PREPRINT: Gámez, C., Rodríguez, M. y Ramírez, R. (2021). Modelización: ¿qué nos aportan l las otras disciplinas STEM? Suma 96, 71-78

Modelización: ¿qué nos aportan las otras disciplinas STEM?

Carmen Gámez Valero
Miguel L. Rodríguez González
Rafael Ramírez Uclés

SUMA+ núm. 96
pp. 1-8
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2020 y aceptado en enero de 2021

Una riqueza del proyecto ESTALMAT es la variedad de temas que se abordan en las diferentes sesiones. Además de los contenidos de las diferentes áreas de conocimiento matemático, se abordan sesiones STEM relativas a las Ciencias (como Cosmología o Astronomía), a la Ingeniería (optimización de ubicaciones) y Tecnología (programación, utilización de software dinámico, etc.). En este trabajo vamos a describir una propuesta basada en la modelización de un problema real que se aborda desde las diferentes perspectivas científicas, reflexionando con los estudiantes los aportes de conectarlas y tener una visión global del trabajo científico, más allá de disciplinas concretas.

En las últimas décadas, se ha centrado la atención en la importancia de trabajar de forma interdisciplinaria en el campo de la educación. El término STEM es el acrónimo de los términos en inglés Science, Tecnhology, Engineering and Mathematics (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas). Actualmente, se ha desarrollado el concepto de «Educación STEM» como una nueva manera de enseñar conjuntamente Ciencia, Matemáticas y Tecnología (en general, no solo informática) con una perspectiva integradora y de aplicación práctica de los conocimientos teóricos (Satchwell y Loepp 2002).

De esta forma, se propone la concepción de las distintas disciplinas como una entidad cohesionada, cuya enseñanza sea integrada y coordinada, al igual que se emplean en la resolución de problemas del mundo real (Sanders, 2009).En este trabajo presentamos los aportes que para la resolución de un mismo problema pueden derivarse al considerarlo desde la perspectiva de cada una de las disciplinas implicadas. El análisis de este problema conecta contenidos teóricos con resultados experimentales y facilita al estudiante la comprensión del proceso de modelización (Ramírez y Gámez, 2019).

A continuación, describimos las tareas propuestas en la sesión para «eteranos», asociada al enriquecimiento de contenidos de Primero de Bachillerato relativos a problemas de optimización y problemas métricos. También se enriquecen elementos de razonamiento matemático como la existencia y unicidad de soluciones, la notación matemática y las estrategias de demostración.

Motivación inicial

Por desgracia, nos hemos acostumbrado a hablar de distancia social y de querer situarnos en los espacios lo más alejados posible. Este interés hace tiempo que se aborda en distintas situaciones menos dramáticas que pretenden optimizar la ubicación de instalaciones con la intención de minimizar los desplazamientos o maximizar el campo de acción de una fuente energética. En esta sesión vamos a intentar resolver un problema con interés en la actualidad, derivado directamente de una necesidad en el campo de las telecomunicaciones. Nos convertiremos en los investigadores *i+d+i* de una reconocida empresa para optimizar el rendimiento en la ubicación de antenas. Este es nuestro reto.

TAREA 1: Trabajando desde la ingeniería

Queremos instalar un conjunto de antenas lo más alejadas posibles unas de otras, pero cumpliendo que toda la región tenga cobertura suficiente. Los ingenieros de la empresa nos formulan el problema de la siguiente manera:

Dado un punto $P=(x,y)$, en el plano, denotaremos la norma euclídea por

$$\|P\|=\sqrt{x^2+y^2},$$

y la distancia entre dos puntos, $P=(x,y), P=(x_1,y_1)$ la denotaremos por

$$d(P,Q)=\|P-Q\|=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}.$$

Buscamos un conjunto de N puntos

$$A=\{r_i=(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2, i=1,\dots,N\},\quad (0,0)\notin A$$

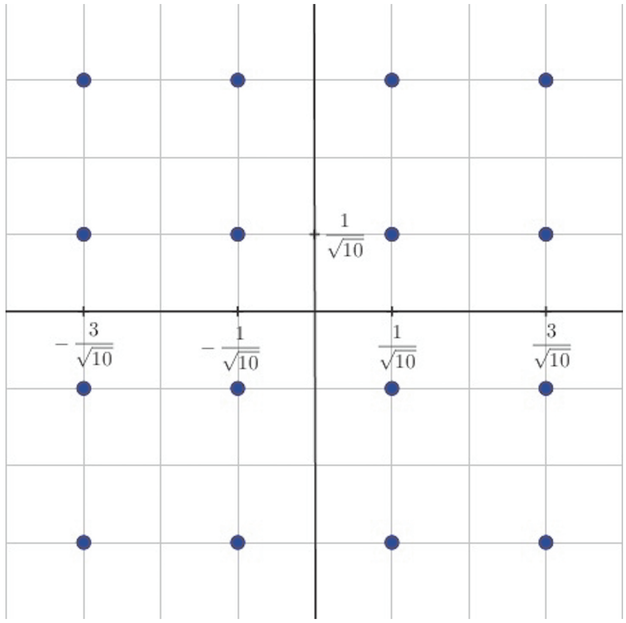

Figura 1

tales que $A\{r_1,\dots r_N\}=\arg\min_{i=1,\dots,N}\{d(r_i)\}$. Donde $d(r_i)$ representa el mínimo de las distancias de a todos los demás puntos del conjunto,

$$d(r_i)\equiv\min_{i\neq j}\{d(r_i,r_j)\}.$$

Y se pretende que este valor sea lo mayor posible. Además, imponemos una restricción de normalización:

$$\frac{1}{N}=\sum_{n=1}^{N}\|r_i\|=1.$$

La distribución que se está utilizando actualmente y que queremos mejorar es la siguiente, donde se han distribuido 16 antenas como se muestra en la figura 1.

Nuestra traducción del problema se simplifica de la siguiente manera. Dado un conjunto de puntos en el plano se llama distancia vecinal a la distancia de los dos puntos más cercanos. ¿Cómo conseguir distribuir los puntos para que la distancia vecinal sea lo mayor posible?

Se plantean las siguientes preguntas para debatir

— ¿Cuál es la distancia vecinal de esta distribución?
— ¿Qué ocurre cuando desplazamos uno sólo de los puntos?

— ¿Cómo varía la distancia vecinal al ir moviendo los puntos?

En la puesta en común se enfatiza que la distancia vecinal se alcanza en los dos puntos más cercanos y se marca $2/\sqrt{10}$ como el objetivo a mejorar al instalar 16 antenas. Como el problema viene restringido a la norma 1, se les orienta a considerar la variación correspondiente a que todos los puntos estén en círculo de radio 1. Se comenta que para abordar problemas de modelización, en ocasiones se buscan simplificaciones que permitan matematizar el problema y abordarlo con menos restricciones. Para luego, retomar las condiciones iniciales y estudiar los aportes de la solución obtenida.

Así, replanteamos el problema:

— ¿Cómo colocar n puntos en un círculo lo más alejados posibles unos de otros?

Es decir, si *n* vecinos deben ubicar sus casas en un círculo y quieren estar lo más distanciados posible, ¿cómo colocarlos? Lo que hemos denominado distancia vecinal sería la distancia entre los dos vecinos que vivan más cerca. ¿Cómo conseguir que esa distancia vecinal sea lo mayor posible?

En grupo, se buscan ideas intuitivas y se les invita a que intenten formularlo con lenguaje matemático e incluso indagar si es posible encontrar una función cuyo máximo o mínimo resuelva el problema. Ante la dificultad que surge para abordarlo como los problemas escolares de optimización que conocen, le animamos a afrontar el problema desde las diferentes perspectivas STEM, comenzando por el siguiente experimento.

TAREA 2: Experimentación con la Ciencia

Se les plantea una experimentación para abordar el problema desde la manipulación. Consiste en introducir *n* imanes de neodimio en un recipiente cuya superficie de flotación sea circular con agua y estudiar la posición que ocuparán estos imanes (el número de imanes dependerá del caso que queramos estudiar). Los imanes estarán simulando la situación del problema inicial propuesto, de forma que los imanes son los puntos o antenas a situar y el recipiente la región acotada en la que queremos ubicarlos. Los imanes, gracias a sus fuerzas de atracción y repulsión, lograrán una distribución óptima en el recipiente que variará en función del número de imanes considerados.

Para llevar a cabo dicho experimento necesitamos los siguientes materiales:

— *n* imanes de neodimio
— *n* tapones de plástico del mismo tamaño
— agua
— un recipiente con superficie de flotación circular
— pegamento resistente al agua

En primer lugar, para evitar que los imanes se hundan en el agua, es necesario adherirlos a alguna superficie, todos por el mismo polo, consiguiendo así que los imanes floten. Las superficies elegidas, como se aprecia en las figuras 2 y 3, que en nuestro caso hemos empleado tapones, deben tener un tamaño considerablemente pequeño, similar al de los imanes puesto que podría afectar a su fuerza (figura 2)

El experimento consiste en ir introduciendo en el agua los n imanes pegados y observar cuál es el comportamiento de éstos.

— ¿Observas algún patrón o regularidad en los casos?
— ¿Crees que habrá un número de imanes en el que la distribución sea muy diferente a la anterior? ¿Por qué?

Figura 2

— ¿Qué diferencias existen entre el comportamiento de los imanes y la ubicación de las antenas? ¿Buscan los imanes maximizar la distancia vecinal?

Se recoge la lluvia de ideas, experimentando con los aportes que hagan los estudiantes y destacando que el caso $n=6$ es relevante por los polígonos regulares encontrados para valores menores.

Se observa que los imanes se comportan de una manera especial: se posicionan en el borde del recipiente y, una vez en el borde, se separan unos de otros hasta conseguir su posición de equilibrio.

— ¿La distancia que existe entre cada par de imanes situados en la posición de equilibrio será la distancia vecinal buscada para n puntos?

A partir de este experimento, conjeturamos que la estrategia anterior puede conseguir la posición óptima de n puntos, siendo $n < 6$, situados en el interior de un círculo. También hemos podido comprobar cuántos puntos podemos introducir en el interior de la circunferencia cuando hemos fijado sobre ella p puntos. Ver un ejemplo en la figura 3.

Concluimos que para obtener distribuciones estables, a partir de un cierto n, es necesario formar circunferencias concéntricas a la inicial y buscar polígonos regulares tanto en el exterior como en el interior de dicha circunferencia, de forma que las distancias entre los imanes sean máximas. Por otro lado, podemos intuir que existe una relación entre las distancias entre los diferentes puntos, teniendo en cuenta la distancia entre los puntos situados en el borde, la distancia entre los puntos situados en la circunferencia interior, la distancia entre los puntos interiores y la distancia de los puntos situados en el interior a los puntos situados en el exterior.

Figura 3

Este apartado es especialmente útil para trabajar el siguiente punto, ya que en él se ha manipulado el problema, facilitando así la comprensión del mismo. Gracias a este experimento, los alumnos pueden obtener ideas y estrategias sobre cómo trabajar posteriormente el problema desde el campo de las matemáticas. Así, en el siguiente apartado del trabajo estudiaremos con mayor profundidad la estrategia de ubicar n puntos, siendo $n<6$, demostrando distintos lemas que nos ayuden a obtener la distancia vecinal buscada.

TAREA 3: Argumentación matemática

Tras realizar el experimento, se procede a matematizar las ideas obtenidas buscando a la vez la solución óptima al problema inicial. Como se ha observado en el comportamiento de los imanes se puede distinguir dos casos bien diferenciados $n<6$ y $n\geq6$.

Vamos a intentar que lo observado en la estrategia aportada por el experimento de los imanes se puede matematizar estudiando las distancias entre los puntos (Gámez, 2017). El procedimiento a seguir es ubicar los puntos sobre la circunferencia con una distancia entre sí máxima, siguiendo los mismos pasos que los imanes (ver la figura 4).

Se les propone argumentar en los casos más sencillos:

— Para dos puntos, ¿es el diámetro de la circunferencia la distancia vecinal?

En la recogida de ideas, se intenta que formalicen sus razonamientos y vayan más allá de argumentaciones empíricas.

— ¿Puede haber dos puntos en un círculo más alejados que la longitud del diámetro?

Estas preguntas dan pie profundizar en el propio concepto de diámetro y recordar la propiedad de «anchura constante» en las figuras geométricas.

Abordamos ahora el caso para tres puntos. A partir de lo observado con los imanes, planteamos demostrar el siguiente teorema:

> Dado tres puntos en un círculo, la distancia vecinal es el lado del triángulo equilátero que forman al distribuirse los tres puntos en la circunferencia.

Se recogen lo que pueden ser ideas intuitivas y se les guía para que formalicen la demostración con los siguientes pasos:

Dados tres puntos *P*1, *P*2 y *P*3 cualesquiera en un círculo, se comprueba inicialmente que se consigue una distribución *P*1´, *P*2 y *P*3 con distancia vecinal mayor situando *P*1´ en el borde (figura 4). Se les plantea una conclusión de esta idea

— ¿Esta propiedad implica que los tres puntos estarán en la circunferencia?

Se motiva a que sus argumentaciones sean lo más formales posibles, convirtiendo las ideas intuitivas o apreciaciones a partir de ejemplos en razonamientos válidos para cualquier caso. Se introduce la notación como un elemento importante tanto para organizar las ideas como para clarificar los pasos de la demostración.

Tras esta reflexión, renombramos *P*1, *P*2 y *P*3 a esta nueva distribución. Repitiendo el razonamiento para *P*2 y *P*3, se obtiene una mejor solución con los tres puntos en la circunferencia.

— ¿Si los tres puntos están en la circunferencia, cuál es la distribución que maximiza la distancia vecinal?

Tras la discusión de las ideas propuestas y determinar el triángulo equilátero como distribución óptima, se les plantea como tarea el cálculo de la distancia vecinal a partir de los conocimientos trigonométricos (figura 5).

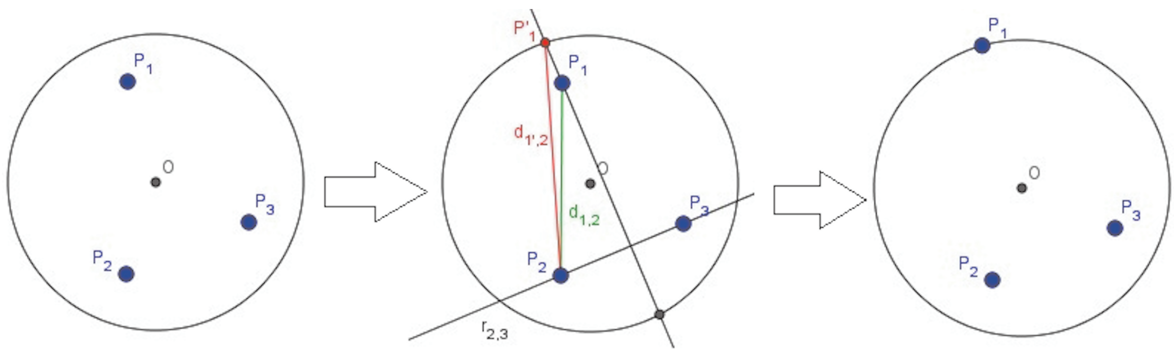

Figura 4

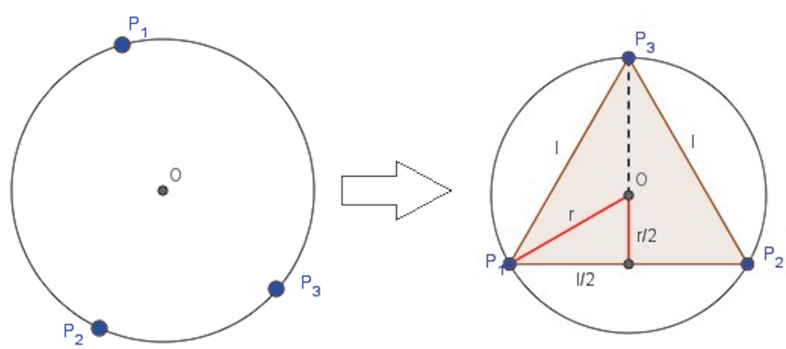

Figura 5

Como tarea de profundización, se les invita a trasladar el razonamiento al caso de cuatro y cinco puntos. Dada la complejidad, se les plantea como proyecto de investigación posterior a la sesión de clase.

Ahora se aborda la unicidad de solución en cada caso.

— ¿Para qué número de puntos, hay dos o más soluciones que tienen optimizan la distribución?¿Qué ocurre cuando $n = 6$?

Se les deja tiempo para que trabajen en grupo e intenten argumentar para qué casos (n<8) hay unicidad de solución. Es interesante considerar soluciones equivalentes cuando se consiga una a partir de la otra utilizando movimientos como giros y simetrías. Y se les muestra el caso para $n = 6$ para ejemplificarlo (figura 6).

Para los casos en los que $n > 6$ empleamos la otra estrategia obtenida en el experimento, en la cual se forman círculos concéntricos sobre los que se situarán los puntos formando de nuevo polígonos regulares, teniendo en cuenta la distancia entre los puntos exteriores (situados sobre la circunferencia inicial), la distancia entre los puntos interiores (situados sobre una nueva circunferencia concéntrica e interior a la inicial) y la distancia entre los puntos interiores y exteriores (Gámez, 2017). Dada la complejidad que requieren estos casos atendiendo a las matemáticas que conocen, se les plantea una nueva perspectiva del problema utilizando simulación en ordenador, dando lugar a la perspectiva STEM.

TAREA 4: Aplicando la tecnología

La última versión del problema corresponde con el enfoque tecnológico, el cual lo abordaremos mediante el uso del software GeoGebra. Este software nos permitirá representar las distintas situaciones que se producen al variar el número de puntos a colocar, en particular, facilitando la comprensión donde n>6, en los cuales su estudio presenta una mayor dificultad.

Se le muestran las soluciones encontradas con simulación informática para $n > 7$ en un artículo que aborda un problema equivalente. Es el caso del trabajo de optimal packing propuesto por Graham et al. (1998) donde se considera el problema formulado del modo siguiente: insertar n círculos congruentes (radio unidad) dentro de un circulo de radio mayor.

Inicialmente se les plantea a los estudiantes la relación entre este problema y el planteado en la sesión y cómo se traduce la solución de uno en el otro. Si el radio del círculo mayor es 1 y consideramos n círculos que se «empaqueten» dentro con el mayor radio posible todos ellos, los resultados de este trabajo también sirven de ayuda e inspiración a la hora de buscar la solución óptima (figura 7). En el trabajo realizado por Graham et al. (1998) se propone la solución, mediante algoritmos computacionales, para llegar a introducir en un círculo hasta 65 círculos congruentes. En la siguiente figura 7, se muestra la distribución propuesta en dicho trabajo para la ubicación de 16 puntos.

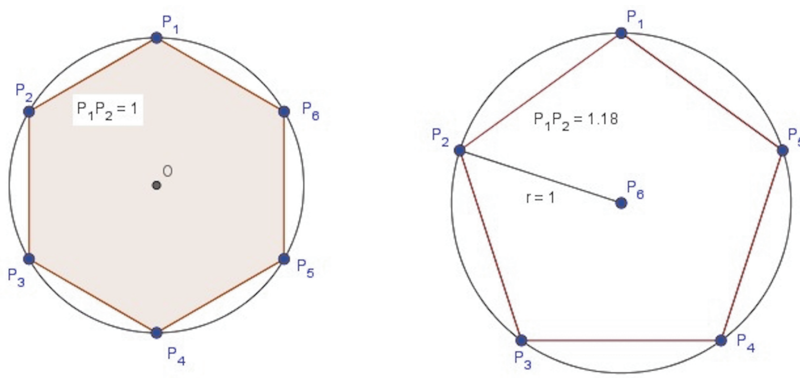

Figura 6

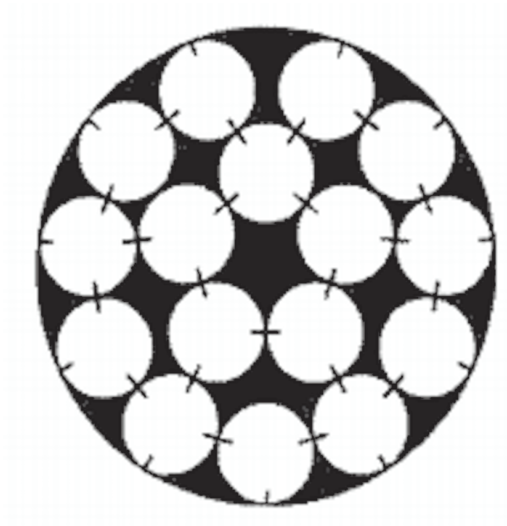

Figura 7

Como se ha indicado anteriormente, gracias a GeoGebra (figura 8), se realiza una construcción basándonos en la idea obtenida con el experimento de los imanes (considerando circunferencias concéntricas, polígonos regulares y distancias entre puntos) y tomando como referencia el artículo mencionado en el cual se realizó computacionalmente. GeoGebra, a partir de sus herramientas para «arrastrar» puntos, permite la construcción de los polígonos interiores y exteriores. El alumno puede dinamizar la construcción para obtener empíricamente la distribución con mayor distancia vecinal.

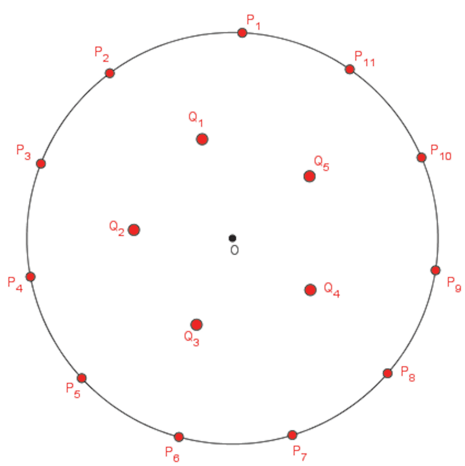

Figura 8

A partir de la solución propuesta por Graham et al. (1998), se construye de manera dinámica un polígono regular de 11 lados en la circunferencia unidad y otro de 5 lados en la interna. De manera dinámica, se van transformando estos polígonos hasta que las tres distancias (entre puntos externos, entre puntos internos y entre internos y externos) coinciden.

Manipulando con GeoGebra y estudiando todos los casos, se llega finalmente a $n = 16$, caso correspondiente al planteado en el problema en ingeniería.

Conclusiones finales

Finalmente, comparamos la distancia vecinal en la ubicación de 16 antenas como la figura 1, a la obtenida con la simulación informática. Tras los cálculos, recordemos que en la actualidad se emplea una distribución cuya distancia vecinal es y nuestro objetivo es encontrar una nueva distribución en la que dicha distancia sea mayor. La nueva solución obtenida, transformada para que la media de la norma sea 1, presenta una distancia vecinal de 0,661.

La mejora tras la optimización de la distribución supone una mejora de 0,192 decibelios (Gámez, 2017). Desde un punto de vista práctico, la mejora obtenida no es significativa, pero aporta una aproximación de la solución óptima y la cota para una mejor eficiencia. Como consecuencia, se comprueba que el modelo actual utilizado, si bien no es el óptimo, es una distribución simple que satisface los requisitos.

Se cierra la sesión valorando los aportes de cada una de las perspectivas: la formalización matemática, la experimentación científica, la simulación tecnológica y la aplicación en ingeniería. Creemos que implementar o mejorar la educación STEM debe ser un objetivo en el campo de la educación, ya que se ha demostrado en numerosas ocasiones que favorece el desarrollo de habilidades esenciales en el desarrollo de un estudiante, como el pensamiento crítico, el trabajo en equipo y la capacidad de resolver problemas actuales, proporcionándole más oportunidades de aprender cercanas al desarrollo y aplicación de avances científicos y tecnológicos (Vásquez, 2014). Un estudiante con formación STEM no solo será un innovador, un pensador crítico, también será capaz de hacer conexiones significativas entre el colegio, su entorno, el trabajo y los problemas del mundo real.

Referencias bibliográficas

Gámez, C. (2017), «La estrategia de maximizar la mínima distancia desde una perspectiva STEM». (Trabajo de Fin de Máster no publicado). Universidad de Granada.

Graham, R.L., B. D. Lubachevsky, K.J. Nurmela y P.R.J. Östergard (1998), «Dense packing of congruent circles in a circle», *Discrete Mathematics* n.º 181, 139-154.

Ramírez, R. y C. Gámez (2019), «Resolución de un problema de modelización desde una perspectiva STEM», Comunicación presentada en 19 JAEM (Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas), A Coruña, España. Disponible en <http://hdl.handle.net/10481/64712>.

Sanders, M. (2009), «STEM, STEM education, STEM mania», *The Technology Teacher* n.º 68, 20-26.

Satchwell, R. y F.L. Loepp (2002), «Designing and Implementing an Integrated Mathematics, Science, and Technology Curriculum for the Middle School,» *Journal of Industrial Teacher Education* n. º 39, <http://scholar.lib.vt.edu/ejournals/JITE/v39n3/satchwell.html>.

Vásquez A.L. (2014), «Hacia un perfil docente para el desarrollo del pensamiento computacional basado en educación STEM para la media técnica en desarrollo de software», Proyecto de investigación para optar el título de Maestría en Ingeniería con especialidad en tecnologías de información para educación, Universidad EAFIT, Medellín.

Carmen Gámez Valero
I.E.S. Aricel, Albolote, Granada
<cgval22@gmail.com>

Miguel L. Rodríguez González
Universidad de Granada
<miguelrg@ugr.es>

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada
<rramirez@ugr.es>