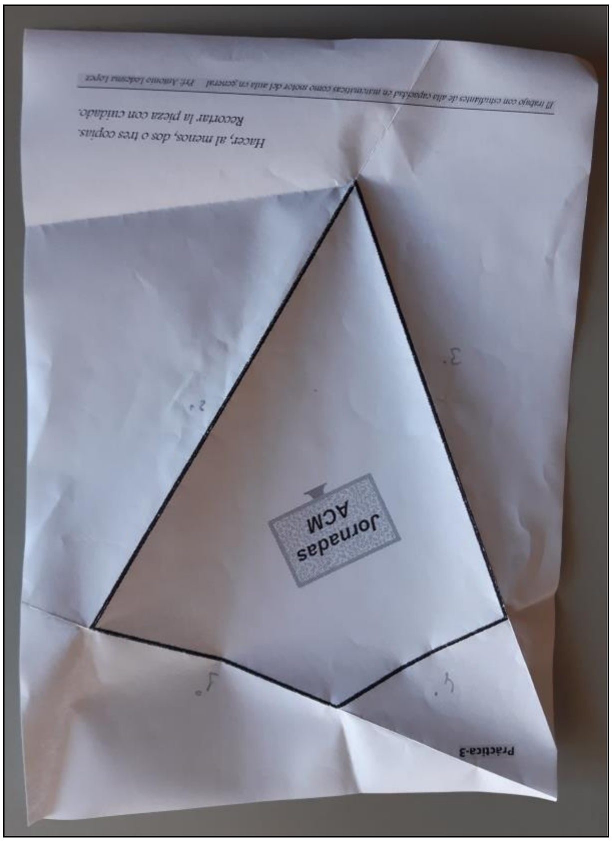




Fichas a fotocopiar *(en DIN-A3 mejor que en DIN-A4. Disponer de varias copias y recortar las figuras con cuidado).*

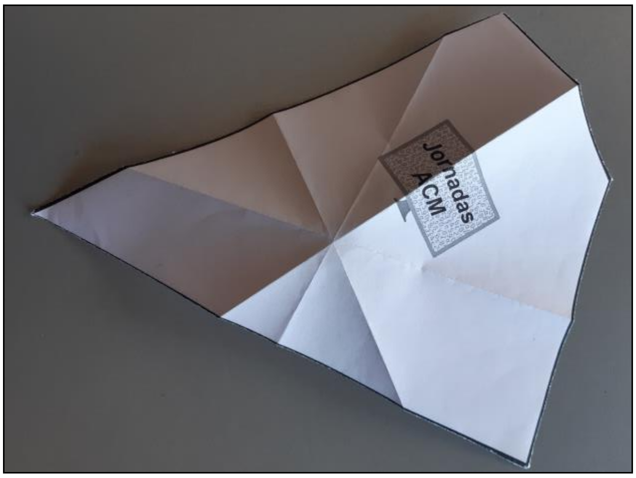
Ejemplo de actividades a realizar:

Determinar por plegado de papel el tipo de ángulos del cuadrilátero.

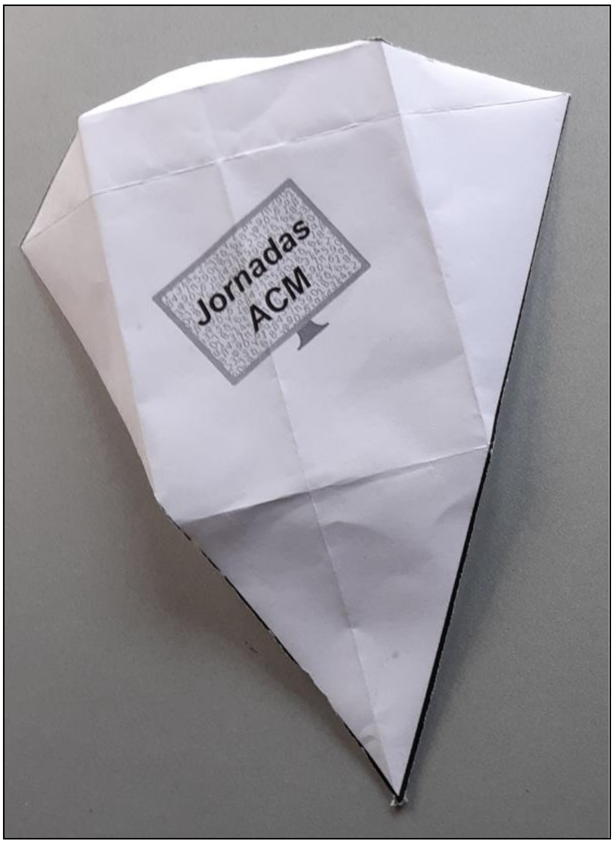


Característica de Euler del papel plegado:

$C + V = A + 1$



Test de Inscribilidad.



Test de perpendicularidad, o no, de diagonales.

UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3D PARA EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN POR ESTUDIANTES CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA

An environment of 3d dynamic geometry for proof learning by mathematically gifted students

Sua, C.

Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia (España)

Resumen

Los recursos tecnológicos digitales han mostrado la posibilidad de profundizar en la naturaleza del conocimiento matemático y establecer nexos entre diferentes conceptos. La investigación didáctica ha mostrado que es posible usarlos para apoyar el aprendizaje de la demostración en geometría. La investigación en este campo se ha enfocado ampliamente a la geometría plana, dejando poco explorado el contexto de la geometría espacial. En este taller presentamos un conjunto de problemas de construcción de geometría espacial resueltos con GeoGebra 3d, dirigido a estudiantes con alta capacidad matemática de últimos cursos de Primaria y primeros cursos de Secundaria, con los que se pretende ayudarles en el aprendizaje de la demostración.

Palabras clave: *alta capacidad matemática, aprendizaje de la demostración, GeoGebra 3d, problemas de construcción geométrica*

Abstract

Digital technological resources have shown the possibility of delving into the nature of mathematical knowledge and establishing links between different concepts. Mathematics education research has showed that they can support the learning of proof in geometry. Research in this field has largely focused on the case of plane geometry, leaving little explored space geometry. In this workshop we present some geometric construction problems solved with GeoGebra 3d, aimed at mathematically gifted students in upper Primary and lower Secondary years, with which it is intended to help them learn to prove.

Keywords: *mathematically gifted students, proof learning, GeoGebra 3d, geometric constructions problems*

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes con alta capacidad matemática (ACM) son estudiantes con habilidades matemáticas superiores a las del promedio de estudiantes con experiencias, edad o cursos similares. Estos estudiantes hacen parte del salón de clases (Benedicto, Acosta, Gutiérrez, Hoyos, y Jaime, 2015) y aunque muchas veces los profesores reconocen esta habilidad que los caracteriza, no ofrecen estrategias de atención adecuadas que permitan afianzarla, creyendo inclusive que ellos aprenden por su propia cuenta (Jaime, Gutiérrez, y Benedicto, 2018).

Sua, C. (2021). Un ambiente de geometría dinámica 3d para el aprendizaje de la demostración por estudiantes con altas capacidades matemáticas. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 195-202). Logroño: Universidad de La Rioja.

La habilidad con la que cuentan los estudiantes con ACM debe, además de reconocerse, ser atendida de manera decidida y adecuada, de la misma forma que se haría con cualquier otra habilidad. Esto involucra proponer tareas apropiadas, constantes desafíos, una enseñanza adecuada y, en general, experiencias que motiven y comprometan a estos estudiantes en el desarrollo y asimilación de nuevas ideas matemáticas. Esto último se ha convertido en un asunto de investigación en el campo de la didáctica de la matemática (Dimitriadis, 2010).

La investigación sobre la comprensión de la demostración matemática y el desarrollo de habilidades sobre esta práctica matemática es un campo vigente y de relevancia en la educación matemática. Uno de los aspectos que se ha resaltado en esta vía es la existencia de una discontinuidad epistemológica entre la formulación de una conjetura y la elaboración de su demostración. Recursos como los ambientes de geometría dinámica (AGD) han sido reconocidos por sus aportes a la demostración, como lo son la exploración, conjetura y explicación. Esto hace que este recurso sea un fuerte mediador entre estas fases (Sinclair y Robutti, 2013).

Aunque ya se han realizado esfuerzos investigativos sobre el impacto de los AGD en la enseñanza de la demostración, estos se han realizado principalmente en el dominio de la geometría plana (Sinclair y Robutti, 2013; Marrades y Gutiérrez, 2000). Aun cuando se dispone de AGD para configuraciones geométricas tridimensionales y con ello un abanico de nuevas posibilidades, el que estos ambientes sean relativamente recientes no ha permitido investigar con profundidad el alcance que pueden ofrecer para la enseñanza de la demostración. Por lo tanto, se requieren esfuerzos investigativos en esta vía, específicamente en el diseño y análisis de intervenciones con AGD tridimensionales a favor del aprendizaje de la demostración.

Con estas ideas en mente y como parte de una investigación en curso, diseñamos un conjunto de problemas dirigidos a estudiantes con ACM ambientadas en GeoGebra 3d, con el fin de aportar al aprendizaje de la demostración. Anticipar las producciones y comportamientos de los estudiantes al encarar cada problema e interactuar con GeoGebra 3d nos llevó a formular una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004). En este taller presentamos algunos problemas, conectados entre sí, haciendo énfasis en aspectos como la construcción del concepto geométrico deseado, y los aportes de GeoGebra 3d al objetivo de la secuencia declarado.

REFERENTES CONCEPTUALES

Tipos de demostración

Algunos investigadores han intentado reconocer las concepciones de los estudiantes sobre la demostración matemática y lo que les resulta convincente. Marrades y Gutiérrez (2000), con base en Balacheff (1988) y Harel y Sowder (1998), propusieron un marco analítico que permite una comprensión amplia de las acciones y producciones de los estudiantes cuando resuelven problemas de demostración. Para estos autores, el término demostración engloba las razones dadas para convencer a alguien de la verdad de algún hecho matemático. Este modelo permite analizar toda la actividad realizada por los estudiantes cuando generan una conjetura y establecen una forma de demostrarla, así como evaluar la mejora o cambios de las habilidades de demostración de los estudiantes a lo largo de su proceso de aprendizaje. El modelo contempla dos categorías principales, demostraciones empíricas y demostraciones deductivas.

Las demostraciones empíricas toman ejemplos como el principal elemento de convicción. La observación de una regularidad en diferentes casos lleva a los estudiantes a establecer una conjetura y probarla a partir de esos mismos ejemplos. Los ejemplos se pueden utilizar para demostrar una conjetura de diferentes formas: de forma perceptiva o intuitiva, eligiendo ejemplos sin ninguna planificación específica (empirismo ingenuo); utilizando un caso especial cuidadosamente elegido para verificar una propiedad y considerarla verdadera en términos generales (experimento crucial); o seleccionando un ejemplo específico como representante de la familia a la que pertenece y utilizarlo para identificar propiedades abstractas después de su observación y manipulación (ejemplo genérico).

En las demostraciones deductivas se produce una descontextualización de los argumentos involucrados. Los aspectos genéricos del problema, las operaciones mentales y las deducciones lógicas se utilizan para organizar las demostraciones, por lo que las conjeturas se validan deductivamente. Los ejemplos pueden usarse como ayuda para organizar los argumentos, pero sus características específicas no son parte de la demostración. Estas demostraciones pueden apoyarse en ejemplos específicos (experimento mental) o basarse apenas en operaciones mentales abstractas, definiciones y propiedades matemáticas pertinentes (prueba formal).

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) son un constructo para el diseño de la instrucción matemática y el aprendizaje conceptual (Clements y Sarama, 2004; Simon, 2014). Una THA involucra tres componentes: i) una meta sobre el aprendizaje de los estudiantes, ii) un conjunto de problemas matemáticos que se espera que conduzcan a la meta establecida, y iii) un proceso de aprendizaje hipotético, es decir, una expectativa sobre la forma en que los estudiantes piensan y evolucionará su comprensión cuando resuelvan los problemas diseñados.

Simon (2014) mencionó que este marco permite describir el pensamiento y el aprendizaje de los estudiantes en dominios matemáticos específicos. Esto contempla la proyección de rutas, a través de problemas matemáticos, que promueven procesos mentales y un nivel mayor de pensamiento matemático. La adopción de una THA requiere un objetivo de aprendizaje claro y reconocer aspectos comunes en las formas de aprendizaje de los estudiantes. También es necesario reconocer que las THA están permeadas por oportunidades que surgen a lo largo de la instrucción diseñada, ya que su carácter hipotético da lugar a la posibilidad de que los profesores modifiquen aspectos de la intervención cuando lo consideren necesario (Simon y Tzur, 2004).

En una THA, los objetivos de aprendizaje se ven como una guía y el punto a alcanzar, por lo que brindan elementos para la selección de problemas y contribuyen a construir el proceso de aprendizaje hipotético (Simon y Tzur, 2004). Según estos autores, esto revela una relación entre los dos últimos componentes del modelo, ya que los problemas se seleccionan considerando una hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, mientras que el proceso de aprendizaje se concibe a través de los problemas seleccionados.

Sacristan et al. (2010) estudiaron las ideas nucleares de las THA a la luz de las tecnologías digitales y su impacto en el aprendizaje. Para ellos, el aprendizaje de los estudiantes varía y toma diferentes formas según las situaciones que se les proponen y las herramientas involucradas. Esto conduce a niveles conceptuales profundos no comúnmente alcanzados en el contexto escolar, porque la interacción entre los estudiantes y las tecnologías digitales promueve transiciones de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto, de la intuición a la formalización, entre otros. A pesar de esto, la investigación en educación matemática sobre THA con tecnologías digitales se encuentra en un estado primario de desarrollo.

METODOLOGÍA

GeoGebra: simultaneidad de dos y tres dimensiones

Son varios los AGD que pueden reconocerse hoy en día, cuyas características tienden a ser similares. Sin embargo, GeoGebra destaca entre ellos por la posibilidad de vincular en una misma interfaz representaciones de la geometría plana y espacial. Esto abre oportunidades para el estudio conjunto de objetos geométricos bidimensionales y tridimensionales, lo que favorece, ente otros aspectos, alcanzar un mayor nivel de comprensión al integrar y articular diferentes objetos geométricos, así como reconocer propiedades geométricas válidas en el plano, pero no en el espacio (por ejemplo, la unicidad de una recta perpendicular a otra por un punto contenido en esta). Consideramos que estos factores serían útiles dada la población involucrada en el estudio y el objetivo de este.

La equidistancia: una relación perceptual y teórica

La THA involucró la *equidistancia* como objeto de estudio. Alrededor de esta se diseñaron 22 problemas de construcción geométrica que piden también al estudiante demostrar la validez de la construcción que ha hecho. Elegimos la equidistancia por dos motivos. En primer lugar, al estudiar la equidistancia entre puntos, rectas y planos, se abre la posibilidad de integrar diferentes conceptos geométricos en una misma tarea (congruencia, perpendicularidad, paralelismo, esferas y circunferencias, entre otros), aspecto que brinda diversidad en las formas de afrontar la tarea y conjugar distintos elementos teóricos en la consecución de lo solicitado. Esto apoya la creatividad de los estudiantes con ACM. En segundo lugar, como se detalla en el siguiente apartado, la equidistancia puede soportarse en aspectos perceptuales, lo que brinda información útil sobre la forma en que los estudiantes interactúan con los objetos geométricos representados en pantalla y las formas de convencerse sobre la validez de alguna relación advertida.

Trayectoria hipotética de aprendizaje: de lo perceptual a lo teórico

En cuanto al aprendizaje de la demostración, los problemas de construcción ofrecen una oportunidad para que el estudiante utilice las herramientas que proporciona el AGD y las relaciones geométricas aprendidas de los problemas que han resuelto. En este sentido, el tránsito por diversas relaciones de equidistancia, el conocimiento y dominio gradual de diversas herramientas de software, así como de las relaciones geométricas, configuran un escenario en el que los estudiantes tienen mayor disponibilidad de elementos teóricos e instrumentales para resolver nuevos problemas. Por lo tanto, esperamos que la secuencia de enseñanza induzca un incremento en las habilidades deductivas de los estudiantes. El rol del docente cobra relevancia, ya que tiene la posibilidad de conversar con los alumnos y hacerles preguntas en función de sus producciones, para inducirlos a expresar ideas en un nivel superior de la demostración.

UN FRAGMENTO DE LA TRAYECTORIA

Presentamos tres problemas que pretenden ilustrar las ideas expuestas hasta ahora. Para cada uno mostramos algunas soluciones posibles y su correspondiente justificación, mostrando la diversidad en los tipos de demostración que podrían evidenciarse. Previo a los problemas que se presentan a continuación, los estudiantes han tenido contacto con rectas paralelas y perpendiculares, con la circunferencia y la esfera y los criterios de congruencia de triángulos.

Tarea 006

- Abre *GeoGebra* y selecciona la vista *Gráficos*. Construye los puntos A, B y C. Construye ahora una circunferencia con centro en C que contenga al punto A. Arrastra al punto C hasta que la circunferencia contenga al punto B. Arrastra a C manteniendo a B en la circunferencia hasta donde te sea posible.
- Activa la vista *Gráficos 3D* y cierra la vista *Gráficos*. Verás la construcción que has realizado en 2D. Arrastra el punto C fuera del plano, a distintos lugares del espacio, manteniendo la propiedad de estar a la misma distancia de los puntos A y B.

Esta tarea pretende aproximar a los estudiantes a los objetos geométricos mediatriz y plano mediador. En la primera parte el trabajo se realiza en una configuración bidimensional, donde se solicita al estudiante construir una circunferencia y arrastrar su centro C bajo una condición específica. El arrastre del punto C puede llevar a reconocer el lugar geométrico mediatriz, por lo que la herramienta rastro podría ser de ayuda. Podría también ocurrir que el estudiante conozca ya este lugar geométrico, por lo que bastaría con ver el movimiento del punto C para evocar este objeto geométrico. En ambos casos interesa que el estudiante reconozca la propiedad de este lugar geométrico, esto es, la perpendicularidad al segmento AB por su punto medio. Adicionalmente, que explique por qué si un punto pertenece a esta recta, equidistará de A y B.

Se pueden realizar diversas demostraciones. Un primer intento involucra construir la mediatriz de A y B, construir al punto C en esta y determinar las distancias entre este punto y los puntos A y B, mostrando que se satisface la equidistancia (Figura 1a). Hablamos acá de una demostración empírica.

Una segunda aproximación se apoya en lo dicho anteriormente, con la novedad de que no se emplean las distancias entre los puntos, en su lugar se construye la circunferencia con centro en C que contiene al punto A. Arrastrar al punto C deja ver que la circunferencia contiene en todo momento al punto B (Figura 1b). El estudiante podría mencionar que la propiedad se satisface ya que A y B pertenecen a la circunferencia en todo momento y como esta es el conjunto de puntos que equidistan de uno fijo, entonces C estará a la misma distancia de estos puntos. La diferencia de esta aproximación y la primera es que, aun cuando la pertenencia de B a la circunferencia se da por un soporte visual, la justificación de que C está a la misma distancia de los otros puntos ofrece ya tintes teóricos, aspecto que la diferencia de la primera aproximación presentada.

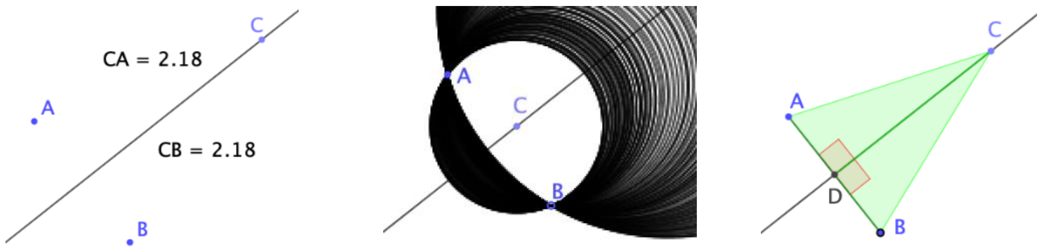


Figura 1. Aproximaciones para la solución de la primera parte de la tarea 006.

Una tercera aproximación se soporta en la perpendicularidad de la recta y el segmento AB por su punto medio, llamémoslo D. En este caso, el estudiante puede determinar los triángulos CDB y CDA, los cuales comparten el segmento CD y tienen además un ángulo recto y un segundo lado congruente. En este caso se puede utilizar la congruencia de triángulos para concluir que estos triángulos son congruentes y por lo tanto los segmentos CA y CB lo son también (Figura 1c). Esta tercera aproximación emplea una demostración deductiva.

La segunda parte de la tarea se apoya en la construcción realizada anteriormente, solo que desde una configuración tridimensional. Ahora se deben buscar puntos en el espacio que estén a la misma distancia de A y B. Se espera que el estudiante, con ayuda del rastro del punto C, identifique que el lugar geométrico buscado es el plano mediador del segmento AB. Para ello se le pregunta al estudiante por la propiedad del punto C cuando se mueve por el espacio conservando la equidistancia respecto al punto A y B, así como la forma en que garantiza que C se mantiene a la misma distancia de estos puntos. En este punto el estudiante puede soportar el cumplimiento de la equidistancia con ayuda de las distancias determinadas por GeoGebra o puede construir una esfera con centro en C que contenga al punto A, mostrando en cualquiera de los casos que cuando C se mueve por dicho plano las distancias se mantienen iguales (Figura 2a) o la esfera contiene adicionalmente al punto B (Figura 2b). Estas dos aproximaciones son similares a las dos primeras que se presentaron en la primera parte de la tarea y dejan ver, en caso de ocurrir, extensiones por parte del estudiante sobre las formas de demostrar una propiedad cuando pasan de configuraciones planas a otras tridimensionales.

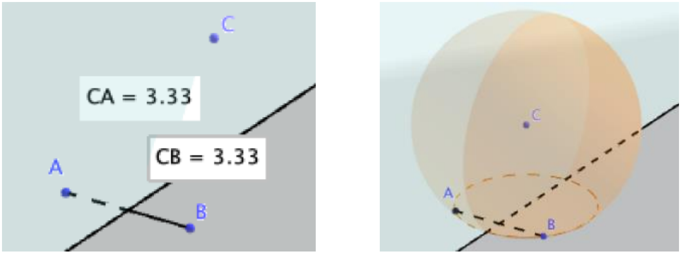


Figura 2. Aproximaciones para la solución de la segunda parte de la tarea 006.

Tarea 007

- Abre GeoGebra y activa la vista *Gráficos*. Construye un segmento determinado por los puntos A y B. Construye ahora un triángulo isósceles de tal forma que el segmento AB sea uno de sus lados iguales. Construye también un triángulo isósceles en el que el segmento AB sea el lado que no necesariamente es igual.
- Construye un triángulo equilátero donde uno de sus lados sea el segmento AB.
- Borra las construcciones hechas en pantalla. Activa la vista *Gráficos 3D* y cierra la vista *Gráficos*. Construye dos puntos A y B fuera del plano y posteriormente el segmento AB. Construye nuevamente los tres triángulos que anteriormente se solicitaron.

Esta tarea tiene la intención de poner en funcionamiento los elementos teóricos que se han estudiado hasta ese momento. Lo que se solicita en la configuración bidimensional es la construcción de tres triángulos, en cada caso a partir del mismo segmento, pero cada uno con una condición particular. En cada una de las tres situaciones es posible que el tercer vértice sea obtenido por ensayo y error, arrastrando un punto hasta que se vea que el triángulo cumple con lo solicitado con ayuda de herramientas como la distancia entre puntos o el uso de circunferencias, casos similares a los expuestos en la anterior tarea. En últimas, una demostración empírica.

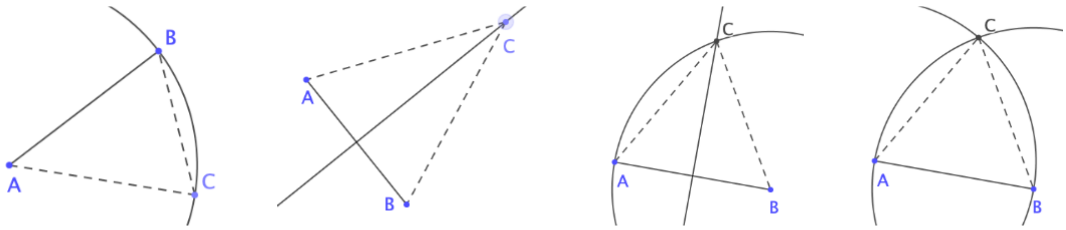


Figura 3. Aproximaciones para la construcción de triángulos en en plano.

Otra posibilidad para obtener el tercer vértice lleva a utilizar los objetos geométricos circunferencia y mediatriz. Respecto al primer triángulo solicitado, la circunferencia puede ser de mucha utilidad. Esto ocurre cuando este segmento es radio de dicha curva y el tercer vértice (C) es otro punto de la circunferencia (Figura 3a). Para obtener el triángulo en el que el segmento AB no necesariamente es congruente, bastaría con construir su mediatriz y ubicar un punto C en esta, no alineado con A y B (Figura 3b). En el caso del triángulo equilátero, una combinación entre estos objetos geométricos permitiría resolver la tarea (Figura 3c y 3d).

Además del proceso de construcción, el cual demanda ya poner en juego conocimiento geométrico, se pregunta a los estudiantes por la validez de las construcciones realizadas. Consideramos que, para cualquier triángulo, el proceso de construcción seguido da luces sobre la forma de justificar el resultado obtenido. Es decir, la elección de los objetos geométricos empleados atiende ya a una propiedad que quiere resaltarse de estos, por lo que se esperaría que una construcción geométrica adecuada conduzca a una demostración de la validez del resultado apropiada.

La segunda parte de la tarea solicita construir nuevamente los tres triángulos, aunque el segmento AB no está contenido en el plano. Esto impide que las herramientas utilizadas anteriormente puedan reutilizarse, pues estas solo son accesibles si el segmento está contenido en un plano. Ubicar el tercer vértice por ensayo y error no es una opción muy afortunada, pues la forma en que se manipula el punto es más compleja que cuando este está en el plano. En esta oportunidad se espera que los estudiantes usen los objetos geométricos análogos a los empleados cuando estaban en el plano, es decir, que la circunferencia se sustituya por una esfera y que la mediatriz se sustituya por el plano mediador. La forma de demostrar la validez de las construcciones es similar a la presentada en la primera parte de la tarea. Lo que es novedoso de esta tarea es la necesidad de buscar nuevos objetos geométricos y dotarlos de significado en este tipo de tareas de construcción, incluyendo la equivalencia entre ellos cuando se trabaja en el plano o el espacio. La figura 4 muestra las representaciones gráficas de las construcciones en el espacio.

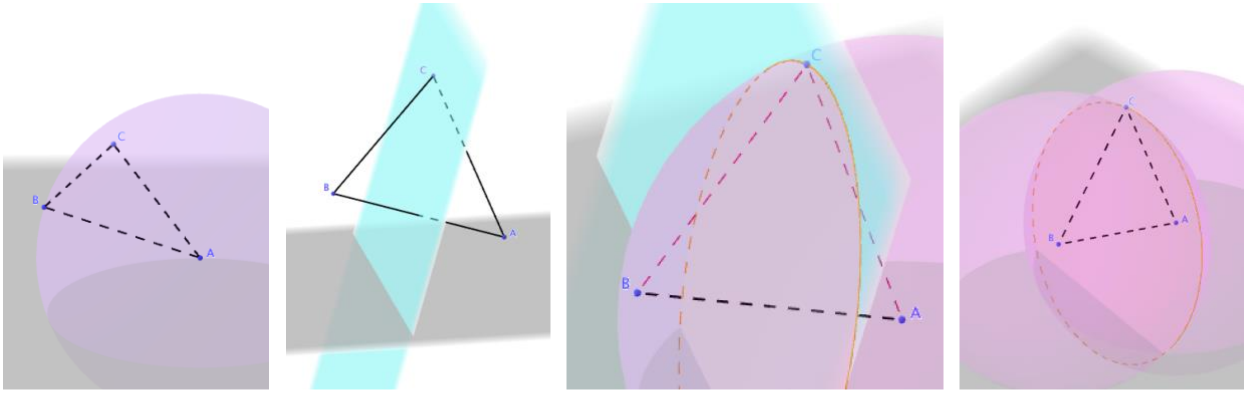


Figura 4. Aproximaciones para la construcción de triángulos en en espacio.

Tarea 016

- Dada una esfera sin su centro. Propón dos métodos distintos para determinar su centro.

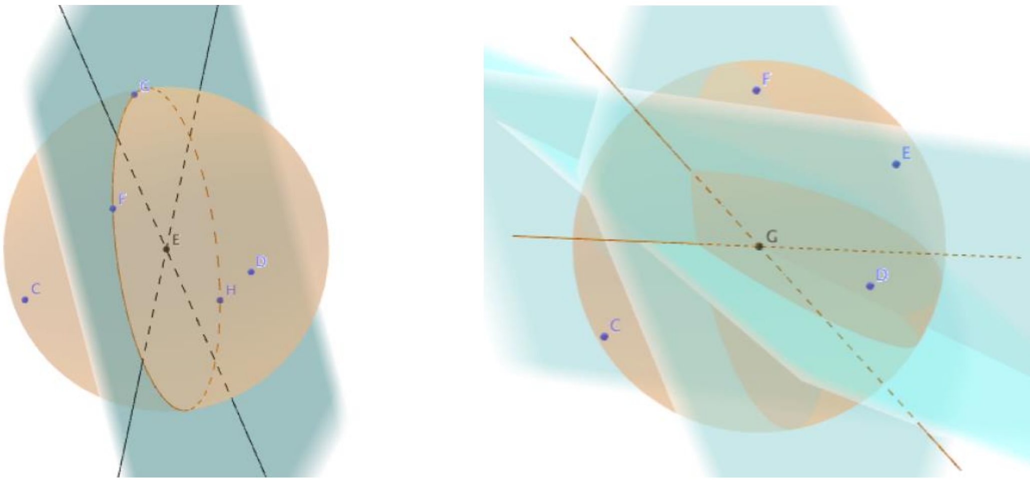


Figura 5. Aproximaciones para la construcción de triángulos en en espacio.

Determinar el centro de la esfera demanda en el estudiante involucrar construcciones auxiliares. Son diversas las formas en que se puede construir este punto, por lo que esta tarea se enfoca más en fomentar la creatividad al intentar resolverla. Considerando los objetos geométricos presentados anteriormente, una posibilidad es construir dos puntos cualesquiera en la esfera y luego el plano mediador determinado por estos. Dos posibilidades pueden darse. En la primera podría construirse el centro de la circunferencia que resulta de la intersección entre el plano mediador y la esfera, este sería el centro de la esfera (Figura 5a). Esto último se logra con ayuda de puntos en la circunferencia y las mediatrices que estos determinen en el plano mediador. Esto puede justificarse en tanto el centro de la esfera debe estar en el plano mediador construido ya que equidista de los puntos que lo determinan. Luego, el centro de la circunferencia equidista de los puntos de la circunferencia que también son puntos de la esfera y a su vez de los puntos que determinan el plano mediador por estar la circunferencia allí contenida. Por lo anterior ese punto debe ser el centro de la esfera.

Otra posibilidad es construir dos planos mediadores más con ayuda de puntos no coplanares sobre la esfera. La intersección de estos sería en centro de la esfera (Figura 5b). Dado que los planos mediadores corresponden a los puntos del espacio que equidistan de dos puntos fijos, cuando todos estos se intersecan en un único punto, este equidistará de los puntos sobre la esfera, por lo que será el centro de esta.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación forma parte del proyecto I+D+i EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) y la ayuda predoctoral EDU2017-84377-R.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). Londres: Hodder y Stoughton.

Benedicto, C., Acosta, C., Gutiérrez, A., Hoyos, E. y Jaime, A. (2015). Improvement of gifted abilities in a 3d computer environment. En *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 24–28). Faro, Portugal: Universidad del Algarve.

Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81–89.

Dimitriadis, C. (2010). *Developing mathematical giftedness within primary schools: A study of strategies for educating children who are gifted in mathematics* (tesis doctoral no publicada). Brunel University School of Sport and Education, Londres. Obtenida de https://core.ac.uk/download/pdf/40030472.pdf

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 7, pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Jaime, A., Gutiérrez, Á. y Benedicto, C. (2018). Problemas con extensiones. Propuesta para estudiantes con alta capacidad matemática. *Uno, 79*, 7-14.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1–3), 87–125.

Sacristán, A., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., … Perrusquía, E. (2010). The influence and shaping of digital technologies on the learning - and learning trajectories - of mathematical concepts. En C. Hoyles y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology. Rethinking the terrain* (pp. 179–226). Boston, MA: Springer.

Simon, M. (2014). Hypothetical learning trajectories in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 272–275). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Simon, M. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6(*2), 91–104.

Sinclair, N. y Robutti, O. (2013) Technology and the role of proof: the case of dynamic geometry. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y K. F. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 571-596). Nueva York, NY: Springer.

PROGRAMA CRACMAT: CENTRO DE RAZONAMIENTO ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA

CRACMAT Program: Center for mathematical high ability

Torres-Moliner, I., López, M.J.

Programa CRACMAT (España)

Resumen

CRACMAT es un programa didáctico extracurricular que tiene como objetivo potenciar el desarrollo cognitivo con un sistema que proporciona estrategias y procedimientos para el razonamiento lógico, así como dar cauce y plataforma para la iniciativa y creatividad en el uso de las Nuevas Tecnologías.

Palabras clave: *alta capacidad*, *razonamiento matemático, desarrollo cognitivo, resolución de problemas, iniciativa*

Abstract

CRACMAT is an extracurricular educational program that aims to enhance cognitive development with a system that provides strategies and procedures for logical reasoning, as well as give way and support for initiative and creativity in the use of New Technologies.

Keywords: *gifted education*, *mathematical reasoning, cognitive development, problem resolution, initiative*

ANTECEDENTES

Julius tiene 8 años, es responsable con su trabajo, inquieto por aprender sobre lo que ocurre a su alrededor. Su nivel de lenguaje y comunicación es alto. Se desenvuelve mejor con personas mayores que él. Tiene varios hobbies que le llevan a documentarse con profundidad.

En el colegio tiene dificultad porque su profesor piensa que le gusta destacar y que no trabaja todo lo que puede, además en sus ejercicios de Matemáticas suele poner el resultado pero no las operaciones, cosa que el profesor insiste en que escriba las operaciones y no admite otra resolución, incluso piensa que puede tener dislexia y TDAH. No hay empatía y repercute en su autoestima.

A Julius le cuesta ir a clase y se refugia en sus juegos. En muchas ocasiones se abstrae y no sigue la clase. Su madre piensa que no está reconocido según sus posibilidades y recurre a otras medidas extras: psicóloga, tests, pruebas y no consigue que haya cambio de actitudes por parte del profesorado. Le extraña porque tiene muy buena experiencia con su otra hija.

¿Qué futuro y qué presente le espera a Julius? ¿Cuántos Julius hay en nuestras aulas? Gracias a Julius se generó el nacimiento del Programa CRACMAT hace más de 20 años.

Torres-Moliner, I. y López, M. J. (2021). Programa CRACMAT: Centro de Razonamiento Alta Capacidad Matemática. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 203-210). Logroño: Universidad de La Rioja.

PROGRAMA CRACMAT

Los interrogantes que nos plantea el caso de Julius, son los mismos que hace más de dos décadas se nos planteó en las aulas. ¿Cómo llegar a este tipo de alumnado? ¿Cómo poder atender y fomentar a un tipo de alumno que no siempre encuentra apoyo desde la administración educativa? ¿Cómo ayudamos a crecer a ese alumnado? Todos estos interrogantes encontraron su repuesta en la creación y desarrollo del Programa CRACMAT, Centro de Razonamiento Alta Capacidad Matemática. Un programa extraescolar basado en la experiencia docente para el fomento del razonamiento lógico-matemático para alumnado con altas capacidades.

Partiendo del Modelo de los tres anillos de Renzulli (2016) en CRACMAT desarrollamos:

- *Capacidad intelectual superior a la media*: entendiendo la capacidad cognitiva tanto en términos de aptitud específica como en términos de procesos y habilidades que realizamos para procesar la información y la experiencia para adaptarnos a nuevas situaciones. En el Programa presentamos retos y desafíos mezclando aprendizaje y juego. El reto conlleva a hacerse preguntas y plantear soluciones. No será tan importante el resultado del reto como el proceso intelectual que logramos que el alumno desarrolle.
- *Motivación o compromiso con la tarea*: disposición activa, perseverancia, confianza en sí mismo e ilusión por la tarea. Entendemos nuestros retos lógico-matemáticos como un enriquecimiento personal. Es un reto personal lograr dar con una solución. Esa interiorización hará que el alumnado gane en autoconfianza y valore el trabajo bien hecho.
- *Creatividad*: nos basamos en la originalidad del pensamiento, la capacidad para crear nuevas ideas y aportar soluciones distintas para problemas cotidianos. De esta manera potenciamos la imaginación del alumno: con libertad para aportar respuestas y razonar el trabajo realizado. También con tareas para profundizar en conocimientos de robótica o programación y con actividades que tengan como producto final un material para otros compañeros, un blog con sus escritos, etc.
- *Siempre con un doble objetivo*: el enriquecimiento académico y el personal. Nos parece claves el conocimiento de si mismos y la autoconfianza, para paliar el desarrollo asincrónico entre su desarrollo intelectual y su desarrollo emotivo y social, característico de este tipo de alumnos en la infancia y en la adolescencia.

Las sesiones del programa tienen tres partes diferenciadas, con herramientas y actividades secuenciadas para provocar el proceso intelectual. Trabajando las relaciones de análisis, síntesis, ordenación, equivalencia y diferenciación. Programamos las tres partes, con un hilo conductor/ como un todo, para fomentar el desarrollo cognitivo del alumno: creando estructuras mentales que sirvan de cauce para la creatividad personal, construyendo esquemas de acción, desarrollando las capacidades de análisis y síntesis. Conseguimos así encadenamientos progresivos mentales, ganando capacidad intuitiva y creativa.

Aplicamos estos procesos teniendo en cuenta los niveles de cada alumno/a. El trabajo es personal según el ritmo y capacidad de cada uno. La ratio profesor alumno/a es de ¼ como máximo para llegar a un seguimiento personal.

Participantes

Al ser un grupo de profesores de distintos ámbitos no disponemos de ningún tipo de promoción o llamada hacia nuestro Programa. Al revés, al hilo de Jornadas Matemáticas o concursos de cálculo vamos conectado con posibles estudiantes cuyas familias apuesten por esta forma de enriquecimiento curricular. El estar en activo y crear redes con otros centros educativos hace que no necesitemos un proceso de selección como tal. Ya que vamos encontrando como el alumno que participa, ya sea por medio de su familia o profesor en su centro, nos dan a conocer entre sus compañeros.

Respecto al alumno que accede al Programa, siempre optamos a que pruebe dos sesiones con nosotros, antes de matricularse. Ya que entendemos que nuestro éxito se asienta en el compromiso e interés del alumno a nuestro planteamiento y actividades. Por tanto, una vez más, nosotros no seleccionamos. Si no que animamos a aprender con nosotros.

Grupos de trabajo

Al ser una atención personalizada basada en las características de cada alumno, no siempre coincide el desarrollo cognitivo del alumno con su edad. De ahí que aunque valoramos realizar los grupos por el grado de madurez del alumno, solemos realizarlos basándonos en sus habilidades en el momento que acceden al taller.

En las sesiones de prueba el alumno accede a un grupo por curso escolar pero luego de valorar y realizar la primera intervención, lo colocaremos con los compañeros más semejantes. Por ejemplo hemos tenido una alumna de 5º Infantil desde el principio con el grupo que se identificaría con 1º y 2º Primaria, realizando su Programa a la par de compañeros con dos o tres años más. O un alumno que cursaba 5º Primaria y seguía el programa con alumnos de 1º ESO, a la par de contenido.

Intervención

Nos basamos primero en la motivación fijándonos principalmente en su actitud en el trabajo y consideramos tres pasos: primero: cómo trabaja, segundo: pautas a seguir mientras trabaja y en último lugar, los obstáculos que puede encontrar para finalizar su trabajo.

- *Cómo trabaja*: El profesor le propone a través de metas las actividades a realizar teniendo en cuenta su capacidad. Aunque en muchas ocasiones, sorprende el resultado y las vías de resolución teniendo en cuenta que estas, deben ser adecuadas y crecientes. Hay que estar alerta cuando el nivel propuesto es inadecuado, salir al paso proponiendo reto personal y fomentado su autonomía. Redundará en la confianza en sí mismo, que se traduce en ser capaz de hacer y ser capaz de rectificar.

- *Pautas a seguir mientras trabaja*: es importante dejar que lo resuelvan solos y en ocasiones preguntar cómo hacen el proceso. En la mayoría de los casos es más conveniente no explicar sino proponer, no resolver y si llevan bastante tiempo trabajando es mejor cambiar de actividad antes de llegar al cansancio. Es importante observar la capacidad de atención y ritmo de trabajo para evitar llegar al desánimo, en este nivel conviene cambiar antes de llegar a esta situación o afirmar que ha llegado a la meta de ese día.

- *Los obstáculos que nos podemos encontrar serán sobretodo actitudinales*. Su actitud personal y roles que adopte dentro del grupo. Conviene plantearles una actividad diferente a cada uno de los alumnos de la sesión, para evitar que el ritmo distinto de los alumnos, provoque ansiedad o desánimo al comprobar que alguien ya lo ha resuelto mientras él sigue buscando la solución. Ante este tipo de obstáculos, el rol del profesor es esencial. Como ya hemos indicado anteriormente, el rol es de guía en su desarrollo cognitivo. Como guía observa y sabe anteponerse a situaciones de bloqueo o ansiedad. Yendo por delante, buscando escenarios alternativos, promoviendo enfoques distintos, flexibilizando el sistema de gestión, atendiendo a la diversidad y proporcionando versiones avanzadas.

Rol del profesor. Gestión de las tres F

En CRACMAT la línea de acción que siguen los profesores se resume, en lo que hemos llamado, la gestión de las tres F.

Primera F: Flexibilidad.

En nuestras metas para las sesiones, en ocasiones, habrá que optar por otra parte de la programación porque el alumno tiene un día alterado o bloqueado. Presentando distintas opciones y que sean atractivas dejando espacio a la creatividad. Esta flexibilidad los ayudará a iniciar un cambio de actitud dentro de su exigencia e intransigencia de la que suelen ser muy firmes.

Segunda F: Fracaso.

Gestionar el fracaso forma parte del desarrollo emocional del alumno. Lo importante no es lo que me digo cuando todo me sale bien, lo importante es lo que me digo cuando todo me sale mal. Facilitarle el conocimiento de sus capacidades y limitaciones a través de sus éxitos y fracasos. No es el fin, es experiencia, el repasar la actividad lleva a descubrir el error que sirve de punto de partida para llegar a la solución correcta.

Tercera F: Factor de cambio.

Y la última “F” ser factor de cambio. El futuro lo puedes construir ahora, despertando su creatividad e imaginación aportando mejoras y encauzando su trabajo como servicio.

SESIÓN CRACMAT: RECURSOS Y MATERIALES

Desde el principio del taller CRACMAT dividimos las sesiones en tres partes bien diferenciadas: Cuaderno, manipulativo e informática.

Al pasar los años hemos ido recopilando todas las actividades creadas para el programa y publicado en forma de libros y cuadernos por franjas de edad (Figura 1). De los 5 a 12 años en adelante. Los cuadernos recogen los distintos procesos de razonamiento que trabajamos en las sesiones: asociar, diferenciar, ordenar, series, equivalencias, capacidad espacial y cálculo razonado. Son actividades y retos con un formato atractivo para los alumnos. Basados en la experiencia durante estos años en el taller, no son cuadernos a modo libro de texto si no un material didáctico flexible. Divididos por procesos permiten ir haciendo fichas salteadas y permiten así captar atención del alumno, reforzar específicamente algún razonamiento y mantener el interés y la motivación hacia la tarea.

Figura 1. Publicaciones cuadernos CRACMAT Alta Capacidad Intelectual.

Desde el principio apostamos por las actividades manipulativas con material que permite al alumno ver lo que está haciendo, más allá de una página de papel. Trabajamos el proceso y su inverso, el todo y sus partes, las partes y el todo. Para esta parte del programa utilizamos tanto material cercano al alumno (dominó, palillos, spinner, baraja clásica o juegos clásicos como el rummikub) como material creado por el profesorado o por ellos mismos. También cada vez más hay empresas que apuestan por unos materiales manipulativos de calidad y nosotros los introducimos también en las rutinas del taller. Por ejemplo un dominó, nos permite además de realizar un memory, practicar series o repasar las operaciones básicas. Unos palillos nos pueden ayudar a crear figuras geométricas. Un proyecto que hemos llevado a cabo también es la creación de juegos de mesa con algún fin didáctico (por ejemplo, practicar las multiplicaciones) en pequeños grupos. Además de agudizar el ingenio, aprenden a trabajar en grupo, aportando soluciones y escuchando a los demás compañeros de trabajo.

La tercera parte, la referente a informática, ha ido a la par del desarrollo de la misma estos últimos 20 años. Comenzamos, casi cuando empezó como asignatura en clase, para aprender a usar Paint y realizar puzzles hasta los últimos años que aprendemos programación con Scratch, crear un Kahoot, montamos prototipos de robots o realizamos nuestras propias páginas web sobre temáticas de interés para el alumno. Junto a juegos que hemos ido compilando los profesores de diversas plataformas para refuerzo de cálculo, geometría etc. Así como juegos de lógica y razonamiento. Desde el taller también hemos realizado competiciones de cálculo online con otros centros educativos y los más mayores, inventan sus propias empresas a partir de sus ideas originales.

Todas las tareas propuestas, desde las tres partes del programa, tienen como finalidad integrar el proceso de enseñanza-aprendizaje a partir de todos los sentidos. Mezclando aprendizaje y juego logramos que el alumnado se implique en la tarea propuesta, mantenga la motivación y desarrolle su creatividad e imaginación. El rol de los profesores encargados de cada bloque es la de guía, la de proponer retos o desafíos. No de resolver, si no escuchar las propuestas del alumnado y guiar su proceso de razonamiento.

Lo importante por tanto, y bien se lo remarcamos a ellos en el Programa, no es el resultado si no el proceso, plantearse interrogantes y soluciones. Para ser un buen guía, nuestro papel es presentar retos proporcionales a la capacidad de cada alumno, para lograr la interiorización y autoconfianza del alumno. Un reto no proporcional conllevaría a lo contrario, situaciones de rechazo a la actividad o bloqueo. La clave es personalizar la enseñanza a cada alumno con sus intereses y características propias lo que repercutirá en su enriquecimiento tanto académico como personal.

A continuación mostramos varios ejemplos de como sería un día de sesión con nuestros alumnos de distintas edades (los nombres son pseudónimos).

Ejemplo 1: Sesión de Teresa – 5 años.

Teresa comenzaría su sesión con cuaderno. El profesor le asignará una página a realizar, se lee el enunciado y le da un tiempo para pensar. Se comenta en voz alta, se argumenta, no es realizar y dar el resultado. La actividad sirve de marco al profesor para trabajar el proceso, para interrogar al alumno ante otras posibilidades y escuchar los argumentos que el alumno plantea. En una misma sesión el profesor selecciona de 2 a 3 páginas (Figura 2 y 3) según el proceso de aceleración que hayamos decidido para Teresa.

Tras media hora teresa pasaría al aula de ordenadores. Allí realizaría 15 min de repaso de cálculo mental con una plataforma online y otros 15min de juegos de razonamiento.

Por último acabaría con la actividad manipulativa. En esta ocasión, hay trabajo en grupo, se trabajaría la suma, ordenando todas las fichas del dominó de mayor a menor (y viceversa) según el valor de la suma completa de los números representados en cada ficha (Figura 4) Se hacen dos grupos de dos alumnos, se explica bien la dinámica a seguir y se reta al equipo que lo acabe antes y bien hecho. Desarrollamos: la suma, valor mayor que y valor menor que. Una vez que los equipos terminan tienen que explicar e ir justificando como han colocado las fichas, realizando el cálculo mental.

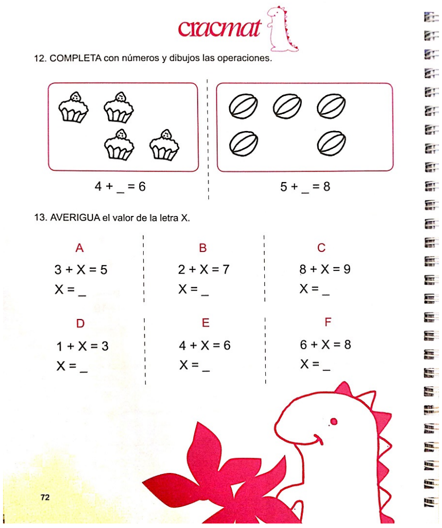


Figura 2. Actividad cálculo Cuadernillo CRACMAT Alta Capacidad Intelectual n 0.1. pág. 72.

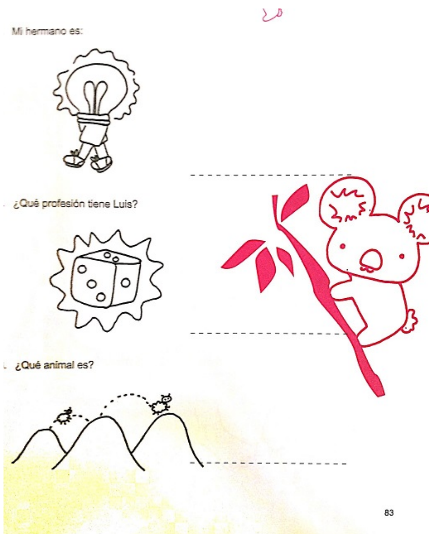


Figura 3. Actividad ingenio Cuadernillo CRACMAT Alta Capacidad Intelectual n 0.1. pág. 83.

Figura 4. Ejemplo de actividad manipulativa a partir de un dominó.

Ejemplo 2: Sesión de Antonio – 9 años

Antonio comienza la sesión de hoy de cuaderno con una actividad especial. A menudo trabajamos con material en otros idiomas, descartamos inglés, con el objetivo que sea él quien decida, mirando las ilustraciones, que debe poner el enunciado y la tarea a realizar (Figura 5). Una vez más, el profesor será guía del proceso deductivo y de la actividad.

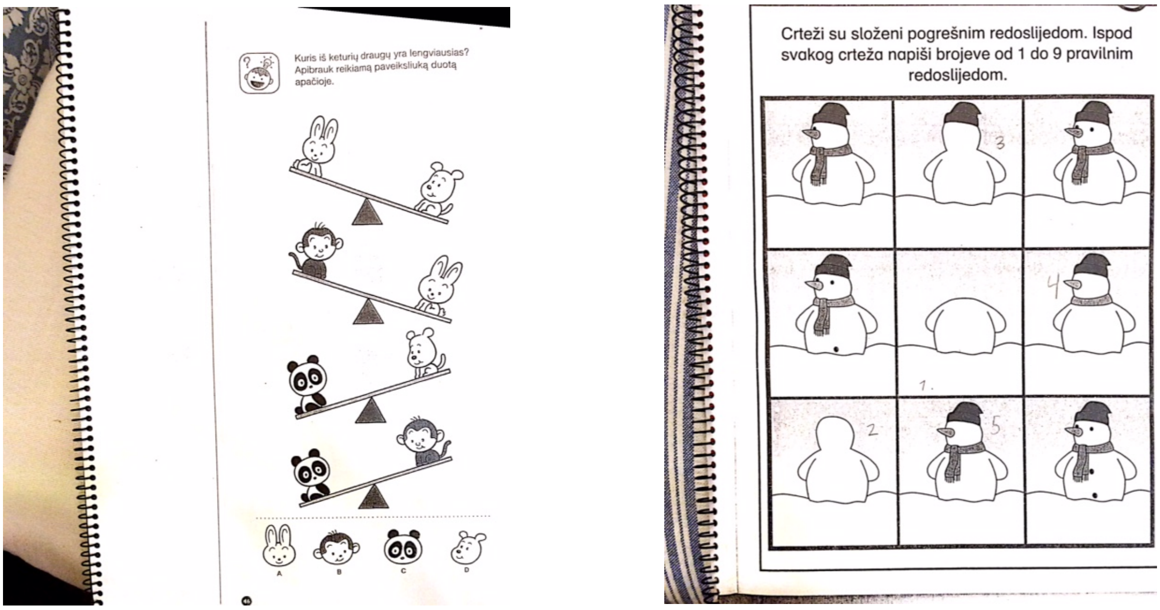


Figura 5. Ejemplos actividades razonamiento.

Tras esta actividad se reunirá con su grupo de trabajo para seguir ideando un juego de mesa. El objetivo marcado para la tarea era que sirva para repasar las tablas de multiplicar (Figura 6).

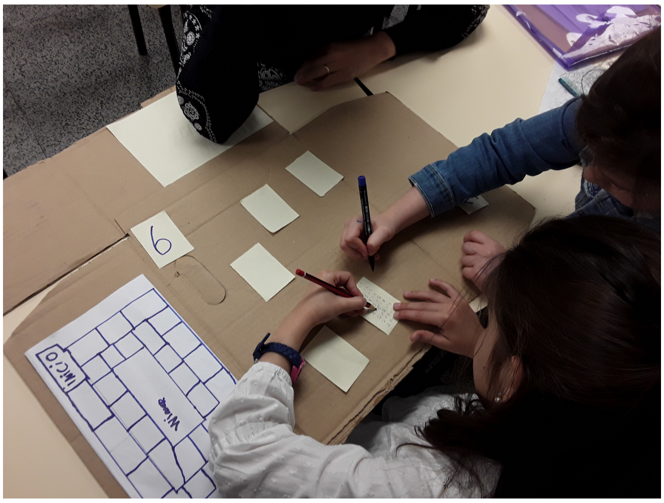


Figura 6. Creación juegos de mesa.

En la actividad manipulativa, hoy trabajará la agudeza visual. Partiendo de un juego conocido como es *Doodle*, jugamos con unas tarjetas dónde se repiten algunas figuras geométricas, deberá por parejas, clasificar su mazo de cartas antes que el equipo rival (Figura 7). Una vez terminada la tarea explican en voz alta al resto de participantes, cuál son las figuras que se repiten y cuáles no.

Figura 7. Actividad de agudeza visual.

Acabará la sesión de hoy en la sala de ordenadores, aprendiendo programación básica a partir del programa *Scratch* (Figura 8).

Figura 8. Programando con *Scratch.*

AGRADECIMIENTOS

Este año cumple 21 años el programa CRACMAT. Haciendo repaso de este tiempo, estamos muy agradecidos a todos los que crecimos con él: padres, profesores y alumnos. En primer lugar, a Javier Touron que desde el principio nos alentó y apoyó nuestro Programa. Y en especial a Adela como profesional y madre de uno de los alumnos que participó en el programa. Ella también fue un punto de inflexión en la publicación de los cuadernos CRACMAT. Reconocer también a Salvador, Pilar, Ainhoa, Jose, Vicente, Cristina, Quim… que ocupan puestos relevantes en la sociedad y con los que seguimos en contacto, comentando agradecidos las estrategias que aprendieron y ahora incorporan a su sistema de acción. Se puede decir que están siendo factor de cambio.

REFERENCIAS

Renzulli, J. S. (2016). *Enriqueciendo el currículo para todo el alumnado*. Madrid: Àpeiron Ediciones.

Depto. de Didáctica de la Matemática
Universitat de València

Depto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Depto. de Matemática Aplicada
Universitat Politècnica de València

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al-Khwarizmi

EDU2017-84377-R (Miciu/Feder)