ARNAULD
GEOMETR

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE,

CONTENANT,

OUTRE UN ORDRE TOUT NOUVEAU, & de nouvelles demonſtrations des propoſitions les plus communes,

De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes ſont incommenſurables·

De nouvelles meſures des angles, dont on ne s'étoit point encore aviſé,

Et de nouvelles manieres de trouver & de demontrer la proportion des Lignes.

SECONDE EDITION.

Où il y a un traité tout nouveau des Proportions, & beaucoup d'autres changemens conſiderables.

A PARIS,

Chez GUILLAUME DESPREZ, ruë S. Jacques, à S. Proſper & aux trois Vertus, au deſſus des Mathurins.

M. DC. LXXXIII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

AVERTISSEMENT
sur cette seconde Edition.

LA Geometrie est d'une si grande utilité, & il est si necessaire de bien connoître les rapports qui se rencontrent entre diverses grandeurs : qu'il est presque impossible de faire aucun progrés considerable dans les Arts liberaux, sans avoir quelque teinture de cette Science, il seroit à desirer que l'on s'y appliquât plus qu'on ne fait, & que cette connoissance devint plus commune. Car outre l'usage continuel qu'on en peut faire dans tous les Arts avec un tres grand avantage ; un esprit Geometrique est plus juste que celuy qui ne l'est pas, & beaucoup moins sujet à prendre la vrai-semblance pour la verité. C'est pourquoy l'on est redevable à ceux qui travaillent à rendre cette Science facile ; & en particulier à l'Auteur non seulement de nous avoir donné ces nouveaux Elemens, sans lesquels plusieurs personnes n'auroient jamais eu de goût pour une connoissance qui demande *tant d'application : mais aussi de ce qu'il a pris la peine de les corriger, & d'y faire plusieurs changemens considerables. La matiere qui y est traitée, principalement dans les quatre premiers livres est d'elle mesme si abstraitte, qu'il ne faut pas s'étonner si plusieurs se sont aisément rebutez dés l'entrée, & s'ils ont été obligez tres souvent de commencer par le cinquiéme livre. C'est dans le dessein de lever cette difficulté que l'Auteur y a changé beaucoup de choses, & qu'il a refait entierement le second & le troisiéme livre : où il explique la nature des raisons & des Proportions Geometriques, soit simples, soit composées, avec beaucoup plus de netteté & d'ordre qu'il n'avoit fait dans la premiere edition. Et l'on peut dire que la maniere dont il se sert ne paroîtra pas si difficile à ceux qui voudront s'y appliquer un peu. Il y auroit icy assez de fondement de s'étendre sur la bonté de cet Ouvrage, qui fut receu dés la premiere fois avec tant d'applaudissement. Mais il est plus à propos de ne point prevenir les Lecteurs, Et l'on doit esperer que l'avancement que feront dans la Geometrie ceux qui se serviront de ces Elemens, en sera une preuve plus seure que tout ce qu'on en pourroit dire.*

PREFACE.

QUOIQUE j'aye quelque ſorte de liberté de parler avantageuſement de ces Nouveaux Elemens de Geometrie, puiſque je n'y ay point d'autre part que celle de les avoir tirez des mains de l'Auteur pour les donner au public; mon deſſein n'eſt pas neanmoins d'en faire voir icy l'excellence, ny de les propoſer au monde comme un ouvrage fort conſiderable. Je ſerois plûtoſt porté à diminuer l'idée trop haute que quelques perſonnes en pouvoient avoir, étant tres perſuadé qu'il eſt beaucoup plus dangereux d'eſtimer trop ces ſortes de choſes, que de ne les pas eſtimer aſſez.

La nature de toutes les ſciences humaines, & principalement de celles qui entrent peu dans le commerce de la vie, eſt d'être mêlées d'utilitez & d'inutilitez : & je ne ſçay ſi l'on ne peut point dire qu'elles ſont toutes inutiles en elles mêmes, & qu'elles devroient paſſer pour un amuſement entierement vain & indigne de perſonnes ſages, ſi elles ne pouvoient ſervir d'inſtrumens & de preparations à d'autres connoiſſances vraiment utiles. Ainſi ceux qui s'y attachent pour elles mêmes comme à quelque choſe de grand & de relevé n'en connoiſſent pas le vray uſage, & cette ignorance eſt en eux un beaucoup plus grand défaut que s'ils ignoroient abſolument ces ſciences.

Ce n'eſt pas un grand mal que de n'eſtre pas Geometre ; mais c'en eſt un conſiderable que de croire que la Geometrie eſt une choſe fort eſtimable, & de s'eſtimer ſoy même pour s'eſtre rempli la teſte de lignes, d'angles, de cercles, de proportions. C'eſt une ignorance tres blâmable que de ne pas ſçavoir, que toutes ces ſpeculations ſteriles ne contribuënt rien à nous rendre heureux ; qu'elles ne ſoulagent point nos miſeres ; qu'elles ne gueriſſent point nos maux ; qu'elles ne nous peuvent donner aucun contentement réel & ſolide ; que l'homme n'eſt point fait pour cela, & que bien loin que ces ſciences luy donnent ſujet de s'élever en luy-même, elles ſont au contraire des preuves de la baſſeſſe de ſon eſprit ; puiſqu'il eſt ſi vain & ſi vuide de vray bien, qu'il eſt capable de s'occuper tout entier à des choſes ſi vaines & ſi inutiles.

Cependant on ne voit que trop par experience, que ces ſortes de connoiſſances ſont d'ordinaire jointes à l'ignorance de leur prix & de leur uſage. On les recherche pour elles mêmes ; on s'y applique comme à des choſes fort importantes ; on en fait ſa principale profeſſion ; on ſe glorifie des découvertes que l'on y fait ; on croit fort obliger le monde ſi l'on veut bien luy en faire part ; & l'on s'imagine meriter par là un rang fort conſiderable entre les ſçavans & les grands eſprits.

Si cet Ouvrage n'a rien de ce qui merite la reputation de grand Geometre au jugement de ces perſonnes, en quoy il eſt tres juſte de les en croire ; au moins on peut dire avec verité que celuy qui l'a compoſé eſt exempt du défaut de la ſouhaitter, & que quoy qu'il eſtime beaucoup le genie de pluſieurs perſonnes qui ſe mélent de cette ſcience, il n'a qu'une eſtime tres mediocre pour la Geometrie en elle même. Neanmoins comme il eſt impoſſible de ſe paſſer abſolument d'une ſcience qui ſert de fondement à tant d'arts neceſſaires à la vie humaine, il peut y avoir quelque utilité à montrer aux hommes de quelle ſorte ils en doivent uſer, & de leur rendre cette étude la plus avantageuse qu'il est possible.

C'est l'unique vuë qu'a eüe l'Auteur de ces nouveaux Elemens. Il n'a pas tant consideré la Geometrie, que l'usage qu'on en pouvoit faire ; & il a cru qu'en évitant ces défauts qui n'en sont pas inseparables, on s'en pouvoit tres utilement servir pour former les jeunes gens, non seulement à la justesse de l'esprit ; mais même en quelque sorte à la pieté & au reglement des mœurs.

Pour comprendre les avantages qu'on en peut tirer, il faut considerer que dans les premieres années de l'enfance l'ame de l'homme est comme toute plongée & toute ensevelie dans les sens, & qu'elle n'a que des perceptions obscures & confuses des objets qui font impression sur son corps. Elle sort à la verité de cet état à mesure que ses organes se dégagent & se fortifient par l'âge, & elle acquiert quelque liberté de former des pensées plus claires & plus distinctes, & même de les tirer les unes des autres, ce que l'on appelle raisonnablement. Mais l'amour des choses sensibles & exterieures luy étant devenu comme naturel, & par la corruption de son origine & par l'accoûtumance qu'elle a contractée durant l'enfance, les choses exterieures sont toûjours le principal objet de son plaisir & de sa pente. Ainsi non seulement les jeunes gens ne se plaisent gueres que dans les choses sensuelles ; mais même entre les personnes avancées en âge il y en a peu qui soient capables de trouver du goust dans une verité purement spirituelle, & où les sens n'ayent aucune part. Toute leur application est toûjours aux manieres agreables ; ils n'ont de l'intelligence & de la delicatesse que pour cela, & ils ne se servent de leur esprit que pour étudier l'agréement & l'art de plaire, par les choses qui flattent la concupiscence & les sens.

Il me seroit aisé de montrer, que cette disposition d'esprit est non seulement un tres grand défaut ; mais que c'est la source des plus grands desordres & des plus grands vices. Il est vray qu'il n'y a que la grace & les exercices de pieté qui puissent la guerir veritablement : mais entre les exercices humains qui peuvent le plus ſervir à la diminuer, & à diſpoſer même l'eſprit à recevoir les veritez Chreſtiennes avec moins d'oppoſition & de dégouſt, il ſemble qu'il n'y en ait gueres de plus propre que l'étude de la Geometrie. Car rien n'eſt plus capable de détacher l'ame de cette application aux ſens, qu'une autre application à un objet qui n'a rien d'agreable ſelon les ſens ; & c'eſt ce qui ſe rencontre parfaitement dans cette ſcience. Elle n'a rien du tout qui puiſſe favoriſer tant ſoit peu la pente de l'ame vers les ſens ; ſon objet n'a aucune liaiſon avec la concupiſcence ; elle eſt incapable d'eloquence & d'agréement dans le langage ; rien n'y excite les paſſions ; elle n'a rien du tout d'aimable que la verité, & elle la preſente à l'ame toute nuë & détachée de tout ce que l'on aime le plus dans les autres choſes.

Que ſi les veritez qu'elle propoſe ne ſont pas fort utiles ny fort importantes, ſi l'on en demeuroit là ; il eſt neanmoins tres utile & tres important de s'accoûtumer à aimer la verité, à la gouſter, à en ſentir la beauté. Et Dieu ſe ſert ſouvent de cette diſpoſition d'eſprit, pour nous faire entrer dans l'amour & dans la pratique des veritez qui conduiſent au ſalut, pour nous faire voir l'illuſion de tout ce qui plaiſt dans les choſes ſenſibles & exterieures, & pour nous rendre juſtes & equitables dans toute la conduite de nôtre vie ; cet eſprit d'equité conſiſtant principalement dans le diſcernement & dans l'amour de la verité en toutes les affaires que nous traittons.

Mais la Geometrie ne ſert pas ſeulement à détacher l'eſprit des choſes ſenſibles, & à inſpirer le gouſt de la verité ; elle apprend auſſi à la reconnoiſtre & à ne ſe laiſſer pas tromper par quantité de maximes obſcures & incertaines, qui ſervent de principes aux faux raiſonnemens dont les diſcours des hommes ſont tout remplis. Car ſi l'on y prend garde, ce qui nous jette ordinairement dans l'erreur & nous fait prendre le faux pour le vray, n'eſt pas le défaut de la liaiſon des conſequences avec les principes en quoy conſiſte ce qu'on appelle la forme des ar-

gumens

gumens ; mais c'eſt l'obſcurité des principes mêmes, qui n'étant pas exactement vrais, & n'étant pas auſſi évidemment faux, preſentent à l'eſprit une lumiere confuſe où la verité & la fauſſeté ſont mêlées, ce qui cauſe à pluſieurs un eſpece d'éblouïſſement qui leur fait approuver ces principes ſans les examiner davantage.

Il eſt vray que la Logique nous donne deux excellentes regles pour éviter cette illuſion, qui ſont de définir tous les mots équivoques, & de ne recevoir jamais que des principes clairs & certains. Mais ces regles ne ſuffiſent pas pour nous garantir d'erreur. Premierement, parce qu'on ſe trompe ſouvent dans la notion même de l'evidence, en prenant pour évident ce qui ne l'eſt pas. Et en ſecond lieu, parce que quoy qu'on ſçache ces regles, on n'eſt pas toûjours appliqué à les pratiquer. Il n'y a donc que la Geometrie qui remedie en effet à l'un & à l'autre de ces défauts. Car d'une part en fourniſſant des principes vraiment clairs, elle nous donne le modelle de la clarté & de l'evidence pour diſcerner ceux qui l'ont de ceux qui ne l'ont pas: & de l'autre, comme elle ne ſe diſpenſe jamais de l'obſervation de ces deux regles, elle accoûtume l'eſprit à les pratiquer, & à eſtre toûjours en garde contre les équivoques des mots & contre les principes confus, qui ſont les deux ſources les plus communes des mauvais raiſonnemens.

Il ne faut pas diſſimuler neanmoins, que cette coûtume même de rejetter tout ce qui n'eſt pas entierement clair peut engager dans un défaut tres conſiderable, qui eſt de vouloir pratiquer cette exactitude en toute ſorte de matieres, & de contredire tout ce qui n'eſt pas propoſé avec l'evidence Geometrique. Cependant il y a une infinité de choſes dont on ne doit pas juger en cette maniere, & qui ne peuvent pas eſtre reduites à des demonſtrations methodiques. Et la raiſon en eſt, qu'elles ne dépendent pas d'un certain nombre de principes groſſiers & certains, comme les veritez Mathematiques ; mais d'un grand nombre de preuves & de circonſtances qu'il faut que l'eſprit voye tout dun coup, & qui n'étant pas convaincantes ſeparément, ne laiſſent pas de perſuader avec raiſon lors qu'elles ſont jointes & unies enſemble. La pluſpart des matieres morales & humaines ſont de ce nombre; & il y a même des veritez de la Religion qui ſe prouvent beaucoup mieux par la lumiere de pluſieurs principes qui s'entr'aident & ſe ſoûtiennent les uns les autres, que par des raiſonnemens ſemblables aux demonſtrations Geometriques.

C'eſt donc ſans doute un fort grand défaut que de ne faire pas diſtinction des matieres; d'exiger par tout cette ſuitte methodique de propoſitions, que l'on voit dans la Geometrie; de faire difficulté ſur tout, & de croire avoir droit de rejetter abſolument un principe, lors qu'on juge qu'il peut recevoir quelque exception en quelque rencontre.

Mais ſi ce défaut eſt aſſez ordinaire à quelques Geometres, il ne naiſt pas neanmoins de la Geometrie même. Cette ſcience étant toute veritable ne peut pas autoriſer une conduite qui n'eſt fondée que ſur des principes d'erreur. Car il n'eſt pas vray qu'un principe qui ne prouve pas abſolument ne prouve rien; & que ne prouvant pas tout ſeul, il ne prouve pas étant joint à d'autres. Il y a differens degrez de preuves. Il y en a dont on conclut la certitude, & d'autres dont on conclut l'apparence; & de pluſieurs apparences jointes enſemble on conclut quelquefois une certitude à laquelle tous les eſprits raiſonnables ſe doiuent rendre. Il n'eſt pas abſolument certain que l'on doive voir le Soleil quelqu'un des jours de l'année qui vient, je le dois neanmoins croire; & je ſerois ridicule d'en douter, quoy qu'il ſoit impoſſible de le démontrer. La raiſon ne doit donc pas pretendre de démontrer Geometriquement ces choſes; mais elle peut prouver Geometriquement que c'eſt une ſottiſe de ne les pas croire: Et c'eſt en cette maniere qu'on ſe peut ſervir de la Geometrie même dans ces ſortes de matieres, pour faire voir plus clairement la force de la vray-ſemblance qui nous les doit faire croire.

Outre ces utilitez que l'on peut tirer de la Geometrie, on en peut encore remarquer deux autres qui ne ſont pas moins conſiderables. Il y a des veritez importantes pour la conduite de la vie & pour le ſalut, qui ne laiſſent pas d'eſtre difficiles à comprendre, & qui ont beſoin d'une attention penible; Dieu ayant voulu, comme dit S. Auguſtin, que le pain de l'ame ſe gagnaſt avec quelque ſorte de travail auſſi bien que le pain du corps. Et il arrive de là que pluſieurs perſonnes s'en rebutent par une certaine pareſſe, ou plûtoſt par une delicateſſe d'eſprit qui leur donne du dégouſt de tout ce qui demande quelque effort & quelque ſorte de contention. Or l'étude de la Geometrie eſt encore un remede à ce défaut; car en appliquant l'eſprit à des veritez abſtraittes & difficiles, elle luy rend faciles toutes celles qui demandent moins d'application; comme en accoûtumant le corps à porter des fardeaux pezans, on fait qu'il ne ſent preſque plus le poids de ceux qui ſont plus legers.

Non ſeulement elle ouvre l'eſprit & le fortifie pour concevoir tout avec moins de peine; mais elle fait auſſi qu'il devient plus étendu & plus capable de comprendre pluſieurs choſes à la fois. Car les veritez Geometriques ont cela de propre qu'elles dépendent d'un long enchaînement de principes qu'il faut ſuivre pour arriver à la concluſion; & comme cette concluſion tire ſa lumiere de ces principes, il faut que l'eſprit voye en meſme temps, & ce qui éclaire & ce qui eſt éclairé, ce qu'il ne peut faire ſans s'étendre & ſans porter ſa veuë plus loin que dans ſes actions ordinaires.

Cette étenduë d'eſprit, qui paroiſt dans la Geometrie eſt non ſeulement tres-utile pour tous les ſujets qui ont beſoin de raiſonnement; mais elle eſt auſſi tres admirable en elle meſme; & il n'y a gueres de qualité de nôtre ame qui en faſſe mieux voir la grandeur, & qui détruiſe davantage les imaginations baſſes & groſſieres de ceux qui voudroient la faire paſſer pour une matiere. Car le moyen de s'imaginer qu'un corps, c'eſt à dire, un eſtre où nous ne concevons qu'une étenduë figurée & mobile, puiſſe penetrer ce grand nombre de principes tout ſpirituels qu'il faut lier enſemble pour la preuve des propoſitions que la Geometrie nous démontre, & qu'il porte meſme ſa veuë juſques dans l'infiny pour en aſſeurer ou en tirer pluſieurs choſes avec une certitude entiere? Elle nous fait voir par exemple, que la Diagonale & le coſté d'un Quarré n'ont nulle meſure commune, c'eſt à dire, que l'eſprit voit que dans l'infinité des parties de differente grandeur qu'on y peut choiſir, il n'y en a aucune qui puiſſe meſurer exactement l'une & l'autre de ces deux lignes.

On peut dire que toutes les propoſitions Geometriques ſont de meſme infinies en étenduë; parce que l'on n'y conclut pas ce qu'on démontre d'une ſeule ligne, d'un ſeul angle, d'un ſeul cercle, d'un ſeul triangle, mais de toutes les lignes, de tous les angles, de tous les cercles, de tous les triangles; & qu'ainſi l'eſprit les renferme & les comprend tous en quelque ſorte quelques infinis qu'ils ſoient. Or que tout cela ſe puiſſe faire par le bouleverſement d'une matiere, & qu'en la remuant elle devienne capable de comprendre des objets ſpirituels, & d'en comprendre meſme une infinité, c'eſt ce que perſonne ne ſçauroit croire ny penſer, pourvû qu'il veüille de bonne foy ſonger à ce qu'il dit.

Ce ſont ces reflexions qui ont fait juger à l'Auteur de ces Elemens, qu'on pouvoit faire un bon uſage de la Geometrie; mais ce n'eſt pas neanmoins ce qui l'a porté à travailler à en faire de nouveaux, puiſqu'on peut tirer tous ces avantages des livres ordinaires qui en traitent. Ils portent tous à aimer la verité; ils apprennent à la diſcerner; ils fortifient la raiſon; ils étendent la veuë de l'eſprit, & ils donnent lieu d'admirer la grandeur de l'ame de l'homme, & de reconnoiſtre qu'elle ne peut eſtre autre que ſpirituelle & immortelle. Ce qui luy a donc fait croire qu'il eſtoit utile de donner une nouvelle forme à cette ſcience eſt, qu'étant perſuadé que c'étoit une chose fort avantageuse de s'accoûtumer à reduire ses pensées à un ordre naturel, cet ordre étant comme une lumiere qui les éclaircit toutes les unes par les autres, il a toûjours eu quelque peine de ce que les Elemens d'Euclide étoient tellement confus & broüillez, que bien loin de pouvoir donner à l'esprit l'idée & le goust du veritable ordre, ils ne pouvoient au contraire que l'accoûtumer au desordre & à la confusion.

Ce défaut luy paroissoit considerable dans une science dont la principale utilité est de perfectionner la raison; mais il n'eust pas pensé neanmoins à y remedier sans la rencontre que je vas dire qui l'y engagea insensiblement. Un des plus grands esprits de ce siecle, & des plus celebres par l'ouverture admirable qu'il avoit pour les Mathematiques, avoit fait en quelques jours un essay d'Elemens de Geometrie; & comme il n'avoit pas cette veuë de l'ordre, il s'estoit contenté de changer plusieurs des démonstrations d'Euclide pour en substituer d'autres plus nettes & plus naturelles. Ce petit ouvrage étant tombé entre les mains de celuy qui a depuis composé ces Elemens, il s'étonna qu'un si grand esprit n'eust pas esté frappé de la confusion qu'il avoit laissée pour ce qui est de la methode, & cette pensée luy ouvrit en même temps une maniere naturelle de disposer toute la Geometrie, les démonstrations s'arrangerent d'elles mêmes dans son esprit, & tout le corps de l'ouvrage que nous donnons maintenant au public se forma dans son idée.

Cela luy fit dire en riant à quelques-uns de ses amis, que s'il avoit le loisir il luy seroit facile de faire des Elemens de Geometrie mieux ordonnez que ceux que l'on luy avoit montrez; mais ce n'étoit encore qu'un projet en l'air qu'il avoit peu d'esperance de pouvoir executer, quoique quelques personnes l'en priassent; parce qu'il auroit fait scrupule d'y employer un temps où il auroit esté en estat de faire quelqu'autre chose.

Il est arrivé neanmoins depuis que diverses rencontres luy ont donné le loisir dont il avoit besoin pour

DEFINITIONS DE QUELQUES MOTS dont on s'est servi dans ces Elemens sans les definir, parce qu'ils sont plûtost de Logique que de Geometrie.

AXIOME. On appelle ainsi une proposition si claire qu'elle n'a pas besoin de preuve : comme; *Que le tout est plus grand que sa partie.* Voir la Logique IV. Part. Chap. VI.

DEMANDE. On se sert de ce mot quand on a quelque chose à faire, qui est si facile qu'on a pas besoin de preuve pour demontrer qu'on a fait ce que l'on vouloit faire : comme; *Décrire un Cercle d'un intervale donné.*

DEFINITION. Ce qu'on appelle de ce nom en Geometrie est la determination d'un mot qui pourroit former diverses idées, à une idée si claire & si distincte qu'elle revienne toûjours dans l'esprit lorsqu'on se sert de ce mot : comme; *On appelle Parallelogramme une figure dont les costez opposez sont paralleles.* Voyez l'Art de penser I. Part. Chap. XI.

THEOREME. On nomme ainsi une proposition dont il faut démontrer la verité : comme; *que le quarré de la baze d'un angle droit est égal aux quarrez des deux costez.*

PROBLEME. C'est aussi une proposition qu'il faut démontrer; mais dans laquelle il s'agit de faire quelque chose, & prouver qu'on a fait ce qu'on avoit proposé de faire : comme; *Faire passer par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.*

LEMME. C'est une proposition qui n'est au lieu où elle est que pour servir de preuve à d'autres qui suivent. On en peut voir des exemples au commencement des Livres VI. X. & XI.

COROLLAIRE

Corollaire. C'eſt une propoſition qui n'eſt qu'une ſuite d'une autre precedente, on en peut voir un grand nombre dans le Livre IX.

Mais il faut remarquer, que pour mieux faire voir la dependance qu'avoient pluſieurs propoſitions d'une ſeule qui en étoit comme le principe & le fondement, on a quelquefois mis en Corollaire ce qu'on auroit pû mettre en Theoreme, ſi on avoit voulu.

Et pour la même raiſon, il y a de certains Theoremes à qui on a donné le nom de *Propoſition fondamentale*; parce que toutes les propoſitions d'une certaine matiere en dépendent. On en peut voir des exemples dans les Livres VI. VIII. X. XI.

Explication de quelques Notes.

Quoique ces Notes ſoient expliquées chacune en ſon lieu; neanmoins on a cru les devoir encore mettre icy, afin de les faire mieux entendre

$+$ *Plus*; ainſi $9 + 3$, c'eſt à dire; neuf plus trois.

$-$ *Moins*: ainſi $14 - 2$, c'eſt à dire; quatorze moins deux.

$=$ *Marque de l'égalité*; ainſi $9 + 3 = 14 - 2$. c'eſt à dire; neuf plus trois eſt égal à quatorze moins deux.

$::$ Ces quatre points entre deux termes devant, & deux termes aprés marquent que ces quatre termes ſont proportionels ou arithmetiquement, on geometriquement.

Ainſi, Arithmetiquement $7.3 :: 13.9$.

Et Geometriquement $6.\ 2 :: 12.\ 4$.

$\div$ Ces mêmes quatre points avec une ligne qui les coupe marquent la proportion continüe; ainſi $\div 3.\ 9.\ 27$. c'eſt à dire, 3 eſt à 9; comme 9 eſt à 27.

Deux lettres enſemble comme *bd*, marquent quelquefois une grandeur de deux dimenſions, comme un plan dont la longueur ſoit *b* & la largeur *d*. Mais d'autres fois ce n'eſt qu'une ligne dont ces deux lettres marquent les deux extremitez ; ce qu'il eſt aiſé de diſcerner par le ſujet que l'on traite.

Les livres ſont diviſez en nombres par des chiffres qui ſont en marge : & c'eſt ſeulement à cela qu'on a égard dans les citations & les renvois à quelques points des livres precedens ; le premier chiffre, qui eſt romain marquant le livre ; & le ſecond qui eſt Arabe, marquant le nombre de ce livre. Ainſi V. 29. veut dire *le vingt-neuviéme nombre du livre cinquiéme*.

Que ſi l'endroit où l'on renvoie eſt du même livre, on cite quelquefois un tel Theorême, ou un tel Lemme, ou bien le nombre precedent avec cette marque S. qui veut dire *ſupra* ; comme S. 15. c'eſt à dire, *cy-deſſus, nombre* 15.

TABLE

De ce qui eſt traité dans chaque Livre.

On pourroit dire beaucoup de choſes ſur l'ordre qu'on a ſuivy dans ces Elemens, & pour faire voir qu'il eſt beaucoup plus naturel qu'aucun autre ait jamais obſervé dans ces matieres. Mais on aime mieux en laiſſer le jugement à ceux qui les liront ; & l'on ſe contente d'en repreſenter le plan en faiſant voir de ſuite ce qui eſt traité dans chaque Livre.

EXTRAIT DU PRIVILEGE DU ROY.

Registré dans le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, le 26. jour de Iuillet 1683.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois en vertu du present Privilege, le 1. Septembre 1683.

FAUTES A CORRIGER.

PAge 40. lign. 16. au lieu de C. G. lisez G. C

Page 41. lign. 18. au lieu de $\frac{B-C}{F}$ lisez $\frac{B-C}{B}$

Lign. 19 au lieu de $\frac{F-G}{G}$ lisez $\frac{F\ G}{F}$

au lieu de $\frac{F}{F}$ moins $\frac{G}{G}$ lisez $\frac{F}{B}$ moins $\frac{G}{F}$

Page 48. lign 20. au lieu de entre celles, lisez entre elles.

Page 50 lign. 20 au lieu de galement continuees lisez également contenües.

Page 63 lign. 25 au lieu de $\frac{B}{a}\frac{m}{n}$: : b n. c m. lisez $\frac{B}{c}\frac{m}{a}$: : bn. c m.

Page 64 lign. 5. au lieu de $\frac{BG+CF}{CG}$ lisez $\frac{BG-CF}{CG}$

Page 67 lign. 8 au lieu de trison, lisez raison.

lign. 12 au lieu de l'antecedent de la raison, lisez l'antecedent de la seconde.

lign. 27 au lieu de $\frac{B}{c}\frac{c}{d}\frac{d}{f}\frac{f}{g}\frac{g}{h}\frac{B}{h}$

Page 71 lign. 17 au lieu de raison doublée leurs racines, lisez raison doublée de leurs racines.

Page 81 lign. 32 au lieu de multipliez, lisez multiples.

Page 84 lign. 15 au lieu de multiplié, lisez multiple.

Page 201 lign. 32 au lieu de k. c x. lisez k. x c

Page 203 lign. 5 au lieu de *m n p.* lisez *m p n*

Page 279 lign. 35 au lieu de angles, lisez arcs

Page 354 lign. 35 au lieu de $bb = cc - dd - dy$ lisez $bb = cc - dd - 2dy$

Page 355 lign. 15 au lieu de plus le rectangle, lisez plus deux rectangles.

Page 357 lign. 33 au lieu de du decagone, lisez du pentagone.

lign. 34 au lieu de le quarré ou pentagone, lisez le quarré du costé du pentagone.

Page 373 lign. 18 au lieu de *bc mn* :: *cn + fp.* lisez *bc mn* :: *c + f. p + n*

lign. 20 au lieu de *bc mn* :: *c + b. n + m.*

NOUVEAUX

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

DES GRANDEURS EN GENERAL, ET DES QUATRE OPERATIONS, Ajoûter, Souſtraire, Multiplier, Diviſer, entant qu'elles ſe peuvent appliquer à toutes ſortes de grandeurs.

SUPPOSITIONS GENERALES.

TOUTES les Sciences ſuppoſent des connoiſſances naturelles, & elles ne conſiſtent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous ſçavons naturellement. 1.

AINSI *quoy qu'il ſemble que ce ſoit contre le vray ordre des ſciences de ſuppoſer dans les ſuperieures, ce qui ne ſe doit traitter que dans les inferieures, comme qui ſuppoſeroit dans la Geometrie, ce qui ne s'apprendroit que dans l'Aſtronomie; neanmoins ce n'eſt point contre cet ordre que de ſuppoſer dans une ſcience ſuperieure* *ce qui regarde l'objet de l'inferieure, lors que nous ne ſuppoſons que ce qui ſe peut ſçavoir par la ſeule lumiere naturelle ſans l'aide d'aucune ſcience.*

C'EST POURQUOY *ayant entrepris de traiter icy de la quantité ou grandeur en general, entant que ce mot comprend l'étenduë, le nombre, le temps, les degrez de viteſſe, & generallement tout ce qui ſe peut augmenter en ajoûtant ou multipliant; & diminuer en ſouſtrayant ou diviſant, &c. je ne feray point de difficulté de ſuppoſer qu'on ſçait de certaines choſes qui ſemblent appartenir à la ſcience des nombres qu'on appelle Arithmetique, ou à la ſcience de l'étenduë qu'on appelle Geometrie; parce que je ne ſuppoſeray rien qu'on ne puiſſe ſçavoir ſans l'aide de l'Arithmetique ou de la Geometrie pour peu d'attention qu'on y faſſe, ou qu'on y ait déja fait.*

PREMIERE SUPPOSITION.

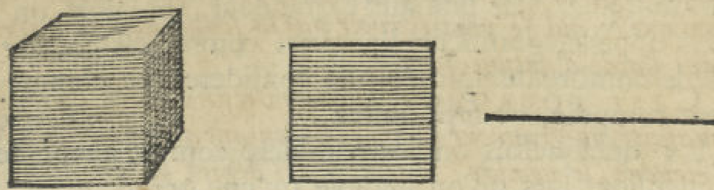
II. JE ſuppoſe donc premierement qu'on ſçache ajoûter & multiplier de petits nombres, comme que 4 & 5 font 9, que 3 fois 5 ſont 15, &c.

SECONDE SUPPOSITION.

III. SECONDEMENT qu'on ſçache que c'eſt la meſme choſe dans la multiplication de commencer par lequel on veut des deux nombres que l'on multiplie : comme que 3 fois 5, eſt la meſme choſe que 5 fois 3, que 4 fois 6, eſt la meſme choſe que 6 fois 4.

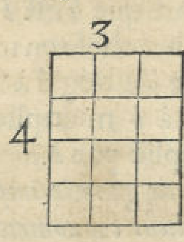
TROISIE'ME SUPPOSITION.

IV. JE ſuppoſe en troiſiéme lieu, que l'on ſçache que ce qu'on appelle corps, eſpace, étenduë, (car tout cela ſignifie la meſme choſe) à trois dimenſions, longueur, largeur, & profondeur. Et que quand on les conſidere toutes trois; c'eſt alors que cette ſorte de grandeur s'appelle proprement corps ou Solide. Que quand on n'en conſidere que deux, ſçavoir la longueur & la largeur, on l'appelle alors Surface. Et que quand on n'en conſidere qu'une, ſçavoir la longueur, on l'apppelle alors Ligne.



Quatrieme Supposition.

Je ſuppoſe en quatriéme lieu, que la multiplication & V.
la diviſion ſe peuvent appliquer à toutes grandeurs, & non ſeulement aux nombres. Car par exemple dans l'etenduë on appelle multiplier la longueur par la largeur, lors qu'ayant un morceau de terre de 4 perches de longueur & 3 de largeur, on dit que ce morceau de terre a 12 perches de ſurface. Et au contraire, on appelle diviſer, lors que ſçachant par exemple quel eſt le contenu d'un morceau de terre, comme qu'il eſt de 12. perches, & ſçachant auſſi quelle en eſt la longueur, comme de 4 perches, on en cherche la largeur qui ſe trouvera eſtre de 3 perches. On pourroit encore donner une autre notion de la multiplication & de la diviſion par rapport à l'unité. Mais celle-là ſuffit pour ce que nous avons à faire, & l'autre ne ſe pourroit bien expliquer qu'en ſuppoſant des choſes dont nous ne parlerons que dans la ſuite.



Cinquieme Supposition.

Je ſuppoſe en cinquiéme lieu, que l'on ſe puiſſe met- VI.
tre dans l'eſprit que ce qu'on appelle les trois dimenſions dans les corps s'applique par accommodation à toutes les autres grandeurs, & meſme aux nombres.

Car on les conſidere quelquefois comme n'ayant qu'une dimenſion lors qu'on ne ſuppoſe point qu'on les ait multipliez par une autre grandeur. Et alors on les peut appeller grandeurs lineaires : comme eſt par exemple le nombre de 7, qu'on ne conſidere que comme eſtant composé de ſept unitez.

Et quelquefois on les conſidere comme ayant deux dimenſions lors qu'on ſuppoſe qu'une grandeur eſt née de la multiplication de deux lineaires ; & alors on les peut appeller grandeurs planes. Comme eſt par exemple le nombre de 12, lors qu'on le conſidere comme eſtant né de la multiplication de 3 par 4.

Et enfin on les conſidere comme ayant trois dimenſions lors qu'on ſuppoſe qu'une grandeur eſt née de la multiplication de trois grandeurs lineaires, ou d'une plane qui en a desja deux, par une lineaire. Et alors on peut appeller ces grandeurs ſolides. Comme eſt par exemple le nombre de 24, quand on le conſidere comme né de la multiplication de ces trois nombres 2. 3. 4, parce que 2 fois 3 font 6, & 4 fois 6 font 24.

Sixieme Supposition.

VII. Je ſuppoſe enfin qu'on s'accoûtume à concevoir generalement les choſes en les marquant par des lettres ſans ſe mettre en peine de ce qu'elles ſignifient, puis qu'on ne s'en ſert que pour conclure que *b* eſt *b*, que *c* eſt *c*, ou ce qui eſt pris pour la meſme choſe en matiere de grandeur, ſur tout en general, que *b* eſt égal à *b*, & *c* à *c*, ou que *b* multiplié par *c* eſt égal à *b* multiplié par *c*, ou ſelon la 2e Suppoſition à *c* multiplié par *b*.

Cette *remarque eſt de grande importance. Car on ne feroit que ſe broüiller ſi dans ces commencemens qui doivent eſtre tres-ſimples on vouloit appliquer ce qu'on traite generalement à des exemples particuliers dont la connoiſſance dépendroit d'autres principes. Et de plus, l'une des plus grandes utilitez de ce traité, eſt d'accoûtumer l'eſprit à concevoir les choſes d'une maniere ſpirituelle ſans l'aide d'aucunes images ſenſibles, ce qui ſert beaucoup à nous rendre capables de la connoiſſance de Dieu & de noſtre ame.*

PRINCIPES GENERAUX.

DU TOUT ET DES PARTIES.

TOUTE grandeur eſt conſiderée comme diviſible en ſes parties. VIII.

La grandeur eſt appellée *tout* au regard de ſes parties. IX.

Lors qu'une partie de la grandeur eſt contenuë preciſément tant de fois dans ſon tout, comme 2 fois, 3 fois, 4 fois, &c. elle s'appelle *partie aliquote*, ou ſimplement *aliquote*. X.

On dit auſſi qu'elle en eſt *la meſure*; parce qu'elle la meſure juſtement eſtant priſe autant de fois qu'il faut. XI.

Ainſi 3 eſt partie aliquote de 9, parce qu'il y eſt trois fois; 5, partie aliquote de 20, parce qu'il y eſt 4 fois.

Quand les parties aliquotes d'une grandeur ſont autant de fois dans leur tout que les parties aliquotes d'une autre grandeur dans le leur, elles ſont appellées *aliquotes pareilles*. Ainſi 3 & 4, ſont les aliquotes pareilles de 9 & de 12, parce que 3 eſt autant de fois dans 9, que 4 dans 12, l'un & l'autre y eſtant 3 fois. XII.

Le tout eſt meſure à ſoy-même, parce que toute grandeur eſt contenuë une fois dans ſoy-même. XIII.

On appelle *portion* toute partie aliquote ou non aliquote. Ainſi 4 eſt une portion de 13; 5 de 7. XIV.

AXIOMES.

DE L'EGALITE' ET INEGALITE'.

Le tout eſt plus grand que ſa partie. XV.

Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble. XVI.

Les grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entr'elles. XVII.

Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous ſont égaux. XVIII.

Si de grandeurs égales on en oſte d'égales, les reſtes ſeront égaux. XIX.

Si de grandeurs inégales on en oſte d'égales, les reſtes ſeront inégaux. XX.

XXI. Si à grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, les tous ſeront inégaux.

XXII. Les aliquotes pareilles de grandeurs égales ſont égales. Par exemple, ſi *b* eſt égal à *c*, le tiers de *b* ſera égal au tiers de *c*, cela eſt manifeſte.

XXIII. Et par la meſme raiſon deux grandeurs ſont égales quand leurs aliquotes pareilles ſont égales. Si le tiers de *b* eſt égal au tiers de *c*, *b* eſt égal à *c*, car *b* eſt égal à ſes trois tiers, & *c* aux trois ſiens. Or ſi un tiers eſt égal à un tiers, les trois tiers ſont égaux aux trois tiers : puis que ce n'eſt qu'ajoûter choſes àgales à choſes égales. Donc, &c.

XXIV. On peut marquer ainſi qu'une grandeur eſt égale à une autre, comme que *b* eſt égal à *c*, $b = c$.

DES QUATRE OPERATIONS.

AJOUTER, &c.

ADDITION.

XXV. Ajoûter, ou *Addition*, c'eſt mettre deux ou pluſieurs grandeurs enſemble, & en faire comme un tout qui s'appelle *ſomme*.

Cela s'exprime ainſi *b*, plus *c*, & ſe marque ainſi $b+c$.

SOUSTRACTION.

XXVI. Souſtraire, ou *Souſtraction*, c'eſt retrancher une moindre grandeur d'une plus grande. Et ce qui reſulte de là s'appelle *reſte* ou *difference*. Car ce qui reſte de la plus grande eſt ce en quoy la plus grande ſurpaſſoit la plus petite. Si de 5 je retranche 3, reſte 2, & 2 eſt la difference de 5 à 3.

La Souſtraction s'exprime ainſi, *b* moins *c*, & ſe marque ainſi $b-c$.

MULTIPLICATION.

XXVII. Multiplier ou *Multiplication*, c'eſt quand ayant deux grandeurs comme *b* & *c*, je fais que ce que l'unité eſt à l'une des deux, l'autre l'eſt à ce qui reſulte de la Multiplication, qu'on appelle *produit*.

Une toiſe eſt à 3 toiſes, ce que 4 toiſes ſont à 12; Et ainſi 12 toiſes eſt le *produit* de 3 toiſes multipliées par 4.

XXVIII. Cela s'exprime ainſi quand on ne ſe ſert que de lettres *b* en *c*, ou *b* par *c*; Il y en a qui le marquent ainſi $b \times c$; mais il eſt plus court de les mettre ſeulement enſemble *b c*, & nous ne nous ſervirons que de ce dernier.

Il faut remarquer qu'une grandeur marquée par un ſeul caractere comme *b*, ou *c*, s'appelle grandeur lineaire, ſelon la 5ᵉ Suppoſition. Que quand on les joint enſemble en mettant *b c*, cela ne veut pas dire que l'une ſoit ajoûtée à l'autre (ce qu'il faudroit marquer par $b + c$, *b* plus *c*,) mais que l'une eſt multipliée par l'autre, d'où naiſt ce qu'on appelle *produit*.

Que s'il ny a eu que deux grandeurs lineaires qui ayent XX X.
eſté multipliées l'une par l'autre, *ce produit* s'appelle *grandeur plane* ou *plan*.

Et les deux grandeurs lineaires d'où ce plan a eſté XXX.
produit, s'appellent *ſes deux dimenſions*, ou ſes deux coſtez.

Et ſi c'eſt la meſme grandeur lineaire qui a eſté mul- XXXI.
tipliée par ſoy-meſme, comme ſi *b* en *b* a fait *b b*, ce plan s'appelle *quarré*. Et cette grandeur lineaire *ſa racine*. On marque quelquefois le quarré ainſi $b^{q\cdot}$ c'eſt à dire *b* quarré, ou $b^{2\cdot}$ c'eſt à dire *b* de deux dimenſions.

Que ſi trois grandeurs lineaires ſont multipliées l'une XXXII.
par l'autre, comme *b* en *c*, & *b c* en *d*. ce qui fait *b c d*, ou ce qui eſt la meſme choſe ſi une grandeur plane, comme *b c* eſt multipliée par une lineaire, comme par *d*, ce qui fait auſſi *b c d*, ce produit s'appelle *ſolide*, ou une grandeur à 3 dimenſions.

Et ſi c'eſt une meſme grandeur qui eſt multipliée 2 fois XXXIII.
par elle-meſme, comme *b* en *b*, & *bb* en *b*, ou ce qui eſt la meſme choſe ſi un quarré comme *b b* eſt encore une fois multiplié par *b* ſa racine, ce qui fait *b b b*, ce ſolide s'appelle *cube*, & *b* la racine de ce cube.

On marque quelquefois le cube ainſi $b^{c\cdot}$ c'eſt à dire *b* cube, ou $b^{3\cdot}$ c'eſt à dire *b* de trois dimenſions.

DIVISION.

Diviſer ou *diviſion*, c'eſt lors qu'ayant une grandeur XXXIV.
qui s'appelle *diviſeur*, parce qu'elle en doit diviſer une

autre, qui s'appelle dividende, on fait que comme le *diviſeur* eſt au *dividende*, l'unité ſoit à ce qui naiſt de la diviſion qu'on appelle *quotient*.

Afin que 3 diviſe 12, il faut que je trouve un nombre à qui l'unité ſoit comme 3 eſt à 12, & ce nombre eſt 4. car 3 eſt quatre fois dans 12, comme l'unité eſt quatre fois dans 4.

La diviſion s'exprime ainſi bc diviſé par p; & ſe marque ainſi $\frac{bc}{p}$ & cela s'appelle *quotient*, comme j'ay desja dit; & la grandeur de deſſus eſt le *dividende* ou *grandeur à diviſer*, & celle de deſſous le diviſeur.

C'eſt preſque toûjours une grandeur de pluſieurs dimenſions qu'on diviſe par une grandeur de moins de dimenſions. Car la diviſion eſt oppoſée à la multiplication, comme la ſouſtraction à l'addition, d'où vient que la multiplication du diviſeur & du quotient fait une grandeur égale à la grandeur à diviſer; parce que la multiplication refait ce que la diviſion avoit défait. Et d'où vient auſſi par la meſme raiſon que ſi on veut multiplier une grandeur diviſée par le diviſeur même, on n'a qu'à oſter le diviſeur, & la grandeur à diviſer demeurant ſeule, ſera le produit. Ainſi le produit de $\frac{bc}{g}$ en g eſt bc.

XXXV. La diviſion eſt de peu d'uſage dans le traité de la grandeur en general, parce qu'on ne ſçauroit d'ordinaire déterminer un quotient qu'en deſcendant à quelque eſpece de grandeur, comme l'étenduë ou le nombre.

Il n'y a qu'une rencontre où on le peut, qui eſt lors que le meſme caractere ſe trouve dans la grandeur à diviſer & dans le diviſeur. Car alors oſtant ce caractere de l'un & de l'autre, ce qui reſtera ſera le quotient.

Ainſi ayant $\frac{bc}{b}$ le quotient ſera c.
Ayant $\frac{bcd}{bc}$ le quotient ſera d.
Ayant $\frac{bcd}{b}$ le quotient ſera cd.

DES GRANDEURS
Incomplexes et Complexes.

XXXVI. Outre ce que nous avons remarqué que l'on pouvoit conſiderer les grandeurs comme n'ayant qu'une dimenſion,

ſion ; ou en ayant pluſieurs : on peut encore conſiderer toutes ces ſortes de grandeurs lineaires, planes, ou ſoſolides comme incomplexes, ou comme complexes.

JE les appelle *incomplexes* quand on conſidere une grandeur d'une ou de pluſieurs dimenſions à part, comme p, ou $c\,d$, ou $m\,n\,o$, ſans y rien ajoûter ou en rien oſter. XXXVII.

ET je les appelle *complexes* quand on y en joint d'autres de meſme genre par un *plus* ou un *moins*, ou qu'on marque par un chiffre que la même grandeur ſe doit prendre pluſieurs fois, comme $b + c$, ou $b + c + d$, ou $b + f - g$, ou $b\,c + f\,g$, ou $b\,c + f\,g - m\,n$. XXXVIII

Ou par des chiffres $3\,b$.

Or comme il y a quelque difficulté un peu plus grande pour faire les operations dont nous venons de parler ſur les grandeurs complexes, nous en donnerons les principes & les regles.

PRINCIPES

POUR FAIRE LES QUATRE OPERATIONS SUR LES GRANDEURS COMPLEXES.

1. CHAQUE grandeur incomplexe dont la complexe eſt compoſée ſe peut appeller *terme*. XXXIX.

2. LE plus & le moins ſont appellez *ſignes*. XL.

LE plus $+$ *ſigne affirmatif*, le moins, $-$ *ſigne negatif*.

3. PAR tout où n'eſt point le ſigne negatif, l'affirmatif eſt ſous-entendu. Ainſi $b + c$, vaut $+ b + c$. Mais il ſeroit inutile de marquer le plus au commencement. XLI.

4. LE plus & le moins d'une même grandeur ou terme ſont égaux à rien, ou valent zero. Car l'un oſtant ce que l'autre a mis, ils ne demeure rien. Ainſi $b - b$, ce n'eſt rien, $b + c, - c$. ne vaut que b. Cela eſt auſſi important que facile. XLII.

5. LORS que le même terme eſt pluſieurs fois repeté dans une grandeur complexe, ſi c'eſt toûjours avec le meſme ſigne, ſoit affirmatif, ſoit negatif, on peut ne le mettre qu'une fois avec ſon meſme ſigne, en marquant par un chiffre combien il doit eſtre pris de fois. Ainſi pour $b + c + c + c$, on peut mettre b plus $3\,c$, ou $b + 3\,c$: au XLIII.

lieu de $b-g-g-g$, on peut mettre b moins 3 g, ou $b-3g$.

XLIV. 6. Mais si la même grandeur ou terme est avec des signes divers, on peut alors selon le principe 4, oster ce terme de la grandeur complexe autant de fois qu'il est avec un plus & avec un moins. Ainsi $b+c+c-c-c$, ne vaut que b, parce que c est autant de fois osté que mis, & ainsi il ne reste rien. Que s'il y avoit un *plus* davantage, comme $b+c+c-c$, alors il le faudroit laisser une fois avec *plus* $b+c$, & de même s'il y avoit un moins davantage.

ADDITION
des Grandeurs Complexes

XLV. Pour ajoûter une grandeur complexe, comme $b+c$, à une autre grandeur ou complexe comme $m+c$, ou incomplexe comme m, il ne faut qu'y joindre la grandeur qu'on veut ajoûter & en conserver tous les signes, en observant toûjours que le signe affirmatif est sous entendu où il n'y en a point.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A} & b+c. \\ \text{ajoûter} & m+n. \end{array}\right\} \text{Somme } b+c+m+n.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A} & b+c. \\ \text{ajoûter} & m-n. \end{array}\right\} \text{Somme } b+c+m-n.$$

XLVI. Que s'il y a des chiffres, il les faut laisser comme on les trouve.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A} & 2b+3c. \\ \text{ajoûter} & 3m+4n. \end{array}\right\} \text{Somme } 2b+3c+3m+4n.$$

XLVII. La somme estant trouvée, si le même terme s'y trouve plusieurs fois, on peut pratiquer ce qui a esté dit dans le principe 5 & 6. Ce qui soit dit une seule fois pour toutes les autres operations.

SOUSTRACTION
Des Grandeurs Complexes.

XLVIII. Pour soustraire une grandeur complexe d'une autre grandeur ou complexe ou incomplexe, il ne faut que l'y joindre en changeant tous les signes de la grandeur qu'on soustrait, & observant toûjours que le signe affirmatif est sous-entendu où il n'y en a point.

De $b+c.$ } reste $b+c-m-n.$
oster $m+n.$

De $b+c.$ } reste $b+c-m+n-o.$
oster $m-n+o.$

Il n'est pas difficile de juger pourquoy on change le *plus* sous-entendu en *moins* dans le premier terme de la grandeur à soustraire : car c'est en cela même que consiste la soustraction. Mais d'abord on est surpris de ce qu'il faut changer les signes de *moins* en *plus* ; car au lieu que la Soustraction doit faire la grandeur moindre qu'elle n'étoit, on la rend plus grande par là.

Cela est facile à comprendre quand ce que l'on doit soustraire, a d'abord un *plus* & puis un *moins*. Comme si de b je veux oster $p-n$; car $p-n$ estant moins que p. En ostant p j'oste trop, & ainsi ayant osté p, parce qu'on a trop osté, il faut ajoûter n, qui est ce qu'on a osté de trop.

Mais quand il n'y auroit dans ce qu'on veut ôter qu'une grandeur avec le signe de *moins* : il faut toûjours la mettre par le signe de *plus*, comme si de b, j'en voulois oster $-n$, je devrois mettre $b+n$.

Car ce qui trompe en cela, c'est qu'ajoûter *moins*, c'est oster, & retrancher *moins*, c'est ajoûter. Ajoûter au bien d'un homme une dette passive de mille francs, qu'il croit avoir payée, ce n'est pas augmenter son bien, c'est le diminuer de mille livres, & en retrancher une dette passive de la mesme somme en la payant pour luy, ce n'est pas diminuer son bien, c'est l'augmenter de mille francs. Il ne faut donc pas s'étonner si dans l'Addition à b, ajoûtant $-n$, je ne change point le *moins* en *plus*, mais le laissant comme il estoit, cela fait $b-n$: de sorte que la somme est moindre, que n'estoit-ce à quoy je l'ay ajoûté, parce que je n'ay ajoûté qu'en apparence, mais j'ay retranché en effet.

Et au contraire dans la Soustraction, si de b je retranche $-n$, il faut que changeant le signe de *moins* en *plus*, je mette $b + n$, ce qui fait un reste plus grand, que ce dont j'ay retranché, parce que retrrancher un *moins*, c'est ne retrancher qu'en apparence & ajoûter en effet. On en peut apporter une preuve bien sensible dans les nombres. Je veux de 7 retrancher moins 2, au lieu de 7 je prends $9 - 2$, qui luy est égal. Il faut donc qu'il reste la mesme chose, si de l'un ou l'autre je retranche $4 - 2$. Or si de $9 - 2$, je retranche $- 2$, je le pourray faire, ou effaçant $- 2$ de $9 - 2$, ou en mettant $+ 2$ apres $9 - 2$; c'est à dire en mettant $9 - 2 + 2$. Or de l'une ou de l'autre maniere il restera 9; car 2 estant par *plus* & par *moins* se reduit à zero. Il faut donc qu'il reste la mesme chose lors que de 7 on oste $- 2$. Et cela ne peut estre qu'en changeant le *moins* en *plus*, & mettant $7 + 2$. Ce qui fait 9.

MULTIPLICATION DES GRANDEURS COMPLEXES.

I. POUR multiplier une grandeur complexe par une autre complexe ou incomplexe, il faut faire autant de multiplications particulieres que chaque terme de la grandeur complexe peut estre comparé avec chaque terme de l'autre grandeur.

DE sorte que multipliant le nombre des termes d'une grandeur à multiplier, avec le nombre des termes de l'autre, on a le nombre des multiplications partiales qu'il faut faire pour avoir la multiplication totale, ou le produit total.

II. AINSI lors qu'une des deux grandeurs n'a qu'un terme & que l'autre en a deux, parce qu'une fois deux ne sont que deux, il ne faudra faire que deux multiplications partiales de chacun des deux termes d'une grandeur par le le terme unique de l'autre.

$$\left.\begin{matrix} b. \\ \text{En } c + d. \end{matrix}\right\} \text{produit } cb + db.$$

III. LORS que les deux grandeurs ont chacune deux termes, parce que deux fois deux sont 4, il faudra faire 4 multiplications partiales pour avoir le produit total.

$$\text{En}\ \begin{matrix} b+c. \\ p+q. \end{matrix}\Big\}\ \text{produit}\ pb+pc+qb+qc.$$

Lors que chacune a trois termes, parce que trois fois trois sont neuf, il faudra faire neuf multiplications qu'on pourra disposer trois à trois en cette sorte ; LIII.

$$\text{En}\ \begin{matrix} b+c+d. \\ p+q+r. \end{matrix}\left\}\begin{matrix} pb+pc+pd. \\ +qb+qc+qd. \\ +rb+rc+rd. \end{matrix}\right.$$

& ainsi à l'infini.

La même chose se fait quand on multiplie des grandeurs planes par des grandeurs lineaires, d'où naissent des grandeurs solides. LIV.

$$\text{En}\ \begin{matrix} bd+pq. \\ s+t. \end{matrix}\Big\}\ \text{produit}\ sbd+spq+tbd+tpq.$$

Voila ce qu'il faut observer generalement dans toute multiplication des grandeurs complexes. Mais il y a une difficulté particuliere pour sçavoir quand il faut mettre les signes de *plus* ou de *moins* avant les produits des multiplications partiales. C'est ce qu'on apprendra par ces trois Regles. LV.

Premiere Regle.

Plus en *plus* fait *plus* ; c'est à dire que la multiplication de deux termes qui ont chacun un *plus* exprimé ou sous-entendu, donne un produit qui doit avoir le signe de *plus*. Cela est sans difficulté, & les exemples qu'on a proposez le font assez voir. LVI.

Seconde Regle.

Plus en *moins*, ou *moins* en *plus* donne *moins*. C'est à dire que la multiplication de deux termes dont l'un a *plus* & l'autre *moins*, donne un produit qui doit avoir le signe de *moins*. LVII.

$$\text{En}\ \begin{matrix} b \\ p-q \end{matrix}\Big\}\ pb-qb$$ parce que q a *moins* & b *plus* sous-entendu.

Troisiéme Regle.

Moins en *moins* donne *plus* ; C'est à dire que la multiplication de deux termes qui ont tous deux *moins* donne un produit qui doit avoir le signe de *plus*. LVIII.

$$\left.\begin{matrix} b-d \\ p-q \end{matrix}\right\} bp-pd-bq+dq.$$

Raison de ces trois Regles.

Ce que nous avons dit pour montrer que dans l'addition on laissoit le *moins* comme on le trouvoit, au lieu que dans la soustraction on changeoit le *moins* en *plus*, donnera un grand jour pour l'intelligence de ces trois regles, & sur tout de la derniere qui paroist d'abord fort étrange.

Supposons que les deux grandeurs que l'on veut multiplier soient 5. & 3.

On en prend une, laquelle on veut qu'on appelle le multipliant, & l'autre est le multiplié. Supposons que 5 soit le multipliant, & 3. le multiplié.

Chacune peut avoir l'un des deux signes, le *plus* & le *moins* (+ ou —) ce qui fait 4. cas.

Le 1. cas est quand le multipliant a *plus*, & le multiplié a aussi *plus*; c'est à dire quand par + 5 je multiplie + 3.

Le 2. cas, est quand le multipliant a *plus*, & que le multiplié a *moins*; c'est à dire quand par + 5 je multiplie — 3.

Le 3. cas, est quand le multipliant a *moins*, & que le multiplié a *plus*; c'est à dire quand par — 5 je multiplie + 3.

Le 4. cas, est quand le multipliant à *moins*, & que le multiplié à *moins* aussi; c'est à dire quand par — 5 je multiplie — 3.

Il est question de sçavoir quel signe doit avoir le produit qui sera toûjours 15; c'est à dire quand ce sera + 15 ou — 15.

Or voicy ce me semble des remarques qui feront voir que dans le 1. cas qui appartient à la 1. regle, & dans le 4 qui appartient à la 3. regle, le produit aura *plus*; c'est à dire que ce sera + 15 : Et que dans le 2. cas, & dans le 3. qui appartiennent tous deux à la 2. regle, le produit sera par *moins*, c'est à dire que ce sera — 15.

La 1. remarque est, que quand le multipliant a *plus*, comme dans les deux premiers cas, c'est multiplier par *plus*, & qu'alors la multiplicaion ſe fait par voie d'addition, c'eſt à dire en ajoûtant le multiplié, (quel qu'il ſoit, affirmatif ou negatif) autant de fois qu'il y a d'unitez dans le multipliant.

Et que quand le multipliant à *moins*, comme dans les deux derniers cas, c'eſt multiplier par *moins*, & qu'alors la multiplication ſe fait par voye de ſouſtraction; c'eſt à dire en oſtant le multiplié, quel qu'il ſoit autant de fois, qu'il y a d'unitez, quoy que negativement dans le multipliant.

La 2. remarque eſt, que c'eſt le multiplié qui determine en quelque ſorte le ſigne du produit: c'eſt à dire que le ſigne que doit avoir le multiplié dans la multiplication, ſoit en conſervant celuy qu'il avoit auparavant, ſoit en le changeant en ſon oppoſé, ſera celuy du produit.

La 3. qui eſt la ſuitte & l'application de ces deux-là, Que quand la multiplication ſe fait par voye d'addition, comme dans les deux premiers cas où le multipliant a *plus*, il faut obſerver pour le multiplié; ce qui s'obſerve dans l'addition, qui eſt de luy conſerver ſon ſigne. Et ainſi dans les deux 1. cas, le produit doit avoir le meſme ſigne qu'avoit le multiplié avec la multiplication. D'où il s'enſuit que dans le premier cas ou le multiplié a *plus*, le produit a *plus* auſſi. C'eſt pourquoy ſi par $+5$ je multiplie $+3$ le produit ſera $+15$. Et que dans le 2. cas où le multiplié à *moins* le produit doit auſſi avoir *moins*. Et c'eſt pourquoy, ſi par $+5$ je multiplie -3 le produit ſera -15. Ce qui revient à ce qui a eſté dit que, ſi à 5 j'ajoûte -3 la ſomme ſera $5-3$; ce qui ne fait que deux.

Mais quand la multiplication ſe fait par voye de ſouſtraction, comme dans les deux derniers cas, où le multipliant a *moins*, il faut obſerver pour le multiplié ce qui s'obſerve dans la ſouſtraction pour la grandeur poſitive ou negative qu'on veut retrancher, qui eſt de changer ſon ſigne dans le ſigne oppoſé. Et ainſi dans ces deux derniers cas le produit doit avoir le signe opposé à celuy qu'avoit le multiplié avant la multiplication. D'où il s'ensuit que le 3. cas où le multiplié a *plus*, le produit doit avoir *moins*; c'est à dire que si par—5 je multiplie + 3 le produit sera—15. Et que de mesme dans le 4. cas où le multiplié a *moins*, le produit doit avoir *plus*; c'est à dire que si par—5 je multiplie—3 le produit sera + 15; Car la multiplication se faisant par voye de soustraction, multiplier—3 par—5, c'est oster 5 fois —3. Or oster une fois—3, c'est mettre + 3, comme il a esté dit sur le sujet de la soustraction, donc l'oster 5 fois, c'est mettre + 15, ce qu'il falloit prouver.

LIX. *Cette maniere de concevoir la multiplication de moins en moins en la considerant comme faite par voie de soustraction, m'a donné moyen de resoudre la plus grande difficulté qu'on puisse comme je croy faire sur cela, & m'avoit fait croire que ce n'estoit que par accident, que moins par moins donnoit plus. C'est que je ne pouvois ajuster à cette sorte de multiplication, la notion la plus naturelle de la multiplication en general, qui est que l'unité (où determinée dans les nombres, ou arbitraire comme dans l'étenduë) doit estre au multipliant, comme le multiplié est au produit. Car cela est visiblement faux dans la multiplication de moins en moins, puisqu'il ne peut estre vray que l'unité soit a—5 comme—3 est à + 15; parce qu'il faudroit pour cela que le second terme estant plus petit que le 1. le 4. fust aussi plus petit que le 3. au lieu qu'il est beaucoup plus grand. Ie ne voy point d'autre réponse à cela que de dire la multiplication de moins par moins, se faisant par voye de soustraction, au lieu que toutes les autres se font par voye d'addition, il n'est pas estrange que la notion des multiplications ordinaires ne convienne pas à cette sorte de multiplication qui est d'une autre genre que les autres, sans qu'il soit besoin d'en excepter la multiplication des fractions comme de $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$. Car en quoy celle là est differente de celle des entiers, est que pour avoir le produit, il faut faire deux multiplications, celle du 1. Numerateur par le 2 ce qui donne 10* *ne 10 pour numerateur du produit & celle du 1 deminateur par le 2, ce qui donne 21 pour le deminateur du produit. Mais l'une & l'autre se fait par voie d'addition; car on prend le 2 numerateur autant de fois qu'il y a d'unitez dans le premier; c'est à dire qu'on prend 5.2 fois, ce qui fait 10. Et on prend aussi le 2 denominateur autant de fois qu'il y a d'unitez dans le premier, c'est à dire qu'on prend 7.3 fois, ce qui fait 21. Et c'est par là qu'il arrive que l'unité, ou* $\frac{3}{3}$ *est à* $\frac{2}{3}$ *comme* $\frac{5}{7}$ *est à* $\frac{10}{21}$.

COROLLAIRE DE LA TROISIÉME REGLE. LX.

C'EST sur la 3 regle qu'est fondée une invention fort aisée de trouver les multiplications des nombres depuis 5 jusqu'à 10.

Il ne faut que baisser les 10 doigts, puis relever d'une main autant de doigts qu'il s'en faut que l'un des nombres qu'on veut multiplier n'aille jusqu'à 10; comme si ce nombre est 8, en relever 2, & de l'autre de même autant qu'il s'en faut que l'autre nombre n'aille jusqu'à dix; comme si ce nombre est 7, en relever 3: cela fait, il faut conter autant de dixaines qu'il y a de doigts baissez, & multiplier les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, en ne les prenant que pour des unitez, & on aura le nombre qu'il faut. La raison de cela est qu'on ne fait en cela que multiplier

$$\text{par}\quad \begin{array}{l} 10. - 2. \\ \quad\times \\ 10. - 3. \end{array} \Big\}\ 100 - 20 - 30 + 6.\ \text{somme } 56.$$

Car en baissant les doigts, on fait la premiere multiplication partiale qui donne dix dizaines.

En levant deux doigts d'une main on fait ce que doit faire la seconde multiplication partiale, qui est de + 10. par — 2, ce qui donne — 20: car en levant deux doigts on oste deux dizaines.

En levant 3 doigts de l'autre main on fait encore ce que doit faire la troisiéme multiplication partiale, qui est de + 10 par — 3, ce qui donne — 30: car en levant 3 doigts on oste trois dizaines.

Et enfin en multipliant les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, on multiplie —2 par—3, ce qui donne +6 par la raison que nous avons dite.

LXII. ### QUATRIESME REGLE.

QUAND les termes se trouvent avec des nombres, il faut multiplier les nombres, par les nombres, & les termes par les termes pour en avoir les multiplications partiales, en gardant les regles precedentes pour ce qui est des *plus* & des *moins*.

$$\left.\begin{array}{l}3b\\ 5d\end{array}\right\} 15bd. \qquad \left.\begin{array}{l}3b.\\ d.\end{array}\right\} 3bd.$$

$$\left.\begin{array}{l}3b+2d\\ 4p+3q\end{array}\right\} 12bp+8pd+9bq+6dq.$$

DIVISION.

Elle n'a rien de particulier, sinon lors que l'une des grandeurs incomplexes du diviseur se trouve dans toutes les grandeurs incomplexes du *dividende*; Car alors il la faudra effacer dans le diviseur & dans toutes les grandeurs incomplexes du *dividende*.

Exemple $\frac{ba+ca+da}{f+a}$ le quotient plus abregé sera $\frac{b+c+d.}{f}$

AVERTISSEMENT.

Comme ces 4 operations sur les grandeurs complexes marquées par lettres, est une espece de jargon qui embarasse quand on n'y est pas accoûtumé, il est utile d'en proposer plusieurs exemples, où on observera les regles qu'on a données aux nombres 42. 43. 44.

EXEMPLES DE L'ADDITION.

SOMMES.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+c\\ \text{Ajoûter } c & \end{array}\right\} b+2c.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+d\\ \text{Ajoûter } b+c & \end{array}\right\} 2b+d+c.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b-c\\ \text{Ajoûter } d+c & \end{array}\right\} b+d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b-c+d\\ \text{Ajoûter } d+c+g & \end{array}\right\} b+2d+g.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & -b+c-m\\ \text{Ajoûter } d-m-c & \end{array}\right\} d-b-2m.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+7a \\ \text{Ajoûter} & -9a\end{array}\right\} b-2a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+7a \\ \text{Ajoûter} & +9a\end{array}\right\} b+16a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A} & b+9a \\ \text{Ajoûter} & b-7a\end{array}\right\} 2b+2a.$$

Exemples de la Soustraction.

Restes.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d \\ \text{Oſter} & b-m\end{array}\right\} d+m.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d \\ \text{Oſter} & -c\end{array}\right\} b+d+c.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d \\ \text{Oſter} & c+d\end{array}\right\} b-c.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & s-w \\ \text{Oſter} & s-a\end{array}\right\} -w+a \text{ (ou) } a-w.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+c-d \\ \text{Oſter} & b+m+d\end{array}\right\} c-m-2d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & bb+cc+cb \\ \text{Oſter} & bb+cc-cb\end{array}\right\} 2cb.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+d \\ \text{Oſter} & b-d\end{array}\right\} 2d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & b+7a \\ \text{Oſter} & +9a\end{array}\right\} b-2a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De.} & b+9a \\ \text{Oſter} & b-7a\end{array}\right\} +16a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De} & d+b \\ \text{Oſter} & b+d\end{array}\right\} o.$$

Exemples de la Multiplication.

Produits.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par} & b+c \\ \text{Mult.} & b+c\end{array}\right\} bb+cc+2bc.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par} & b+c \\ \text{Mult.} & b-c\end{array}\right\} bb-cc.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Par} & b-c \\ \text{Mult.} & b-c\end{array}\right\} bb+cc-2bc.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Par } b+c+d\\ \text{Mult. } m\end{array}\right\} bm+cm+dm.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Par } b+c+d\\ \text{Mult. } b\end{array}\right\} bb+bc+bd.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Par } b+c-d\\ \text{Mult. } b-c\end{array}\right\} bb-cc-bd+cd.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Par } b+c-d\\ \text{Mult. } b-c+d\end{array}\right\} bb-cc-dd+2dc.$$

Exemples de la Division.

Quotients.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Dividende} & bbcc\\ \text{Diviseur} & cc\end{array}\right\} bb.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & bcdf\\ \text{Diviseur} & cf\end{array}\right\} bd.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & ba+ca+da\\ \text{Diviseur} & b+c-d\end{array}\right\} a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & bb-aa\\ \text{Diviseur} & b-a\end{array}\right\} b+a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & ba+ca+da\\ \text{Diviseur} & a\end{array}\right\} b+c+d.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & bb+aa+2ba\\ \text{Diviseur} & b+a\end{array}\right\} b+a.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Divid.} & bb-aa\\ \text{Diviseur.} & b+a\end{array}\right\} b-a.$$

DES EQUATIONS.

LXIII. Toute égalité entre deux grandeurs se peut appeller *équation* : mais pour l'ordinaire on donne ce nom à l'égalité de deux grandeurs complexes, comme $bp+fg = mn+st$.

Ou au moins dont l'une est complexe, comme $b+c = d$.

Chacune de ces grandeurs égales peut estre appellée *membre de l'équation.*

LXIV. Il est souvent tres-utile de trouver des équations, & l'un des plus grands secrets pour les trouver est de pouvoir donner à une même grandeur diverses dénominations, parce que ſouvent une dénomination en fait voir l'égalité avec une autre grandeur qu'une autre dénomination n'auroit pas fait voir.

Ainſi aiant une grandeur comme b partagée en deux portions, comme c & d, on peut nommer chaque portion ou par ſon propre caractere, comme c, ou par le caractere du tout moins l'autre partie. Car il eſt bien viſible que b eſtant égal à $c + d$ chaque partie eſt égale au tout moins l'autre partie, & qu'ainſi $c = b - d$. Et $d = b - c$.

Or il y a beaucoup de rencontres où il eſt plus avantageux de nommer une partie du nom du tout moins l'autre partie que de luy donner un nom propre. Comme au contraire il eſt quelquefois plus utile de donner un nom propre à ce qui eſt marqué par une grandeur moins quelque choſe.

THEOREME.

La plus importante obſervation touchant les Equations eſt celle-cy. LXV.

On peut transferer chaque terme d'un des membres d'une equation en l'autre ſans en troubler l'égalité, pourveu qu'on en change les ſignes, c'eſt à dire que l'oſtant d'un des membres où il eſtoit avec *plus*, on le mette dans l'autre avec *moins* ou au contraire. Par exemple,

$$b + d = f.$$

Je puis tranſporter d en l'autre membre en changeant de ſigne & mettant

$$b = f - d.$$

Et ſi au contraire on avoit

$$b - d = g.$$

On pourroit mettre

$$b = g + d.$$

Que ſi on tranſportoit tous les termes d'un membre dans l'autre membre en les changeant chacun de ſigne, le membre où on auroit tranſporté tous les ſignes ſeroit égal à rien, comme ſeroit celuy d'où on les auroit tranſportez. Car ſi

$b + d - f = p + q - r.$

$b + d - f - p - q + r =$ à zero.

Et si on ne laisse d'un costé qu'un terme avec un *moins*, cela sera que le membre où on aura transporté les autres termes sera égal à zero moins ce terme-là,

$b + d = f - g.$

$b + d - f = - g.$

C'est à dire sera moins que rien. Ce qui semble impossible à concevoir, quoy que cela ne soit pas sans exemple même dans le langage commun, puis qu'on dit d'un homme endebté qu'il s'en faut vingt mille éscus qu'il n'ait un sou.

LXVI. La raison de tout cela n'est autre que les deux maximes de l'égalité.

Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous seront égaux.

Si de grandeurs égales on en oste d'égales, les restes seront égaux.

Car si $b - d = g.$

En ajoûtant d de costé & d'autre ils demeureront égaux.

Or pour ajoûter d au membre où il est avec *moins*, je n'ay qu'à le retrancher ; puis qu'aussi bien si je l'avois ajoûté en disant,

$b - d + d.$

$-d$ & $+ d.$ ne feroient rien par le 4ᵉ principe.

Et pour ajoûter d à l'autre membre où il n'est point du tout, il faut que je l'y mette avec *plus* en disant $g + d$.

Et par consequent ce transport d'un terme d'un membre en un autre en changeant le *moins* en *plus* ne fait qu'ajoûter choses égales à choses égales, ce qui ne trouble point l'égalité.

Et si j'avois $b + d = f.$

En retranchant d de costé & d'autre ils demeureront égaux.

Or pour retrancher d du membre où il est avec un *plus* je n'ay q'uà l'oster tout à fait, puis qu'on ne peut pas mieux le retrancher qu'en le ſupprimant.

Et pour le retrancher du membre où il n'eſtoit point du tout, il faut l'y mettre avec un *moins*, en diſant $f - d$.

Et par conſequent ce tranſport d'un terme d'un membre à un autre en changeant le *plus* en *moins*, ne fait qu'oſter choſes égales de choſes égales, ce qui ne trouble point l'égalité.

EXEMPLES.

De la Solution d'un Probleme par Equations.

On feint qu'une Mule allant avec une Aſneſſe ſe plaignoit d'eſtre trop chargée, & que la Mule luy dit; Si je t'avois donné un de mes ſacs, nous en aurions autant l'une que l'autre: & ſi tu m'en avois donné un des tiens, j'en aurois le double de toy. LXVII.

On demande combien chacune portoit de ſacs. Et on le trouve ainſi.

Le nombre inconnu des ſacs de la Mule ſoit appellé A. & de l'Aſneſſe B.

Par la premiere hypotheſe

$A - 1 = B + 1$.

Donc ajoûtant 1 de part & d'autre

$A = B + 2$.

Par l'autre hypotheſe.

$A + 1$ eſt égal à deux fois $B - 1$, c'eſt à dire à $2B - 2$.

Donc en mettant au lieu d'A, $B + 2$ qui luy eſt égal.

$B + 3 = 2B - 2$.

Donc ajoûtant 2 de part & d'aure

$B + 5 = 2B$.

Donc oſtant un B de part & d'autre

$5 = B$.

C'eſt à dire que B, le nombre des ſacs de l'Aſneſſe, eſt 5, & 7 celuy des ſacs de la Mule.

Second Exemple.

Ayant rencontré des pauvres & leur voulant donner à chacun 5 ſols, j'ai trouvé que j'en avois un de trop peu. LXVIII.

Et ainsi ne leur ayant donné qu'à chacun 4, il m'en est resté 6. Combien y avoit-il de pauvres, & combien avois-je de sols.

Soit le nombre des pauvres appellé A.

Par l'hypothese

$5A - 1 = 4A + 6$.

Donc ajoûtant 1. de part & d'autre

$5A = 4A + 7$.

Donc ostant $4A$ de part & d'autre

$A = 7$.

Donc il y avoit 7 pauvres. Et j'avois 34 sols.

Troisie'me Exemple.

LIX. N'ayant que des Carolus de 10 deniers & des pieces de 3 blancs de 15 deniers, faire 20 sols en 20 pieces.

Soient appellez le sol A.

Le Carolus $B = A - 2$ den.

La piece de trois blancs $C = A + 3$ den.

Multipliant B par la difference de C à A, c'est à dire prenant $3B$; & C par la difference de B à A, c'est à dire prenant $2C$.

Je dis que $3B + 2C$ valent $5A$.

Car $3B = 3A - 6$ den.

Et $2C = 2A + 6$ den.

Or plus & moins valent zero. Donc, &c.

Or 4 fois 5 valent 20

Donc 4 fois $3B$, c'est à dire $12B$, & 4 fois $2C$, c'est à dire $8C$ valent $20A$. Ce que l'on cherchoit.

Cette équation est le fondement d'une regle d'Arithmetique qu'on appellle la regle d'alliage.

NOUVEAUX

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SECOND.

DE LA RAISON ET PROPORTION GEOMETRIQUES.

RIEN *n'a jamais esté moins bien éclaircy dans toute la Geometrie, que la nature de ce qu'on appelle* Raison: *& l'Auteur de ces Elemens n'a jamais esté fort satisfait de ce qu'il en a dit dans la premiere Edition de ce Livre. Mais un Gentilhomme Flamand nommé M. de* # *Nonancourt, qui a beaucoup de lumieres, non seulement dans ces sortes de Sciences, mais aussi dans la Philosophie & dans la Theologie, luy ayant fait voir un petit Traité Latin intitulé* # Euclides Logisticus, seu de Ratione Euclideâ; *il avoüe que cela luy a ouvert les yeux, & luy a fait concevoir des Notions beaucoup plus nettes touchant cette Matiere qu'il n'en avoit auparavant: & c'est pourquoy on trouvera que ce second Livre & le troisiéme sont presque tout changez.*

Ce liure a eté imprimé a Louvain l'an 1652 - et l'autheur est ce mesme Mr de Nonancourt

D

PLAN GENERAL
DES PROPORTIONS.

On peut comparer ensemble deux grandeurs en deux differentes manieres.

L'une est, en considerant de combien l'une surpasse l'autre quand elles sont inégales, ce qui s'appelle *Difference:* comme si je dis que 2 est la difference de 7 à 5.

L'autre est, en considerant un autre rapport qui s'appelle *Raison*, que nous expliquerons plus bas.

Que si deux grandeurs ont entr'elles ou mesme difference, ou mesme raison que deux autres, cela s'appelle Proportion : mais quand c'est une égalité de difference, cela s'appelle Proportion Arithmetique.

Et quand c'est une égalité de Raisons, Proportion Geometrique.

Mais parce qu'on n'a point d'égard dans la Geometrie à la Proportion Arithmetique, & que quand on parle absolument de Proportion on entend toûjours la *Geometrique*, c'est à celle-là que nous nous arrêterons ; & nous tâcherons d'expliquer plus clairement que l'on ne fait d'ordinaire ce que c'est que Raison, qui est le fondement de la Proportion Geometrique.

SECTION PREMIERE.
DE LA RAISON.
Definitions.

La quantité relative d'une grandeur comparée à une autre, est ce qu'on appelle *Raison.*

La quantité relative de 12 à 8, est la Raison de 12 à 8.

De B à C est la Raison de B à C.

La Raison que l'on compare s'appelle *antecedent* ; & celle avec qui on la compare, *consequent.*

Remarques pour mieux faire comprendre la nature de la Raison.

1. Quand on considere une grandeur seule, on n'y considere que sa grandeur absoluë : ainsi en comptant tous les Soldats d'une Armée de 10000 hommes, en y trouvant

10000, je dis que c'est une Armée de 10000 hommes: Mais si je compare cette Armée avec une autre de 100000 ou de 4000, la notion de sa grandeur change; car je la trouve petite comparée avec la premiere, & grande comparée avec la seconde. Or c'est ce que j'appelle *Quantité relative*, en quoy consiste ce que les Geometres appellent *Raison*.

Quoy que toute Raison demande deux termes, neanmoins la Quantité relative en quoy la raison consiste, convient proprement à l'antecedent, & non pas au consequent; comme encore que la Paternité suppose le Pere & le Fils, neanmoins elle ne convient qu'au Pere & non au Fils; & la Filiation ne convient qu'au Fils & non au Pere. II.

Comme la Raison est une quantité, quoy que relative, toutes les proprietez de la quantité luy conviennent: c'est pourquoy une raison est égale, ou plus grande, ou plus petite qu'une autre raison. III.

Rien ne peut mieux faire comprendre ce que c'est que Raison, que les fractions ou nombres rompus, qui se marquent par deux chiffres, avec une ligne entre deux, dont le plus haut, qui s'appelle numerateur, est comme l'antecedent; & le plus bas, qui s'appelle dénominateur, est comme le consequent: car les nombres entiers signifient une quantité absoluë, en ce que 3, par exemple, signifie trois unitez, 4 quatre unitez, &c. au lieu que dans les fractions le numerateur ne signifie que par rapport au dénominateur: De sorte que trois fractions qui ont toutes le nombre 2 pour numerateur, & qu'on en cache le dénominateur, on ne sçait ce que ce 2 veut dire; mais si on les découvre, & que ce soient $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{7}$, dans la premiere il signifiera deux tiers, dans la seconde deux cinquiémes, dans la troisiéme deux septiémes; & il faut remarquer que plus ce dénominateur est un petit nombre, plus la fraction est grande: & au contraire, car au lieu que 3 est un moindre nombre que 5, & 5 que 7, deux tiers est plus que deux cinquiémes, & deux IV.

cinquiémes plus que deux ſeptiémes; ce que nous dirons dans la ſuite eſtre la meſme choſe dans les Raiſons; celles qui ont un meſme antecedent & divers conſequens eſtant d'autant plus grandes que leur conſequent eſt plus petit.

Premiere Division.

Toute Raiſon eſt d'égalité ou d'inégalité. On appelle Raiſon d'égalité quand l'antecedent eſt égal au conſequent, comme la Raiſon de B à B, de 12 à 12, d'1 à 1; d'inégalité quand l'antecedent eſt plus grand ou plus petit que le conſequent, comme la Raiſon de 8 à 12, ou de 12 à 8.

Avertissement.

Il ne faut pas confondre la Raiſon d'égalité avec l'égalité des Raiſons; car deux Raiſons peuvent eſtre égales entr'elles, quoy que chacune ſoit une Raiſon d'inégalité.

Seconde Division.

La Raiſon d'inégalité ſe diviſe encore en celle qu'on appelle de *nombre à nombre*, & celle qu'on appelle *Raiſon ſourde.*

On dit que deux grandeurs ont entr'elles une Raiſon de nombre à nombre, ou quand l'une eſt préciſément contenuë tant de fois dans l'autre; comme la Raiſon du pied à la toiſe, la Raiſon de 4 à 12; ou au moins, quand quelques aliquotes de l'antecedent ſont préciſément un certain nombre de fois dans le conſequent, comme la raiſon d'une aulne à une toiſe; parce que le poûce, qui eſt la 24^e^ partie d'une aulne, eſt 72 fois dans la toiſe.

Quand les grandeurs ont entr'elles une raiſon de nombre à nombre, on dit qu'elles ſont *commenſurables*, parce qu'elles ont quelque partie qui peut ſervir à l'une & à l'autre de commune meſure.

C'est ce qui convient à tous les nombres qui ont tous au moins l'unité pour meſure commune.

Et c'eſt auſſi ce qui à fait que l'on appelle cette raiſon *de nombre à nombre.*

Et le plus court auſſi eſt d'exprimer ces raiſons par les moindres nombres qui en ont une ſemblable, comme de dire que l'aulne eſt à la toiſe comme 44 à 72; c'eſt à dire comme 11 à 18.

La Raiſon ſourde, qui eſt oppoſée à celle-là, eſt quand deux grandeurs ont une certaine Raiſon entre elles, qui ne peut eſtre marquée par aucun nombre; parce que chacune ayant des parties aliquotes de plus petites en plus petites, à l'infiny: Il ne peut neanmoins arriver qu'aucune, quelque petite qu'on la prenne, meſure juſtement l'autre grandeur, c'eſt à dire qu'elle y ſoit preciſément; mais y il aura toûjours quelque reſte plus petit que cette aliquote.

Cela paroît d'abord incroyable, & neanmoins il y a demonſtration qu'il y a des lignes qui ſont incommenſurables à d'autres lignes, comme le coſté du quarré à la Diagonale.

DE LA COMPOSITION DES RAISONS.

Comme la Raiſon eſt une quantité ou grandeur, quoy que relative, tout ce qui convient à la quantité ou grandeur en general convient auſſi à la Raiſon.

Et ainſi comme deux grandeurs peuvent eſtre comparées enſemble, deux raiſons le peuvent eſtre auſſi: & alors, comme il y a quatre termes dans cette comparaiſon, le premier & le quatriéme qui ſont l'antecedent de la premiere Raiſon & le conſequent de la deuxiéme, s'appellent *extrémes*; & le deuxiéme & le troiſiéme qui ſont le conſequent de la premiere Raiſon & l'antecedent de la ſeconde, s'appellent *moyens*.

Que ſi conſiderant enſemble pluſieurs Raiſons le conſequent de la precedente eſt toûjours le meſme que l'antecedent de la ſuivante, ces Raiſons peuvent eſtre appellées continuës.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable dans cette comparaiſon de Raiſons, eſt que comme une grandeur comparée à une autre luy eſt égale ou inégale, & quand elle eſt inégale qu'elle eſt plus grande ou plus petite: Il faut aussi qu'une Raison comparée à une autre luy soit égale ou inégale, & quand elle est inégale qu'elle luy soit plus grande ou plus petite.

Et comme c'est dans cette comparaison de deux grandeurs que consiste la Raison d'égalité ou d'inégalité, il est clair encore que deux Raisons estant comparées ensemble, en sorte que l'une soit l'antecedent & l'autre le consequent de cette comparaison, elles ont entr'elles une nouvelle Raison, ou d'égalité si elles sont égales, ou d'inégalité si elles sont inégales.

Or quand c'est la Raison d'égalité qui est entre deux Raisons, c'est à dire quand deux Raisons sont égales, cela s'appelle proportion, ou proportion geometrique.

DEFINITION
de la Proportion Geometrique.

Ainsi ce qu'on entend par la *Proportion Geometrique*, ou par le mot de *Proportion* quand on n'y ajoûte rien, n'est autre chose que l'égalité de deux Raisons, qui consiste en ce que la quantité relative d'un antecedent comparé à son consequent, est égale à la quantité relative d'un autre antecedent comparé aussi à son consequent.

La Proportion s'explique en diverses manieres, c'est à dire qu'il y a diverses façons de parler pour signifier que quatre grandeurs, comme B, C, F, G, sont proportionnelles. On dit premierement que la premiere est à la seconde comme la troisiéme à la quatriéme; que B est à C comme F à G.

2. Que la raison de la premiere à la seconde est égale à la Raison de la troisiéme à la quatriéme.

3. Que la premiere a la mesme Raison à la seconde que la troisiéme à la quatriéme; & pour abreger on se sert de quatre points :: entre les deux Raisons B C :: F G.

Definition.

Nous avons déja dit que comparant ensemble deux Raisons, l'antecedent de la premiere & le consequent de la seconde s'appellent extremes; & l'antecedent de la seconde & le consequent de la premiere les moyens: Mais dans les Raisons égales les extremes & les moyens sont dits estre reciproques les uns aux autres ; c'est à dire que le premier & le quatriéme terme sont reciproques au deuxiéme & au troisiéme.

AVERTISSEMENT.

Nous *avons déja dit que la Raison estant une quantité, quoy que relative, comme deux grandeurs estant comparées l'une à l'autre font une Raison ; on peut aussi comparer deux Raisons l'une à l'autre, comme la Raison B à X. à la Raison C à X, & considerer quelles Raisons elles ont entr'elles ; & alors la premiere Raison (qui a son antecedent & son consequent) n'est que l'antecedent de cette nouvelle Raison que l'on cherche entre ces deux Raisons, & la seconde Raison en est le consequent ; & que pour mieux marquer il semble alors à propos de metre les consequens de ces Raisons que l'on compare au dessous de leurs antecedens, avec une petite ligne entre deux, comme on fait dans les Fractions en cette maniere.*

$$\frac{B}{X} \quad \frac{C}{X}$$

Or cela estant ainsi, ces deux Raisons considerées en cette maniere peuvent estre entre les deux premiers termes d'une position, dont les deux derniers seront ou deux grandeurs absoluës, comme si je dis, la Raison de B à X est à la Raison de C à X, comme B est à C.

$$\frac{B}{X} \quad \frac{C}{X} :: B \quad C.$$

ou deux autres Raisons, comme si je dis, la Raison d'X à X est à la Raison de B à X, comme la Raison d'X à C est à la Raison de B à C.

$$\frac{X}{X} \quad \frac{B}{X} :: \frac{X}{C} \quad \frac{B}{C}$$

PROPORTIONS,

OU RAISONS EGALES NATURELLEMENT CONNUES.

On ne sçauroit mieux faire comprendre ce que c'est que proportion ou égalité de Raisons, que par des exemples de proportions naturellement connuës, qui serviront aussi de principes pour connoistre celles qui ne se discernent pas si facilement.

I.

Toutes les Raisons d'égalité sont égales entr'elles; la Raison de B à B est égale à la Raison de C à C, la Raison d'1 à 1 est égale à la Raison de 3 à 3.

II.

La Raison d'une grandeur à son multiple quelconque, est égale à la Raison d'une autre grandeur à son équimultiple. La Raison de B au triple de B, est égale à la Raison de C au triple de C.

La Raison de 2 au triple de 2 (qui est 6) est égale à la Raison de 5 au triple de 5 (qui est 15.

III.

La Raison d'une grandeur à une autre grandeur est égale à la Raison de leur équimultiple.

La Raison de B à C est égale à la Raison du triple de B au triple de C.

La Raison de 2 à 5 est égale à la Raison de 6 triple de 2. à 15 triple de 5.

IV.

La Raison des multiples differents de la mesme grandeur est égale à la Raison des multiples d'une autre grandeur pareils aux premiers, chacun à chacun & dans le mesme ordre.

La Raison de 3 B à 5 B. est égale à la Raison de 3 C à 5. C.

V.

La Raison des multiples pareils de deux grandeurs, est égale à la Raison d'autre multiples pareils de mesme grandeur.

La Raison de 3 B à 3 C est égale à la Raison de 5 B à 5. C.

Avertissement.

Tout *ce qu'on vient de dire des multiples se peut dire aussi des aliquotes, n'estant que la mesme chose sous un autre nom.*

nom; car toute grandeur est multiple de ses aliquotes, & aliquote de ses multiples.

DEFINITION. DIVISION.

LA Proportion discrete ou continuë : On l'appelle discrete quand le consequent de la premiere Raison est different de l'antecedent de la seconde, comme dans tous les exemples qu'on a rapporté. B C. : : F G.

On l'appelle continuë quand la mesme grandeur qui est le consequent de la premiere Raison est l'antecedent de la seconde, comme si je disois B est à C, comme à D B C : : C est à D C D ; ce qui se peut aussi marquer ainsi $\div$ B C D.

DEFINITION.

CETTE proportion continuë s'appelle Progression, quand y ayant plusieurs raisons égales de suitte, le consequent de de la precedente est toûjours l'antecedent de la suivante comme B est à C, comme C à D, comme D à F, comme F à G, &c. Ce qui se marque ainsi $\div$ B C D F G.

I. AXIOME.

LA Raison d'un antecedent à un consequent, a pour parties les Raisons de chaque parties de l'antecedent à ce mesme consequent, & cette raison est égale à toutes les raisons partiales de l'antecedent prises ensemble au mesme consequent, soit la grandeur T, divisée en plusieurs parties égales, ou inégales, comme M P Q. si on compare T à quelque autre quantité comme O : ensorte que T soit l'antecedent, & O le consequent: La raison de T à O, a pour parties les raisons de M à O, de P à O, de Q à O, & leur est égale.

$$\frac{T}{O} = \frac{M}{O} + \frac{P}{O} + \frac{Q}{O}$$

CAR T valant M + P + Q. il est visible que T est égale a $\frac{M + P + Q}{O}$

Remarquez que je dis que la Raison $\frac{T}{O}$, a pour parties les raisons $\frac{M}{O}\ \frac{P}{O}\ \frac{Q}{O}$, & non pas qu'elle en est composée, ce qui signifie tout autre chose comme on verra dans la suitte.

II. Axiome.

La Raison d'un antecedent à un consequent, est égale à la Raison d'un autre antecedent moindre que le premier au mesme consequent, plus la Raison de la grandeur dont un antecedent surpasse l'autre au consequent. Et ainsi la Raison du plus grand antecedent au consequent est plus grande que la Raison du plus petit antecedent à ce mesme consequent.

C'est une suitte de l'Axiome precedent.

Car la Raison du grand antecedent au consequent, a pour parties la Raison du petit antecedent au consequent plus la Raison de la quantité, dont le grand antecedent surpasse le plus petit, à ce mesme consequent, & elle leur est égale.

Cette quantité dont une grandeur en surpasse une autre, s'appelle la Difference qui est entre ces deux grandeurs, soit B plus grand que C, & la difference de B à C, soit appellé X : ensorte que C + X, soit égal à B $\frac{B}{D}$ est égal à $\frac{C}{P} + \frac{X}{D}$.

III. Axiome.

La Raison de l'antecedent à une partie du consequent est plus grande que la raison du mesme antecedent à tout le consequent, & ainsi la raison d'un antecedent à un consequent est une plus grande raison que celle du mesme antecedent à un autre consequent plus grand que le premier.

La Raison de B à X partie de D est plus grande que la Raison de B à D, & de mesme si X est plus petit que Y. La Raison de B à X, sera plus grande que celle de B à Y.

IV. Axiome.

Les Raisons qui ont un mesme consequent sont entre elles comme leur antecedens, $\frac{B}{X}$ $\frac{C}{X}$ :: B C.

C'est une suite du 2 Axiome ; car si deux antecedens étant comparez à un mesme consequent, la Raison du plus grand antecedent eſt plus grande que celle du plus petit. Il faut que ces raiſons ſoient entre elles comme les antecedens.

V. Axiome.

Les Raiſons qui ont un meſme antecedent ſont entre elles comme leurs conſequens dans un ordre reciproque ou renverſé, c'eſt à dire que la premiere eſt à la ſeconde, comme le conſequent de la ſeconde eſt au conſequent de la premiere $\frac{x}{B}\ \frac{x}{C}$ :: C B.

C'eſt la ſuitte du troiſiéme Axiome; car ſi comparant le meſme antecedent à differens conſequens, la Raiſon de cet antecedent à chaque conſequent eſt plus grande quand le conſequent eſt plus petit, & plus petite quand le conſequent eſt plus grand. Il eſt clair que ces raiſons doivent eſtre entre elles comme les conſequens dans un ordre renverſé, puiſque ſi le conſequent de la premiere eſt plus grand que le conſequent de la ſeconde. La premiere ſera plus petite que la ſeconde, comme le conſequent de la ſeconde eſt plus petit que le conſequent de la premiere.

VI. Axiome.

Si deux raiſons ſont égales à une meſme raiſons: elles ſont égales entre elles.

$$\left.\begin{matrix}B\,C.\\F\,G.\end{matrix}\right\} :: M\,N.$$

Donc B C. :: F G.

Et c'eſt la meſme choſe que ſi deux raiſons ſont égales à deux autres raiſons chacune a chacune, elles ſont égaentre elles, ſi les Raiſons I & O eſtant ſuppoſées égales, la Raiſon A eſt égale à la Raiſon I, & la Raiſon E, égale à la Raiſon O, & A & E ſeront égales entre elles.

Corollaire.

Quand pluſieurs proportions diſcretes conſiderées enſemble, ſont telles que les deux derniers termes de la precedente font toûjours les deux premiers termes de la ſuivante: elles peuvent eſtre appellées continuës en leur maniere, ou diſcretement continuës, & alors il eſt clair que toutes ces raiſons de ces diverſes proportions ſont égales, & qu'ainſi l'on peut toûjours conclure que les deux premiers termes ſont entre eux comme les deux derniers, ce qui ſera d'un grand abregement dans la ſuitte. Exemples dans les nombres.

$$\frac{8}{12}\ \frac{15}{21}\ ::\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ ::\ \frac{7}{3}\ \frac{5}{2}\ ::\ \frac{7}{5}\ \frac{3}{2}\ ::$$

Donc $\frac{8}{12}\ \frac{15}{21} :: \frac{7}{5}\ \frac{3}{2}$.

VIII. Axiome.

Deux grandeurs ſont égales lors qu'elles ont méme Raiſon à une meſme grandeur, ou qu'une meſme grandeur à meſme Raiſon à chacune.

Si B S : : D S.
Ou que S B : : S D.
Donc B eſt égal à D.

Que ſi ce ſont les grandeurs B & D qu'on ſuppoſe égales, elles auront meſme Raiſon à une meſme grandeur, & une meſme grandeur aura meſme Raiſon à chacune. Si B eſt égale à D B S : : D S & S B : : S D.

Le fondement de tout cela, eſt qu'il eſt clair qu'en matiere de Raiſon deux grandeurs égales, & une meſme grandeur deux fois repetée font la meſme choſe.

VIII. Axiome.

Il peut y avoir trois ſortes d'égalitez en 4 termes qui font deux Raiſons.

1. L'égalité des antecedens qui ſont le 1. & le 3[e] de ces 4 termes. 2. L'égalité des Raiſons meſmes. 3. L'égalité des conſequens qui ſont le 2 & le 4., & deux de ces égalitez eſtant données donnent celle qui reſte, ſoient les 2 Raiſons $\frac{B}{S}$ & $\frac{D}{T}$.

Preuve du premier & 2 cas, ſuppoſé que le 1 terme ſoit égale au 3, & le 2 au 4. B à D & S à T par ces hypotheſes, & le ſeptiéme Axiome B S : : D S : : D T, donc par le VI[e] B S : : D T.

Preuve du 3[e] cas, ſuppoſé que $\frac{B}{S}$ ſoit égale à $\frac{D}{T}$ & B égale à D par ces hypotheſes, & le VII. Axiome B S : : D T : : B T donc par le VII. S eſt égale à T.

C'eſt la meſme choſe ſi on ſuppoſe que S eſt égale à T, on en conclura de la mesme sorte que B sera égale à D.

COROLLAIRE.

IL en est de mesme des Raisons que des Grandeurs ; car 1 considerant ensemble 4 Raisons, elles seront proportionnelles, Si la 1 est égale à la 3^e & la 2 à la 4. Ainsi parce que la Raison de 2 à 3, est égale à la Raison de 4 à 6, & la Raison de 5 à 7, égalle à celle de 15 à 21 $\frac{2}{3}\,\frac{5}{7}\,\frac{4}{6}\,\frac{15}{21}$.

2. Supposant que ces 4 Raisons sont proportionnelles. Si la 1 est égale à la 3^e, la 2 le sera à la 4, & reciproquement si la 2 est suposée égale à la 4^e, la 1. le sera à la 3^e.

IX. AXIOME.

QUAND on a deux proportions, les 4 Raisons de ces deux proportions sont proportionnelles. La 1 Raison de la 1^{re} Proportion estant à la 1^{re} Raison de la 2 Proportion, comme la 2 Raison de la 1^{re} Proportion est à la 2 Raison de la derniere. Si B C : : F G & M N : : P Q $\frac{B}{C}\,\frac{M}{N} : : \frac{F}{G}\,\frac{P}{Q}$.

Car la 1 Raison $\frac{B}{C}$ est égale à la 3 $\frac{F}{G}$ par ce que ce sont les deux Raisons de la 1 Proportion, & la 2 est égale à la 4 par la mesme Raison. Donc par le VIII. Axiome, il y a une nouvelle proportion entre ces 4 Raisons.

X. AXIOME.

ON ne change rien dans une proportion quand on ne fait qu'en transposer les raisons ; car deux choses égales demeureront toûjours égales de quelque maniere qu'on les dispose. Si donc

B C. : : F G.
F G. : : B C.

I. THEOREME.

DEUX Raisons sont égales quand toutes les Aliquotes pareilles de chaque antecedent sont également contenuës dans son consequent.

Soient 4 grandeurs B C F G, & les Aliquotes quelconques de B soient appellées X, & les pareilles de F soient appellées Y. Je dis que B C : : F G si X & Y sont également contenuës dans les consequens C & G.

Mais cela peut estre entendu en deux manieres. La premiere est quand X est précisement autant de fois dans

C qu'Y eſt dans G , & alors il n'y a aucune difficulté, & il ſuffit meſme d'avoir examiné une ſeule Aliquote pareille des antecedens ; car il eſt viſible que ſi X [$\frac{1}{10}$ de B] eſt ſept fois dans C, & Y [$\frac{1}{10}$ de F] 7 fois dans G B C ::
F G 10. X 7. X :: 10 Y 7. Y

L'autre maniere fait toute la difficulté , c'eſt quand une Aliquote quelconque de B que je nomme X, n'eſt jamais préciſement tant de fois dans C, mais toûjours avec quelque reſte ; car alors l'Aliquote quelconque pareille de F ne peut eſtre également contenuë dans G , que par ce qu'elle y ſera autant de fois que X dans C. Mais toûjours avec quelque reſte comme ſi X $\frac{1}{10}$ de B eſt dans C 7 fois plus R & Y $\frac{1}{10}$ de F eſt auſſi dans G ſept fois plus R. Je dis que quand on peut ſçavoir que cela ſe trouvera generalement dans toutes les aliquotes pareilles des antecedens ; c'eſt à dire qu'elles ſeront toutes au moins en cette maniere également contenuës dans les conſequens, les Raiſons de $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ ſeront égales , je ne ſçay ſi on le peut mieux prouver qu'en cette maniere.

Si les Raiſons $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ n'eſtoient pas égales dans cette ſuppoſition ; Il faudroit que la premiere fuſt plus ou moins grande que la ſeconde , & & ſi elle eſtoit plus grande en augmentant ſon conſequent de quelque choſe on la diminueroit , & par là on la pourroit rendre égale à $\frac{F}{G}$ comme au contraire ſi elle eſtoit moins grande , on pourroit ajoûter quelque choſe au conſequent de la ſeconde, & par là rendant cette ſeconde moins grande, on pourroit encore faire que la premiere luy fuſt égale.

Or on ne ſçauroit augmenter C de quoy que ce ſoit qu'on ne rende la Raiſon $\frac{B}{C}$ plus petite qu'il ne faut pour eſtre égale à $\frac{F}{G}$ ce que l'on peut prouver ainſi ajoûtant Z à C quand Z ne ſeroit que la milliéme partie de l'épaiſſeur d'un cheveux. Je dis que la Raiſon $\frac{B}{C+Z}$ ſeroit plus petite qu'il ne faudroit pour eſtre égale à $\frac{F}{G}$ car ſi l'on prend l'Aliquote X plus petite que Z , il eſt manifeſte que X ſera dans C + Z une fois plus que dans C : de ſorte que ſi X eſt la $\frac{1}{100}$ de B & qu'elle ſoit 870 dans

C la mesme X [prise comme il a esté dit plus petite que Z] sera dans C + Z 8702 + R au lieu que Y qui est aussi la $\frac{1}{1000}$ de F ne sera dans G que 8701 + R.

Or il est clair que la Raison de 10000 X a 8702 X plus R est plus petite que la Raison de 10000 Y 8701 Y + R.

Donc on ne peut rien ajoûter à C qu'on ne rende $\frac{B}{C+Z}$ plus petite que $\frac{F}{G}$. Il est aisé de voir que l'on prouvera de la mesme sorte qu'on ne peut rien ajoûter à G que l'on ne rende la Raison $\frac{B}{C}$ plus grande que G + Z.

Donc la Raison $\frac{B}{C}$ n'est ny plus ny moins grande que la Raison $\frac{F}{G}$.

Donc elle luy est égale.

II. Theoreme.

Si 4 grandeurs sont proportionnelles : elles le seront en les renversant ; c'est à dire en comparant le premier consequent au premier antecedent, & le second consequent au 2 antecedent, le 2 terme au premier, le 4 au 3e, ce qui s'appelle *Permutando*. Si B C : : F G, je dis que C B : : G F ; car $\frac{C}{C}\ \frac{B}{C}$: : $\frac{G}{G}\ \frac{F}{G}$ par le Corolaire du 8 Axiome, la seconde de ces Raisons estant égale à la 4e par l'hypothese, & la premiere & la 3e estant des Raisons d'égalité. Or les deux premieres Raisons aiant mesme consequent sont comme leurs antecedens par le 4e Axiome, & il en est de mesme des deux dernieres qui ont aussi mesme consequent. Donc C B : : G F, ce qu'il faloit demontrer.

Corollaire.

Si 4 grandeurs sont proportionnelles, elles le seront en les prenant à rebours ; c'est à dire que la 4e sera à la 3e comme la 2 à la 1e si B C : : F G. G F : : C B par le precedent Theoreme. La 2 est à la 1e comme la 4 est à la 3e C B : : G F.

Donc par le X Axiome en transposant les Raisons la 4e sera à la 3e comme la 2 à la 1 G F : : C B : autrement par l'hypothese, les Raisons $\frac{F}{G}$ & $\frac{B}{C}$ sont égales, donc par le IX. Axiome $\frac{G}{G}\ \frac{F}{G}$: : $\frac{C}{C}\ \frac{B}{C}$ donc par le 4e Axiome G F : : C B.

III. Theoreme.

Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en les prenant alternativement ; c'eſt à dire en comparant les antecedens enſemble, & les conſequent enſemble, le 1re terme au 3e, & le 2 au 4e, ce qui s'appelle *Alternando*. Si B C : : F G. Je dis qu'*Alternando* B F : : C G ; car $\frac{B}{C}\,\frac{F}{C} :: \frac{F}{G}\,\frac{F}{C}$ par le 8e Axiome & ſon Corollaire. La premiere & la 3e Raiſon eſtant égale par l'hypotheſe, & la 2 & la 4e eſtant la meſme. Or $\frac{B}{C}\,\frac{F}{C}$: : B F par le VI Axiome, & $\frac{F}{G}\,\frac{F}{C}$ C G par le Ve Axiome.
Donc B F : : C G par le   ce qu'il falloit demonſtrer.

Corollaire.

Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en tranſpoſant la premiere, & la 4e, c'eſt à dire que la 4e ſera à la ſeconde, comme la 3e à la 1e ſi B C : : F G C G : : F B ; car par le precedent Theoreme, la 1e eſt à la 3e comme la 2 à la 4e B F : : C G. Donc *Permutando* la 3 eſt à la 1e comme la 4e eſt à la 2 F B : : G C, donc par le X Axiome en tranſpoſant les Raiſons. La 4e ſera à la 2 comme la 3e à la 1e G C : : F B. Autrement par le precedent Theoreme, les Raiſons $\frac{B}{F}$ & $\frac{C}{G}$: : $\frac{F}{F}\,\frac{B}{F}$ donc par le 4e Axiome G C : : F G.

Huit Dispositions.

Dans leſquelles 4 Grandeurs peuvent eſtre proportionnelles.

Il s'enſuit deux choſes de ce que deſſus : 1 que 4 grandeurs eſtant proportionnelles elles le ſont toûjours de quelque maniere qu'on les tranſporte, pourveu que les extrémes demeurent extrémes, & les moyens, moyens, ou que les extremes deviennent moyens, & les moyens extrémes.

2. Qu'il y a huit differentes Diſpoſitions, ny plus ny moins, dans leſquelles 4 Grandeurs peuvent eſtre proportionnelles. Les Voicy en les marquant par premiere, ſeconde, troiſiéme, & quatriéme ſelon qu'elles auroient eſté diſpoſées la 1 fois.

Hypotheſe

Hypotheſe 1 2 : : 3 4. } Premiere diſpoſition.
10 Axiome 3 4 : : 1 2. } Equivalente.
2 Theoreme 2 1 : : 4 3. } Permutation.
10 Axiome 4 3 : : 2 1. } Equivalente.
3 Theoreme 1 3 : : 2 4. } Alterne.
10 Axiome 2 4 : : 1 3. } Equivalente.
2 Theoreme 3 1 : : 4 2. } Permutation de l'Alterne.
10 Axiome 4 2 : : 3 1. } Equivalente.

On peut encore prouver ces 8 Diſpoſitions en cette maniere ayant mis en quarré les 4 Grandeurs proportionnelles : enſorte que dans la premiere diſpoſition, les antecedens ſoient au deſſus des conſequens.

Ainſi $\frac{B}{C}$ $\frac{F}{G}$.

Elles ſeront toûjours proportionnelles en les prenant deux à deux en meſme ſens de quelque maniere que ce ſoit, pourveu que ce ne ſoit point de coin en coin. Mais

1 De haut en bas par l'Hypotheſe.

2 De bas en haut *Permutando.*

3 De gauche à droite *Alternando.*

4 De droite à gauche *Permutando.* L'Alterne & chacune de ces diſpoſitions eſt double, parce que l'on peut commencer par laquelle on voudra de deux raiſons.

IV. THEOREME.

DES RAISONS PROPORTIONNELLES.

LES deux Theoremes precedens ſont vrais, des Raiſons proportionnelles auſſi-bien que des Grandeurs ; c'eſt à dire que ſi 4 Raiſons ſont proportionnelles, la 1ᵉ eſtant à la 2 comme la 3ᵉ à la 4ᵉ, elles le ſeront *Permutando* & *Alternando* ; c'eſt à dire que la 2 ſera à la premiere comme la 4ᵉ à la 3ᵉ, & que la premiere ſera à la 3ᵉ comme la 2 à la 4ᵉ. On ſe contentera de prouver l'Alterne qui eſt de plus grand uſage, ſoient les 4 Raiſons proportionnelles $\frac{2}{21}$ $\frac{3}{15}$: : $\frac{4}{7}$ $\frac{6}{5}$ qu'on appellera pour les marquer avec moins d'embarras $\frac{a}{\_}$ $\frac{e}{\_}$: : $\frac{i}{\_}$ $\frac{o}{\_}$ elles ne ſont proportionnelles que parce que la Raiſon qui eſt entre les deux premieres Raiſons [$\frac{a}{\_}$ & $\frac{e}{\_}$] eſt égale à la Raiſon qui eſt entre les deux dernieres [$\frac{i}{\_}$ & $\frac{o}{\_}$] donc $\frac{a}{e}$ $\frac{i}{o}$ donc comparant chacune de ces Raisons égales entre elles, avec la Raison qui est entre la 3 & la 2 Raisons; c'est à dire avec $\frac{I}{E}$. Il est clair par que $\frac{a}{e}\ \frac{i}{e} :: \frac{i}{o}\ \frac{i}{e}$

Or les deux premieres de ces 4 nouvelles Raisons ayant mesme consequent, sont comme les antecedens a & i, & les deux dernieres ayant le mesme antecedent, sont comme les consequens dans un ordre renversé; c'est à dire comme e & o, donc si A E :: I O A I :: E O.

V. Theoreme.

Si à 4 Grandeurs proportionnelles comme B C :: F G. on ajoûte deux quelconques, comme M & N. La raison de la 2 à la 5, est à la Raison de la 4 à la 6 comme la Raison de la 1 à la 5 est a, la Raison de la 3 à la sixiéme $\frac{C}{M}\ \frac{G}{N} :: \frac{B}{M}\ \frac{F}{N}$.

Donc la 1 & la 3 de ces 4 Raisons ayant mesme consequent, sont comme les antecedens; c'est à dire comme C est à B. Et il en est de mesme de la 2 & de la 4 qui sont comme G a F. Or par l'Hypothese & le 2d Theoreme C B :: G F. Donc la premiere de ces Raisons est à la 3, comme la 2 à la 4 donc *Alternando* la 1 est à la 2, comme la 3 à la 4.

VI. Theoreme.

Si à 4 Grandeurs proportionnelles comme B C :: F G, on ajoûte deux autres quelconques comme 3 & 2. la Raison de la 2 à la 5 est à la Raison de la 6 à la 3 comme la Riason de la 1 à la 5, est à la Raison de la 6 à la 4 $\frac{C}{M}\ \frac{N}{F} :: \frac{B}{M}\ \frac{N}{G}$.

Demonstration. La 1 & la 3 de ces 4 Raisons ayant même consequent, sont comme les antecedens par le IV. Axiome; c'est à dire comme C à B. Et la 2 & la 4 ayant mesme antecedent sont comme les consequens dans un ordre renversé [par le V Axiome,] c'est à dire comme G a F. Or par l'Hypothese & le 2 Theoreme C B :: G F dont la 1 de ces Raisons est à la 3 comme la 2 à la 4 ce qu'il falloit demonstrer.

Corollaire.

Dans l'une & l'autre de ces deux proportions de Raisons des deux Theoremes precedens, si l'on suppose que les deux premieres Raisons sont égales. Les deux dernieres le sont aussi, c'est à dire pour le 5 Theoreme. Si C M :: G N B M :: F N, & par le VI. Theoreme. Si C M :: N F B M :: N G. C'est une suitte évidente de ces deux Theoremes, mais comme on a accoustumé de proposer l'un & l'autre en d'autres termes nous en ferons le VII. & le VIII. Theoreme.

VII. Theoreme.

Si à 4 Grandeurs proportionnelles comme B C :: F G. On en ajoûte deux autres comme M N qui soient telles que la 2 est à la 5 comme la 4 à la 6. la 1 sera à la 5 comme la 3 à la *6*.

1 Hypothese B C :: F G.
2 Hypothese C M :: G N.
Consequences à prouver B M :: F N.

Demonstration pour la 1 Hypothese & le 4 Axiome. Ces 4 Raisons sont proportionnelles $\frac{B}{M}$ $\frac{C}{M}$ :: $\frac{F}{N}$ $\frac{G}{N}$. Or par la 2 Hypothese, la 2 Raison & la 4 [$\frac{C}{M}$ & $\frac{G}{N}$] sont égales, [car c'est ce que l'on suppose quand on dit que C M :: G N.] Donc par le Corollaire du VIII Axiome, la 1 Raison & la 3 $\frac{B}{M}$ & $\frac{F}{N}$ sont égales, c'est à dire que B M :: F N, ce qui est la consequence à prouver. Ce Theoreme, s'appelle *Æqualitas Ordinata*.

VIII. Theoreme.

Si 4 grandeurs proportionnelles comme B C :: F G, on en ajoûte deux autres comme X & Y qui soient telles que la 2, soit à la 5 comme la 6 à la 3. la premiere sera à la 5 comme la 6 à la 4.

1 Hypothese B C :: F G.
2 Hypothese C X :: Y F.
Consequences à prouver B X :: Y G.

Demonstration par la 1 Hypothese, & le IV & V Axiome $\frac{B}{X}$ $\frac{C}{X}$ :: $\frac{Y}{G}$ $\frac{Y}{F}$. Or par la 2 Hypothese, la seconde & la quatriéme Raison [$\frac{C}{X}$ & $\frac{Y}{F}$] sont égales ; car c'est ce que l'on suppose quand on dit que C X :: Y F, donc par le Corollaire du VIII Axiome, la 1 Raison & la 3 [$\frac{B}{X}$ & $\frac{Y}{G}$] sont égales aussi, c'est à dire que B X :: Y G, ce qui est la conſequence à prouver. Ce Theoreme s'appelle *Æqualitas Perturbata*.

AVERTISSEMENT.

ON propoſe encore ce dernier Theoreme d'une autre maniere qui revient à la meſme choſe, quoique cela paroiſſe fort different.

VIII. THEOREME.

Propoſé d'une autre maniere.

Y ayant 3 Grandeurs d'une part, & 3 de l'autre. Si la 1 d'une part eſt à la 2 comme la 2 de l'autre part eſt à la 3, & que la 2 d'une part ſoit à la 3 comme la 1 de l'autre part eſt à la 2, la 1 d'une part ſera à la 3, comme la 1 de l'autre part ſera à la 3ᵉ.

Soient les Grandeurs 3 d'une part B C X & 3 de l'autre. Y F G

1 Hypotheſe B C : : F G.

2 Hypotheſe C X : : Y F.

Conſequences à prouver B X : : Y G.

On voit clairement que ce ſont les meſmes Hypotheſes & la meſme conſequence à prouver que dans le VIII Theoreme, & qu'ainſi cela ſe prouvera de la meſme ſorte. Il faudra peut-eſtre mettre là les reciproques.

IX. THEOREME.

Si 4 Grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en comparant chaque antecedent plus ou moins, ſon conſequent avec ſon conſequent, c'eſt à dire que ſi la 1 eſt à la 2 comme la 3 eſt à la 4, la 1 plus ou moins, la 2 ſera à la 2 comme la 3 plus ou moins, la 4 à la 4; ce qui s'appelle ordinairement *Componendo*, s'il y a plus, & *Dividendo* s'il y a moins, quoique peut-eſtre par abus, comme nous le ferons voir plus bas, & il faut remarquer que pour y avoir moins chaque antecedent doit eſtre plus grand que ſon conſequent. Il faut prouver que B C : : F G. B plus ou moins C eſt à C comme ce que F plus ou moins G eſt à G; c'eſt que B $\mp$ C C : : F $\mp$ G G $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ eſtant égales par l'hypotheſe, & $\frac{C}{C} = \frac{G}{G}$, parce que ce ſont deux Raiſons d'égalité $\frac{B}{C} \mp \frac{C}{C}$ eſt égal à $\frac{F}{G} \mp \frac{G}{G}$. Or

$\frac{B}{C} \pm \frac{C}{C}$ n'eſt autre choſe que $\frac{B \pm C}{G}$ & $\frac{F}{G} \pm \frac{G}{G}$ n'eſt autre choſe que $\frac{F \pm G}{G}$ donc $\frac{B \pm C}{G}$ eſt égal à $\frac{F \pm G}{G}$, c'eſt à dire que la raiſon B plus ou moins C à C eſt égale à la Raiſon de F plus ou moins G à G, donc $B \pm C\, C :: F \pm G\, G$ ce qu'il falloit demonſtrer.

X. Theoreme.

Si 4 Grandeurs ſont proportionnelles, & que chaque antecedent ſoit plus grand que ſon conſequent, le 1 antecedent eſt á la quantité dont il ſurpaſſe ſon conſequent en meſme Raiſon que le ſecond antecedent eſt à la quantité dont il ſurpaſſe ſon conſequent. Cette quantité s'appelle la difference de l'antecedent d'avec ſon conſequent, comme nous avons déja veu, ſoit $B\, C :: F\, G$, & que chaque antecedent ſoit plus grand que le conſequent. Je dis que $B\, B - C :: F\, F - G$ pour le montrer, il ne faut que prouver $B - C\, B :: F - G\, F$; car ſi cela eſt, l'autre ſera vray *Permutando*. Or ce dernier eſt clair; car la Raiſon de $\frac{B - C}{B}$ eſt la meſme choſe que $\frac{B}{B}$ moins $\frac{C}{B}$ & $\frac{F - G}{F}$ eſt la meſme choſe que la Raiſon $\frac{F}{F}$ moins $\frac{G}{G}$. Or $\frac{B}{B} = \frac{F}{F}$ & $\frac{C}{B} = \frac{G}{F}$ donc $\frac{B - C}{B} = \frac{F - G}{F}$ donc $B - C\, B :: F - G\, F$ & *Permutando* $B\, B - C :: F\, F - G$, ce qu'il falloit demonſtrer.

XI. Theoreme.

Lors qu'on a deux proportions que je nommeray A & E. Si 3 termes de l'une ſont égaux à 3 termes de l'autre, chacune à chacune, & dans le meſme ordre [c'eſt à dire le 1 au 1, le 2 au 2, &c.] Les deux qui reſteront da part & d'autre ſeront auſſi égaux entre eux.

Soit la proportion A B D :: L M

& la proportion E $\beta\ \delta :: \lambda\ \mu$. Je dis que ſi le premier terme d'A eſt égal au 1 terme d'E, & le 2 au 2, & le 3 au 3, les deux 4 le ſeront auſſi; car par le 2 Axiome, les 2 premieres Raiſons d'A & d'E ſont entre elles comme les deux dernieres.

Or les deux premieres ſont égales par le 8 Axiome, parce que par l'Hypothese, les antecedens sont égaux, & leurs consequens aussi. Il faut donc aussi que les deux dernieres Raisons soient égales, c'est à dire que L M : : $\lambda\ \mu$. Or les deux antecedens de ces deux Raisons qui sont L & λ sont égaux par l'Hypothese. Donc par le VIII Axiome, les deux consequens M & μ le sont aussi, ce qu'il falloit demonstrer.

On prouvera sans peine la mesme chose, si c'est l'égalité d'un autre terme d'A à un semblable d'E, comme du 2 au 2 qui soit supposé inconnu ; car alors l'égalité de deux dernieres Raisons qui sera manifeste par l'Hypothese, prouvera celle des deux premieres : & l'égalité des deux premieres, dont les antecedens sont égaux par l'Hypothese prouvera l'égalité des deux consequens qui seront le 2 terme D A, & le 2 D E.

I. Corollaire.

Ce theoreme ne laisse pas d'estre vray quand les 3 termes d'une proportion égaux chacun à chacun a 3 termes, de l'autre ne seroient pas dans le mesme ordre dans l'une & dans l'autre, pourveu que les deux moyens de l'une soient égaux, ou aux deux moyens de l'autre, ou aux 2 extremes ; car alors il sera aisé en transportant les termes de l'une, de faire que les termes égaux se repondent dans l'une & dans l'autre selon ce qui a esté dit.

II. Corollaire.

Si deux proportions A & E estoient continuës, les deux moyennes proportionnelles estant égales, l'un des extremes d'A, ne pourroit estre égal à l'un des extrémes d'E, que l'autre extreme d'A ne soit égal à l'autre extreme d'E.

XII. Theoreme.

Plusieurs Raisons estant égales, tous les antecedens sont à tous les consequens, comme un des antecedens à son consequent comme deux Raisons estant égales, l'antecedent est à l'antecedent, comme le consequent au consequent ; ainsi 4 Raisons [ou tant que l'on voudra] estant égales, le premier antecedent est au derniere antecedent, comme le 1 consequent au dernier, & le 2 antecedent, au dernier antecedent comme le 2 consequent au dernier, & ainsi la suitte jusques au dernier antecedent qui sera à soy-même, comme le dernier consequent à soy-mesme.

Donc les 4 Raisons de chacun des quatre antecedens au dernier antecedent, sont égales aux 4 Raisons de chacun des 4 consequens au dernier consequent, chacune à chacune, c'est à dire que si ces 4 Raisons égales, sont $\frac{B\ C\ D\ F}{A\ E\ I\ O}$ $\frac{B\ C\ D\ F}{F\ F\ F\ F}$ seront égales chacune à chacune à $\frac{A\ E\ I\ O}{O\ O\ O\ O}$.

Or ces Raisons des 4 antecedens au dernier sont la mesme chose que la Raison des 4 antecedens, joints avec le signe de plus au dernier antecedent, c'est à dire que $\frac{B + C + D + F}{F}$

Et les 4 Raisons des 4 consequens au dernier que l'unique Raison $\frac{A + C + I + O}{O}$

Donc B + C + D + F est à F, comme A + E + I + O est à O.

Donc *Alternando*, les 4 antecedens sont aux 4 consequens, comme F dernier antecedent est à O dernier consequent.

SECTION DEUXIE'ME.

Des Raisons tant d'égalité que d'inégalité qui peuvent estre entre diverses Raisons, quand les termes de l'une sont multipliables par ceux de l'autre.

AVERTISSEMENT.

On croit ordinairement que les grandeurs de divers genre qu'on appelle Heterogenes, ne se peuvent pas multiplier, cela ne me paroît pas vray, on a besoin d'explication; car les nombres sont d'un autre genre que les autres grandeurs comme l'étenduë & le temps, & neantmoins il est clair que les nombres *multiplient toutes sortes de grandeurs, & que c'est une veritable Multiplication, quand je dis 6 toises ou 6 heures, puisque c'est prendre une toise ou une heure autant de fois qu'il y a d'unitez dans 6, en quoy consiste la Multiplication.*

De plus ce qui ne se peut multiplier par la nature, se peut multiplier par une fiction d'esprit, par laquelle la verité se découvre aussi certainement que par les Multiplications réelles; ainsi voulant sçavoir quel chemin fera en dix heures celuy qui a fait 24 lieuës en 8 heures, je multiplie par une fiction d'esprit 10 heures par 24 lieuës, ce qui me donne un produit imaginaire d'heures & de lieuës de 240 qui estant divisé par 8 heures me donne 30 lieuës. On multiplie aussi par la mesme fiction d'esprit des surfaces par des surfaces, quoique cela donne pour produit une étenduë de 4 dimensions qui ne peut estre dans la nature, & neantmoins on ne laisse pas de decouvrir beaucoup de veritez par ces sortes de multiplications.

Ie sçay bien qu'on dit que c'est parce que ces produits imaginaires se peuvent reduire en lignes qui auront mesme raison entre celles que ces produits; mais il n'y a guere d'apparence que la verité de ces sortes de preuves dependent de ces lignes, qui sont visiblement étrangeres à ces demonstrations: quoy qu'il en soit ne me voulant broüiller avec personne, chacun prendra ce que je diray des Raisons qui se trouvent entre diverses raisons qu'on ne connoît qu'en multipliant les termes de l'un par ceux de l'autre, selon l'opinion qu'il aura que les termes de certaines raisons, sont ou ne sont pas multipliables les uns par les autres; car ce n'est que dans cette supposition que tout ce que je m'en vais dire se doit entendre.

I. Lemme.

On a déja veu dans ce Livre precedent que deux grandeurs ont été multipliées l'une par l'autre, quand l'unité est à l'une comme l'autre est au Produit, c'est à dire ce qui s'est fait par cette Multiplication; Ainsi 3 multipliez par 4 donnent 12, parce que 1 3 :: 4 12, & un

tiers

tiers multiplié par un quart donne une douziéme, parce que 1 $\frac{1}{3}$ :: $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{12}$ l'unité estant triple du tiers comme le quart est triple du douziéme, & de mesme generalement quand B & X estant multipliez donnent B X. Il faut que I X :: B. B X.

II. LEMME.

IL s'ensuit de là que toute Grandeur estant multipliée par un autre, la Grandeur simple est à soy-mesme multipliée comme l'unité est à l'autre Grandeur par laquelle elle a esté multipliée B B X :: I X. Ce n'est que transporter les deux Raisons qui se doivent trouver dans toute la Multiplication.

III. LEMME.

DEUX Grandeurs estant multipliées par une mesme Grandeur, si elles sont égales, leurs Produits seront égaux, & si les Produits sont égaux, elles seront égales, B & D deux Grandeurs égales. Je dis que B X & D X sont égaux, car par le premier Lemme

$\text{IX.}\left\{\begin{array}{l} :\,.\ \text{B.X} \\ :\,.\ \text{D.X} \end{array}\right.$ donc B B X :: D D X. Donc si les Grandeurs B & D sont égales, les Produits B X & D X le sont aussi par le VIII. Axiome, & si les Produits B X & D X sont égaux, les Grandeurs B & D le sont aussi par le même VIII. Axiomme.

IV. LEMME.

LORSQUE deux Grandeurs estant multipliées l'une par l'autre font un Produit, & que 2 autres en font une autre, comme par exemple. $\begin{smallmatrix} B & S \\ D & T \end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix} B & S \\ D & T \end{smallmatrix}$. On y peut remarquer 3 sortes d'égalitez. La 1e & la 2e les égalitez de chacune des deux Grandeurs d'une part à chacune des Grandeurs de l'autre de B à D & S à T. La 3e égalité des deux Produits B S & D T : or deux de ces égalitez estant données donnent la 3e, c'est à dire que si chacune des deux Grandeurs d'une part est égale à chacune des deux Grandeurs de l'autre les Produits sont égaux.

2. Et si ce sont les 2 Produits qui sont supposez égaux, & qu'une des Grandeurs d'une part, soit égale à l'une de

l'autre part, les deux autres Grandeurs sont égales.

Preuve du premier Cas, la double Hypothese de B égal à D & d'S, égale à T fait voir par le 3ᵉ Lemme que B S = D S = D T, donc B S = D T ce qu'il falloit demonstrer.

Preuve du 2ᵉ Cas par la double Hypothese de B S égal à D T, & de B égal à D, en se souvenant du 3ᵉ Lemme B S = D T = B T, donc B S = B T, donc le 3ᵉ Lemme S = T ce qu'il falloit demonstrer.

I. Proposition Generale.

Si les deux termes d'une Raison sont multipliez par une mesme grandeur la Raison des termes simples est égale à celle des termes multipliez B C : : B M. C M ou $\frac{B}{C} = \frac{BM}{CM}$

I. Demonstration.

Par le 2 Lemme $\left.\begin{array}{l}B\ BM.\\ C\ CM.\end{array}\right\}$ I M donc B B M C C M, donc *Alternando* B C : : B M C M.

II. Demonstration.

Toutes les Aliquotes pareilles des antecedens B & B M sont également continuées dans les consequens C & C M.

Car soit X, l'Aliquote quelconque de B, & si l'on veut la centiéme, 100 X seront la mesme chose que B.

Donc par le 1ᵉʳ Lemme ce sera la mesme chose de multiplier cent X par M que de multiplier B par M, Donc B M & 100 fois X M sont la mesme chose, donc X & M sont les Aliquotes pareilles des antecedens B C B M.

Supposé maintenant que X soit danc C ou tant de fois sans reste ou toûjours avec quelque reste qu'il y soit, par exemple 87 precisement ou 87 fois plus R.

Ce sera la mesme chose de multiplier C par M que de multiplier par M, ou 87 fois X précisement [ce qui donne 87 X M] ou 87 X + R [ce qui donne 87 X M + R M] Donc C M est la mesme chose que ou

$\left\{\begin{array}{l}87\ XM\\ 87\ XM + RM.\end{array}\right.$

Comme donc il est clair par les proportions naturellement connuës, & par le 1r Theoreme que 100 X 87 X :: 100 X M 87 X M ou 100 X 87 X + R :: 100 X M 87 X M + R M. Il est clair aussi que B [égal à 100 X] est à C [égal à 87 X ou à 87 X + R] comme B M [égal à 100 X M] est à C M [égal à 87 X M ou à 87 X M + R M, c'est à dire que B.C :: B M. C M ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

QUAND des Grandeurs de plusieurs dimensions, & qui en ont autant l'une que l'autre font une Raison, les mesmes lettres qui se trouveront dans l'une & dans l'autre de ces Grandeurs, estant ostées de part & d'autre une pour une, ce qui restera, donnera la mesme Raison en termes plus simples que s'il ne restoit rien, ces Raisons seroient entre elles comme un à un B M. C M :: B. C. B B. B C :: B. C; B C M. B C N :: M. N; D F G. D P G :: F G. P G; R S T. T R S :: T. T.

PROBLEME.

AYANT deux Raisons quelconques, faire que demeurant les mesmes, elles ayent mesme consequent : Il ne faut que multiplier les deux termes de chacune par le consequent de l'autre.

Par là elles demeureront chacune de mesme qu'elles estoient auparavant par la proposition precedente, & elles auront pour consequent commun les produits des deux consequens $\frac{B}{C}$. $\frac{M}{N}$ :: $\frac{BN}{CN}$. $\frac{CM}{CN}$.

II. PROPOSITION GENERALE.

Pour connoistre la Raison que des raisons quelconques ont entres elles.

DEUX Raisons quelconques sont entre elles, comme le Produit des extremes, c'est à dire du premier antecedent par le 2 consequent] est au Produit des moyens, c'est à dire du 2 antecedent par le premier consequent] $\frac{B}{C}$. $\frac{M}{N}$: : B N. C M. car par le precedent Probleme, on reduit les deux Raisons données à n'avoir qu'un mesme consequent en donnant pour antecedent à la premiere le Produit des extremes, & à la seconde le Produit des moyens & à chacune pour consequent le Produit des consequens.

Donc par le 5[e] principe n'ayant qu'un consequent, elles sont comme les antecedens, & par consequent comme le Produit des extrémes qui est l'antecedent de la premiere au Produit des moyens qui est l'antecedent de la seconde. $\frac{B}{C}\ \frac{M}{N} :: \frac{BN}{CN}\ \frac{CM}{CN} :: BN.\ CM.$

I. Theoreme.

Deux Raisons quelconques sont entre elles comme la Raison des antecedens à celle des consequens $\frac{B}{C}\ \frac{M}{N} :: \frac{B}{M}\ \frac{C}{N}$.

Car cette nouvelle comparaison laissant les mesmes extremes B & N ne fait que transposer les moyens C & M, donc ces deux nouvelles Raisons sont encore entre elles comme le Produit des mesmes moyens

$$\left.\begin{matrix}\frac{B}{C}\ \frac{M}{N}.\end{matrix}\right\} :: BN.CM. \quad \left.\begin{matrix}\frac{B}{M}\ \frac{C}{N}.\end{matrix}\right\}$$

II. Theoreme.

Deux Raisons quelconques sont entre elles, comme ces mesmes Raisons renversées prises dans un ordre renversé.

J'appelle Raisons renversées quand de l'antecedent on en fait le consequent, & du consequent l'antecedent. Je dis donc que $\frac{B}{C}\ \frac{M}{N} :: \frac{N}{M}\ \frac{C}{B}$; car il faut prendre ces Raisons renversées dans un ordre renversé, afin que ce soit toûjours les mesmes extremes & les mesmes moyens.

$$\left.\frac{B}{C}\ \frac{M}{N}\right\} BN.\ CM. \quad \left.\frac{N}{M}\ \frac{C}{B}\right\}$$

Avertissement.

Toutes les Raisons d'égalité estant égales, elles ont toutes mesme raison à quelque raison que ce soit, & ainsi on peut prendre celle que l'on veut à discretion, & les demonstrations pour l'ordinaire en sont plus sensibles, quand on prend celle du consequent au consequent de la Raiſon d'inégalité, avec laquelle on compare cette Raiſon d'égalité.

III. Theoreme.

La Raiſon d'égalité eſt à une Raiſon quelconque d'inégalité, comme le conſequent de la Raiſon d'inégalité eſt à ſon antecedent.

1 Demon. $\frac{X}{X}\ \frac{B}{C}$ :: XC. XB :: CB.

2 Demon. $\frac{C}{C}\ \frac{B}{C}$ :: CB.

Et toute Raiſon d'inégalité eſt à la Raiſon d'égalité, comme l'antecedent de la Raiſon d'inégalité eſt à ſon conſequent $\frac{B}{C}\ \frac{X}{X}$ :: BX. CX :: BC.

Autrement $\frac{B}{C}\ \frac{C}{C}$ :: BC.

I. Corollaire.

La Raiſon d'égalité eſt plus grande qu'aucune Raiſon de moindre inégalité, & plus petite qu'aucune Raiſon de plus grande inégalité, car elle eſt à chacune, comme le conſequent de chacune eſt à ſon antecedent, donc la Raiſon d'égalité eſt plus grande qu'aucune Raiſon de moindre inégalité.

On prouvera de la meſme ſorte qu'elle eſt plus petite qu'aucune Raiſon de plus grande inégalité, parce que le conſequent de toute Raiſon de plus grande inégalité eſt plus petit que ſon antecedent.

Cela ſeroit encore plus groſſierement en prenant pour Raiſon d'égalité celle du conſequent au conſequent de la Raiſon, avec laquelle on la compare; car il eſt clair que la Raiſon de 4 à 4 eſt plus grande que la Raiſon de 3 à 4, parce qu'ayant meſme conſequent celle d'égalité à un plus grand antecedent $\frac{4}{4}.\frac{3}{4}$, & il eſt clair auſſi par le même principe que la Raiſon de 3 à 3 eſt plus petite que la Raiſon de 4 à 3 $\frac{3}{3}\ \frac{4}{3}$.

II. Corollaire.

La Raiſon d'égalité eſt moyenne proportionnelle entre deux Raiſons, dont l'une eſt l'inverſe de l'autre, ou l'inverſe d'une Raiſon égale à l'autre $\frac{B}{C}.\frac{C}{C}$ :: $\frac{B}{B}.\frac{C}{B}$; que ſi $\frac{F}{G}$ eſt égale à $\frac{B}{C}$, $\frac{G}{F}$ ſera auſſi égale à $\frac{C}{B}$ & par conſequent $\frac{B}{C}.\frac{C}{C}$ :: $\frac{F}{F}.\frac{G}{F}$.

III. COROLLAIRE.

LA Raiſon de moindre inégalité eſt d'autant plus grande, & la raiſon de plus grande inégalité eſt d'autant plus petite que l'une & l'autre approche plus de la Raiſon d'égalité. J'en laiſſe à trouver la demonſtration qui ſe tire ſans peine du Theoreme precedent.

IV THEOREME.

SI les deux termes d'une Raiſon ſont multipliez par deux nouvelles grandeurs, l'antecedent par l'une, & le conſequent par l'autre.

La Raiſon des termes ſimples, eſt à la Raiſon des termes multipliez, comme la Grandeur qui a multiplié l'antecedent, à celle qui a multiplié le conſequent $\frac{bm}{cn}$ $\frac{b}{c}$ :: B M C N B :: M N.

COROLLAIRE.

LA Raiſon des Racines eſt à la Raiſon des Quarrez comme la derniere Racine eſt à la premiere $\frac{b}{c}$ $\frac{bb}{cc}$ :: C B, & la Raiſon des Quarrez eſt à celle des Racines, comme la premiere racine eſt à la derniere $\frac{bb}{cc}$ $\frac{b}{c}$ :: B C.

AVERTISSEMENT.

ON jugera ſans peine par là de ce qu'eſt la Raiſon des Racines à la Raiſon des Cubes.

V. ~~III.~~ THEOREME.

SI ayant deux Raiſons quelconques, j'en fais une troiſiéme qui ait pour entecedent le produit des antecedens des deux premieres, & pour conſequent le produit de leurs conſequens, chacune des premieres eſt à la troiſiéme comme le conſequent de l'autre eſt ſon antecedent, c'eſt à dire que la premiere eſt à la troiſiéme, comme le conſequent de la ſeconde eſt à ſon antecedent, & la ſeconde eſt à la troiſiéme, comme l'antecedent de la premiere eſt à ſon antecedent, ſoient les deux Raiſons quelconques, $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$ & la troiſiéme $\frac{bm}{cn}$; $\frac{b}{c}$. $\frac{bm}{cn}$ :: N.M, & $\frac{m}{n}$. $\frac{bm}{cn}$ :: C.B. C'eſt la meſme choſe que le ſecond Theoreme propoſé autrement.

VI. THEOREME.

SI deux Raiſons ſont égales, le Produit des extrémes eſt égal au Produit des moyens : & ſi ces deux Produits ſont égaux, les Raiſons ſont égales. Cela ſe prouve ordinairement ainſi, ſoient les deux Raiſons $\frac{b}{c}$ $\frac{f}{g}$: On compare le Produit des extremes B G avec le produit des conſequens C G & le Produit des moyens avec le meſme Produit des conſequens C G, & on raiſonne ainſi,

B G. C G : : B C.
& C F. C G : : F G.

Donc ſi les Raiſons $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ ſont égales, les Raiſons $\frac{b}{c}$ $\frac{g}{g}$ ſeront égales auſſi, & ces deux dernieres raiſons ayant un meſme conſequent, elles ne ſçauroient eſtre égales que leurs antecedens B G & C F ne ſoient égaux.

Or de ces deux antecedens B G eſt le Produit des extremes, & C F le produit des moyens. Donc ſi les Raiſons $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ ſont égales, le Produit des extremes ſera égal au Produit des moyens.

Que ſi au contraire on ſuppoſe que B G & C F ſoient égaux, ils ne pourront avoir qu'une meſme Raiſon à un meſme conſequent C G par S, donc les deux Raiſons $\frac{bg}{cg}$ $\frac{cf}{cg}$ ſont égales, & pa conſequent les deux $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ auſquelles deux autres ſont égales chacune à chacune, ſeront égales : auſſi cette demonſtaction eſt tres-ingenieuſe & tres-bonne, mais la noſtre eſt beaucoup plus courte & plus claire ; car par la ſeconde propoſition generale, deux Raiſons quelconques ſont entre elles, comme le Produit des extremes, eſt au produit des moyens.

Donc ſi elles ſont égales, ces deux Produits ſont égaux, & ſi ces deux Produits ſont égaux, elles ſont égales.

I. COROLLAIRE.

LES 4 Termes d'une propoſition ſont toûjours proportionnels en quelque façon qu'on les diſpoſe, pourveu que les extrémes demeurent toûjours extrêmes, & les moyens moyens, ou que les deux extrémes deviennent moyens, & les deux moyens extrémes.

Car tant que cela ſera dans toutes ces differentes diſpoſitions, le produit des extrémes ſera toûjours égal au Produit des moyens, & par conſequent les 4 termes ainſi diſpoſez ſeront toûjours proportionnels.

II. COROLLAIRE.

LE Produit des moyens [ou celuy des extrémes qui luy eſt égal, eſt moyen proportionnel entre le produit des antecedens & celuy des conſequens, c'eſt à dire que ſi

BC :: FG ;
BFCF :: CF CG, car le produit des exremes B F.C G eſt égal au produit des moyens C F CF. C F eſtant commun à l'un & à l'autre, & B G qui reſte du premier étant égal à l'autre C F du ſecond.

III. COROLLAIRE.

LES Quarrés des deux termes de chaque Raiſon, ſont entre eux comme le produit des antecedens eſt au produit des conſequens. B B. C C : : B F. C G ;

car B B. C G = C C B F.

C B eſtant commun à l'un & à l'autre, & B G du premier eſtant égal à C F du ſecond.

IV. COROLLAIRE.

4. Grandeurs eſtant proportionnelles, leurs Quarrez le ſont auſſi. Si B C : : F G.

B B CC : : F F G G ; car BB GG = CC FF.

le prémier eſtant le Quarré de B G, & le ſecond de C F.

V. COROLLAIRE.

QUATRE nombres eſtant proportionnels, le produit des quatre multipliez l'un par l'autre eſt neceſſairement un nombre quarré, qui a pour ſa racine le Produit des extrémes ou celui des moyens qui eſt la meſme choſe ; car le produit des quatre nombres proportionnels, eſt la même choſe que le produit des extrémes multipliez par le produit des moyens 2. 3 : : 4. 6. 2 fois 6 [12] par 3 fois 4 [12] font 12 fois 12 ; c'eſt à dire 144, & c'eſt abſolument la meſme choſe que de dire 2 fois 3 ſont 6, 4 fois 6 ſont 24, 6 fois 24 ſont 144.

VI. COROLLAIRE.

ON prouve aiſément par ce 4 Theoreme, ce qui a eſté dit cy-deſſus, que quatre grandeurs eſtant proportionnelles comme B C : : F G. ſi on en ajoute 2 autres quelconques

conques comme M & N, les quatre Raiſons ſuivantes ſont proportionnelles $\frac{c}{m}\ \frac{n}{f} :: \frac{b}{m}\ \frac{n}{g}$; car par la propoſition generale, les deux premieres Raiſons ſont entre elles comme C F eſt à M N, & les deux dernieres comme B G eſt à M N. Or par le Theoreme precedent C F $=$ B G donc C F. M N :: B G. M N; donc $\frac{c}{m}\ \frac{n}{f} :: \frac{b}{m}\ \frac{n}{g}$ ce qu'il falloit demonſtrer.

V. Theoreme.

Si les deux moyens d'une proportion ſont égaux aux deux moyens d'une autre proportion, & que l'un des extrémes de l'un ſoit égal à l'un des extrémes de l'autre, l'autre extréme ſera auſſi à l'autre extréme, & il n'importe ni que les deux moyens ſuppoſez égaux de part & d'autre ne ſoient pas placez de meſme dans ces deux proportions [comme ſi c'eſt le 1 des moyens de la proportion A qui ſoit égal au 2 des moyens de la proportion C, & le ſecond d'A au premier de C] ni que ce ſoit le 1 des extrémes d'A qui ſoit ſuppoſé égal au dernier de C, les 2 extrémes d'A & de C n'en ſeront pas moins égaux.

Demonſtr. les 2 moyens d'A eſtant égaux aux 2 moyens D C. Le produit des moyens d'A ſera égal au Produit des moyens de C par le 2 Lemme. Or dans chaque proportion le Produit des moyens eſt égal au produit des extrémes.

Donc les Produits des extrémes d'A & de C ſont égaux auſſi.

Or par le 2 Lemme, ſuppoſé que l'un des extrémes d'A quel qu'il ſoit, ſoit égal à l'un des extrémes de C quel qu'il ſoit auſſi, l'autre extréme d'A, ſera égal à l'autre extreme de C.

Corollaire.

Si A & C eſtoient deux proportions continuës, les deux moyennes proportionnelles eſtant égales, l'un des extrémes d'A, ne pourroit eſtre égal à l'un des extrémes de C, que les deux autres extrémes d'A & de C ne fuſſent aussi égaux, ce qui est prouvé dans ce Theoreme & ce Corollaire, l'a déja esté plus haut d'une aute façon.

DES RECIPROQUES.

Deux Grandeurs sont dites estre reciproques à deux autres, quand les unes sont les extrémes d'une proportion, & que les autres en sont les moyens. Ainsi dans la proportion B C : : F G. B & G sont reciproques à C & F, & il est clair, par ce qui vient d'estre dit, que quand deux proportions sont reciproques à deux autres, le Produit des unes est égal au produit des autres. Que s'il n'y a que trois Grandeurs dans une proportion, parce qu'elle est continuë, celui du milieu qui sert de consequent à la premiere Raison, & d'antecedent à la seconde, est appellé moyenne proportionnelle, & alors le Quarré de cette Grandeur est égal au Produit des autres Grandeurs. Si B.D : : D H. BH = DD.

VI. Theoreme.

Si deux Grandeurs chacune de deux dimensions sont égales : l'une des dimensions de la premiere est à l'une des dimensions de la seconde, comme l'autre dimension de la seconde est à l'autre dimension de la premiere. Si B G est égal à C F, B sera à C comme F à G, c'est une suitte manifeste de ce qui vient d'estre dit.

VII. Theoreme.

Si deux Grandeurs d'une part, & deux autres d'une autre, sont chacune reciproques à deux autres Grandeurs, elles seront reciproques entre elles. Si B & G sont reciproques à P & Q; [c'est à dire si B P : : Q G] & que S T soient aussi reciproques à P & Q; [c'est à dire si S P : : Q T] B & G seront aussi reciproques à S T; [c'est à dire que B S : : T G.] Car le premier ne peutestre que le Produit B G ne ſoit égal au Produit P Q, & le ſecond ne peut eſtre que le Produit S T ne ſoit égal au meſme Produit P Q, auquel le Produit B G eſtoit égal, donc les deux Produits B G & S T ſont égaux entre eux, parce qu'ils ſont chacun égal à un troiſiéme, dont les Grandeurs B & G ſont reciproques aux Grandeurs S & T.

Corollaire.

Quatre Grandeurs eſtant proportionnelles, ſi la 1 eſt à une 5 comme une 6 eſt à la 4, la 2 ſera auſſi à la 5, comme la 6 à la 3 ; car il eſt clair par l'Hypotheſe que la 1 & la 4 ſont reciproques à la 5 & à la 6. Or la 2 & la 3 ſont auſſi reciproques à la 1 & à la 4 : elles le ſont donc auſſi à la 5 & à la 6. Soient les 4 proportionnelles B C F G, & les deux autres P Q.

Si B C : : F G.
& B P : : Q G.
C P : : Q F.

NOUVEAUX ELEMENS
DE
GEOMETRIE.
LIVRE TROISIE'ME.

DE LA RAISON COMPOSE'E.

Où l'on fait voir aussi comment on peut faire sur les Raisons les quatre Operations communes Ajoûter, Soustraire, Multiplier, Diviser.

I. *ON ne s'est point encore avisé que je sçache de faire sur les† 4 Operations communes Ajoûter, Soustraire, Multiplier, Diviser, ce que l'on fait sur les autres Grandeurs, cependant la maniere dont nous avons expliqué la Nature de la Raison dans le Livre precedent, fait voir que cela se peut faire sans peine (& voicy comment.)*

† Raisons les

I. LEMME.

Pour l'Addition & Soustraction.

II. Nous avons déja veu N. que quand deux Raiſons ont le meſme conſequent, la Raiſon qui a pour antecedent le premier antecedent plus ou moins le ſecond, & pour conſequent le conſequent commun, eſt ou la ſomme de deux Raiſons, c'eſt à dire l'une plus l'autre ou la difference de ces deux Raiſons, c'eſt à dire la premiere moins la ſeconde. $\frac{B}{X}$ $\frac{D}{X}$ $\frac{B+D}{X}$ $\frac{B-D}{X}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5+3}{7}$ $\frac{5-3}{7}$ delà s'enſuit.

Addition.

Pour ajoûter enſemble deux Raiſons quelconques, il ne faut que les reduire à un meſme conſequent. La Raiſon des nouveaux antecedens joints par le ſigne de Plus au commun conſequent, eſt la ſomme de ces deux Raiſons données, ou l'une ajoûtée à l'autre. III.

$$\left\{ \frac{B}{D} \quad \frac{S}{T} \quad \frac{BT}{DT} \quad \frac{DS}{DT} \quad \frac{BT+DS}{DT} \right.$$

autrement la $\left\{ \frac{7}{5} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{63}{45} \quad \frac{20}{45} \quad \frac{63+20}{45} \right.$

Raiſon qui a pour antecedent le Produit des extrémes, plus le produit des moyens, & pour conſequent le Produit des conſequens, eſt la ſomme de ces deux Raiſons données.

Soustraction.

Pour ſouſtraire une Raiſon quelconque d'une autre qui ſoit plus grande. Il faut de meſme les reduire à un meſme conſequent, & alors la Raiſon du plus grand antecedent moins le plus petit au conſequent, eſt la difference de ces deux Raiſons, où la plus grande moins la plus petite $\frac{b}{d}$ $\frac{s}{t}$ $\frac{bt}{dt}$ $\frac{ds}{dt}$ $\frac{bt-ds}{dt}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{63-20}{45}$. IV.

Autrement aiant mis la plus grande Raiſon la premiere, la Raiſon qui aura pour antecedent le produit des extremes moins le produit des moyens, & pour conſequent le Produit des conſequens, eſt la difference de ces deux Raiſons ou la plus grande moins la plus petite.

Avertissement.

On voit par là que†les Geometres appellent Compoſition & Diviſion, quand ils diſent que quatre Grandeurs eſtant pro- † ce que *portionnelles* Componendo *ou* Dividendo. *La* 1 *plus ou moins la* 2 *est à la* 2, *comme la* 3 *plus ou moins la* 4 *est à la* 4, *a dû estre plûtost appellé Addition & Soustraction, & qu'on a dû dire que cela se fait* ad dendo *ou* subtrahendo, *& c'est ainsi que nous avons resolu de l'appeller dans le reste de ces Elemens.*

II. Lemme.

V. Pour la Multiplication & la Division comme dans les Grandeurs absoluës, on a multiplié deux Grandeurs l'une par l'autre, quand l'unité est à l'une de ces Grandeurs, comme l'autre est à ce qui est né de cette Multiplication qu'on appelle le Produit, & qu'on a divisé une Grandeur par une autre, quand la Grandeur qui divise est à celle à diviser, ce qu'est l'unité à ce qui est né de cette Division qu'on appelle le Quotient.

Il faut aussi que dans les Grandeurs relatives qui s'appellent Raisons, on ait multiplié deux Raisons l'une par l'autre, quand ce qui tient lieu d'unité dans ces Grandeurs relatives est à l'une des Raisons, comme l'autre est à la Raison qui est née de cette Multiplication.

Et qu'on ait divisé une Raison par une autre quand la Raison qui a dû diviser est à celle à diviser, comme est ce qui tient lieu d'unité dans ces Grandeurs relatives à la Raison qui est née de cette Division.

Or ce qui tient lieu d'unité dans les Grandeurs relatives, c'est à dire dans les Raisons, ne peut estre autre chose que la Raison d'égalité qui est celle où l'antecedent est égal au consequent comme $\frac{6}{6}$ $\frac{1}{1}$. Cela est clair de soy-mesme, & se prouve encore par l'analogie des fractions qui ont un parfait raport aux Raisons comme on l'a déja souvent observé.

Car dans les fractions, celle dont le numerateur est le mesme nombre que le dénominateur [ce qui revient entierement à la raison d'égalité] est la mesme chose que l'unité, deux moitiés $\frac{2}{2}$, trois tiers $\frac{3}{3}$, quatre quarts $\frac{4}{4}$ n'estant que l'unité diversement exprimée.

Cela eſtant ſuppoſé, il eſt tres-facile de multiplier & de diviſer les Raiſons.

Multiplication de deux Raisons.

On a multiplié deux Raiſons quand on a fait une Raiſon qui a pour antecedent le produit des antecedens & pour conſequent le produit des conſequens, ayant les deux Raiſons $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$, elles ſe trouveront multipliées par la Raiſon de $\frac{bm}{cn}$. VI.

Pour le prouver il ne faut que montrer que la Raiſon d'égalité eſt à la Raiſon $\frac{b}{c}$ comme la Raiſon $\frac{m}{n}$ eſt à la Raiſon $\frac{bm}{cn}$; c'eſt à dire que $\frac{c}{c}.\frac{b}{c}::\frac{m}{n}.\frac{bm}{cn}$.

Ce qui eſt facile: Car par | $\frac{c}{c}.\frac{b}{c}::$ c.b. | II. 73)

& par || $\frac{m}{n}.\frac{bm}{cn}::$ c.b. || II. 69 et 67)

donc $\frac{c}{c}.\frac{b}{c}::\frac{m}{n}.\frac{bm}{cn}$.

Division d'une Raison par une autre.

On a diviſé une Raiſon par une autre, quand ayant mis la premiere celle qui doit diviſer l'autre, on a fait une Raiſon qui a pour antecedent le produit des moyens; c'eſt à dire le produit du conſequent de la Raiſon qui tient lieu de diviſeur par l'antecedent de l'autre & pour le conſequent le produit des extremes: ainſi $\frac{b}{c}$ a diviſé $\frac{m}{n}$ quand on a la Raiſon de $\frac{cm}{bn}$. Pour le prouver il faut demonſtrer que la Raiſon $\frac{b}{c}$ eſt à la Raiſon $\frac{m}{n}$ comme la Raiſon d'égalité eſt ~~eſt~~ à la Raiſon de $\frac{cm}{bn}$; c'eſt à dire que $\frac{b}{c}.\frac{m}{n}::\frac{x}{x}.\frac{cm}{bn}$. Or cela eſt facile: car par le | $\frac{b}{c}.\frac{m}{n}::$ bn.cm. Or par le || $\frac{x}{x}.\frac{cm}{bn}::$ bn.cm. donc $\frac{b}{c}.\frac{m}{n}::\frac{x}{x}.\frac{cm}{bn}$. | II. 69) || II. 73)

Probleme.

Ayant trois Raiſons quelconques, en trouver une quatriéme pour proportionnelle, ſoient les trois Raiſons quelconques $\frac{b}{c}$ $\frac{d}{f}$ $\frac{m}{n}$, les deux du milieu eſtant multipliées l'une par l'autre, ce qui fait $\frac{dm}{fn}$, ſi on diviſe cette nouvelle Raiſon par la premiere, ce qui donne $\frac{cdm}{bfn}$, cette derniere Raiſon eſt la quatriéme, proportionnelle ~~au~~ au regard des trois autres: c'eſt à dire que $\frac{b}{c}.\frac{d}{f}::\frac{m}{n}.\frac{cdm}{bfn}$. VII.

Car $\frac{b}{c}.\frac{d}{f}::$ BF.CD. par # & $\frac{m}{n}$ $\frac{cdm}{bfn}::$ BF CD par II. 69 et 67.) # II. 69)

Observation.

Ce que font ces quatre regles ſur les Raiſons égales, VIII.

l'addition de deux Raiſons égales fait une Raiſon double de chacune. Si B.C :: F.G $\frac{bg+cf}{cg}$ eſt double de chacune de ces deux Raiſons, la ſouſtraction de deux Raiſons égales donne zero pour l'antecedent, & par conſequent le réduit à rien. Si B.C :: F.G. $\frac{BG - CF}{CG}$. est = a zerô

Car BG = CF, donc l'un moins l'autre n'eſt rien. La multiplication de deux Raiſons égales fait une Raiſon compoſée des deux, qui s'appelle Raiſon doublée, dont on va parler bien-toſt.

La diviſion d'une Raiſon par une autre qui luy eſt égale, donne une Raiſon d'égalité. Si $\frac{b}{c}$ eſt égale à $\frac{f}{g}$, $\frac{b}{c}$ diviſant $\frac{f}{g}$ donne $\frac{cf}{bg}$ qui eſt une Raiſon d'égalité, parce que CF = BG.

DE LA RAISON COMPOSE'E.

Ce qui vient d'eſtre dit de la multiplication des Raiſons fait comprendre ſans peine ce que c'eſt que la Raiſon compoſée; ce qui n'a point encore eſté bien expliqué par aucun Geomettre.

Car au lieu d'en donner une definition generale, ils ſe ſont contentez d'apporter l'exemple d'une Raiſon compoſée dans un cas particulier, comme ſi on n'eût pû avoir d'autre notion plus claire, plus diſtincte & plus univerſelle de la Raiſon compoſée.

„ Lors, diſent-ils, qu'ayant deux grandeurs on en prend „ une troiſiéme telle que l'on veut, & que l'on compa- „ re la premiere des grandeurs données à cette troiſié- „ me, & cette troiſiéme à la ſeconde des données, la „ Raiſon des deux grandeurs données eſt compoſée de „ deux Raiſons, de la premiere grandeur à l'interpoſée „ & de l'interpoſée à la ſeconde : ainſi la Raiſon de B „ à D eſt compoſée des Raiſons de B à X & d'X à D.

Or il eſt auſſi ridicule de ne dire que cela pour expliquer la nature de la Raiſon compoſée, que ſi on ſe contentoit de dire pour définir la proportion Geometrique, que quand la premiere grandeur eſt double de la ſeconde, de, & la troiſiéme double de la quatriéme, cela s'appelle proportion.

Car comme cette définition de la proportion ſeroit vicieuſe, parce qu'elle ne comprendroit pas tout le défini, celle qu'ils donnent de la Raiſon compoſée ne l'eſt pas moins, parce que bien loin de convenir à toute Raiſon compoſée, ce n'eſt qu'un abregement dans un cas particulier de la maniere dont ſe forment les Raiſons compoſées, comme on le verra plus bas. Voicy donc en general ce que c'eſt que Raiſon compoſée.

Definition de la Raison composée.

La compoſition des Raiſons n'eſt autre choſe que leur multiplication ; & une Raiſon qui eſt née de la multiplication de deux ou pluſieurs Raiſons, eſt dite compoſée de ces deux ou pluſieurs Raiſons. IX.

C'eſt pourquoy, ſuivant ce qu'on a dit de la multiplication, & y ajoûtant ſeulement les termes de Compoſante & de Compoſée, une Raiſon eſt compoſée de deux Raiſons quand la Raiſon d'égalité eſt à l'une des compoſantes, comme l'autre compoſante eſt à la Raiſon compoſée.

Proposition generale.

La Raiſon qui a pour antecedent le produit de tous les antecedens de pluſieurs Raiſons, & pour conſequent le produit de tous les conſequens, eſt compoſée de toutes ces Raiſons : ainſi la Raiſon de $\frac{bmp}{cnq}$ eſt compoſée de trois Raiſons $\frac{b}{c}$ $\frac{m}{n}$ $\frac{p}{q}$. X.

On ne peut le demonſtrer qu'en commançant par deux Raiſons, & en faiſant voir d'abord que $\frac{bm}{cn}$ eſt compoſée des Raiſons $\frac{b}{c}$ $\frac{m}{n}$.

Or il ne faut pour cela que prouver que la Raiſon d'égalité eſt à $\frac{b}{c}$ comme $\frac{m}{n}$ eſt à $\frac{bm}{cn}$; ce qu'on a déja fait en expliquant la Multiplication.

Et quand cela eſt fait des deux premieres, on prouvera de la meſme ſorte que $\frac{bmp}{cnq}$ eſt compoſée de toutes les trois, en faiſant voir qu'elle eſt compoſée de $\frac{bm}{cn}$ [qui l'eſt des deux premieres] & de la troiſiéme $\frac{p}{q}$.

| II. 73) Car $\frac{x}{x}.\frac{bm}{cn} :: cn.bm$ par I, & $\frac{p}{q}.\frac{bmp}{cnq} :: cn.bm$ par II 69 et 67) Donc $\frac{x}{x}.\frac{bm}{cn} :: \frac{p}{q}.\frac{bmp}{cnq}$ & par consequent $\frac{bmp}{cnq}$ est composé de $\frac{p}{q}$ & $\frac{bm}{cn}$, laquelle l'est de $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$, & ainsi l'est de |les toutes|trois $\frac{b}{c}\ \frac{m}{n}\ \frac{p}{q}$.

Suite importante de la vraye notion de la Raison composée.

XI. La veritable notion de la Raison composée estant une fois établie, qui est la Raison du produit des antecedens de deux ou plusieurs Raisons au produit de leurs consequens, il s'ensuit de là une chose fort remarquable; c'est que lors qu'il se rencontre dans les Raisons composantes des antecedens égaux aux consequens, il faut les ôter un pour un avant que de former les produits des antecedens & des consequens, qui doivent faire l'antecedent & le consequent de la Raison composée, si on veut qu'elle soit réduite aux moindres termes qu'elle peut estre.

Que si ces antecedens & consequens égaux estans ôtez, il ne restoit qu'un antecedent & un consequent dans les Raisons composantes, cét antecedent & consequent sera toute la Raison composée: & s'il ne restoit rien, la Raison composée seroit d'un à un, parce que ce seroit une marque que le produit des antecedens seroit égal au produit des consequens.

On verra mieux tout cela par des exemples.

RAISONS COMPOSANTES.

XII.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{b}{d} & \frac{c}{p} & \frac{d}{r} & \frac{p}{f} & \frac{q}{b} & \frac{cq}{rf} \\ \frac{m}{d} & \frac{n}{f} & \frac{f}{m} & \frac{x}{n} & & \frac{x}{d} \\ \frac{n}{o} & \frac{e}{a} & \frac{o}{e} & & & \frac{i}{i} \end{array}$$

La Raison de cela, est que quand on auroit mis toutes ces lettres semblables dans le produit des antecedens & dans celuy des consequens, il les en faudroit ôter pour avoir la Raison de ces produits reduite aux moindres termes qu'elle peut estre, selon ce qui a esté dit cy-dessus.

Il vaut donc mieux les retrancher d'abord, comme inutiles, quand on ne veut qu'avoir la Raison de ces

Produits qui eſt la Raiſon compoſée.

On peut tirer delà divers Corollaires qui donneront une grande lumiere à toute cette matiere de la Raiſon-compoſée.

I. Corollaire.

Quand une de ces Raiſons compoſantes, eſt une Raiſon d'égalité; Il ne la faut que retrancher comme inutile à la Rriſon compoſé $\frac{x}{x}\ \frac{b}{c}\ \frac{m}{m},\ \frac{bm}{cm}$ XIII.

$\frac{x}{x}\ \frac{b}{c},\ \frac{b}{c}$

II. Corollaire.

Quand les deux Raiſons compoſantes ont la meſme grandeur pour leurs extrémes, la Raiſon compoſée a pour ſon antecedent l'antecedent de la 2e Raiſon, & pour ſon conſequent le conſequent de la premiere $\frac{x}{b}\ \frac{d}{x}\ \frac{d}{b}$. XIV.

III. Corollaire.

Lors qu'au contraire les deux Raiſons ont la meſme grandeur pour moyens [comme il arrive dans les Raiſons que nous avons dites, ſe pouvoir appeller continuës.] La Raiſon compoſée a pour ſon antecedent l'antecedent de la 1 Raiſon, & pour ſon conſequent le conſequent de la 2. XV.

IV. Corollaire.

Quand il y a de ſuitte pluſieurs de ces Raiſons continuës égales ou inégales; c'eſt à dire qui ſont telles que le conſequent de la precedente eſt toûjours l'antecedent de la ſuivante, la Raiſon du premier antecedent au dernier conſequent eſt compoſée de toutes ces Raiſons. XVI.

$\frac{b}{c}\ \frac{c}{d}\ \frac{d}{f}\ \frac{f}{g}\ \frac{g}{h}),\ \frac{b}{h}$

V. Corollaire.

Ce qui vient d'eſtre dit eſt la meſme choſe que ce qu'on propoſe en cette matiere, ayant pluſieurs Grandeurs de ſuitte, la Raiſon de la premiere à la derniere eſt compoſée de toutes les Raiſons continuës, de toutes les Grandeurs, c'eſt à dire des Raiſons de la 1. à la 2, & de la 2 à la 3, & de la 3 à la 4 juſqu'à la derniere, c'eſt la meſme choſe que le 3.e ~~Theoreme~~, & que le 4e Corollaire s'il n'y a que trois Grandeurs; car ayant ces grandeurs *b* XVII.

$c\,d\,f\,g\,h$, leurs Raisons continuës sont $\frac{b}{c}\,\frac{c}{d}\,\frac{d}{f}\,\frac{f}{g}\,\frac{g}{h}$. Donc
$\frac{b}{h}$ par le 4 Corollaire ~~Theoreme~~ la Raison $\frac{b}{}$ à $\frac{h}{}$ est composée de toutes ces Raisons, & s'il n'y a que trois Grandeurs $b\,c\,d$. La Raison de b à d $\frac{b}{d}$ par le 3. Corollaire est composée de deux Raisons $\frac{b}{c}$ & $\frac{c}{d}$.

VI. Corollaire.

XVIII. Si entre deux Grandeurs données, on en interpose une ou plusieurs autres à discretion, la Raison des Grandeurs données sera composée de deux ou de plusieurs Raisons continuës que formeront ces Grandeurs données avec les interposées. Soient les données $b\,d$ l'interposée à discretion x ou si on en veut mettre plusieurs $x\,y\,z$, ce qu'on a dit des 3 Grandeurs ne peut pas n'estre point vray de $b.\,x\,d$.

VII. Corollaire.

XIX. Deux Raisons estant égales, si on en renverse une en faisant l'antecedent du consequent, & le consequent de l'antecedent, la Raison composée de ces deux Raisons, dont l'une est renversée est une Raison d'égalité. J'en laisse à trouver la demonstration.

III. Theoreme.

XX. Deux Raisons composées sont égales quand les Raisons composantes de l'une, sont égales chacune à chacune aux Raisons composantes de l'autre, Car toute raison composée est le 4 terme d'une proportion, dont la Raison d'égalité fait le premier terme, & les deux Raisons composantes le 2 & le 3, donc les Raisons d'égalité estant égales dans l'une & l'autre proportion.

Si les Raisons composantes d'une part sont égales aux Raisons composantes de l'autre part, les trois premiers termes de l'une sont égaux aux trois premiers termes de l'autre.

Et par consequent les deux Raisons composées qui en sont chacune le 4 terme, seront égales par (II. 57.)

IV. Theoreme.

XXI. Si les Raisons dont une raison est composée sont toutes deux de moindres inégalité, la composée est moindre qu'aucune des composantes. Si elles sont toutes deux de plus grande inégalité la composée est plus grande qu'aucune des composantes. Si l'une est de moindre inégalité, & l'autre de plus grande inégalité, la composée sera plus petite que celle de plus grande inégalité, & plus grande que celle de moindre inégalité. Tout cela dépend de deux principes.

L'un que toute raison composée est le 4^e^ terme d'une proportion dont la Raison d'égalité est le premier terme & les deux composantes, le 2 & le 3 termes†. L'autre que la Raison composante qui fait le 3 terme de cette proportion est à la composée, comme le consequent de celle qui en fait le 2 terme est à son antecedent par ‖ & cy-dessus, n° 26.) † par 9. 5.) ‖ 11. 79)

Donc quand l'une & l'autre composante est de moindre inégalité, le consequent de chacune estant plus grand que son antecedent, elles ne pourront estre disposées de sorte que l'une & l'autre ne soit plus grande que la composée, $\frac{1}{1}.\frac{2}{3} :: \frac{4}{5}.\frac{8}{15} :: 3.2$

$\frac{1}{1}.\frac{4}{5} :: \frac{2}{3}.\frac{8}{15} :: 5.4$ & au contraire par le mesme principe quand les deux composantes sont de plus grandes inégalité, le consequent de chacune estant plus petit que son antecedent, chacune aussi est plus petite que la composée. $\frac{1}{1}.\frac{3}{2} :: \frac{5}{4}.\frac{15}{8} :: 2.3.$ $\frac{1}{1}.\frac{5}{4} :: \frac{3}{2}.\frac{15}{8} :: 4.5.$

Mais si l'une des composantes est de moindre inégalité, le consequent en l'une estant plus grand que l'antecedent & moindre en l'autre, la composante de plus grande inégalité sera plus grande que la composée, & celle de moindre inégalité plus petite que la composée. $\frac{1}{1}.\frac{2}{3} :: \frac{7}{5}.\frac{14}{15} :: 3.2.$ $\frac{1}{1}.\frac{7}{5} :: \frac{2}{3}.\frac{14}{15} :: 5.7.$

Observation sur ce Theoreme.

On voit clairement par ce qui vient d'estre demonstré dans ce Theoreme, que la composition des Raisons n'en peut estre une Addition, mais en doit estre une Multiplication; car il est contre la nature de l'Addition que deux choses ajoûtées ensemble fassent un tout qui soit moindre que chacune, parce qu'il faudroit pour cela XXIII.

qu'un tout fust moindre que la partie, mais il en est tout autrement de la Multiplication, dans laquelle il se peut faire que deux choses estant multipliées l'une par l'autre, il en naisse un Produit qui soit moindre que chacune, & cela arrive toûjours quand les deux choses que l'on multiplie sont moindres chacune que l'unité, comme quand on multiplie un tiers par un quart, ce qui fait un douziéme, & c'est ce qui fait encore voir la parfaite analogie des nombres aux raisons; car il n'arrive jamais que la Raison composée soit plus petite qu'aucune des composantes, que quand chacune des composantes est de moindre inégalité, & qu'elle est par consequent plus petite que la Raison d'égalité qui tient lieu d'unité dans les Raisons.

Quand une Raison est composée de plusieurs Raisons égales, si c'est de deux, elle s'appelle doublée, de trois triplée, de quatre quadruplée, &c.

V. Theoreme.

XXIII. S'il y a plusieurs termes en proportion continuelle; c'est à dire que le premier soit au second, comme le 2 au 3, & le 3 au 4 & le 4 au 5, ce qui s'appelle Progression Geometrique, la Raison d'un terme à l'autre, sera simple ou doublée, ou triplée ou quadruplée, &c. selon que ces termes seront distans l'un de l'autre; car s'ils se suivent immediatement, leur Raison sera simple, c'est à dire la mesme qui regne dans toute la Progression.

S'il y a un terme entre deux qui est une moyennne proportionelle leur Raison sera doublée, c'est à dire composée de deux Raisons simples, qui par l'hypothese sont égales.

S'il y a deux termes entre deux, c'est à dire deux moyennes proportionnelles, leur raison sera triplée s'il y en a trois quadruplée, &c.

VI. Theoreme.

XXIV. La Raison d'une grandeur de plusieurs dimensions à toute autre grandeur homogene, d'autant de dimensions est composée de toutes les Raisons de chacune des dimensions d'une grandeur à chacune des dimensions de l'autre : ce n'est qu'une application de la definition de la Raison composée; car comparant chacune des dimensions d'une grandeur à chacune des dimensions de l'autre, on met tous les antecedens de ces Raisons dans une des grandeurs, & tous les consequens dans l'autre. Or une Grandeur de plusieurs dimensions est la mesme chose que le Produit de ces dimensious multipliées l'une par l'autre : Et par consequent les grandeurs sont entre elles, comme le produit de leurs dimensions, c'est à dire comme le Produit des antecedens des Raisons de chacune des dimensions de l'une à chacune des dimensions de l'autre au Produit des consequens de ces mesmes Raisons, ce qui est une Raison composée de ces Raisons par la definition mesme de la Raison composée.

I. Corollaire.

Toute Grandeur plane est à une autre Grandeur plane en raison composée des deux raisons de chacun des côtez de l'une à chacun des côtez de l'autre, c'est la mesme chose que la precedente. XXV.

II. Corollaire.

Toute Grandeur solide est à une autre Grandeur solide en raison composée des trois raisons de chacun des côtez de l'un à chacun des côtez de l'autre, c'est la même chose que la proposition generale. XXVI.

III. Corollaire.

Les Grandeurs planes & solides ayant quelqu'une de leurs dimensions égale & l'autre inégale sont entre elles comme les inégales. *b f. b g : : f. g, b f d. b f g. : : d. g. b f d. b m n : : f d. m n.* XXVII.

IV. Corollaire.

Les plans dont les deux dimensions ont mesme raison, chacune de l'un à chacune de l'autre, sont en raison doublée de cette mesme raison. Cela est clair par le premier Corollaire & la definition de la Raison doublée. XXVIII.

V. Corollaire.

XXIX. Les solides dont les trois dimensions ont mesme raison chacune de l'un à chacune de l'autre, sont en raison triplée de cette raison. Cela est encore clair par le second Corollaire, & la définition de la raison triplée.

VI. Corollaire.

XXX. Tous les Quarrez & les Cubes sont en raison, les uns doublées, & les autres triplées de la raison de leurs racines, car toutes les dimensions des Quarrez & des Cubes estant égales entre elles, elles ne peuvent pas n'avoir pas chacune la mesme raison à chacune des dimensions des autres Quarrez & des autres Cubes.

VII. Corollaire.

XXXI. Si 4 Grandeurs sont proportionelles, leurs Quarrez & leurs Cubes le sont aussi. Si $b.c :: f.g$ $bb.cc :: ff.gg$. $bbb.ccc :: fff.ggg$; car les Quarrez estant en raison doublée de leurs Racines, & leurs Cubes en raison triplée, les Raisons doublées, & les triplées de Raisons égales doivent estre égales par le 3^e Theoreme.

VIII. Corollaire.

XXXII. Le Produit de deux Grandeurs quelconques est moyen proportionnel entre les Quarrez de chaque Grandeur. Soient les Grandeurs b & c, $bb.bc :: bc.cc$; car $bb.bc :: b.c.$ & $bc.cc :: b.c.$

C'est la mesme chose que de dire que le Produit de la toute, & d'une partie est moyen proportionnel entre le Quarré de la toute & le Quarré de cette partie; car il est visible que si la toute est t & m une partie, $tt.tm :: tm.mm$.

IX. Corollaire.

XXXIII. En toute Progression Geometrique, les Quarrez de deux termes qui se suivent immediatement sont entre eux comme deux termes, entre lesquels il y en a un d'interposé. Soient $\div\, b.c.d.f.g$ en Progression Geometrique. Je dis que $bb.cc :: b.d$ ou $cc.dd :: c.f$; car la Raison de b à d est doublée de celle de b à c. Or par le 6 Corollaire, les Quarrez bb & cc, sont aussi en raison

doublée

doublée de celle de b à c. Cela se peut prouver encore d'une autre sorte. Si ∺ $b.c.d.f$, $bd = cc$. Or $bb.bd :: b.d$, donc $bb.cc :: b.d$.

X. COROLLAIRE.

EN toute ~~la~~ Progression Geometrique, les Cubes de deux termes qui se suivent immediatement, sont entre eux comme deux termes, entre lesquels il y en a deux d'interposez ; car les Cubes sont en raison triplée de la Raison de la Progression, & les termes entre lesquels il y en a deux d'interposé~~z~~, sont aussi en raison triplée de cette mesme raison, cela se peut prouver aussi par le Corollaire ~~9~~ precedent ; car si ∺ $b.c.d.f$, ~~par~~ $bb.cc :: c.f$, donc par 6 Theor. II. n°. 80) $bbf = ccc$. Or $bbb.bbf :: b.f$. donc $bbb.ccc :: b.f$. XXXIV.

XI. COROLLAIRE.

C'EST par là qu'on a trouvé comment il s'y falloit prendre pour doubler un Cube donné ; car ayant un Cube donné bbb. Il faut prendre f double de b, & si on peut trouver deux moyennes continuëment proportionnelles entre b & f, comme seroient c & d : ensorte que soient ∺ $b.c.d.f$. Le Cube de c premiere de ces moyennes proportionnelles sera double du Cube de b. XXXV.

VII. THEOREME. DEFINITION.

DEUX Grandeurs planes qui sont telles que les deux dimensions de l'une sont les extrémes d'une proportion, dont les deux dimensions de l'autre, sont les moyens, ou [ce qui est la mesme chose] que l'une des dimensions de la premiere soit à l'une des dimensions de la seconde, comme l'autre dimension de la seconde est à l'autre dimension de la premiere sont appellées reciproques, & sont toûjours égales. XXXVI.

Soient bg & cf. Je dis que si b est à c comme f est à g

$b.c :: f.g$.

$bg = cf$.

|II. 80) Or par le Produit des extrémes $b\,g$ qui est le premier de ces deux plans est égal au Produit des moyens $c\,f$ qui est le second de ces deux plans.

VIII. Theoreme.

XXXVII. Les Grandeurs planes égales sont toûjours reciproques, c'est à dire les deux dimensions de l'une sont les extrémes de la proportion dont les deux dimensions de l'autre sont les moyens. Si $b\,g$ est égal à $c\,f$. Je dis que $b.c :: f.g.$

Ces deux derniers Theoremes sont prouvez a la fin du II Livre, ou il a eté parlé des Reciproques.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUATRIE'ME.

DES GRANDEURS COMMENSURABLES ET INCOMMENSURABLES.

NOus *avons dit generalement qu'il y a deux sortes de raisons ; la raison de nombre à nombre, & la raison sourde ; & comme c'est par là que les grandeurs sont commensurables & incommensurables, la suite naturelle nous oblige de parler de ces sortes de Grandeurs.* I.

DEFINITION.

C'EST la même chose de dire que deux grandeurs sont commensurables, & de dire qu'elles sont comme nombre à nombre. II.

Car afin que *b* soit commensurable à *c*, il faut que quelque grandeur comme *x* soit précisément tant de fois dans *b* & précisément tant de fois dans *c* comme si elle est 9 fois dans *b* & 10 fois dans *c*.

Donc *b* est la mesme chose que $9x$, & *c* la même chose que $10x$.

Or $9x. 10x :: 9. 10.$

Donc $b. \ c \ :: 9. 10.$

Donc *b* est à *c* comme nombre à nombre. Et delà il s'ensuit que c'est aussi la même chose de dire que deux grandeurs ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre, & de dire qu'elles sont incommensurables, puisque si elles estoient commensurables elles seroient comme nombre à nombre.

SECTION PREMIERE.

Des Grandeurs commensurables ou des Raisons de nombre à nombre.

III. TOUT ce qui a esté dit dans les deux Livres precedens des Raisons en general, peut estre appliqué sans peine aux Raisons de nombre à nombre. Ce n'est donc pas ce que l'on va faire icy : ce seroit une repetition inutile. Mais on parlera seulement de ce qui convient specifiquement aux Raisons de nombre à nombre, & en quoy elles sont differentes des Raisons Sourdes.

I. LEMME.

Marquer les nombres par lettres.

IV. ON peut marquer les nombres par lettres comme les autres grandeurs : & alors il faut observer en faisant les quatre operations sur les nombres que l'on a marquez par lettres, tout ce qui a esté dit dans le I. Livre de ces operations sur les grandeurs quelconques : D'où naît plusieurs differences entre cette maniere de marquer les nombres par lettres, & celle de les marquer par chiffres.

1. Une seule lettre peut marquer quand on veut quelque grand nombre que ce soit ; au lieu qu'il faut beaucoup de caracteres pour marquer les grands nombres.

2. Les chiffres changent dans l'Addition, Soustraction, Multiplication des nombres ; mais les lettres ne changent point : Car si *b* signifie 4. & *a* 5, pour les adjoûter

en chiffres je mettray 9, & par lettres je mettray $b+a$. Et pour multiplier en chiffre je mettray 20, & par lettres je mettray ba : & c'eſt en cela qu'eſt le plus grand avantage des lettres ; car les multiplications s'y font ſans peine, & laiſſent toûjours voir les nombres par leſquels on a multiplié ; au lieu que deux grands nombres ſont difficiles à multiplier par chiffres, & on ne voit plus dans le produit les nombres dont il a eſté fait.

3. Le rang dans les chiffres fait tout ; car 29 & 92 ſont deux nombres bien differens : Mais il ne fait rien dans les lettres quand on les joint enſemble, ce qui marque une multiplication ; car il n'importe par où on commence la multiplication de deux nombres. C'eſt toûjours la meſme choſe 5 fois 4, ou 4 fois 5 : & ainſi *bcd*, *bdc*, *dbc* marquent le meſme chiffre.

4. Les chiffres ſignifient des nombres determinez : & un meſme caractere dans la meſme place des unitez, des dixaines, &c. ne peut ſignifier que la meſme choſe. Mais les lettres ſignifient des nombres quelconques ; en obſervant neanmoins que dans une meſme operation la meſme lettre doit ſignifier le meſme nombre.

II. Lemme.

Cette maniere de marquer les nombres par lettres, fait voir que les nombres peuvent eſtre conſiderez comme eſtant d'une dimenſion, ou de deux, ou de trois, ou de quatre, &c. V.

On conſidere un nombre comme eſtant d'une ſeule dimenſion, lors qu'on regarde ſimplement ce qu'il contient d'unitez & qu'on le marque par une ſeule lettre, ſoit qu'il ait beſoin pour eſtre écrit en chiffre d'un ſeul ou de pluſieurs caracteres. Ainſi 72 marqué par un s, eſt un nombre d'une ſeule dimenſion.

On le conſidere comme ayant deux dimenſions, lors qu'il eſt exprimé par deux lettres qui marquent deux nombres, qui ſe multipliant l'un l'autre font le nombre total qu'on veut exprimer. Ainſi b ſignifiant 2, & p 36, bp ſignifie deux fois 36, ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 3 dimensions, lors qu'il est exprimé par 3 lettres, qui marquent 3 nombres, dont le 3e multiplie le produit des deux premiers. Ainsi *b* signifiant 2, *c* 3 & *m* 12 : *b cm* signifie 2 fois 3 fois 12. c'est à dire, 6 fois 12, ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 4. dimensions, lors qu'il est exprimé par 4 lettres qui marquent 4 nombres, dont le 3e ayant multiplié le produit des deux premiers, le 4. multiplie le produit des 3. autres. Ainsi *b* signifiant 2, *c* 3, & *d* 4; *bcdc* signifie 2 fois 3 fois 4 fois 3; c'est à dire, 6 fois 4 fois 3, ou 24 fois 3; ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant cinq dimensions, lors qu'il est exprimé par 5. lettres.

De 6 quand par 6.

De 7 quand par 7.

De 8 quand par 8, &c.

III. Lemme.

VI. On voit assez que deux mesmes lettres, comme *bb* ou *cc*, doivent faire un nombre quarré; & 3 mesmes lettres, comme *bbb*, un nombre cubique.

Mais il y a encore une autre observation à faire sur ces nombres. C'est qu'un nombre est reconnu pour quarré non seulement quand il est exprimé par deux mêmes lettres comme *bb*, mais aussi quand on partage en deux parts égales les lettres d'un nombre, en sorte que les mêmes lettres se trouvent en l'une & en l'autre partie. Ainsi *bbcc*, ou *bbccdd*. sont des nombres quarrez, parce que l'un se peut partager en *bc* & *bc*, & l'autre en *bcd* & *bcd*. Car on a déja veu qu'il n'importoit de rien en quelque maniere que les lettres fussent rangées.

Un nombre de même est cubique non seulement quand il est exprimé par les trois mêmes lettres comme *bbb*, mais aussi quand les lettres qui le marquent peuvent estre divisées en trois parts égales dont chacune contienne les mêmes lettres. Ainsi *bbbccc*, ou *bbbcccddd* sont deux nombres cubiques, parce que le premier se peut partager en *bc*, *bc* & *bc*, & l'autre en *bcd*, *bcd* & *bcd*.

COROLLAIRE.

IL s'ensuit delà sans autre preuve, que le produit de VII.
deux nombres quarrez est toûjours un nombre quarré qui a pour sa racine le produit des deux racines des deux autres nombres quarrez. Ainsi bb en cc fait $bbcc$, qui a pour sa racine bc. Et que le produit de deux nombres cubiques est toûjours un nombre cubique, qui a aussi pour sa racine le produit des deux racines des deux autres nombres cubiques.

IV. LEMME.

LES exposans d'une raison de nombre à nombre sont VIII.
necessairement ou deux nombres impairs, ou un nombre pair & un impair, mais ce ne peut estre deux pairs; car deux pairs pouvant encore l'un & l'autre estre partagez par la moitié, Cette raison n'auroit pas esté reduite aux moindres termes qu'elle l'auroit pû estre & cette division par la moitié fera enfin que ces deux pairs se reduiront ou à deux impairs comme la raison de 10 à 6 se reduit à la raison de 5 à 3, ou au moins à un pair & à un impair comme la raison de 8 à 14 se reduit à la raison de 4 à 7.

V. LEMME.

QUOY que deux nombres n'ayent pas autant de dimensions l'un que l'autre, ils ne laissent pas de pouvoir estre IX.
comparez ensemble, parce que tous les nombres estant mesurez par l'unité ont toûjours raison l'un à l'autre.

Neanmoins il est souvent utile de pouvoir faire que le nombre qui auroit moins de dimensions que l'autre, en ait autant demeurant le même, & cela est aisé.

Car reservant la lettre (i) pour marquer l'unité il ne faut qu'augmenter les lettres du nombre qui en a moins que l'autre, d'autant d'i qu'il est necessaire pour faire qu'il y ait autant de lettres à l'un qu'à l'autre. Ainsi ayant à comparer b avec bx; ajoûtant un i à b, bi aura autant de dimensions que bx.

Et neanmoins bi sera le même nombre que b, parce que l'unité multipliant un nombre ne le change point; 4 fois un, ou une fois 4, estant la même chose que quatre.

Et quand on le multiplieroit 2, 3 & 4 fois par l'unité, ce seroit toûjours de même : comme il se voit en ce que l'unité prise une fois (ce qui peut estre marqué par un seul *i*) est un nombre lineaire & multiplié par soy-même, ce qui peut estre marqué par deux (*i i*) est un nombre quarré, quoy que ce soit toûjours un : Et marqué par trois (*iii*) un nombre cubique : Et par quatre (*iiii*) un nombre quarré de quarré : Et ainsi à l'infini. D'où il s'ensuit que comme un seul (*i*) n'apporte aucun changement au nombre auquel il est ajoûté, deux, trois, quatre *i*, n'en apportent point aussi.

Cette observation sera de grand usage dans les Theoremes suivans.

VI. Lemme.

X. Il est bon pour distinguer plus facilement les nombres pairs des impairs de marquer les nombres pairs par des consonnes, & les impairs par des voyelles, reservant toûjours *i* pour l'unité : neantmoins quand on ne considere ni les pairs ni les impairs, les consonnes alors se prendront pour les nombres en general.

VII. Lemme.

XI. Outre cette maniere de marquer par lettres les nombres que l'on veut multiplier, on peut aussi en les marquant par les chiffres ordinaires avoir presque les mesmes avantages, qui sont. 1, Que les nombres multiplians & multipliez paroissent toûjours. 2, Qu'on voit tout d'un coup combien de dimensions est chaque nombre. 3. Que l'on voit sans peine les exposans de chaque raison de nombre à nombre.

Il ne faut pour cela que faire deux choses. La 1re est de mettre une virgule entre deux, ou trois, ou quatre, ou cinq nombres que l'on veut multiplier les uns par les autres, en se souvenant que cette virgule veut dire *fois*.

Ainsi 4, 5, voudra dire 4 fois 5 *c.* 20.

5, 12. 5 fois 12 *c.* 60.

5, 6,

5, 6, 7, 8. 5 fois 6 fois 7 fois huit, c. 30 fois 7 qui font 210, & 8 fois 210 ce qui fait 1680.

Les quarrez ſe mettront de meſme.

3, 3. Quarré de 3. 9.

4, 4. Quarré de 4. 16.

12, 12. Quarré de 12. 144.

36, 36. Quarré de 36. 1296.

Les Cubes de meſme.

4, 4, 4. Le Cube de 4. 64.

10, 10, 10. Le Cube de 10. 1000.

On peut auſſi dans cette maniere faire les nombres d'autant de dimenſions les uns que les autres, en multipliant par 1 c'eſt à dire par l'unité ceux qui n'en ont pas tant, & mettant la virgule entre deux. Ainſi ſi je veux comparer 4 à 4, 7. Je n'auray qu'à mettre 4, 1 & 4, 7. Ce qui ſignifiera 4 fois 1, & 4 fois 7. Ce qui peut eſtre de grand uſage dans les proportions.

L'autre invention qui n'eſt que pour les nombre quarrez, cubiques, quarrez de quarrez, &c. C'eſt de faire comme aux lettres mettre au deſſus un peu à coſté un petit 2 pour les quarrez, un 3 pour les cubes. Un 4. pour les quarrez de quarrez, &c.

Ainſi 8^2 marquera le quarré de 8. 64.

8^3. Le cube de 8. 512.

8^4. Le quarré de quarré 8. 4096.

DEFINITIONS.

IL y a quelques definitions qu'il faut ſçavoir pour bien comprendre les raiſons de nombre à nombre. XII.

1. Un nombre eſt dit en diviſer un autre, ou en eſtre la meſure quand il y eſt préciſement tant de fois.

Auſſi l'unité eſt la meſure de tous les autres nombres, & tous les autres nombres ſont multipliés de l'unité.

2. Elle eſt la meſure de tous les autres nombres pairs, & tous les nombres pairs ſont multiples de l'unité.

Mais il faut remarquer 1, que chaque nombre eſt la meſure de ſoy-meſme, parce qu'il eſt une fois dans ſoy-mesme. Et ainsi tout nombre a au moins deux mesures, soy-mesme & l'unité. Il n'y a que l'unité qui n'a que soy-mesme. 2, Que toutes mesures sont doubles, si ce n'est dans les quarrez, où un nombre se multiplie soy-même; Car si 3 par exemple est le quart de 12, quatre en sera le tiers. Si 5 est le 12^{me} de 60, 12 en sera le 5^{me}.

3. On dit qu'un nombre est nombre premier, quand il n'a de mesure que l'unité & soy-mesme, (ce qui se sous-entend sans qu'on le dise.) Comme 2. 3. 5. 7. 11. 13, &c.

Hors le nombre de deux nul nombre pair ne peut estre premier, parce que tous (hors deux) peuvent au moins estre divisez par 2.

4. Deux nombres sont premiers entr'eux, quand ils n'ont de mesure commune que l'unité.

Il s'ensuit delà que deux nombres differens qui sont chacun premiers le sont entr'eux, comme 5. 7. 11. J'ay dit deux nombres differens; car deux mesmes nombres comme 5 & 5, quoy que chacun soit premier, ne le sont point entr'eux; Car outre l'unité estant chacun à soy-mesme sa mesure, ils ont encore cette mesure commune.

Deux nombres qui se suivent sont premiers entr'eux.

Deux impairs qui se suivent comme 7 & 9 le sont aussi.

Tous les quarrez sont premiers entr'eux, lors que leurs racines sont des nombres premiers, ou seulement premiers entr'eux, quoy que nul quarré ne puisse estre nombre premier 9. 25. 49. 64. 81.

Deux nombres premiers entre eux, ne sçauroient tous deux estre pairs. Il faut qu'au moins l'un des deux soit impair; car deux pairs auroient le nombre de deux pour mesure commune.

La Notion des Raisons de nombre à nombre.

XIII. La raison de nombre à nombre est bien plus facile à concevoir que la raison des grandeurs en general, à cause que les nombres ont toûjours l'ünité pour commune mesure, & qu'il y a des grandeurs qui n'ont aucune mesure commune.

Ainſi la raiſon de deux nombres ne conſiſte qu'en ce que l'un eſt tant de fois dans l'autre. Si l'un eſt multiple de l'autre, comme 4 eſt 3 fois dans 12, ou que quelque aliquote de l'un eſt preciſement tant de fois dans l'autre, ce qui eſt toûjours certain au moins de l'unité, comme 2 qui eſt le tiers de 6, eſt quatre fois dans 8. L'unité qui eſt le quart de quatre, eſt 7 fois dans 7.

Or delà il eſt aiſé de comprendre qu'afin que la raiſon de deux nombres ſoit égale à la raiſon de deux autres, il faut que ſi le ſecond eſt multiple du premier, le troiſiéme ſoit autant de fois dans le quatriéme que le premier eſt dans le ſecond, ou que ſi le premier n'a que quelqu'une de ſes aliquotes qui ſoit tant de fois dans le ſecond, une aliquote pareille du troiſiéme, ſoit autant de fois dans le quatriéme, c'eſt à dire que ſi le tiers du premier eſt cinq fois dans le ſecond: il faut auſſi que le tiers du troiſiéme ſoit cinq fois dans le quatriéme. Quatre eſt 5 fois dans 20 comme 7 eſt 5 fois dans 35.

La moitié de 6 eſt 5 fois dans 15, comme la moitié de 8 eſt 5 fois dans 20.

Division Generale.

La plus generale diviſion des raiſons de nombre à nombre, eſt de dire que les unes ſont premieres, & les autres non premieres. XIV.

J'appelle premieres celles dont les termes ſont premiers entre eux, comme la raiſon de l'unité à tout autre nombre: La raiſon de 2 a tout nombre impair.

J'appelle non premieres, celles dont les termes ne ſont pas des nombres premiers entre eux, comme 8. 12. 15. 20. 45. 81.

Propositions Fondamentales.

Deux raiſons premieres eſtant differentes ne ſçauroient eſtre égales. XV.

Chaque raiſon premiere peut eſtre égale à une infinité de non premieres.

Chaque raiſon non premiere peut eſtre reduite à une premiere qui luy ſera égale.

Il faut prouver toutes ces trois propoſitions.

La premiere ſe prouve ainſi. Deux nombres premiers entre eux n'ont de meſure commune que l'unité qui eſt l'aliquote qui prend ſa denomination du nombre meſme. comme l'unité eſt une ſeiziéme de 16. Si je compare donc 16 à 25 qui ſont deux nombres premiers entre eux (quoy que nul ne ſoit premier.) La raiſon de 16 à 25 ne conſiſte qu'en ce qu'une 16^{me} de 16 eſt 25 fois dans 25. Or dans l'infinité des nombres, il n'y a que 16 & ſes multiples, comme 2 fois 16, 3 fois 16 qui ait des ſeiziémes, & il n'y a auſſi que 25 & ſes multiples, comme 2, 25. 3, 25. en qui quelque nombre puiſſe eſtre préciſement 25 fois. Or deux nombres dont l'un ſeroit multiplié de 16, & l'autre de 25 ne ſeroient pas des nombres premiers entre eux. Donc il eſt impoſſible que deux raiſons premieres eſtant differentes ſoient égales.

Preuve de la deuxieme Proposition.

XVI. Elle eſt claire par ce qui vient d'eſtre dit; car deux nombres premiers entre eux peuvent eſtre chacun multipliés par un meſme nombre, & cela une infinité de fois: ny ayant point de nombre qui ne puiſſe multiplier l'un & & l'autre. Et alors (par II. 68) cette raiſon non-premiere ſera égale à la premiere.

Preuve de la troisieme Proposition.

XVII. Une raiſon non premiere eſt celle qui eſt entre deux nombres non premiers entre eux. Or afin que deux nombres ſoient non premiers entre eux: il faut qu'ils ayent une commune meſure autre que l'unité, & que par conſequent ils ſoient multiples d'un meſme nombre. Ils ont donc chacun deux dimenſions, & en ont une commune. Ils peuvent donc eſtre exprimés chacun par deux lettres, dont il y en aura une qui ſera la même, ou par deux chiffres avec une virgule entre deux, & il y aura de part &

d'autre le mesme chiffre. Donc effaçant ou la mesme lettre, ou le mesme chiffre, ce qui restera sera en mesme raison par II. 66. 67.

$$\left.\begin{matrix} 8. & 12. \\ bd. & ad \\ 2,4. & 3,4. \end{matrix}\right\} \therefore \begin{matrix} b. & a. \\ 2. & 3. \end{matrix}$$

Mais il faut remarquer 2 choses. La premiere que quand l'un des nombres est multiple de l'autre, c'est le nombre mesme dont l'autre est multiple, qui est la mesure commune des deux nombres : de sorte qu'il faut ou l'exprimer ou le concevoir comme estant multiplié par l'unité 4 à 20; c'est à dire 4 1. à 4, 5. De sorte qu'effaçant 4 de part & d'autre, la reduction sera 1. 5.

La deuxiéme que toute raison d'un mesme nombre à soy-mesme se reduit à la raison de l'unité à l'unité; car ils ont chacun deux mesures comme il a esté dit, l'unité & soy-mesme, & chacune leur est commune, effaçant donc la plus grande de ces mesures qui sont toutes deux communes, reste l'unité de part & d'autre.

Si la premiere reduction ne donnoit pas des nombres premiers entre eux, (ce qui arrive quand on ne prend pas le plus grand diviseur commun,) il ne faudroit que recommencer, & il est indubitable que cela se reduiroit à la fin à une raison premiere, c'est à dire à une raison de deux nombres premiers entre eux.

COROLLAIRE.

Les deux termes de la raison premiere à laquelle se reduit une raison non premiere, s'appellent *les exposans* de cette raison non-premiere. XVIII.

Ainsi 2 & 3 sont les *exposans* de la raison de 8 à 12. 4 & 5. Les *exposans* de la raison de 28 à 35.

Cela s'appelle autrement reduire une raison aux moindres termes qu'elle peut estre. Et pour abreger le mot de *reduire* signifiera tout cela. Ce qu'il faut bien remarquer.

Cecy revient encore à cette maxime. Si un mesme nombre en divise deux autres, les quotiens sont proportionnels; car le mesme nombre 4 ayant divisé 8 & 12, les quotiens ont esté 2 & 3 qui sont en mesme raison que 8 & 12.

I. Theoreme.

XIX. Deux raisons égales ont necessairement les mesmes exposans, & ce n'est qu'en cela qu'elles sont égales.

Car il faut que deux raisons que l'on compare, ou soient toutes deux premieres, ou toutes deux non-premieres, ou que l'une soit premiere, & l'autre non premiere.

Or il vient d'estre prouvé qu'elles ne sçauroient estre égales estant toutes deux premieres si elles sont differentes : & que les non-premieres se peuvent reduire à une premiere. Il faut donc que les non-premieres pour estre égales se puissent reduire à une seule & mesme premiere, ou s'il n'y en a qu'une de non-premiere, qu'elle se puisse reduire à la mesme premiere que celle qui l'est déja. Or c'est ce qu'on appelle avoir les mesmes *exposans*, que de ne pouvoir estre reduite qu'à une mesme & seule raison premiere. Donc il est impossible que deux raisons égales n'ayent pas les mesmes *exposans*.

II. Theoreme.

XX. Deux raisons de nombre à nombre estant égales, le produit des antecedens est au produit des consequens comme deux nombres quarrez : où, la raison du produit des antecedens au produit des consequens a pour ses exposans des nombres quarrez ; Car deux raisons ne sçauroient estre égales, qu'elles n'ayent les mesmes exposans par le Theoreme precedent. C'est à dire qu'estant reduites, elles ne le soient à deux raisons premieres qui ont chacune le mesme antecedent & le mesme consequent. Donc le produit des antecedens sera la multiplication d'un nombre par soy même, ce qui fait un nombre quarré, & de même du produit des consequens.

Deux raisons égales $bx. \; cx :: by. \; cy.$
reduites aux moindres termes $b. \; c :: b. \; c.$

Donc le produit de antecedens est *bb*.

& celuy des conseqvens *cc*.

Exemple par les chiffres selon le sixiéme Lemme.

4, 7. 5, 7 :: 4, 3. 5, 3.

Exp. 4. 5 :: 4. 5.

Donc le produit des antecedens est 4 fois 4; c'est à dire le quarré de quatre.

Et le produit des consequens 5 fois 5; c'est à dire le quarré de cinq.

III. Theoreme.

Trois raisons de nombre à nombre estant égales, la raison du produit des 3 antecedens au produit des 3 consequens a pour ses exposans des nombres cubiques. XXI.

C'est la mesme chose; car trois raisons ne sçauroient estre égales, qu'elles n'aient toutes trois les mesmes exposans. C'est à dire qu'estant reduites elles ne le soient à trois raisons, qui ne seront que la mesme ayant toutes trois le mesme antecedent & le mesme consequent. Donc le produit des antecedens sera un cube, & le produit des consequens un autre cube.

bx. *cx* :: *by*. *cy* :: *bz*. *cz*.

b. *c* :: *b*. *c* :: *b*. *c*.

Donc le produit $\left\{\begin{array}{l}\text{des antecedens } bbb.\\ \text{des consequens } ccc.\end{array}\right.$

C'est la mesme chose par les chiffres.

4, 7. 5, 7 :: 4, 3. 5, 3 :: 4, 9. 5, 9.

4. 5 :: 4. 5 :: 4. 5.

Donc le produit des antecedens est 4, 4, 4, c'est à dire le cube de 4. Et le produit des consequens 5, 5, 5, c'est à dire le cube de 5.

IV. Theoreme.

La raison doublée ou triplée d'une raison de nombre à nombre a pour ses exposans des nombres quarrez si elle est doublée, & des nombres cubiques si elle est triplée. XXII.

Car une raiſon doublée n'eſt autre choſe qu'une raiſon composée de deux raiſons égales.

Or une raiſon compoſée de deux raiſons n'eſt autre choſe que la raiſon du produit des antecedens de ces deux raiſons au produit de deux conſequens par III. 33.

Donc une raiſon compoſée de deux raiſons égales de nombre à nombre (ce qui eſt la même choſe que la raiſon doublée d'une raiſon de nombre à nombre) n'eſt autre choſe que la raiſon du produit des antecedens de 2 raiſons égales de nombre à nombre au produit des conſequens.

Or cette raiſon du produit des antecedens de deux raiſons égales de nombre à nombre au produit des conſequens, a pour ſes expoſans des nombres quarrez par le 2 Theoreme.

Donc toute raiſon doublée d'une raiſon de nombre à nombre a pour ſes expoſans des nombres quarrez.

On prouvera de la meſme ſorte par le 3 Theoreme que la raiſon triplée d'une raiſon de nombre à nombre a pour ſes expoſans des nombres cubiques ; parce qu'une raiſon triplée n'eſt autre choſe qu'une raiſon compoſée de trois raiſons égales. Donc, &c.

I. Corollaire.

XXIII. Trois nombres eſtant continuëment proportionnels, ne peuvent eſtre reduits aux moindres nombres qu'ils peuvent eſtre, que les deux extrémes ne ſoient des nombres quarrez, & celuy du mileu le produit de leurs racines.

Car le 1. de ces 3 nombres eſt au troiſiéme en raiſon doublée de la raiſon du 1 au 2, ou ce qui eſt la meſme choſe en raiſon compoſée de la raiſon du 1 au 2, & de celle du 2 au 3 comme il a eſté prouvé III. 34. Donc par le 3 Theoreme la raiſon du 1 au 3 doit avoir pour ſes expoſans des nombres quarrez. Or par III. 4. le produit des 2 racines eſt le moyen proportionnel entre deux quarrez, & il eſt clair que deux nombres quarrez ne peuvent avoir qu'un ſeul nombre pour moyen proportionnel. Donc le produit des deux racines doit eſtre ce ſecond terme.

II.

II. Corollaire.

Quatre grandeurs estant continuëment proportionnelles la raison de la 1 à la 4, a pour ses exposans des nombres cubiques. XXIV.

C'est la même chose; car (par III. 34.) la raison de la 1 à la 4 est une raison triplée. Or par le Theoreme precedent, toute raison triplée a pour ses exposans des nombres cubiques.

V. Theoreme.

Si plusieurs nombres sont continuëment proportionnels (ce qui s'appelle Progression Geometrique :) il faut necessairement qu'estant *reduits*, ils soient ou tous impairs, ou tous pairs hors l'un des extremes, qui sera seul necessairement impair. Car il est clair qu'ils ne peuvent pas estre tous pairs, parce qu'ils ne seroient pas *reduits*. XXV.

Demonstr. Ce qui fait que les nombres sont proportionnels, C'est qu'il y a toûjours une mesme raison entre ceux qui se suivent immediatement. Et ainsi toutes ces raisons estant égales n'ont que les mêmes exposans, qui sont ou l'unité & quelque autre nombre que ce soit, quand la Progression est multiple. Ou deux autres nombres quand elle n'est pas multiple, lesquels deux nombres sont necessairement ou tous deux impairs, ou l'un pair & l'autre impair 5. 12.

Preuve du premier Cas.

Dans le premier cas; c'est à dire quand l'un des exposans est l'unité, la verité du Theoreme est manifeste; car le 2 exposant sera le 2 terme de la Progression, & tous les autres en sont les puissances, le 3 le quarré, le 4 le cube, le 5 le quarré de quarré, &c. D'où il s'ensuit que si ce 2 exposant est un nombre impair, (toutes les puissances d'un nombre impair l'estant toûjours aussi,) tous les termes de la Progression sont impairs. XXVI.

Exemple quand le deuxiéme terme est 5, se souvenir que par 5^2. 5^3, &c. J'entends toûjours le quarré de 5. le cube de 5, &c.

∺ 1. 5. 5^2. 5^3. 5^4, &c.

∺ 1. 5. 25. 125. 625, &c.

Que si le 2 exposant est pair, comme il sera le 2 terme de la Progression, & que tous les autres termes seront ses puissances : ils seront tous pairs (toute puissance d'un nombre pair l'étant toûjours aussi.) Il n'y aura donc que l'unité qui sera un nombre impair dans cette Progression.

Exemple, ce second exposant estant 10.

∺ 1. 10. 10^2. 10^3. 10^4, &c.

∺ 1. 10. 100. 1000. 10000.

Preuve du deuxieme Cas.

XXVII. Quand la Progression n'est pas multiple ; c'est à dire quand l'un des deux exposans n'est pas l'unité, il faut toûjours qu'ils soient ou tous deux impairs, ou l'un pair & l'autre impair, comme il a déja esté dit. Or ce sont alors les deux exposans qui determinent tous les autres termes.

Car les deux extrémes doivent estre la mesme puissance de chacun des deux exposans ; c'est à dire le quarré s'il n'y en a que trois termes, le cube s'il y en a 4. le qq. s'il y a 5. le qc. s'il y en a 6, & ainsi jusques à l'infiny. Et tous les autres termes doivent avoir autant de dimensions que ces extrémes ; c'est à dire avoir 2 si ces extrémes sont des quarrez. 3 si ce sont des cubes. 4 Si ce sont des qq. 5 Si ce sont des qc, &c. Mais il faut qu'une partie de leurs dimensions soit d'un exposant, & l'autre partie de l'autre exposant.

Or delà s'ensuit tout ce qu'on avoit à prouver dans ce Theoreme ; car 1. Quand les deux exposans sont impairs, toutes les multiplications qui font les extrémes & ceux d'entre deux se font par impairs, & par consequent ils doivent tous estre impairs.

Exemples, les deux exposans estant 3. & 5. (il faut se souvenir qu'une virgule entre deux chiffres signifie qu'ils se doivent multiplier l'un l'autre.

∺ 3^2. $3,5$. 5^2. 9. 15. 25.
∺ 3^3. $3^2,5$. $3,5^2$. 5^3. 27. 45. 75. 125.
∺ 3^4. $3^3,5$. $3^2,5^2$. $3,5^3$. 5^4. 81. 135. 225. 375. 625.

2. Quand l'un des exposans est pair & l'autre impair, l'un des extrémes sera pair & l'autre impair. Mais tous ceux d'entre deux seront pairs, parce qu'il y aura quelqu'un de leurs dimensions qui sera un nombre pair. Or toute multiplication où il entre un nombre pair, fait un nombre pair.

Exemples. Les deux exposans estant 2 & 5.

∺ 2^2. $2,5$. 5^2. 4. 10. 25.
∺ 2^3. $2^2,5$. $2,5^2$. 5^3. 8. 20. 50. 125.
∺ 2^4. $2^3,5$. $2^2,5^2$. $2,5^3$. 5^4. 16. 40. 100. 250. 625.

Avertissement.

Ces deux cas de la Progression multiple, & de la non multiple ne sont differens qu'en apparence. Le 1. *se devant* XXVIII.
concevoir comme estant virtuellement semblable au second; Car l'unité qui en est le premier terme doit estre conceuë comme quarré quand il y a trois termes, comme cube quand il y en a 4, *comme quarré de quarré quand il y en a* 5, *& ainsi de suite. Et tous les autres termes doivent estre conceus comme ayant autant de dimensions qu'en a le dernier terme de la Progression: ce qui se fait par le moyen des unitez que l'on met par autant de dimension qui leur manquent. Cela se comprendra mieux pour des exemples, soit* i *pris pour l'unité, &* x *pour l'autre exposant quelconque pair ou impair. Voici comme ces Progressions multiples doivent estre conceuës, pour estre semblables aux non multiples.*

∺ ii. ix. xx.
∺ iii. iix. ixx. xxx.
∺ iiii. iiix. iixx. ixxx. xxxx.

SECTION SECONDE.

Des Grandeurs incommensurables ou des Raisons Sourdes.

XXIX. Nous avons déja dit, que ce qui fait que des Grandeurs sont appellées incommensurables (ce qui est la même chose que n'avoir entre elles qu'une raison sourde,) est qu'ayant chacune une infinité de mesures de plus petites en plus petites, nulle des mesures de l'une ne peut estre la mesure de l'autre.

Cela paroist incomprehensible, & l'est en effet, parce que ce qui est cause de cela, ne peut estre que la divisibilité de la matiere à l'infiny. Or il est clair que tout ce qui tient de l'infinité, ne sçauroit estre compris par un esprit finy tel qu'est celuy de tous les hommes.

Il ne faut donc pas s'imaginer que l'on puisse avoir des notions aussi claires des raisons sourdes, qu'on en a des raisons de nombre à nombre : ny qu'on puisse prouver positivement que deux grandeurs sont incommensurables, on ne le peut certainement. Et tout ce que l'on sçauroit faire de mieux, est de le faire negativement, c'est à dire en monstrant qu'elles ne sont point entre elles comme nombre à nombre : par où on est tres-convaincu que la chose est, quoy qu'on ne penetre pas comment cela peut estre. Tout se reduit donc à faire voir par les proprietez essentielles des raisons de nombre à nombre que nous venons d'établir qu'elles peuvent estre les grandeurs qui ne sont point entre elles comme nombre nombre, & qui par consequent sont incommensurables, parce que les proprietez des raisons de nombre à nombre ne pourroient convenir à la raison qu'elles auroient entre elles. C'est pourquoy il faut bien avoir dans l'esprit les definitions suivantes.

DEFINITIONS.

XXX. DEUX grandeurs sont incommensurables, quand elles ne sont point entre elles comme nombre à nombre, ou que la raiſon qu'elles ont entre elles n'eſt point une raiſon de nombre à nombre.

2. Une raiſon eſt ſourde quand on peut prouver qu'elle n'a point ce qui convient neceſſairement aux raiſons de nombre à nombre.

3. Chacune des deux raiſons égales, dont eſt composée la raiſon qu'on appelle *doublée*, ou des trois égales dont eſt composée la raiſon qu'on appelle *triplée*, ſoit appellee la raiſon ſimple d'une raiſon doublée ou triplée.

4. Deux grandeurs peuvent eſtre incommenſurables, que leurs quarrez & leurs cubes ne le ſont pas. Et on dit alors, qu'elles ſont incommenſurables en elles mêmes, ou en longueur, ou lineairement, mais qu'elles ſont commenſurables en puiſſance. Et il faut remarquer que le quarré eſt la puiſſance, qui s'appelle ſimplement puiſſance, le cube la 2, le quarré de quarré la 3, & ainſi à l'infiny. Et que neanmoins quand on les marque par un petit chiffre au deſſus & un peu à côté d'une lettre, ou d'un plus grand chiffre, 2 ſignifie le quarré, 3 le cube, 4 le quarré de quarré, comme 6^2. 6^3. 6^4, &c. De 8^2. 8^3. 8^4.

PROPOSITION FONDAMENTALE DES INCOMMENSURABLES.

Deux grandeurs ſont incommenſurables (quoy que non en puiſſance, ou 1 ou 2.) Quand la Raiſon qu'elles ont entre elles, eſt la raiſon ſimple, ou d'une raiſon doublée, qui a pour ſes expoſans d'autres nombres que deux nombres quarrez, ou d'une raiſon triplée qui a pour ſes expoſans d'autres nombres que deux cubiques. XXXI.

C'eſt une ſuitte neceſſaire de ce qui a eſté prouvé cy-deſſus, qu'une raiſon composée de deux raiſons égale de nombre à nombre, doit avoir neceſſairement pour ſes expoſans des nombres quarrez; c'eſt à dire que les deux termes de cette raiſon doublée doivent eſtre neceſſairement deux nombres quarrez, comme 1 & 4. 4 & 9 16 & 25.

Et qu'il ne ſuffit pas que l'un d'eux ſoit quarré , mais qu'ils le doivent eſtre tous deux.

Donc toute raiſon qui a pour ſes expoſans d'autres nombres que deux nombres quarrez ne ſçauroit eſtre compoſée de deux raiſons égales de nombre à nombre: Elle ne le peut donc eſtre que de deux raiſons ſourdes. Donc les deux grandeurs entre leſquelles eſt cette raiſon , qui ne ſçauroit eſtre de nombre à nombre, ſont incommenſurables par la 1 definition S 31. & par 2. S.

Il n'y a rien de plus facile que d'appliquer tout cela à la raiſon ſimple d'une raiſon triplée , &c.

Mais on voit bien auſſi que ces grandeurs ſont commenſurables en puiſſance ou 1. ou 2 ; car c'eſt ce que l'on ſuppoſe que leurs quarrez ou leurs cubes ſont comme nombre à nombre , mais non comme deux nombres ou quarrez ou cubiques.

I. Corollaire.

XXXII. Deux quarrez qui ſont entre eux comme deux nombres, & non comme deux nombres quarrez ont leurs racines incommenſurables.

Et deux Cubes de meſmes ont leurs racines incommenſurables, ſi ces Cubes ſont entre eux comme deux nombres , qui ne ſont pas tous deux cubiques.

C'eſt la propoſition meſme ; car par III. 30. deux quarrez ſont entre eux en raiſon doublée de leurs racines, & deux cubes en raiſon triplée. Donc ſi les quarrez ſont entre eux comme 2 à 1. ou comme 4 à 3. La raiſon des racines ſera la raiſon ſimple d'une raiſon doublée, qui n'aura pas pour ſes expoſans deux nombres quarrez. Donc ce ſera une raiſon ſourde. Donc ces deux racines ſeront incommenſurables : Et on voit aſſez qu'il en ſera de meſme de la racine des cubes.

II. Corollaire.

XXXIII. Quand trois grandeurs ſont continuëment proportionnelles. Si la 1 eſt à la derniere comme deux nombres qui ne ſoient pas tous deux quarrez, comme ſi la 1. eſt à la derniere comme 2 à 1, ou comme 3 à 2. La ſeconde ſera incommenſurable à la premiere & à la ~~derniere~~ seconde, c'eſt à dire que la raiſon de la 1. à la derniere ſera une raiſon ſourde, auſſi bien que celle qui luy eſt égale de la 2 à la 3. Mais cette 2 ſera commenſurable en puiſſance à chacune des deux autres ; car (par III. 23.) La raiſon de la 1. à la 3 eſt compoſée des 2 raiſons égales de la 1 à la 2. & de la 2 à la 3. Donc ſi ces deux raiſons eſtoient de nombre à nombre, la raiſon de la 1 à la 3 qui en eſt compoſée, auroit eu pour ſes expoſans deux nombres quarrez. Or elles ne les a pas par l'hypotheſe. Elles ſont donc ſourdes : & par conſequent la 2 de ces 3 grandeurs eſt incommenſurable tant à la 1. qu'à la 3.

Mais elle leur eſt commenſurable en puiſſance ; car (par III. ~~34~~ 33.) le quarré de la 1. eſt au quarré de la 2, comme la 1. à la 3, & le quarré de la 2. au quarré de la 3. eſt de meſme comme la 1. à la 3.

III. Corollaire.

Lors que 4 grandeurs ſont continuëment proportionnelles, ſi la 1 eſt à la 4 comme deux nombres qui ne ſoient pas tous deux cubiques : Chaque grandeur eſt incommenſurable à celle qui la ſuit, en longueur & en 1 puiſſance, & ſeulement commenſurable en 2 puiſſance. XXXIV.

C'eſt la même demonſtration que la precedente ; Car d'une part (par III. 23.) La raiſon de la 1. à la 4 doit eſtre compoſée des 3 raiſons égales de la 1 à la 2. de la 2 à la 3. & de la 3 à la 4. Donc c'eſt une raiſon triplée, qui par l'hypotheſe a d'autres nombres pour ſes expoſans que des nombres cubiques. Donc par la propoſition † fondamentale chacune de ces raiſons eſt ſourde. Donc les grandeurs qui ont entre elles cette raiſon ſourde ſont incommenſurables.

D'autre part (par III. ~~34~~ 33.) Les cubes de deux de ces grandeurs qui ſe ſuivent ſont en meſme raiſon que la 1 à la 4. Or par l'hypotheſe, la raiſon de la 1. à la 4, eſt une raiſon de nombre à nombre (quoy ce ne ſoit pas celle qui eſt entre deux nombres cubiques.) Donc ces grandeurs qui ſe ſuivent ſont commenſurables en 2 puiſſance.

IV. Corollaire.

XXXV. Si 3 grandeurs ſont telles, que d'une part le quarré de la plus grande ſoit égal au quarré des deux autres, & que de l'autre la plus petite des trois ſoit une aliquote de la plus grande, c'eſt à dire qu'elle ſoit à la plus grande comme l'unité à quelque nombre : celle qui eſt entre deux ſera incommenſurable à l'une & à l'autre, & elle leur ſera ſeulement commenſurable en puiſſance.

Soient les trois grandeurs *b. d. i.* Et que *b* ſoit à *i* comme 3 à 1. Leurs quarrez ſeront comme 9. à 1. Donc par l'hypotheſe du plus grand quarré égal aux deux autres.

bb. dd. : : 9. 8.
Et *dd. ii.* : : 8. 1.

Donc par le 1. Corollaire, *b* & *d* ſont incommenſurables, & *d.* & 1. le ſont auſſi. Mais on voit aſſez que *d.* eſt commenſurable en puiſſance à l'une & à l'autre.

V. Corollaire.

XXXVI. Si trois Grandeurs ſont d'une part continuëment proportionnelles, & que de l'autre la plus grande ſoit égale aux deux autres : elles ſont abſolument incommenſurables entre elles.

Car ſi elles eſtoient comme trois nombres, il faudroit par la 1. hypotheſe, & le 5 Theoreme qu'elles fuſſent ou comme trois impairs, ou comme un impair & deux pairs, ou comme deux pairs & un impair ; c'eſt à dire en l'une de ces 3 manieres, en marquant les impairs par des voyelles, & les pairs par des conſonnes, & en commençant par la plus grande. *a. e. o.*
a. b. c.
b. c. e.

Or la 2 hypotheſe fait que tous ces 3 cas ſont impoſſibles ; car cette 2ᵉ hypotheſe, eſt que la 1. doit eſtre égale aux 2 dernieres, ce qui ne peut eſtre dans aucun des trois

cas:

cas : La 1. dans les deux premiers cas eſtant un impair, & les deux dernieres un pair. Et dans le 3ᵉ cas eſtant un pair, & les deux dernieres faiſant un impair.

AVERTISSEMENT IMPORTANT.

De tout ce qui vient d'eſtre dit dans la 1 ſection des raiſons de nombre à nombre, & dans cette 2 des raiſons ſourdes, on voit aiſément que la maniere dont les premieres ſont égales, eſt tres-differente de celle dont le ſont ces dernieres ; car il paroît par les propoſitions fondamentales de la 1 ſection S. 15. Que deux raiſons de nombre à nombre ne ſont égales, que par ce qu'elles ont les meſmes expoſans, & qu'ainſi eſtant reduites, elles ne ſont toutes deux qu'une ſeule & meſme raiſon. 8 eſt à 12, comme 100 *eſt à* 150. *par ce que la raiſon de* 8 *à* 12, *eſt la raiſon de* 2 *à* 3, *& que la raiſon de* 100 *à* 150, *eſt auſſi la raiſon de* 2 *à* 3. XXXI.

Mais il n'en eſt pas de meſme des raiſons ſourdes ; car on ne peut point dire qu'elles ayent les meſmes expoſans. Elles ne ſeroient plus ſourdes ſi cela eſtoit. Ce n'eſt donc point de là qu'on doit prendre leur égalité, mais comme il a eſté prouvé dans le 1 Theoreme du 2 Livre† de ce †(II. 42.) que toutes les aliquotes pareilles des deux antecedens, ſont également contenuës dans les conſequens, quoy que nulle aliquote du 1. antecedent, ne ſoit préciſement tant de fois dans ſon conſequent, ny par conſequent l'aliquote pareille du 2. antecedent dans le 2 conſequent ; mais que ce ſoit toûjours au regard de l'un & de l'autre avec quelque reſte.

Et c'eſt pourquoy dans les raiſons de nombre à nombre, quand une ſeule aliquote pareille de chaque antecedent, par exemple un tiers eſt également contenu dans chaque conſequent, c'eſt à dire autant de fois dans l'un que dans l'autre, on n'a point beſoin apres cela d'examiner d'autres aliquotes. Mais dans deux raiſons ſourdes pour eſtre aſſuré qu'elles ſont égales, il faut avoir comme examiné toutes les aliquotes pareilles de l'un & de l'autre antecedent quoy qu'infinies, & eſtre aſſuré que nulle du 1 ne pourra eſtre dans ſon conſequent avec quelque reſte, que la pareille du 2 antecedent ne ſoit autant de fois dans ſon conſequent, quoy qu'avec auſſi quelque reſte, comme nous le demonſtrerons des lignes dans le 10 Livre. Et ainſi l'on ne peut point dire à proprement parler que 2 raiſons ſourdes égales (ſur tout quand leurs termes ſont abſolument incommenſurables, tant lineairement qu'en puiſſance) ſe puiſſent reduire à une ſeule & meſme raiſon premiere; puiſque l'on ne peut dire ny quelle des deux tiendroit lieu de premiere, ny qu'il y en ait une troiſiéme qui ſoit plûtoſt *raiſon premiere* que ces deux-là, à laquelle il les faille reduire pour les comprendre plus facilement; car aſſurement cela eſt impoſſible.

C'eſt pourquoy il faut bien prendre garde à ne pas étendre aux raiſons sourdes entre deux étenduës, ce que nous avons dit dans les propoſitions fondamentales de la 1. ſection; Que deux differentes raiſons premieres ne pouvoient eſtre égales; car on ne l'a dit que des raiſons de nombre à nombre, & cela n'a point de lieu dans les raiſons ſourdes entre deux étenduës.

Et c'eſt ce qui me fait croire que ceux qui ſe ſervent de la conſideration des expoſans, qu'ils ſuppoſent eſtre les meſmes dans toutes les raiſons égales, pour expliquer les proprietez des propo~~ſi~~rtions en general, que nous avons demonſtrées par une autre voye dans le commencement du 2 Livre, font le meſme ſophiſme que celuy qui ayant à expliquer la nature du genre, le feroit par ce qui ne convient qu'à une de ſes eſpeces, qui eſt un ſophiſme aſſez ordinaire, mais qui n'en eſt pas moins ſophiſme; car c'eſt ainſi par exemple qu'on explique les actions des bêtes par des penſées & des volontez qui ne conviennent qu'à l'homme, & qu'on le fait meſme au regard des choſes inanimées. Preſque tout le monde s'imaginant que les pierres vont au centre de la terre, comme à un lieu de repos, par une inclination qui a quelque rapport à celle qui nous fait deſirer ce que nous regardons comme nôtre bien.

AVERTISSEMENT.

Tout ce qui ſuit juſques à la fin de ce Livre ne ſont que des penſées détachées que l'on peut paſſer, mais où je croy neanmoins que l'on trouvera aſſez de choſes nouvelles, ou demonſtrées d'une nouvelle maniere.

SECTION TROISIEME.

Reflexions ſur les nombres quarrez, & divers moyens de trouver les ſommes de pluſieurs nombres rangez en de certains ordres. XXXIII.

De la difference entre deux quarrez.

DEUX quarrez quelconques ont pour leur difference le produit de la ſomme de leur racine par leur difference.

Soient les deux quarrez *bb.* & *cc.*

Leur difference ſera *bb—cc.*

Or la ſomme des racines eſt *b + c.* et leur difference est b – c

Et a le produit de l'un par l'autre donne *bb—cc*; ce qui eſt la ~~leur~~ difference des Quarrez

Exemple dans les nombres.

Ayant les deux quarrez 12, 12 (144) & 9, 9 (81.)

Je veux ſçavoir tout d'un coup leur difference. Je prens la ſomme des racines qui eſt 12 + 9 (21.)

Et leur difference 12—9 (3.)

3, 21 donne 63 qui eſt juſtement la difference de 144 à 81.

COROLLAIRE.

QUAND les racines de deux quarrez ne different que d'une unité, leur difference eſt ſimplement la ſomme des racines; car on ne fait rien davantage en la multipliant par l'unité. XXXIV.

Ainſi la difference entre 10, 10 (100) & 9, 9 (81) eſt 19 la ſomme des racines 10 & 9.

I. PROBLEME.

TROUVER des quarrez qui ayent entre eux une difference donnée. XXXV.

Soit h la difference donnée, l'ayant divisée par celuy qu'il me plaira de ses diviseurs, & appellant d ce diviseur & q le quotient, il est clair que dq est égal à h, & qu'ainsi ces deux quarrez auront h pour leur difference s'ils ont dq.

Or ils auront dq, si je donne au premier pour sa racine $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}q$.

Et au 2. pour la sienne $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}q$. (remarquez qu'il faut mettre pour le premier de d ou de q, celuy qui sera le plus grand.)

Car le quarré du 1 sera $\frac{1}{4}dd + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{2}dq$; (car deux quarts font une moitié.)

Et le quarré du 2 sera $\frac{1}{4}dd + \frac{1}{4}qq - \frac{1}{2}dq$.

Donc la difference entre ces quarrez sera deux moitiez de dq ; c'est à dire dq qui est égal à h.

Exemple dans les nombres, soit 80 la difference donnée. Je la divise par 20 & le quotient sera 4.

Donc la moitié de 20 (10) & la moitié de 4 (2) donneront les racines de ces deux quarrez ;

sçavoir $10 + 2 \ (12)$

& $10 - 2 \ (8)$

Car le quarré du 1 sera $100 + 4 + 2, 2, 10 \ (40)$

Et le quarré du 2 sera $100 + 4 - 40$.

Donc leur difference est 80. qui est en effet la difference du quarré de 12 (144) du quarré de 8 (64.)

Corollaire.

XXXVI. Quand la moitié de l'un des deux du diviseur ou du quotient, seroit un nombre rompu, la mesme chose se rencontreroit.

Exemple, soit la difference donnée 60, qui estant divisé par 12 donne 5. Je dis que le quarré de 6 plus $2\frac{1}{2}$ ($8\frac{1}{2}$) & de 6 moins $2\frac{1}{2}$ ($3\frac{1}{2}$) auront 60 pour leur difference.

Car le quarré de $8\frac{1}{2}$ est $72\frac{1}{4}$ & celuy de $3\frac{1}{2}$ 12, $\frac{1}{4}$ qui ont visiblement 60 pour leur difference.

On pourroit mesme prendre l'unité pour diviseur) ce-qui donneroit 60 pour quotient,) & ce seroit la même chose.

Car le quarré de $30 + \frac{1}{2}$ est $900 + \frac{1}{4} + 30$.

Et celuy de $30 - \frac{1}{2}$ est $900 + \frac{1}{4} - 30$.

Donc ces deux quarrez ont 60 pour leur difference; car le premier est $930 + \frac{1}{4}$, & le dernier $870 + \frac{1}{4}$.

II. Probleme.

Trouver tous les nombres dont le quarré est égal à deux quarrez. XXXVII.

Tout nombre composé de deux quarrez, comme $4 + 1$ (5) $9 + 4$ (13) $16 + 1$ (17) $16 + 9$ (25) à son quarré égal à deux quarrez. Et il n'y a que ces nombres là, ou leurs multiples, qui ayent cette proprieté.

Soit un nombre quelconque composé de 2 quarrez, comme $bb + cc$. Il est impossible que son quarré ne soit pas égal au quarré du nombre $bb - cc$, & à celuy du nombre $2.bc$. C'est à dire qui sera le double du produit des deux racines.

Car $bb + cc$ a pour son quarré $b^4 + c^4 + 2.bbcc$.

Et $bb - cc$ a pour son quarré $b^4 + c^4 - 2.bbcc$.

Donc leur difference est $4\,bbcc$, qui est certainement un quarré qui a pour sa racine $2\,bc$. Donc ce quarré là, plus celuy qui a pour sa racine $bb - cc$, doivent estre égaux à celuy dont la racine est $bb + cc$.

Donc il est impossible qu'un nombre composé de deux quarrez, n'ait pas son quarré égal à deux quarrez.

Exemple dans les nombres. 29 est composé de deux quarrez de 25 & de 4. Je dis donc que son quarré sera égal au quarré de $25 - 4$ (21,) & à celuy de 2, 2, 5; c'est à dire de 20.

Car $25 + 4$ a pour son quarré $625 + 16 + 2,4,25$. (200.)

Et $25 - 4$ a pour son quarré $625 + 16 - 200$.

Donc leur difference est 400 qui est le quarré de 20.

Et en effet le 1. de ces quarrez sera 841.

Le second 441.

Et le troisiéme 400.

I. Corollaire.

XXXVIII Tout nombre quarré plus 1 fait un nombre, dont le quarré est égal à deux quarrez, comme 16 + 1. 36 + 1. Mais alors le second quarré ayant pour sa racine ce quaré primitif moins un, le troisiéme est quatre fois ce même quarré, & a pour sa racine deux fois la racine de ce quarré que j'ay appellé primitif.

Exemple 36. + 1. a pour son quarré 36, 36, (1296) + 1 + 2, 36 (72.)

Et 36 — 1 a pour son quarré 36, 36 (1296 + 1 — 2, 36 (72.)

Donc leur difference est 4, 36. (144) dont la racine est 2, 6 (12.)

II. Corollaire.

XXXIX. La plus grande moitié d'un quarré impair à son quarré égal à deux quarrez; sçavoir au quarré de la plus petite moitié, & au quarré impair dont cette premiere racine est la plus grande moitié.

Preuve particuliere, soit hh un quarré impair, soit m sa plus grande moitié & n la plus petite (je les appelle ainsi, parce que je suppose qu'elles ne different que d'une unité) $m = n + 1$. Donc $m + n$ estant égal à hh, $n + n + 1$, ou $2n + 1$ seront aussi égales à hh.

Et le quarré de $n + 1$ sera la mesme chose que mm.

Or $n + 1$ a pour son quarré $nn + 1 + 2n$.

Or $2n + 1 = hh$.

Donc $mm = nn + hh$; ce qu'il falloit demonstrer.

Exemple dans les nombres.

Le quarré de 25 à 13 pour sa plus grande partie, & 12 pour la plus petite.

Donc le quarré de 12 + 1 est la mesme chose que le quarré de 13.

Or 12 + 1 a pour son quarré 12, 12, (144) + 1 + 24.

Et 24 + 1, est 25. Donc 144 + 25 = 169 quarré de 13.

AVERTISSEMENT.

ON *dira peut estre qu'il n'est donc pas vray qu'il n'y ait que les nombres composez de deux quarrez ou leurs multiples, qui ayent leur quarré égal à deux quarrez.* XL.

Je nie la consequence ; car il n'y a point de plus grande moitié de quarré impair qui ne soit composée de deux quarrez ; sçavoir du quarré de la plus grande moitié de la racine de ce quarré impair & de la plus petite. Exemple, 25 quarré de 5 à 13 pour sa plus grande moitié, & 5 sa racine a 3 pour sa plus grande moitié, & 2 pour la plus petite. Je dis donc que 13 sera composé du quarré de 3 qui est 9, & du quarré de 2 qui est 4. Et voicy la raison pourquoy il faut necessairement que cela soit ainsi ; car le quarré de 5 est la mesme chose que le quarré de $3 + 2$, qui est $9 + 4 + 2, 6$ (12.) Et n'y ayant qu'un de difference entre 3 & 2. Les deux quarrez de 3 & 2, ne sçauroient aussi estre differents du double du produit des deux racines que d'une unité. C'est pourquoy les deux quarrez 9 & 4 seront toûjours la plus grande moitié du quarré de 5, & 2, 6 sa plus petite moitié.

III. COROLLAIRE.

LE double d'un nombre composé de deux quarrez est aussi composé de deux quarrez ; sçavoir du quarré de la somme des racines des deux premiers quarrez & du quarré de leur difference. XLI.

Soient les 2 quarrez dont est composé le 1. nombre $bb + cc$. Je dis que le double de ce nombre là sera aussi composé de deux quarrez, dont le premier aura pour sa racine $b + c$, & l'autre $b - c$.

Car $b + c$ a pour son quarré $bb + cc + 2\,b\,c$.
Et $b - c$ a pour le sien $bb + cc - 2\,b\,c$.

Or $2\,b\,c$ estant par $+$ & par $-$ se reduit à zero. Reste donc $2\,bb$ & $2\,cc$ qui font le double de $bb + cc$.

Exemple dans les nombres. Le double de $25 + 4$ est 58. Les racines de ces premiers quarrez sont 5 & 2.

Or 5 + 2 a pour son quarré 25 + 4 + 2, 10 (20,) ce qui fait en tout 49.

Et 5 — 2 a pour son quarré 25 + 4 — 20 ce qui fait 9. Donc le tout fait 49 + 9, ce qui fait 58 double de 29.

IV. Corollaire.

XLII. La moitié d'un nombre composé de deux quarrez est aussi composée de deux quarré, sçavoir du quarrez de la moitié de la somme des racines, & du quarré de la moitié de leur difference.

Soient les deux quarrez $bb + cc$. Je dis que $\frac{1}{2}\, bb$ + plus $\frac{1}{2}\, cc$, sera aussi composé de deux quarrez, dont le premier aura pour sa racine $\frac{1}{2}\, b + \frac{1}{2}\, c$. Ce qui fait pour quarré $\frac{1}{4}\, bb + \frac{1}{4}\, cc + \frac{1}{2}\, bc$.

Et l'autre aura pour sa racine $\frac{1}{2}\, b - \frac{1}{2}\, c$, ce qui fait $\frac{1}{4}\, bb + \frac{1}{4}\, cc - \frac{1}{2}\, bc$.

Or ces deux quarrez ensemble tout comté & tout rabbatu font $\frac{1}{2}\, bb + \frac{1}{2}\, cc$. Et par consequent la moitié du nombre composé de bb & cc.

Exemple dans les nombres 208 est composé des quarrez 144 & 64. La somme de leurs racines est 12 + 8, dont la moitié est 10, & leur difference 4, dont la moitié est 2, donc le quarré de 10 (100) plus celuy de 2 (4) doit estre comme il est aussi la moitié de 208.

PROBLEMES.

Pour trouver les sommes de plusieurs nombres mis dans une certaine suite.

I. Probleme.

XLIII. Trouver la somme d'une Progression Arithmetique quelque grande qu'elle soit, pourveu qu'on en connoisse le premier & le dernier terme, & le nombre des termes.

Il ne faudra qu'ajoûter le 1 & le dernier, & multiplier ce nombre composé du 1 & du dernier par la moitié du nombre des termes, ou le nombre des termes entier, par la moitié de ce que font le premier & le dernier.

Exemple,

Exemple. Cent pierres estant arrangées de toise en toise, si un homme s'oblige à les ramasser toutes l'une aprés l'autre, & les mettre en un tas à une toise pres de la premiere : combien fera-t'il de toises de chemin ? Il en fera deux pour la 1[re] pierre, 4 pour la 2, & 200 pour la derniere. Ce sera donc une Progression Arithmetique de 100 termes, dont le premier & le dernier feront 202. Il faut donc multiplier ou 50 par 202 ou 100, par 101, ce qui fera 10100 toises ; c'est à dire 12120 pas Geometriques ; ce qui fait ~~plus~~ prés de 4 lieuës et demie communes, chacune de 2282 ½ toises.

III. Probleme.

Trouver la somme d'une Progression Geometrique, supposant qu'elle va en augmentant comme c'est le plus ordinaire, & qu'ainsi l'antecedent de chaque raison est plus petit que son consequent. XLIV.

Soit la somme de tous les termes appellée S.

Le premier terme a le 2 b & le dernier ω. Et les exposans de la raison qui regne par toute la Progression n & m ; c'est à dire que deux termes qui se suivent immediatement sont entre eux comme n est à m, ou comme a est à b : si la premiere raison est déja dans les moindres termes qu'elle peut estre.

Or tous les termes estant antecedens hors le dernier qui n'est que consequent, & tous consequens hors le premier qui n'est qu'antecedent. Tous les antecedens se pourront nommer $S - \omega$. Et tous les consequent $S - a$.

Cela supposé, je dis que le dernier moins le 1 ; (c'est à dire $\omega - a$) est à toute la somme moins le dernier, (c'est à dire à $S - \omega$) comme $m - n$, est à n, ou comme $b - a$ est à a. Et en voicy la raison.

Parce qui a esté dit 11. 45 dans une Progression Geometrique, tous les antecedens sont à tous les consequens, comme un antecedent est à un consequent.

Donc *permutando*, tous les consequens sont à tous les antecedens comme un consequent est à un antedent.

Donc *dividendo*, tous les consequens moins tous les antecedens sont à tous les antecedens, comme un consequent moins son antecedent est à son antecedent.

Or quand je dis, *tous les consequens moins tous les antecedens*, c'est comme si je disois le dernier terme moins le premier (ω—*a*;) car tous les termes estant consequens hors le premier, je les mets tous par *plus*, hors le premier, quand je dis, *tous les consequens*: & estant tous antecedens hors le dernier, je les mets tous par *moins* hors le dernier, quand je dis *moins tous les antecedens*. Ils sont donc tous hors le premier & le dernier, par plus & par moins, & par consequent se reduisent à rien. Et il n'y a que le dernier qui ne soit que par *plus*, & le premier qui ne soit que par *moins*. Donc cela se reduit au dernier moins le premier (ω — *a*.)

Donc quand la Progression est ascendante, le dernier terme moins le 1, est à tous les termes moins le dernier, comme le 2 terme moins le premier est au premier.

En voicy la preuve par la specieuse.

S—*a*. S—ω. : : *b*. *a*.

Donc *dividendo* S—*a*—S + ω. S—ω : : *b*—*a*. *a*.

Or dans le premier terme de cette proportion S estant par *plus* & par *moins* se reduit à rien. Reste donc ω par *plus* & *a* par *moins*. Donc cela ~~...~~ veut dire qu'ω—*a*. S—ω::

b—a. a.

b—a. a :: m—n. n.

Mais si la Progression estoit décendante, chaque antecedent estant plus grand que son consequent, il ne faudroit que changer & dire.

Que le 1 terme moins le dernier seroit à tous les termes moins le premier, comme un antecedent moins son consequent est à son consequent *a*—ω. S—*a* : : *n*—*m*. *m*.

I. Corollaire.

XLV. On pourra prouver facilement par là que si on prend d'un tout une dixiéme, & une dixiéme de cette dixiéme; c'est à dire $\frac{1}{100}$ & une dixiéme de cette centiéme, c'est à dire $\frac{1}{1000}$ & ainsi jusques à l'infiny, toutes ces dixiémes de dixiémes prises à l'infiny ne feront que $\frac{1}{9}$ du tout, & les neuviémes de neuviémes prises de la mesme sorte, $\frac{1}{8}$ & les huitiémes de huitiémes $\frac{1}{7}$, & ainsi en diminuant toûjours les dominateurs d'un, les quarts un tiers, les tiers une moitié, & les moitiés le tout.

Il ne faut pour cela que faire une Progression Geometrique en cette maniere. $1. \frac{1}{10}\ \frac{1}{100}\ \frac{1}{1000}$. & ainsi à l'infiny.

Donc par ce qui vient d'estre dit. 1. moins le dernier terme (qui se reduit à zero la progression allant à l'infiny, de sorte qu'on le doit prendre simplement pour 1.) est à tous les termes de la Progression moins un; c'est à dire à toute cette infinité de dixiémes de 10^mes, comme $1 - \frac{1}{10}$ est à $\frac{1}{10}$, c'est à dire comme $\frac{9}{10}$ est à $\frac{1}{10}$, & parconsequent comme 9 à 1. Donc toute cette infinité de dixiémes de 10^mes, n'est au tout que comme un à 9. Donc elles ne sont que la 9 partie du tout; ce qu'il falloit demonstrer.

II. Corollaire.

On voit par la solution du sophisme des anciens contre le mouvement. XLVI.

Supposant, disoient-ils, qu'Achille aille 10 fois plus viste qu'une tortuë, si la tortuë a une lieuë d'avance, jamais Achile ne l'attrapera : car tandis qu'Achile fera la 1^re lieuë, la tortuë fera la $\frac{1}{10}$ de la 2^e lieuë; & tandis qu'Achile fera la $\frac{1}{10}$ de la 2^e lieuë, la tortuë fera la $\frac{1}{10}$ de cette $\frac{1}{10}$, & ainsi à l'infiny.

Tout cela suppose que toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini fassent une espace infini, au lieu qu'elles ne font toutes ensemble qu'$\frac{1}{9}$ de lieuë, selon le Theoreme precedent.

Et c'est pourquoy Achile doit attraper la tortuë à la premiere $\frac{1}{9}$ de la 2^e lieuë. Car allant 10 fois plus viste que la tortuë, il doit avoir fait dix fois autant de chemin dans le même temps.

Donc pendant que la tortuë parcourra une $\frac{1}{9}$ de lieuë, Achile en doit parcourir $\frac{10}{9}$, ce qui fait justement la premiere lieuë composée de $\frac{9}{9}$, plus $\frac{1}{9}$ de la seconde lieuë.

III. Corollaire.

Si une horloge a deux aiguilles, l'une des heures, qui fait XLVII.

ſon tour en 12 heures, & l'autre des minutes, qui fait le même tour en une heure, marquer tous les points auſquels ces deux aiguilles ſe rencontreront.

Ce ſera à ces heures icy. $1 + \frac{1}{11}$, $2 + \frac{2}{11}$, $3 + \frac{3}{11}$, $4 + \frac{4}{11}$, $5 + \frac{5}{11}$, $6 + \frac{6}{11}$, $7 + \frac{7}{11}$, $8 + \frac{8}{11}$, $9 + \frac{9}{11}$, $10 + \frac{10}{11}$, $11 + \frac{11}{11}$. C'eſt à dire 12 heures.

La preuve en eſt aiſée à deviner par celle du premier Corollaire.

III. Probleme.

XLVIII. Trouver la ſuite des nombres triangulaires, pyramidaux & plus que pyramidaux.

Pour bien comprendre cecy, il faut remarquer qu'on peut diſpoſer les nombres en pluſieurs bandes, qui ſeront telles que chaque nombre d'une bande ſera égal à tous ceux de la bande precedente incluſivement juſques à celuy-là, c'eſt à dire que le 2 par exemple de la troiſiéme bande ſera égal aux deux premiers de la 2, le 3 aux trois premiers, le 4 aux quatre premiers, & ainſi de ſuite juſqu'à l'infiny.

On le comprendra mieux par l'exemple de 6 bandes que je ne continueray que juſques à 9 termes.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002

La premiere bande n'eſt que d'unités.

La deuxiéme des nombres ordinaires, dont on voit aſſez que chacun comprend autant d'unitez qu'il y a eu de termes dans la premiere bande juſques à ce terme de la 2.

La troiſiéme eſt des nombres qu'on appelle Triangulaires, parce qu'ils ſe peuvent diſpoſer en triangle.

La quatriéme de ceux qu'on appelle Pyramidaux.

La cinquiéme des ſeconds-Pyramidaux. Je ne ſçay ſi on leur a donné un autre nom.

La ſixiéme des troiſiémes Pyramidaux. Et cela ſe peut continuer juſques à l'infiny.

Il s'agit donc de trouver la ſomme de tant de nombres que l'on voudra à commencer toûjours par l'unité dans chacune de ces bandes. Par exemple la ſomme des dix premiers termes de la troiſiéme bande, ou de la quatriéme, ou de la cinquiéme. Et il faut remarquer que c'eſt la meſme choſe de trouver la ſomme des dix premiers termes de la troiſiéme bande; c'eſt à dire des dix premiers nombres triangulaires, que de trouver le dixiéme nombre pyramidal.

Voilà une regle generale pour cela que je tiens d'un fort habile homme. Je la pourrois propoſer generalement: mais j'aime mieux l'appliquer tout d'un coup à un exemple particulier par lequel on jugera ſans peine de tous les autres.

Je veux chercher la ſomme des 10 premiers termes de quelques bandes que ce ſoit. Je mets 10, & puis 11, & puis 12, &c. comme des nombres qui ſe doivent multiplier les uns les autres ſelon les bandes, dont on veut ſçavoir la ſomme des dix premiers termes: & je mets au deſſous de chacun de ces nombres 1, 2, 3, &c. en cette maniere.

$$\frac{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ \&c.}{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \&c.}$$

Les nombres de deſſous ſont pour diviſer les produits des nombres de deſſus; car ſi j'ay beſoin de multiplier les 3 premiers nombres les uns par les autres, je les diviſeray par le produit des 3 de deſſous, qui ne font que 6, parce que l'unité ne change rien en diviſant.

Cela supposé, si je veux avoir la somme de dix termes de la 1. bande, je ne prends que le premier chiffre d'enhaut qui marque que c'est de dix termes, dont je veux avoir la somme. Et ce nombre me la donne sans qu'il soit divisé, parce que l'unité qui est au dessous ne divise point.

Mais si je veux avoir la somme de dix termes de la 2ᵉ bande, je multiplie les deux premiers nombres de dessus, c'est à dire 10 par 11, ce qui fait 110, & les divise par les deux de dessous; c'est à dire par une fois 2, ce qui donne 55. Mais pour faire cela plus facilement avant que de faire la multiplication, je divise par deux l'un des deux chiffres qui le peut estre, & je multiplie l'autre nombre par sa moitié, c'est à dire 11 par 5; ce qui donne encore 55.

Si je veux avoir la somme de dix termes de la 3ᵉ bande, je me sers pour cela des trois premiers chiffres d'enhaut, & je commence par diviser ou 10 par 2 & 12 par 3, ou tout d'un coup 12 par 6; (car cela revient au mesme,) & je multiplie les uns par les autres 5, 11, 4, ou 10, 11, 2, ce qui donnera 220, qui sont la somme de dix premiers chiffres de la 3ᵉ bande.

Pour la 4ᵉ bande je me sers des 4 chiffres d'enhaut, les ayant auparavant divisez par ceux d'enbas, sçavoir 10 par 2, & 12 par 3 fois 4, ce qui le reduira à 1, qui ne fera rien dans la multiplication des chiffres d'enhaut, & ainsi ils se reduiront à 5, 11, 13, ce qui fait 715.

Pour la 5ᵉ bande, on en fera autant des 5 chiffres d'enhaut, on les divisera autant que l'on pourra par ceux d'enbas en cette maniere, 14 par 2, ce qui donnera 7, 12 par 3 fois 4, ce qui le reduira à rien au regard de la multiplication à faire, & 10 par 5, ce qui donnera 2. Et ainsi ces 5 nombres ne seront plus que 2, 11, 13, 7, ce qui fait 2002.

Je n'en dirai pas davantage. On voit assez comment cela doit faire pour toutes les bandes suivantes, & pour toute autre quantité de termes dont on voudra sçavoir la somme, comme la somme des 100 premiers termes de quelques bandes que ce soit; car laissant toûjours enbas 1, 2, 3, &c. ce qui est invariable pour diviser les nombres d'enhaut: il faudra mettre pour ces nombres d'enhaut 100, 101, 102, 103, &c.

Mais j'avoüe franchement que je ne sçay la raison de cela que pour la 2 & la 3 bande, & non pour les autres.

Observations sur les nombres Triangulaires.

J'AY déja dit qu'on appelloit Triangulaires les chiffres de la 3 bande. Or comme je pretends m'en servir pour trouver avec beaucoup de facilité la somme des quarrez & des cubes: j'ay besoin d'en remarquer quelques proprietez. XLIX.

La 1 est que deux nombres triangulaires qui se suivent immediatement font pris ensemble le quaré du nombre qui répond au plus grand des deux. On le verra par la table & en voicy la raison.

Je dis donc que le nombre Triangulaire de 9 & celui de 10, doivent faire ensemble le quarré de 10 qui est cent. Car pour avoir le nombre triangulaire de neuf, il faut multiplier 9 par la moitié de 10, ce qui fait 5, 9, & pour avoir celuy de 10, il faut multiplier 11 par la moitié de 10, ce qui fait 5, 11. Or 9 & 11 faisant 20, il est visible que ces deux multiplications ensemble font 5, 20; c'est à dire 100.

Autrement 5, 10 — 1 font 50 — 5.
Et 5, 10 + 1 font 50 + 5.
Or cela fait ensemble 2, 50, c'est à dire 100.
Autre exemple, le nombre Triangulaire de 8 est 4, 9.
Et celuy de 9 5, 9.
Ce qui fait ensemble 9, 9 ou 81.

La 2 proprieté est que deux nombres Triangulaires qui se suivent ont pour leur difference le nombre naturel qui répond au plus grand.

Et il faut bien que cela soit ainsi; car le 9^{me} nombre Triangulaire est la somme des 9 premiers nombres, &

le 10 la ſomme des 10 premiers, qui parconſequent ne peut differer de l'autre, que parce qu'elle a 10 de plus.

On peut encore remarquer une 3e proprieté de ces nombres Triangulaires, qui eſt aſſez ſurprenante, quoy qu'elle ne ſoit pas de grand uſage. C'eſt que tout nombre quarré impair moins un ſe pouvant diviſer par 8, pour trouver combien 8 y ſera de fois, il ne faut que prendre le nombre triangulaire de la plus petite moitié de la racine de ce quarré impair. Exemples 8 eſt 45 fois dans le quarré de 19, parce que le nombre triangulaire de 9 (qui eſt la plus petite moitié de 19) eſt 45. Et 8 eſt 120 fois dans le quarré de 31, parce que 120 eſt le nombre Triangulaire de 15 qui eſt la plus petite moitié de 31.

De la premiere Proprieté il s'enſuit que toute quantité de nombres quarrez pris de ſuite, (ce qui ſe ſuppoſe toûjours) contient deux fois la meſme quantité des nombres Triangulaires moins le dernier qu'elle ne contient qu'une fois. Car chaque nombre Triangulaire entre deux fois dans la compoſition d'un quarré, hors le dernier qui ny entre qu'une fois : 1. dans le 1, qui eſt auſſi 1. Et dans le 2 qui eſt 1 + 3, & 3 qui eſt entré dans le 2 quarré qui eſt 4, entre avec 6 dans le 3 qui eſt 9, & 6 avec 10 dans le 4 qui eſt 16 & 10 avec 15 dans le 5 qui eſt 25, & 15 avec 21 dans le 6 qui eſt 36.

On voit donc que ſi on en demeure-là, il n'y aura que 21, ſixiéme nombre Triangulaire, qui n'entrera qu'une fois dans l'un des 6 premiers quarrez, & par conſequent tous les autres y entrant deux fois, il eſt donc clair que la ſomme des 6 quarrez plus 21, doit eſtre égale au double de la ſomme des 6 premiers nombres triangulaires.

IV. Probleme.

L. Trouver la ſomme de tant de nombres quarrez de ſuite que l'on voudra, c'eſt à dire des 10 premiers, des 20 des 100, &c.

On n'a ſelon ce qui vient d'eſtre dit, qu'à avoir la ſomme d'autant de nombres Triangulaires ; c'eſt à dire de ceux

ceux de la 3 bande, la doubler, & puis en oster le dernier des nombres Triangulaires, dont on a trouvé la somme.

Le 10 nombre Triangulaire est 55. La somme des 10 premiers est 220, comme on l'a déja fait voir. Le double est 440, d'où ostant 55, on aura 385 pour la somme des 10 premiers quarrez.

Autrement. Faites comme si vous vouliez avoir la somme des 10 premiers nombres Triangulaires, en mettant au dessous 1, 2, 3, ou seulement 2, 3; car l'1 ne sert que pour l'analogie, & au dessus 10, 11, mais au lieu du troisiéme qui est 12, mettre la somme des deux premiers qui est 21; ainsi

$$\frac{10,\ 11,\ 21.}{2,\ 3,}$$

Puis ayant divisé 10 par 2, ce qui donne 5 & 21 par 3, ce qui donne 7, multiplier les uns par les autres 5, 11, 7, ce qui donnera 55, 7, ce fait 385.

Cette derniere façon revient à l'autre; car il faut remarquer que si au lieu de prendre pour troisiéme nombre le premier plus 2. On prend le double du 1 plus un: il se trouve toûjours que ce dernier plus trois est double de celuy dont on se sert pour trouver la somme des Triangulaires: d'où il arrive que divisant l'un & l'autre par trois, celuy dont on se sert pour les quarrez plus 1 est double de l'autre. 21 plus 3 est double de 12, & le tiers de 21 estant 7 $7+1$ est double de 4 qui est le tiers de 12.

V. Probleme.

Trouver la somme de tant de Cubes que l'on voudra en les prenant de suite, c'est à dire des 10 premiers, des 20 premiers, &c. LI.

Le quarré du nombre triangulaire qui répond au nombre des Cubes dont on veut avoir la somme est la somme des Cubes; c'est à dire que si on veut avoir la somme des 10 premiers Cubes, il ne faut que trouver le 10 nombre Triangulaire qui est 55, & son quarré qui est 3025 sera le nombre des Cubes.

On le peut prouver en deux manieres, l'une plus subtile, & l'autre plus naturelle. La 1 dépend des deux proprietez des nombres triangulaires.

Car par la 1, deux triangulaires qui se suivent font ensemble le quarré du nombre qui répond au plus grand, c'est à dire que le 5 qui est 15, & le 6 qui est 21, font ensemble le quarré de 6 qui est 36.

Et par la seconde ces deux mesmes Triangulaires ont 6 pour leur difference. D'où il s'ensuit que les prenant pour racines de deux quarrez: ces quarrez auront pour leur difference la somme de ces deux racines qui est 36 multipliée par leur difference qui est 6, c'est à dire qu'ils auront pour leur difference le cube de 6.

Or pour voir plus facilement ce qui suit delà, nous marquerons chaque nombre triangulaire par un accent circonflexe que nous mettrons au dessus du nombre qui marque sa place, c'est à dire que 6 sera le sixiéme nombre Triangulaire qui est 21, 5 le cinquiéme qui est 15, & ainsi des autres.

Et pour marquer le quarré de chacun nous mettrons seulement 6^2 5^2. Et les Cubes des nombres ordinaires 6^3. 5^3. 4^3, &c. Cela estant.

$$6^2 = \begin{cases} 6^3 \\ 5^2 \end{cases} = \begin{cases} 5^3 \\ 4^2 \end{cases} = \begin{cases} 4^3 \\ 5^2 \end{cases} = \begin{cases} 3^3 \\ 2^2 \end{cases} = \begin{cases} 2^3 \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

D'où il s'ensuit que laissant là les quarrez des autres nombres Triangulaires, parce que l'on a leurs équivalens, le seul quarré du sixiéme nombre, qui est 441 est égal à la somme des six premiers nombres cubes.

L'autre raison est plus simple, & on la peut exprimer ainsi. La somme de tant de nombres cubiques de suite que l'on voudra, est le produit de la somme de toutes les racines multipliée par cette mesme somme; car prenant comme il le faut, ces nombres cubiques d'ordre, leurs racines seront toûjours autant de nombres naturels que l'on prendra de Cubes dont on voudra sçavoir la somme.

Soient donc tant de nombres naturels que l'on voudra en commenceant par 1.

Les multipliant par autant	1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.
d'autres tous les mesmes.	1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.

Il se fera autant de multiplications partiales, que sera le quarré des termes que l'on prendra, c'est à dire que si on n'en prend que 5, il y aura 25 multiplications partiales. Si 6, il y en aura 36, &c.

Mais il faut remarquer 1. Que de ces multiplications partiales, les directes comme 2, 2. 3, 3. sont toûjours simples, & que celles qui se font en croix, comme 2, 3, 3, 5, &c. sont toûjours doubles.

En second lieu, que c'est la mesme chose de multiplier 6 par 2 + 4 que de le multiplier separement par 2, en disant 2, 6. & par 4 en disant 4, 6. Il faut seulement remarquer que la multiplication de 2 + 4 par 6 comprend deux des 36 multiplications partiales, que doit avoir la multiplication des 6 premiers nombres par eux mesmes: & qui ajoûtant *bis* cela en fait 4.

Cela supposé, voicy comme ces 36 Multiplications partiales feront les 6 premiers Cubes.

Denomb. des Mult. partiales.	Mult. partiales.			Cubes.
1	1, 1	1		1
3 { 1 2	2, 2 1, 2 *bis*	4 4	2, 4.	8
5 { 1 4	3, 3 1 + 2, 3 *bis*	9 2, 9	3, 9.	27
7 { 1 4 2	4, 4 1 + 3, 4 *bis* 2, 4 *bis*	16 2, 16 16	4, 16	64
9 { 1 4 4	5, 5 1 + 4, 5 *bis* 2 + 3, 5 *bis*	25 2, 25 2, 25	5, 25.	125
11 { 1 4 4 2	6, 6 1 + 5, 6 *bis* 2 + 4, 6 *bis* 3, 6 *bis*	36 2, 36 2, 36 36	6, 36.	236

Somme 36.

On voit par là, que le premier nombre multiplié par soy-mesme ne donne qu'une multiplication qui fait un premier nombre cube.

Que les deux premiers 1. 2 multipliez aussi par eux mêmes, (ce qui se doit toûjours sous-entendre sans qu'il soit besoin de l'exprimer,) luy donne 4, dont une estant déja prise, les trois autres donnent huit second nombre cube.

Que les trois premiers 1. 2. 3. en donnent 9 dont 4 étant prises qui ont donné les deux premiers cubes, les cinq qui restent donnent le 3. 27.

Que les quatre 1. 2. 3. 4. en donnent 16, dont 9 estant déja prises qui ont donné les trois premiers cubes, les 7 qui restent donnent le 4 64.

Que les cinq 1. 2. 3. 4. 5. en donnent 25, dont 16 estant déja prises qui ont donné les 4 premiers cubes, les 9 qui restent donnent le 5 125.

Que les six 1. 2. 3. 4. 5. 6. en donnent 36, dont 25 estant déja prises qui ont donné les cinq premiers cubes. Les 11 qui restent donnent le 6. 2. 16.

Et on voit sans peine que cela doit aller jusqu'à l'infiny.

Mais pour éviter l'embarras & la longueur de ces multiplications partiales, (ce qui n'a servy qu'à la preuve.) Il ne faut que prendre la somme de toutes ces racines, (c'est à dire de tant que l'on voudra de nombres naturels,) & la multiplier par elle-même ; car il est visible que c'est la même chose de multiplier 3 par 3, que de multiplier 1 + 2 par 1 + 2.

Or la somme de ces nombres naturels, est ce qu'on appelle nombre triangulaire ; car 6 par exemple, est le nombre triangulaire de 3, parce que 1 + 2 + 3 font 6. Donc en multipliant le dixiéme nombre triangulaire qui est 55 par soy mesme, on aura la somme des dix premiers cubes.

Or rien n'est plus facile que de trouver le nombre triangulaire de tel nombre que l'on veut ; car si c'est un nombre impair, Il ne faut que le multiplier par sa plus grande moitié : 5. 3, 5. 7. 4, 7. 9. 5, 9. 11. 6, 11.

Et si c'est un nombre pair, il ne faut que prendre sa moitié, & multiplier par là ce nombre plus un. 6. 3, 7. 8. 4, 9. 10. 5, 11. 12. 6, 13. 14. 7, 13.

Comment il se faut conduire pour resoudre tous les Problemes semblables à ceux de la mule & de l'asnesse, des deux vases qui ont un mesme couvercle, &c.

PREPARATION.

Il faut écrire les hypotheses en donnant des noms aux quantitez inconnuës, exemple, mule, asnesse.

Le nombre des sacs que porte la mule soit appellé A, & celuy que porte l'asnesse B.

HYPOTHESES.

1. Hip. $A - 3 = B + 3$ { Si la mule donne à l'asnesse trois de ses sacs, ils en auront autant l'une que l'autre. L I I.

2. Hip. $A + 1 = 3\,B - 3$ { Si l'asnesse donne à la mule l'un de ses sacs, la mule en portera 3 fois autant que l'asnesse.

Ayant ces hypotheses, il faut trouver les équivalens; c'est à dire l'équivalent d'A par B plus ou moins, ce qu'il faut, & l'équivalent de B par A plus ou moins ce qu'il faut.

Pour trouver les équivalens d'une Hypothese : il faut oster d'un membre les chiffres & laisser la lettre seule, & transporter les chiffres dans l'autre membre, en changeant le signe. Exemple

EQUIVALENS.

Par la 1 Hip. $\begin{cases} A = B + 6. \\ B = A - 6. \end{cases}$

Par la 2 Hip. $\begin{cases} A = 3\,B - 4. \\ 3\,B = A + 4. \end{cases}$

Ayant ces équivalens, on resout sans peine les Problemes. Il ne faut pour cela que reprendre les Hypotheses, & si on veut resoudre le Probleme par la premiere : Il faut se servir des équivalens de la seconde, & au contraire si on le veut resoudre par la seconde Hypothese. Il faut se servir des équivalens de la premiere, & par là, on fera que dans l'équation de chaque hypothese, il n'y ait que les mesmes lettres dans l'un & dans l'autre membre.

I. PROBLEME. HYPOTHESES.

$$\begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix}\left\{\begin{array}{l} A-3 = B+3. \\ A+1 = 3\,B-3. \end{array}\right.$$

EQUIVALENS.

$$\text{Par la 1 Hyp.}\left\{\begin{array}{l} A = B+6. \\ B = A-6. \end{array}\right.$$

$$\text{Par la 2 Hyp.}\left\{\begin{array}{l} A = 3B-4. \\ 3B = A+4. \end{array}\right.$$

I. Solution par la 1 Hypothese en reduisant tout en B.

$$\begin{array}{l} \text{1. Hypothese.} \\ \text{Equivalent de la 2.} \end{array}\left\{\begin{array}{l} A-3 = B+3. \\ A = 3\,B-4. \end{array}\right.$$

Je puis donc mettre au lieu d'A $3\,B-4$, donc mettant dans le second membre de l'équation 7 qui est par moins dans le premier.

$$3\,B = B+10.$$

Donc $2\,B = 10.$

Donc $B = 5.$

II. Solution par la 2 Hypothese en reduisant le tout en B.

$$\begin{array}{l} \text{2. Hypothese.} \\ \text{2. Eq. de la 2 Hyp.} \end{array}\left\{\begin{array}{l} A+1 = 3\,B-3. \\ B = A-6. \end{array}\right.$$

Mettant donc B 6 au lieu d'A.

$$B+7 = 3\,B-3.$$

Donc $B+10 = 3\,B.$

Donc $10 = 2\,B.$

Donc $5 = B.$

III. *Solution par la 2 Hypothese en reduisant tout en A.*

$$\begin{array}{l} \text{2 Hypothese.} \\ \text{2 Equiv. de la 2.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A + 1 = B - 3. \\ B\ A = -6. \end{array} \right.$$

Donc mettant au lieu de 3 B trois fois $A - 6$ qui font $3\,A - 18$.

$A + 1 = 3\,A - 18 - 3$, [c'eſt à dire -21] & tranſpoſant 21 dans le premier membre en changeant le ſigne.

$A + 22 = 3\,A.$

Donc $22 = 2\,A.$

Donc $11 = A.$

Donc A eſt 11 & B 5;

C'eſt à dire que la mule avoit 11 ſacs, & l'aſneſſe 5.

II. PROBLEME.

$$\begin{array}{r} \text{Hypotheſes 1.} \\ \text{2.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A - 9 = B + 9. \\ A + 3 = 3\,B - 9. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Equivalens de} \\ \text{la 1 Hypoth.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1\,A = B + 18. \\ 2\,B = A - 18. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Equivalens de} \\ \text{la 2.} \end{array} \left\{ A = 3\,B - 18. \right.$$

I. *Solution par la 1 Hypotheſe en reduiſant tout en B.*

$$\begin{array}{l} \text{1. Hypotheſe.} \\ \text{Equiv. de la 2.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A - 9 = B + 9. \\ A = 3\,B - 12. \end{array} \right.$$

$3\,B - 12 - 9$, [c'eſt à dire $-21 = B + 9$.

Donc $3\,B = B + 30.$

Donc $2\,B = 30.$

Donc $B = 15.$

II. *Solution par la 2 Hypotheſe en reduiſant tout en A.*

$$\begin{array}{l} \text{2 Hypotheſe.} \\ \text{2 Equiv. de la 1.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A + 3 = 3\,B - 9. \\ B = A - 18. \end{array} \right.$$

$A + 3 = 3\,A - 63.$

Donc $A + 66\,B = 3\,A.$

Donc $66\,B = 2\,A.$

Donc $33 = A.$ C'eſt à dire que A eſt 33 & B eſt 13.

III. *Solution par la 2 Hypothese en reduisant tout en B.*

$3B + 9 = B + 21.$
Donc $3B = B + 30.$
Donc $2B = 30.$
Donc $B = 15.$

III. Probleme.

LIII. Hypothese $\begin{array}{r} 1. \\ 2. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A + 2000 = 4B. \\ B + 1000 = \frac{1}{2}A. \end{array} \right.$

Equiv. $\begin{array}{r} \text{de la } 1. \\ \text{de la } 2. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A = 4B - 2000. \\ B = \frac{1}{2}A - 1000. \end{array} \right.$

I. *Solution par la 1 Hypothese.*

$A + 2000 = 2A - 4000.$
Donc $A + 6000 = 2A.$
Donc $6000 = A.$

II. *Solution par la 2 Hypothese.*

$B + 1000 = 2B - 1000.$
Donc $B + 2000 = 2B.$
Donc $2000 = B.$

III. *Solution par la 1 Hypothese.*

LIV. $A + 2000 = 4B.$
Donc $\frac{1}{4}A + 500 = B.$
Donc $B = \frac{1}{2}A - 1000.$
Donc $\frac{1}{4}A + 500 = \frac{1}{2}A - 1000.$
Donc $\frac{1}{4}A + 1500 = \frac{1}{2}A.$
Donc $1500\,A = \frac{1}{4}A.$
Donc $6000 = A.$

IV. Probleme.

Hypothese $\begin{array}{r} 1. \\ 2. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A + 3000 = 3B. \\ B + 3000 = \frac{1}{2}A. \end{array} \right.$

Equiv. de la $\begin{array}{r} 1. \\ 2. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A = 3B - 3000. \\ B = \frac{1}{2}A - 1000. \end{array} \right.$

I. *Solution*

I. *Solution par la 1 Hypothese.*

$A + 3000 = A\,\frac{1}{2} - 3000.$
Donc $A + 6000 = A\,\frac{1}{2}.$
Donc $6000 = \frac{1}{2}\,A.$
Donc $1200 = A.$

II. *Solution par la 2 hypothese.*

$B + 1000 = B\,\frac{1}{2} - 1500.$
Donc $B + 2500 = B\,\frac{1}{2}.$
Donc $2500 = \frac{1}{2}\,B.$

V. PROBLEME.

Hypothese 1. $\left\{ \begin{array}{l} A + 3000 = 9\,B. \\ B + 5000 = \frac{1}{3}\,A. \end{array} \right.$ 2.

Eqviv. de la 1. $\left\{ A = 9\,B - 3000. \right.$
de la 2. $\left\{ B = \frac{1}{3}\,A - 5000. \right.$

I. *Solution par la 1e Hypothese.*

$A + 3000 = 3\,A - 45000.$
Donc $A + 48000 = 3\,A.$
Donc $48000 = 2\,A.$
Donc $24000 = A.$

II. *Solution par la 2e Hypothese.*

$B + 5000 = 3\,B - 1000.$
Donc $B + 6000 = 3\,B.$
Donc $6000 = 2\,B.$
Donc $3000 = B.$

VI. PROBLEME.

Hypothese 1. $\left\{ \begin{array}{l} A - 25 = B + 25. \\ A + 25 = 2\,B - 50. \end{array} \right.$ 2.

Equiv. de la 1. $\left\{ \begin{array}{l} A = B + 50. \\ B = A - 50. \end{array} \right.$

de la 2. $\left\{ A = 2\,B - 75. \right.$

I. *Solution par la 1 Hypothese.*

$B + 25 = 2B - 100.$
Donc $B + 125 = 2B.$
Donc $125 = B.$

II. *Solution par la 2 Hypothese.*

$A + 25 = 2A - 150.$
Donc $A = 2A - 175.$
Donc $A = 175.$

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE CINQUIE'ME.

DE L'ESTENDUE.

DE LA LIGNE DROITE ET CIRCULAIRE. DES DROITES PERPENDICULAIRES, ET OBLIQUES.

DEFINITIONS.

NOus *avons parlé jusques icy de la grandeur en general. Il faut maintenant descendre à ses especes.* 1.

TOUTE grandeur est continuë, comme est l'étenduë, le temps, le mouvement: ou non continuë, comme le nombre.

La continuë est ou successive, comme le temps, le mouvement.

Ou permanente, qui s'appelle generalement *espace* ou *étenduë.*

Mais elle se considere ou selon toutes ses trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur, & alors elle s'appelle *corps* ou *ſolide*.

Ou ſelon deux ſeulement, longueur & largeur, & alors elle s'appelle *ſurface* ou *ſuperficie*, qui eſt ou plate, qui s'appelle *plan*, ou non plate qui s'appelle *ſurface courbe*.

Ou ſelon une ſeulement, qui eſt la longueur, & alors elle s'appelle *ligne*, qui eſt ou droite ou courbe.

L'extrémité de la ligne s'appelle *point*, qui doit eſtre conceu indiviſible. Car s'il pouvoit eſtre partagé en deux, l'une de ces moitiez ne ſeroit pas à l'extrémité de la ligne.

Et par la même raiſon la ligne, qui eſt indiviſible ſelon la largeur, parce qu'elle eſt conſiderée comme n'en ayant point, eſt l'extrémité de la ſurface.

Et la ſurface qui eſt auſſi indiviſible ſelon la profondeur, eſt l'extrémité du corps.

Premier Avertissement.

II. Les *idées d'une ſurface plate & d'une ligne droite ſont ſi ſimples, qu'on ne feroit qu'embroüiller ces termes en les voulant definir. On peut ſeulement en donner des exemples pour en fixer l'idée aux termes de chaque langue.*

Second Avertissement.

III. Quoy *qu'il n'y ait point au monde d'étenduë qui n'ait que longueur & largeur ſans profondeur, ou longueur ſans largeur ny profondeur, & encor moins de point, qui n'ait ny longueur, ny largeur, ny profondeur; ce que diſent les Geometres des ſurfaces, des lignes & des points ne laiſſe pas d'eſtre vray, parce qu'il ſuffit pour cela que dans un corps qui eſt veritablement long, large, & profond, je puiſſe n'en conſiderer que la longueur & la largeur, ſans faire attention à la profondeur, ou même la longueur ſeule ſans m'arreſter ny à la largeur, ny à la profondeur. Ainſi pour meſurer un champ, je ne m'amuſe pas à creuſer pour ſçavoir ſi la terre y eſt bieu profonde, mais je regarde ſeulement combien il eſt long & large: Et pour ſçavoir combien il y a de Paris à Orleans, je ne meſure pas la largeur des chemins, mais ſeulement la longueur. Et de même ce qu'on appelle Point n'eſt que la ligne même, entant qu'on n'y conſidere que la negation d'une plus longue étenduë.*

Troisieme Avertissement.

On doit commencer par la ligne comme par la plus ſimple eſtenduë: & de plus pour en rendre la conſideration plus facile lors que l'on compare pluſieurs lignes enſemble, on les ſuppoſe toûjours dans ces premiers élemens comme eſtant poſées, ou décrites ſur un même plan, c'eſt à dire ſur une même ſuperficie plate; ce qu'il ſuffit d'avoir dit une fois pour toutes. IV.

PRREMIERE SECTION.

De la Ligne droite.

Nous n'avons point defini la ligne droite, parce que l'idée en eſt tres claire d'elle même, & que tous les hommes conçoivent la même choſe par ce mot. Mais il eſt bon de remarquer ce que nous concevons naturellement eſtre enfermé dans cette idée, ce que l'on pourra prendre ſi l'on veut pour ſa definition. V.

La ligne droite eſt la plus courte étenduë entre deux points.

Et celle qui approche plus de la droite, eſt auſſi la plus courte: ce qui a donné occaſion à Archimede d'établir ce principe ou Axiome.

Premier Axiome.

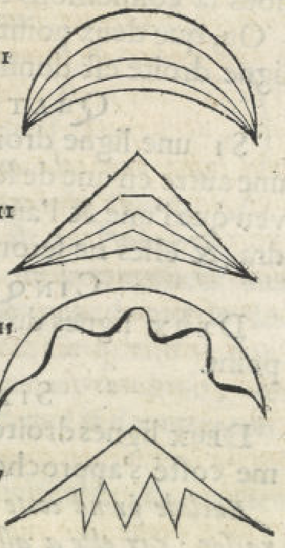
Si deux lignes ſur le même plan ont les extremitez communes & ſont courbes ou creuſes vers la même part, celle qui eſt contenuë eſt plus courte que celle qui la contient. J'ay dit courbes ou creuſes, car cela n'eſt pas ſeulement vray des lignes courbes comme dans la I. figure, mais auſſi des droites comme dans la II, lors que deux ou pluſieurs lignes droites ſe joignant font un creux. Car alors deux ou pluſieurs lignes droites ſont conſiderées comme une ſeule ligne courbe qui ſeroit creuſe vers ce coſté-là. VI.

I

II

III

IV



Mais il faut bien remarquer ces

mots, (vers la même part) car cela ne seroit pas vray, si la même ligne courbe estoit creuse vers differens côtez comme dans la III figure, ou si diverses lignes droites considerées comme une seule ligne faisoient aussi des creux de differens costez comme dans la IV figure; car alors la contenante pourroit estre plus courte que la contenuë.

Second Axiome ou Demande.

VII. Ayant deux points donnez on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.

Et on n'y en peut mener qu'une.

Laquelle par consequent est l'unique & naturelle mesure de la distance entre ces deux points. L'instrument dont on se sert pour cela s'appelle *regle*.

Troisieme Axiome ou Demande.

VIII. La simplicité de la ligne droite fait qu'en ayant une posée on la peut prolonger de part & d'autre jusques à l'infiny, c'est à dire tant que l'on veut.

D'où il s'ensuit que la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

Ou, que connoissant deux points dans une ligne droite, nous la connoissons toute.

Ou, que deux points estant donnez de position, toute la ligne droite est donnee.

Quatrieme Axiome.

IX. Si une ligne droite est immediatement couchée sur une autre en une de ses parties, elle le sera en toutes, pourveu que l'une & l'autre soit prolongée autant qu'il faudra, & elles ne seront proprement qu'ue même ligne.

Cinquieme Axiome.

X. Deux lignes droites ne se peuvent couper qu'en un point.

Sixieme Axiome.

XI. Deux lignes droites qui estant prolongées vers un même costé s'approchent peu à peu, se couperont à la fin.

Euclide prend cette proposition pour un principe & avec raison: car elle a assez de clarté pour s'en contenter, & ce *seroit perdre le temps inutilement que de se rompre la teste pour la prouver par un long circuit.*

SECONDE SECTION.

DE LA LIGNE CIRCULAIRE.

DEFINITIONS.

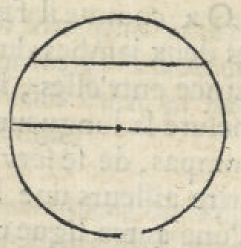
LA ligne que décrit sur un plan l'une des extrémitez d'une ligne droite, son autre extrémité demeurant immobile, s'appelle *circulaire*, ou *circonference*. XII.

ET l'espace que décrit toute la ligne s'appelle *cercle*. XIII.

LE point immobile, *centre*, qui ne peut pas n'estre point également distant de chaque point de la circonference, puisque c'est toûjours la même ligne qui a fait cette distance. XIV.

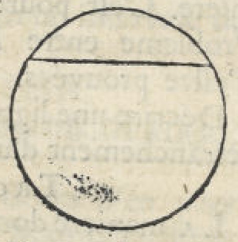
ET ainsi il est bien clair que toutes les lignes du centre à la circonference sont égales. XV.

CES lignes s'appellent *rayons* ou *demydiametres*. XVI.



LES lignes menées d'un point de la circonference à un autre s'appellent *cordes*. XVII.

SI elles passent par le centre, elles s'appellent *diametres*, & elles coupent le cercle & la circonference en deux parties égales, qui s'appellent *demycercles* & *demycirconferences*. XVIII.



LA partie de la circonference qui se trouve entre les extremitez d'une corde s'appelle *arc*. Mais lors que cette corde est moindre qu'un diametre, il y a deux portions de circonferences qui se terminent aux extremitez de cette corde. L'une plus grande que la demycirconference, & l'autre plus petite. Or quand on parle de l'arc d'une corde, si on n'ajoûte autre chose, on entend celuy qui n'est pas plus grand que la demycirconference. Ce qui soit bien remarqué. XIX.

TOUTE circonference se conçoit divisée en 360. parties égales qui s'appellent *degrez*. XX.

XXI. Chaque degré en 60 minutes premieres qu'on appelle ſimplement *minutes* : Chaque minute en 60 *ſecondes*, & chaque ſeconde en 60 *troiſiémes*; & ainſi à l'infini.

Premier Axiome ou Demande.

XXII. On demande qu'ayant un intervale donné, on puiſſe décrire une circonference de cet intervale. Ce qu'on ne peut douter eſtre poſſible, puis qu'il ne faut pour cela que concevoir que la ligne qui joindra les deux points de cet intervale ſe remuë, l'une de ſes extremitez demeurant immobile.

La machine la plus ordinaire dont on ſe ſert pour la décrire ſur le papier s'appelle, *compas*, qui a deux jambes, qui eſtant ouvertes plus ou moins ſelon l'intervale donné, l'une demeurant immobile, l'autre décrit la circonference.

Second Axiome ou Demande.

XXIII. Or comme il faut ſuppoſer dans cette operation que les deux jambes du compas gardent toûjours la même diſtance entr'elles, il n'eſt rien de plus facile aprés avoir meſuré la longueur d'une ligne donnée par l'ouverture du compas, de ſe ſervir de cette même ouverture pour décrire ailleurs une ligne égale à celle-là, ou retrancher d'une autre ligne une portion qui ſoit égale à cette premiere. C'eſt pourquoy on peut hardiment mettre ce Probleme entre les demandes qui n'ont point beſoin d'eſtre prouvées.

Décrire une ligne égale à une ligne donnée, ſoit par le retranchement d'une autre ligne, ſoit par tout ailleurs.

Troisieme Axiome.

XXIV. La maniere dont l'on conçoit que ſe forme la ligne circulaire eſt ſi ſimple, qu'il eſt impoſſible de concevoir qu'elle ne ſoit pas par tout dans une entiere uniformité. Et de là il s'enſuit que les Theoremes ſuivans ſont naturellement connus.

Les circonferences qui ſont décrites d'un égal intervale ſont égales.

Et celles qui ſont decrites d'un plus petit intervale ſont plus petites.

Et

Et d'un plus grand ſont plus grandes.

QUATRIEME AXIOME.

LES degrez de circonferences égales ſont égaux, puis que ce ſont aliquotes pareilles de grandeurs égales. Et par la même raiſon les degrez d'une petite circonference ſont plus petits que les degrez d'une plus grande. XXV.

CINQUIEME AXIOME.

DANS un même cercle les cordes qui ſoûtiennent des arcs égaux ſont égales, & les arcs qui ſont ſoûtenus par des cordes égales ſont égaux. C'eſt une ſuite évidemment neceſſaire de l'entiere uniformité de la circonference. Il ne faut que de l'attention pour en appercevoir la certitude. XXVI.

Il en eſt de même dans deux cercles égaux que dans le même cercle.

SIXIEME AXIOME.

TOUTES les lignes tirées du centre qui ſont plus petites que les rayons du cercle, ont leur extremité au dedans du cercle : que ſi elles ſont plus longues, elles l'ont au dehors ; ſi égales, dans la circonference même. XXVII.

SEPTIEME AXIOME.

LORS qu'on a d'une ligne, l'une des extremitez donnée de poſition, & ſa longueur, ſon autre extremité doit eſtre dans la circonference du cercle décrit par un intervale de cette longueur donnée.

TROISIEME SECTION.

DES LIGNES DROITES PERPENDICULAIRES. XXVIII.

DEFINITIONS.

NOUS avons déja dit qu'une ligne droite n'en peut couper une autre droite qu'en un point. Mais la coupant elle le peut faire en deux manieres.

La premiere, eſt en ne panchant point plus vers un coſté de la ligne coupée, que vers l'autre.

Et alors elles ſont dites ſe couper *perpendiculairement* & eſtre *perpendiculaires* l'une à l'autre.

La ſeconde, en penchant plus vers un coſté que vers l'autre, & alors elles ſont dites ſe couper *obliquement* & eſtre *obliques* l'une au regard de l'autre.

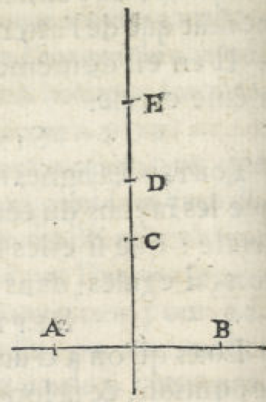
Mais il ne faut pas confondre l'obliquité qui convient à une ligne droite par rapport à une autre ligne, avec la curvité qui convient à la ligne par sa nature même, & constituë une espece de ligne opposée à la ligne droite.

AVERTISSEMENT.

XXX. QUOY *que deux lignes qui se coupent, & soient coupées mutuellement, neanmoins afin qu'on ne les confonde pas, nous appellerons l'une coupée & l'autre coupante.*

DEFINITION PLUS EXACTE DE LA PERPENDICULAIRE.

XXXI. POUR former une notion plus distincte de deux lignes perpendiculaires, on les peut définir en cette sorte.



Lors que deux points de la ligne coupée estans pris également distans de l'un des points de la ligne coupante, tout autre point de la ligne coupante se trouvera aussi estre également distant de ces deux points de la ligne coupée, la ligne coupante est perpendiculaire à la coupée, étant bien clair qu'elle ne peut alors incliner plus d'un costé que d'autre.

AXIOME.

XXXII. POUR montrer que tous les points de la ligne coupante sont également distans de deux de la ligne coupée, il suffit d'en avoir deux dans la ligne coupante dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée. Car de là il s'ensuivra que tous les autres le seront aussi.

JE *pretens que la seule consideration de la nature de la ligne droite fait voir la verité de cette proposition, & que sans cela il est impossible de garder dans la Geometrie l'ordre naturel des choses.*

Car I. *puisque la position de la ligne droite ne dépend que de deux points, & qu'en ayant donné deux points, elle est toute donnée, c'est à dire que la position de tous les autres points est determinée, il est visible que la position de ces deux points de la ligne coupante, dont on suppose que chacun est également distant de deux points de la ligne coupée, détermine tous* *les autres à en estre aussi également distans.*

2. S'il y en avoit quelqu'un qui approchast plus de l'un des points que de l'autre, la ligne seroit necessairement courbée de ce costé là.

3. Il n'y auroit point de raison pourquoy il s'approcheroit plûtost d'un costé que de l'autre, ny pourquoy il s'approcheroit de tant plûtost que de tant. Car la position de ces deux points donnez qui determine tous les autres points de la ligne, ne les peut determiner qu'à une égalité de distance, puis qu'ils n'ont pour eux-mesmes que cette determination là.

4. Tous les Geometres semblent assez convenir de l'évidence de cette proposition, puisque dans la solution de tous les problemes qui regardent les perpendiculaires, ils ne font autre chose que chercher deux points dans la ligne coupante, dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée. Et ainsi quelque circuit qu'ils cherchent pour montrer que leur probleme est resolu par là, il est clair neanmoins que dans la nature des choses ce n'est que cela seul qui l'a resolu.

5. Quoy qu'il en soit, je soûtiens que quiconque voudra agir de bonne foy reconnoistra que considerant les choses avec attention, il luy est impossible de concevoir que cela puisse estre autrement, & qu'il repugne à l'idée que nous avons naturellement de la ligne droite, que deux de ses points estans posez directement, comme nous avons dit, sur une autre ligne, quelqu'un des autres s'écarte ou à droit ou à gauche, & s'approche ainsi plus prés de l'un des costez de la ligne.

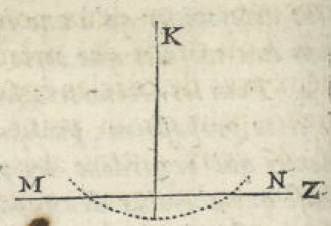
Or il me semble tres inutile de chercher bien loin & par de longs détours des preuves d'une chose dont il nous est impossible de douter, pour peu que nous y voulions faire attention.

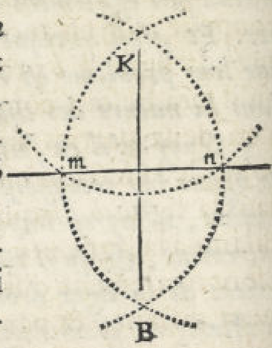
6. Ce qui doit faire rejetter le scrupule qu'on pourroit avoir de recevoir cette proposition comme claire d'elle-même, c'est qu'on ne peut faire autrement sans troubler l'ordre naturel des choses, & employer des triangles pour demonstrer les proprietez des lignes, c'est à dire se servir du plus composé pour expliquer le plus simple, ce qui est tout à fait contraire à la veritable methode.

Soit donc, de justice ou de grace, nous demandons qu'on nous accorde cette proposition, qui donne un moyen tres facile *de d.monstrer les Problemes suivans sans se servir des triangles comme fait Euclide.*

Premier Probleme.

XXXIII. D'un point donné hors une ligne donnée tirer une perpendiculaire sur cette ligne : on suppose que cette ligne soit prolongée s'il en est besoin, & que le point donné ne se puisse pas rencontrer dans la ligne prolongée, car alors il ne seroit pas proprement hors cette ligne.

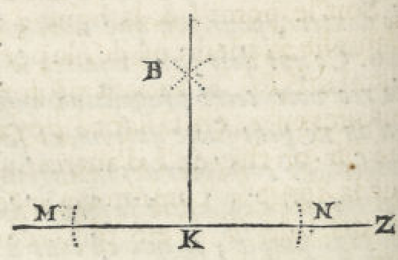




Soit le point *k* & la ligne *z* de *k* pris pour centre, décrire un cercle qui coupe *z*, & par consequent y marque 2 points comme *m* & *n*, également distans de *k*, puisque *m k*, & *n k* seront rayons du même cercle. Cela fait, décrivant deux cercles égaux d'*m* & d'*n* qui s'entrecoupent par tout ailleurs qu'en *k*, comme en *b*, la ligne qui joindra *b* & *k* sera perpendiculaire à la ligne *z*, ce qu'il falloit faire. Car *k* & *b* sont chacun également distans de deux points de *z*, *m* & *n*, & par consequent tous les autres en seront aussi également distans par la precedente, & ainsi sa ligne sera perpendiculaire par la definition.

Second Probleme.

XXXIV. D'un point donné dans une ligne élever un perpendiculaire. Soit le point *k* dans la ligne *z* qui étant pris pour centre, le cercle que l'on décrira de ce centre coupera la ligne *z*, prolongée s'il en est besoin, en deux points comme *m* & *n*, qui seront également distans de *k*. Donc



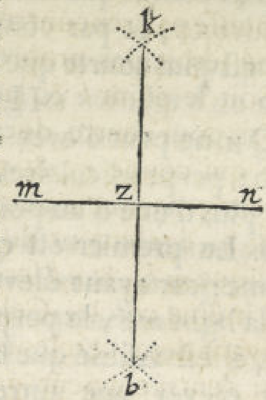
l'intersection de 2 cercles égaux qui auront *m* & *n* pour centre donnera le point *b*, auquel il faudra mener la ligne du point *k* pour faire la perpendiculaire que l'on cherche.

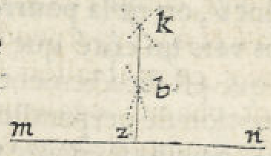
C'eſt la même preuve que du precedent. Car *k* & *b* ſeront chacun également diſtans de *m* & *n*.

TROISIEME PROBLEME.

COUPER une ligne donnée en deux parties égales. XXXV.

Soit la ligne donnée *m n*, en tirant des deux extremitez *m* & *n*, pris pour centres, deux cercles égaux qui s'entrecoupent en deux points comme *k* & *b* où tirant des mêmes centres deux arcs de cercles égaux qui s'entrecoupent en un point comme en *k*, & deux autres arcs de cercles égaux ou inégaux aux premiers, mais égaux entr'eux, qui s'entrecoupent auſſi en autre point comme en *b*, la ligne *k b* prolongée autant qu'il ſera beſoin coupera la ligne *m n* en deux parties égales. Car ſi le point de la ſection eſt *z* comme il eſt dans la ligne *b*, *k* qui eſt perpendiculaire à la ligne *m n*, parce que *b* & *k* ſont également diſtans de *m* & *n*, *z* auſſi en ſera également diſtant, & par conſequent *m z* ſera égal à *z n*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

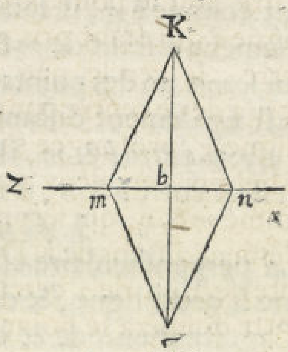




I. THEOREME.

LA perpendiculaire eſt la plus courte de toutes les lignes qui puiſſent eſtre menées d'un point à une ligne. XXXVI.

Soit le point *k* & la ligne *z*, ſur laquelle ayant mené de *k* la perpendiculaire *k b*, & l'ayant prolongée juſques en *c*, en faiſant *b c* égale à *k b*, ſi on tire de *k* d'autres lignes ſur la ligne *z* comme en *m* & *n*, je dis que *k b* eſt plus courte que *k m*, ou *k n*. Car ayant tiré les lignes *m c* & *n c*, je dis que *k m* eſt égale à *m c*, & *k n* à *n c*, puiſque la

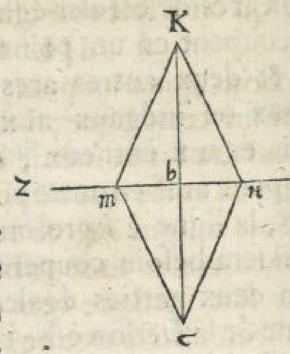


ligne *z* estant perpendiculaire à la ligne *k c*, le point *b* qui eſt commun à ces deux lignes ne peut eſtre comme il eſt également diſtant de *k* & de *c*, que les autres points comme *m* & *n* ne ſoient auſſi chacun également diſtans de *k* & de *c*.

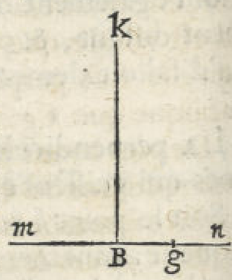
Or cela eſtant, il eſt clair que la ligne *k b c* eſtant droite eſt plus courte que les lignes *k m c*, qui ne font pas une ligne droite, & par conſequent *k b*, qui eſt la moitié de *k b c*, eſt plus courte que *k m*, qui eſt la moitie de *k m c*.

II. Theoreme.

XXXVII. On ne peut élever du meſme point d'une ligne plus d'une perpendiculaire, ny en mener plus d'une d'un point à une ligne. Le premier eſt clair de ſoy-même : car ayant élevé du milieu de la ligne *m n*, la perpendiculaire *b k*, il eſt viſible que ſi on en vouloit élever une autre du même point *b*, on ne la pourroit tirer que plus vers un côté que vers l'autre, ce qui eſt directement contraire à la notion de perpendiculaire.



La 2[e] partie eſt encore tres manifeſte, & ſe peut neanmoins prouver de cette ſorte. Soit mené de *k* ſur *m n* la perpendiculaire *k b*, en ſorte que *b* ſoit également diſtant de *m* & *n*, dont par conſequent *k* doit eſtre auſſi également diſtant : ſi on menoit de *k* une autre perpendiculaire à un autre point comme à *g*, il faudroit que *g* fuſt également diſtant de *m* & de *n*, puiſque *k* qui ſeroit un des points de cette ligne en eſt également diſtant. Or cela eſt impoſſible, puiſque ſi *g* eſtoit entre *b* & *m*, il ſeroit plus prés de *m* que de *n*, & s'il eſtoit entre *b* & *n*, il ſeroit plus prés de *n* que de *m*.



I. Corollaire.

XXXVIII. La perpendiculaire eſt la meſure d'un point hors d'une ligne à cette ligne, & de la ligne à ce point.

Car eſtant unique & la plus courte de toutes les lignes qui peuvent estre menées d'un point à une ligne, on n'en pouvoit prendre aucune autre qui fust si propre à mesurer cette distance.

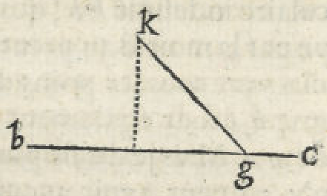
II. Corollaire.

Deux differentes lignes estant perpendiculaires à une même ligne, il est impossible qu'elles se rencontrent, quoy que prolongées à l'infini. XXXIX.

Car si elles se rencontroient, elles auroient un point commun, & ainsi il y auroit deux lignes menées d'un même point qui seroient perpendiculaires à une même ligne, ce qu'on a fait voir estre impossible.

III. Corollaire.

Lors que d'un point hors une ligne on a tiré une oblique sur cette ligne, si du même point on tire une perpendiculaire sur la même ligne, cette perpendiculaire tombera du costé que l'oblique est inclinée sur cette ligne. XL.



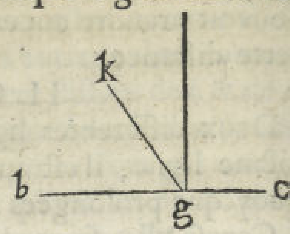
Soit la ligne *b c*, & le point *k* dont ait esté tirée l'oblique *k g* qui soit inclinée vers *b*, je dis qu'il est clair parce qui a esté dit de la perpendiculaire, que si du même point *k* on en tire une sur *b c*, elle tombera entre *b* & *g*, & non pas entre *g* & *c*, car il est visible que si elle tomboit entre *g* & *c*, tant s'en faut qu'elle fust perpendiculaire, qu'elle seroit encore plus oblique que *k g*.

De plus ayant pris dans la ligne *b c* deux points également distans de *k*, comme pourroit estre *b* & *c* (33. S) le point où tombera la perpendiculaire doit estre également distant de ces deux points (*b c*); & au contraire celuy où tombe l'oblique doit estre plus éloigné du point vers lequel elle est inclinée, & par consequent la perpendiculaire doit tomber du costé vers lequel cette ligne est inclinée.

IV. Corollaire.

Si d'un point où une oblique coupe une ligne on veut élever une perpendiculaire sur cette ligne, elle s'élevera du costé vers lequel cette oblique n'est pas inclinée. XLI.

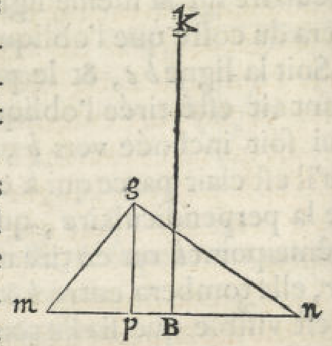
Soit la ligne *b c* coupée par l'oblique *k g* inclinée vers *b*, si du point *g* on veut élever une perpendiculaire sur *b c*, elle s'élevera du costé de *c*, non du costé de *b*; c'est à dire qu'elle se trouvera entre les lignes *k g* & *g c*, & non pas entre *k g* & *g b*. Car il est visible que si elle se trouvoit entre *k g* & *g b*, elle seroit encore plus inclinée que *k g*.



XLII. III. THEOREME.

La perpendiculaire indefinie qui coupe par la moitié la distance de deux points comprend tous les points du mesme plan, dont chacun peut estre également distant de ces deux points.

Soient les points *m* & *n* joints par la ligne *m n*, & la perpendiculaire indefinie *k b*, qui la coupe par la moitié au point *b*, il est clair que tous les poins de la ligne *k b* sont également distans de *m n*. Mais je dis de plus, qu'il n'y en peut avoir aucun autre hors cette ligne qui en soit également distant. Car il faudra qu'il soit à l'un des costez comme seroit *g*, d'où tirant une perpendiculaire sur *m n* (par 5.) elle la coupera en un autre point que *b*, comme seroit *p*, Or si *g* estoit également distant d'*m* & d'*n*, il faudroit que *p*, qui seroit un point de la perpendiculaire en fust aussi également distant, ce qui est visiblement impossible, comme on l'a déja veu.



QUATRIEME SECTION.

DES LIGNES DROITES OBLIQUES.

Explication de la maniere dont on doit considerer les Lignes obliques pour le mieux comprendre

XLIII. Nous avons déja dit que lors qu'une ligne droite en coupe

coupe une autre en penchant plus d'un costé que de l'autre, elle s'appelle oblique au regard de cette ligne qu'elle coupe obliquement.

Mais pour mieux juger de la grandeur de ces obliques en les comparant les unes aux autres, il est bon de ne les considerer que selon le costé selon lequel elles approchent plus de la ligne qu'elles coupent, qui est aussi la façon la plus naturelle de considerer ces lignes.

De plus, nous ne regarderons les obliques que comme menées d'un certain point à la ligne qu'elles coupent, & comme terminées à cette ligne.

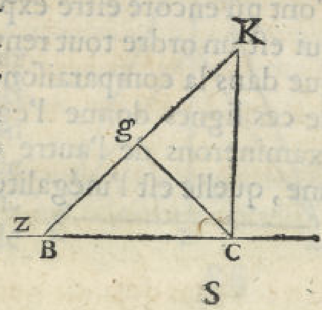
Cela estant supposé, ce que j'entens par l'obliquité d'une ligne sur une autre, est que cette ligne soit plus couchée sur la ligne qu'elle coupe, que ne seroit la perpendiculaire menée du mesme point sur la mesme ligne. De sorte que c'est toûjours par rapport à cette perpendiculaire que je considere cette obliquité.

Mais ce rapport enferme deux choses. 1. La distance du point qui est commun à l'oblique & à la perpendiculaire d'avec le point de la ligne où la perpendiculaire tombe, qui est la mesme chose que la longueur de cette perpendiculaire.

2. La distance du point ou l'oblique tombe, d'avec celuy où tombe la perpendiculaire, que j'appelle l'éloignement du perpendicule.

A quoy il faut ajoûter la distance du point d'où l'oblique est menée de celuy où elle coupe la ligne au regard de laquelle elle est appellée oblique : qui est la mesme chose que la longueur de cette oblique.

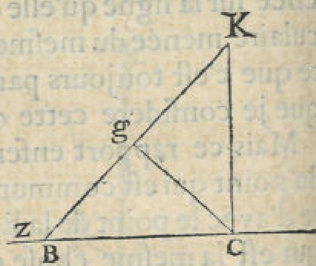
Soit par exemple la ligne *z* indefinie, sur laquelle on fasse descendre du point *k* au point *b* l'oblique *k b*, & que de *k* on tire la perpendiculaire *k c*, les trois distances dont nous venons de parler font trois lignes; dont deux (sçavoir la per-



pendiculaire *k c*, & l'éloignement du perpendicule *b c*) se coupent perpendiculairement, & la troisiéme, qui est l'oblique *k b*, rencontre obliquement l'une & l'autre.

Et ainsi peut estre considerée tantost comme l'oblique de l'une, tantost comme oblique de l'autre. Mais il faudra alors changer alternativement aux deux autres lignes les noms de perpendiculaire & d'éloignement du perpendicule. Car si je considere *k b* comme oblique sur *b c*. *k c* est la perpendiculaire, & *b c* l'éloignement du perpendicule. Et au contraire si je considere *k b* comme oblique sur *k c*, *b c* sera la perpendiculaire, & *k c* l'éloignement du perpendicule.

On pourroit aussi considerer *b c* & *k c* comme obliques sur *k b*, (car comme les lignes sont mutuellement perpendiculaires, elles sont aussi mutuellement obliques.) Mais pour suivre nostre methode il faudroit alors mener une perpendiculaire du point *c* à la ligne *k b*, comme seroit *c g*. Et ainsi en considerant *b c* comme oblique sur la ligne *b k*, la perpendiculaire seroit *c g*, & l'éloignement du perpendicule *g b*. Mais à moins que de faire cela, *k b* seule est considerée comme oblique, tantost au regard de l'une, tantost au regard de l'autre.

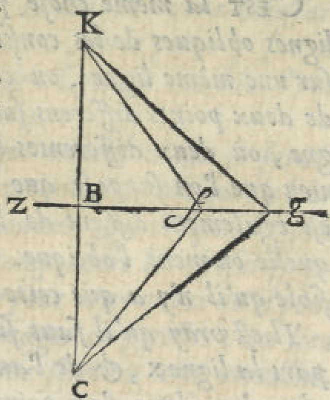


La consideration de ces trois lignes, *k b* oblique, *k c* perpendiculaire, *b c* éloignement du perpendicule, nous fera comprendre plusieurs choses des lignes obliques qui n'ont pû encore estre expliquées que par des triangles, ce qui est un ordre tout renversé. Et nous verrons d'une part que dans la comparaison des obliques, l'égalité en deux de ces lignes donne l'égalité dans la troisiéme, & nous examinerons de l'autre quand il n'y a égalité que dans une, quelle est l'inégalité des deux autres.

PROPOSITION FONDAMENTALE DE LA MESURE DES LIGNES OBLIQUES.

Les lignes obliques menées du mesme point à une même ligne, sont plus longues, plus elles sont éloignées du perpendicule. XLIV.

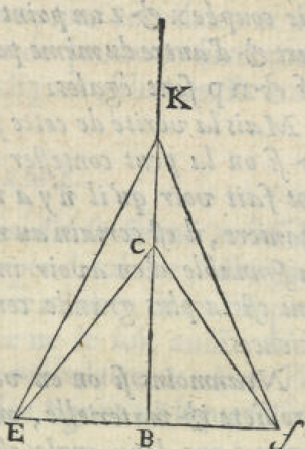
Soient du point *k* menées sur la ligne *z* la perpendiculaire *kb*, & les obliques *kf* & *kg*. Et soit prolongée *kb* jusques en *c*, en sorte que *bc* soit égale à *kb*. Et soient aussi menées les lignes *fc* & *gc* : je dis premierement que *z* estant perpendiculaire à *kb*, comme le point *b*, qui est commun à l'une & à l'autre est également distant de *k* & de *c*. Donc *k*f est égale à *fc*, & *kg* à *gc*. Or par la maxime d'Archimede Liv. I. *kfc* est plus courte que *kgc*. Donc *kf*, qui est la moitié de *kfc* est plus courte que *kg*, qui est la moitié de *kgc*. Ce qu'il falloit demonstrer.



COROLLAIRE.

Il est visible que ce n'est que la même chose si l'on dit que de toutes les obliques qui seront menées au même point d'une même ligne de divers points d'une perpendiculaire à cette ligne pris du même côté, celles qui sont menées des points plus proches de la ligne où tombe l'oblique sont les plus courtes. XLV.

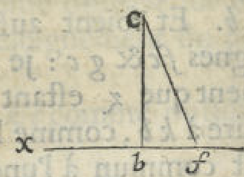
Car il ne faudra alors que tirer d'autres lignes des mêmes points de cette perpendiculaire vers un même point de l'autre côté de la ligne qui coupe cette perpendiculaire également distant de



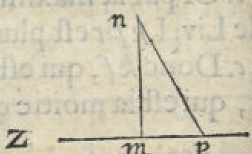
cette perpendiculaire. Si je veux montrer par exemple que la ligne *kf* est plus longue que *cf*, je n'ay qu'à prendre le point *c* autant distant de *b*, que *f* est aussi distant de *b*, & tirer les lignes *ke* & *ce*, & faire ensuite la demonstration precedente.

Avertissement.

XLVI. C'est *la même chose pour juger de la grandeur de deux lignes obliques de les considerer comme menées du même point sur une même ligne, ou comme menées de deux points differens sur la même ligne, ou deux differentes lignes, pourveu que l'on suppose que chaque point est également distant de la ligne à laquelle on mene l'oblique. Car il est visible qu'il n'y a que cette distance qui y fasse quelque chose.*



Il est vray qu'il faut supposer pour cela que si l'on a d'une part la ligne x, *& de l'autre la ligne* z, *& qu'on éleve d'un point de chacune, comme de* b *& d'*m, *une perpendiculaire, & que dans chaque perpendiculaire on prenne un point comme* c *&* n, *qui soit de part & d'autre également distant du point de la section* b *&* m; *& qu'on prenne aussi dans chaque coupée* x *&* z *un point comme* f *&* p, *également distant de part & d'autre du même point de la section* b *&* m, *les obliques* c f *&* n p *sont égales.*



Mais la verité de cette supposition est naturellement connuë, & si on la peut contester de paroles, comme les Pyrrhoniens ont fait voir qu'il n'y a rien qu'on ne puisse contester en cette maniere, il est certain au moins qu'il est impossible à tout esprit raisonnable d'en avoir interieurement le moindre doute, ce qui est la plus grande certitude qu'on doive desirer dans les sciences.

Neanmoins si on en veut estre convaincu par une preuve grossiere & materielle, on peut se servir de celle dont Euclide prouve que deux angles estant égaux, & ayant les costez égaux

aux costez, la baze est égale à la baze ; qui est qu'il fait mettre ces angles l'un dessus l'autre, en sorte que les extrémitez des costez se trouvent ensemble ; d'où il conclud que les bazes sont aussi couchées l'une sur l'autre, ce qu'on appelle en Latin congruere, *& par consequent égales. Car on peut de même icy s'imaginer que la ligne* z *est couchée sur la ligne* x, *en sorte que le point* m *est immediatement sur le point* b, *& la perpendiculaire sur la perpendiculaire : D'où il arrivera necessairement que le point* n *sera sur le point* c, *& le point* p *sur le point* f, *& qu'ainsi les obliques* n p *&* c f *seront couchées l'une sur l'autre, & ainsi entierement egales.*

Voila ce qui peut satisfaire ceux qui aiment mieux se servir dans la connoissance des choses de leur imagination que de leur intelligence : ce que je trouve fort mauvais, parce que l'esprit se rend par là incapable de bien comprendre les choses spirituelles, s'accoustumant à ne recevoir pour vray que ce qu'il peut concevoir par des fantômes & des images corporelles : au lieu qu'il y a beaucoup de choses que nous sçavons tres certainement sans que nous les puissions concevoir par l'imagination, comme quand je dis : Je pense, donc je suis, *nul fantôme ou image corporelle ne me peut servir à me faire concevoir ce que j'entends par ces mots ;* je pense, je suis.

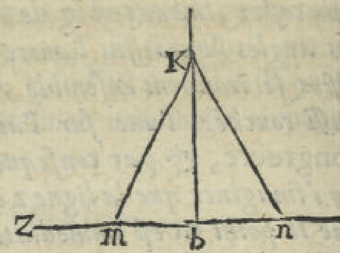
Egalite' dans les Lignes obliques.

Cette seule proposition avec son corollaire & l'avertissement nous donne moyen de prouver facilement plusieurs theoremes touchant les lignes obliques. Et voicy premierement ceux de l'égalité. XLVII.

I. Theoreme.

Des trois lignes que nous avons dit se devoir considerer dans les lignes obliques ; la perpendiculaire, l'éloignement du perpendicule, & l'oblique même ; deux ne peuvent estre égales que la troisiéme ne le soit aussi. Ainsi XLVIII.

1. S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'éloignement du perpendicule, les lignes obliques sont égales.



Soient du point *k* de la ligne *kb*, qui coupe perpendiculairement la ligne *z* en *b*, menées les deux obliques *km* & *kn*, la perpendiculaire estant la même, & par consequent égale à soy-même. Si *bm*, qui est l'éloignement du perpendicule de l'oblique *km* est égal à *bn*, qui est l'éloignement du perpendicule de l'oblique *kn*; *km* & *kn* seront égales. Car les points *m* & *n* ne peuvent estre également distans de *b*, l'un des points de la perpendiculaire *kb*, qu'ils ne soient aussi également distans de tout autre point de cette perpendiculaire, & par consequent de *k*. Donc *km* est égale à *kn*.

I. Corollaire.

XLIX. On ne peut mener d'un point à une ligne que deux lignes égales. Car on n'en peut mener qu'une seule perpendiculaire. Et pour les obliques, elles ne peuvent estre égales que les deux points où elles coupent cette ligne ne soient également distans du point où tombe la perpendiculaire. Or il ne peut y avoir que deux points, l'un d'un costé & l'autre de l'autre, qui soient également distans de ce point. Car tout autre en sera, ou plus proche ou plus éloigné, comme il est évident. Donc, &c.

II. Corollaire.

L. Il est impossible qu'un mesme point soit également distant de trois points d'une ligne droite.

C'est la mesme chose que la precedente differemment énoncée.

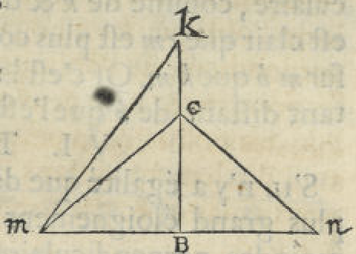
II. Theoreme.

LI. S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule.

Soit fait comme devant. Si *km* est égale à *kn*, *bm* sera égale à $b\,n$. Car si m estoit plus éloignée de b que n'est n, l'oblique $k\,m$ seroit plus éloignée de la perpendiculaire, & par consequent plus longue par la proposition principale.

III. THEOREME.

S'IL y a égalité dans l'oblique & dans l'éloignement du perpendicule, il y en a dans la perpendiculaire. LII.



Car si la perpendiculaire de l'une estoit plus grande que la perpendiculaire de l'autre, c'est comme si des deux obliques qui se terminent en m & n l'une descendoit du point k de la perpendiculaire $k\,b$, & l'autre du point c plus bas que k de cette mesme perpendiculaire $k\,b$, de sorte que l'une seroit km, & l'autre $c\,n$.

Or si cela estoit, cn seroit plus petite que $k\,m$, par 44. & 45. *sup.* ce qui est contre l'hypothese.

IV. THEOREME.

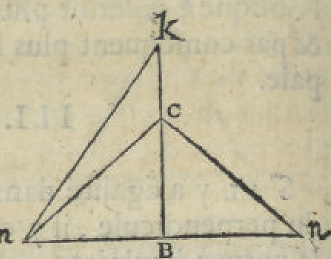
QUAND il n'y a égalité donnée que dans l'une de ces trois lignes, voicy ce qui est des deux autres. LIII.

1. S'il n'y a égalité que dans la perpendiculaire, le plus grand éloignement du perpendicule donne la plus grande oblique, & la plus grande oblique donne le plus grand éloignement du perpendicule. C'est ce qui a esté prouvé dans la proposition principale.

V. THEOREME.

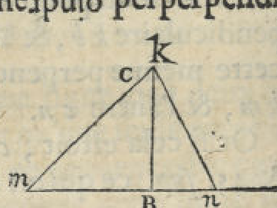
2. S'IL n'y a égalité que dans l'éloignement du perpendicule, la plus grande perpendiculaire donne la plus grande oblique, & la plus grande oblique la plus grande perpendiculaire; & alors la plus grande oblique est la moins oblique. LIV.

Il y a deux parties dont la premiere a esté prouvée par le corollaire de la propoſition fondamentale ; & pour l'autre, elle en eſt une ſuite évidente. Car ſi deux obliques ſe terminent au meſme point d'une ligne comme *k m*, & qu'elles ſoient menées de deux points differens de la meſme perpendiculaire, comme de *k* & de *c*, il eſt clair que *cm* eſt plus couchée ſur *m b* que *k m*. Or c'eſt la meſme choſe, ſi ayant pris *n* autant diſtant de *b* que l'eſt *m* on tire *cn* au lieu de *cm*.

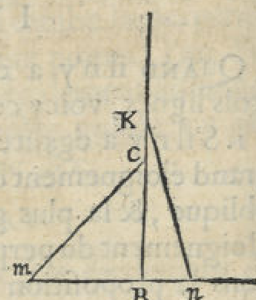


VI. Theoreme.

LIV. S'il n'y a égalité que dans la longueur des obliques, le plus grand éloignement du perpendicule donnera une moindre perpendiculaire, & une meɪpuıo perperpendiculaire donnera un plus grand éloignement du perpendicule. Cela eſt clair par les theoremes precedens.



Car ſoit la perpendiculaire *k b* ſur la ligne *mn*, ſi on tire l'oblique *cm*, & qu'on prenne un autre point plus prés de *b*, comme *n*, il eſt viſible que *cn* ſeroit plus courte que *cm* par le 4ᵉ Theoreme, & par conſequent afin qu'on mene à *n* de quelque point de la ligne *k b* une oblique égale à *cm*, il faudra la tirer d'un point plus éloigné de *b* que n'eſt *c*, comme de *k*.



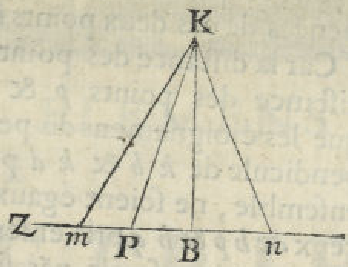
Avertissement.

LV. *Je ne dis rien de la diverſe obliquité qu'à la même ligne ſur les deux lignes qui peuvent eſtre reciproquement conſiderées comme ſa perpendiculaire & ſon éloignement du perpendicule, comme* K b *ſur* b c *& ſur* K c *: car cela eſt trop facile à juger par ce qui eſt dit.*

VII. Theo-

VII. Theoreme.

Lors que deux lignes obliques ſont menées d'un meſme point ſur une même ligne, la diſtance des deux points de ſection eſt égale à la diſtance du perpendicule, de l'une plus ou moins la diſtance du perpendicule de l'autre. *Plus*, ſi les lignes ſont inclinées de different coſté; *moins*, ſi elles ſont inclinées du meſme coſté. LVI.



Soient menées du point *k* ſur la ligne *z* les deux obliques *k m* & *k n*, inclinées de different côté, & une autre comme *k p*, inclinée du meſme coſté que *k m*; il'eſt viſible que la perpendiculaire *k b* ſe trouvera entre *k m* & *k n*, mais au delà de *k m* & de *k p*: & ainſi la diſtance entre les points de la ſection *m* & *n* ſera égal à l'éloignement du perpendicule de *k m*, qui eſt *m b* plus l'éloignement du perpendicule de *kn*, qui eſt *b n*.

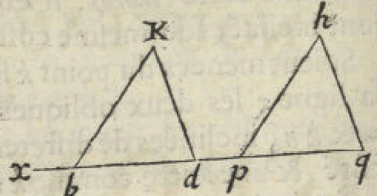
Mais ſi on conſidere *km*, & *k p*, inclinée du meſme côté, il eſt viſible que la diſtance d'*m* & *p*, points de la ſection de ces deux obliques, eſt moindre que l'éloignement du perpendicule de *km*, qui eſt *m b* de la longueur de *p b*, qui eſt l'éloignement du perpendicule de l'autre oblique *k p*.

VIII. Theoreme.

Deux lignes obliques inégales entr'elles & inclinées de different coſté eſtant menées du meſme point ſur la meſme ligne: & deux autres obliques, dont chacune eſt égale à chacune des deux premieres, eſtant auſſi menées d'un autre point ſur une meſme ligne, & y eſtant auſſi inclinées de different coſté, ſi la diſtance des points de ſection des deux premieres obliques eſt égale à la diſtance des points de ſection des deux dernieres, les deux points dont elles ſont menées ſont également diſtans de la ligne à laquelle elles ſont menées. XLVII.

Soient sur la ligne *x* menées du point *k* les deux obliques *k b* & *k d*, & du point *h* deux autres obliques *h p* & *h q*, ensorte que *k b* soit égale à *hp*, & *k d* à *h q*, & que les points *b* & *d* soient autant distans que le sont *p* & *q*; je dis que les points *k* & *h* son également distans de la ligne *x*; ou, ce qui est la mesme chose, que les perpendiculaires menées de ces deux points sont égales.

Car la distance des points *b* & *d* ne peut estre égale à la distance des points *p* & *q* que les éloignemens du perpendicule de *k b* & *k d* pris ensemble, ne soient égaux à ceux de *h p* & *h q* pris ensemble : ce qui ne seroit pas si *k* estoit plus éloigné de *x* que *h*. Car alors *k b* estant égal à *h p* auroit son éloignement du perpendicule plus petit que ne l'auroit *h p*, puis qu'elle descendroit d'un point plus éloigné que ne descend *h p*, (par 44. *sup.*) de même *k d* auroit son éloignement du perpendicule plus petit que *h q*; Et ainsi les deux éloignemens du perpendicule de *k b* & de *k d* pris ensemble seroient plus petits que ceux de *h p* & *h q* pris ensemble.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SIXIÉME.

DES LIGNES PARALLELES.

APRES *avoir parlé des lignes droittes qui se rencontrent, soit perpendiculairement, soit obliquement, on peut considerer dans les lignes une autre proprieté toute opposée, qui est de ne se rencontrer jamais, & d'estre toûjours également distantes l'une de l'autre, & c'est ce qu'on appelle des lignes paralleles.* I.

DEUX NOTIONS DES LIGNES PARALLELES, L'UNE NEGATIVE ET L'AUTRE POSITIVE.

MAIS ces lignes peuvent estre considerées selon deux notions differentes; l'une negative & l'autre positive. II.

La negative est de ne se rencontrer jamais, quoy que prolongées à l'infiny.

La positive, d'estre toûjours également distantes l'une de l'autre, ce qui conſiſte en ce que tous les points de chacune ſont également diſtans de l'autre; c'eſt à dire que les perpendiculaires de chacun des points d'une ligne à l'autre ligne, ſont égales. Et il eſt bien clair que la notion negative eſt une ſuite neceſſaire de la poſitive, ne ſe pouvant pas faire que deux lignes ſe rencontrent ſi elles demeurent toûjours également diſtantes l'une de l'autre.

C'eſt pourquoy c'eſt avoir tout fait que d'avoir trouvé des marques certaines par leſquelles on puiſſe reconnoîrre que deux lignes ſont paralleles ſelon la notion poſitive, c'eſt à dire qu'elles ſoient tellement diſpoſées, que les points de chacune ſoient également diſtans de l'autre, ce qui ſuppoſe toûjours qu'elles ſoient prolongées autant qu'il eſt neceſſaire, afin que des points de l'une on puiſſe tirer des perpendiculaires ſur l'autre.

C'eſt ce que nous trouverons facilement apres avoir étably quelques Lemmes.

AVERTISSEMENT
POUR LES LEMMES SUIVANS.

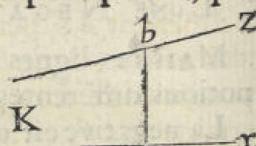
III. LORS *que dans les Lemmes ſuivans je compare diverſes lignes qui coupent les deux mêmes, je ſuppoſe toûjours deux choſes.*

L'une, que ces coupées, dont l'une ſera toûjours nommée x *& l'autre* z, *ou ne ſe joignent point, ou ſe joignent ſimplement ſans ſe traverſer: c'eſt à dire qu'on les conſidere toûjours comme n'ayant point changé de coſté au regard l'une de l'autre.*

L'autre, que ces coupantes ſoient enfermées entre les coupées, & c'eſt auſſi ce que j'entens dans tout ce Livre quand je parle des lignes entre-paralleles.

I. LEMME.

IV. QUAND les deux lignes x & z ſont coupées par $b\,c$, perpendiculaire ſur x, & oblique ſur z, il arrive trois choſes.



1. Que toutes les autres lignes menées de z perpendiculairement ſur x, ſont obliques ſur z.

2. Qu'elles ſont inclinées ſur z du même coſté que $c\,b$

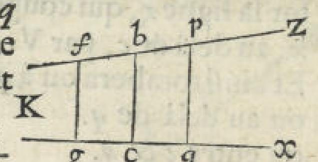
l'est aussi sur *z*, lequel costé j'appelleray *k*.

3. Que les perpendiculaires sur *z* sont obliques sur *x*, & inclinées sur *x* du même côté que *c b* l'est sur *z*, c'est à dire vers *k*.

Les deux premieres parties se prouvent ensemble, & la la preuve de ces deux premieres emporte celle de la 3^e.

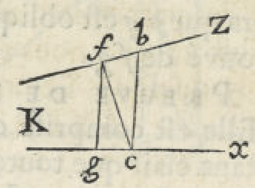
PREUVE DES DEUX PREMIERES PARTIES.

Soient pris deux points en la ligne *z*, *f* & *p* aux deux costez de *b*, d'où soient menées *f g* & *p q* perpendiculairement sur la ligne *x*, il faut prouver qu'elles seront obliques sur *z*, & inclinées vers *k*.



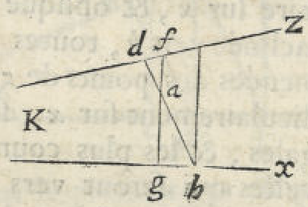
Soit tirée de *c* une perpendiculaire sur *z*, elle sera vers *k*, & non pas vers *p*, par V. 40. Et ainsi le point où cette perpendiculaire tombera sur *z* sera

ou le même point que *f*.
ou au delà de *f*.
ou entre *f* & *b*.

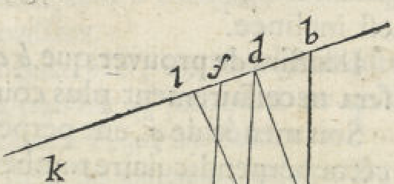


1. CAS. Si c'est le même point que *f*, *c f* estant perpendiculaire sur la ligne *z*, *g f* sera oblique sur *z*, & inclinée vers *k*.

2. CAS. Si ce point est au delà de *f*, comme en *c d*, alors *c d* coupera *f g*. Que ce soit en *a*. Donc *a d* estant perpendiculaire sur *z*, *a f* (qui est la même chose que *g f*) sera oblique sur *z*, inclinée vers *a d*, & par consequent vers *k*.



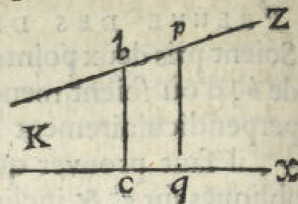
3. CAS. Si *d* est entre *f* & *b*, de *d* menant *d h* perpendiculaire sur *x*, & de *b*, *b l* perpendiculaire sur *z*; si *b l* se termine ou à *f*, ou au delà de *f*, on prouvera de la même sorte que dans le premier & dans le second Cas,



$g\,f$ eſt oblique ſur z, & inclinée vers k.

Et ſi $b\,l$ n'alloit pas juſques à f, on tireroit encore d'l, $l\,m$ perpendiculaire ſur x, & d'm une perpendiculaire ſur z, juſques à ce qu'il y en ait une qui ſe termine à f, ou au delà d'f.

On prouve de la même ſorte que $q\,p$ eſt oblique ſur z, & inclinée vers k, excepté qu'on élevera de b une perpendiculaire ſur la ligne z, qui coupera la ligne x, au delà de c, par V. 41.



Et ainſi tombera ou à q.
ou au delà de q.
ou entre c & q.

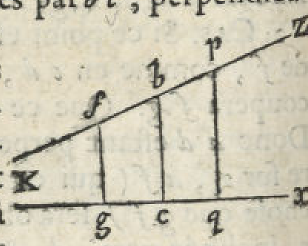
Ainſi en l'une ou l'autre de ces trois manieres, on prouvera que $p\,q$ eſt oblique & inclinée vers k, comme on l'a prouvé de $f\,g$.

Preuve de la troisieme Partie.

Elle eſt compriſe dans la preuve des deux premieres, eſtant clair que toutes les lignes qui ont eſté perpendiculaires ſur z, ont eſté obliques ſur x, & inclinées vers k.

II. Lemme.

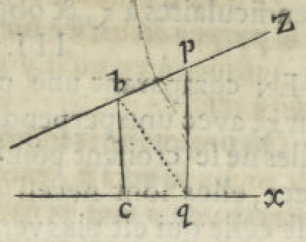
V. Si les lignes x & z ſont coupées par $b\,c$, perpendiculaire ſur x, & oblique ſur z, & inclinée vers k, toutes les lignes menées des points de z, perpendiculairement ſur x, ſeront inégales, & les plus courtes ſeront celles qui ſeront vers k, c'eſt à dire vers le coſté ou la ligne $b\,c$ eſt inclinée.



Il ſuffira de prouver que $b\,c$ eſtant plus vers k que $p\,q$, ſera neceſſairement plus courte que $p\,q$.

Soit menée de q, une perpendiculaire ſur z, le point où cette perpendiculaire tombera, ſera
ou le même point que b.
ou au delà du point b.
ou entre b & p.

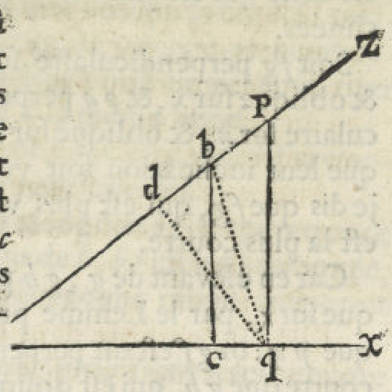
1. Cas. Si c'est le même point que b, bc estant perpendiculaire sur x, & bq oblique, bc sera plus courte que bq.



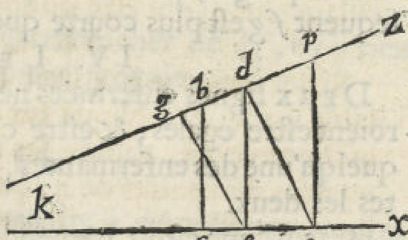
Or par la même raison qb estant perpendiculaire sur z, & pq oblique, qb est plus courte que qp.

Donc si bc est plus courte que qb, & qb plus courte que pq, bc doit estre plus courte que pq, Ce qu'il falloit demonstrer.

2. Cas. Si ce point est au delà de b, comme en qd, en tirant qb, qb sera oblique, mais plus proche de la perpendiculaire qd, que pq, & par consequent plus courte que pq. Or bc est plus courte que qb. Donc bc est à plus forte raison plus courte que pq. Ce qu'il falloit demonstrer.



3. Cas. Si d se trouve entre b & p, de d on tirera df perpendiculaire sur x, & d'f, fg, perpendiculaire sur z, & g se trouvant ou au point b, ou au delà du point b, on prouvera comme dans le premier & le second cas que bc est plus courte que df, laquelle par le premier cas est plus courte que pq, & par consequent bc est plus courte que pq. Ce qu'il falloit demonstrer.



Que si fg n'alloit pas jusques à b, on tireroit d'autres perpendiculaires sur x, & puis sur z, jusques à ce qu'il y en eust une qui allast jusques à b, ou au delà.

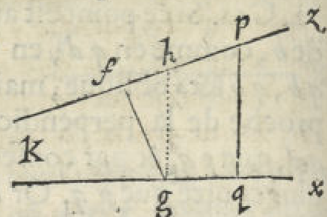
Donc de tous les points de z les perpendiculaires sur x sont inégales, & par consequent tous les points de z sont inégalement distans de x, lors qu'une même ligne est perpendiculaire sur x, & oblique sur z.

COROLLAIRE.

VI. C'EST visiblement la même chose de toutes les lignes perpendiculaires à z, & obliques sur x, comparées ensemble.

III. LEMME.

VII. EN comparant une perpendiculaire sur x, & oblique sur z, avec une perpendiculaire sur z & oblique sur x : si elles ne se croisent point, mais qu'elle soient toutes separees, elles sont necessairement inégales, & la plus courte est celle qui est plus vers le costé vers lequel elles sont inclinées.



Soit fg perpendiculaire sur z, & oblique sur x, & pq perpendiculaire sur x, & oblique sur z, & que leur inclination soit vers k; je dis que fg, qui est plus vers k est la plus courte.

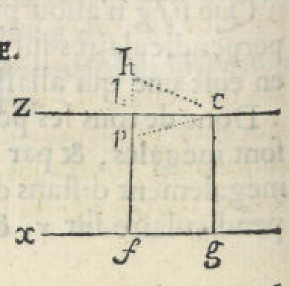
Car en élevant de g, gh perpendiculaire sur x, & oblique sur z, par le Lemme precedent gh sera plus courte que pq : or gf estant perpendiculaire sur z, elle est plus courte que gh, qui est oblique sur la même z, & par consequent fg est plus courte que pq.

IV. LEMME.

VIII. DEUX lignes enfermées ne se croisant point, ne sçauroient estre égales, & estre chacune perpendiculaire sur quelqu'une des enfermantes, qu'elles ne le soient sur toutes les deux.

Car si l'une estoit perpendiculaire sur x, & oblique sur z, elle seroit inégale à l'autre, ou par le second Lemme, si l'autre estoit aussi perpendiculaire sur x; ou par le troisiéme, si l'autre estoit perpendiculaire sur z. Il faut donc pour estre égales qu'elles soient perpendiculaires sur l'une & sur l'autre des enfermantes.

V. LEMME.



IX. SI une ligne enfermée est perpendiculaire à l'une & à l'autre des enfermantes, toutes les lignes menées de quelque point que ce soit d'une enfermante perpendiculairement

sur

ſur l'autre, ſeront égales à cette enfermée, & par conſequent entr'elles.

Soit bf enfermée entre les lignes z & x, & perpendiculaire à l'une & à l'autre : & de c point quelconque de z ſoit menée cg perpendiculaire ſur x : bf & cg ſeront égales, ſi on ne peut rien retrancher de bf, ny y rien ajoûter, que bf & cg ne ſoient inégales. Or cela eſt ainſi.

Car ſi de p, point quelconque au deſſous de b dans bf, on tire pc, cette ligne pc coupera obliquement bf, puiſque par l'hypotheſe cb (partie de z) coupe perpendiculairement bf, & que d'un même point on ne peut tirer qu'une ſeule perpendiculaire à la même ligne.

Donc par le ſecond Lemme pf (c'eſt à dire bf retranchée de quelque choſe) & cg ſont inégales.

Ce ſera la même choſe ſi on alongeoit bf de quoy que ce fuſt. Car ſi du point h au deſſus de b, bf eſtant prolongée, on tiroit hc, cette ligne par la meſme raiſon couperoit obliquement bf prolongée.

Donc par le ſecond Lemme bf prolongée ſeroit encore inégale à cg.

Donc on ne ſçauroit rien retrancher de bf, ny y rien ajoûter, que bf & cg ne ſoient inégales.

Donc elles ſont égales.

VI. Lemme.

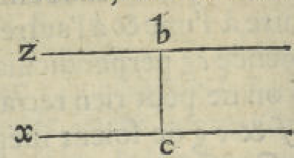
Si une ligne eſt perpendiculaire à deux lignes, toutes les lignes perpendiculaires à l'une de ces lignes ſeront perpendiculaires à toutes les deux. x.

Car s'il y en avoit une ſeule qui fût perpendiculaire ſur l'une & oblique ſur l'autre, il s'enſuivroit par le premier Lemme que toutes les autres lignes perpendiculaires à l'une de ces deux lignes ſeroient obliques ſur l'autre.

Donc s'il y en a une ſeule qui ſoit perpendiculaire à toutes les deux, il faudra neceſſairement que toutes celles qui ſont perpendiculaires à l'une des deux enfermantes le ſoient à toutes les deux, & par conſequent qu'elles ſoient toutes égales par le precedent Lemme.

VII. Lemme.

XI. Deux lignes ne se traversant point, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, ou tous inégalement distans. Car menans d'un point de z, bc, perpendiculaire sur x; si bc est aussi perpendiculaire sur z, de quelque point de z qu'on mene des perpendiculaires sur x, elles seront égales à bc par le 5^e Lemme; & ce sera la même chose de quelque point d'x qu'on mene des perpendiculaires sur z.

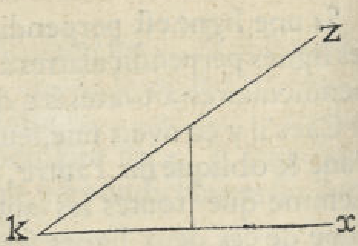


Que si au contraire bc est oblique sur z, toutes les perpendiculaires des points de z sur x seront inégales, & par consequent tous les points de z inégalement distans d'x. Et il en sera de mesme des perpendiculaires sur z, menées des points d'x, qui par la mesme raison seront toutes inégales entr'elles. Et par consequent aussi tous les points d'x seront inégalement distans de z.

Mais remarquez que je ne dis pas qu'un point d'x ne puisse estre aussi distant de z qu'un point de z est distant d'x, mais seulement que tous les points d'x sont inégalement distans de z, & tous les points de z inégalement distans d'x.

VIII. Lemme.

XII. Si deux lignes menées d'un mesme point sont inclinées l'une sur l'autre, tous les points de chacune sont inégalement distans de l'autre, & les plus courtes perpendiculaires des points de chacune sur l'autre seront celles qui sont les plus proches du point de la section.



Car on ne peut tirer d'un point de z une perpendiculaire sur x, qu'elle ne soit oblique sur z, par V. 37. Dont tout le reste suit par le second Lemme.

TROIS PROPOSITIONS FONDAMENTALES DES PARALLELES.

Ces Lemmes donnent trois marques certaines pour reconnoistre si deux lignes sont paralleles selon la notion positive, c'est à dire si tous les points de chacune sont également distans de l'autre; ce qui fera les trois Propositions suivantes.

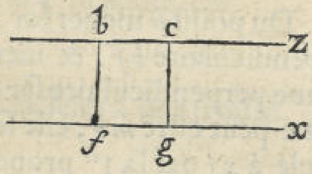
I. PROPOSITION.

SI deux lignes sont coupées par une ligne perpendiculaire à l'une, & à l'autre tous les points de chacune sont également distans de l'autre, & par consequent elles sont paralleles. 5. & 6e Lemmes. XIII.

II. PROPOSITION.

SI deux points d'une ligne sont également distans d'une autre ligne, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, & par consequent elles sont paralleles. 4. & 5e Lemmes. XIV.

Soient *b* & *c* deux points de la ligne *z* également distans de la ligne *x*; *bf* & *cg* perpendiculaires sur *x* seront égales.



Donc elles seront aussi perpendiculaires sur *z*, par le 4e Lemme.

Donc toutes les autres lignes menées des points de *z* perpendiculairement sur *x*, seront aussi perpendiculaires sur *z*, & égales à ces deux-là (par le 6e Lemme.) Et il en sera de mesme de celles qu'on menera des points d'*x* perpendiculairement sur *z*.

III. PROPOSITION.

DEUX lignes ne se croisant point & estant enfermées entre deux lignes, ne sçauroient estre égales & estre perpendiculaires, l'une sur une des enfermantes & l'autre sur l'autre, qu'elles ne le soient chacune sur toutes les deux (par le 4e Lemme) & que par consequent ces lignes en- XV.

fermantes ne soient paralleles (par le 6e Lemme.)

I. Corollaire.

XVI. Toutes les perpendiculaires entre deux paralleles sont égales : car c'est cela mesme qui les rend paralleles.

II. Corollaire.

XVII. Les obliques entre paralleles sont plus longues que les perpendiculaires. Car chaque oblique est plus longue que sa perpendiculaire, & toutes les perpendiculaires sont égales.

Probleme.

XVIII. Mener par un point donné une parallele à une ligne donnée.

Soit la ligne donnée *x*, & le point donné *b*, on peut en diverses manieres mener par le point *b* une parallele à *x*.

Premiere Maniere.

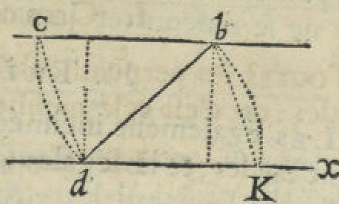
Du point *b* mener sur *x* la perpendiculaire *bf*, & mener par *b* une perpendiculaire sur *bf*, comme peut estre *mb*, elle sera parallele à *x* (par la 1re proposition.)

Seconde Maniere.

Ayant mené de *b* sur *x* la perpendiculaire *b f*, en élever une autre d'un autre point quelconque d'*x*, comme *g c*, la prenant égale à *bf*, & joignant les points *c* & *b*. *c b*. sera parallele à *x*, par la 2e proposition.

Troisieme Maniere plus courte et plus facile.

Du point *b* tirer sur *x* une oblique quelconque, comme *b d*. Du centre *d*, intervale *b d*, d'écrire l'arc *b k*, qui coupe x en k. Puis du centre b, intervale $b\,d$, décrire une portion de circonference dans laquelle on puisse prendre l'arc dc, égal à l'arc $b\,k$; la ligne $c\,b$ sera parallele à $d\,k$, c'est à dire à x.



Car les deux arcs $b\,k$, & $d\,c$, estant égaux & de cercles égaux, les cordes de ces arcs seront égales.

De plus $b\,c$, & $d\,k$, sont égales aussi, parce que ce sont rayons de cercles égaux.

Donc $d\,b$, estant égale à elle même, les trois lignes d'une part $d\,b$, $d\,c$, $c\,b$, & les trois de l'autre $b\,d$, $b\,k$, $d\,k$ sont égales chacune à chacune.

Donc le point d est autant éloigné de la ligné $c\,b$, que le point b, de la ligne $d\,k$, par V. 57.

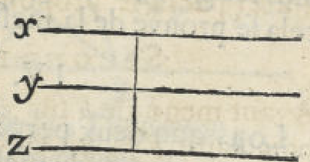
Donc les perpendiculaires de d sur $c\,b$, & de b sur $d\,k$, sont égales.

Donc $c\,b$ & $d\,k$ sont paralleles par la 3^e proposition.

I. THEOREME.

DEUX lignes ne sçauroient estre paralleles à une troisiéme, qu'elles ne le soient entr'elles. XIX.

Si x & z sont chacune parallele à y, elles le sont entr'elles. Car soit élevé d'un point d'x une perpendiculaire qui coupe y & z, elle coupera perpendiculairement y, parce que x & y sont paralleles. Et estant perpendiculaire sur y, elle le sera aussi sur z, parce qu'y & z sont paralleles.



Donc x & z auront une même perpendiculaire. Donc elles seront paralleles.

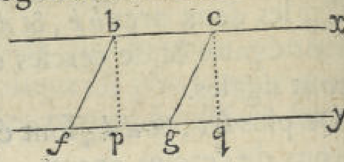
COROLLAIRE.

ON ne sçauroit faire passer par le mesme point deux differentes lignes qui soient paralleles à une mesme. Car il faudroit par le Theoreme precedent qu'elles fussent paralleles entr'elles, ce qui est absurde, puis qu'elles auroient XX.

un point commun, & qu'il est de l'essence des paralleles de ne se rencontrer jamais.

II. Theoreme.

XXI. Les également inclinées entre les mesmes paralleles sont égales, & les égales sont également inclinées.



Soient les paralleles *x* & *y*. Soient également inclinées entre ces paralleles *bf* & *cg*. Soient menées de *b* & de *c* les perpendiculaires *b p* & *c q*; ces perpendiculaires sont égales. Donc afin que *b f* & *cg* soient également inclinées, il faut que les éloignemens du perpendicule *f p* & *g q* soient égaux: or cela estant, les obliques sont égales par V. 48.

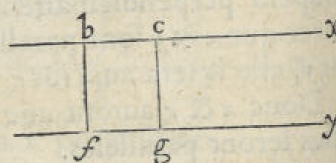
Et par la mesme raison les obliques *bf* & *c g* estant égales, & les perpendiculaires *b p* & *c q* égales aussi, les éloignemens du perpendicule *f p* & *g q* seront égaux. Donc ces obliques égales seront également inclinées.

III. Theoreme.

XXII. Les plus inclinées entre les mesmes paralleles sont les plus longues, & les plus longues sont les plus inclinées; cela se prouve de la mesme sorte par V. 54.

IV. Theoreme.

XXIII. Lors que deux perpendiculaires ou deux obliques également inclinées du mesme côté coupent des paralleles, le portions de ces paralleles comprises entre ces lignes sont égales.

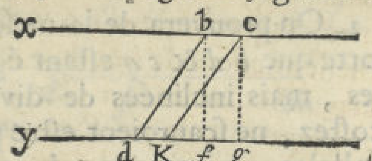


1. Cela est clair pour les perpendiculaires. Car *b c* & *fg* sont chacune perpendiculaire aux deux *b f* & *c g*, & par consequent égales par le cinquiéme Lemme.

2. Si ces deux coupantes sont également obliques du mesme costé, comme *b d* & *ck*; je dis que *b c* & *d k* se

trouveront auſſi eſtre égales: car tirant les perpendiculaires bf & cg, par le premier cas bc eſt égale à fg.

Or df eſt égale à kg, parce que ces obliques ſont ſuppoſées également inclinées. Donc ajoûtant fk à l'une & à l'autre, dk ſera égale à fg. Donc dk eſt égale à bc, qui eſt égale à fg. Et il n'importe que les lignes fuſſent ſi proches que les éloignemens du perpendicule entreroient l'un dans l'autre comme en cette figure.

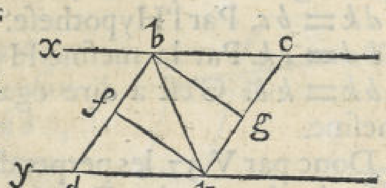


Car $bc = fg$.
$df = kg$.

Donc oſtant kf de l'un & de l'autre,
$dk = fg$. & par conſequent à bc.

V. Theoreme.

Les obliques également inclinées du meſme coſté entre paralleles, ſont paralleles elles meſmes. XXIV.



Soit comme devant bd & ck également inclinées entre les paralleles x & y. Soit menée l'oblique bk.

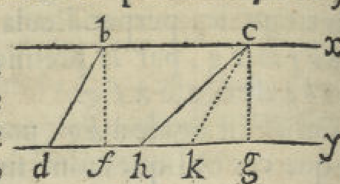
$bd = kc$. Par l'Hypotheſe & le 2 Theoreme.
$dk = cb$. Par le Theoreme precedent.
$bk = kb$. C'eſt à dire à ſoy-meſme.

Donc par V. 57. les perpendiculaires de k ſur bd & de b ſur ck ſont égales. Donc les lignes bd & ck ſont paralleles par 15. S.

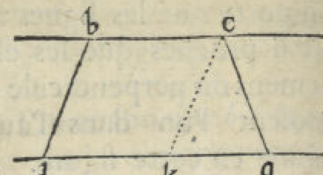
VI. Theoreme.

Les inégales entre paralleles, quoy qu'inclinées du meſme coſté ne peuvent eſtre paralleles, non plus que les égales qui ſont inclinées de divers coſtez. Car XXV.

1. Supposons que $b\,d$ & $c\,h$ entre les paralleles x & y soient inégales. Soit tiré de c, $c\,k$ égale à $b\,d$, & inclinée du mesme costé que $b\,d$; par le Theoréme precedent $b\,d$ & $c\,k$ sont paralleles. Donc $b\,d$ & $c\,h$ ne peuvent pas estre paralleles, par 20. S.



2. On prouvera de la mesme sorte que $b\,d$ & $c\,q$ estant égales, mais inclinées de divers costez, ne sçauroient estre paralleles, parce que $c\,k$ égale aussi à $b\,d$, mais inclinée du même côté luy est paralleles.



VII. Theoreme.

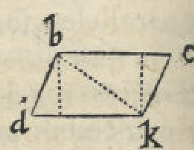
XXVI. Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si les opposées sont égales elles sont paralleles.

Soient les quatre lignes $b\,c$, $d\,k$, $b\,d$, $c\,k$; ayant tiré l'oblique $b\,k$,

$d\,k = b\,c$. Par l'Hypothese.

$b\,d = c\,k$. Par la mesme Hypothese.

$b\,k = k\,b$. C'est à dire égale à soy-mesme.



Donc par V. 57. les perpendiculaires de b sur $d\,k$, & de k sur $b\,c$, sont égales. Donc $b\,c$ & $d\,k$ sont parallelles par 15. S.

VIII. Theoreme.

XXVII. Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si les opposées sont paralleles elles sont égales.

Soit fait comme auparavant, $b\,c$ & $d\,k$ sont paralleles. Donc $b\,d$ & $c\,k$ qui sont entre ces paralleles ne sçauroient estre elles mesmes paralleles qu'elles ne soient égales & inclinées du mesme costé par le sixiéme Thereme. Donc elles sont égales, &c.

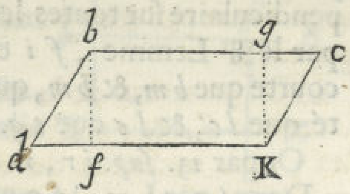
Mais estant égales & inclinées du mesme costé, les portions

portions des paralleles qui sont comprises entre ces lignes sont égales par le 4^e Theoreme. Donc *b c* & *d k* sont égales.

IX. Theoreme.

Quatre lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si deux des opposées sont paralleles & égales, les deux autres opposées sont aussi paralleles & égales. XXVIII.

Si *b c* & *d k* sont paralleles & égales; donc les perpendiculaires *b f* & *k g* sont égales, & *b g* égale à *f k*, 23. *sup.*
Donc *d f* égale à *g c*. I 19.
Donc *b d* & *k c* sont égales, par V. 48.
Et paralleles par 24. *sup.*



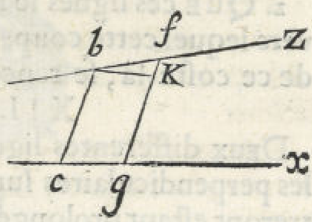
X. Theoreme.

Les lignes qui enferment des paralleles égales, sont paralleles elles mêmes. On le prouve de la même sorte. XXIX.

Corollaire.

Les lignes qui enferment des paralleles inégales ne sçauroient estre paralleles. XXX.

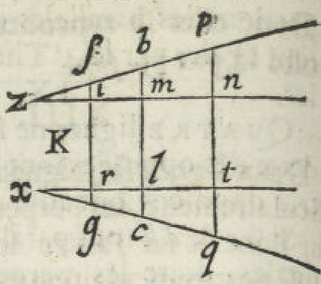
Car si les paralleles *b c* & *f g*, enfermées entre *x* & *z*, estoient inégales prenant *g k* égale à *b c*, la ligne *b k* par le Theoreme precedent est parallele à *x*. Donc *x* n'est pas parallele à *z*, par 19. *sup.*



XI. Theoreme.

Quand une ligne en coupe deux obliquement, & qu'elle est inclinée sur chacune du même costé, toutes les paralleles à cette coupante enfermées entre ces deux mêmes lignes sont inégales : & les plus courtes sont celles qui sont vers le costé, vers lequel cette premiere coupante estoit inclinée. XXXI.

Soit *x* & *z*, coupées l'une & l'autre obliquement par *b c*, inclinée vers *k*; je dis que *f g* & *p q*, paralleles à *b c*, & en-



fermées aussi entre x & z, seront inégales : & fg plus proche de k sera la plus courte, & $p\,q$ la plus longue. Car soit menée $z\,n$, perpendiculaire sur les trois paralleles, & $x\,t$ de même perpendiculaire sur toutes les trois, par le 8ᵉ Lemme, $f\,i$ est plus courte que $b\,m$, & $b\,m$, que $p\,n$; & de même $r\,g$ plus courte que $l\,c$, & $l\,c$ que $t\,q$.

Or par 23. *sup.* $i\,r$, $m\,l$, & $n\,t$ sont égales.

Donc (par I. 21.) $f\,g$ est plus courte que $b\,c$; & $b\,c$ que $p\,q$. Ce qu'il falloit demonstrer.

I. Corollaire.

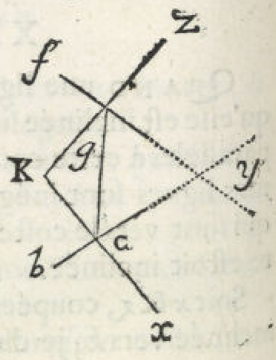
XXII. Il s'ensuit delà, 1. Que deux lignes coupées par une ligne qui coupe toutes les deux obliquement, & qui est inclinée sur chacune du même côté, ne sçauroient estre paralleles.

II. Corollaire.

XXIII. 2. Que ces lignes se rapprochant toûjours vers le côté vers lequel cette coupante est inclinée, estant prolongées de ce costé-là, se rencontreront à la fin. V. 11.

XII. Theoreme.

XXIV. Deux differentes lignes se joignant en un même point, les perpendiculaires sur chacune de ces lignes se rencontreront estant prolongées du costé qui regarde la concavité que font ces lignes jointes à un même point.

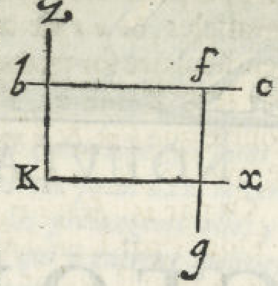


Soient les deux lignes $k\,z$ & $k\,x$, dont $k\,z$ soit coupée en g, perpendiculairement par fg, & $k\,x$, coupée en c, perpendiculairement par $b\,c$; soient joints les points g & c ; il est clair que $g\,c$ est oblique tant sur fg que sur $b\,c$, & inclinée sur l'une & sur l'autre vers y :

Donc elles ſe rencontreront eſtant prolongées de ce coſté là par 33. *ſup.*

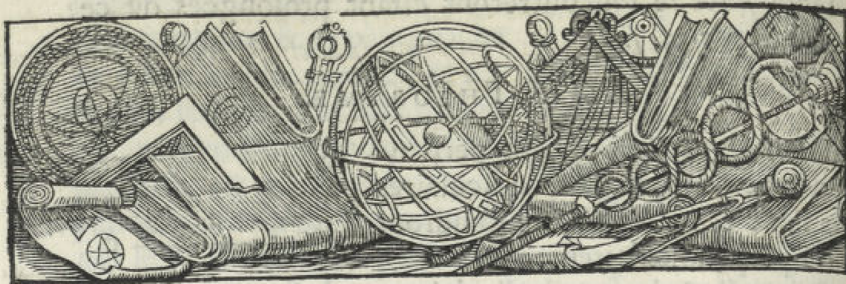
XIII. Theoreme.

Deux lignes ſe joignant perpendiculairement, les perpendiculaires ſur l'une & ſur l'autre ſe joindront auſſi perpendiculairement. XXV.



Soient *k z* & *k x* perpendiculaires; ſi *b c* eſt perpendiculaire ſur *k z*, elle eſt parallele à *k x*, par 13. *ſup.*

Donc *g f* ne peut eſtre perpendiculaire ſur *k x*, qu'elle ne le ſoit auſſi ſur *b c*.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SEPTIE'ME.

DES LIGNES TERMINE'ES A UNE CIRCONFERENCE,

Où il est parlé

DES SINUS,

Et de la Proportion des Arcs de divers Cercles à leurs Circonferences, & du Parallelisme des Lignes Circulaires.

I. IUSQUES *icy nous avons consideré les lignes droites entant qu'elles sont terminées à d'autres lignes droites, ou qu'elles leur sont paralleles. Nous les considerons maintenant entant qu'elles sont terminées à quelque point d'une circonference.*

On les peut distinguer par les diverses situations du point d'où elles sont menées à la circonference. Car ce point est

1. *Ou dans la circonference même,*
2. *Ou au dedans du cercle,*
3. *Ou au dehors.*

1. *Quand il est dans la circonference même, ce sont les lignes qui sont menées d'un point de la circonference à un autre point de la même circonference; Et ce sont celles que nous avons déja dit s'appeller* des cordes.

2. *Quand le point est au dedans du cercle, si ce point est le centre, ce sont* des rayons. *Mais si ce n'est pas le centre, on les peut appeller* des secantes interieures.

3. *Et quand ce point est hors le cercle; ou ces lignes entrent dans le cercle, le coupant dans sa convexité & estant terminées à sa concavité; ou elles n'entrent point dans le cercle; & alors elles sont telles, que si on les prolongeoit elles y entreroient, & tant celles là que celles qui y entrent, peuvent estre appellées* des secantes exterieures.

Ou bien, quoy que prolongées, elles n'entrent point dans le cercle; & ce sont celles là que l'on dit toucher le cercle, & que l'on appelle pour cette raison des tangentes.

Mais parce que les deux derniers genres, hors la derniere espece du 3e, qui est des tangentes, peuvent estre compris dans les mêmes propositions, nous renfermerons tout cela en 3. sections, Dont

La 1. sera des cordes.

La 2. des secantes interieures & exterieures.

La 3. des tangentes.

Et nous y en ajoûterons une 4e, qui sera du parallelisme des lignes circulaires.

PREMIERE SECTION.

DES CORDES.

PREMIER THEOREME.

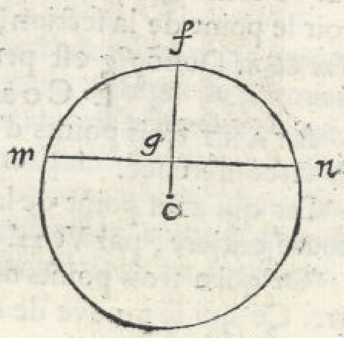
Les lignes droites qui coupent les cordes peuvent avoir trois conditions. II.

La 1. De les couper perpendiculairement.

La 2. De les couper par la moitié.

La 3. De passer par le centre.

Or deux de ces conditions tant données, donnent la 3e.



C'est à dire:

1. Si elles coupent les cordes perpendiculairement & par la moitié, elles passent par le centre.

2. Si elles coupent les cordes perpendiculairement & qu'elles passent par le centre, elles les coupent par la moitié.

3. Si elles les coupent par la moitié & qu'elles passent par le centre, elles les coupent perpendiculairement.

Soit pour tous les cas le centre *c*, & la corde *mn*, coupée par *f g*.

Preuve du premier Cas.

Si *fg*, estant perpendiculaire *à mn*, la coupe par la moitié, le point *g* est également distant des extrémitez de la coupée *m* & *n*. Donc *f g* estant prolongée doit contenir tous les points de ce plan également distans d'*m* & *n*, par V. 39. Or le centre est un de ces points: Donc il se doit trouver dans *f g* prolongée. Ce qu'il falloit demonstrer.

Preuve du second Cas.

Si *f g* coupe perpendiculairement *m n*, & qu'estant continuée elle passe par le centre, il y a un point dans cette ligne, sçavoir le centre qui est également distant d'*m* & *n*. Donc tous les autres points de cette ligne *fg*, dont l'un est le point de la section, sont également distans d'*m* & *n*. (par V. 31. 32.) Donc *m n* est divisée par la moitié.

Preuve du troisieme Cas.

Si *f g* divisant *m n* par la moitié estant prolongée passe par le centre, il y aura deux points dans cette ligne, sçavoir le point de la section, & le centre également distans d'*m* & *n*. Donc *f g* est perpendiculaire à *m n*, par V. 32.

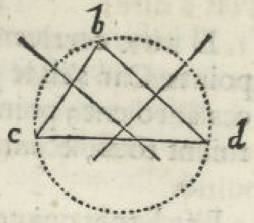
I. Corollaire.

III. Ayant trois points d'une circonference, on a toute la circonference.

Car qui a un point de la circonference & le centre, l'a toute entiere, par V. 22.

Or qui a trois points de la circonference, en a le centre. Ce qui se prouve de cette sorte.

Il est clair que ces trois points ne peuvent pas estre dans la même ligne droitte, parce que tous les points d'une circonference doivent estre également distans d'un même point, sçavoir le centre, & qu'il est impossible que trois points d'une ligne droitte soient également distans d'un même point, par V. 47.



Ainsi joignant ces trois points deux à deux, on a trois cordes qui soûtiennent 3 arcs de cette circonference.

Donc le centre se trouvera dans l'intersection de deux lignes qui couperont perpendiculairement & par la moitié de deux de ces 3 cordes.

Car par le precedent Theoreme chacune de ces perpendiculaires passe par le centre. Donc le centre est le point qui leur est commun. Et par là on voit combien il est facile de resoudre ce Probleme.

PROBLEME.

Trouver la circonference qui passe par trois divers points donnez.

Il ne faut que faire ce qui a servi de preuve au Theoreme precedent, en remarquant que si ces trois points étoient dans la même ligne droitte, le Probleme seroit impossible, parce que les perpendiculaires estant paralleles ne se rencontreroient jamais : au lieu qu'il est toûjours possible quand ils sont en deux differentes lignes, parce que les lignes qui les couperont perpendiculairement se rencontreront. VI. 34.

II. COROLLAIRE.

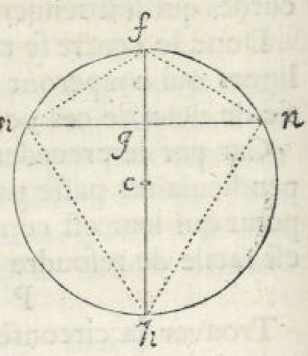
DEUX circonferences ne peuvent avoir trois points communs, qu'elles ne les ayent tous. Car par le premier Corollaire ces 3 points communs auront le mesme centre. Donc ces cercles seront concentriques. Or deux cercles estant concentriques, s'ils ont un rayon égal, tous les points des circonferences sont ensemble : comme quand un cercle de bois convexe est emboité dans un autre cercle de bois qui est creux. IV.

III. Corollaire.

V. Deux cercles ne ſe peuvent couper en plus de deux points. Car s'ils ſe coupoient en trois, leurs circonferences auroient 3 points communs, & par conſequent les auroient tous, & ainſi ne ſe couperoient point.

II. Theoreme.

VI. Les lignes qui coupent les cordes perpendiculairement & par la moitié, coupent auſſi par la moitié les arcs grands & petits qui ſoûtiennent ces cordes de part & d'autre.



Soit la corde *m n* coupée par *f h* perpendiculairement & par la moitié; je dis que chacun des arcs *m f n*, & *m h n*, ſont coupez par la moitié, l'un en *f*, & l'autre en *h*. Car *f g* eſtant perpendiculaire à *m n*, & ayant un de ſes points, ſçavoir le point de ſection également diſtant d'*m* & *n*, tous ſes autres points, comme *f h*, ſeront auſſi également diſtans d'*m* & *n*. Donc tirant les cordes *f m* & *f n*, elles ſeront égales, & par conſequent les arcs qu'elles ſoûtiennent ſeront égaux. Donc par la même raiſon ces cordes *h m* & *h n* ſeront égales, & les arcs qu'elles ſoûtiendront égaux. Donc les deux arcs *m f n*, & *m h n*, ſeront chacun partagez par la moitié par la ligne *f g*.

Corollaire.

VII. Tout rayon perpendiculaire à un diametre coupe par la moitié la demy circonference qui ſoûtient ce diametre. Car y ayant un point dans ce rayon perpendiculaire à ce diametre également diſtant des extrémitez de ce diametre, ſçavoir le centre, tous les autres points de ce rayon ſeront auſſi également diſtans des extrémitez de ce diametre. Donc le point où ce rayon coupe cette circonference en ſera également diſtant. Donc cette circonference ſera coupée par la moitié. Par V. 26.

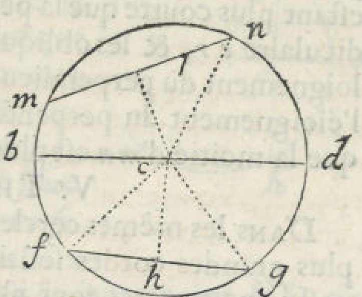
III. Theo-

III. THEOREME.

LA ligne qui paſſant par le centre coupe un arc par la moitié, coupe auſſi par la moitié & perpendiculairement la corde qui ſoûtient cet arc. Car il y a alors deux points dans la ligne qui coupe l'arc par la moitié, le centre & le point de ſection de l'arc, dont chacun eſt également diſtant des deux extrémitez de la corde. VIII.

IV. THEOREME.

LES cordes également diſtantes du centre dans le même cercle, ou dans cercles égaux, ſont égales; & les égales ſont également diſtantes du centre; & les plus proches du centre ſont les plus grandes. IX.



Cela eſt clair des diametres qui ſont également proches du centre, puis qu'ils paſſent tous par le centre.

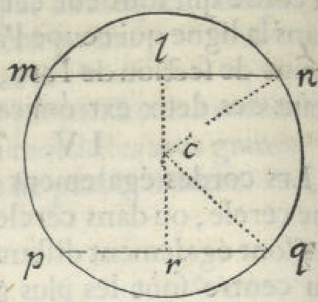
Et il eſt clair auſſi que tout diametre eſt plus grand que toute autre corde, puiſque tirant du centre deux rayons aux extrémitez de toute autre corde, ces deux rayons ſeront égaux au diametre & plus grands que cette corde. Par V. 5.

Pour ce qui eſt des autres cordes : 1. Les également diſtantes du centre ſont égales. Car ſi *m n* & *f g* ſont également diſtantes du centre. Donc les perpendiculaires du centre à chacune ſont égales, puis que c'eſt ce qui meſure la diſtance de ces cordes d'avec le centre. V. 38.

Et de plus ces perpendiculaires les diviſent chacune par la moitié. Donc tirant les rayons *c n* & *c g*, *l n*, & *h g* (qui ſont les moitiez de chacune de ces cordes) ſeront égales, par V. 50. parce que les obliques *c n* & *c g* ſont égales, & les perpendiculaires auſſi *c l* & *c h*. Donc les toutes *m n* & *f g* ſont égales. Ce qu'il falloit demonſtrer.

2. Les égales ſont également diſtantes du centre : car y ayant égalité entre les moitiez de ces cordes *l n* & *h g*, qui peuvent eſtre conſiderées comme les éloignemens du per-

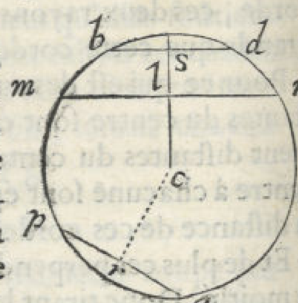
pendicule, & entre les rayons *cn* & *cg*, qui sont les obliques, il faut qu'il y ait aussi égalité entre les perpendiculaires du centre à ces cordes qu'elles divisent par la moitié, (V. 51.) & qu'ainsi ces cordes soient également distantes du centre.



3. Les plus proches du centre sont les plus longues, car si la corde *m n* est plus proche du centre que la corde *p q*, elle doit estre plus grande que la corde *p q*, parce que la perpendiculaire *cl* estant plus courte que la perpendiculaire *c r*, & les obliques *c n* & *c q* estant égales; l'éloignement du perpendicule *l n* doit estre plus grand que l'éloignement du perpendicule *r q*. (V. 54.) C'est à dire que la moitié d'*m n* est plus grande que la moitié de *p. q.*

V. Theoreme.

X. Dans les mêmes cercles ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes soûtiennent les plus grands arcs du costé que ces arcs sont plus petits que la demycirconference.



Soit *m n* plus grande que *p q*; je dis que l'arc *m n* est plus grand qne *p q*. Car prolongeant la perpendiculaire *c l* jusques à ce qu'elle soit aussi longue que la perpendiculaire *c r*, comme *c s*, & tirant la corde *b d*, qui soit perpendiculaire à *c s*, cette corde *b d* est égale à *p q*, par le Theoreme precedent. Et ces deux cordes *m n* & *b d* estant paralleles (par VI. 13.) ne se peuvent jamais rencontrer.

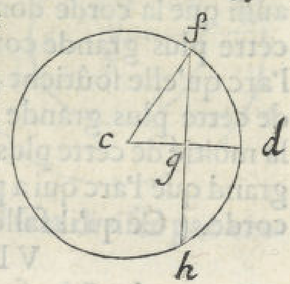
Donc l'arc *m n* ne pourra manquer de comprendre l'arc *b d*. Donc il sera plus grand que l'arc *b d*, puisque le tout est plus grand que sa partie.

Donc l'arc *m n* est plus grand aussi que l'arc *p q*, qui est égal à l'arc $b\,d$. Ce qu'il falloit demonstrer.

D'une autre mesure des Arcs, qui sont les Sinus.

DEFINITIONS.

QUAND un arc est moindre que la moitié de la demy-circonference, ou le quart de la circonference, la perpendiculaire de l'une des extrémitez de l'arc sur le rayon ou le diametre qui se termine à l'autre extrémité, s'appelle *le sinus* de cet arc; & la partie du rayon ou diametre qui est depuis la rencontre de la perpendiculaire, ou sinus, jusqu'à l'extrémité de l'arc, s'appelle *le sinus verse*. XI.



Soit une circonference, dont le centre est c, & un arc moindre que la moitié de la demy circonference fd, soit tiré le rayon cd, & la perpendiculaire d'f sur ce rayon fg, cette perpendiculaire fg est le *sinus* de l'arc fd; & gd en est le *sinus verse*.

I. LEMME.

QUE si on continuë fg jusqu'à h, autre point de la circonference, il est clair par le 1^er Theoreme que fh est partagée par la moitié par cd, & qu'ainsi le sinus fg est la moitié de la corde fh. XII.

II. LEMME.

ET il est clair aussi par le 2^e Theoreme que l'arc fdh, soûtenu par la corde fh, est double de l'arc fd, dont fg est le sinus. XIII.

D'où il s'ensuit qu'on peut encore definir le *sinus*.

AUTRE DEFINITION DES SINUS.

LA moitié de la corde du double de l'arc.

Car fg est la moitié de la corde fh, laquelle corde fgh soûtient l'arc fdh, lequel est double de l'arc fd. Tout cela estant supposé soit. XIV.

VI. THEOREME.

DANS le même cercle, ou dans les cercles égaux, les arcs qui ont le sinus égal sont égaux; & les sinus égaux XV.

donnent des arcs égaux ; & les arcs qui ont les plus grands sinus, sont les plus grands. Car par le 1 Lemme les sinus égaux sont moitiez de cordes égales. Or par le 2 Lemme ces cordes égales soûtiennent des arcs égaux qui sont doubles des arcs qui ont pour sinus ces sinus égaux. Donc les arcs doubles de ceux là estant égaux, ceux là le sont aussi. La converse se prouve de la même sorte, sans qu'il soit besoin de s'y arrester.

Et de même quand un sinus est plus grand que l'autre, la corde dont le plus grand est la moitié, est plus grande aussi que la corde dont le plus petit est la moitié. Donc cette plus grande corde soûtient un plus grand arc. Or l'arc qu'elle soûtient est double de celuy dont la moitié de cette plus grande corde est le sinns. Donc l'arc dont la moitié de cette plus grande corde est le sinus, est plus grand que l'arc qui a pour sinus la moitié d'une plus petite corde. (Ce qu'il falloit demonstrer.)

VII. Theoreme.

XVI. Quand les sinus sont égaux, les sinus verses le sont aussi, & les plus grands sinus donnent les plus grands sinus verses.

Car les sinus égaux sont également distans du centre. Or cette distance du centre ostée du rayon, ce qui reste est le sinus verse. Donc cette distance estant égale, le sinus verse est égal.

Que si le sinus est plus grand, cette distance est plus petite. Donc ostant moins du rayon, ce qui reste, qui est le sinus verse, est plus grand.

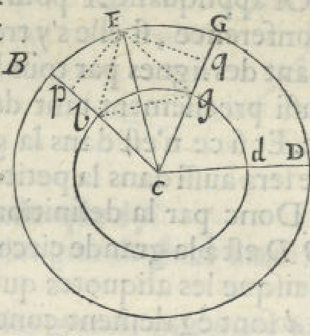
Avertissement.

XVII. *Les sinus ne mesurent proprement que les arcs moindres que la moitié de la demy circonference. Mais cela n'empèche pas qu'on ne s'en puisse servir pour mesurer ceux qui sont plus grands. Car ce qui manque à ces plus grands arcs pour faire la demycirconference, s'appelle le complement de ces plus grands arcs. Or ces complemens se mesurent par les sinus ; & il est aisé de juger que ces complemens estant égaux, ces plus grands arcs sont égaux aussi. Mais qu'estant inégaux, celuy qui a le plus petit complement est le plus grand.*

VIII. THEOREME.

QUAND plusieurs circonferences sont concentriques, & que du centre on tire des lignes indefinies, les arcs de toutes ces circonferences compris entre ces deux lignes sont en même raison à leurs circonferences. XVIII.

Soient au tour du centre c deux circonferences concentriques, & soient tirées les deux lignes cB & B cD; je dis que l'arc BD de la plus grande, & bd de la plus petite, sont proportionels à leurs circonferences.



Car les aliquotes quelconques de BD soient appellez x; je dis que si par tous les points de section on tire des lignes au centre, bd sera divisée par ces lignes en aliquotes pareilles.

Pour le prouver il suffit de considerer deux x, que je suppose estre BF & FG, tirant les lignes Fc & Gc; je dis que les arcs bf & fg sont égaux entr'eux, aussi bien que BF & FG. Car tirant d'F une perpendiculaire sur Bc & une autre sur Gc, les deux perpendiculaires Fp & Fq seront les sinus d'arcs égaux, & par consequent égales; & les sinus verses de ces arcs Bp & Bq seront aussi égaux. Donc pb & qg seront aussi égales.

Donc Fb & Fg sont égales, parce que ce sont les obliques dont les perpendiculaires Fp & Fq sont égales, comme aussi les éloignemens des perpendicules pb & qg. V. 48.

Donc dans la ligne Fc il y a deux points, sçavoir F & c, dont chacun est également distant de b & de g.

Donc Fc coupe perpendiculairement & par la moitié la corde bg, & par consequent aussi l'arc bfg.

Donc l'arc bf est égal à l'arc fg. Ce qu'il falloit demonstrer.

Or cela estant demonstré, il est clair qu'on prouvera la même chose de toutes les aliquotes de *B G* en les prenant deux à deux.

Donc *B G* estant divisé en aliquotes quelconques, les lignes menées au centre par tous les points de section seront des aliquotes pareilles dans *b g*, lesquelles on pourra appeller *x*.

Or appliquant *X* pour mesurer le reste de la grande circonference, si elle s'y trouve precisement tant de fois menant des lignes par tous les points de section, *x* se trouvera aussi precisement tant de fois dans la petite circonference. Et si ce n'est dans la grande qu'avec quelque reste, ce ne sera aussi dans la petite qu'avec quelque reste.

Donc par la definition des grandeurs proportionnelles *B D* est à la grande circonference, comme *b d* à la petite, puisque les aliquotes quelconques pareilles de *B D* & de *b d* sont également contenuës dans les 2 circonferences.

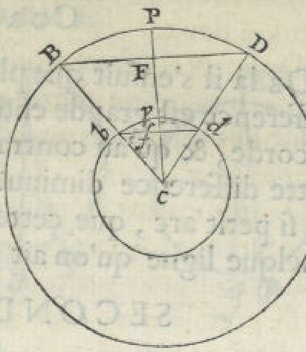
Definition.

XVIII. Les arcs qui ont même raison à leur circonference soient appellez proportionnellement égaux, ou d'autant de degrez l'un que l'autre. Surquoy il se faut souvenir que toute circonference grande ou petite est considerée comme divisée en 360 parties, qu'on appelle degrez, & chaque degré en 60 minutes, & chaque minute en 60 secondes, & chaque seconde en 60 troisiémes, & ainsi à l'infiny.

Et comme on ne regarde point la grandeur absoluë des portions d'une circonference, parce que cette grandeur nous est inconnuë, mais seulement la grandeur relative, c'est à dire par proportion à la circonference; on pourroit appeller les arcs qui sont proportionellement égaux, parce qu'ils sont d'autant de degrez simplement *égaux*: & appeller *tout-égaux* ceux qui le sont tout ensemble proportionellement & absolument comme sont les arcs d'autant de degrez dans le mesme cercle.

IX. Theoreme.

XIX. Quand les cercles sont inégaux, les arcs proportionellement égaux sont soûtenus par de plus grandes cordes, & ont de plus grands sinus, dans les plus grands cercles.



Soient au tour du centre *c* deux circonferences concentriques, les arcs *B D* & *b d* compris entre les meſmes rayons *B C* & *D C* ſont proportionellement égaux.

Or tirant les cordes *B D* & *b d* & les diviſant par la moitié auſſi bien que les arcs par la ligne *P c*, les arcs *B P* & *b p* ſon auſſi proportionellement égaux. Or *B F* & *b f*, perpendiculaires ſur *P c*, ſont les ſinus de ces deux arcs.

Et par VI. 12. *B F* eſt plus grande que *b f*.

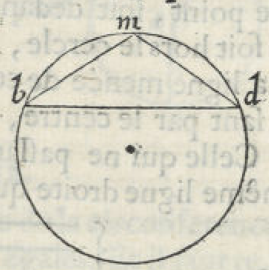
Donc les arcs égaux ont de plus grands ſinus dans les plus grands cercles.

Et de même la corde *B D* eſt plus grande que *b d* (par VI. 31.) & auſſi parce que *B F*, moitié de *B D*, eſt plus grande que *b f*, moitié de *b d*.

Donc les arcs *B D* & *b d* eſtant proportionellement égaux, celuy du plus grand cercle a une plus grande corde.

X. Theoreme.

Les cordes dans un même cercle ne ſont point proportionelles aux arcs, mais les plus grands arcs (j'entens toûjours ceux qui ne ſont pas plus grands que la demycirconference) ont de plus petites cordes à proportion que les plus petits. C'eſt à dire que la corde d'un arc, qui n'eſt que la moitié d'un plus grand arc, eſt plus grande que la moitié de la corde de ce plus grand arc. XXII.



La preuve en eſt bien facile. Car ſoit l'arc *b d* partagé en *m* par la moitié, *b m* égale à *d m* ſeront chacune la corde d'un arc qui n'eſt que la moitié de l'arc que ſoûtient la corde *b d*. Or ces deux cordes *b m* & *d m* ſont plus grandes que *b d*. Donc eſtant égales, chacune eſt plus grande que la moitié de la corde *b d*.

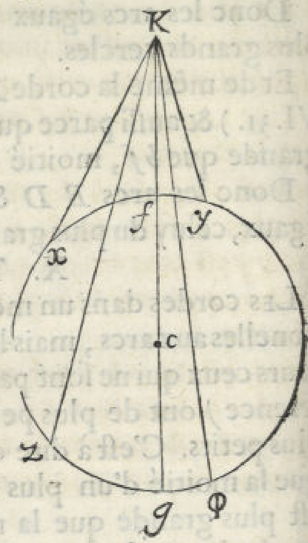
Corollaire.

XXII. De là il s'enſuit que plus les arcs ſont grands, plus la difference eſt grande entre la longueur de l'arc & celle de la corde; & qu'au contraire plus les arcs ſont petits plus cette difference diminuë. De ſorte qu'on peut prendre un ſi petit arc, que cette difference ſera plus petite que quelque ligne qu'on ait donnée.

SECONDE SECTION.

Des Secantes interieures et exterieures.

XXIII. Nous avons déja dit que les lignes menées à la circonference d'un point de dedans le cercle autre que le centre ſe pouvoient appeller *des ſecantes interieures.*



Et que quand le point eſtoit hors le cercle, & qu'elles n'étoient point tangentes, on les pouvoit appeller des *ſecantes exterieures.*

Or pour abreger le diſcours dans l'expreſſion de ces lignes, ſoient toûjours appellez

Le centre c.

Le point, ſoit dedans le cercle, ſoit hors le cercle, k.

La ligne menée de ce point paſſant par le centre, kg.

Celle qui ne paſſant point par le centre eſt dans la même ligne droite que celle qui y paſſe, kf.

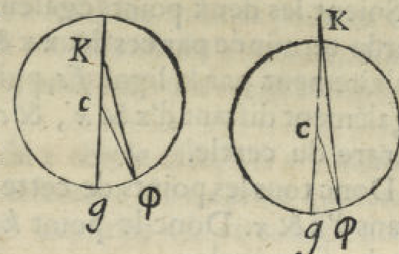
Les autres, kx. ky. kz. kφ.

Cela ſuppoſé ſoit.

I. Theo-

I. THEOREME.

LA plus longue de ces lignes est kg. C'est à dire celle qui passe par le centre. XXIV.

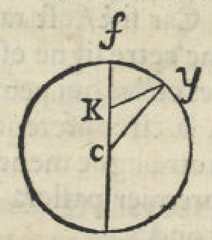


Car si on la veut comparer avec $k\varphi$, soit tiré le rayon $c\varphi$, qui est égal à cg. kc, plus $c\varphi$, est plus grande que $k\varphi$, par V. 6.

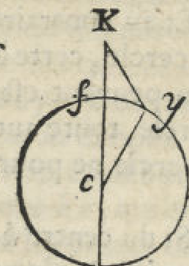
Donc kg, est plus grande que $k\varphi$.

II. THEOREME.

LA plus courte de toutes ces lignes est kf. C'est à dire XXV.
celle qui ne passant point par le centre est dans la même ligne droite que celle qui y passe.



Car comparant kf avec ky, & ayant tiré le rayon cy,
Si k est au dedans du cercle,
ck plus kf est égale à cy.
Or cy est plus courte que ck plus ky.
Donc ck plus kf est plus courte que ck plus ky.
Donc ostant ck, qui est commun, kf est plus courte que ky.



Que si k est dehors le cercle,
kf plus fc, est plus courte que ky plus yc.
Or fc est égale à yc.
Donc kf est plus courte que ky.

III. THEOREME.

LES lignes menées de k à des points de la circonference XXVI.
également distans de f ou de g sont égales. Et il faut remarquer que deux points ne sçauroient estre également distans d'f, qu'ils ne soient aussi également distans de g. Mais on appelle également distans d'f ceux qui sont plus

proches d'f que que de g, & également diſtans de g ceux qui ſont plus proches de g que d'f.

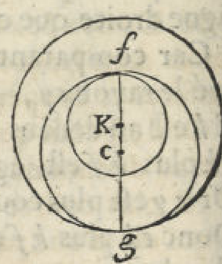
Soient les deux points également diſtans d'f, x & x la corde terminée par ces deux x & x eſt coupée perpendiculairement par la ligne fc, puiſque f par l'hypotheſe eſt également diſtant d'x & x, & c auſſi, parce que c'eſt le centre du cercle.

Donc tous les points de cette ligne ſont également diſtans d'x & x. Donc le point k, qui en eſt un. Donc k x & $k\,x$ ſont égales.

C'eſt la même choſe de 2 points également diſtans de g.

IV. Theoreme.

XXVII. Si du centre k, intervale kf, ou kg, on décrit un nouveau cercle, il touchera le premier cercle en un ſeul point, c'eſt à dire en f, ou en g, ſans le couper.

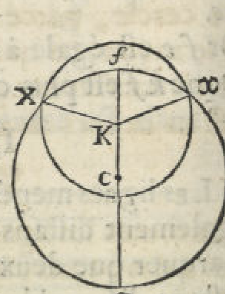


Car ſi kf eſt rayon du 2e cercle, comme cette ligne eſt la plus courte de toutes celles qui peuvent eſtre menées de k à la circonference du 1er cercle, toute autre ligne menée à la circonference du premier paſſera la circonference du ſecond.

Et au contraire ſi kg eſt le rayon du 2e cercle, cette ligne eſtant la plus longue de toutes celles qui peuvent eſtre menées de k à la circonference du 1er cercle, toute autre ligne menée de k à la circonference du 1 cercle ne pourra pas aller juſqu'à la circonference du 2.

V. Theoreme.

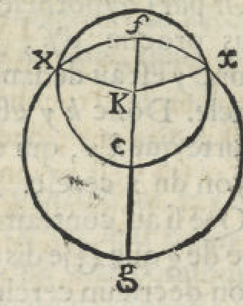
XXVIII. Si du centre k, intervale plus grand que kf, & plus petit que kg, comme pourroit eſtre kx, on décrit un cercle, il coupera la circonference du premier au point x & x. C'eſt à dire à 2 points également diſtans de f, (ou également diſtans de g, ſi on avoit pris un point pour déterminer cet intervale plus proche de g,) & la partie de la circonfe-



rence du 1 cercle entre x & *x*, dont le milieu est *f*, sera au dedans du 2 cercle, au lieu que la partie de la même circonference du 1 cercle, entre ces deux mêmes points x & *x*, dont *g* est le milieu, sera au dehors du 2 cercle. Car par 4. S. deux circonferences ne se peuvent couper en plus de deux points.

Or cela estant, le rayon du 2 cercle estant *k x*, toute ligne menée de *k* à la circonference du 1 cercle qui sera égale à *k x*, se trouvera aussi terminée à la circonference du 2 cercle.

Or par le troisiéme Theoreme cette ligne égale à *k x* est celle qui est terminée à un point de la circonference du premier cercle, aussi distant d'*f* de l'autre costé qu'*x* en est distant de son costé Donc x & *x* seront les deux seuls points dans lesquels la deuxiéme circonference coupera la premiere.



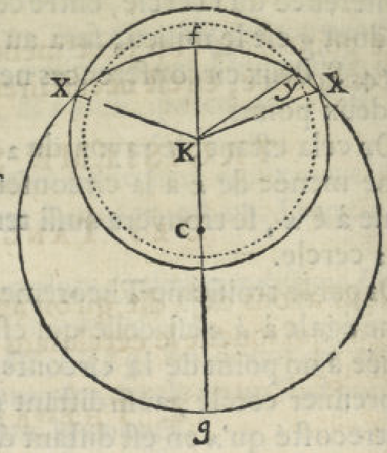
Or il est clair que le point *f* se trouvera au dedans du 2 cercle, parce que *kf* est plus courte que *k x*, qui en est le rayon. Donc tout ce qui est d'une part entre *f* & x, & de l'autre entre *f* & *x*, se trouvera aussi au dedans du 2 cercle, puis qu'il faudroit que le 2 cercle eust coupé le 1 en d'autres points qu'x & *x*, afin que quelqu'un des points plus proche d'*f* se trouvassent ou dans la circonference du 2 cercle, ou au dehors.

Et par la mesme raison le point *g* se trouvera au dehors du 2 cercle, parce que *k g* est plus longue que *k x*, qui en est le rayon : ce qui fait voir aussi que tous les points de la 1 circonference plus proches de *g* qu'*x* se trouveront aussi au dehors du 2 cercle.

VI. THEOREME.

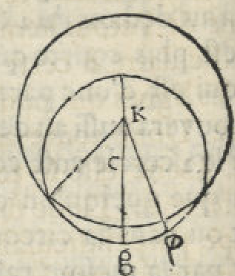
DE toutes les lignes menées de *k*, celles qui sont menées à des points plus proches d'*f* sont les plus courtes, & celles qui sont menées à des points plus proches de *g* sont les plus longues. XXIX.

Supposons par exemple que le point *y* est plus proche d'*f* que le point *x*; je dis que *k y* est plus courte que *k x* Car si on décrit un cercle du centre *k*, intervale *k x*, par le Theoreme precedent tous les points de la circonference du premier cercle plus proches d'*f* qu'*x* se trouveront au dedans dù deuxiéme cercle.



Or par l'hypothese, *y* est plus proche d'*f*, qu'*x*. Donc *y* est au dedans du 2 cercle. Donc *k y* est plus courte que *k x*, qui est un rayon du 2 cercle.

Que si au contraire nous supposons que φ est plus proche de *g* que *z*; je dis que *k* φ est plus longue que *k z*. Car si on décrit un cercle du centre *k*, intervale *k z*, par le Theoreme precedent tous les points de la circonference du premier cercle plus proches de *g* que *z*, se trouveront au dehors du deuxiéme cercle. Or par l'hypothese, φ est plus proche de *g* que *z*. Donc φ est au dehors du cercle. Donc *k* φ est plus longue que *k z*, qui est un rayon du deuxiéme cercle.



I. Corollaire.

XXX. De nul point autre que le centre ou ne peut mener trois lignes égales à la circonference. Car les 3 points où ces trois lignes seroient terminées ne peuvent pas estre également distans du point *f*, ou du point *g*. Donc si l'un des 3 est plus proche ou plus éloigné du point *f*, la ligne qui y sera terminée sera plus courte ou plus longue que les deux autres. Donc, &c.

II. COROLLAIRE.

LE point d'où l'on peut mener trois lignes égales à la circonference, en eſt neceſſairement le centre.

TROISIEME SECTION.

DES TANGENTES.

Nous avons déja dit qu'on appelle *tangente* du cercle la ligne qui touche le cercle ſans entrer dedans, quoy que prolongée. XXXI.

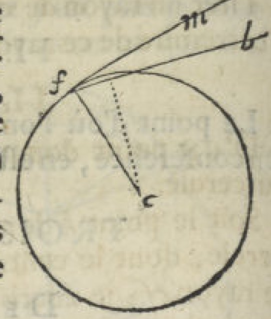
I. THEOREME.

TOUTE ligne perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon touche le cercle, & ne le touche qu'en un ſeul point; c'eſt à dire qu'il n'y a qu'un ſeul point qui ſoit commun à la circonference & à cette ligne; & ce point s'appelle le point de l'atouchement. Car puiſque le rayon eſt perpendiculaire à cette ligne, c'eſt la plus courte de toutes les lignes qui puiſſent eſtre menées du centre à cette ligne. Donc toute autre menée du centre ſera plus longue. Donc elle ſe terminera en un point hors de la circonference. Donc nul autre point que celuy où ce rayon coupe perpendiculairement cette ligne ne pourra eſtre commun à cette circonference & à cette ligne. Ce qu'il falloit demonſtrer.

II. THEOREME.

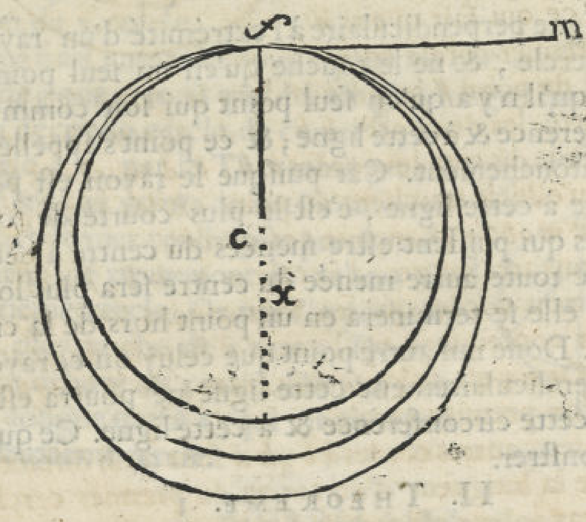
ON ne peut faire paſſer aucune ligne droite entre la tangente & la circonference, quoy qu'on en puiſſe faire paſſer une infinité de circulaires qui ne ſe rencontreront que dans le point de l'attouchement.

La premiere partie ſe prouve ainſi. Soit *c f* un rayon, *m f* la tangente : ſoit *b* un point quelconque au deſſous de la tangente. Tirant de *b* une ligne à *f*, elle ſera obli-



que ſur *c f*, inclinée vers *c*, parce que *m f* eſt perpendiculaire à *c f.* Donc la perpendiculaire de *c* à *b f*, ſera plus courte que *c f.* Donc elle ſe terminera dans le cercle (V. 27.) Donc une partie de *b f* ſera au dedans du cerle. Donc on n'aura pas pû faire paſſer *b f* entre la tangente & la circonference.

La deuxiéme partie ſe prouve ainſi. Soit *f c* prolongée à l'infiny du coſté de *c* : ſoient tous les divers points de cette ligne au deſſous de *c* appellez *x*. Toutes les circonferences qui auront l'un de ces points que j'appelle *x* pour centre, & *x f* pour rayon, auront *m f* pour tan-



gente par le premier Theoreme., & ne rencontreront, ny la circonference qui a *c* pour centre, ny les unes les autres, qu'en *f* (par 27. S.) Donc toutes ces circonferences paſſeront ſans ſe rencontrer entre la tangente & le premier cercle.

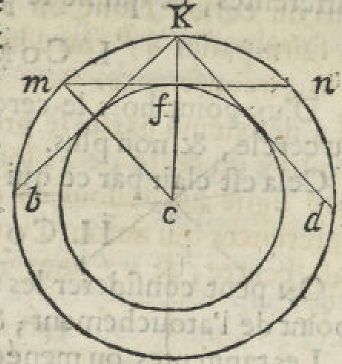
I. Probleme.

XXXIII. Descrire la tangente qui touche la circonference à un point donné.

Tirer un rayon de ce point donné, la perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon sera la tangente que l'on cherche.

II. PROBLEME.

D'UN point donné hors le cercle tirer des tangentes au cercle. XXXIV.



Soit le point *k* donné hors le cercle, dont le centre est *c*, & le rayon *cf*; je décris un autre cercle du meme centre, intervale *ck*, & puis ayant tiré la ligne *kc*, qui coupe en *f* la circonference du 1 cercle, je tire par le point *f* la corde du grand cercle *mn*, qui coupe perpendiculairement *kc*, ce qui fait que *mn* touche le premier cercle en *f*.

Cela fait, du point *k* je prends dans le grand cercle de part & d'autre les deux arcs *kb*, *kd*, égaux chacun à l'arc *mn*; Et je dis que les cordes *kb*, *kd* touchent le 1 cercle, & qu'elles le touchent au point où les rayons du grand cercle *mc* & *nc* coupent ces cordes.

Car les trois arcs du grand cercle *mn*, *kb*, *kd* estant égaux, les trois cordes qui les soûtiennent sont égales aussi, & par consequent également distantes du centre par 4. *sup.* Or *mn* est distante du centre *c* de la longueur d'un rayon du premier cercle.

Donc les deux autres cordes *kb*, *kd* sont aussi distantes du centre de la longueur d'un rayon du premier cercle.

Donc ce rayon leur est perpendiculaire, puis qu'autrement il ne mesureroit pas leur distance d'avec le centre.

Donc par le Theoreme precedent elles sont tangentes du premier cercle.

Et elles le touchent au point où elles sont coupées par les rayons du grand cercle *mc* & *nc*. Car le point *k* partageant par la moitié l'arc *mn*, le point *m* partage aussi par la moitié l'arc *kb*. Donc le rayon *mc* est perpendiculaire à la corde *k b*, parce que les deux points *m* & *c* ſont chacun également diſtans de *k* & de *b*.

Donc ſi le point où le rayon *mc* coupe la corde *k b* eſt *h*, *h* ſera auſſi l'extrémité du rayon du premier cercle, qui eſt perpendiculaire à la corde *k b*, puis qu'autrement il faudroit que de *c* on puſt tirer ſur *k b* deux perpendiculaires differentes, ce qui ne ſe peut.

I. Corollaire.

XXXV. D'un point hors le cercle on peut tirer deux tangentes au cercle, & non plus.

Cela eſt clair par ce qui vient d'eſtre demonſtré.

II. Corollaire.

XXXVI. On peut conſiderer les tangentes comme terminées au point de l'atouchement ; & alors

Les tangentes, ou menées à un même cercle d'un même point, ou de divers point également diſtans du centre, ou menées à des cercles égaux de points également diſtans des centres de chacun ; ſont égales.

Car il eſt viſible par la ſolution du deuxiéme Probleme, que dans tous ces cas, ces tangentes ſont moitié de cordes égales.

QUATRIEME SECTION.

Des Circonferences paralleles.

I. Lemme.

XXXVII. Une ligne droite eſt perpendiculaire à une circonference, autant que la nature de l'une & de l'autre le peut ſouffrir, lorſqu'elle eſt perpendiculaire à la tangente au point de la ſection.

II. Lemme.

XXXVIII D'où il s'enſuit, que toute ligne qui eſtant prolongée paſſe par le centre, eſt perpendiculaire à la circonference.

III. Lemme.

III. Lemme.

La diſtance d'un point à une circonference, ſe meſure par la plus courte ligne qui puiſſe eſtre menée de ce point à cette circonference. Or cette plus courte ligne eſt celle qui ne comprend point le centre, mais qui eſt dans la même ligne droite que celle qui y paſſe. (S. 25.) XXXIX.

Et par conſequent cette ligne eſt perpendiculaire à la circonference par les deux premiers Lemmes.

DEFINITION.

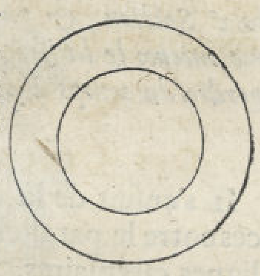
des circonferences Paralleles.

Deux circonferences ſont paralleles, lorſque tous les points de chacune ſont également diſtans de l'autre. XL.

C'eſt à dire ſelon les precedens Lemmes, lorſque toutes les lignes droites, menées chacune des points de l'une perpendiculairement ſur l'autre, ſont égales.

I. Theoreme.

Toutes les circonferences concentriques (c'eſt à dire qui ont un meſme centre) ſont paralleles. XLI.



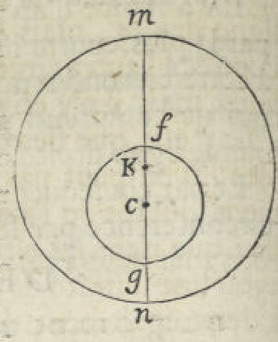
Car tous les rayons de la plus grande cir conference ſont perpendiculaires à l'une & à l'autre. Donc oſtant les rayons de la plus petite, ce qui reſtera entre les deux circonferences, ſera égal, & en meſurera la diſtance. Donc tous les points de chacune ſeront également diſtans de l'autre. Donc elles ſont paralleles.

II. Theoreme.

Deux cercles non concentriques eſtant l'un dans l'autre, le diametre du plus grand qui paſſera par les deux centres, coupera chaque circonference par la moitié; & alors il arrivera 3. ou 4. choſes conſiderables. XLII.

1. Les parties de ce diametre qui ſe trouveront d'un

costé & d'autre entre les deux circonferences, c'est à dire *fm*, & *gn*, sont perpendiculaires à l'une & à l'autre, & mesurent *fm* le plus grand, & *gn* le plus petit éloignement de ces deux circonferences.



2. Nulle autre ligne que ces deux là qui se trouvent dans ce diametre qui passe par les deux centres, ne peut estre perpendiculaire à l'une & à l'autre circonference, toute autre ligne qui sera perpendiculaire à l'une des circonferences, étant oblique sur l'autre.

3. Tous les points d'une demy-circonference d'une part sont inégalement distans de l'autre demy-circonference de la mesme part.

4. Toutes les fois que deux points d'une circonference sont également distans de l'une ou l'autre des extremitez de son diametre, qui passe par les deux centres, ils sont aussi également distans de l'autre circonference.

Tout cela est si aisé à prouver par ce qui a esté dit dans la 2e Section, & par les trois Lemmes de celle-cy, que j'aime mieux le laisser à trouver pour exercer l'esprit, que de perdre du temps à le demonstrer.

Corollaire.

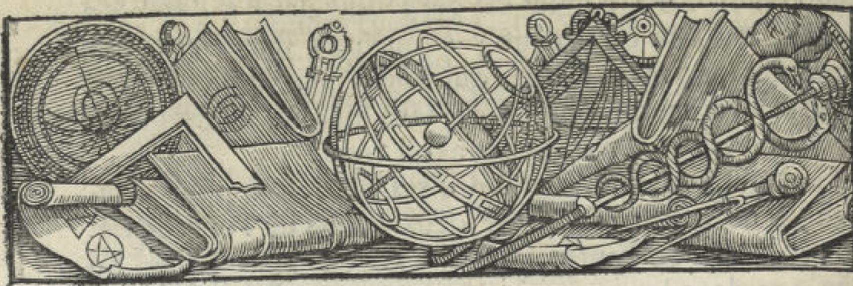
XLII. Il s'ensuit de là, qu'on peut remarquer trois differences entre le parallelisme des lignes droites, & celuy des lignes circulaires.

La 1re est, que la notion negative des paralleles droites, qui consiste à ne se rencontrer jamais quand on les prolongeroit à l'infiny, n'a point de lieu dans les circulaires, qui peuvent bien ne se rencontrer jamais sans estre paralleles; de sorte que pour l'estre il faut que ce soit selon la notion positive, qui consiste en ce que les points de l'une sont toûjours également distans de l'autre.

La 2e est, est que deux lignes droites sont paralleles, quand une meſme ligne eſt perpendiculaire à l'une & à l'autre. Au lieu qu'il peut y avoir non ſeulement une ligne droite, mais deux, qui ſoient perpendiculaires à l'une & à l'autre circonference, ſans qu'elles ſoient paralleles, mais il n'y en peut pas avoir trois.

La 3ᵉ eſt, que deux lignes droites ne s'étant point croiſées, il ne peut pas y avoir deux points de l'une également diſtans de l'autre, qu'elles ne ſoient paralleles. Au lieu que dans les circonferences non paralleles il peut y avoir une infinité de points dans chacune, qui ſoient deux à deux également diſtans de l'autre. Mais il n'y en peut avoir trois enſemble.

Le fondement de ces differences vient d'une part de ce que la ligne circulaire eſt bornée en elle-meſme. Et de l'autre, de ce qu'il en faut avoir trois points pour en avoir la poſition; au lieu qu'il n'en faut que deux pour avoir celle de la ligne droite.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE HUITIÉME.

DES ANGLES RECTILIGNES.

I. *APRES avoir parlé des lignes, c'est suivre l'ordre de la nature que de passer aux angles qui sont plus composez que les lignes tenant quelque chose des surfaces, comme nous allons voir.*

DEFINITION DE L'ANGLE RECTILIGNE.

II. *L'angle rectiligne* est une surface comprise entre deux lignes droites qui se joignent en un point du costé où elles s'approchent le plus, indefinie & indeterminée selon l'une de ses dimensions, qui est celle qui répond à la longueur des lignes qui la comprennent, & determinée selon l'autre par la partie proportionnelle d'une circonference dont le centre est au point où ces lignes se joignent.

AUTRES DEFINITIONS.

III. Les lignes qui comprennent l'angle s'appellent *ses côtez.*

IV. Le point où ces lignes se joignent s'appelle *son sommet.*

Si l'on joint deux points de ces costez par une autre ligne, cette ligne s'appelle *la base* ou *la soustendante de l'angle.* Et l'on dit que cette ligne *soûtient* l'angle, & que l'angle est *opposé* à cette ligne, ou est *soûtenu* par cette ligne.

Cette base s'appelle *corde* quand les côtez de l'angle sont égaux, pource qu'alors ces costez de l'angle sont considerez comme rayons d'un cercle dont cette base est une corde. VI.

Que si d'un des côtez on peut faire décendre une perpendiculaire sur l'autre, cette base alors s'appelle le *sinus* de cet angle. VII.

Cette partie proportionelle de la circonference qui mesure la grandeur de l'angle s'appelle *l'arc que comprend l'angle.* VIII.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

DE LA MESURE DES ANGLES.

Les arcs de toutes les circonferences qui ont pour centre le point où les costez de l'angle se coupent sont tous proportionels à leurs circonferences, & par consequent determinent tous la mesme grandeur de l'angle. IX.

La consequence est claire par la definition de l'angle, puisque nous avons dit que c'estoit une surface indeterminée selon une dimension, & qui n'estoit determinée selon l'autre que par une partie proportionnelle des circonferences qui ont pour centre le point où ses costez se joignent.

Pour montrer donc que les arcs de ces circonferences determinent tous la mesme grandeur de l'angle, il ne faut que montrer que tous ces arcs sont proportionels à leurs circonferences.

Or c'est ce qui a déja esté prouvé, Livre VII. 20.

DE LA PREMIERE MESURE DE L'ANGLE

QUI EST L'ARC COMPRIS ENTRE SES COSTEZ.

Il s'ensuit delà que pour sçavoir la vraye grandeur d'un angle, il faut sçavoir la grandeur proportionelle de l'arc compris entre ses costez, c'est à dire de combien de degrez X.

eſt cet arc. Car un degré n'eſt pas le nom d'une grandeur abſoluë, mais proportionelle, puiſque, comme nous avons déja dit, il ſignifie la trois cent ſoixantiéme partie de quelque circonference que ce ſoit, dont chacune en ſoy eſt plus grande ou plus petite ſelon que la circonference eſt plus grande ou plus petite: & il en eſt de meſme des minutes, des ſecondes, & des troiſiémes. C'eſt pourquoy on peut appeller arcs égaux, ſelon qu'il a eſté dit VII. 19. ceux qui ſont d'autant de degrez, quoy qu'ils puiſſent eſtre inégaux ſelon leur grandeur abſoluë, & égaux en toute maniere, ou *tout-égaux*, ceux qui ſont d'autant de degrez & qui ſont auſſi égaux ſelon leur grandeur abſoluë, tels que ſont les arcs d'autant de degrez dans les cercles égaux.

De l'Angle droit.

XI. C'est par là qu'on a diviſé l'angle en *droit* & *non droit*, & le non droit, en *aigu* & *obtus*.

On appelle angle droit celuy qui a pour meſure la moitié de la demy-circonference. D'où il s'enſuit.

1. Que tout angle droit a de l'autre coſté ſur la meſme ligne un autre angle qui luy eſt égal, puiſque l'angle qui eſt de l'autre coſté a pour meſure ce qui reſte de la demy-circonference, qui eſt la moitié.

2. Qu'un angle droit eſt la meſme choſe qu'un angle de 90. degrez. Car la demy-circonference en ayant 180. la moitié de cette demy-circonference en a 90.

3. Que toute ligne perpendiculaire ſur un ligne fait ſur cette ligne deux angles droits, l'un d'un coſté & l'autre de l'autre. Car elle partage en deux la demy-circonference qui a pour centre le point de leur ſection, par VII. 17.

De l'Angle aigu.

XII. On appelle angle *aigu* celuy qui eſt moindre qu'un droit, c'eſt à dire qui a pour meſure un arc moindre que la moitié de la demy-circonference. D'où il s'enſuit.

Que tout angle moindre que de 90. degrez eſt aigu.

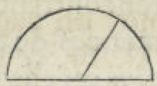
De l'Angle obtus.

XIII. On appelle angle *obtus* celuy qui eſt plus grand que l'angle droit; c'est à dire qui a pour mesure un arc plus grand que la moitié de la demy-circonference. D'où il s'ensuit.

Que tout angle plus grand que de 90. degrez est obtus.

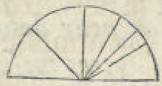
I. THEOREME.

TOUTE ligne qui en coupe une autre obliquement fait d'un costé une angle aigu & de l'autre un obtus, & les deux ensemble valent deux droits. Car cette ligne partage inégalement la demy circonference. Et partant fait deux angles inégaux. Mais elle ne la divise qu'en deux portions, & partant les deux portions prises ensemble valent toute la demy-circonference. XIV.



II. THEOREME.

LORSQUE plusieurs lignes droites en rencontrent une en un même point & du mesme costé, tous les angles que font toutes ces lignes entre elles & avec la rencontrée valent deux droits. Car ils comprennent tous ensemble la demy-circonference, qui est la mesure de deux angles droits. XV.



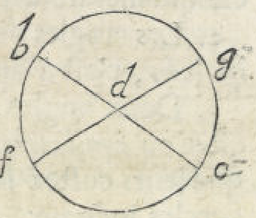
DEFINITION.

L'ANGLE *aigu*, qui avec l'obtus vaut deux angles droits, s'appelle le *complement de l'angle obtus.* XVI.

III. THEOREME.

LORSQUE deux lignes se coupent en passant de part & d'autre, il est bien clair que si elles se coupent perpendiculairement, elles font quatre angles égaux tous quatre entr'eux, c'est à dire tous quatre droits. XVII.

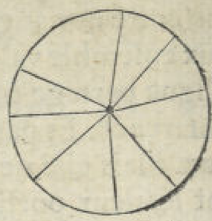
Mais si elles se coupent obliquement, elles en font deux aigus & deux obtus, dont l'aigu est opposé à l'aigu & l'obtus à l'obtus, & cela s'appelle estre opposé au sommet. Et les opposez sont égaux.



Car faisant un cercle du point où ces deux lignes *b c* & *f g* se coupent, chacune coupera la circonference par la moitié, & par consequent la moitié *bgc* eſt égale à la moitié *fbg*. Or ces deux moitiez ont l'arc *bg* de commun, qui eſt l'arc d'un des angles obtus: & par conſequent oſtant cet arc, l'arc de l'aigu qui reſte d'une part ſera égal à l'arc de l'aigu qui reſte de l'autre. On prouvera la même choſe des deux angles obtus.

IV. THEOREME.

XVIII. LORSQUE pluſieurs lignes droites ſe rencontrent en un même point eſtant menées de toutes parts, tous les angles qu'elles font valent quatre droits. Car ils ont tous enſemble pour meſure une circonference entiere.



DES AUTRES MESURES DE L'ANGLE.

XIX. *Quoy que l'angle n'ait en effet de vraye & naturelle meſure que l'arc d'un cercle; neanmoins comme on ne connoiſt pas la longueur des lignes courbes, on eſt obligé d'avoir recours à d'autres meſures, mais toûjours par rapport à celle là.*

On les peut rapporter à trois qui ſont toutes priſes de la baſe conſiderée diverſement: ou comme *corde*: ou comme *ſinus*: ou ſimplement comme *baſe*.

DE LA SECONDE MESURE DE L'ANGLE QUI EST LA CORDE.

XX. Nous commencerons par la baſe conſiderée comme corde, ſur quoy il faut remarquer

1. Que pour cela il faut que les coſtez de l'Angle ſoient pris égaux. Car alors ils ſont conſiderez comme rayons d'un cercle dont le centre eſt au ſommet, & ainſi la ligne qui en joint les extremitez eſt la corde de l'arc de ce cercle qui meſure cet angle.

2. Les angles ainſi conſiderez peuvent eſtre appellez *iſoſceles*, c'eſt à dire à jambes égales.

3. Deux angles iſoſceles comparez enſemble peuvent eſtre ou *équilateres* entre eux, ou *inéquilateres*; c'eſt à dire que leurs coſtez ſont rayons ou de cercles égaux, ou de cercles inégaux.

Cela

Cela ſuppoſé, pour bien comprendre toute cette meſure de l'angle, il ne faut que faire attention à ces Lemmes tirez des Livres V. & VII.

I. LEMME.

DANS les cercles égaux les cordes égales ſoûtiennent des arcs tout-égaux. Et les arcs égaux ſont ſoûtenus par cordes égales. XXI.

II. LEMME.

DANS les cercles égaux les plus grandes cordes ſoûtiennent de plus grands arcs. Et les plus grands arcs ſont ſoûtenus par les plus grandes cordes. VII. 10. XXII.

III. LEMME.

LES cercles eſtant inégaux, les cordes égales ſoûtiennent des arcs de plus de degrez dans les plus petits cercles VII. 20. XXIII.

IV. LEMME.

LES arcs d'un même nombre de degrez ſont ſoûtenus par de plus grandes cordes dans les plus grands cercles. VII. 20. XXIV.

I. THEOREME.

TROIS ſortes d'égalitez peuvent eſtre conſiderées dans deux angles iſoſceles. XXV.

1. L'égalité des coſtez de l'un à ceux de l'autre, qui fait qu'on les appelle *équilateres entr'eux*.

2. L'égalité des cordes, qui les peut faire appeller *iſocordes*.

3. L'égalité des angles mêmes.

Or deux de ces égalitez eſtant données, donnent la 3me.

PREMIER CAS.

LES angles équilateres entr'eux & iſocordes ſont égaux. Car ils ont pour meſure des arcs tout-égaux, puiſqu'étant équilateres ils ſont meſurez par des arcs de cercles égaux, & que par le 1er Lemme les cordes égales de cercles égaux ſoûtiennent des arcs tout-égaux. XXVI.

SECOND CAS.

LES angles équilateres & égaux ſont iſocordes. C'eſt la converſe du même premier Lemme. XXVII.

TROISIEME CAS.

XXVIII. LES angles isocordes & égaux sont équilateres enrr'eux. Car il est aisé de voir par le 3e Lemme que les cordes égales ne peuvent soûtenir des arcs égaux, que dans les mêmes cercles, ou en des cercles égaux.

II. THEOREME.

XXIX. QUAND il n'y a égalité que dans l'une de ces trois choses, voicy ce qui arrive.

PREMIERE CAS.

XXX. N'Y ayant égalité que dans les costez, les plus grandes cordes donnent les plus grands angles, & les plus grands angles ont les plus grandes Cordes. C'est le 2e Lemme.

SECOND CAS.

N'Y ayant égalité que dans les cordes, les plus grands costez donnent les plus petits angles, & les plus petits angles ont les plus grands costez. C'est le 3e Lemme.

TROISIEME CAS.

XXXI. N'Y ayant égalité que dans la grandeur des angles, les plus grandes cordes donnent les plus grands costez, & les plus grands costez ont les plus grandes cordes. C'est le 4e Lemme.

I. PROBLEME.

XXXII. COUPER en deux un angle donné. L'ayant pris isoscele, il ne faut qu'en couper la corde perpendiculairement & par la moitié, ce qui se fait de la même sorte. Car alors l'arc sera partagé par la moitié, par VII. 6.

II. PROBLEME.

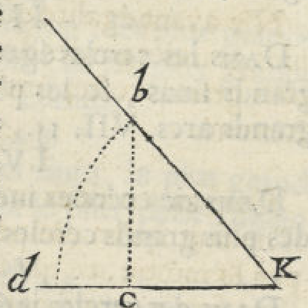
XXXIII. AYANT un point donné dans une ligne donnée, en élever une qui fasse sur cette ligne un angle égal à un donné. Soit l'angle donné. L'ayant fait isoscele en marquer la corde, puis du point donné dans la ligne pris pour centre, décrire d'un intervale égal aux costez de l'angle donné une portion de circonference, dans laquelle en commençant par le point où cette circonference coupera la ligne donnée, on prendra une corde égale à la corde de l'angle donné. La ligne menée du point donné à l'extremité de cette corde satisfera au Probleme. Car ces deux angles seront équilateres entr'eux & isocordes ; & par consequent égaux par le premier Theoreme.

DE LA TROSIEME MESURE DE L'ANGLE, QUI EST LE SINUS.

LE sinus de l'arc qui mesure un angle peut estre appellé le sinus de cet angle. D'où il s'ensuit, XXXIV.

1. QUE comme il n'y a que les arcs moindres que la moitié de la demy-circonference qui ayent un sinus ; il n'y a aussi que les angles aigus qui en ayent. Ce qui n'empéche pas qu'on ne se puisse servir des sinus pour comparer ensemble deux angles obtus, en mesurant par les sinus les angles aigus qui sont les complemens de ces obtus. Voyez VII. 17. XXXV.

2. IL s'ensuit que toute ligne menée d'un point de l'un des costez d'un angle aigu perpendiculairement sur l'autre costé, est le sinus de l'arc qui mesure cet angle, & par consequent le sinus de cet angle. XXXVI.



Car soit *k* le sommet d'un angle aigu, & que de *b*, point quelconque de l'un de ses costez, soit menée sur l'autre la perpendiculaire *b c*. Je dis que *b c* est le sinus de l'arc qui mesure cet angle. Car ayant prolongé *kc* jusques en *d*, en sorte que *k d* soit égale à *k b* ; si du centre *k*, intervale *k b*, on décrit un cercle, l'arc de ce cercle compris entre *d* & *b* sera la mesure de cet angle. Or *b c* est le sinus de cet arc, par VII. 11. Donc *b c* est le sinus de l'arc qui mesure l'angle *k*, & par consequent de l'angle *k*.

3. IL s'ensuit que le costé d'un des points duquel est menée la perpendiculaire sur l'autre costé consideré depuis le sommet jusques à ce point, comme *k b*, peut estre appellé le rayon de cet angle, parce qu'il est le rayon du cercle dont l'arc le mesure. Et l'autre costé depuis le point où tombe la perpendiculaire ou *sinus*, peut estre appellé l'*antisinus*, qui est toûjours égal au rayon moins le *sinus verse*. D'où il s'ensuit, XXXVII.

XXXVIII 4. Que la grandeur du sinus reglant toûjours celle du sinus verse (comme il a esté montré VII. 16) elle regle toûjours aussi celle des *antisinus*, quoyque par rapport au rayon, puisque l'*antisinus* n'est autre chose que le rayon moins le *sinus verse*; de sorte que dans deux angles differens les rayons & les sinus ne sçauroient estre égaux que les antisinus ne le soient aussi.

Tout cela supposé, soient considerez les Lemmes suivans.

I. Lemme.

XXXIX. Quand on dit que deux angles qu'on veut mesurer par les sinus ont le rayon égal, c'est de même que si l'on disoit qu'ils sont mesurez par des arcs de cercles égaux; & s'ils ont le rayon inégal, par des arcs de cercles inégaux.

II. Lemme.

XL. Dans les cercles égaux les arcs égaux ont des sinus égaux, & les sinus égaux donnent des arcs égaux. VII. 15.

III. Lemme.

XLI. Dans les cercles égaux les plus grands arcs ont les plus grands sinus, & les plus grands sinus donnent les plus grands arcs. VII. 15.

IV. Lemme.

XLII. Dans des cercles inégaux les arcs estant égaux, ceux des plus grands cercles ont les plus grands sinus. VII. 18.

V. Lemme.

XLIII. Dans des cercles inégaux les sinus estant égaux, ceux des plus grands cercles donnent des arcs proportionellement plus petits, c'est à dire de moins de degrez. C'est une suitte claire du precedent.

I. Theoreme.

XLIV. Trois égalitez peuvent estre considerées dans les angles que l'on compare & que l'on mesure par les sinus.

1. L'égalité des rayons.
2. L'égalité des sinus.
3. L'égalité des angles mêmes.

Or deux estant données donnent la 3^e.

PREMIER CAS.

Les angles qui ont le rayon égal & le sinus égal sont égaux. 1er & 2me Lemme. XLV.

SECOND CAS.

Les angles égaux qui ont le rayon égal ont le sinus égal. 1er & 2me Lemme. XLVI.

TROISIEME CAS.

Les angles qui sont égaux & qui ont le sinus égal, ont le rayon égal. Car s'ils avoient le rayon inégal, ils seroient mesurez par des arcs de cercles inégaux : & par consequent (selon le 5e Lemme) les sinus égaux donneroient des arcs proportionellement inégaux, & ainsi les angles ne pourroient pas estre égaux. XLVII.

II. THEOREME.

N'y ayant égalité que dans l'une de ces trois choses, voicy ce qui arrivera. XLVIII.

PREMIER CAS.

N'y ayant égalité que dans le rayon, les plus grands sinus donnent les plus grands angles, & les plus grands angles ont les plus grands sinus. 3e Lemme. XLIX.

SECOND CAS.

N'y ayant égalité que dans les sinus, le plus grand rayon donne le plus petit angle, & le plus petit angle a le plus grand rayon. 5me Lemme. L.

TROISIEME CAS.

N'y ayant égalité que dans les angles, le plus grand rayon donne le plus grand sinus, & le plus grand sinus donne le plus grand rayon. LI.

DES ANGLES FAITS PAR LES LIGNES ENTRE PARALLELES.

Comme les perperpendiculaires entre les paralleles font des angles droits sur l'une & sur l'autre (ce qui est toûjours la mesme chose) il n'y a que les angles que font les obliques à considerer.

Mais ces obliques entre paralleles faisant d'une part un angle aigu & de l'autre un obtus, c'est l'aigu que l'on mesure premierement, & par l'aigu on connoist l'obtus. Et ainsi quand nous parlerons d'angles égaux, nous entendrons les aigus, & les obtus par consequence seulement.

Or dans la consideration de ces angles aigus faits par des obliques entre paralleles,

L'oblique est le rayon de l'angle,

La perpendiculaire de l'extremité de l'oblique (qui est un point de l'une des paralleles sur l'autre parallele) en est le sinus.

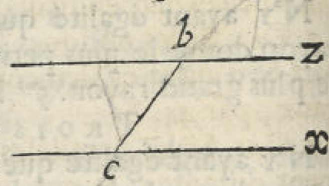
D'où il s'ensuit, que les sinus qui mesurent les angles que font des obliques entre les mêmes paralleles sont tous égaux, parce que les perpendiculaires entre les mêmes paralleles sont égales.

Comme aussi entre differentes paralleles, pourveu que les deux paralleles d'une part soient autant distantes l'une de l'autre, que celles de l'autre part. Et c'est ce qu'on peut appeller deux espaces paralleles égaux.

On peut tirer de là diverses propositions importantes qui ne seront que des Corollaires du 1^er^ ou du 2^me^ Theoreme.

I. Corollaire.

LII. Toute oblique entre deux paralleles fait les angles alternes sur ces paralleles égaux, c'est à dire que l'aigu qui est d'une part est égal à l'aigu qui est de l'autre part, & par consequent l'obtus à l'obtus.



Car ces angles alternes ont pour rayon cette même ligne oblique *bc*, & pour sinus l'un la perpendiculaire de *b*, sur la parallele *x*, & l'autre la perpendiculaire de *c*, sur la parallele *z*. Or ces deux perpendiculaires sont égales. Donc par 45. S.

II. Corollaire.

LIII. Les obliques égales entre les mêmes paralleles font les angles égaux : par la même raison.

III. Corollaire.

LIV. Les obliques entre paralleles qui font les angles égaux sont égales, S. 47.

IV. COROLLAIRE.

LES plus courtes lignes entre paralleles sont les plus grands angles; par le 2 Theoreme. 2. Cas. LV.

V. COROLLAIRE.

QUAND des lignes sont enfermées entre differentes lignes paralleles, on peut y considerer trois égalitez. LVI.

1. L'égalité des obliques.

2. L'égalité des angles.

3. L'égalité de la distance entre les unes & les autres de ces paralleles, ce qui fait que cette distance estant égale, les perpendiculaires entre ces differentes paralleles sont égales.

Or deux de ces égalitez estant données donnent la troisiéme.

1. CAS. Si les obliques sont égales, & les angles qu'elles font entre leurs paralleles égaux, les unes & les autres paralleles sont également distantes. Car ce sont des angles qui sont égaux, & qui ont les rayons égaux (sçavoir ces obliques.) Donc leurs sinus sont égaux, par 46. S.

Or ils ont pour sinus les perpendiculaires entre leurs paralleles.

Donc ces perpendiculaires sont égales.

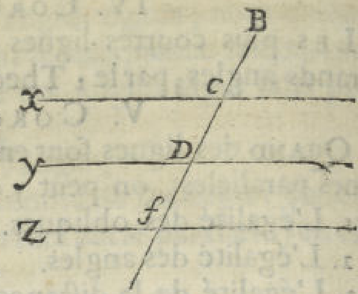
2. CAS. Si les obliques sont égales, & les paralleles de part & d'autre également distantes, les angles seront égaux, par 45. S.

3. CAS. Si les paralleles de part & d'autre sont également distantes, & que les angles soient égaux, les obliques sont égales, 47. S.

VI. COROLLAIRE.

LA même ligne coupant obliquement plusieurs paralleles, les coupe toutes avec la même obliquité. C'est à dire qu'elle fait sur toutes les angles aigus égaux. C'est une suitte du premier Corollaire & de 13. S. LVII.

Soient trois lignes paralleles x, y, z, coupées par la ligne B en c, en d, en f; l'angle aigu vers c au dessus d'x est égal à l'angle aigu de dessous, parce qu'ils sont opposez au sommet; & l'angle aigu de dessous est égal à



l'angle aigu vers *d*, au dessus d'*y*, parce qu'ils sont alternes, & ce dernier est égal à l'aigu de dessous *y*, parce qu'ils sont opposez au sommet. Et ce dernier à l'aigu vers *f*, au dessus de *z*, parce qu'ils sont alternes, & ainsi des autres. Donc tous les angles aigus que fait une même ligne sur diverses paralleles qu'elles coupe sont égaux. Et de là il s'ensuit, que les obtus sont égaux aussi, parce que les aigus sont les complemens des obtus.

VII. Corollaire.

LVIII. Plusieurs paralleles estant également distantes les unes des autres, c'est à dire la 1 de la 2, & la 2 de la 3, & la 3 de la 4, &c.

Si une même ligne les coupe toutes, toutes les portions de cette ligne comprises entre deux de ces paralleles sont égales.

Car tous les angles aigus que fait cette ligne sur ces paralleles sont égaux. Et les sinus de ces angles, qui sont les perpendiculaires entre chaques deux paralleles, sont égaux aussi par l'hypothese.

Donc les rayons de ces angles qui sont les portions de cette ligne comprises entre chaques deux paralleles sont égales.

VIII. Corollaire.

Lors que deux lignes sont menées d'un même point
LIX. sur une autre ligne, c'est comme si ces lignes estoient entre paralleles.

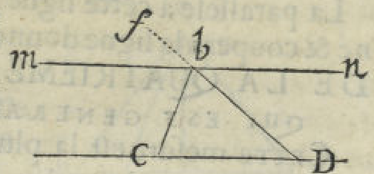
Car on peut par ce point tirer une parallele à la ligne que ces deux lignes coupent.

IX. Corollaire.

LX. Tout angle plus les deux angles que font ces costez sur la base sont égaux à deux droits.

Soient *b c* & *b d* les costez d'un angle, & *c d* la base, par

par le precedent Corollaire, on peut mener par le point *b* la ligne *m n*, parallele à la base, sur laquelle parallele les costez de l'angle donné feront de nouveaux angles autour du donné, sçavoir l'angle *m b c*, & *n b d*. Or ces trois angles sont égaux à deux droits, par 15. S. Et chacun des deux qui sont à costé de l'angle donné, est égal à un de la base, sçavoir à son alterne, par 51. S.



Donc les deux de la base plus l'angle donné sont égaux à deux droits.

X. Corollaire.

Si on prolonge un costé d'un angle vers le sommet de l'angle, comme si on prolongeoit *d b* jusques en *f*, l'angle que fait ce costé prolongé sur l'autre costé, comme l'angle *f b c*, est égal aux deux angles sur la base. Car cet angle qui est appellé exterieur plus l'angle du sommet, vallent deux droits. Or les deux angles sur la base, plus l'angle du sommet vallent aussi deux droits. Ostant donc l'angle du sommet qui est commun, l'angle exterieur sera égal aux deux angles sur la base. LXI.

Ce sera la même chose si on prolonge la base. Car l'angle exterieur que fera la base prolongée sur un costé, sera égal aux deux interieurs opposez ; c'est à dire à l'angle que fait l'autre costé sur la base plus l'angle du sommet.

XI. Corollaire.

Deux angles sont égaux, quand les angles que les côtez de l'un font sur sa base, sont égaux à ceux que les côtez de l'autre font sur la sienne. LXII.

XII. Corollaire.

III. Probleme.

D'un point donné hors une ligne donnée, mener une ligne qui fasse sur la donnée un angle donné. LXIII.

D'un point quelconque de la ligne donnée en élever une qui fasse sur la donnée l'angle donné (par le 2[e] Probleme. 33.)

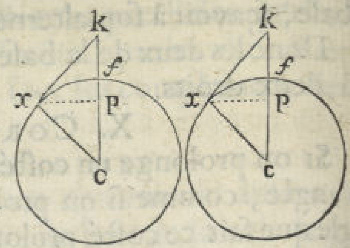
La parallele à cette ligne qui passera par le point donné & coupera la ligne donnée, satisfera au Probleme.

DE LA QUATRIEME MESURE DE L'ANGLE QUI EST GENERALEMENT LA BASE.

Cette mesure est la plus imparfaite, & ne peut servir à mesurer les angles qu'en cas que les costez de deux angles non isosceles soient égaux chacun à chacun, ce qui fera deux Theoremes.

I. Theoreme.

LXIII. Lors que deux angles non isosceles sont équilateres entr'eux; c'est à dire que chacun des costez de l'un est égal à chacun des côtez de l'autre; si la base est égale à la base, ces angles sont égaux.



C'est ce qui se prouve ainsi. Ou l'on peut faire tomber une perpendiculaire de l'extremité de l'un des costez de ces angles sur l'autre côté; ou on ne le peut, comme lors qu'ils sont obtus.

1. Cas. Si on le peut (comme lorsque les angles sont *kcx*) les perperpendiculaires *x p* seront égales, par V. 57.

Or ces perpendiculaires sont les sinus de ces angles qui ont aussi le rayon égal, sçavoir *cx*. Donc ils sont égaux, par 45. S.

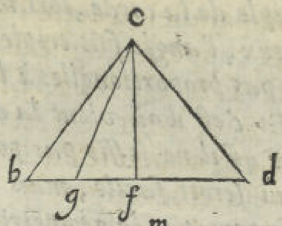
2. Cas. Si on ne le peut (comme si ces angles estoient *cxk* des mêmes figures) alors la perpendiculaire *xp* menée du sommet même de chacun des angles, feroit voir que les deux angles que les costez de chacun de ces angles obtus font sur leur base, sont égaux chacun à chacun (c'est à dire l'angle *k* égal à l'angle *k*, & l'angle *c*, à l'angle *c*.) Donc les angles obtus *kcx* seront égaux, par 62. S.

II. Theoreme.

LXIV. Deux angles égaux estant équilateres entr'eux ont la base égale.

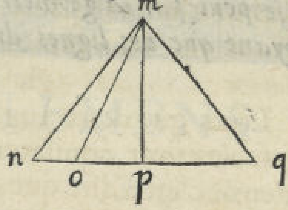
Ces angles égaux que l'on suppose équilateres entre eux sont,

1. Ou droits.
2. Ou aigus.
3. Ou obtus.



1. Cas. S'ils ſont droits, comme *b f c*, & *m n p*, ils ont les baſes *b c* & *m n* égales, par V. 48.

2. Cas. S'ils ſont aigus, comme *b d c*, *n q m*; les perpendiculaires *c f* & *m p*, qui ſont les ſinus de ces angles, ſeront égales, par 56. S.



Donc *f d* = *p q*. V. 48.
Donc *b f* = *n p*. I. 19.
Donc *c b* = *m n*. V. 48. Ce qu'il falloit demonſtrer.

3. Cas. S'ils ſont obtus, comme *b g c*, & *n o m*; les angles aigus *c g f*, *m o p*, complemens de ces obtus, ſeront égaux.

Donc les perpendiculaires *c f* & *m p*, qui ſont les ſinus de ces angles, ſeront égales par S. 56.
Donc *g f* = *o p*.
Donc *b f* = *n p*. I. 18.
Donc *c b* = *m n*. V. 48. Ce qu'il falloit demonſtrer.

OBSERVATION,

Touchant la comparaiſon de la premiere meſure des angles avec ces trois dernieres.

Nous avons déja dit qu'il n'y avoit que l'arc qui fuſt la meſure parfaite & naturelle de l'angle. Mais pour le mieux voir, il faut remarquer que les trois autres meſures montrent bien ſi un angle eſt égal à un angle, ou entre des angles inégaux quel eſt le plus grand ou quel eſt le plus petit. Mais il n'y a que l'arc qui donne la veritable proportion entre les angles inégaux. Car il eſt certain que ſi l'arc eſt triple ou quadruple, ou quintuple de l'arc, l'angle ſera auſſi triple, quadruple ou quintuple de l'angle. Mais cela ne ſe peut pas dire des trois autres meſures, eſtant faux que ſi la corde *est triple de la corde, lors même que les angles sont équilateres entr'eux, l'angle soit triple de l'angle, parce que les cordes ne sont pas proportionelles à leurs arcs, comme il a esté dit* VII. 21. *Et c'est d'où vient la difficulté de la trisection de l'angle, parce qu'il ne suffit pas pour cela de couper la corde en trois: ce qui seroit facile, mais il faut couper l'arc en trois; ce qui ne se peut par la geometrie ordinaire, c'est à dire en n'y employant que des lignes droites & circulaires.*

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE NEUVIE'ME.

Des angles qui ont leur sommet hors le centre du Cercle, dont les Arcs ne laissent pas de les mesurer.

IL est bien aisé de reconnoistre que les angles ne peuvent avoir pour veritable mesure que les arcs d'un cercle, & que toutes les autres mesures, comme les cordes, les sinus, & les bases, ne peuvent estre que subsidiaires de celle-là, & que même elles ne les mesurent qu'imparfaitement. I.

Mais on a creu jusques icy qu'on ne pouvoit employer pour mesurer un angle que les arcs du cercle au centre duquel est le sommet de cet angle. Et ainsi arrivant rarement que deux angles que l'on compare ayent leur sommet au centre du même cercle, on ne pouvoit presque jamais employer la mesure des arcs dans la comparaison de plusieurs angles, & on estoit obligé d'avoir recours à de longs circuits par la conference de plusieurs triangles, ce qui obligeoit à considerer tant de lignes, qu'il estoit impossible que l'imagination n'en fust extrémement fatiguée, qui est une des choses qu'on doit éviter autant que l'on peut dans l'étude de la Geometrie.

Cependant il eſt vray qu'il n'y a point d'angle qu'on ne puiſſe meſurer par les arcs d'un cercle, en quelque endroit qu'en ſoit le ſommet au regard du cercle : C'eſt à dire,

1. Soit qu'il ſoit dans la circonference du cercle.

2. Soit qu'il ſoit au dedans, quoy qu'ailleurs qu'au centre.

3. Soit même qu'il ſoit au dehors, pourveu que ſes coſtez coupent ou touchent le cercle.

C'eſt ce que l'on verra par ce Livre, qui ne ſervira pas ſeulement à meſurer avec une merveilleuſe facilité toutes ſortes d'angles, mais donnera auſſi par là de grandes ouvertures pour trouver beaucoup de nouvelles choſes touchant la proportion des lignes.

Mais pour rendre les preuves plus courtes, il eſt bon de ſuppoſer quelques Lemmes, ou clairs d'eux mêmes, ou demonſtrez dans le Livre precedent, afin d'y renvoyer quand on en aura beſoin.

I. Lemme. Definition.

III. Lorsque dans toutes ces ſortes d'angles on dit qu'un tel arc du cercle auquel ils ont rapport leur ſert de meſure, cela veut dire, que ſi ce même angle eſtoit au centre du cercle, il auroit cet arc, ou un autre qui luy ſeroit égal, pour ſa meſure. Ou bien cela veut dire, qu'un angle qui ſeroit au centre de ce cercle, & qui auroit cet arc pour meſure, ſeroit égal à l'angle hors le centre qu'on dit avoir cet arc pour ſa meſure.

Et de là il s'enſuit, que dans ces ſortes d'angles, auſſi bien que dans ceux qui ſont au centre du cercle, deux angles ſont égaux quand ils ont pour meſure des arcs égaux, ou abſolument quand ce ſont des arcs du même cercle, ou de cercles égaux ; ou proportionellement quand ce ſont des arcs de cercles inégaux : l'arc du petit ayant la même raiſon à ſa circonference, que l'arc du grand à la ſienne : comme ſi l'un & l'autre eſtoit la dixiéme partie de ſa circonference, c'eſt à dire de 36. degrez.

II. Lemme.

IV. Tout angle qui a pour meſure la moitié	de la demy-circonference eſt	*Droit.*
	d'un arc moindre que la demy-c.	*Aigu.*
	d'un arc plus grand que la demy c.	*Obtus.*

Et de là il s'ensuit, que quand on dit que deux angles, ou trois angles sont égaux à deux droits, cela veut dire que ces deux angles, ou ces trois angles pris ensemble ont pour mesure la demy-circonference, c'est à dire 180. degrez.

Et quand on dit que deux angles sont égaux à un droit, cela veut dire que ces deux angles pris ensemble ont pour mesure la moitié de la demy-circonference, c'est à dire 90. degrez.

III. LEMME.

QUAND un tout est partagé en plusieurs portions, comme *A* en *b*, *c*, *d*; comme ces trois portions ensemble font le tout, les trois moitiez de ces portions, c'est à dire une moitié de chacune, font toutes ensemble la moitié du tout, de sorte que ces trois expressions sont la même chose. V.

La moitié du tout.

La moitié des trois portions que comprend le tout.

Les trois moitiez de ces portions, c'est à dire une de chacune, ce qui s'entend toûjours, quoy qu'on ne le marque pas.

Et ainsi supposant qu'*A* soit une circonference, & que *b*, *c*, *d*, soient trois arcs qui la comprennent toute,

$\frac{1}{2}$ de l'arc *b*
$\frac{1}{2}$ de l'arc *c*
$\frac{1}{2}$ de l'arc *d*
} sont égales prises ensemble à la $\frac{1}{2}$ de la circonference, c'est à dire à la demy-circonference, ou à 180. degrez.

Et supposant qu'*A* soit une demy-circonference, & que *b* & *c* soient deux arcs qui la comprennent, deux moitiez de ces arcs, une de chacun, valent la moitié de la demy-circonference. C'est à dire 90. degrez.

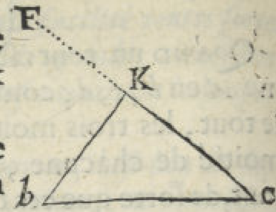
Et alors on peut exprimer la moitié de l'un de ces arcs en deux manieres, ou par son propre nom, comme la $\frac{1}{2}$ d'un tel arc, ou par la moitié du tout dont il est portion moins la moitié de l'autre arc.

Ainsi estant donné une demy-circonference qui comprend les arcs *b* & *c*, la $\frac{1}{2}$ de l'arc *b* est la même chose que la moitié de la demy-circonference moins la $\frac{1}{2}$ de l'arc *c*.

Enfin si un tout a deux portions, la moitié de la plus grande moins la moitié de la plus petite est la même chose que la moitié du tout moins la petite entiere. Car si le tout a pour portions *b* & *c*, la moitié du tout est égale à la moitié de *b* plus la moitié de *c*. Il faut donc oster deux fois la moitié de *c* de la moitié du tout, pour rendre la moitié du tout égale à la moitié de *b*, dont on auroit osté la moitié de *c*.

IV. LEMME.

VI. ENFIN il se faut souvenir,



1. Que tout angle plus les deux que font ses costez sur sa base sont égaux à deux droits.

2. Que les deux angles sur la base d'un angle droit sont égaux à un droit.

3. Que si on prolonge un costé de l'angle vers le sommet, le nouvel angle que fait ce costé prolongé sur l'autre costé est égal aux deux angles qui sont sur la base du premier angle. Ainsi l'angle *f k b* est égal aux angles vers *b* & vers *c*.

La premiere sorte d'angles dont le sommet est en la circonference d'un Cercle donné.

DIVISION.

VII. LE sommet d'un angle ne se peut terminer en la circonference d'un cercle qu'en 3 manieres.

1. Quand l'un des costez est au dedans du cercle & l'autre au dehors.

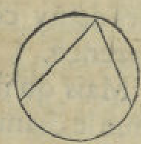
2. Quand tous les deux sont au dedans.

3. Quand ils sont tous deux au dehors du cercle. Mais parce que la premiere se subdivise en deux, on peut conter 4. genres de cette sorte d'angles.

Le 1. Quand l'un des côtez est au dedans du cercle, & en est une corde, & que l'autre costé qui est au dehors touche le cercle.

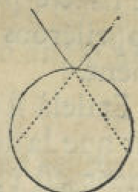
Le 2. Quand l'un des costez estant aussi au dedans du cercle

cercle celuy qui est au dehors coupe le cercle, & entre dans le cercle lorsqu'on le prolonge de ce costé-là : ou que ce n'est même qu'une corde prolongée hors le cercle.



Le 3. Quand tous les deux costez sont au dedans du cercle, & en sont deux cordes.

Le 4. Quand ils sont tous deux au dehors.



Mais parce qu'alors cette sorte d'angle ne peut avoir de rapport au cercle, que parce qu'il seroit égal à un angle qu'on luy opposeroit au sommet, qui seroit necessairement ou du 1 ou du 3 genre, il ne sera point necessaire de rien dire de ce 4 genre, puisqu'on en pourra juger par les autres.

Et ainsi il ne restera qu'à donner la mesure des trois premiers ; ce que nous ferons par trois Theoremes tres clairs & tres faciles, & dont même les deux derniers ne seront qu'une suite du premier : & en même temps si feconds pour parler ainsi, qu'un tres grand nombre de propositions qui ne se prouvent dans la Geometrie ordinaire que par des voyes tres obscures & tres embarassées s'en deduiront sans peine, comme n'en estant que de simples Corollaires.

Mais pour cela il est necessaire de marquer la maniere dont on exprime les angles du premier & du troisiéme genre dans la Geometrie ordinaire. Car pour celuy du deuxiéme, personne ne les a encore considerez.

Premier Avertissement.

Definitions.

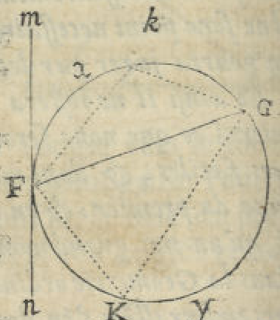
L'angle du premier genre, qui est celuy qui est com- VIII.
pris entre une corde & une tangente, est appellé ordinairement *angle du segment*, *angulus segmenti*.

Et l'angle du 3^e genre qui est compris entre deux cordes qui se terminent d'une part à un même point de la circonference, *l'angle dans le segment*, *angulus in segmento*. Ce que pour mieux entendre, il faut remarquer, que toute corde partage le cercle en deux portions, qui sont appellées *segmens*, & que ces portions ou segmens sont égaux quand cette corde est un diametre, & alors on les appelle des demy cercles, & l'arc de chacun eſt une demy-circonference.

Mais qu'ils ſont inégaux, quand c'eſt une autre corde que le diametre, l'un eſtant plus petit que le demy-cercle, & l'autre plus grand. De ſorte que pour abreger nous appellerons l'un le petit ſegment, & l'autre le grand ſegment.

Et delà il eſt clair que l'arc du petit ſegment eſt plus petit que la demy-circonference, & que l'arc du grand ſegment eſt plus grand que la demy-circonference.

Cela ſuppoſé, ſi on tire la corde *F G*, & au point *F* la tangente *m n*; *F x G* eſt le petit ſegmenr, & *F y G* le grand ſegment.



Et l'angle *G F m*, l'angle du petit ſegment; parce que la tangente *m F* eſt du coſté de ce ſegment-là.

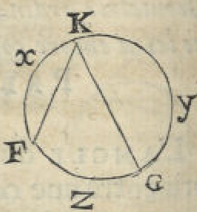
Et l'angle *G Fn*, l'angle du grand ſegment.

Mais l'angle *F k G* eſt l'angle dans le petit ſegment.

Et l'angle *F K G*, l'angle dans le grand ſegment.

II. Avertissement.

IX. On peut encore remarquer qu'au regard de l'angle du ſegment, il faut que la corde qui diviſe les deux ſegmens ſoit décrite, parce qu'elle fait l'un des coſtez de l'angle. Mais que cela n'eſt pas neceſſaire au regard de l'angle dans le ſegment, parce que la corde n'eſt que la baſe de cet angle, & qu'elle eſt ſuffiſamment marquée par les 2 points de la circonference auſquels aboutiſſent les deux coſtez de l'angle, comme l'angle *F k G*, eſt ſuffiſamment marqué, quoy que la ligne *F G* ne ſoit que ſous-entenduë & non tracée.



III. Avertissement.

X. L'angle dans le ſegment ſe peut exprimer en deux manieres; ou par raport au ſegment dans lequel il eſt inſcrit, ſon ſommet ſe trouvant dans l'arc de ce ſegment; ou par raport à l'arc ſur lequel il eſt appuyé. Et c'eſt en cette maniere qu'il vaut mieux l'exprimer, quand la corde qui joindroit les extrémitez de ſes coſtez n'eſt pas marquée; comme dans l'angle FkG, qui eſt appuyé ſur l'arc $F\zeta G$; & alors on dit ſimplement que c'eſt un angle inſcrit dans le cercle, ſans parler de ſegment.

IV. AVERTISSEMENT.

IL eſt aiſé de voir que l'angle inſcrit dans un ſegment eſt toûjours appuyé ſur l'arc du ſegment oppoſé. Et qu'ainſi l'angle dans le grand ſegment eſt appuyé ſur l'arc du petit ſegment: & au contraire l'angle dans le petit ſegment eſt appuyé ſur l'arc du grand. XI.

V. AVERTISSEMENT.

ENFIN il faut remarquer, que quand on parle des arcs que ſoûtiennent les coſtez d'un angle inſcrit dans le cercle, on doit entendre les deux qui ſont à coſté l'un de l'autre, & tout-à fait ſeparez l'un de l'autre, & qui avec celuy ſur lequel l'arc inſcrit eſt appuyé comprennent toute la circonference. XII.

PREMIER THEOREME,

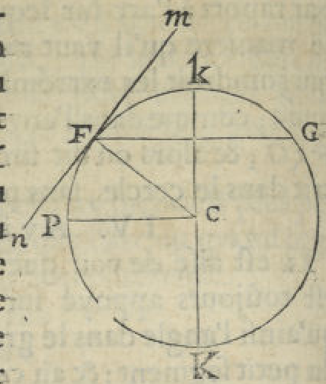
FONDAMENTAL DE TOUS LES AUTRES.

TOUT angle compris entre une tangente & une corde, a pour meſure la moitié de l'arc ſoûtenu par cette corde du coſté de la tangente. XIII.

Et parce que cet angle eſt auſſi appellé l'angle du ſegment vers lequel eſt cette tangente, ſelon cela on doit dire, qu'il a pour meſure la moitié de l'arc de ce ſegment-là. De ſorte que ſi c'eſt l'angle du petit ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment; & ſi c'eſt l'angle du grand ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

Ce Theoreme eſt le fondement de la meſure des angles par des arcs de cercles hors le centre deſquels eſt leur ſommet; & la preuve en eſt tres-facile.

Soit la corde FG & la ligne $m\ n$ qui touche le cercle, dont le centre est au point *c*, l'angle *m F G* est l'angle du petit segment, & *n F G* l'angle du grand.



Soit tiré le diametre *k K* perpendiculaire à *F G*; & le rayon *c F*, & *P c* perpendiculaire au diametre *K k*, & par consequent parallele à *F G*, le diametre *k K* coupera par la moitié les arcs du grand & du petit segment. D'où il s'ensuit que l'angle au centre *F c k* a pour mesure la moitié de l'arc du petit segment. Et que l'angle au contraire *F c K* a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

De sorte que le Theoreme sera demonstré (par le 1er Lemme) si on peut faire voir, que l'angle du petit segment *m F G* est égal à l'angle au centre *F c k*. Or cela est facile. Car *c P* & *F G* estant paralleles, les angles alternes que fait sur l'une & sur l'autre le rayon de l'atouchement (c'est à dire les angles *P c F*, & *c F G*) sont égaux.

Or l'angle *m F c* (qui comprend l'angle du segment & l'angle *c F G*) est droit : & par consequent égal à l'angle *P c k*, qui est droit aussi, & qui comprend les deux angles *F c k* & *P c F*. Donc ostant de part & d'autre les angles *c F G* & *P c F* (que l'on vient de faire voir estre égaux) l'angle du segment demeurera égal à l'angle *F c k*, qui a pour mesure la moitié de l'arc du petit segment.

Donc l'angle du petit segment *m F G*, a aussi pour mesure la moitié de cet arc du petit segment. Ce qu'il falloit demonstrer.

On fera voir de même que l'angle du grand segment *n F G* est égal à l'angle au centre *F c K*, qui a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

Car l'angle du grand segment comprend l'angle droit *n F c* & l'angle *c F G*. Or l'angle au centre *F c K* comprend aussi l'angle droit *P c K* & l'angle *P c F*.

Or les angles *c F G* & *P c F* sont égaux, comme il vient d'eſtre dit. Donc eſtant ajoûtez chacun à un droit, ils rendent égaux l'angle du ſegment & l'angle au centre, qui a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

Donc (par le 1 Lemme) l'angle du grand ſegment a pour meſure la moitié du grand ſegment.

I. Corollaire.

L'angle du demy-cercle eſt droit. XIV.

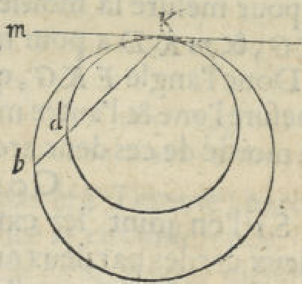
Celuy du petit ſegment eſt aigu.

Celuy du grand, obtus.

Cela eſt clair par le 2^e Lemme.

II. Corollaire.

Lorsque deux cercles dont l'un eſt dans l'autre ſe touchent, toutes les cordes menées du point de l'atttouchement à la circonference du plus grand cercle ſoûtiennent des arcs proportionellement égaux dans les deux cercles: c'eſt à dire que la ligne entiere (*kb*) ſoûtient dans le grand cercle un arc égal à celuy que ſoûtient dans le petit (*kd*) partie de cette même ligne. XV.

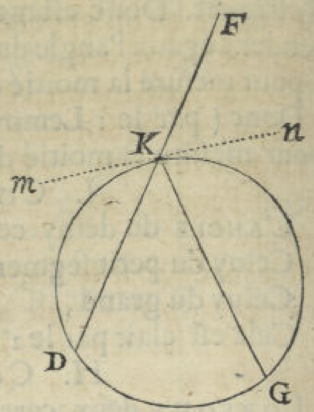


Car les angles *mkb* & *mkd* ſont le même angle. Or l'un a pour meſure la moitié de l'arc *kb*, & l'autre la moitié de l'arc *kd*. Donc ces deux arcs ſont proportionnellement égaux.

II. Theoreme.

Tout angle dont le ſommet eſt en la circonference, & qui eſt compris entre une corde & la partie d'une autre corde prolongée hors le cercle du coſté qu'elle eſt hors le cercle, a pour meſure la moitié des deux arcs qui ſont à coſté du ſommet de cet angle, & qui ſont ſoûtenus par les deux cordes, dont l'une eſt le coſté de l'angle, & l'autre en fait l'autre coſté par ſa partie prolongée hors le cercle. XVI.

Soient les deux cordes *KD* & *KG*, dont *KG* ſoit prolongée en *F* hors le cercle; je dis que l'angle *FKG* a



pour mesure la moitié des deux arcs *K D* & *K G*.

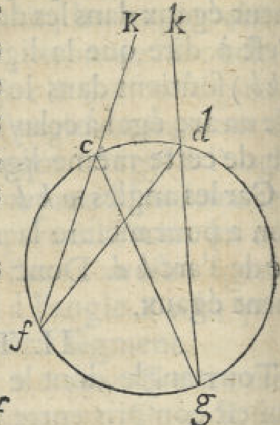
Car soit tirée par le point *K* la tangente *m n*, l'angle *F K G* comprend les deux angles *F K n* & *n K G*. Or l'angle *F K n* est égal à l'angle *m K D*, parce qu'il luy est opposé au sommet. Donc l'angle *F K G* est égal aux deux angles *n K G* & *m K D*.

Or par le 1er Theoreme *n K G* a pour mesure la moitié de l'arc *K G*, & *m K D* a pour mesure la moitié de l'arc *K D*.

Donc l'angle *F K G*, qui est égal à tous les deux, a pour mesure l'une & l'autre moitié de ces deux arcs. C'est à dire la moitié de ces deux arcs, par le troisiéme Lemme.

Corollaire.

XVII. Si l'on joint les extremitez de deux cordes par deux autres cordes qui se croisent, & que l'on prolonge hors le cercle les deux premieres cordes, les angles que le prolongement de chacune fera sur les cordes qui se croisent, seront égaux.



Soient les deux premieres cordes *c f* & *d g*.

Les deux qui se croisent, *f d* & *g c*.

Les prolongemens, *K c* & *k d*.

Je dis que les angles *K c g* & *k d f* sont égaux.

Car par le precedent Theoreme l'un & l'autre a pour mesure la moitié des arcs *f c*, *c d*, *d g*.

III. Theoreme.

XVIII. Tout angle inscrit au cercle, c'est à dire compris entre deux cordes qui ne se joignent qu'en la circonference, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.

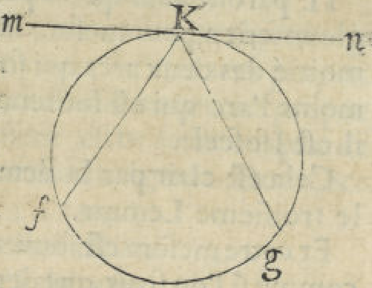
Et parce qu'on appelle aussi ces angles (angles dans le ſegment) ſelon cela.

Tout angle dans un ſegment a pour meſure la moitié de l'arc du ſegment opposé. Voyez le 4. Avertiſſement.

La preuve en eſt tres facile par le premier Theoreme.

Soit l'angle *f k g*. Je dis qu'il a pour meſure la moitié de l'arc *f g*.

Soit menée par le ſommet *k* la tangente *m n*, l'angle inſcrit *f k g*, plus les deux qui ſont à coſté *f k m*, & *g k n*, valent deux droits.

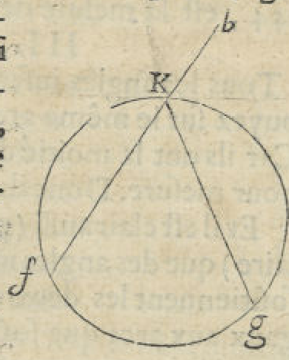


Donc ils ont pour meſure la demy-circonference, par le 2ᵉ Lemme.

Donc ils ont pour meſure les trois moitiez des arcs *f g*, *k f*, *k g* (par le 3ᵉ Lemme) parce que ces trois arcs comprennent toute la circonference.

Or l'un de ces trois angles, ſçavoir *f k m*, a pour meſure la moitié de l'arc *k f*; & l'autre, ſçavoir *g k n*, a pour meſure la moitié de l'arc *k g*. Donc il reſte pour la meſure du 3ᵉ, qui eſt l'angle inſcrit, la moitié du 3ᵉ arc, qui eſt *f g*.

On peut encore prouver la meſme choſe par le 2 Theoreme. Car ſi on prolonge *f k* juſques à *b*, les angles *f k g* & *g k b* valent deux droits, & par conſequent ont pour meſure la moitié de la circonference, & par conſequent auſſi les trois moitiez des trois arcs *k f*, *k g*, *f g*.



Or l'angle *b k g* a pour ſa meſure la moitié des deux arcs *k f* & *k g*, par le deuxiéme Theoreme.

Reſte donc pour la meſure de l'angle inſcrit la moitié du troiſiéme arc, qui eſt *f g*.

I. COROLLAIRE.

IL paroiſt par là, que ſi on oſte de la circonference en- XIX.

tiere, c'eſt à dire de 360. degrez, les deux arcs que ſoûtiennent les coſtez de l'angle inſcrit, la moitié de ce qui reſtera ſera la meſure de l'angle inſcrit, comme ſi l'un de ces arcs eſt de 100 degrez, & l'autre de 44, oſtant 144 de 360, reſtera 216, dont la moitié eſt 108 pour la meſure de l'angle inſcrit.

II. Corollaire.

XX. Il paroiſt auſſi qu'on peut dire encore : Que tout angle inſcrit a pour meſure la demy-circonference moins la moitié des deux arcs qui ſont ſoûtenus par ces coſtez : ou moins l'arc qui eſt ſoûtenu par l'un de ſes coſtez quand il eſt Iſoſcele.

Cela eſt clair par la demonſtration precedente, & par le troiſiéme Lemme.

Et cette meſure eſt ſouvent plus commode que l'autre, comme ſi l'on ſçait que des arcs que ſoûtiennent les côtez de l'angle inſcrit l'un eſt de 100 degrez, & l'autre de 44, en oſtant 50 & 22, qui font 72, de 180, ce qui reſtera qui eſt 108 eſt la meſure de cet angle inſcrit.

Et cela eſt encore plus facile, quand l'angle inſcrit eſt Iſoſcele, comme ſi l'un & l'autre de ſes coſtez ſoûtient un arc de 36 degrez: car oſtant 36 de 180, ce qui reſte, qui eſt 144, eſt la meſure de cet angle inſcrit.

III. Corollaire.

XXI. Tous les angles inſcrits dans le même ſegment, ou appuyez ſur le même arc, ou ſur des arcs égaux, ſont égaux. Car ils ont la moitié du même arc ou de deux arcs égaux pour meſure. Donc ils ſont égaux par le premier Lemme.

Et il eſt clair auſſi (par le premier & le deuxiéme Corollaire) que des angles inſcrits ſont égaux quand les arcs que ſoûtiennent les deux coſtez de l'un pris enſemble ſont égaux aux arcs que ſoûtiennent les deux côtez de l'autre, & qu'ils ne peuvent eſtre égaux que cela ne ſoit.

Que ſi au contraire des angles inſcrits ſont ſuppoſez égaux, ils faut qu'ils ſoient appuyez ſur des arcs égaux, ou abſolument, ſi c'eſt dans le même cercle ou en des cercles égaux que ces angles ſoient inſcrits; ou proportionellement,

ment, ſi c'eſt dans des cercles inégaux. Ce qu'il faut auſſi ſuppoſer dans la premiere partie de ce Corollaire. Car les arcs proportionnellement égaux font autant pour l'égalité des angles que s'ils l'eſtoient.

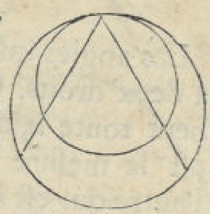
IV. COROLLAIRE.

SI deux angles inſcrits en divers cercles ſont égaux, & qu'ils ſoient ſoûtenus par des cordes égales, les cercles dans leſquels ils ſont inſcrits ſont égaux. XXII.

Car les angles inſcrits en divers cercles ne ſçauroient eſtre égaux, qu'ils ne ſoient appuyez ſur des arcs proportionellement égaux, & des arcs de divers cercles proportionellement égaux ne ſçauroient eſtre ſoûtenus par des cordes égales que les cercles ne ſoient égaux. Donc, &c.

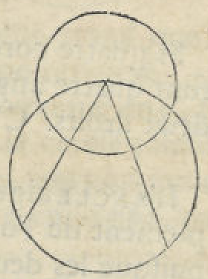
V. COROLLAIRE.

LORSQUE deux cercles dont l'un eſt au dedans de l'autre ſe touchent, ſi du point de l'attouchement on mene deux lignes juſques à la circonference du plus grand, les arcs de l'une & de l'autre circonference compris entre ces deux lignes ſeront proportionnellement égaux. Car le même angle ſera meſuré par la moitié de l'un & de l'autre de ces arcs. XXIII.



VI. COROLLAIRE.

SI un cercle a pour centre un point de la circonference d'un autre cercle, & que de ce point on tire deux lignes qui coupent l'une & l'autre circonference, l'arc de celle qui a ce point pour centre compris entre ces deux lignes eſt proportionnellement égal à la moitié de l'arc de celle dans laquelle eſt ce point. Car le même angle a pour meſure le premier arc entier & la moitié de l'autre. XXIV.



VII. COROLLAIRE.

SI l'angle inſcrit & l'angle au centre ſont appuyez ſur le même arc, l'angle au centre eſt double de l'angle inſcrit. XXV.
Car l'inſcrit a pour meſure la moitié de l'arc, qui entier

eſt la meſure de l'angle au centre.

VIII. Corollaire.

XXVI. Tous les angles dans un ſegment ſont égaux à l'angle du ſegment oppoſé. Et ainſi l'angle dans le grand ſegment eſt égal à l'angle du petit ſegment ; & l'angle dans le petit ſegment égal à l'angle du grand.

Car l'angle du grand ſegment eſt appuyé ſur l'arc du petit. Donc il a pour meſure la moitié de l'arc du petit, qui eſt auſſi la meſure de l'angle du petit ſegment.

IX. Corollaire.

L'Angle dans le demy-cercle eſt droit.

XXVII. Dans le grand ſegment, aigu.

Dans le petit, obtus.

Cela eſt clair par le deuxiéme Lemme.

X. Corollaire.

XXVIII. Les angles inſcrits en deux ſegmens oppoſez ſont égaux à deux droits. Car les arcs des deux ſegmens comprennent toute la circonference. Donc la moitié de l'un qui eſt la meſure de l'un de ces angles plus la moitié de l'autre qui eſt la meſure de l'autre angle, valent la demy-circonference (par le troiſiéme Lemme.) Donc pris enſemble ils ont pour meſure la demy-circonference. Donc ils valent deux droits.

XI. Corollaire.

XXIX. Si quatre cordes ne ſe joignent qu'aux extremitez, elles font quatre angles inſcrits dont les oppoſez ſont égaux à deux droits. C'eſt la même choſe que le precedent.

XII. Corollaire.

XXX. L'Angle aigu qui eſt dans le grand ſegment eſt le complement de l'obtus qui eſt dans le petit. Cela eſt clair, puiſque les deux enſemble valent deux droits.

XIII. Corollaire.

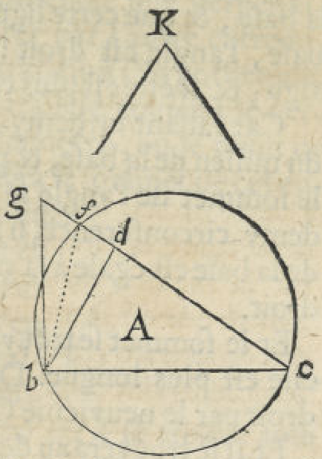
XXXI. La moitié de la baſe d'un angle inſcrit eſt ſon ſinus, s'il eſt capable d'en avoir, c'eſt à dire s'il eſt aigu : ou de ſon complement, s'il eſt obtus. Car le ſinus eſt la moitié de la corde du double de l'arc. Or la baſe d'un angle inſcrit eſt la corde d'un arc qui eſt double de celuy qui meſure l'angle inſcrit. Donc la moitié de cette corde eſt ſon ſinus ; s'il eſt aigu : ou s'il eſt obtus, le ſinus de ſon complement, c'eſt à dire de l'angle aigu qui eſtant inſcrit dans le ſegment oppoſé a auſſi cette corde pour ſa baſe.

XIV. Corollaire.

On dit qu'un ſegment eſt capable d'un tel angle quand tous les angles dans ce ſegment ſont égaux à cet angle.

Et quand cela eſt, il eſt impoſſible qu'un angle de cette grandeur ait pour baſe la corde de ce ſegment que ſon ſommet ne ſe trouve dans un des points de l'arc du ſegment.

Suppoſons par exemple que le ſegment A ſoit capable de l'angle *k* ; je dis que tout angle égal à l'angle *k*, qui aura *b c* pour baſe, aura ſon ſommet dans un des points de l'arc du ſegment A. XXXII.



Car s'il l'avoit au dedans du cercle comme en *d*, prolongeant *cd* juſques en *f*, point de la circonference, & tirant la ligne *b f*, l'angle *b f c* ſera égal à l'angle *k* par l'hypoteſe. Or l'angle *b d c*, par le 4^{me} Lemme, eſt égal à l'angle *b f c*. plus l'angle *f b d*. Donc il eſt plus grand que le ſeul angle *b f c*. Donc il eſt plus grand que l'angle *k*.

Et ſi le ſommet eſtoit hors du ſegment comme en *g*, tirant une ligne de *b* au point où *c g* coupe le cercle comme à *f*, on prouvera que l'angle *b f c*, égal à *k*, ſera plus grand que l'angle *b g c*, parce qu'il ſera égal à *b g c* plus *g b f*, par le quatriéme Lemme.

Donc l'angle qui a *b c* pour baſe ne peut eſtre égal à *k* qui eſt l'angle dont le ſegment *A* eſt capable, qu'il n'ait ſon ſommet dans la circonference, puiſque s'il l'avoit au dedans il ſeroit plus grand, & s'il l'avoit au dehors il ſeroit plus petit.

XV. Corollaire.

XXXIII. Si on fait le diametre d'un cercle de l'hypothenuſe d'un angle droit, le ſommet de cet angle droit ſe trouvera dans la circonference du cercle.

Car chaque demy-cercle eſt capable de cet angle droit. Donc par le Corollaire precedent, nul angle droit ne peut avoir pour l'hypothenuſe la corde du demy-cercle qui eſt le diametre, que ſon ſommet ne ſe trouve en un des points de la demy-circonference.

XVI. Corollaire.

XXXIV. Si du ſommet d'un angle on tire une ligne au milieu de la baſe, & que cette ligne ſoit égale à la moitié de cette baſe, l'angle eſt droit : mais ſi elle eſt plus longue, il eſt aigu ; & ſi elle eſt plus courte, il eſt obtus.

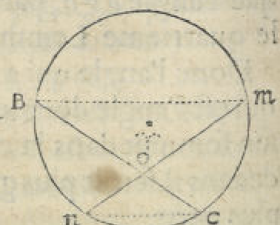
Car faiſant un demy-cercle qui ait pour centre le point du milieu de la baſe, & pour intervale la moitié de la baſe, le ſommet de l'angle ſe trouvera dans un des points de la demy-circonference, ſi la ligne tirée du ſommet au milieu de la baſe eſt égale à la moitié de la baſe. Donc l'angle ſera droit.

Et le ſommet ſe trouvera au dehors du demy-cercle, ſi elle eſt plus longue. Donc l'angle ſera plus petit qu'un droit par le neuviéme Corollaire, & par conſequent aigu.

Et il ſe trouvera au dedans du demy-cercle ſi elle eſt plus courte. Donc l'angle ſera plus grand qu'un droit par le neuviéme Corollaire. Donc obtus.

XVII. Corollaire.

XXXV. Quand deux cordes égales ſe coupent, chaque partie de l'une eſt égale à chaque partie de l'autre.



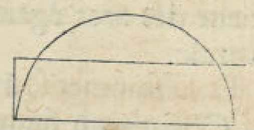
Soient les cordes égales *B c* & *m n*, qui ſe coupent en *o*, les arcs *b n c* & *m c n* ſont égaux, parce qu'ils ſont ſoûtenus par des cordes égales. Donc oſtant de ces deux arcs l'arc *n c*, qui leur eſt commun ; les arcs *B n* & *m c* demeurent égaux. Donc tirant la ligne *n c*, les angles inſcrits *ncB* & *cnm* sont égaux, parce qu'ils sont appuyez sur des arcs égaux. Donc les deux lignes *on* & *oc* sont égales, parce qu'estant menées d'un même point elles font des angles égaux sur la même base. Et on prouvera de même en tirant la ligne *Bm* que *om* & *oB* sont égales. Donc chaque partie de l'une de ces cordes est égale à chaque partie de l'autre.

I. Probleme.

Trouver l'angle droit dont on a l'hypothenuse & la distance du sommet à l'hypothenuse. XXXVI.

Elever de l'extremité de l'hypothenuse une perpendiculaire égale à cette distance, & tirer par l'autre extremité de cette perpendiculaire une parallele à l'hypothenuse.

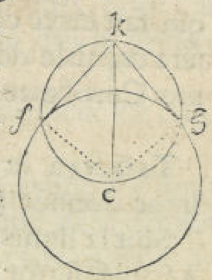
L'un des deux points où cette parallele coupera le cercle qui aura l'hypothenuse pour diametre, ou le point de l'attouchement, si elle le touche, sera le sommet de cet angle droit qui en determinera les costez.



Car la distance estant donnée de ce sommet à l'hypothenuse, il ne se peut trouver ailleurs (d'un costé) qu'en quelqu'un des points de cette parallele; & parce que cet angle est supposé droit, il faut par le 11. Corollaire qu'il se trouve aussi en quelqu'un des points de la demy-circonference. Donc en un des points où elle la coupe, ou en celuy auquel elle le touche.

II. Probleme.

D'un point hors le cercle tirer les tangentes au cercle & montrer qu'on n'en peut tirer que deux, & qu'elles sont égales. XXXVII.



Soit *k* le point hors le cercle, & *c* le centre du cercle, joindre ces points par une ligne. Décrire le cercle qui aura cette ligne pour diametre & qui coupera le premier en deux points comme *f* & *g*; *kf*, & *kg*, seront les deux tangentes tirées du point *k* au premier cercle.

Car l'angle que l'une & l'autre fait avec le rayon du premier cercle est droit, parce qu'il est dans un demy-cercle.

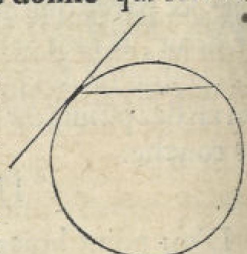
Et il ne peut y avoir que ces deux lignes tirées du point *k* qui touchent le cercle, parce que le sommet de l'angle droit, qui doit avoir pour costez la tangente tirée de *k* & un rayon du premier cercle doit estre en un point commun aux circonferences des deux cercles, puisqu'il doit estre dans la circonference du premier, à cause qu'un rayon du premier en est un des costez; & dans celle du second, à cause que tous les angles droits qui ont le diametre du second cercle pour hypothenuse doivent avoir leur sommet dans la circonference de ce second cercle (par le treiziéme Corollaire.)

Or il n'y a que les poins *f* & *g* qui soient communs aux deux cercles. Donc on ne peut tirer de *k* que les deux tangentes *k f* & *k g*.

Et il est clair qu'elles sont égales, puisque chacune soûtient des arcs égaux dans la circonference du nouveau cercle.

III. Probleme.

XXXVIII Couper un segment dans un cercle donné qui soit capable d'un angle donné.



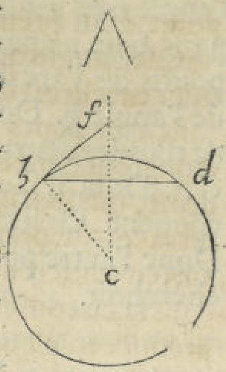
Ayant tiré une tangente au cercle, la corde qui fera avec cette tangente au point de l'atouchement un angle égal à l'angle donné, satisfera au Probleme. Car le segment du costé opposé à celuy de l'angle égal au donné qui fait cette corde avec la tangente, sera capable de l'angle donné, par le cinquiéme & dixiéme Corollaire.

IV. Probleme.

XXXIX. Trouver le cercle dont le segment terminé par une ligne donnée soit capable d'un angle donné.

Soit la ligne donnée *b d*, & l'angle donné *k*; soit tirée *b f* qui fasse sur *b d* un angle égal à l'angle *k*.

Soit élevé du point *b* une perpendiculaire à *bf*, & qu'il y ait une autre perpendiculaire à *bd* qui coupe *bd* par la moitié; le point *c*, où je ſuppoſe que ces deux perpendiculaires ſe rencontreront ſera le centre du cercle, qui aura *cb* ou *cd* pour intervale, & pour tangente *fb*.



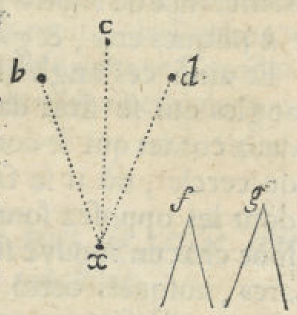
Donc le ſegment oppoſé á celuy vers lequel eſt *fb* ſera capable d'un angle égal à l'angle *fbd*, par le 5ᵉ Corollaire, parceque l'un ſera l'angle du ſegment, & l'autre l'angle dans le ſegment oppoſé.

V. PROBLEME.

CONNOISSANT qu'elle eſt la diſtance de trois points l'un de l'autre, comme de *b*, *c*, *d*, & ne ſçachant d'un 4ᵉ comme *x*, ſinon de quel coſté il eſt, à l'égard de ces trois-là, & qu'elle eſt la grandeur de l'angle compris entre ces lignes *xb* & *xc*, & de celuy qui eſt compris entre ces lignes *xc* & *xd* trouver ce 4ᵉ point. XL.

Les lignes *bc* & *cd* ſont données par l'hypotheſe.

Et les angles donnez ſoient *f* & *g*.



Trouver par le Probleme precedent le cercle dont le ſegment terminé par *bc*, tourné vers *x*, ſoit capable de l'angle *f*.

Et trouver de meſme un autre cercle dont le ſegment terminé par *cd* & tourné vers *x*, ſoit capable de l'angle *g*.

Ces deux cercles ſe couperont en deux points, dont l'un ſera *c* par la conſtruction, & l'autre *x* : ce qui ſe prouve ainſi.

Les deux angles *bxc*, & *cxd*, dont la grandeur eſt connuë, ont leur ſommet au même point.

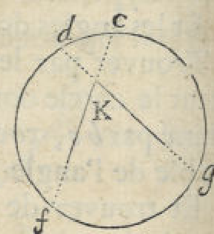
Or par le 10ᵐᵉ Corollaire l'angle égal à *f* ayant *bc* pour baſe ne peut avoir ſon ſommet ailleurs que dans un des points de l'arc du ſegment qu'on a trouvé eſtre capable de l'angle *f*. Et par la même raison l'angle égal à *g* ayant *c d* pour base ne peut aussi avoir son sommet que dans un des points de l'arc du segment qu'on a trouvé estre capable de l'angle *g*. Donc il faut que ce point qui est le sommet de tous les deux angles soit commun à tous les deux cercles. Donc il faut que ce soit l'un des deux points où ils se coupent. Or il est bien visible que ce n'est pas le point *c*. Donc l'autre point où ils se coupent est le point *x* que l'on cherchoit.

II.

Des angles dont le sommet est au dedans du cercle & ailleurs qu'au centre.

XLI. QUAND le sommet d'un angle est au dedans du cercle, mais ailleurs qu'au centre, comme peut estre l'angle *k*, ses costez doivent toûjours estre considerez comme terminez par la circonference, comme au point *f* & *g*; & de plus il les faut aussi prolonger au delà du sommet jusques à la circonference de l'autre part, en prolongeant par exemple *f k* jusques en *c*, & *g k* jusques en *d*.

Et ainsi ces angles se reduisent aux angles qui se font dans la section de deux cordes qui se coupent au dedans du cercle, où il se fait quatre angles dont les opposez sont égaux, & qui sont chacun appuyé sur l'un des quatre arcs, ausquels cette circonference se trouve divisée par ces deux cordes.



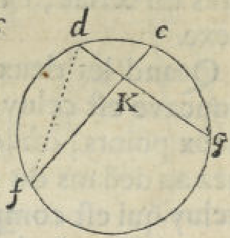
Voicy donc le Theoreme qui nous apprendra la mesure de ces angles.

IV. THEOREME.

XLII. TOUT angle fait par la section de deux cordes qui se coupent au dedans du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, plus la moitié de l'arc opposé.

Soient les deux cordes *c f* & *d g* qui se coupent en *k*. Prenons lequel on voudra des quatre angles qu'elles font en en se coupant, comme fkg; je dis qu'il aura pour sa mesure la moitié de l'arc fg plus la moitié de l'arc opposé dc.

Soient joints les points df, l'angle fkg est égal aux deux angles vers d & vers f (par le quatriéme Lemme.)



Or l'angle vers d pour mesure la moitié de l'arc fg sur lequel il est appuyé, & l'angle vers f la moitié de l'arc cd, par la même raison.

Donc l'angle fkg qui leur est égal, a pour sa mesure les moitiez de ces deux mêmes arcs: ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

QUAND deux cordes égales moindres que des diametres se coupent, elles divisent la circonference en quatre arcs, dont il y en a deux opposez qui sont égaux, & deux autres inégaux; & alors les angles qui sont appuyez sur chacun de ces arcs égaux ont pour mesure cet arc entier. XLIII.

Car les opposez estant égaux, un entier est la même chose, que la moitié de l'un plus la moitié de l'autre.

Je ne prouve point ce qui est supposé dans ce Corollaire, parce que c'est une suite visible de ce qui a esté demonstré, sup. 35.

III.

Des angles dont le sommet est hors le cercle que leurs costez coupent ou touchent.

LES costez d'un angle dont le sommet est hors le cercle peuvent, XLIV.

Ou le couper tous deux.

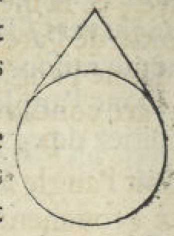
Ou le toucher tous deux.

Ou l'un le couper & l'autre le toucher.

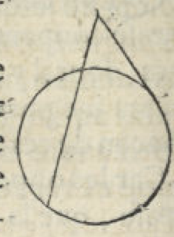
Mias quand ils le coupent, on les considere toûjours comme entrans dans le cercle selon sa convexité, & estant terminez par la circonference au dedans du cercle selon sa concavité.

C'eſt pourquoy ces angles ſont toûjours conſiderez comme eſtant appuyez ſur deux arcs du cercle, l'un concave & l'autre convexe.

Quand les deux coſtez le coupent, l'arc concave eſt celuy qui eſt compris entre les deux points, où les deux coſtez ſont terminez au dedans du cercle. Et le convexe eſt celuy qui eſt compris entre les deux points par où il entre dans le cercle.



Quand tous les deux coſtez touchent le cercle, l'un & l'autre eſt compris entre les deux points de l'attouchement, mais l'un eſt concave au regard de l'angle, & l'autre convexe.



Et quand l'un touche & l'autre coupe le cercle, le concave eſt compris entre le point de l'attouchement & celuy où ſe termine l'autre coſté; & le convexe entre le point de l'attouchement & celuy où l'autre coſté entre dans le cercle.

Il eſtoit neceſſaire de bien expliquer ces deux ſortes d'arcs, parce que de là dépend la meſure de ces angles ſelon ce Theoreme.

V. Theoreme.

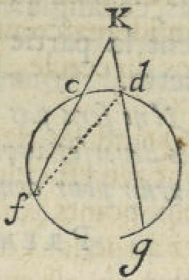
XLVI. Lors que le ſommet d'un angle eſt hors le cercle, ſoit que ces deux coſtez coupent le cercle, ou que tous deux le touchent, ou que l'un le coupe & l'autre le touche, il a pour meſure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe.

Preuve dans le premier Cas.

Soit l'angle *fkg*, dont le coſté *kf* coupe le cercle en *c*, & *kg* en *d*; l'arc concave eſt *fg*, & le convexe *cd*. Il faut donc prouver que cet angle a pour meſure la moitié de l'arc *fg*, moins la moitié de l'arc *c d*, & on le prouve ainſi.

Soit tirée la ligne *fd*. Par le 4^e^ Lemme, l'angle *f d g* eſt égal à l'angle *f k g*, plus l'angle *k f d*.

Donc l'angle *k* est égal à l'angle *f d g* moins l'angle *k f d*. Donc il doit avoir pour mesure la mesure de l'angle *f d g* moins la mesure de l'angle *k f d*.

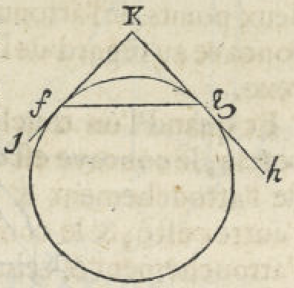


Or la mesure de l'angle *f d g* est la moitié de l'arc concave *f g*, sur lequel il est appuyé ; & la mesure de l'angle *k f d* est la moitié de l'arc convexe *d c*.

Donc l'angle *k* a pour mesure la moitié de l'arc concave *f g*, moins la moitié de l'arc convexe *d c*.

Preuve du second Cas.

Soit l'angle *k*, dont les costez *k f* & *k g* touchent le cercle, & soit *k g* prolongée jusques en *h*.



L'angle *f g h* est égal à l'angle *k* plus l'angle *k f g*. Donc l'angle *k* est égal à l'angle *f g h*, moins l'angle *k f g*.

Or l'angle *f g h* a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment *f g*, & l'angle *k f g* a pour mesure la moitié de l'arc du petit segment *f g*. Donc l'angle *k* a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment, qui est l'arc concave moins l'arc du petit segment, qui est l'arc convexe.

La preuve du troisiéme Cas est semblable à ces deux-là, tenant quelque chose de l'un & de l'autre. Il vaut mieux la laisser trouver.

Avertissement.

Outre cette mesure qui est generale à toutes ces sortes d'angles, il y en a qui sont particulieres à quelques-uns qu'il est bon de marquer par des Theoremes particuliers.

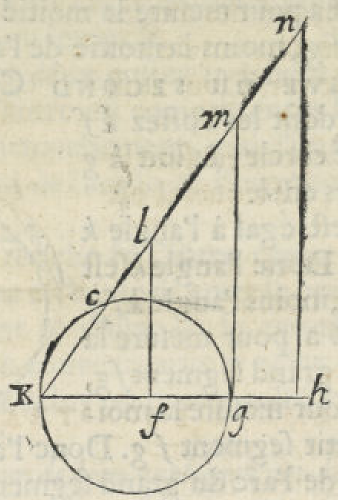
VI. Theoreme.

Un angle ayant son sommet hors le cercle, si l'un de ses costez qui coupe le cercle se termine à l'extremité d'un diametre auquel l'autre costé est perpendiculaire, soit en coupant le cercle, soit en le touchant, soit même estant hors le cercle, ce diametre y estant prolongé, en tous ces XLVI.

cas, cet angle a pour sa mesure la moitié de l'arc que soûtient la partie de son costé non perpendiculaire au diametre.

Il ne sera pas inutile de donner ce Theoreme pour exemple dés diverses voyes que les principes qu'on a établis peuvent fournir pour demonstrer une même chose.

PREMIERE DEMONSTRATION.



XLVII. SOIT le diametre *kg* prolongé jusques à *h*. Soit de *k* tirée une ligne indefinie qui coupe le cercle en *c*.

Soit de divers points de cette ligne hors le cercle comme de *l*, *m*, *n*, tirées sur le diametre les perpendiculaires *lf*, *mg*, *nh*. J'ay à prouver que chacun de ces angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'arc *k c*. Ce qu'on peut faire en cette maniere.

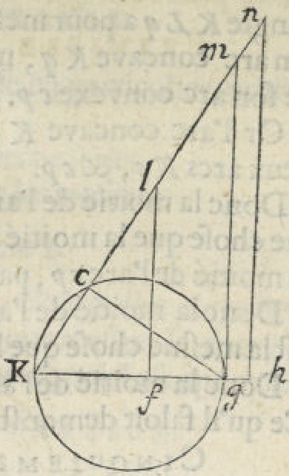
Chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, plus l'angle vers *k* valent un angle droit par le 4ᵉ Lemme, parce que ce sont les angles sur la base d'un angle droit. Donc chacun de ces angles, plus l'angle vers *k* ont pour mesure la moitié de la demy circonference. Donc ils ont aussi pour mesure, par le 3ᵉ Lemme les deux moitiez des deux arcs *kc* & *cg*, qui comprennent la demy-circonference.

Or l'angle vers *k* a pour sa mesure la moitié de l'arc *c g* sur lequel il est appuyé.

Reste donc pour la mesure de chacun des autres la moitié de l'arc *k c*. Ce qu'il faloit demonstrer.

SECONDE DEMONSTRATION.

SOIT encore tirée la ligne *c g*, l'angle *k c g* est droit, parce qu'il est dans le demy-cercle. Donc l'angle *c g k* est égal à chacun des angles vers *l m n*, puisque chacun de ces angles, plus l'angle vers *k* sont aussi égaux à un droit. LVIII.

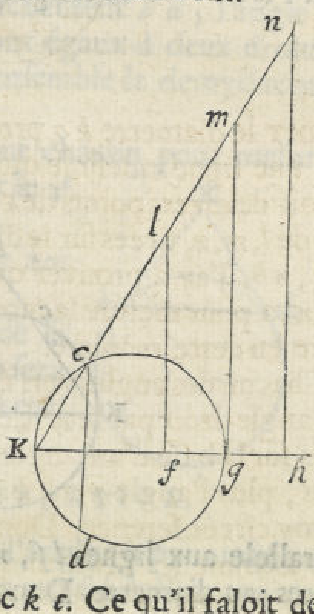


Or l'angle *c g k* a pour mesure la moitié de l'arc *k c*, sur lequel il est appuyé.

Donc la moitié de cet arc *k c* est aussi la mesure de chacun des angles vers *l*, *m*, *n*.

TROISIEME DEMONSTRATION.

SOIT tirée la ligne *c d* qui coupe perpendiculairement le diametre, ce qui fera que les arcs *k c* & *k d* seront égaux. Et la ligne *c d* estant parallele aux lignes *l f*, *m g*, *n h*, les angles que font ces paralleles sur la même ligne aux points *c*, *l*, *m*, *n*, sont égaux. XLIX.

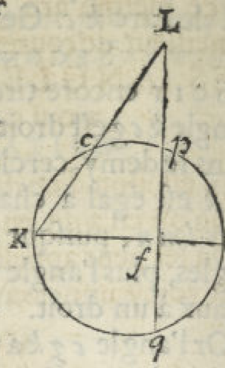


Or l'angle *k c d* a pour sa mesure la moitié de l'arc *k d* égal à l'arc *k c*. Donc chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'un ou l'autre de ces deux arcs qui sont égaux, *k d* & *k c*. Donc on peut dire qu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc *k c*. Ce qu'il faloit demonstrer.

Quatrieme Demonstration.

L. C'est l'application de la demonſtration du Theoreme general à ce cas particulier.

Je ſuppoſe que la perpendiculaire *L f* coupe le cercle en *p* & en *q*. Par la demonſtration du Theoreme general, l'angle *K L q* a pour meſure la moitié de ſon arc concave *K q*, moins la moitié de ſon arc convexe *c p*.



Or l'arc concave *K q* eſt égal aux deux arcs *K c*, & *c p*.

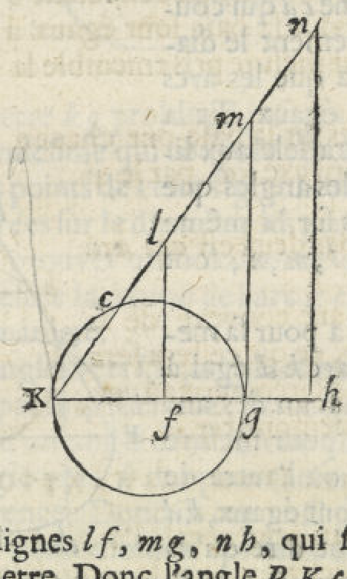
Donc la moitié de l'arc *K q* eſt la même choſe que la moitié de l'arc *K c*, plus la moitié de l'arc *c p*, par le 3ᵉ Lemme.

Donc la moitié de l'arc *K q*, moins la moitié de l'arc *c p* eſt la meſme choſe que la moitié de l'arc *k c*.

Donc la moitié de l'arc *k c* eſt la meſure de l'angle *k L q*. Ce qu'il faloit demonſtrer.

Cinquieme Demontration.

LI. Ayant tiré la tangeante *P K*, cette tangeante ſera



parallele aux lignes *l f*, *m g*, *n h*, qui ſont perpendiculaires au diametre. Donc l'angle *P K c*, eſt égal aux angles vers l, m, n. Or l'angle $P\ K\ c$ a pour ſa meſure la moitié de l'arc $P\ c$ (par 15 S,) donc chacun des autres angles vers l, m, n aura auſſi pour ſa meſure la moitié de ce meſme arc. Je croy que cette demonſtration eſt la meilleur de toutes.

DES ANGLES DONT LES DEUX COSTEZ TOUCHENT LE CERCLE.

Il eſt bon d'en dire quelque choſe en particulier, outre ce qu'on en a dit en general. LII.

On les peut appeller des angles circonſcrits.

Et voicy une nouvelle maniere de les meſurer.

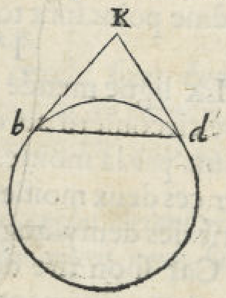
VII. Theoreme.

L'angle circonſcrit au cercle, c'eſt à dire dont les deux côtez touchent le cercle, a pour meſure la demy-circonference moins l'arc convexe ſur lequel il eſt appuyé. LIII.

Premiere Demonstration.

Soit l'angle $b\ k\ d$, à qui ſoit donné pour baſe la ligne qui joint les deux points d'attouchement $b\ d$; l'angle k plus les deux angles ſur ſa baſe ſont égaux à deux droits c'eſt à dire ont pour meſure pris enſemble la demycirconference.

Or les deux angles ſur la baſe ont chacun pour meſure la moitié de l'arc convexe $b\ d$, par le 2e Theoreme.



Donc la meſure des deux eſt cet arc convexe.

Donc oſtant cet arc convexe de la demycirconference, ce qui reſtera ſera la meſure de l'angle k circonſcrit au cercle : ce qu'il falloit demonſtrer.

Seconde Demonstration.

Par la demonſtration generale l'angle k a pour meſure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe. Or ces deux arcs comprennent toute la circonference. Donc par le 3^e Lemme, la moitié de toute la circonference moins l'arc convexe entier eſt la meſme choſe que la moitié de l'arc concave, moins la moitié du convexe.

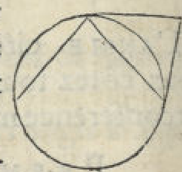
I. Corollaire.

LIV. Deux angles circonſcrits ſont égaux quand ils ſont appuyez ſur des arcs convexes d'autant de degrez, & le plus grand eſt celuy qui eſt appuyé ſur un arc de moins de degrez.

Car de 180 degrez qui en oſte un nombre égal, ce qui reſte eſt égal, & plus le nombre qu'on en oſte eſt petit, plus ce qui reſte eſt grand. Donc, &c.

II. Corollaire.

LV. Si un angle circonſcrit eſt appuyé ſur un arc convexe qui ſoit ſoûtenu par le côté d'un angle inſcrit iſoſcele, l'angle inſcrit & le circonſcrit ſont égaux.



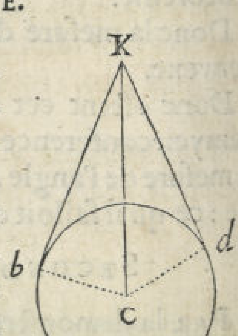
Car oſtant cet arc de la demy-circonference, ce qui reſtera ſera la meſure du circonſcrit par 53. S. & de l'inſcrit par 20. S.

III. Corollaire.

LVI. Il eſt bon de conſiderer toûjours les côtez de l'angle circonſcrit comme terminez au point de l'attouchement. Et ſelon cela il faut dire que tout angle circonſcrit eſt iſoſcelle : car les deux tangentes au cercle menées du même point ſont toûjours égales, par le 2^e Probleme.

IV. Corollaire.

LVII. La ligne menée du ſommet de l'angle circonſcrit au centre le diviſe toûjours par la moitié. Et l'on peut appeller ces deux moitiez de l'angle circonſcrit des demy-angles circonſcrits.



Car ſi on tire deux rayons au point de l'attouchement, on ne pourra conſiderer ces deux demyangles, qu'on ne voye ſans peine que les coſtez de l'un ſont égaux aux coſtez de l'autre, & que les rayons du même cercle, & par con-

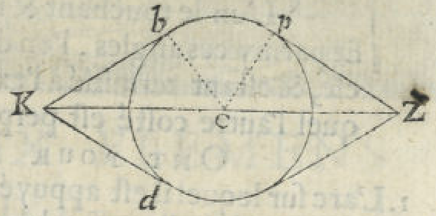
ſequent

sequent les sinus en sont égaux. Donc ils sont égaux.

V. COROLLAIRE.

LES angles circonscripts au même cercle sont égaux quand les tangentes de l'un sont égales aux tangentes de l'autre. LVIII.

Soient *k b* tangente de l'angle *k* égale à *z p*, tangente de l'angle *z*. Je dis que les angles *k* & *z* sont égaux. Car tirant les lignes du centre *k c* & *z c*, & les rayons *c b* & *c p*, les angles *k b c* & *z p c* sont égaux, parce qu'ils sont tous deux droits.



Et les costez de l'un sont égaux aux costez de l'autre, puisque par l'hypothese *k b* est égale à *z p*, & que *c b* & *c p* sont les rayons du même cercle.

Donc les bases de ces angles *k c* & *z c* sont égales.

Donc les angles *b k c* & *p z c* sont égaux, les costez de l'un estant égaux aux costez de l'autre, & ayant les deux rayons pour leurs sinus.

Or ces deux angles *b k c* & *p z c* sont chacun la moitié de chaque angle circonscrit, par le Corollaire precedent.

Donc les angles circonscrits sont égaux : ce qu'il falloit demonstrer.

VI. COROLLAIRE.

LES angles circonscrits au même cercle sont égaux quand leur sommet est également éloigné du centre, & les plus petits sont ceux dont le sommet en est plus éloigné. LIX.

Cela est facile à prouver par les demy-angles circonscrits, & je le laisse à trouver à ceux qui commencent pour faire essay de leurs forces.

RECAPITULATION DE LA MESURE DES ANGLES.

LE sommet de l'angle est LX.

Dans le cercle { au centre. 1.
{ hors le centre. 2.

Dans la circonf.	l'un des costez au dedans, & l'autre au dehors,	le touchant.	3.
		le coupant.	4.
	tous deux au dedans du cercle.		5.
Hors le cercle.	Les deux costez le coupant.		6.
	Les deux le touchant.		7.
	L'un le touchant & l'autre le coupant.		8.
	Et parmy ces angles, l'un des costez coupant le cercle, & estant terminé à l'extremité du diametre auquel l'autre costé est perpendiculaire.		9.

Ont pour mesure.

1. L'arc sur lequel il est appuyé. VIII. 10.

2. La moitié de l'arc sur lequel il est appuyé plus la moitié de l'arc opposé. IX. 42.

3. La moitié de l'arc que soûtient le costé qui est au dedans du cercle. IX. 13.

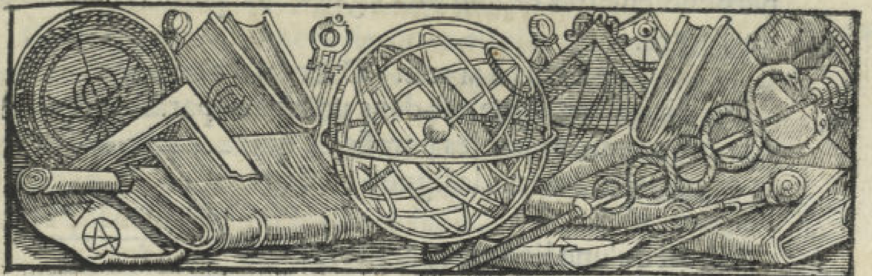
4. La moitié de l'arc que soûtient le costé qui est au dedans du cercle, plus la moitié de celuy que soûtient le prolongement du costé qui est hors le cercle. IX. 16.

5. La moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. IX. 18.

6. 7. 8. La moitié de l'arc concave sur lequel il est appuyé moins la moitié de l'arc convexe. IX. 45.

7. La demy-circonference moins l'arc convexe sur lequel il est appuyé. IX. 52.

9. La moitié de l'arc soûtenu par la partie du costé non perpendiculaire au diametre. IX. 46.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DIXIE'ME.

DES LIGNES PROPORTIONELLES.

LA proportion des lignes dépend de deux choses, I.
des paralleles & des angles, & ainsi elle n'a pû se bien traitter qu'aprés l'explication de l'une & de l'autre. Et mesme pour en bien comprendre tout le mystere, il faut reprendre beaucoup de choses des paralleles que nous proposerons en forme de Lemmes.

I. LEMME. DEFINITION.

UN espace compris d'une part entre deux paralleles & II.
indefiny de l'autre, soit appellé espace parallele.

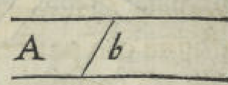
II. LEMME. DEFINITION.

COMME on ne considere dans ces espaces que la distan- III.
ce entre les paralleles, leur grandeur dépend de cette distance qui est mesurée par les perpendiculaires comprises entre ces paralleles, que nous appellerons pour cette raison les perpendiculaires des espaces.

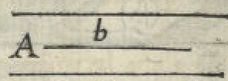
Et delà il s'ensuit que ces espaces sont égaux quand les perpendiculaires de l'un ſont égales aux perpendiculaires de l'autre.

III. Lemme. Definition.

IV. On dit qu'une ligne eſt dans un eſpace parallele quand elle eſt terminée par les paralleles qui le terminent, comme la ligne *b* eſt dans l'eſpace *A*.



On dit qu'une ligne eſt parallele à un eſpace quand elle l'eſt aux lignes qui le terminent, comme la ligne *b* eſt parallele à l'eſpace *A*.



IV. Lemme.

V. L'inclination d'une ligne dans un eſpace ſe conſidere par l'angle aigu qu'elle fait ſur l'une & l'autre parallele, le faiſant toûjours égal.

D'où il s'enſuit que deux lignes ſont également inclinées dans le meſme eſpace, ou dans deux eſpaces differens, quand les angles aigus que fait l'une ſont égaux aux angles aigus que fait l'autre.

Et que la moins inclinée eſt celle qui fait ſon angle aigu moins aigu & plus approchant du droit.

V. Lemme important.

VI. Lorsque deux ou pluſieurs lignes ſont menées d'un même point ſur la même ligne, elles ſont cenſées eſtre dans un même eſpace parallele. Car il ne faut alors que concevoir une ligne menée par ce point commun, qui ſoit parallele à celle qui les termine. D'où il s'enſuit que les coſtez d'un angle terminez par une baſe ſont toûjours cenſez eſtre dans le même eſpace parallele.

VI. Lemme.

VII. Deux angles ſoient appellez ſemblables lors qu'eſtans égaux les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun.

Et on eſt aſſeuré que cela eſt ; 1. quand on ſçait qu'ils ſont égaux, & qu'un des angles ſur la baſe de l'un eſt égal à l'un des angles ſur la baſe de l'autre : car delà il s'enſuit que l'autre eſt égal auſſi.

2. Lors qu'étant égaux ils ſont de plus Iſoſceles. VIII. 59.

VII. Lemme.

Quand les sommets de deux angles sont également distans chacun de sa base (prolongée s'il est besoin) ces deux angles peuvent estre compris dans le même espace parallele. Car mettant ces deux bases sur une même ligne, la ligne qui passera par les deux sommets sera parallele à celle qui comprendra les deux bases. VII I.

VIII. Lemme.

Dans le même espace parallele, ou dans les espaces paralleles égaux, toutes les également inclinées sont égales, & toutes les égales sont également inclinées. VIII. 54. IX.

Et au contraire les espaces paralleles sont égaux quand les également inclinées y sont égales. Car delà il est certain que les perpendiculaires le sont aussi. VIII. 56.

IX. Lemme.

Lors qu'une même ligne est coupée par plusieurs lignes toutes paralleles, toutes les portions de cette ligne coupée sont également inclinées entre les paralleles qui les renferment. VIII. 57. X.

X. Lemme.

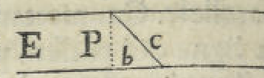
Lors qu'il y a proportion entre quatre lignes, on dit que deux de ces lignes sont proportionelles aux deux autres lignes quand les deux antecedens de la proportion se trouvent dans les deux premieres, & les deux consequens dans les deux dernieres. D'où il s'ensuit aussi qu'*Alternando*, on peut prendre aussi les deux premieres pour les deux termes d'une raison, & les deux dernieres pour les deux termes de l'autre. XI.

PROPOSITION FONDAMENTALE DES LIGNES PROPORTIONELLES.

Lors que deux lignes sont également inclinées en deux differens espaces paralleles, elles sont entr'elles comme les perpendiculaires de ces espaces, & leurs éloignemens du perpendicule sont aussi en même raison. XII.

Soient deux espaces A & E.

Soient appellées dans l'espace *A*.
La perpendiculaire, *P*.
L'oblique, *C*.
L'éloignemẽt du perpendicule *B*.



Et soient de même appellées dans l'espace, *E*.
La perpendiculaire *p*.
L'oblique *c*.
L'éloignement du perpendicule *b*. Je dis que

$$P. p. :: C. c. :: B. b.$$

Et en voila la preuve tres-naturelle, dont je ne croy pas que jamais personne se soit avisé.

Soit *P* divisée en quelques aliquotes que l'on voudra, 10. 20. 500. 6000. 10000. &c. Et ces aliquotes quelconques de *P* soient appellées *x*.

Si on tire par tout les points de cette division telle qu'elle soit des paralleles à l'espace *A*, cet espace sera divisé en autant de petits espaces paralleles qu'*x* sera dans *P*. Et ces petits espaces seront égaux par le 2^e^ Lemme, parce qu'ils auront tous *x* pour perpendiculaire.

Et de là il s'ensuit que *C* sera aussi divisé en aliquotes pareilles à celles de *P*, parce que les portions de *C*, qui se trouvent entre chacun de ces petits espaces égaux y étant également inclinées par le 9^e^. Lemme, y sont égales par le 8.

Soient donc les aliquotes de *C* pareilles à celles de *P* appellées *y*.

Que si de tous les points de division de *C* on tire des paralleles à *P* (qui seront par consequent perpendiculaires à l'espace) elles couperont encore *B* en aliquotes pareilles, parce que chaque *y* se trouvant également inclinée en chacun de ces nouveaux petits espaces, ils seront égaux par le 9^e^ Lemme. Et par consequent les portions de *B* qui seront toutes perpendiculaires dans ces espaces égaux, seront égales. (Et cela même seroit vray quand elles n'y seroient pas perpendiculaires, pourveu qu'elles y fussent également inclinées. Ce qu'il faut remarquer pour une autre occasion.)

Cela estant fait, prenant *x* pour mesurer *p* de l'espace *E*, où elle s'y trouvera precisement tant de fois, ou tant de fois plus quelque reste, c'est à dire plus une portion moindre qu'*x*. Et ainsi tirant des lignes paralleles à l'espace *E* par tous les points de la division de *p* mesurée par *x*, l'espace *E* se trouvera divisé en autant de petits espaces égaux entr'eux, & égaux à ceux qui ont eu la même *x* pour perpendiculaire dans l'espace *A*, qu'*x* se sera trouvé dans *p*, si ce n'est qu'il y en aura un plus petit, si *x* ne s'y est trouvée que tant de fois plus quelque reste. Car le petit espace où sera compris ce reste sera plus petit que les autres.

Et de-là il s'ensuit que *c* estant aussi inclinée dans *E* que *C* dans *A*, les portions de *c* comprises dans ces espaces égaux à ceux d'*A* seront égales aux portions de *C*, & ainsi se pourront aussi appeller *y*, & s'il y avoit eu en *p* un reste moindre qu'*x*, il y auroit aussi eu en *c* un reste moindre qu'*y*.

Donc par la definition des grandeurs proportionnelles,

P p. : : C c.

puisque *x* & *y*, aliquotes quelconques pareilles des deux antecedens *P* & *C*, sont également contenuës dans les deux consequens *p* & *c*, si dans l'un sans reste, dans l'autre sans reste : si dans l'un avec reste, dans l'autre avec reste.

On prouvera la même chose de *B* & de *b*. Car si *c* étant mesurée & divisée par *y*, on tire des paralleles à *p* (qui seront perpendiculaires à l'espace) par tous les points de la division, *b* sera divisée en autant de parties que *c*, & ces parties seront égales aux parties de *B*, que nous avons nommées *z*: si ce n'est qu'il y en aura une moindre que *z*, s'il y a eu un reste dans *c* moindre qu'*y*.

Donc les aliquotes pareilles de *C* & de *B* seront également contenuëz dans *c* & *b*.

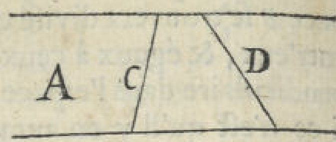
Donc *Cc* :: *Bb*.

Donc *Pp* :: *Cc* :: *Bb*. Ce qu'il falloit demonſtrer

I. Theoreme.

XIII. Si deux lignes inégalement inclinées dans le même eſpace le ſont autant chacune, que chacune de deux autres le ſont dans un autre eſpace, les également inclinées ſont en même raiſon.

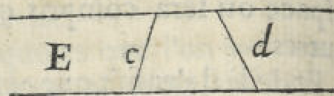
Soient les eſpaces *A* & *E*.



Soit *C* autant inclinée dans l'eſpace *A* que *c* dans l'eſpace *E*.

Et *D* autant inclinée dans l'eſpace *A* que *d* dans l'eſpace *E*.

Je dis que *Cc* :: *Dd*.



Car par la propoſition precedente

C eſt à *c*, comme la perpendiculaire d'*A* à la perpendiculaire d'*E*.

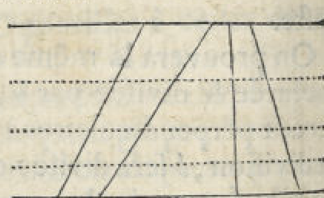
Or *D* eſt auſſi à *d*, comme ces deux mêmes perpendiculaires.

Donc *Cc* :: *Dd*.

On le peut auſſi prouver immédiatement & par ſoy-même ſans avoir recours aux perpendiculaires par la même voye dont on s'eſt ſervy dans la Propoſition precedente, & que je ne repete point, parce qu'il eſt tres-facile de la trouver.

I. Corollaire.

XIV. Plusieurs lignes étant diverſement inclinées dans le même eſpace parallele, ſi elles ſont toutes coupées par des paralleles à cet eſpace, elles le ſont proportionellement, c'eſt à dire que chaque toute eſt à chacune de ſes parties, telle qu'eſt la premiere, ou la deuxiéme, ou la troiſiéme, &c. comme chaque autre toute à la même partie prémiere, ou deuxiéme, ou troiſiéme, &c.

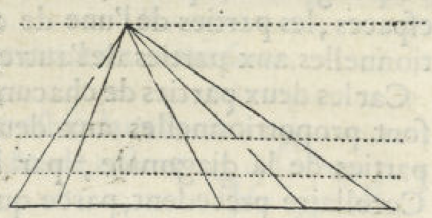


C'eſt une ſuitte manifeſte du precedent Theoreme, puiſque

puisque d'une part toutes les toutes sont dans le même espace, qui est l'espace total. Toutes les premieres parties dans le 1er espace partial, les 2des dans le 2e, & ainsi des autres. Et que de l'autre chaque toute & chacune de ses parties sont également inclinées chacune dans son espace par le 9e Lemme. Donc la 1re toute est à sa 1re partie comme la seconde toute à sa 1re partie.

II. Corollaire.

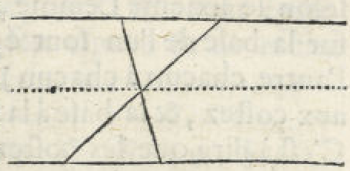
Si plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionnellement par toutes les lignes parallelles à celle qui les termine. XV.



C'est la même chose que le precedent Corollaire, puisque tirant par le point commun à toutes ces lignes une ligne parallele à la ligne qui les termine, elles se trouveront toutes dans le même espace parallele, & par consequent les paralleles à cet espace les doivent toutes couper proportionellement.

III. Corollaire.

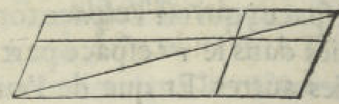
Si deux lignes comprises dans un même espace se coupent, elles sont coupées proportionellement. C'est a dire que les parties de l'une sont proportionnelles aux parties de l'autre, outre que la toute est à la toute comme chaque partie à la même partie. XVI.



C'est encore la même chose que le 1er Corollaire, puisque menant une parallele à l'espace par le point de la section, ce seront deux lignes dans le même espace total qui sont coupées par une parallele à cet espace, & qui par consequent le doivent estre proportionnellement.

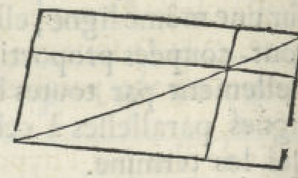
IV. Corollaire.

XVII. Si quatre lignes dont les opposées sont paralleles se joignent aux extremitez, elles font deux espaces paralleles, l'un d'un sens & l'autre de l'autre sens, & la ligne tirée de coin en coin s'appelle diagonale.



Que si d'un point quelconque de cette diagonale on tire deux lignes comprises chacune dans chacun de ces deux espaces, les parties de l'une de ces lignes seront proportionnelles aux parties de l'autre.

Car les deux parties de chacune sont proportionnelles aux deux parties de la diagonale, par le Corollaire precedent, parce que chacune de ces lignes & la diagonale sont comprises dans le même espace parallele & s'y coupent. Dont les parties de chacune estant en même raison que celles de la diagonale, les parties de l'une doivent aussi estre en même raison que les parties de l'autre, puisque deux raisons égales à une 3e sont égales entr'elles.



II. Theoreme.

XVIII. Lorsque deux angles sont semblables (c'est à dire selon le sixiéme Lemme, lorsqu'estant égaux les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun) ces costez sont proportionnels aux costez, & la base à la base, & la hauteur à la hauteur. C'est à dire que les costez de ces deux angles également inclinez chacun sur sa base seront en même raison que les deux autres costez & que les deux bases, & que les distances de chaque sommet à chaque base : ce que j'appelle la hauteur de chaque angle.

Soient les deux angles nommez *A* & *E*.

Soit le grand costé d'*A* nommé *C*.

Le petit *D*.

La base *B*.

La hauteur H.

Et dans l'angle E.

Le grand costé c.

Le petit d.

La base b.

La hauteur h.

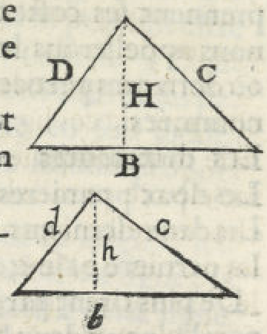
Je dis que $C\ c :: D\ d :: B\ b :: H\ h$.

On le peut prouver facilement de la même sorte qu'on a prouvé la Proposition fondamentale, c'est pourquoy je ne le repete point.

Mais on le peut encore de cette autre sorte.

Par le 5e Lemme.

1°. C & D sont censées estre dans le même espace parallele, & de même c & d.



Et de plus par l'hypotese C & c sont également inclinées chacune dans son espace, & de même D & d.

Donc par la Proposition fondamentale, & par le 1er Theoreme.

$C.\ c :: H.\ h.$

$D.\ d. :: H.\ h.$

$C.\ c :: D.\ d.$ & *alternando* $C.\ D :: c.\ d.$

2°. Par le 5e Lemme, C & B sont dans le même espace parallele & de même c & b, & de plus C & c sont également inclinées chacune dans son espace & de même B & b.

Donc par le 1er Theoreme,

$C.\ c :: B.\ b$ & *alternando* $C.\ B :: c.\ b.$

3°. Par le même 5e Lemme, D & B sont dans le même espace parallele, & de même d & b.

Et de plus, D & B sont également inclinées chacune dans son espace, & de même d & b.

Donc par le 1er Theoreme,

$D.\ d :: B.\ b.$ & *alternando* $D.\ B. :: d.\ b.$

Donc $\left.\begin{matrix} C.\ c \\ D.\ d \end{matrix}\right\} :: B.\ b.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

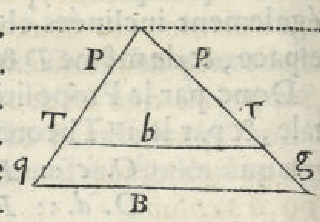
I. Corollaire.

XIX. Deux angles Isosceles estant égaux, ils sont semblables, & par consequent les costez sont aux costez comme la base à la base, & la hauteur à la hauteur. Car deux angles estant Isosceles, ils ne peuvent estre égaux que les angles sur la base de l'un ne soient égaux aux angles sur la base de l'autre. VIII. 60.

II. Corollaire.

XX. Si un angle a deux bases paralleles, il s'y trouvera diverses sortes de proportions de grad usage.

Mais pour le mieux faire entendre, il faut considerer que les costez de cet angle selon la derniere base comprennent ses costez selon la premiere, & c'est pourquoy nous appellerons les uns *toutes*, & les autres les premieres ou dernieres parties de chacune de ces toutes. Soient donc nommées.



Les deux toutes T. & *T*.
Les deux premieres parties p. & *p*.
Les deux dernieres q. & *g*.
La derniere base & la 1re *B*. & *b*.

De plus tirant par le sommet une parallele aux deux bases, il se trouvera trois espaces paralleles.

Le total entre le sommet & *B*, que j'appelleray ω.
Le premier partial entre le sommet & *b*, *A*.
Le second partial entre *b* & *B*, *E*.
Cela estant par le 9e Lemme,

T est autant inclinée dans ω, que p dans A, & q dans *E*.

Et de même *T* autant inclinée dans ω, que *p* dans A. & *g* dans *E*.

Donc par le 1er Theoreme,

1. T. p. :: *T*. *p*. & *alternando*. T. *T* :: p. *p*.
2. T. q. :: *T*. *g*. T. *T* :: q. *g*.
3. p. q. :: *p*. *g*. p. *p* :: q. *g*.
4. Par le 2e Theoreme chaque toute & sa premiere partie sont en même raison que la derniere base & la premiere.

T. p : : B. *b*. T. B. : : p. *b*.
T. *p* : : B. *b*. *T*. B. : : *p*. *b*.

Car cet angle qui a deux baſes paralleles doit eſtre conſideré comme ſi c'eſtoient deux angles égaux, dont l'un euſt pour coſtez & pour baſes T. *T*. B. & l'autre p. *p*. *b*. & ainſi les deux angles ſur la baſe de l'un étant égaux aux deux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun, les coſtez de l'un ſont proportionnels aux coſtez de l'autre, & les baſes auſſi. Et par conſequent T. p : : *T*. *p*. : : B. *b*.

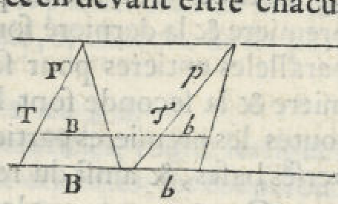
III. Corollaire.

Lorsque deux angles ont leur ſommet également diſtant de leur baſe, & que par conſequent ils peuvent eſtre compris dans le même eſpace parallele (ſelon le 7ᵉ Lemme) ſi l'on donne à ces deux angles de nouvelles baſes paralleles aux anciennes, & dont chacune en ſoit également diſtante, ces deux nouvelles baſes ſeront proportionelles aux deux anciennes. XX.

Suppoſons que les deux baſes de ces deux angles, leſquelles j'appelleray B & *B*, ſoient ſur la même ligne, la ligne qui joindra les ſommets ſera parallele à cette ligne. D'où il s'enſuit,

1°. Que conſiderant dans chacun de ces angles un ſeul coſté, dont j'appelleray l'un T & l'autre *T*, ce ſeront deux lignes dans le meſme eſpace parallele.

2°. Que les deux nouvelles baſes, que j'appelleray b & *b*, eſtant paralleles aux anciennes, & en devant eſtre chacune également diſtantes, ſe trouveront neceſſairement dans la même ligne parallele à l'eſpace.



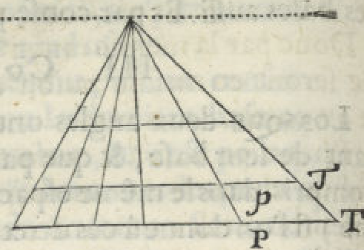
Donc par le 1ᵉʳ Corollaire du 1ᵉʳ Theoreme : cette ligne parallele à l'eſpace coupe proportionnellement T & *T*, & ainſi appelant p la premiere partie de T. & *p* la premiere partie de *T*, T. p : : *T*. *p*.

Or par le Corollaire precedent chacun de ces angles ayant deux bases paralleles $\begin{cases} \mathrm{T.\,p :: B.\,b.} \\ T.\,p :: B.\,b. \end{cases}$

Donc les deux raisons de B. b & de *B. b* sont égales, puisque chacune est égale à chacune des deux raisons T. p & *T. p* qui sont égales entr'elles. Donc

B. b : : *B. b.* Donc *alternando* B. *B* : : b. *b.*

IV. Corollaire.



Si d'un même point on tire plusieurs lignes à la même ligne comprises entre la premiere & la derniere, & qu'on tire des paralleles à celle-là qui soient aussi comprises entre la premiere & la derniere de ces lignes tirées du même point, toutes ces paralleles seront coupées proportionnellement, c'est à dire que chaque toute & sa premiere partie seront en même raison que chaque autre toute & sa 1re partie, & ainsi du reste.

Il suffit d'examiner deux de ces paralleles comme est la derniere, que j'appelleray T, & sa premiere partie p, & une autre que j'appelleray *T*, & sa premiere partie *p*, & ainsi il faut prouver que

T. p : : *T. p.*

XXII. Et pour cela il ne faut que considerer, 1°. Que ces lignes tirées d'un méme point font divers angles, que la premiere & la derniere font l'angle total, qui a toutes les paralleles entieres pour ses diverses bases. Que la premiere & la seconde font le premier angle partial, qui a toutes les premieres parties de ces paralleles pour ses diverses bases, & ainsi du reste.

2°. Que tous ces angles sont dans le même espace parallele, parce qu'on peut tirer une ligne par leur sommet commun qui sera parallele à la derniere base de l'angle total.

Donc T estant la derniere base de l'angle, & p la derniere base du 1^er angle partial, laquelle est partie de la ligne T & *p*, dont *T* est une autre base de l'angle total, & *p* une autre base du 1^er angle partial, seront aussi sur une même ligne parallele à l'espace, puisque *p* est partie de *T*.

Donc par le Corollaire precedent, les deux dernieres bases de ces deux angles T & p seront en mesme raison que leurs deux autres bases *T* & *p*. Donc

T. p : : *T*. *p*.

Donc par la mesme raison chaque parallele & sa 1^re partie seront en mesme raison que chaque autre parallele & sa 1^re partie.

En on prouvera la mesme chose avec la mesme facilité de chacune des autres parties en comparant toûjours ensemble celles qui sont renfermées entre les deux mesmes lignes.

V. Corollaire.

Si l'une de ces paralleles renfermées entre la 1^re & la derniere de plusieurs lignes tirées du mesme point, & divisée par ces lignes en parties aliquotes; c'est à dire en un certain nombre de partie égales, toutes les autres sont diuisées par les mesmes lignes en aliquotes pareilles. XXIII.

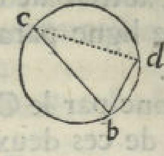
C'est une suite manifeste du precedent Corollaire. Car si chaque partie de l'une de ces paralleles en est par exemple la dixiéme partie, il faut que chaque partie de chaque autre parallele en soit aussi la dixiéme partie, puisque chaque parallele & chacune de ses parties sont en mesme raison que chaque autre parallele, & chacune de ses parties semblables.

VI. Corollaire.

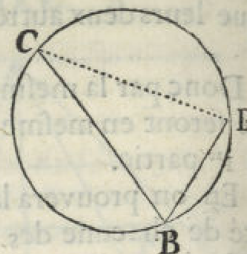
Si un angle a plusieurs bases paralleles, toutes les lignes tirées du sommet qui couperont ces bases, les couperont proportionellement. D'où il s'ensuit qu'en quelques aliquotes que l'une de ces bases paralleles soit divisée, toutes les autres le seront en aliquotes pareilles. XXIV.

Ce n'est que les precedens Corollaires un peu autrement énoncez.

VII. Corollaire.



XXV. Les deux cordes d'un cercle sont proportionnelles aux deux cordes d'un autre cercle, si les arcs que soutiennent les unes sont proportionellement égaux aux arcs que soutiennent les autres, chacun à chacun.



Soient considerées les deux cordes d'un cercle, comme jointes & faisant un angle inscrit : telles que sont *b c* & *b d* d'une part; & *B C* & *B D* de l'autre. (Car si elles ne faisoient pas d'angle inscrit dans chaque cercle, il ne faudroit qu'en prendre d'égales à celles-là qui en fissent, puisque soutenant des arcs égaux dans chaque cercle, par V. 26. ce sera la mesme chose pour juger de la proportion.) Cela supposé,

L'angle *c b d* inscrit dans le premier cercle est égal à l'angle *C B D* inscrit dans le second cercle, par I X. 21.

Et les angles que font les costez *b c* & *b d* sur la base *d c*, sont égaux aux angles que font les costez *B C* & *B D* sur la base *D C*, chacun à chacun, par IX. 21.

Donc par la 2^e Theoreme,

b c. *B C* :: *b d*. *B D* :: *d c*. *D C*.

VIII. Corollaire.

XXVI. Si deux cordes de divers cercles soutiennent des arcs proportionellement égaux, (c'est à dire d'autant de degrez) elles sont proportionnelles aux diametres de ces cercles.

C'est une suite du precedent. Car les diametres soutiennent des arcs proportionellement égaux dans chaque cercle, puisqu'ils en soutiennent la demy-circonference. C'est donc la mesme preuve & encore plus facile.

IX. Corol.

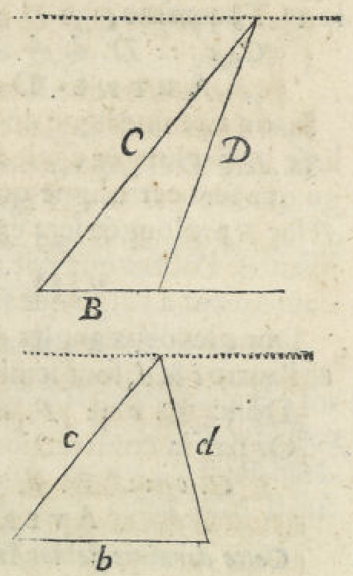
IX. Corollaire.

Si deux cordes égales de divers cercles soutiennent chacune autant de degrez, les cercles sont égaux. Car par le precedent Corollaire elles sont en mesme raison que les diametres des cercles. Donc si elles sont égales, les diametres sont égaux. Donc les cercles sont égaux. XXVII.

III. Theoreme.

Deux Angles quoy qu'inégaux ont neanmoins leurs costez proportionnels, lorsque le costé de l'un sur sa base fait un angle égal à celuy que fait aussi sur sa base l'un des costez de l'autre, & que l'autre costé du premier angle faisant sur sa base un angle obtus, & l'autre costé du second angle faisant un angle aigu sur la sienne, l'aigu est le complement de l'obtus, en sorte que tous les deux ensemble valent deux angles droits. XXVIII.

Cette derniere condition se peut encore exprimer en une autre maniere, qui est que ces deux costez, l'un d'un angle & l'autre de l'autre, fassent chacun sur sa base le même angle aigu, mais que l'un le fasse au dehors de la base & l'autre au dedans.



Cette derniere expression fait entrer plus facilement dans la demonstration de ce Theoreme.

Soient les deux angles, dont l'un ait pour costez C & D; & pour base B. Et l'autre pour costez c & d, & pour base b.

Je suppose, 1°. Que les angles que les costez C & c font chacun sur leur base sont égaux.

2°. Que le costé D fait un angle obtus sur la base B, & d un angle aigu sur la base b, mais que cet aigu est égal au complement de cet obtus. D'où il s'ensuit.

Que l'angle aigu que *D* fait sur la base en dehors en la concevant prolongee, est égal à l'angle aigu que *d* fait sur la sienne en dedans.

Cela estant, je dis que *C. c :: D. d.*

Car soient faits de deux angles deux espaces paralleles en prolongeant les bases *B* & *b* autant qu'il est necessaire, & tirant par chacun des sommets des paralleles a ces bases. Et celuy de ces espaces dans lequel sont *C* & *D* soit appelé *A*, & l'autre *E*.

Par l'hypothese l'angle aigu que fait *C* dans l'espace *A* est égal à l'angle aigu que fait *c* dans l'espace *E*.

Donc par le 4^e Lemme *C* & *c* sont également inclinées chacune dans son espace.

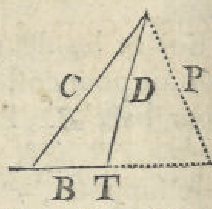
De mesme par l'hypothese l'angle aigu que fait *D* dans l'espace *A* (sur la base *B* prolongée) est égal à l'angle aigu que fait *d* dans l'espace *E*.

Donc par le 4^e Lemme *D* & *d* sont également inclinées chacune dans son espace, & il n'importe que *D* soit autrement tournée au regard de *c*, car cela ne change en rien l'inclination de chacune dans son espace. Donc par le 1er Theoreme,

C. c. :: D. d. & alternando C. D : : c. d.

AUTRE DEMONSTRATION.

XXIX. Si on tire une ligne du sommet sur la base *B* prolongée égale à *D*, l'angle aigu que fera cette ligne que j'appelleray *P* sur *B* prolongée sera égal au complement de l'obtus que fait *D* sur *B*, & par consequent à l'aigu que fait *d* sur *c*.



Donc les deux angles dont l'un a pour ses costez *C* & *P*, & l'autre *c* & *d*, sont semblables par le 6^e Lemme.

Donc *C. c :: P. d.*

Or par la construction *P* est égale à *D*. Donc

C. c :: D. d.

AVERTISSEMENT.

XXXX. *Cette derniere demonstration, quoyque moins bonne que la premiere, a cela d'utile, qu'elle fait voir plus clairement la* *difference qu'il y a entre ce 3e Theoreme & le 2e, qui est que dans le 2e non seulement les costez d'un triangle sont proportionels à ceux de l'autre, mais aussi la base; au lieu que dans celuy-cy il n'y a que les costez de proportionnels, estant bien clair que la base* B, *sur laquelle est l'angle obtus, doit estre plus petite à proportion que la base* b.

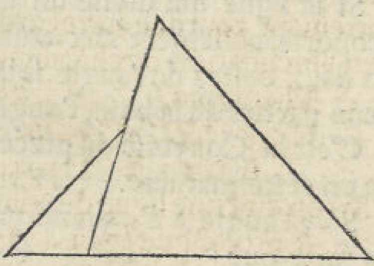
Car appellant T *la base* B, *prolongée jusques à* P, *il est clair que l'angle qui a pour costez* C, & P & T *pour base, est semblable à l'angle qui a pour costez* c & d, & b *pour base.*

Donc par le 2e Theoreme $\left.\begin{matrix}\text{C.c.}\\ \text{P.d.}\end{matrix}\right\}$ :: T. b.

Or B *n'est que partie de* P, *donc il n'y a pas la même raison de* B *à* b, *que de* C *à* c.

I. Corollaire.

Une ligne que j'appelleray la coupante estant inclinée sur une autre que j'appelleray la coupée, si de l'extremité & d'un autre point de cette coupante on tire deux lignes de part & d'autre qui fassent des angles égaux sur la coupée, la coupante entiere sera à sa partie vers la coupée comme la ligne tirée de son extremité à l'autre ligne tirée de son autre point. X.XXI.

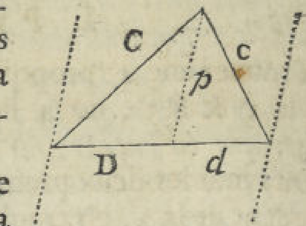


J'en laisse à trouver la demonstration, qui n'est qu'une application du precedent Theoreme.

II. Corollaire.

Si un angle a diverses bases diversement inclinées sur ses costez, la ligne qui divisera cet angle par la moitié fera que les deux parties de chaque base seront proportionelles aux deux costez de cet angle selon cette base. Il suffira de le demonstrer en une seule base. XXXII.

Soit un angle divisé par la moitié par la ligne p. Soit l'un de ces costez appellé C & l'autre c, la partie de la base qui joint C appellée D, & l'autre d.



Si on tire par les extremitez de la base des paralleles à p, il y aura deux espaces paralleles.

Celuy dans lequel sont C & D soit appelé A, & l'autre E, par le 9^e Lemme D & d sont également inclinées chacune dans son espace.

Et par l'hypotese C & c sont aussi également inclinées chacune dans le sien, puisque les angles aigus que chacune fait sur p sont égaux.

Donc par le premier Theoreme,

$C . c :: D . d.$ & *alternando* $C . D :: c . d.$

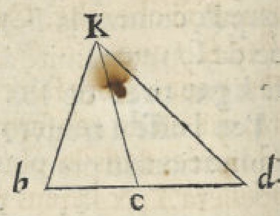
III. Corollaire.

XXXIII. Si la ligne qui divise un angle en divise aussi la base proportionellement aux costez, c'est à dire en sorte que les deux costez de l'angle soient en même raison que les deux parties de la base, l'angle est divisé par la moitié.

C'est la Converse du precedent Corollaire qui se prouve en cette maniere.

Soit l'angle $b\,k\,d$ divisé par $k\,c$, en sorte que

$b\,c . c\,d :: k\,b . k\,d.$



Si nous supposons que ce mesme angle est divisé par la moitié par $k\,x$, il s'ensuit par le precedent Corollaire que

$b\,x . x\,d :: k\,b . k\,d.$

Donc $b\,x . x\,d :: b\,c . c\,d.$

Donc *componendo* $b\,d . x\,d :: b\,d . c\,d.$

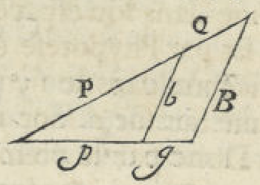
Donc les points x & c ne sçauroient estre que le mesme point, & $k\,x$ & $k\,c$ la mesme ligne. Donc $k\,c$ divise l'angle par la moitié. Ce qu'il falloit demonstrer.

I. PROBLEME.

Trouver une 4^{e} proportionelle. C'eſt à dire ayant la 1re, la 2^{e} & la 3^{e}, de 4 lignes proportionelles trouver la 4^{e}. XXXIV.

Ou ayant les deux premiers termes d'une raiſon, & l'antecedent de la 2^{e}, en trouver le conſequent.

Le moyen le plus facile eſt de ſe ſervir pour cela du premier Corollaire du ſecond Theoreme. (13. S.) Et ainſi donnant les meſmes noms aux trois données & à la 4^{e}, qui eſt à trouver, j'appeleray



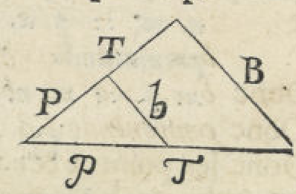
La 1re p.
La 2^{e} q.
La 3^{e} *p.*
Et la 4^{e} à trouver *q.*

Cela eſtant, il faut

1°. Mettre p & q ſur une meſme ligne.
2°. Faire un angle de *p* la 3^{e} avec p la 1re.
3°. Joindre par *b* les extremitez de la 1re & de la 3^{e}.
4°. Prolonger indefiniment *p* la 3^{e}.
5°. De l'extremité de q la 2^{e} tirer *B* perallele à *b*, juſqu'à la rencontre de *p* prolongée.

Le prolongement de *p* juſqu'à la rencontre de *B* ſera la 4^{e} que l'on cherche. Car il eſt clair par le Corollaire ſuſdit (13. S.) que p. q. : : *p. q.*

ON peut encore faire la meſme choſe d'une autre maniere, qui eſt de renfermer la plus petite des deux premieres données dans la plus grande: & alors la plus grande s'appellera T, & la plus petite qui en eſt partie p. XXXV.



Mais il faut prendre garde ſi la premiere des données eſt la plus petite ou la plus grande. Car ſi c'eſt la plus grande, il faudra commencer par T, & la 3^{e} ſera auſſi *T*. Et alors pour trouver *p*, qui ſera la 4^{e} que l'on cherche, aprés auoir joint par *B* les extremitez de T & de *T*. *b* parallele à *B* eſtant tirée de l'extremité de p sur *T* donnera *p*. Car il est encor clair par le mesme Corollaire que

T. p. :: *T*. *p*.

Que si la 1re des deux données est la plus petite, la 3e sera *p*, & la 4e à trouver sera *T*. De sorte qu'aprés avoir joint par *b* les extremitez de p & *p*, il faudra prolonger *p*, & tirant de l'extremité de T sur le prolongement de *p*, *B* parallele à *b*, on aura *T* pour la 4e à trouver. Car par le méme Corollaire (13. S.) *permutando*.

p. T :: *p*. *T*.

Corollaire.

XXXVI. Trouver une 3e proportionelle, c'est à dire faire que l'une des deux données soit moyenne proportionelle entre l'autre donnée & la trouvée. C'est la mesme chose que le precedent, excepté qu'une seule des deux données tient lieu de la 2e & de la 3e.

II. Probleme.

XXXII. Trouver la ligne qui soit à une ligne donnée en raison donnée.

Soit la ligne donnée p, la raison donnée *m*. *n*, la ligne que lon cherche *x*. Ainsi il faut trouver.

x. *p*. :: *m*. *n*.

Or pour cela il ne faut que transporter les termes en commençant par *n*, & les mettant ainsi,

n. *m*. :: *p*. *x*.

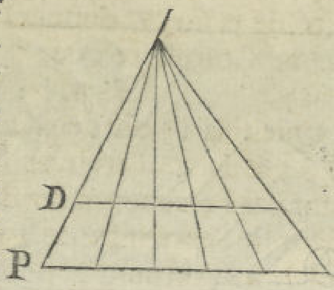
& puis trouver *x* par le Probleme precedent. Ce qu'étant fait on aura ce que l'on cherche, parce que si

n. *m*. :: *p*. *x*.
permutando
x. *p*. :: *m*. *n*. Ce qu'il faloit demonstrer.

III. Probleme.

Diviser une ligne donnée en quelque aliquotes que l'on voudra.

Soit *D* la ligne à diviser tirer au dessous ou au dessus une parallele indefinie que j'appelleray *P*. Prendre dans *P* autant de parties égales qu'on veut en avoir en la division de *D*, & prendre garde qu'elles soient notablement plus grandes ou plus petites que ne peuvent estre celles de *D*; puis de deux points entre lesquels sont comprises toutes les parties égales qu'on a prises dans *P*, tirer deux lignes par les extremitez de *D*. jusques à ce qu'elles se joignent : toutes les lignes tirées de ce point là à tous les points de la division de *P* qui couperont *D*, la diviseront en autant de parties égales qu'on en aura pris dans *P*.



La preuve en est cy-dessus dans le 5e Corollaire du 2e Theoreme. (22. S.)

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE ONZIE'ME.

DES LIGNES RECIPROQUES.

CE livre cy sera encore de la proportion des lignes, & contiendra plusieurs choses nouvelles que l'on jugera peut estre plus belles & plus generales, que tout ce qu'on a trouvé jusques icy sur cette matiere des proportions, en ne se servant que des lignes droites & des cercles.

Pour les mieux faire entendre nous proposerons quelques Lemmes qui feront voir aussi en quoy est different ce que l'on traite dans ce livre de ce qui vient d'estre traitté dans le livre precedent, & nous le diviserons en 7. sections.

SECTION I.

Lemmes & de ce qu'on entend par les Antiparalleles : avec le plan des principales choses qu'on doit traiter dans ce livre.

I. Lemme.

Quand il y a proportion entre 4 lignes, on y doit remarquer en les comparant deux à deux, deux rapports fort differens. I.

L'un est celuy qui fait dire que les unes sont proportionelles aux autres.

Et l'autre, que les unes sont reciproques aux autres.

Car si on compare ou la 1re & la 3e avec la 2e & la 4e, c'est à dire les deux antecedens avec les deux consequens ;

Ou les deux premieres avec les deux dernieres, c'est à dire le 1er antecedent & son consequent avec le 2e antecedent & son consequent; on dit alors que les unes sont *proportionelles* aux autres.

Mais si on compare la 1re & la 4e avec la 2e & la 3e, c'est-à dire les extrêmes avec les moyens ; on dit alors que les unes sont *reciproques* aux autres.

Tout ce que nous avons dit dans le livre precedent ne regarde que le premier rapport.

Et tout ce que nous dirons dans celuy-cy ne regarde presque que le second, & c'est pourquoy nous l'avons intitulé des lignes reciproques.

II. Lemme.

Une seule ligne peut estre dite reciproque à deux lignes, & deux lignes estre reciproques à une seule. Mais c'est lors seulement que cette ligne que l'on compare seule avec deux autres est moyenne proportionelle entre ces deux autres. Car alors elle en vaut deux, parce qu'elle fait deux termes de la proportion. Le premier & le dernier quand on commence par elle : comme si je dis, une ligne II.

de 6 pieds eſt à une de 4 comme une de 9 à une de 6 : ou le 2e & le 3e quand on la met au milieu, comme ſi je dis 4. 6 :: 6. 9. Et il faut remarquer que quoique cette derniere diſpoſition ſoit la plus ordinaire, il y a neanmoins des rencontres où il eſt utile de ſe ſervir de la premiere, comme on pourra voir à la fin de ce Livre.

III. Lemme.

III. Lorsqu'un angle a deux baſes, & que les deux angles ſur une baſe ſont égaux aux deux angles ſur l'autre baſe chacun à chacun, cela peut arriver en deux manieres.

La premiere eſt quand l'angle que l'une des baſes fait ſur un coſté eſt égal à l'angle que l'autre baſe fait ſur le même côté. (J'appelle le meſme côté la meſme ligne droite tirée du ſommet, quoique conſiderée ſelon les diverſes baſes elle tienne lieu de deux coſtez.)

Or il eſt viſible que cela ne peut eſtre que quand les baſes de cet angle ſont paralleles, comme l'on a veu X. 13.

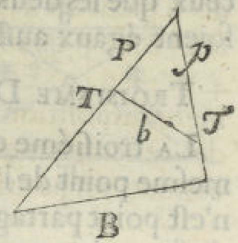
La ſeconde maniere eſt quand l'angle qu'une baſe fait ſur un côté eſt égal à l'angle que l'autre baſe fait ſur l'autre coſté. Et alors on peut appeller ces baſes *antiparalleles*, pour marquer leur effet oppoſé à celuy des baſes paralleles. Ce ſont ces ſortes de baſes qui feront preſque toutes les preuves dans tout ce Livre.

IV. Lemme.

IV. Les baſes paralleles d'un méme angle ne peuvent eſtre diſpoſées que d'une ſeule maniere, qui eſt d'eſtre toutes ſeparées l'une de l'autre. Car c'eſt le propre des paralleles de ne ſe pouvoir jamais joindre. Mais les antiparalleles peuvent eſtre diſpoſées en trois manieres differentes.

Premiere Disposition des Antiparalleles.

V. La premiere reſſemble à celle des paralleles, les deux antiparalleles étant auſſi toutes ſeparées, & alors il eſt viſible que les côtez de cet angle ſelon la derniere baſe que nous appellerons B, comprennent les coſtez de ce meſme angle ſelon la premiere baſe que nous appellerons b : & ainſi les unes ſont *toutes*, & les autres leurs premieres parties, c'eſt à dire leur partie la plus proche du ſommet (& remarquez que dans tout ce Livre ſe ſera toûjours celle-là que nous entendrons par le nom de partie. ou de 1e partie.)



C'eſt pourquoy comme dans l'autre Livre nous appellerons toûjours les deux toutes T. *T*.
& leurs parties p. *p*.
de ſorte que p de caractere romain ſera toûjours la partie de T du meſme caractere romain : Et *p* de caractere italien ſera toûjours la partie de *T* de caractere italien.

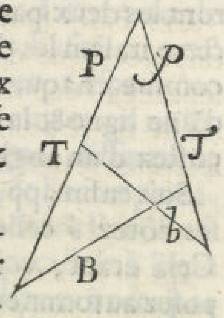
Or afin que les baſes B & b ſoient antiparalleles, il eſt clair qu'il faut ;

Que l'angle que T premiere toute fait ſur B, ſoit égal à l'angle que *p* partie de la ſeconde toute fait ſur b. Et que l'angle que *T* ſeconde toute fait ſur B ſoit égal à l'angle que p partie de la premiere toute fait ſur b.

Seconde Disposition des Antiparalleles.

La ſeconde eſt quand elles ſe croiſent. Et alors ce ne ſont pas les deux toutes qui ſont les coſtez au regard d'une baſe, & les deux parties qui le ſont au regard de l'autre, comme dans la premiere diſpoſition. V I.

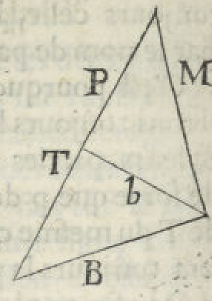
Mais les coſtez au regard de chaque baſe ſont une toute & la partie de l'autre toute. Et ainſi pour diſtinguer les deux baſes nous appellerons B celle qui ſe trouve terminée par l'extremité de T, & l'autre b.



Or afin que les baſes ſoient antiparalleles dans cette diſpoſition, il eſt clair qu'il faut que les angles que les deux toutes font, l'une ſur B & l'autre ſur b, ſoient égaux ; Et que ceux que les deux parties font l'une ſur B & l'autre ſur b ſoient égaux auſſi.

Troisieme Disposition des Antiparalleles.

VII. La troiſiéme eſt quand les deux baſes ſe joignent en un meſme point de l'un des côtez. Et alors comme ce côté n'eſt point partagé, & que ſeul il tient lieu d'une toute & de ſa partie, nous l'appellerons *M*, appellant à l'ordinaire la derniere baſe *B*, la premiere *b*, le côté partagé T, & ſa partie p.



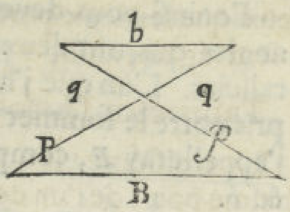
Or afin que les baſes *B* & *b* ſoient antiparallaleles, il faut que l'angle que T fait ſur *B* ſoit égal à l'angle que *M* fait ſur *b*, & que l'angle que *M* fait ſur *B* (qui comprend celuy qu'elle fait ſur *b*) ſoit égal à l'angle que p fait ſur *b*.

V. Lemme.

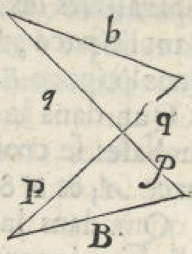
VIII. Lorsque deux lignes ſe coupant font 4 angles qui ſont deux à deux oppoſez au ſommet, & par conſequent égaux, on peut donner des baſes à deux de ces angles opoſez au ſommet qui ſoient telles que ces angles ſoient ſemblables, c'eſt à dire, que les deux angles ſur la baſe de l'un ſoient égaux aux deux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun. Mais cela peut arriver en deux manieres, que pour mieux faire entendre, p & q de caractere romain marqueront les deux parties d'une meſme ligne, & *p* & *q* de caractere italien les deux parties de l'autre ligne. Et de plus, comme chaque angle doit avoir pour ſes coſtez la partie d'une ligne & la partie d'une autre ligne, p & *p* ſeront les coſtez d'un angle, & q & *q* les côtez de l'autre.

Soit enfin appelée *B* la baſe de l'angle qui a p & *p* pour ſes côtez *b* celle de l'angle qui a *q* & q pour ſes côtez. Cela étant, voicy les deux manieres dont ces angles oppoſez au ſommet peuvent eſtre ſemblables.

La 1^{re} eſt quand ce ſont les angles alternes qui ſont égaux ſur les deux baſes. C'eſt à dire quand ce ſont les deux parties d'une même ligne, comme p & q, qui font des angles égaux p ſur *B*, & q ſur *b*, & ainſi des deux autres, & alors il eſt clair que ces deux baſes doivent eſtre paralleles.



La 2^{e} eſt quand ce ſont les angles de proche en proche qui ſont égaux ſur les deux baſes: de ſorte que ce ſont p & *q*, parties l'une d'une ligne & l'autre de l'autre, qui font les angles égaux p ſur *B*, & *q* ſur *b*, & *p* & q qui font auſſi les angles égaux *p* ſur *B*, & q ſur *b*. IX.



Ce ſont encore ces baſes que nous appellerons *antiparalleles*, pour marquer leur effet contraire à celuy des paralleles.

VI. Lemme.

Comme lorſqu'un angle a deux baſes paralleles, on peut & on doit conſiderer ces côtez ſelon une baſe dans un eſpace parallele, & ſes autres coſtez ſelon l'autre baſe dans un autre eſpace parallele. Il en eſt de même quand les baſes ſont antiparalleles, avec cette difference. X.

Que quand les baſes ſont paralleles, une ſeule ligne tirée par le ſommet fait trois eſpaces paralleles. Le 1^{er} compris entre le ſommet & la derniere baſe. Le 2^{e} entre le ſommet & la 1^{e} baſe. Le 3^{e} entre les deux baſes.

Mais quand elles ſont antiparalleles, ce 3^{e} eſpace ne peut pas eſtre parallele. Et pour les deux autres on ne les peut concevoir qu'en s'imaginant deux lignes differentes tirées par le ſommet, l'une parallele à *B*, & l'autre parallele à *b*. Car *B* & *b* n'eſtant pas paralleles entr'elles, il eſt viſible qu'une ſeule ligne ne peut pas eſtre parallele à l'une & à l'autre; mais il ſuffit de s'imaginer ces lignes tirées par le ſommet, ſans qu'il ſoit neceſſaire de les décrire.

Et ainsi nous devons toûjours nous imaginer dans ces angles qui ont deux bases antiparalleles deux espaces paralleles. L'un que j'appelleray *A*, compris entre le sommet & *B*. Et l'autre que j'appelleray *E*, compris entre le sommet & *b*.

XI. Et de plus il faut remarquer,

Que dans la 1[e] disposition des bases antiparalleles les deux toutes T & *T* sont dans l'espace *A*, & les deux parties p & *p* dans l'espace *E*.

XII. Que dans la seconde, qui est quand les bases se croisent, *T* & *p* sont dans l'espace *A*; & *T* & p dans l'espace *E*.

XIII. Que dans la troisiéme, qui est quand elles se joignent en un seul point d'un côté, *M* se trouve dans l'un & l'autre espace. Car l'espace *A* comprend T & *M*: Et l'espace *E*. *M* & p.

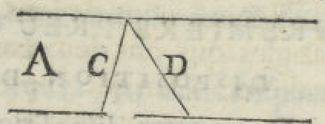
VII. Lemme.

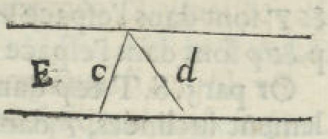
XIV. Il en est de mesme quand les angles opposez au sommet ont leurs bases antiparalleles.

Car il se faut imaginer deux lignes tirées par le sommet commun, dont l'une soit parallele à *B* & l'autre *à b*; & ainsi l'on aura deux espaces paralleles, l'un compris entre le sommet & *B* (dans lequel sont p & *p*) que nous appellerons *A*. Et l'autre compris entre ce mesme sommet & *b* (dans lequel sont q & *q*) que nous appellerons *E*.

VIII. Lemme.

XV. Tout ce qu'on aura à prouver dans ce Livre le sera par le premier Theoreme du Livre precedent, que je repeteray encore icy, afin qu'on l'ait plus present dans l'esprit.





Si deux lignes (comme *C* & *D*) ſont dans un meſme eſpace parallele, comme eſt l'eſpace *A*.

Et que deux autres lignes comme (*c* & *d*) ſoient dans un autre eſpace parallele, comme eſt l'eſpace *E*.

Si C & *c* ſont également inclinées; *C* dans *A*, & *c* dans *E*, & que *D* & *d*, ſoient auſſi également inclinées *D* dans *A* & *d* dans *E*., les deux également inclinées entr'elles ſont proportionelles aux deux qui le ſont auſſi entr'elles.

C. c :: D. d. & alternando *C. D :: c. d.*

IX. Lemme.

Pour ne ſe point broüiller en diſpoſant les termes, il eſt bon de s'abſtraindre à donner toûjours pour premier & deuxiéme termes de la proportion les également inclinées dans les deux differens eſpaces paralleles, & de meſme au regard du troiſiéme & du quatriéme. Et pour premier & troiſiéme termes, celles qui ſont dans le meſme eſpace parallele. Et de meſme au regard du deuxiéme & du quatriéme. Sauf à les diſpoſer aprés autrement, *Alternando*. XVII.

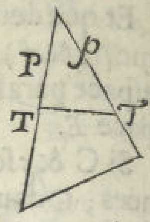
I. PROPOSITION FONDAMENTALE. DES RECIPROQUES.

Lorsqu'un meſme angle à deux baſes antiparalleles, une toute & ſa partie ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie. C'eſt à dire que XVII.

T. *p* :: *T*. p. ou T. *T* :: *p*. p.

PREMIERE PREUVE DANS LA PREMIERE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

XVIII. DANS cette diſpoſition les deux toutes T & *T* ſont dans l'eſpace *A*, & les deux parties p & *p* ſont dans l'eſpace *E*. (par 11. S.)



Or par 5. S. T & *p* dans *E*. & *T*. & p également inclinées, *T* dans *A*, & p dans *E*.

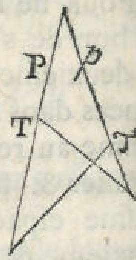
Donc (par 15. S.) T. *p* : : *T*. p.

Or T & ſa partie p ſont les extremes de la proportion, dont *T* & *p* ſa partie ſont les moyens.

Donc une toute & ſa partie ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie.

SECONDE PREUVE DANS LA SECONDE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

XIX. DANS cette 2e diſpoſition T & *p* (partie de l'autre toute) ſont dans l'eſpace *A*, & *T* & p dans l'eſpace *E*. (par 12. S.)



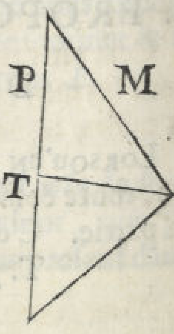
Or (par 5. S.) T & *T* ſon également inclinées, T dans *A*, & *T* dans *E*. Et de même p & *p* également inclinées, p dans *A* & *p* dans *E*.

Donc (par 15. S.) T. *T* : : *p*. p.

Je reſerve la 3e diſpoſition pour un Corollaire à part.

COROLLAIRE.

XX. QUAND un angle a deux baſes antiparalleles dans la 3e diſpoſition, qui eſt quand elles ſe joignent à un ſeul point d'un coſté, ce coſté eſt moyenne proportionelle entre l'autre coſté entier & ſa partie : C'eſt à dire que



T. *M* : : *M*. *p*.

Car (par 13. S.) dans cette diſpoſition *M* eſt dans l'un & l'autre eſpace, parce que T & *M* ſont dans l'eſpace *A*, & *M* & p dans l'eſpace *E*.

Or

Or (par 5. S.) T & *M* sont également inclinées, T dans l'espace *A*, & *M* dans l'espace *E*.

Et *M* & p sont également inclinées, *M* dans l'espace *A* & p dans l'espace *E*.

Donc (par 15. S.) *T.M* :: *M*.p.

II. PROPOSITION FONDAMENTALE DES RECIPROQUES.

QUAND deux lignes se coupant font deux angles opposez au sommet qui ont des bases *antiparalleles*, les parties de l'une de ces lignes qui se coupent en ce sommet sont reciproques aux parties de l'autre. (*Voyez la figure du n. 9*) XXI.

Car (par 14. S.) p & *p* sont dans l'espace *A*, & q & *q* sont dans l'espace *E*.

Or (par 9. S.) p & *q* sont également inclinées, p dans *A*, & *q* dans *E*.

Et *p* & q également inclinées, *p* dans *A* & q dans *E*.

Donc (par 15. S.)

p. *q* :: *p*. q.

Or p & q sont les parties de la même ligne: & *p* & *q* sont les parties de l'autre ligne.

Donc les parties d'une ligne sont reciproques aux parties de l'autre.

COROLLAIRE.

SI une de ces lignes qui en se coupant font des angles opposez au sommet, qui ont des bases *antiparalleles*, est divisée par la moitie, une seule de ces moitiez est moyenne proportionelle entre les parties de l'autre ligne. XXII.

Cela est clair, puisque c'est la même chose de donner pour les moyens de cette proportion les deux moitiez de la même ligne, ou une seule moitié prise deux fois.

PLAN GENERAL DE CE QUE L'ON PRETEND MONTRER DANS LA SUITE DE CE LIVRE.

Nous avons déja dit que les extremes d'une proportion comparez aux moyens s'appellent reciproques: & qu'ainsi il y en a dans toute proportion. XXIII

Mais ce que l'on pretend principalement faire dans ce livre est de monstrer comment deux lignes droites qui se rapportent a une mesme, ou parce qu'elles en sont les deux parties, ou parce que l'une est la toute, & l'autre une partie de cette toute, sont reciproques à deux autres lignes, qui se rapportent de la mesme sorte à une mesme ligne : ou quelquefois mesme à une seule qui étant repetée deux fois fera ou les deux extremes ou les deux moyens de la proportion.

Il faut pour cela que les deux lignes à chacune desquelles, deux se rapportent, & que par cette raison ont peut appeller les principales ayent un point commun, ce qui peut estre en deux manieres. Ou paree qu'elles se coupent en un mesme point sans passer plus outre, & alors ce point commun s'appellera terminant.

Quand le point commun est de section, chaque ligne étant coupée en deux, ce sont les deux parties d'une mesme ligne qui doivent estre reciproques aux deux parties de l'autre. Et alors ce point commun aux deux principales l'est aussi aux 4. lignes: quoy que ce ne soit qu'au regard des principales qu'il soit point de section : car les parties ne s'y coupent pas, mais y aboutissent:

Mais quand le point est terminant au regard des principales (car cela seul ne donneroit que deux lignes & qu'il en faut 4. ou au moins 3.) il est necessaire que ces lignes principales qui sont terminées par ce point commun, soient encore toutes deux coupées en quelque autre endroit (ou au moins l'une) afin que cela puisse faire 4. lignes (ou au moins 3.) Et alors ce sont les deux toutes, & la partie de chacune vers le point commun qui font les 4. lignes : & il faut que ce soit chaque toute & sa partie vers le point commun qui soient reciproques à l'autre toute & à sa premiere partie.

Quand le point est de section les deux principales se coupant font 4. angles dans ce point de section ; mais il suffit d'en considerer deux opposez au sommet. Et il faut alors que ces deux Angles qui sont égaux ayent leurs bases antiparalleles, selon ce qui vient d'estre dit n. 9.

Mais quand le point est terminant, c'est le mesme angle *qui doit avoir deux bases antiparalleles, & l'une des trois manieres qui ont esté representées* S. 18. 19. 20.

Il n'est donc question que de chercher les voyes generales pour trouver ses bases antiparalleles.

Or voity ce qui m'est venu en pensée sur cela.

I'ay reconnu qu'il n'y a point de voye generale pour couper tout d'un coup les costez d'un angle, ou les costez de deux angles opposez au sommet par des bases antiparalleles qu'en y employant la circonference d'un cercle : c'est pourquoy on ne peut trouver sur cela la moyenne proportionelle entre deux lignes données.

I'ay inseré de là qu'il falloit que le point commun dont nous venons de parler, soit qu'il soit de section, *ou* terminant, *ait rapport à la circonference d'un cercle. C'est à dire qu'il faut qu'il soit ou*

1. *Dans le Cercle.*
2. *Hors le Cercle.*
3. *Dans la circonference du Cercle.*

Quand le point commun est au dedans du cercle, c'est toûjours un point de section, & ce sont deux angles opposez au sommet qui ont leurs bases antiparalleles. Car il faut que les 4. lignes dont deux sont reciproques aux deux autres, soient les deux parties de chacune des principales qui se coupent en un point quelconque au dedans du cercle, & qui se termineut de part & d'autre à 4. points differens de la circonference.

Quand le point commun est hors le cercle, c'est toûjours un point terminant. Car ce sont deux toutes qui partant de ce point qui est hors le cercle coupent chacune la circonference du cercle en un point de sa convexité, & se terminent à un autre point de sa concavité, & alors ce sont chaque toute & sa partie hors le cercle qui sont reciproques à l'autre toute & à sa partie qui est aussi hors le cercle. Mais il peut arriver que l'une de ces lignes ne faisant que toucher le cercle sans passer plus outre, le point auquel elle aboutira tenant lieu de cenvexité & de concavité, elle sera toute seule reciproque à l'autre toute & à sa partie, c'est à dire qu'elle en sera moyenne proportionelle.

Mais quand le point commun est dans la circonference mesme du cercle, on a besoin pour avoir des reciproques d'une ligne droite indefinie outre la circulaire, qui coupe perpendiculairement celle qui peut estre menée indefiniment du point commun en passant par le centre. Et alors cette ligne indefinie *ou coupe le cercle ou le touche, ou est au dessous, ou est au dessus. J'appelle au dessous celle qui est telle, que le centre est entre cette ligne & le point commun. J'appelle au dessus celle qui est à l'opposite.*

Dans les trois premiers cas le point commun est toûjours un point terminant, *& chacune des deux lignes qui en partent, ou coupe le cercle & est terminée par l'indefinie, ou coupe l'indefinie & est terminée par le cercle. Et alors chaque toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie. Mais il y en peut avoir une qui se terminera à un point commun à la circonference & à l'indefinie, & alors elle sera moyenne proportionelle entre l'autre toute & sa partie.*

Mais le 4. cas, c'est à dire quand l'indefinie est au dessus du point commun, ce point commun ne peut estre qu'un point de section. *Car toutes les fois que des lignes se couperont dans ce point & se termineront d'une part à la circonference & de l'autre à l'*indefinie, *les parties de l'une sont reciproques à celles de l'autre.*

Il faut relire tout le Livre IX. Car c'est sur ce qui y est dit que sont fondées les demonstrations de celuy-cy.

DEUX AVIS DE LOGIQUE.

I.

XXIV. *Quand on a à prouver qu'un angle ayant deux bases, les angles sur une sont égaux aux angles sur l'autre chacun à chacun, on est assuré que cela est, quand on a prouvé que l'un des angles sur une base est égal à l'un des angles sur l'autre, parce qu'il s'ensuit de là necessairement que l'autre est égal aussi à l'autre.*

Cette preuve est convaincante, & on s'en doit passer quand on ne peut mieux. Mais il faut avoüer qu'elle n'est pas si *bonne & ne fait pas si bien entrer dans la nature des choses, que celle qui montre positivement que l'un & l'autre angle d'une base est égal à l'un & l'autre angle de l'autre. Et c'est pourquoy je ne me contenteray point de la premiere sorte de preuve, & me serviray toûjours de cette derniere.*

2.

Quand on a à prouver de plusieurs binaires de lignes, qu'ils sont reciproques les uns aux autres, on en est asseuré quand on peut montrer qu'ils sont tous reciproques à un même binaire, ou qu'ils ont tous la même moyenne proportionelle.

Mais quoique cela soit convaincant, l'esprit ne reçoit pas la même clarté & ne demeure pas si satisfait, que si on montroit immediatement de chaque binaire qu'il est reciproque à chaque autre.

Et ainsi, quoy qu'il me fust facile d'employer la premiere voye, je me suis resolu de n'employer que cette derniere comme plus parfaite & plus lumineuse pour parler ainsi, & peut estre qu'on trouvera que ces deux exemples sont remarquables pour faire voir la difference qu'il y a entre convaincre l'esprit en le mettant hors d'estat de pouvoir douter qu'une chose soit; & le satisfaire pleinement en luy donnant toute la clarté qu'il peut raisonnablement desirer.

Réprenons maintenant la division proposée, qui est que le point commun aux lignes reciproques par la section du cercle, est necessairement

1. *Ou dans le cercle.*
2. *Ou hors le cercle.*
3. *Ou dans la circonference du cercle.*

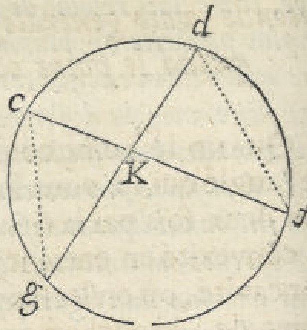
SECTION II.

Premiere voye generale pour trouver des Reciproques quand le point cammun eſt au dedans du cercle.

XXVI. Cette voie eſt pour trouver que les parties d'une ligne ſont reciproques aux parties d'une autre ligne, ou à une ligne quand elle eſt moyenne proportionelle. Et ainſi elle eſt toute appuyée ſur la 2^e^ Propoſition fondamentale & ſon Corollaire (21. & 22. S.) qui eſt des angles oppoſez au ſommet qui ont leurs baſes antiparalleles.

VII. Theoreme.

XXVII. Si deux cordes ſe coupent dans le cercle, les parties de l'une ſont reciproques aux parties de l'autre.



Soient les cordes cf & dg qui ſe coupent en k. Soient tirées les baſes à deux angles oppoſez cg. df. Je dis qu'elles ſont antiparalleles.

Car (par 9. 18.) les angles vers g & vers f ſont égaux, parce qu'ils ſont appuyez ſur le même arc cd. Et par la même raiſon les angles vers c & vers d ſont égaux auſſi, étant appuyez ſur le même arc gf.

Donc les baſes cg & df ſont antiparalleles.

Donc par la 2^e^ Propoſition fondamentale (21. S.)

$$kf.\ kg :: kd.\ kc.$$

$$p.\ q :: p.\ q.$$

VIII. Theoreme.

Corollaire du Septieme.

XXVIII. Si une des lignes eſt coupée par la moitié, une de ces moitiez eſt moyenne proportionelle entre les deux parties de l'autre.

C'eſt le Corollaire même de la 2ᵉ Propoſition fondamentale.

COROLLAIRE.

SI d'un point quelconque d'un diametre on éleve une perpendiculaire juſques à la circonference, cette perpendiculaire ſera moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre. XXXIX.

Car il eſt clair que cette perpendiculaire eſt la moitié de la corde qui couperoit le diametre perpendiculairement par ce point. Donc par le Theoreme precedent elle doit eſtre moyenne proportionelle entre les parties du diametre.

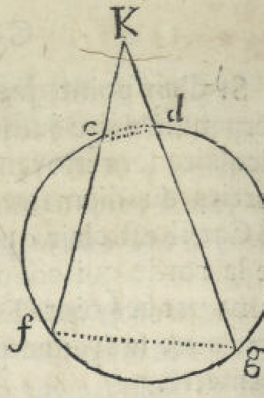
SECTION III.

Seconde voie generale pour trouver des Reciproques quand le point commun eſt hors le Cercle.

QUAND le point commun eſt hors le cercle: les côtez de l'angle qui l'a pour ſommet peuvent eſtre coupez chacun deux fois par la circonference du cercle; une fois par la convexité en entrant dans le cercle, & une fois par ſa concavité, où on les ſuppoſe terminées; ſi ce n'eſt que le point de l'attouchement tenant lieu tout ſeul de la convexité & de la concavité, un des coſtez peut n'eſtre terminé qu'à ce point. Et alors il ſera tangente du cercle, & les deux baſes antiparalleles n'auront que trois points differens. C'eſt ce qu'on verra dans les deux Theoremes ſuivans. XXX.

III. THEOREME.

XXXI. LORSQUE d'un point hors le cercle on tire des lignes qui coupent le cercle en sa convexité, & sont terminées en sa concavité, chaque toute, & sa partie hors le cercle, sont reciproques à chaque autre toute & à sa partie hors le cercle.



Soient tirées *kf*, qui coupe la circonference en *c*; & *k g* qui la coupe en *d*. Je dis que les bases *fg* & *cd* sont antiparalleles.

Car (par IX. 16.) l'angle *kcd* a pour mesure la moitié des deux arcs *c d*, & *c f*. Or la moitié de ces deux arcs *c d* & *c f* est aussi la mesure de l'angle *k g f*. (par IX. 18.) Donc les angles *k c d* & *k g f* sont égaux.

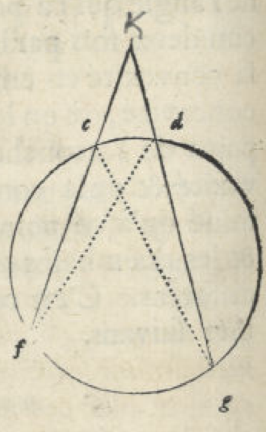
On prouvera de la mesme sorte l'égalité des angles *k d c* & *k f g*.

Donc les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles.

Donc *k f*. *k d* :: *k g*. *kc*.

T. *p* :: *T*. p.

XXXII. ON peut aussi prouver ce Theoreme en croisant les bases, en montrant que les bases *fd* & *g c* sont antiparalleles.



Cat les angles vers *f* & vers *g* sont égaux estant appuyez sur le même arc *c d*.

Et pour les angles *k c g* & *k d f*, ils sont égaux, parce que si on les examine (par IX. 16.) on trouvera qu'ils ont chacune pour mesure la moitié des trois arcs *f c*, *c d*, *d g*.

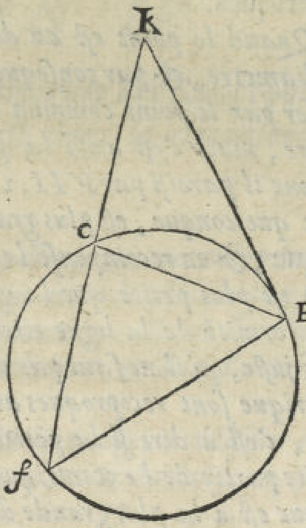
Donc les bases *f d* & *g c* sont antiparalleles.

Donc *k f*. *k g* :: *k d*. *k c*.

T. *T* :: *p*. p.

IV. THEOREME.

COROLLAIRE DU CINQUIEME.



SI l'une de ces lignes tirées d'un point hors le cercle est une tangente, cette tangente est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie hors le cercle. XXXIII.

Soit tirée *kf* qui coupe le cercle en *c* & la tangente *k E*; je dis que les bases *f E* & *c E* sont antiparalleles. Car (par IX. 18.) l'angle *k f E*, a pour mesure la moitié de l'arc *c E*, qui est aussi la mesure de l'angle *k E c* (par IX. 13.)

Et l'angle *k E f*, (par IX. 15.) a pour mesure la moitié des deux arcs *E c* & *c f*, qui est aussi la mesure de l'angle *k c E*, par IX. 16.)

Donc les bases *f E* & *E c* sont antiparalleles.

Donc par 29. S.

k f. *k E*. : : *k E*. *k c*.

T. *m* : : *m*. p.

AVERTISSEMENT.

Il n'y a rien jusqu'icy qui ne soit dans toutes les Geometries : si ce n'est qu'il est prouvé d'une maniere nouvelle. XXXIV.

Mais on le pourroit encore faire comprendre d'une maniere plus naturelle & plus simple sans considerer aucuns angles, mais faisant seulement attention à la nature du cercle : ce qui fera voir aussi pourquoy on a besoin d'un cercle pour couper des lignes Reciproquement.

Soit que le point commun soit au dedans du cercle ou au dehors, on peut considerer entre toutes les lignes qui se coupent dans ce point ou qui partent de ce point, celle qui passe par le *centre que nous appellerons la* centrique, *& les autres* excentriques.

Quand le point est au dedans du cercle, la centrique *est un diametre, & par consequent la plus grande ligne qui puisse passer par le point commun que nous supposons n'estre pas le centre, mais c'est aussi la plus inégalement partagée. Car comme il paroist par VII. 25. la plus petite d'une* excentrique *quelconque, est plus grande que la plus petite de la* centrique, *& en recompense la plus grande partie de* l'excentrique *est plus petite que la grande partie de la* centrique. *Et l'uniformité de la ligne circulaire fait que cette compensation est si juste, qu'il ne faut pas s'estonner si les deux parties de la centrique sont reciproques aux deux parties de toute excentrique, c'est à dire si la petite partie de la centrique est à la plus petite partie de l'excentrique, comme la plus grande de l'excentrique est à la plus grande de la centrique. D'où il s'ensuit aussi que les deux parties d'une excentrique quelconque doivent estre reciproques aux deux parties de toute autre excentrique.*

Il en est de mesme quand le point est hors le cercle. Car la centrique est aussi la plus longue de toutes, & sa partie qui est hors le cercle est au contraire plus courte, que la partie de toute autre qui est aussi hors le cercle. Ce qui faisant une compensation juste à cause de l'uniformité du cercle, on juge aisement que la centrique & sa partie hors le cercle doivent estre reciproques à toute excentrique & sa partie hors le cercle ; & qu'il est de mesme des excentriques comparées les unes aux autres, celles qui approchent le plus de la centrique estant toûjours les plus longues, & ayant toûjours aussi leurs parties de dehors plus courtes.

SECTION IV.

Troisiéme voie generale pour trouver des Reciproques, quand le point commun est dans la circonference du Cercle.

Ie ne croy pas que ce que l'on va dire se trouve nulle part. XXXV.

Nous avons déja remarqué que cette derniere voie generale se pouvoit diviser en deux manieres : Dans l'une desquelles le point commun étoit terminant, *& dans l'autre* de section.

Qu'il estoit terminant *quand la ligne droite indefinie dont nous allons parler ou coupoit le cercle, ou le touchoit, ou estoit au dessus du cercle.*

Et qu'il estoit de section, c'est à dire que les deux lignes principales s'y coupoient, quand cette ligne indefinie étoit au dessus du cercle. Il faut donc traiter separement ces deux manieres.

PREMIERE MANIERE DE LA III. VOIE GENERALE.

Quand l'indefinie coupe, ou touche, ou est au dessous du Cercle.

Vne seule proposition comprendra la maniere de trouver une infinité de reciproques. Et il est peut estre difficile de s'imaginer rien de plus general sur la proportion des lignes par la Geometrie ordinaire.

PROPOSITION GENERALE.

Si d'un point dans la circonference on tire une ligne indefiniment par le centre, & qu'on en tire une autre indefinie que j'appelleray *y*, qui coupe perpendiculairement celle qui passe par le centre, en quelque endroit qu'elle la coupe, soit en coupant aussi le cercle, soit en le touchant, soit tout à fait hors le cercle & au dessous: toutes les lignes tirées du point dans la circonference qui seront ou coupées par *y*, & terminées par la circonference: ou coupées par la circonference & terminées par *y*, seront telles, que chaque toute & sa partie vers le point commun seront reciproques à chaque autre toute & à sa partie: & chaque toute & sa partie auront pour moyenne proportionelle celle qui sera terminée à un point commun à *y*, & à la circonference.

XXXVII. Cette proposition est si vaste & comprend tant de cas qu'on n'en sçauroit bien voir la verité, qu'en la considerant dans ces cas particuliers qui sont trois principaux.

Le 1er. Quand la ligne *y* coupe le cercle.

Le 2e. Quand elle le touche.

Le 3e. Quand elle est tout à fait hors le cercle, & au dessous.

C'est ce que nous traiterons par divers Theoremes.

Premier Cas.

XXXVIII Le 1er Cas est quand *y* coupe le cercle. Et alors il n'est point necessaire de dire que cette ligne doit estre perpendiculaire à celle qui estant tirée du point *K* passe par le centre: car il suffit de dire (ce qui est la mesme chose) qu'elle doit couper le cercle en deux points, que j'appelleray E & *E*, qui soient également distans de *K*. Cela étant vray, voicy le 1er Theoreme.

V. Theoreme.

XXXIX. Si la ligne *y* coupe le cercle en deux points également distans de *K*, toutes les lignes tirées du point *K* qui seront ou coupées par *y*, & terminées par la circonference, ou coupées par la circonference & terminées par *y*, seront telles que chaque toute & sa partie vers *K* seront reciproques à chaque autre toute & à sa partie vers *K*.

On peut faire sur cela trois comparaisons.

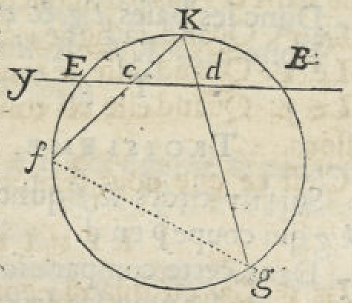
La 1^re^. De deux lignes qui sont toutes deux coupées par *y* & terminées par la circonference.

La 2^e^. De deux lignes qui sont toutes deux coupées par la circonference, & terminées par *y*.

La 3^e^. De deux lignes, dont l'une est coupée par *y*, & terminée par la circonference, & l'autre coupée par la circonference, & terminée par *y*.

PREMIERE COMPARAISON.

SOIENT tirées *K f*, qui coupe *y* en *c*; & *K g* qui le coupe en *d*: je dis que les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles. Donc tout le reste s'ensuit (par la 1^re^ Proposition fondamentale, S. 17. XL.



Car (par 1x. 42.) l'angle *K c E*, a pour mesure la moitié de l'arc *K E* plus la moitié de l'arc *E f*, & l'arc *K E* estant égal à l'arc *K E*, cette mesure est égale à la moitié des deux arcs *K* E & E *f*. Or la moitié des deux arcs *K* E & E *f* est la mesure de l'angle inscript *K g f*, parce que l'arc *K* E *f*, sur lequel il est appuyé, comprend ces deux-là.

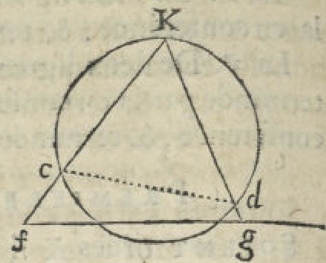
Donc l'angle *K c E* (ou *K c d*) est égal à l'angle *K g f*. On prouvera la même chose des angles *K d c* & *k f g*. Donc ces deux bases sont antiparalleles.

Donc (par la 1^re^ Proposition fond. S. 17.) la toute d'une part & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie. Ce qu'il falloit demonstrer.

K *f*. K *d*. :: K *g*. K *c*.
T. *p*. :: *T*. p.

Seconde Comparaison.

XLI. Soient tirées *kf* qui coupe la circonference en *c*, & *kg* qui la coupe en *d*; je dis que les bases *fg* & *c d* sont antiparalleles.



Car (par IX. 46.) l'angle *kfg* a pour mesure la moitié de l'arc *k c*, qui est aussi la mesure de l'angle inscript *k d c*. Donc les angles *k f g* & *k d c* sont égaux.

On prouvera de la même sorte que les angles *k g f* & *k c d* sont égaux.

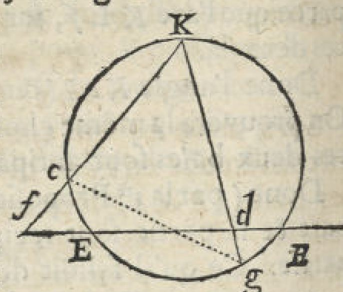
Donc les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles.

Donc K*f*. K *d* :: K *g*. K *c*.
T. *p*. :: *T*. p.

Troisieme Comparaison.

XLII. Soient tirées *k f* qui coupe la circonference en *c*, & *k g* qui coupe *y* en d.

Dans cette comparaison les bases se croisent. Car il faut prendre pour les deux bases *f d* & g *c*.



Or pour prouver qu'elles sont antiparalleles, il faut montrer que les angles *k f d*, ou *k f E*. & *k g c*, sont égaux. Ce qui est facile, puisqu'il est clair (par ce qui vient d'estre dit (42. S.) que l'un & l'autre a pour mesure la moitié de l'arc *k c*, & pour les deux autres *k d E* & *k c g*, cela se prouve aussi facilement (par ce qui a esté dit 40 S.) de l'égalité entre les angles *k d f* (ou *k d E*) & *k c g*.

Donc les bases *f d* & *g c* sont antiparalleles.

Donc K*f*. K*g* :: K*d*. K*c*.
T. *T* :: *p*. p.

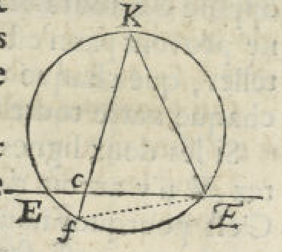
VI. THEOREME.

COROLLAIRE CINQUIE'ME.

LA ligne tirée de *k* au point commun à la circonference & à *y* (c'est à dire *k* E ou *k E*) est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie, soit qu'elle soit coupée par *y* & terminée par la circonference, soit qu'elle soit coupée par la circonference & terminée par *y*. XLIII.

PREMIERE COMPARAISON.

Soit tirée *k f* qui coupe *y* en *c*, & *k E*, il ne faut que prouver que les bases *f*. E & *c*. *E* sont antiparalleles. Ce qui est facile.



Car les angles inscripts *k f E* & *k* E *c* (ou *k E* E) sont égaux, parce que (par IX. 17.) l'un est appuyé sur l'arc *k E*, & l'autre sur l'arc *k* E, qui sont égaux.

Et pour les angles *k c E*, & *k E f*, leur égalité se prouve de la même sorte que l'égalité des arcs *k f g* & *k d c*, dans le 1er Theoreme. 1re Comparaison.

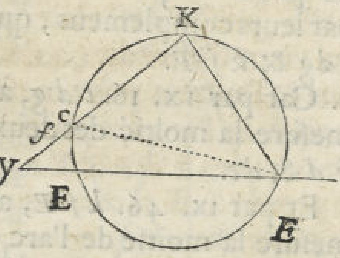
Donc ces bases sont antiparalleles & disposées en la 3e maniere expliquée dans le 4e Lemme.

Donc *K f*. KE :: K *E*. K C.

T. *m* :: *m*. p.

SECONDE COMPARAISON.

SOIT tirée *k f* qui coupe la circonference en *c*; je dis que les bases *f E* & *c E* sont antiparalleles. Car les angles *k f E* & *k E c* ont pour mesure la moitié de l'arc *k c*, selon ce qui a esté dit, 1er Theoreme, 2e Comparaison, & les angles inscripts *k E f*, ou *k E k* & *k c E* sont appuyez sur les angles *k* E, qui sont égaux. XLIV.



Donc K*f*. K *E* :: K *E*. K *c*.

T. *m* :: *m*. p.

SECOND CAS.

XLV. Le 2e Cas de la propoſition principale (S. 39.) eſt quand la ligne *y* touche le cercle en un point diametralement oppoſé à *k* : ce qui comprend auſſi deux Theoremes.

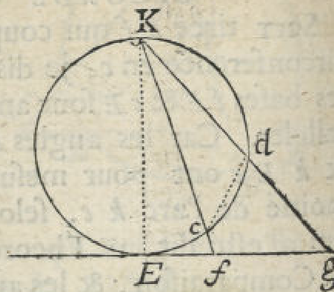
VII. THEOREME.

XLVI. QUAND *y* touche le cercle en un point diametralement oppoſé à *k*, toutes les lignes tirées de *k* ſur cette ligne (qui ne peuvent pas n'eſtre point coupées par le cercle) ſont telles, que chaque toute & ſa partie ſont reciproques à chaque autre toute & à ſa partie.

Si les deux lignes eſtoient tirées de deux differens côtez, il n'y auroit rien qui n'euſt déja eſté prouvé (42. S.) C'eſt pourquoy nous le propoſerons du même côté. Ce qui pourra auſſi ſervir aux cas ſemblables du 1er Theoreme.

Soient tirées du même côté *kf*, coupée par la circonference en *c*, & *kg* coupée par la circonference en *d*; il faut prouver que les baſes *fg* & *cd* ſont antiparalleles. Or il y a ſur chacune un angle aigu *kgf* (ou *kgE*) & *kcd*, & un obtus *kfg* & *kdc*.

Mais pour les aigus ils ſont égaux, parce qu'ils ont chacun pour meſure la moitié de l'arc *kd*. (par IX. 46.)



Et pour les obtus, il eſt aiſé de prouver qu'ils ſont égaux par leurs complemens, qui ſont *cdg* & *kfE*.

Car par IX. 16. *cdg*, a pour meſure la moitié des deux arcs *kd* & *dc*..

Et par IX. 46. *kfE*, a pour meſure la moitié de l'arc *kdc*, qui comprend ces deux là.

Donc ces angles aigus ſont égaux.

Donc les obtus *kdc* & *kfg*, dont ces aigus ſont les ſupplemens, ſont égaux auſſi.

Donc

Donc les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles.

Donc *k f. k d :: k g. k c.*

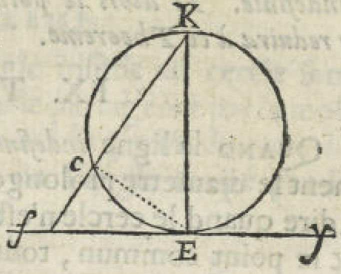
T. *p :: T. p.*

VIII. Theoreme.

Corollaire du Sixie'me.

Le diametre tiré du point *k* (& par consequent tout autre) est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie. XLVII.

Soit tirée *k f* qui soit coupée en *c*, les bases *f E* & *c E* sont antiparalleles.



Car les angles *k E f*, & *k c E*, son droits, & par consequent égaux.

Et les aigus *k f E*, & *k E c*, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc *k c* (par IX. 18. & 46.

Donc les bases *f E* & *c E* sont antiparalleles.

Donc *k f. k E :: k E. k c.*

T. *m :: m.* p.

Troisieme Cas.

Le 3[e] Cas est quand la ligne *y* est tout à fait hors le cercle & au dessous : mais comme il n'a aucune difficulté particuliere, nous ne nous y arresterons point. XLVIII.

Il faut seulement remarquer, qu'il n'y a point de moyenne proportionelle dans ce 3[e] Cas, parce qu'il n'y a aucun point qui soit commun à la ligne *y*, & à la circonference, la ligne *y* estant tout à fait hors le cercle.

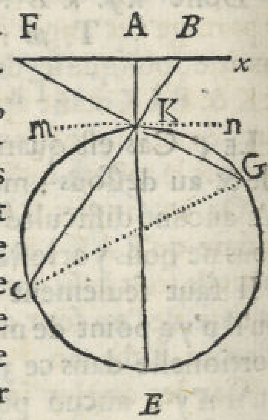
SECONDE MANIERE

De la troisiéme voie pour trouver des Reciproques. Quand l'indefinie est tout à fait hors le Cercle & au dessus.

Nous avons veu dans le plan, que l'indefinie est au dessus du point commun quand le cercle n'est pas entre ce point, & l'indefinie. Et alors le point commun sera de section & tout se reduira à ce Theoreme.

IX. THEOREME.

XLIX. QUAND la ligne *indefinie* qui coupe perpendiculairement le diametre prolongé, est au dessus du cercle, c'est à dire quand le cercle n'est point entre cette ligne *indefinie* & le point commun, toutes les lignes qui se couperont dans ce point, étant terminées d'une part par l'*indefinie*, & de l'autre par le cercle, les parties de l'une seront reciproques aux parties de l'autre.



SOIT *l'indefinie y*, le diametre prolongé A *E*, le point commun K, l'une des secantes *B* C, & l'autre F *G*, & une tangente au point K, qu'on appelle *m n*: si on tire la ligne *c G*, je dis que les angles A *B c* & *c G* K, sont égaux, car l'indefinie & la tengeante étant paralleles les angles alternes que chaque secante fait sur l'une & l'autre sont égaux : c'est à dire que l'angle A *B c* est égal à l'angle *m* K *c* : : : Or *m* K *c*, a pour sa mesure la moitié de l'arc K *c* (par IX. 13.) qui est aussi la mesure de l'angle *c G* K (par IX. 18.) Donc les angles A *B c* & *c G* K, sont égaux. Et il en est de mesme des deux angles A F *G*, & *G c* K. Donc les bases *B* F & *G c* des deux angles oppoſez en K ſont antiparalleles, par 9 S.

Donc les parties de la ligne *B C* ſont reciproques à celles de la ligne F *G* par 21. S.

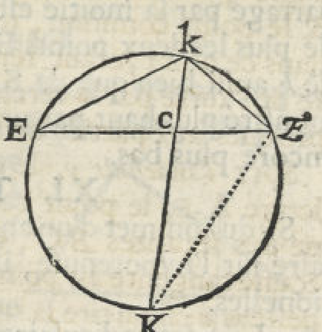
SECTION V.

Autres Theoremes, ou qui n'entrent pas dans l'analogie des precedens, ou qui ſe peuvent rapporter à pluſieurs de ces trois voies.

X. Theoreme.

Les deux côtez de tout angle inſcrit au cercle ſont reciproques à la ligne entiere, qui le partageant par la moitié ſe termine à la circonference & à la partie de cette ligne compriſe entre le ſommet de l'angle coupé par la moitié & ſa baſe. L.

Soit l'angle inſcrit E *k E*. Soit pris le point K dans le ſegment oppoſé également diſtant d'E & d'*E*. La ligne *k* K qui coupe la baſe en *c* partage cet angle inſcript par la moitié, puiſque les deux angles E *k* K & E *k* K étant appuyez ſur des arcs égaux ſont égaux (par IX 18.) qui eſt le même qu'E *k* K. *Ek* K.



Or les angles E *kc* (qui eſt le même qu'E *k* K) & *E k* K ne ſont pas ſeulement égaux, mais ils ſont auſſi ſemblables, c'eſt à dire que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun.

Car les angles inſcrits vers E & vers K ſont égaux (par IX. 18.) parce qu'ils ſont appuyez ſur le même arc *k E*.

2. (par IX. 42.) L'angle *kc* E, a pour meſure la moitié de l'arc *k* E ſur lequel il eſt appuyé, plus la moitié de l'arc oppoſé *E* K. Et l'arc E K étant égal à l'arc *E* K, cet-

te mesure est égale à la moitié des arcs *k* E & E K, qui est la mesure de l'angle inscrit *k E* K. (par IX. 18.)

Donc les angles *k c* E & *k E* K sont égaux.

Donc les angles E *k c* & *E k* K sont semblables.

Donc (par XI. 17.)

k E. *k* K :: *k c*. *k E*.

Ce qu'il falloit demonstrer, puisque *k* E & *k E* sont les deux côtez de l'angle partagé par la moitié, & que *k* K est la ligne entiere qui le partage, & *k c* sa partie.

Corollaire.

LI. Si l'angle inscrit étoit Isoscele, chaque costé seroit moyenne proportionelle entre la toute qui le diviseroit par la moitié & sa partie.

Car les côtez de l'angle étant égaux, les prendre tous deux, ou en prendre un deux fois, c'est la mesme chose.

Mais quand l'angle inscrit est Isoscele, la ligne qui le partage par la moitié est necessairement un diametre. Et de plus les deux points E *E* étant alors également distans de *k* aussi bien que de K, cela revient à ce qui a esté demonstré plus haut par une autre voie; & à ce qui le sera encore plus bas.

XI. Theoreme.

LII. Si du sommet d'un angle droit on tire une perpendiculaire sur l'hypotenuse, il y aura trois moyennes proportionelles.

1. La perpendiculaire entre les deux parties de l'hypotenuse.

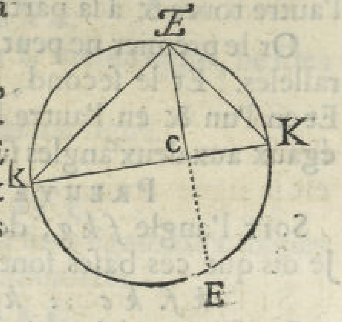
2. Le petit côté de l'angle droit entre la plus petite partie de l'hypotenuse qui y est jointe, & l'hypotenuse entiere.

3. Le plus grand côté de l'angle droit entre la plus grande partie de l'hypotenuse qui y est jointe, & l'hypotenuse entiere.

Tout cela se peut prouver par un grand nombre de voies. Mais celle-cy me semble la plus facile & la moins embarassée.

Soit l'angle droit *k E* K, & la perpendiculaire du ſommet à l'hypotenuſe *E c*.

Si on fait un cercle qui ait l'hypotenuſe *k* K pour diametre, le ſommet *E* ſe trouvera dans la circonference par IX. 31.



Et ſi on prolonge *E c* juſques à E, que je ſuppoſe eſtre le point oppoſé de la circonference, la corde *E* E ſera coupée en *c* par la moitié, & les points *E* E également diſtans tant de *k* que de K.

Donc 1. par le 29. S.

k c. E c :: *E c. c* K.

Donc 2. par le 6ᵉ Theoreme [43. S.]

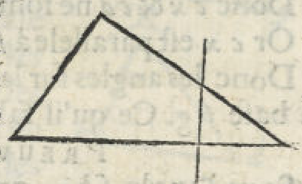
k c. k E :: *k E. c* K.

Donc 3. par le même 6ᵉ Theoreme.

K *c.* K *E* :: K *E. c k.*

XII. Theoreme.

Toute ligne qui coupant perpendiculairement l'hypotenuſe d'un angle droit en coupe auſſi un côté, l'hypotenuſe entiere & ſa partie vers le point qui luy eſt commun avec le côté coupé, ſont reciproques au côté coupé entier, & à ſa même partie vers le point commun. La preuve en eſt facile par le 6ᵉ Theoreme & par d'autres voies que je laiſſe à trouver. LIII.



Dernier Theoreme.

Un angle ayant deux baſes, ſi ſes coſtez ſelon une baſe ſont proportionnels à ſes coſtez ſelon l'autre baſe, les deux angles ſur une baſe ſont égaux aux deux angles ſur l'autre baſe chacun à chacun. C'eſt la converſe de la pluſpart des propoſitions de ce Livre, qui ſe prouve ainſi: LIV.

Les coſtez ſur une baſe ne ſçauroient eſtre proportionels aux coſtez ſur l'autre baſe qu'en deux manieres.

La 1[e] eſt, quand la toute d'une part & ſa partie ſont proportionelles à l'autre toute & à ſa partie.

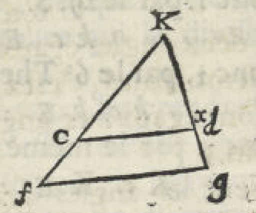
La 2[e], quand une toute & ſa partie ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie.

Or le premier ne peut eſtre, que les baſes ne ſoient paralleles. Et le ſecond, qu'elles ne ſoient antiparalleles. Et en l'un & en l'autre les deux angles ſur une baſe ſont égaux aux deux angles ſur l'autre baſe.

Preuve du premier.

LV. Soit l'angle fkg, dont les deux baſes ſoient fg & cd. Je dis que ces baſes ſont paralleles, ſi

$$kf.\ kc :: kg.\ kd.$$



Car ſoit mené du point c une parallele à fg, qui coupe kg en un point que j'appelleray x.

Il eſt certain (par XI. 19.) que

$$kf.\ kc :: kg.\ kx.$$

Or par l'hypotheſe,

$$kf.\ kc :: kg.\ kd.$$

Donc kx & kd ſont égales par 11. 43.

Donc les points k & d ne ſont qu'un même point.

Donc cx & cd ne ſont que la même ligne.

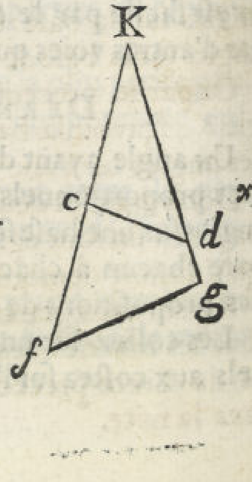
Or cx eſt parallele à fg. Donc cd luy eſt auſſi parallele.

Donc les angles ſur la baſe cd ſont égaux aux angles ſur la baſe fg. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Preuve du Second.

LVI. Soit l'angle fkg, qui ait deux baſes fg & cd. Je dis que ces baſes ſont antiparalleles, ſi

$$kf.\ kd. :: kg.\ kc.$$



Car ſoit tirée du point c une ligne qui coupant kg, prolongée s'il eſt beſoin, faſſe ſur kg un angle égal à celuy que gf fait ſur kf, & que le point où cette ligne coupera kg ſoit x, cette ligne cx ſera une baſe de l'angle k antiparallele à la baſe fg, & par conſequent (par 18. S.)

kf. kx :: kg. kc.

Or par l'hypothese,

kf. kd. :: kg. kc.

Donc par II. 43. *kx* eſt égale à *kd*.

Donc les points *x* & *d* eſtant ſur la même ligne, ne ſont qu'un même point.

Donc *cx* & *cd* ne ſont qu'une même ligne.

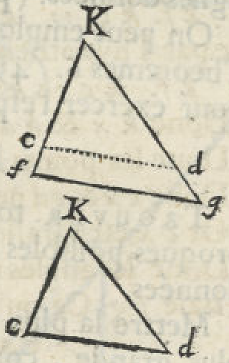
Or *cx* eſt antiparallele à *fg*.

Donc *cd* eſt auſſi antiparallele à *fg*.

Donc les angles ſur la baſe *cd* ſont égaux aux angles ſur la baſe *fg*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Si deux angles égaux ont leur côtez proportionels, ils ſont ſemblables; c'eſt à dire que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun. LVII.



Soient les angles égaux qui ayent leurs coſtez proportionels *fKg*, & *ckd*, en ſorte que *Kf. Kc :: Kg, kd*.

D'où il s'enſuit que ſi *Kf* eſt plus grand que *kc*, *Kg* ſera plus grand que *kd*. Prenant donc dans *Kf*, *Kc* egale à *kc*, & dans *Kg*, *Kd* égale à *kd*, les angles *cKd* & *ckd* étant égaux, & les côtez de l'un étant égaux à ceux de l'autre, leurs baſes ſeront égales, & les angles ſur la baſe de l'un égaux aux angles ſur la baſe de l'autre, par VIII. 63. & 64.

Or par le precedent Theoreme les deux baſes de l'angle *K*, ſçavoir la baſe *cd* & la baſe *fg*, ſont paralleles, & les angles ſur l'une ſont égaux aux angles ſur l'autre.

Donc dans les deux angles égaux *K* & *k* les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre. Ce qu'il falloit demonſtrer.

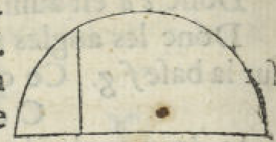
Remarquez que ce dernier Theoreme & ſon Corollaire ſont les inverſes des principaux Theoremes de ce Livre & du Livre precedent, & qu'ils ſeront de grand uſage dans la ſuite.

SECTION VI.

Problemes.

I. PROBLEME.

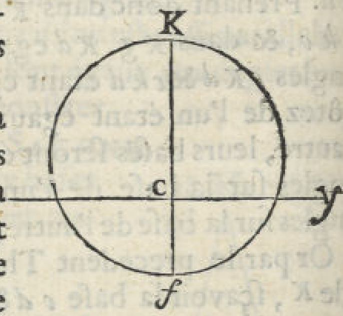
LVIII. TROUVER la moyenne proportionelle entre deux lignes données. Joindre les lignes données. Faire un demy-cercle, dont prises ensemble elles soient diametre : la perpendiculaire élevée du point où se joignent ces lignes à la circonference sera la moyenne proportionelle entre ces lignes données. (par 38. S.)



On peut employer pour trouver la même chose les Theoremes 6. (43. S.) & 4. 53. S.) J'en laisse la recherche pour exercer l'esprit.

II. PROBLEME.

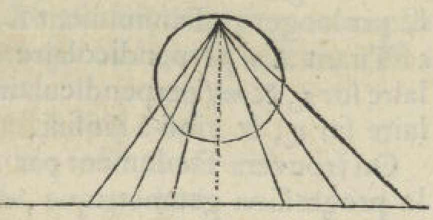
LIX. TROUVER toutes les reciproques possibles à deux lignes données.



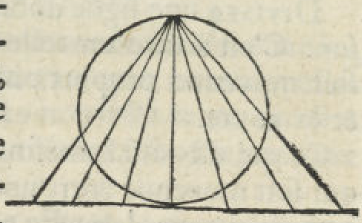
Mettre la plus petite dans la plus grande, comme $k\,c$ dans $k\,f$. Faire un cercle qui ait la plus grande pour diametre. Et du point c, où la plus petite se termine, tirer sur ce diametre une perpendiculaire indefinie comme y. Cette Perpendiculaire satisfera au Probleme, comme on le peut juger, en considerant le 5ᵉ Theoreme (39. 40. 41. &c. S.) sans qu'il soit besoin que je m'amuse à l'expliquer davantage.

III. PROBLEME.

AYANT tiré à discretion d'un même point tant de lignes que l'on voudra sur une même ligne, les diviser toutes, en sorte que chaque toute & sa partie vers le point commun soient reciproques à chaque autre toute & à sa même partie. L X.



Tout cercle dont la circonference passera par le point commun, & qui aura pour diametre, ou la perpendiculaire entiere de ce point à la ligne, ou une partie de cette perpendiculaire, satisfera au Probleme, par le 7^e Theoreme, & ce qui a esté dit du 3^e Cas (48. S.)



IV. PROBLEME.

AYANT les trois premieres lignes d'une progression geometrique, trouver toutes autres à l'infini.

Faire que la 3^e comprenne la 1re, comme K*d* comprend K*c*, faire un cercle qui ait K*d* pour diametre, de *c* élever la perpendiculaire *c L*, & puis ti-

rer une ligne indefinie de K par *L*, laquelle j'appelleray *x*; & prolonger auſſi infiniment K*d*, laquelle j'appelleray *z*.

Tirant *L d* perpendiculaire ſur *x*, & *d m* perpendiculaire ſur *z*, & *m f* perpendiculaire ſur *x*, & *f n* perpendiculaire ſur *z*, & ainſi à l'infini.

On trouvera facilement par (20. S.) la ſuite infinie de la progreſſion geometrique, dont les trois premiers termes auront eſté *k c. k L. k d.* qui ſeront ſuivis de *k m. k f. k n. k g.* &c.

V. PROBLEME.

LXII. DIVISER une ligne donnée en moyenne & extrême raiſon. C'eſt à dire en telle ſorte que ſa plus grande partie ſoit moyenne proportionelle entre la plus petite partie & la toute.

Ce qui eſt auſſi la meſme choſe que de trouver une ligne qui ſoit moyenne entre une donnée & cette donnée moins cette moyenne, laquelle pour cette raiſon j'appelleray la mediane.

Soit la ligne donnée appellée *b*.

Sa plus grande partie que l'on cherche *x*

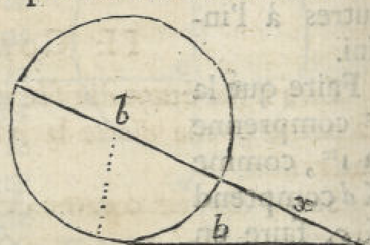
Et ſa plus petite *b—x*.

Il faut trouver une ligne qui ſoit telle, que *b* moins cette ligne ſoit à cette ligne comme cette ligne eſt à *b*.

$$b—x.\ x :: x.\ b.$$

C'eſt ce qui ſe peut trouver par une voie fort facile.

Décrire un cercle de l'intervale de la moitié de *b*, élevée perpendiculairement ſur l'une des extremitez de *b*.



Et tirer une ſecante de l'autre extremité de *b*, qui paſſant par le centre du cercle ſe termine à la circonference.

La partie de cette ſecante qui eſt hors le cercle ſera *x*. C'eſt à dire moyenne proportionelle entre *b*, & *b—x*.

Car par la conſtruction 1. *b* eſt tangente de ce cercle.

2. Le diametre de ce cercle eſt égal à *b*.

3. Et par consequent la secante entiere est $x+b$.

Or (par 33. S.) b tangente est moyenne proportionelle entre la partie de la secante qui est hors le cercle (c'est à dire x.)

Et la secante entiere (c'est à dire $x+b$

Donc $x.\ b :: b.\ x+b$.

Donc *permutando* $b..\ x :: x+b.\ b$.

Donc *dividendo* $b-x.\ x :: x.\ b$.

Ce qu'il falloit demonstrer.

I. Corollaire.

Une ligne étant divisée en moyenne & extrême raison; si on y ajoûte sa plus grande partie (que nous appellerons la mediane) il s'en fera une nouvelle toute qui sera encore divisée en moyenne & extrême raison, la premiere toute étant la mediane. LXIII.

C'est ce qui se voit par la voie même dont on s'est servi pour diviser la premiere toute en moyenne & extrême raison, en sorte qu'il ne faut que recomposer, pour parler ainsi, ce que l'on a divisé.

Car si $b-x.\ x :: x.\ b$.

Componendo $b.\ x :: x+b.\ b$.

Donc la ligne $x+b$ est divisée par b en moyenne & extreme raison, puisque b est moyenne proportionelle entre la toute $x+b$. & son autre partie x.

II. Corollaire.

Une ligne étant divisée en moyenne & extrême raison, sa petite partie divise la mediane en moyenne & extrême raison. LXIV.

Soit b divisée comme dessus; & comme sa mediane est appellée x, soit la petite appellée y. Il faut prouver que $x-y.\ y :: y.\ x$.

Or il ne faut pour cela que nommer b par ces parties $y+x$.

Car par la division de b par x en moyenne & extrême raison $y.\ x :: x.\ y+x$.

Donc *permutando* x y. : : $y+x$. x.

Donc *dividendo* $x-y.y$: : y. x. Ce qu'il falloit demonſtrer.

III. Corollaire.

LXV. Il eſt aiſé de conclure de ces deux Corollaires, que lorſqu'on a une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes & plus petites diviſées de la même ſorte.

PREUVE DES PLUS GRANDES.

LXVI. Si on joint la mediane à la premiere toute, il s'en fait une ſeconde toute qui à la premiere pour ſa mediane (par le premier Corollaire.)

Donc ſi on joint la premiere toute à la deuxiéme, il s'en fait une troiſiéme qui a la deuxiéme pour ſa mediane.

Et joignant la deuxiéme à la troiſiéme, il s'en fait une quatriéme qui a la troiſiéme pour ſa mediane, & ainſi à l'infini.

PREUVE DES PLUS PETITES.

Si on prend la mediane de la premiere toute, il s'en fait une ſeconde toute plus petite, qui a pour ſa mediane (par le deuxiéme Corollaire) la petite partie de la premiere toute.

Et cette mediane de la deuxiéme toute eſt une troiſiéme toute qui a pour ſa mediane la petite partie de la deuxiéme toute, & cette mediane de la troiſiéme toute eſt une quatriéme toute qui a pour ſa mediane la petite partie de la troiſiéme toute, & ainſi à l'infini. Ce qui peut eſtre conſideré comme une nouvelle & tres belle preuve de la diviſibilité d'une ligne à l'infini.

VI. Probleme.

LXVII. Ayant la grandeur des côtez d'un angle qui doive eſtre la moitié de chacun des angles ſur la baſe. en trouver la baſe.

Soit $K\,b$ de la grandeur de ces costez, & soit décritte une portion de cercle de cette intervalle & du centre K.

Soit divisée $K\,b$ en c. en moyenne & extrême raison, en sorte.

$$bc.\ cK :: cK.\ bK.$$

La corde $b\,d$ de la grandeur de c K, qui est la moyenne entre $b\,c$ & $b\,K$, sera la base de cet angle, & K d en sera l'autre costé.

Car soit tirée la ligne $c\,d$, je suppose que les deux angles sur la base d'un angle Isoscele sont égaux. Et ainsi j'auray prouvé que l'angle K est la moitié de chacun des angles sur la base, si je puis montrer deux choses.

La 1[re]. Que l'angle K est égal à l'angle $b\,d\,c$.

La 2[e]. Que l'angle $b\,d\,c$ est la moitié de l'angle $b\,d$K.

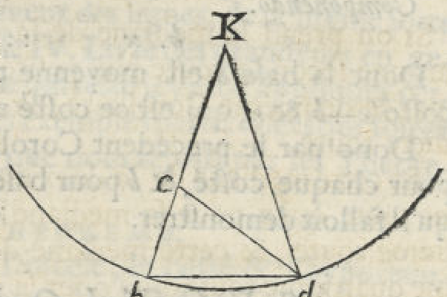
PREUVE DE LA PREMIERE.

L'angle b a deux bases, $c\,d$ & K d, & ses costez selon une base sont proportionnels à ses costez selon l'autre base, puisque

$$b\,c.\ b\,d :: b\,d\ b\,K.$$

Donc les bases $c\,d$ & K d sont antiparalleles, & par consequent les angles sur une sont égaux aux angles sur l'autre chacun à chacun.

Donc l'angle K est égal à l'angle $b\,d\,c$. Ce qui est la premiere chose qu'il falloit demonstrer.



PREUVE DE LA SECONDE.

Les deux parties de b K, base de l'angle de $b\,d$ K, sont en même raison que les deux costez de cet angle, puisque d K étant égale à b K, & $c\,K$ à $b\,d$,

$$b\,c.\ c\,K :: b\,d.\ d\,K.$$

Donc l'angle $b\,d$ K est divisé par la moitié.

Donc l'angle *K* étant égal à l'angle *b d c*, qui eſt la moitié de l'angle *b d* K, eſt auſſi la moitié de l'angle *b d* K. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Corollaire.

LXVIII. Tout angle Iſoſcele dont la baſe eſt moyenne proportionelle entre le coſté entier & le coſté moins cette baſe, eſt de 36 degrez, & chacun des angles ſur la baſe de 72. Car 36. plus deux fois 72. qui eſt la double de 36, vaut 180, qui eſt ce que valent les trois angles pris enſemble.

VII. Probleme.

Ayant la baſe d'un angle Iſoſcele de 36 degrez, en trouver le coſté.

Soit *b* la baſe donnée diviſée en moyenne & extréme raiſon, & *x* en ſoit la plus grande partie, $x+b$ ſera le coſté de cet angle. C'eſt à dire que l'angle qui aura $x+b$ pour l'un & l'autre de ces coſtez, & *b* pour baſe, ſera de 36 degrez.

Car puiſque par la diviſion de *b* en moyenne & extrême raiſon. $b - x.\ x.\ ::\ x.\ b.$

Componendo.

$b.\ x\ ::\ x+b.\ b.$

Donc la baſe *b* eſt moyenne proportionelle entre le coſté $x+b$ & *x*, qui eſt ce coſté moins *b*.

Donc par le precedent Corollaire l'angle qui a $x+b$ pour chaque coſté, & *b* pour baſe, eſt de 36 degrez. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SECTION VII.

Des lignes incommenſurables.

Ce que nous avons dit dans le IV. Livre des grandeurs incommenſurables donne une ſi grande facilité d'expliquer les lignes incommenſurables, qu'il ne faut pour cela qu'ajoûter à ce Livre trois ou quatre propoſitions.

PROPOSITION GENERALE.

Lorſque trois lignes ſont continuellement proportionelles, la raiſon de la premiere à la troiſiéme peut eſtre de trois ſortes : ce qui ſe fait en trois cas.

PREMIER CAS.

Si la raiſon de la premiere à la troiſiéme eſt une raiſon de nombre à nombre qui ait pour ſes expoſans des nombres quarrez, la moyenne eſt à chacune des deux autres, comme le produit des racines de ces nombres quarrez, eſt à chacun de ces nombres quarrez, & par conſequent la moyenne eſt commenſurable aux deux autres.

SECOND CAS.

Si la raiſon de la 1re à la 3e eſt une raiſon de nombre à nombre, qui n'ait pas pour ſes expoſans des nombres quarrez, la moyenne eſt incommenſurable en longueur & commenſurable en puiſſance à la 1re & à la 3e.

TROISIEME CAS.

Si la raiſon de la 1re à la 3e eſt une raiſon ſourde, & non de nombre à nombre, la moyenne eſt incommenſurable aux deux autres, tant en longueur qu'en puiſſance.

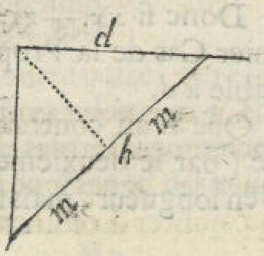
Tous ces 3 Cas ſe prouvent des lignes, de la même ſorte qu'on les a prouvez dans le IV. Livre des grandeurs en general. C'eſt pourquoy ce qui reſte icy eſt d'appliquer cette doctrine generale à des exemples particuliers qui ſoient propres aux lignes. Ce que nous ferons par les Theoremes ſuivans.

I. THEOREME.

UN angle droit étant Iſoſcele, le coſté & l'hypotenuſe ſont incommenſurables en longueur & commenſurables en puiſſance. LXXI.

Soit un angle droit Iſoſcele, dont
L'hypotenuſe ſoit appellée h.
Le côté d.

La perpendiculaire du ſommet à l'hypotenuſe la partagera en deux également. Chaque moitié ſoit appellée m.



Donc $\div\!\!\div$ $h.\ d.\ m.$

Or $h.\ m :: 2.\ 1.$

Donc 2 & 1 n'étant pas deux nombres quarrez (par le 2[e] Cas) d eſt incommenſurable en longueur à h & à m.

Mais il leur eſt commenſurable en puiſſance, parce que

$$\left\{\begin{matrix} hh. & dd \\ dd. & mm \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} h. & m. \\ 2. & 1. \end{matrix}\right.$$

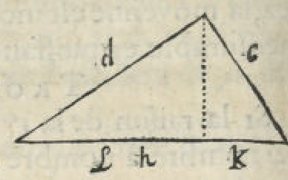
II. Theoreme.

LXXI. Quand l'hypotenuſe eſt à l'un des côtez d'un angle droit, comme nombre à nombre, il eſt aiſé de juger ſi l'autre côté eſt commenſurable ou incommenſurable à l'hypotenuſe. Et voicy comment.

Soit l'hypotenuſe h.

Un des coſtez c.

L'autre coſté d.



Une perpendiculaire eſtant menée du ſommet à l'hypotenuſe,

Soit ſa portion vers c appellée k,

Et l'autre vers d appellée l.

Il s'enſuit que $\left\{\begin{matrix} \div\!\!\div\ h.\ c.\ k. \\ \div\!\!\div\ h.\ d.\ l. \end{matrix}\right.$

Suppoſant donc que h & c ſoient comme les deux nombres x & z. C'eſt à dire que

$$h.\ c :: x.\ z.$$

Donc la raiſon de $h.\ k.$ eſtant doublée de la raiſon de $h.c.$

$$h.\ k :: xx.\ zz.$$

Or k & l étant les deux portions de h,

$$l = h - k.$$

Donc $h.\ l :: xx.\ xx.-zz.$

Donc ſi $xx.-zz.$ eſt un nombre quarré par le premier Cas de la Propoſition principale, h eſt commenſurable à d.

Que ſi au contraire $xx-zz$ n'eſt pas un nombre quarré (par le deuxiéme Cas) h n'eſt point commenſurable à d en longueur, mais ſeulement en puiſſance.

III. Theo-

III. THEOREME.

LORSQU'UN des côtez de l'angle droit est une aliquote de l'hypotenuse, l'autre côté est incommensurable à l'hypotenuse en longueur, & commensurable seulement en puissance. LXXII.

Car afin que c par exemple, soit une aliquote de h, il faut que h soit à c, comme quelque nombre à l'unité que je marqueray par un 1.

Soit donc $h.\ c\ ::\ x.\ 1.$

Donc par le Theoreme 2.

$$h.\ k\ ::\ xx.\ 11.$$

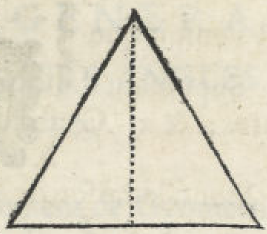
$$h.\ l\ ::\ xx.\ xx - 11$$

Or il est impossible que $xx - 11$ soit un nombre quarré. Car (11) ne fait qu'une unité, selon ce qui a esté dit, IV. 7. Et deux nombres quarrez ne peuvent jamais estre differens seulement d'une unité.

Donc par le Theoreme 2^e^ h & d sont incommensurables en longueur, & commensurables seulement en puissance.

COROLLAIRE.

SI la base d'un angle Isoscele est égale au costé, la perpendiculaire du sommet à la base est incommensurable en longueur, & commensurable seulement en puissance avec le costé. LXXIII.



Car alors cette perpendiculaire fait un angle droit avec la moitié de la base, & l'un ou l'autre des costez est l'hypotenuse de cet angle droit.

Donc l'un des costez de cet angle droit, qui est la moitié de la base, est aussi la moitié de l'hypotenuse.

Donc il est une aliquote de l'hypotenuse.

Donc par le Theoreme precedent l'autre costé, qui est la perpendiculaire, est incommensurable en longueur, & commensurable seulement en puissance avec l'hypotenuse de cet angle droit, laquelle est le costé de l'angle dont la base est supposée égale à chaque costé.

IV. Theoreme.

LXXIV. Ayant deux lignes incommenſurables en longueur (ou par les Theoremes precedens, ou par d'autres voyes) & ayant trouvé la moyenne proportionelle entre ces deux lignes, elle leur ſera incommenſurable tant en longueur, qu'en puiſſance.

Cela eſt clair par le 3^e Cas de la Propoſition principale.

V. Theoreme.

LXXV. Quand une ligne eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon, la toute & ſes deux parties ſont incommenſurables les unes aux autres. C'eſt ce qui a eſté prouvé dans le 4. Livre, num. 37.

Avertissement.

Il n'y a à dire de quatre lignes continuellement proportionelles que ce qui a eſté dit dans le IV. Livre de quatre grandeurs continuellement proportionelles.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DOUZIÉME.

DES FIGURES EN GENERAL CONSIDERÉES SELON LEURS ANGLES ET LEURS COSTEZ.

ON appelle figure dans les elemens de Geometrie, une ſurface platte terminée de tous coſtez. I.

Ce qui comprend deux choſes : la premiere, les extremitez de cette ſurface : la ſeconde, l'eſpace qu'elle comprend ; ce qui s'appelle *l'aire de la figure.*

Nous les conſiderons dans ce Livre & le ſuivant ſelon le premier rapport ; & dans d'autres Livres nous les conſidererons ſelon le dernier.

DIVISION.

TOUTE figure conſiderée ſelon ſes extremitez, eſt, II.
Ou rectiligne.
Ou curviligne.
Ou mixte.

PREMIERE DEFINITION.

III. On appelle rectiligne celle qui eſt terminée par des lignes droites, qui ne peuvent eſtre moins de trois, étant clair que deux lignes droites ne peuvent pas terminer un eſpace de tous coſtez, puiſqu'elles ne peuvent ſe rencontrer qu'en un point, ce qui laiſſe l'eſpace ouvert du coſté oppoſé à ce point.

Il eſt clair auſſi par là que les lignes droites ne peuvent terminer un eſpace, qu'en faiſant autant d'angles qu'il y a de lignes droites qui terminent l'eſpace. Car ſi un angle demande deux lignes, une ligne ſert à deux angles.

Et ainſi l'on peut conſiderer trois choſes dans l'extremité d'une figure rectiligne. 1. Les angles. 2. Les coſtez. 3. Le circuit, qu'on appelle auſſi *perimetre*, qui n'eſt autre choſe que la ſomme des coſtez; c'eſt à dire tous les coſtez pris enſemble.

SECONDE DEFINITION.

IV. On appelle curviligne celle qui eſt terminée par une ou pluſieurs lignes courbes. Et une ſeule ligne courbe pouvant rentrer en ſoy même, peut terminer une eſpace.

Mais on ne conſidere icy des figures curvilignes que le ſeul cercle; parce que de toutes les lignes courbes on ne conſidere que la circulaire.

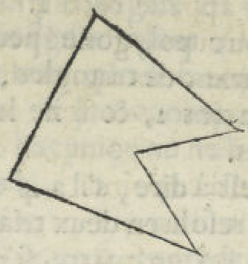
TROISIEME DEFINITION.

V. On appelle figure mixte celle qui eſt terminée en partie par des lignes droites, & en partie par des courbes, dont on ne conſidere icy que les portions de cercle, qui ſont celles qui ſont terminées par une corde & une portion de circonference; ou les ſecteurs du cercle qui ſont terminez par deux rayons & une portion de la circonference, tel qu'eſt un quart de cercle.

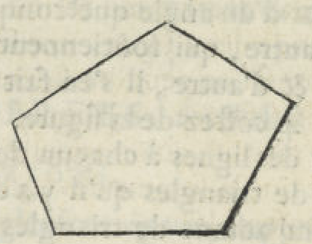
DES FIGURES RECTILIGNES

VI.

On peut diviser les figures rectilignes en celles qui ont quelque angle rentrant, & celles dont tous les angles sont saillans ; c'est à dire tels que leur pointe regarde toûjours le dehors de la figure.



Les Geometres se sont restraints à considerer les dernieres, parce qu'on y peut facilement reduire les premieres.



ESPECES DES FIGURES RECTILIGNES.

Toute figure rectiligne ayant autant d'angles que de costez, on les divise indifferemment par le nombre de leurs angles ou de leurs costez, & on les nomme selon l'un ou selon l'autre. VII.

Ainsi on appelle Triangle une figure de trois angles & de trois costez, & Quadrilatere celle de quatre angles & de quatre costez.

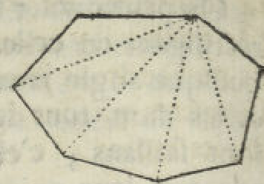
Les noms Grecs des figures sont pris du nombre des angles : comme

Pentagone, de cinq.
Exagone, de six.
Heptagone, de sept.
Octogone, de huit.
Decagone, de dix.
Et Polygone, de plusieurs angles indeterminément.

Ces noms sont si communs, qu'il est bon de ne les pas ignorer ; mais on peut se passer d'en sçavoir d'autres qui sont moins communs : & appeller les figures du nombre de leurs costez ou de leurs angles, une figure de quinze costez, de trente, de cent, de mille &c.

I. Theoreme.

VIII. Tout polygone peut estre resolu en autant de triangles, qu'il a de côtez moins 2, & il ne le peut estre en moins.



C'est à dire, s'il a 4 costez, il peut estre resolu en deux triangles; si 5, en trois; si 6, en quatre; si 7, en cinq; si 8, en six &c.

Car d'un angle quelconque tirant deux lignes de part & d'autre, qui soûtiennent chacune l'angle qui le suit de part & d'autre, il s'en fait deux triangles qui comprennent 4 costez de la figure. Mais de ce méme angle menant des lignes à chacun des autres angles, il s'en fait autant de triangles qu'il y a de costez outre ces 4. Donc il y aura autant de triangles qu'il y a de costez outre ces 4. Donc il y aura autant de triangles que de costez moins 2, puisqu'il y a necessairement 2 de ces triangles qui comprennent 4 de ces costez.

II. Theoreme.

IX. Tous les angles d'un polygone quelconque sont égaux à autant de droits que le double de ces costez moins 4.

Car nous avons déja veu qu'un angle plus les deux angles que font ses costez sur sa base, sont égaux à deux droits. Or un angle avec sa base n'est point different d'un triangle. Et par consequent les trois angles d'un triangle valent deux angles droits, qui sont six moins 4.

Or par le precedent Theoreme tout autre polygone peut estre resolu en autant de triangles moins 2 qu'il a de costez; & les angles de ces triangles comprendront ceux du polygone. Donc si le polygone à 7 costez estant resolu en 5 triangles, les angles de ces 5 triangles en vaudront dix droits, qui sont 14 moins 4.

On le peut encore démontrer d'une autre sorte, en prenant un point quelconque au dedans du polygone, & de ce point menant des lignes à tous les angles. Car alors l'heptagone sera partagé en 7 triangles, qui auront tous deux costez de leurs angles au tour de la figure, & le 3e au dedans. Or tous les 21 angles de ces 7 triangles en valent 14 droits, & les 7 du dedans de la figure valent 4 droits (& quand il y en auroit mille, ou tant que l'on voudra, ils ne vaudront jamais que 4 droits) & par consequent les 14 autres qui sont égaux à ceux de l'heptagone valent 14 droits moins 4; c'est à dire 10 droits.

Division.

Les figures de ces differentes especes se peuvent considerer ou chacune à part, ou en les comparant deux ensemble.

FIGURES CONSIDERE'ES A PART.

Definitions.

1. Celles dont tous les angles sont égaux, s'appellent *Equiangles*. X.

2. Celles dont tous les costez sont égaux, s'appellent *Equilateres*.

3. Celles qui sont tout ensemble equiangles & equilateres, s'appellent *Regulieres*.

Et on met aussi le cercle entre les regulieres, à cause de sa parfaite uniformité, & qu'on le peut considerer comme un polygone regulier d'une infinité de costez.

4. Celles dont les angles, ou les costez seroient alternativement égaux; c'est à dire le premier égal au 3e, 5e, 7e, 9e, & le second égal au 4e, 6e, 8e, 10e, se peuvent appeller alternativement equiangles ou equilaterales.

Mais il faut remarquer que cela ne peut estre que quand le nombre des angles ou des costez est pair. Car s'il estoit impair, le dernier & le premier se trouveroient égaux; & par consequent le penultiéme & le premier seroient inégaux: & par consequent ils ne seroient pas tous alternativement ég aux.

FIGURES COMPARE'ES.

DEFINITIONS.

XI. QUAND on compare deux figures de même genre, c'est à dire d'un nombre égal de costez.

1. Si les angles de l'une sont égaux aux angles de l'autre, on les appelle *Equiangles*; & ce mot ne marque pas alors que les angles de chaque figure soient égaux entr'eux; mais seulement que ceux de l'une sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun.

2. Si les costez de l'une sont égaux aux costez de l'autre, on les appelle *Equilateres*, ou *Equilateres entr'elles*.

3. Si elles sont tout ensemble equiangles & equilateres entr'elles, on les peut appeller T*out-égales*; ce qu'il faut bien distinguer de celles qu'on appelle simplement *Egales*.

4. Si elles sont equiangles, & que les costez de l'une soient proportionels aux costez de l'autre, on les appelle *Semblables*.

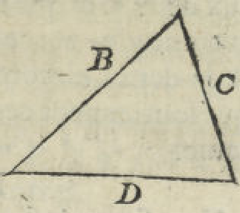
Ce qui fait voir que les *tout-égales* sont toûjours *semblables*, puisqu'il y a même raison entre les costez de l'une & de l'autre, qui est la raison de l'égalité. Au lieu que les *semblables* ne sont pas tous toûjours *tout-égales*: puisqu'il peut y avoir une autre raison que celle d'égalité, qui soit la même entre les costez de l'une & de l'autre.

Les costez des figures semblables, entre lesquels il y a même raison, s'appellent les costez *Homologues*, qui sont toûjours le plus grand costé de l'une & de l'autre: & toûjours ainsi. Et c'est ce qui produit ce Theoreme.

I. THEOREME

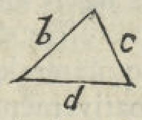
I. Theoreme.

Les circuits de deux figures ſembla- XII.
bles ſont en même raiſon que leurs
coſtez homologues.



Car ſoient les trois coſtez de l'une de ces figures, *B C D*; & de l'autre *b c d*.

Puiſque *B* eſt à *b*, comme *C* à *c*, & *D* à *d*.



Les trois d'une part (qui ſont le circuit de la premiere figure) ſont aux trois de l'autre part (qui ſont le circuit de la ſeconde) en même raiſon que chacune d'une part à chacune de l'autre. C'eſt ce qui a eſté demonſtré, II. 45.

Autres Definitions.

Quand on compare deux figures de même ou de diffe- XIII.
rentes eſpeces.

5. Si le circuit de l'une eſt égal au circuit de l'autre, on les appelle *Iſoperimetres*.

6. Si l'eſpace que comprend l'une eſt égal à l'eſpace que comprend l'autre, on les appelle *égales*. Ce qui appartient au Livre où l'on traittera des figures conſiderées ſelon *l'aire*. Et ce qu'il ne faut pas confondre, comme il a déja eſté dit, avec celles qu'on appelle *tout-égales*.

DES FIGURES INSCRITTES OU CIRCONSCRITTES AU CERCLE.

Des Inscrittes.

On dit qu'une figure rectiline eſt *inſcritte au cercle*, XIV.
quand les ſommets de ſes angles ſe trouvent dans la circonference de ce cercle. D'où il s'enſuit,

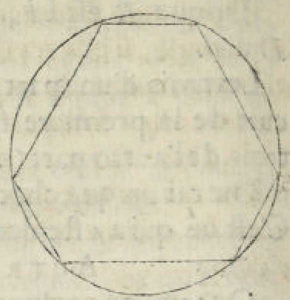
1. Que les angles de cette figure inſcritte ſe doivent alors conſiderer comme des angles inſcrits au cercle, dont il a eſté parlé dans le Livre IX.

2. Qu'ainſi les angles d'une figure inſcritte ne ſçauroient

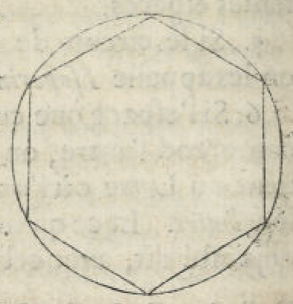
eſtre égaux, que quand les deux arcs qui ſoutiennent les deux coſtez de chaque angle ſont égaux pris enſemble aux deux arcs que ſoutiennent les deux coſtez de chaque autre angle : parce que chacun de ces angles a pour meſure la demy-circonference moins la moitié des deux arcs que ſoutiennent ces coſtez. IX. 19. D'où s'enſuit ce Theoreme.

II. THEOREME.

XV. UNE figure inſcritte au cercle ne ſçauroit eſtre equiangle qu'elle ne ſoit equilaterale ou abſolument, ou alternativement ; & en ce dernier cas, il faut que le nombre de ſes coſtez ſoit pair.



Car afin que les angles d'une figure inſcritte au cercle (qui ſont des angles inſcrits) ſoient tous égaux, il faut & il ſuffit que les deux arcs que ſoutiennent les coſtez de chaque angle pris enſemble ſoient égaux aux arcs que ſoutiennent auſſi les coſtez de tout autre angle, comme il vient d'eſtre dit.



Or cela eſt quand tous ces arcs ſont égaux : ce qui arrive quand la figure eſt abſolument équilaterale ; parce que tous ces coſtez eſtant égaux, tous les arcs qu'ils ſoutiennent le ſont auſſi.

Mais cela arrive encore quand ces arcs ſont alternativement égaux, pourveu qu'ils ſoient en nombre pair ; parce qu'alors la moitié de ces arcs eſtant petits & tous égaux entr'eux, & la moitié plus grands tous égaux auſſi entr'eux, & un petit eſtant toûjours ſuivi d'un grand, les deux arcs ſoutenant les coſtez d'un angle inſcrit pris enſemble feront toûjours égaux à deux autres arcs ſoutenans les coſtez de tout autre angle. Et ainſi ces angles ſeront égaux. Or pour cela il ſuffit que les coſtez de la figure ſoient alternativement égaux, parce qu'alors ils ſoutiendront des arcs alternativement égaux.

Mais il eſt bien viſible qu'il faut en ce cas là que le nombre des coſtez ſoit pair. Car s'il eſtoit impair, comme de 9. il y auroit neceſſairement deux coſtez, ſçavoir le 1^er^ & le 9^e^ qui ſeroient de ſuite tous deux grands ou tous deux petits; & ainſi l'angle compris entre le 1^er^ & le 9^e^ coſté ſeroit ou plus grand ou plus petit que les autres.

Donc une figure inſcritte en un cercle ne ſçauroit eſtre équiangle, ſi elle n'eſt ou abſolument équilaterale ou alternativement, & en ce dernier cas il faut que le nombre de ſes coſtez ſoit pair.

DES CIRSCONSCRITTES AU CERCLE.

ON dit qu'une figure eſt *circonſcritte à un cercle*, quand tous les coſtez de la figure touchent le cercle. Et de-là il s'enſuit, XVI.

1. Que les angles de la figure ſont des angles circonſcrits; & par conſequent il eſt bon de les conſiderer comme des angles compris entre deux tangentes, que l'on doit prendre comme ſi chacun eſtoit terminé au point de l'attouchement. D'où il s'enſuit encore,

2. Que ces angles circonſcrits ſont toûjours Iſoſceles; parce que les tangentes menées d'un même point ſont égales, VII. 34.

3. Que les angles circonſcrits ſont égaux quand les tangentes de l'un ſont égales aux tangentes de l'autre. IX. 55.

4. Que chaque coſté d'une figure circonſcritte eſt compoſé de deux tangentes, qui viennent de deux differens angles.

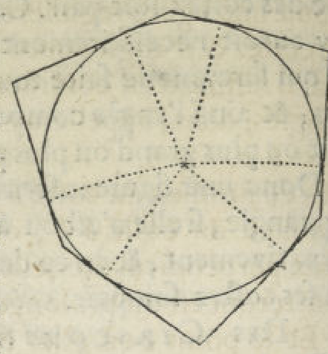
Et delà s'enſuit ce Theoreme.

III. THEOREME.

UNE figure circonſcritte au cercle ne ſçauroit eſtre equilaterale qu'elle ne ſoit equiangle, ou abſolument ou alternativement; & en ce dernier cas il faut que le nombre de ſes angles ſoit pair. XVII.

Car afin qu'une figure circonſcritte au cercle ſoit équilaterale, il faut & il ſuffit que deux tangentes dont eſt composé chaque costé de cette figure circonscritte prises ensemble soient égales à deux autres tangentes dont sera composé tout autre costé.

Or cela est quand toutes ces tangentes sont égales, ce qui arrive quand tous les angles de cette figure sont égaux ; car alors toutes les tangentes sont égales aussi.



Mais cela arrive encore quand les angles de la figure sont alternativement égaux, pourveu que ce soit en nombre pair, en sorte que la moitié des angles n'ait que deux petites tangentes (ce qui fait neanmoins les plus grands angles) & l'autre moitié deux plus grandes tangentes, & que toutes les petites soient égales entr'elles, & les grandes aussi, & qu'un petit angle soit toûjours suivi d'un grand.

Car alors chaque costé sera composé d'une petite & d'une grande tangente (parce que chaque costé, comme il a esté dit, est composé de deux tangentes qui viennent de deux differens angles.) Donc tous les costez seront égaux.

Donc une figure circonscritte au cercle ne peut estre équilaterale, si elle n'est equiangle, ou absolument ou alternativement, & en ce dernier cas il faut que le nombre des angles soit pair. Ce qu'il falloit demonstrer.

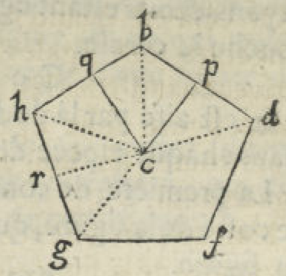
Des Figures Regulieres.

XVIII. Le meilleur moyen de bien concevoir les figures regulieres, est de les considerer comme inscrittes en un cercle ; parce qu'elles peuvent toutes y estre inscrites, selon ce Theoreme.

IV. Theoreme.

XIX. Toute figure reguliere peut estre inscritte & circonscritte en un cercle ; parce qu'il y a toûjours dans ces figures un point qui en est le centre, dont toutes les lignes menées à tous les angles (qu'on appelle rayons) sont égales, & dont toutes les perpendiculaires menées au côté (qu'on peut appeller *les raïons droits*) sont aussi égales entr'elles.

Soit une figure reguliere de tant de costez & d'angles que l'on voudra, il suffira d'en considerer 4 ou 5 angles, dont j'appelleray les sommets *b. d. f. g. h.*



Si de *p* milieu du costé *b d*, & de *q* milieu du costé *b h*, on éleve deux perpendiculaires, elles se rencontreront estant prolongées, par VI. 34.

Et le point *c* où elles se rencontrent sera le centre de la figure.

Car du point *c*, intervale *c b*, décrivant une circonference, elle passera par les trois points *h. b. d.* VII. 3.

Donc les trois raïons *c b*, *c h*, & *c d*, seront égaux,

Donc les 4 angles *c h b, c b h*, *cb d*, *c d b* seront égaux, par VIII. 64.

Donc chacun de ces trois raïons *ch*, *c b*, *cd*, partage par la moitié l'angle de la figure.

Donc l'angle *c h g*, étant égal à l'angle *c h b b*, *c g* base de l'angle *c h g*, doit estre égale à *c b*, base de l'angle *c h b*, par VIII. 65.

Donc ce 4^e^ raïon *c g* est égal aux trois autres.

Et il est clair que quand cette figure reguliere auroit cent mille angles, on prouveroit la même chose de toutes les lignes menées de *c* aux angles, qui sont les raïons.

Donc si de ce point *c* & de l'intervale d'un rayon on décrit un cercle, la figure sera inscritte en ce cercle; puisque tous les raïons estant égaux, les sommets de tous les angles se trouveront dans la circonference de ce cercle.

Et delà il s'ensuit que tous les costez de cette figure seront des cordes égales du méme cercle.

Donc les perpendiculaires du centre aux costez sont égales, par VII. 8.

Or ces perpendiculaires en font les raïons droits.

Donc ſi on décrit un autre cercle de l'intervale d'un rayon droit ; c'eſt à dire d'une perpendiculaire à un coſté, cette figure ſera circonſcritte à ce cercle ; puiſque tous ces rayons droits eſtant égaux, il n'y aura aucun coſté qui ne touche le cercle.

XX. COROLLAIRE.

IL eſt aiſé par là de determiner trois choſes importantes dans chaque eſpece de figure reguliere.

La premiere, de combien de degrez eſt l'arc qui ſoûtient le coſté de la figure, que j'appelleray ſimplement l'arc de la figure.

La ſeconde, de combien de degrez eſt l'angle de la figure ; c'eſt à dire l'angle compris entre les deux coſtez de la figure.

La troiſiéme, quel eſt auſſi l'angle que fait un rayon ſur un coſté : c'eſt ce qui ſe verra par ces trois Problemes.

PREMIER PROBLEME.

XXI. DETERMINER la grandeur de l'arc de toute eſpece de figure reguliere.

La circonference eſtant diviſée en 360 degrez, ou 21600 minutes, ou 1296000 ſecondes : ſi on diviſe ce nombre par celuy des coſtez de la figure, le quotient fera voir de combien de degrez, ou de minutes, ou de ſecondes eſt l'arc de la figure.

Ainſi l'arc d'une figure de 15 coſtez eſt de 24 degrez, parce que 15 diviſant 360, le quotient eſt 24.

L'arc d'une figure de 3600 coſtez eſt de 6 minutes, parce que 21600 minutes eſtant diviſées par 3600, le quotient eſt 6.

SECOND PROBLEME.

XXII. DETERMINER la grandeur de l'angle de toute eſpece de figure reguliere.

Ayant trouvé l'arc par le premier Probleme, oſter les degrez de cet arc de 180. qui eſt la demy-circonference, ce qui reſtera ſera la meſure de l'angle de la figure.

Car tout angle d'une figure reguliere doit eſtre conſideré comme un angle Iſoſcele inſcrit dans le cercle, qui a pour mesure la demy-circonference moins l'arc que soûtient un de ses costez. IX. 20.

Et ainsi pour avoir la grandeur de l'angle d'une figure de 15 costez, il ne faut qu'ôter de 180 les 24 degrez de l'arc que soûtient le costé de cette figure; & ce qui restera, qui est 156, sera la mesure de l'angle d'une figure de 15 costez.

Et pour avoir l'angle d'une figure de 3600 costez, il faut oster 6 minutes de 180 degrez, & ce qui restera, qui est 179 d. 54'. sera la mesure de l'angle de cette figure.

III. Probleme.

Determiner la grandeur de l'angle que fait le rayon sur le costé de toute figure reguliere. XXIII.

Il ne faut pour cela que prendre la moitié du nombre des degrez que vaut l'angle de la figure. Parce que tout rayon partage par la moitié l'angle de la figure.

Ainsi l'angle du rayon sur le costé dans une figure de 15 costez, est de 78 degrez, qui est la moitié de 156. Et l'angle du rayon sur le costé d'une figure de 3600 costez, est de 89. d. 57'.

CONSIDERATION SUR LE CERCLE.

Les Geometres considerent souvent le cercle comme un polygone d'une infinité de costez: & selon cela voicy de quelle sorte on devroit marquer les trois choses que nous venons de determiner dans tout autre polygone. XXIV.

Puisque l'arc d'un poligone regulier est d'autant plus petit, que le nombre de ses costez est grand, il faut que l'arc d'un polygone d'une infinité de costez soit infiniment petit, & qu'ainsi il ne puisse estre marqué que par zero.

Or qui oste zero de 180 degrez, reste 180 pour l'angle de ce polygone infini.

Et qui divise 180 par la moitié, reste 90, qui est la mesure d'un angle droit pour l'angle du rayon sur le costé de ce polygone infini.

Aussi il est vray que l'angle du rayon sur la circonference d'un cercle est droit en sa maniere, puisque le rayon coupe perpendiculairement sa circonference ; & que si cet angle est plus petit qu'un droit, ce n'est que de l'espace qui est entre la circonference & la tangente, qui est plus petit que tout angle aigu ; quoy qu'il n'y ait point d'angle aigu qui ne puisse estre divisé en une infinité de plus petits.

Et on peut dire aussi que tout point de la circonference est comme le sommet d'un angle de 180 degrez, puis qu'étant partagé par le rayon en deux angles égaux, chacun de ses angles de part & d'autre est droit en sa maniere ; & qu'ainsi chacun est de 90 degrez.

DES FIGURES REGULIERES COMPARE'ES ENSEMBLE.

V. Theoreme.

XXVI. Les figures regulieres de même espece, c'est à dire dautant de costez, sont toûjours semblables, & les circuits sont en même raison que les costez.

Car par ce qui vient d'estre dit, les angles de deux figures regulieres de même espece sont necessairement égaux ; leur grandeur estant determinée par les arcs des figures, & ces arcs l'étant par le nombre des côtez de la figure.

Et pour ce qui est des côtez, ceux de chaque figure étant égaux, on peut appeller les uns *b*, & les autres *c*.

Or il est bien clair que $b.\ c :: b.\ c.$

Et il est clair aussi que *b* est à *c*, comme 10 *b* à 10 *c*, ou 100 *b* à 100 *c*, ou 1000 *b* à 1000 *c*.

Donc les circuits ne sçauroient manquer d'estre en même raison que les côtez.

VI. Theoreme.

XXVII. Deux figures regulieres étant de mesme espece, ces 4 choses de l'une, *rayon*, *rayon droit*, *côté*, *circuit*, sont en même

même raison avec ces 4 autres mêmes choses de l'autre : c'est à dire que le rayon de l'une est au rayon de l'autre, comme le rayon droit au rayon droit, le côté au côté, le circuit au circuit.

Ces deux derniers viennent d'estre prouvez ; mais ils ne laisseront pas d'entrer dans la preuve generale des autres.

Il ne faut pour cela que considerer dans chacune de ces figures un angle compris entre un rayon, & un rayon droit qui a pour base la moitié du costé.

Ces deux angles sont semblables en toutes les figures regulieres de même espece ; c'est à dire que l'angle est égal à l'angle, & que les angles sur la base de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre.

Car chacun de ces angles a pour mesure la moitié de l'arc de la figure, puisque sa base est la moitié du costé. Or dans toutes les figures de même espece l'arc de la figure est d'autant de degrez en l'une qu'en l'autre.

Pour les angles sur chacune des bases cela est encore plus clair, puisque l'un est droit en l'un & en l'autre ; sçavoir celuy qui est fait par le rayon droit ; & que l'autre est la moitié de l'angle de la figure qui est égal en toutes les figures de mesme espece.

Or puisque ces angles sont semblables par X. 17. les costez sont proportionels aux costez ; & la base à la base: c'est à dire que,

Le rayon est au rayon, comme le rayon droit à un rayon droit, & la moitié du costé à la moitié du costé. Et par consequent comme le costé au costé, & le circuit au circuit.

I. Corollaire.

Les costez & les circuits de deux figures regulieres de même espece sont en même raison, que les diametres des cercles dans lesquels elles sont inscrites. XXVII.

Car ces diametres sont le double des rayons de ces figures. Donc &c.

II. Corollaire.

XXVIII. Les circonferences des cercles ſont en même raiſon que leurs diametres.

Car les cercles ſont comme des polygones d'une infinité de côtez, & leur circonference eſt comme le circuit comprenant cette infinité de côtez. Donc par le precedent Corollaire ce circuit d'une infinité de côtez d'une part, eſt au circuit d'une infinité de côtez de l'autre, comme le diametre au diametre.

C'eſt la ſeule voye dont on peut prouver la proportion des circonferences & des diametres. Car n'y en ayant point pour le faire poſitivement & immediatement, on eſt reduit à y employer l'analogie des polygones ſemblables d'un ſi grand nombre de coſtez que l'on voudra, qu'on peut concevoir eſtre inſcrits dans l'un & l'autre cercle : comme de cent mille côtez, de cent millions, de cent mille mlions, & ainſi juſqu'à l'infini.

Car plus ces polygones ont de côtez, moins il y a de difference entre la circonference du cercle & leur circuit, VII. 19. Et ainſi quelque petite que ſoit une ligne donnée, quand ce ne ſeroit que la cent milliême partie de l'épaiſſeur d'une feüille de papier, on peut concevoir un polygone de tant de côtez inſcrit dans l'un & dans l'autre cercle, que la difference de ſon circuit d'avec la circonference de ces cercles ſera moindre que cette ligne donnée.

Or de quelque grand nombre de côtez que ſoient ces polygones, leurs circuits ſeront toûjours en même raiſon que les diametres, par le Corollaire precedent.

Donc on doit conclure par une analogie tres certaine, que les circonferences ſont auſſi en même raiſon que les diametres.

III. Corollaire.

XXIX. Si deux figures regulieres de même eſpece ont de l'égalité en l'une de ces quatre choſes, rayon, rayon droit, côté, circuit, elles l'ont en tout, & ſont tout-égales.

C'est une suite évidente du sixiéme Theoreme.

IV. COROLLAIRE.

L'UNE de ces quatre choses étant donnée la grandeur de la figure reguliere est determinée : c'est à dire qu'elle ne peut estre que d'une sorte, quoy qu'il ne soit pas toûjours facile de la décrire ; parce que souvent il n'est pas aisé ou de trouver le côté d'une figure reguliere en ayant le rayon, ce qui est la même chose que de l'inscrire en un cercle donné : ou d'en trouver le rayon en ayant le côté ; ce qui est la même chose que trouver le cercle dans lequel une figure dont le côté est donné puisse estre inscritte. C'est dequoy nous allons traitter. XXX.

DE L'INSCRIPTION OU CIRCONSCRIPTION d'une figure reguliere de telle espece dans un Cercle donné.

IL est bien facile parce qui a esté dit, une figure reguliere estant décritte, d'en trouver le rayon pour l'inscrire dans un cercle : mais il n'est pas aussi facile d'inscrire dans un cercle donné, telle figure reguliere que l'on voudra. Et souvent même on ne le peut que mecaniquement, & non geometriquement, au moins par la Geometrie ordinaire ; parce qu'elle ne donne pas le moyen de diviser un arc donné, en 3, en 5, en 7 &c. ce qui seroit souvent necessaire pour inscrire en un cercle donné telle figure que l'on voudroit. XXXI.

Ainsi je pense que tout ce que l'on peut faire de mieux se reduit à ces deux regles generales, & à quelques Problemes particuliers.

PREMIERE REGLE GENERALE.

LORSQU'ON sçait inscrire en un cercle donné une certaine espece de figure reguliere, il est bien facile d'inscrire toutes celles qui ont plus ou moins de costez, selon la progression double. XXXII.

C'est à dire qui en ont deux fois moins, 4 fois moins, 8 fois moins &c. jusques à ce qu'on soit arrivé ou à 4, ou à un nombre impair, qui ne se puisse plus diviser par la moitié.

Ou qui en ont deux fois plus, 4 fois plus, 8 fois plus &c. jusqu'à l'infini.

Supposons, par exemple, qu'on sçache inscire dans un cercle donné une figure de 32 costez, la corde qui soûtiendra deux arcs de cette figure, sera le costé d'une figure de 16. Et celle qui soûtiendra deux arcs de la figure de 16 costez, sera le costé d'une figure de 8. Et ainsi de suite.

Et au contraire la corde qui soûtiendra la moitié de l'arc de cette figure de 32 costez sera le costé d'une figure de 64. Et celle qui soûtiendra la moitié de l'arc d'une figure de 64 costez, sera le costé d'une figure de 128 costez. Et ainsi à l'infini.

SECONDE REGLE GENERALE.

XXXIII. Lorsque l'on sçait inscrire une certaine espece de figure reguliere en un cercle donné, on la sçait aussi circonscrire.

Car ayant les points de tous les sommets des angles de l'inscrite, les tangentes au cercle à ces mêmes points estant prolongées jusques à ce qu'elles se rencontrent, font une figure semblable circonscritte au même cercle; puisque d'une part tous les angles circonscrits de cette figure sont égaux, estant appuyez sur des arcs convexes égaux; & que de l'autre chacun de ces angles est égal à l'angle de la figure circonscritte, par IX. 52.

PROBLEMES PARTICULIERS.

I.

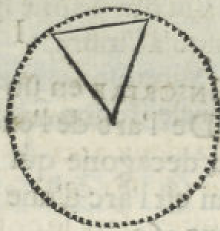
XXXIV. Inscrire un quadrilatere regulier (qui s'appelle quarré) dans un cercle donné.

Deux diametres qui se coupent partagent la circonference en 4 parties, dont chacune est l'arc du quarré inscrit dans le cercle.

Corollaire.

Inscrire dans un cercle donné une figure de 8 costez, de 16, de 32; & ainsi à l'infini. 2[e] Regle generale. XXXV.

II. Probleme.



Inscrire en un cercle donné un exagone regulier. XXXVI.

Le demi diametre ou rayon est le côté de l'exagone. Car ayant fait un angle compris par deux rayons, & ayant pour base une ligne égale au rayon, cet angle est de 60 degrez, puisque cet angle est égal à chacun des angles sur la base, & que les trois ensemble valent 180 degrez. Donc chacun est de 60 degrez. Or 60 degrez est l'arc de l'exagone. Donc le demy diametre est le côté de l'exagone.

I. Corollaire.

Inscrire en un cercle donné un triangle regulier. XXXVII.
Doubler l'arc de l'exagone, par la 1[re] Regle generale.

II. Corollaire.

Inscrire en un cercle donné une figure de 12 côtez, de 24, de 48. Et ainsi à l'infini. 1[re] Regle generale. XXXVIII.

III. Probleme.

Inscrire en un cercle donné un decagone, ou figure de dix côtez. XXXIX.

Ayant divisé le demy diametre en moyenne ou extrême raison (par XI. 68.) la plus grande partie de cette ligne ainsi divisée est le côté du decagone. Car elle soûtient un arc de 36. degrez, par XI. 73.

I. Corollaire.

Inscrire en un cercle donné un pentagone & figure de cinq côtez. XL.

Doubler l'arc du decagone, par la 1[re] Regle generale.

II. Corollaire.

XLI. Inscrire en un cercle donné une figure de 20 côtez, de 40, de 80 : & ainsi à l'infini. 1re Regle generale.

IV. Probleme.

XLII. Inscrire en un cercle donné une figure de 15 côtez.

De l'arc de l'exagone qui est de 60 degrez, oster l'arc du decagone qui est de 36, il restera un arc de 24 degrez, qui est l'arc d'une figure de 15 costez ; parce que 24 fois 15 font 360.

Corollaire.

XLIII. Inscrire en un cercle donné une figure de 30 costez, de 60, de 120. Et ainsi à l'infini. 1re Regle generale.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TREIZIE'ME.

DES TRIANGLES ET QUADRILATERES CONSIDEREZ SELON LEURS COSTEZ ET LEURS ANGLES.

A*PRE'S ce qui a esté dit des figures en general, il ne reste plus que d'expliquer ce qui est particulier aux triangles, & aux quadrilateres.*

PREMIERE SECTION.

Des Triangles.

I. LEMME.

UN angle avec sa base, est la même chose qu'un triangle. I.
gle. Et ainsi tout ce qui a esté dit dans les livres des angles, des proportionelles, & des reciproques des angles considerez avec leur base, se peut sans peine appliquer aux triangles.

II. LEMME.

II. TOUT triangle se peut inscrire en un cercle. Car il ne faut que trouver la circonference qui passe par les trois sommets des trois angles, par VII. 3.

III. LEMME.

DEFINITION.

III. LE côté quelconque d'un triangle en peut estre appellé *la base*, & les deux autres ses costez : & alors l'angle soûtenu par la base est appellé *l'angle du sommet*, & la distance de ce sommet à la base est appellée *la hauteur du triangle*.

TRIANGLES CONSIDEREZ A PART.

I. THEOREME.

IV. TOUT triangle a ses trois angles égaux à deux droits. VIII. 59.

I. COROLLAIRE.

V. Tous les trois angles d'un triangle peuvent estre aigus; mais il n'y en peut avoir qu'un droit ou obtus.

II. COROLLAIRE.

VI. SI l'un des angles du triangle est droit, les deux autres valent un droit.

III. COROLLAIRE.

VII. QUI connoît la grandeur des deux angles d'un triangle, connoît la grandeur du 3e. Car ôtant de la demy-circonference les deux dont ont connoît la grandeur, ce qui reste est la grandeur du 3e.

Qui connoît de combien de degrez sont les deux, sçait de combien de degrez est le 3e. Car ôtant le nombre des degrez que valent les deux de 180, ce qui reste est le nombre des degrez que vaut le 3e. Si les deux valent 108 degrez, le 3e en vaut 72.

II. THEOREME.

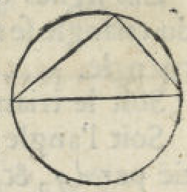
VIII. DANS tout triangle le plus grand côté soûtient le plus grand

grand angle, & le plus grand angle est soûtenu par le plus grand côté. Car par le 2ᵉ Lemme, tout triangle peut estre inscrit dans un cercle, & alors la circonference du cercle est partagée en trois arcs, sur chacun desquels est appuyé chacun des angles du triangle.

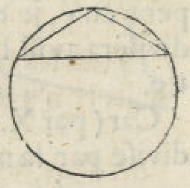
Or ces trois arcs sont :

1ᵉʳ Cas. Ou tous trois moindres que la demy-circonference : & alors chacun des angles du triangle est aigu. (IX. 25.) Et il est clair que le plus grand angle étant appuyé sur le plus grand arc, est aussi soûtenu par le plus grand côté. VII. 10.

2ᵉ Cas. Ou l'un de ces arcs est une demy-circonference, & les autres moindres ; & alors l'angle appuyé sur la demy-circonference est droit (IX. 25.) Et par consequent le plus grand de tous ; comme aussi le costé qui le soûtient, qui est un diametre, est plus grand qu'aucun des deux autres. VII. 9.



3ᵉ Cas. Ou l'un de ces arcs est plus grand que la demy-circonference ; & alors l'angle appuyé sur cet arc est obtus, & par consequent le plus grand de tous : comme aussi le costé qui le soûtient terminant le segment dans lequel est cet angle obtus, est plus prés du centre qu'aucun des deux costez qui le comprennent ; & ainsi plus grand. VII. 10.



I. Corollaire.

Tous les costez du triangle étant égaux, tous les angles le sont aussi : & au contraire tous les angles estant égaux, les costez le sont aussi. I X.

Car étant inscrit dans un cercle, les costez égaux soûtiennent des arcs égaux. Or les angles appuyez sur des arcs égaux, sont égaux. I X. 21.

Que si au contraire on supposoit les trois angles égaux, on prouveroit de la même maniere que les costez sont égaux. Car les angles égaux seront appuyez sut des arcs égaux. IX. 21. Or les arcs égaux ſont ſoûtenus par des coſtez égaux.

II. Corollaire.

X. Tout triangle qui a deux coſtez égaux a les deux angles ſoûtenus par ces coſtez égaux ; & au contraire. En inſcrivant ce triangle dans le cercle, on prouvera ce Corollaire de la même ſorte que le precedent.

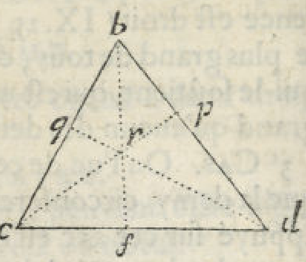
On laiſſe à trouver beaucoup d'autres manieres dont on le peut demonſtrer.

III. Theorem

XI. Les lignes qui diviſent par la moitié chacun des angles du triangle ſe rencontrent en un même point au dedans du triangle.

Soit le triangle *b c d*.

Soit l'angle *d* diviſé par la moitié par *d q*, & *c* diviſé par la moitié par *c p*, & que *d q* & *c p* ſe coupent en *r* ; je dis que la ligne *b r* diviſera auſſi l'angle *b* par la moitié.



Car (par X. 30.) l'angle *d* étant diviſé par la moitié,

$$db.\ bq\ ::\ dc.\ cq.$$

Et par la même raiſon conſiderant *d q*, comme la baſe de l'angle *c*, diviſé par la moitié par *c r*.

$$cd.\ cq\ ::\ dr.\ qr.$$

Donc $db.\ bq\ ::\ dr.\ qr.$

Donc (par X. 31.) la ligne *b r* diviſe l'angle *b* par la moitié. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Corollaire.

Ces lignes coupant par la moitié les angles d'un triangle font pluſieurs proportions. On les peut reduire à 9, en commençant la comparaiſon par les portions des ſecantes.

Pour l'angle *b. b r. r s* $\left\{\begin{array}{ll} b\,d. & d\,s. \\ b\,c. & c\,s. \end{array}\right.$

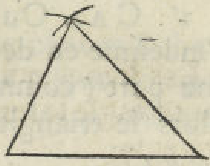
Pour l'angle *c. c r. r p* $\left\{\begin{array}{ll} c\,d. & d\,p. \\ c\,b. & b\,p. \end{array}\right.$

Pour l'angle *d. d r. r q* $\left\{\begin{array}{ll} d\,b. & b\,q. \\ d\,c. & c\,q. \end{array}\right.$

I. PROBLEME.

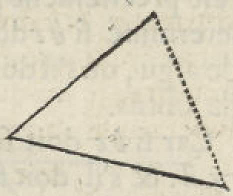
FAIRE un triangle de trois lignes données. Il faut que deux quelconques soient plus grandes que la 3e. XII.

De chacune des deux extremitez de l'une des données décrire un cercle de l'intervalle de chacune des deux autres; où ces deux cercles se rencontreront, ce sera le point où il faudra tirer les deux côtez du triangle.



II. PROBLEME.

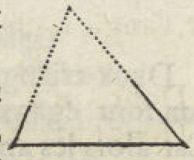
FAIRE le triangle dont on a un angle, & la grandeur des costez qui le comprennent. XIII.



Ayant mis ces deux costez en sorte qu'ils fassent l'angle donné, la ligne qui en joindra les extremitez achevera le triangle.

III. PROBLEME.

FAIRE le triangle dont on a un costé, & les deux angles sur ce costé. XIV.

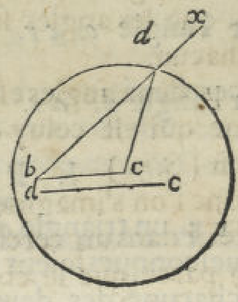


Tirant des lignes sur les extremitez du costé donné qui fassent les angles donnez, où elles se rencontreront elles acheveront le triangle.

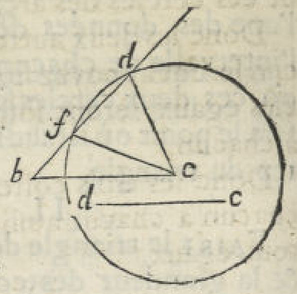
IV. PROBLEME.

FAIRE le triangle dont on a un angle, un des costez qui le comprend, & la grandeur du costé qui le soûtient. XV.

Soit *b c* le costé donné comprenant l'angle donné, & *c d* la grandeur du costé qui doit soûtenir l'angle donné, tirant de *b* une ligne indefinie qui fasse sur *b c* l'angle donné, & décrivant un cercle de *c*, intervalle *c d*.



1. Cas. Ou ce cercle ne coupera l'indefinie qu'au point *d*. Ce qui arrivera toûjours quand le costé qui doit soûtenir l'angle donné est plus grand que celuy qui le comprend) & alors le triangle sera *b c d*.



2^e^ Cas. Ou le cercle coupera l'indefinie en deux points de la même part (comme en *f* & en *d*) & alors le triangle pourra estre *b c d*, ou *b c f*.

Et pour sçavoir lequel des deux c'est precisément, il faudroit avoir determiné si *b c* doit soûtenir un angle aigu, ou s'il doit soûtenir un angle obtus.

Car si *b c* doit soûtenir un angle aigu, le triangle est *b c d*: & s'il doit soûtenir un angle obtus, le triangle est *b c f*.

TRIANGLES COMPAREZ.

I. Theoreme.

XVI. Deux triangles sont tout-égaux, quand les costez de l'un sont égaux aux costez de l'autre, chacun à chacun. Car alors les angles de l'un sont aussi égaux aux angles de l'autre, par VIII. 64.

II. Theoreme.

XVII. Deux triangles sont tout-égaux quand ils ont un angle égal, & que les costez qui comprennent dans l'un cet angle égal, sont égaux à ceux qui le comprennent dans l'autre, chacun à chacun. Car alors la base est aussi égale à la base, par VIII. 65.

III. THEOREME.

DEUX triangles ſont tout-égaux quand ils ont un coſté égal, & que les angles ſur ce coſté égal ſont égaux chacun à chacun. XVIII.

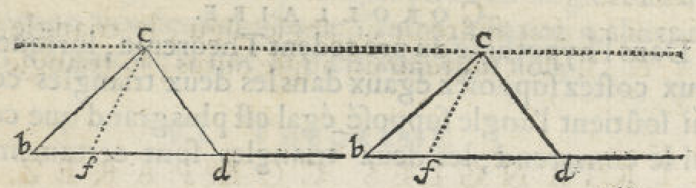
Car ces deux angles eſtant égaux chacun à chacun, le troiſiême qui eſt celuy que ſoûtient le coſté égal, ſera égal auſſi (S. 7.)

Si donc l'on s'imagine que ces deux triangles ſont chacun inſcrit dans un cercle, ces cercles ſeront égaux (par X. 26.) parce que le coſté égal ſoûtiendra dans chacun de ces cercles des arcs d'autant de degrez.

Donc les deux autres angles eſtant égaux chacun à chacun ſeront appuyez ſur des arcs égaux, qui eſtant de cercles égaux ſeront ſoûtenus par des coſtez égaux chacun à chacun.

Donc les trois coſtez de ces deux triangles ſont égaux chacun à chacun auſſi bien que les angles. Donc ils ſont tout-égaux.

IV. THEOREME.



SI deux triangles ont ces trois choſes égales. XIX.

Un angle, comme celuy dont le ſommet eſt en *b*.

Un des coſtez qui comprennent cet angle, comme *b c*.

Et le coſté qui le ſoûtient, comme *c d*, ou *c f*.

Il faut outre cela afin qu'ils ſoient tout-égaux, ou que l'angle que ſoûtient *b c*, ne ſoit obtus ny dans l'un ny dans l'autre, ou qu'il ſoit obtus dans tous les deux.

Car ſuppoſant qu'on euſt mené par *c* une parallele à *b d*.

Ces deux triangles ſeroient enfermez entre deux eſpaces paralleles égaux (par VIII. 56.) parce que *b c* est égale & fait le même angle *c b d* dans l'un & dans l'autre.

Donc le costé *c d* ou *c f* estant égal par l'hypothese dans les deux triangles, s'il est oblique dans tous les deux vers le même endroit, il fait le même angle aigu dans l'un & dans l'autre; lorsque c'est vers le dedans du triangle qu'il est incliné, comme quand c'est *c d*, en l'un & en l'autre; ou le même angle obtus quand c'est vers le dehors, comme si c'est *c f* en l'un & en l'autre. VIII. 56.

Donc les deux triangles qui avoient déja deux costez égaux par l'hypothese se trouvant encore avoir deux angles égaux, & par consequent trois (7. S.) seront tout-égaux par le 2^e^ Theoreme.

Mais si le costé que soûtient *b c* estoit diversement incliné dans ces deux triangles, parce que ce seroit *c d* dans l'un & *c f* dans l'autre, ces triangles n'auroient garde d'être tout-égaux, puisque *c d* feroit dans l'un un angle aigu; & *c f* dans l'autre un angle obtus.

Corollaire.

Dans l'hypothese du precedent Theoreme, lorsque des deux costez supposez égaux dans les deux triangles celuy qui soûtient l'angle supposé égal est plus grand que celuy qui le comprend, les deux triangles sont certainement tout-egaux.

Car alors dans l'un & dans l'autre angle *c d b* est necessairement aigu, par 8. S.

V. Theoreme.

XX. Deux triangles équiangles entr'eux sont semblables. C'est à dire que les costez de l'un sont proportionels aux costez de l'autre. C'est ce qui a esté prouvé en diverses manieres dans les deux livres des Proportionelles. Voyez X. 18.

Avertissement et Definition.

XXI. En comparant deux triangles semblables, il faut toûjours comparer les plus grand costé de l'un au plus grand costé de l'autre, le moyen au moyen, & le plus petit au plus petit. Ainsi le plus grand costé estant appellé *b*. b.

Le moyen *d*. d.

Et le plus petit *h*. h.

Dans deux triangles semblables.

b. b :: *d*. d :: *h*. h.

Et ces costez que l'on doit comparer ensemble s'appellent homologues.

I. Corollaire.

Les costez qui soûtiennent les angles égaux, sont homologues. Car dans l'vn & dans l'autre le plus grand côté soûtient le plus grand angle; le moyen costé le moyen angle; le plus petit costé le plus petit angle. Cela se prouve encore par le X. livre 18. XXII.

II. Corollaire.

Deux triangles sont équiangles, si deux angles de l'un sont égaux aux deux angles de l'autre, chacun à chacun. Car il s'ensuit de là que le 3e est aussi égal au 3e. XXIII.

VI. Theoreme.

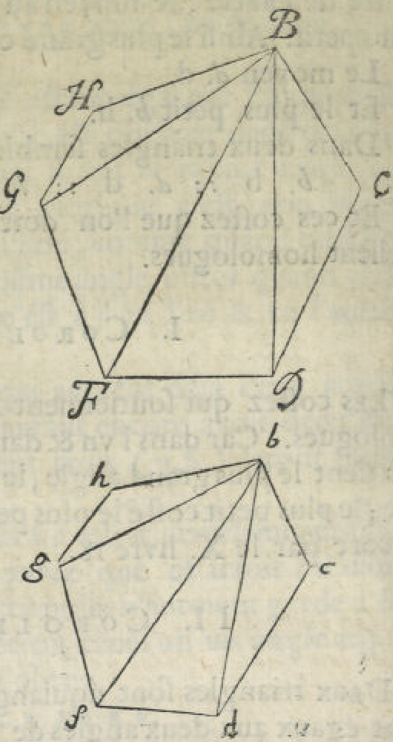
Lorsque deux triangles ont un angle égal, & les costez qui soûtiennent ces angles proportionels, ils sont semblables. Car alors la base est aussi proportionelle à la base, & les deux angles sur cette base égaux, par XI. 63. XXIV.

VII. Theoreme.

Si deux triangles sont de même hauteur, les paralleles à la base également distantes de la base dans l'une & dans l'autre sont entr'elles comme ces bases. XXV.

Cela est demonstré X. 20.

VIII. Theoreme.



XXVI. Deux polygones quelconques estant semblables peuvent estre partagez, chacun en autant de triangles, qui seront tels, que ceux d'une part sont semblables à ceux de l'autre part, chacun à chacun, & les costez homologues de deux de ces triangles semblables, sont en même raison que ceux de deux autres semblables.

Soient deux exagones irreguliers semblables *B C D F G H*, & *b c d f g h*. Soient menées dans le grand des lignes de *B* à *D*, à F, à *G*. Et de même dans le petit.

L'une & l'autre exagone sera en 4 triangles.

Sçavoir $\left\{\begin{array}{llll} BCD. & BDF. & BFG. & BGH. \\ bcd. & bdf. & bfg. & bgh \end{array}\right.$

Qui sont semblables deux à deux *B C D*; à *b c d* &c.

Car les angles *C* & *c* sont égaux par l'hypothese que les exagones sont semblables, & les costez *C B* & *C D* proportionels aux costez *cb* & *c d* par la même hypothese.

Donc les bases *B D* & *b d* sont aussi proportionelles aux costez, & les triangles semblables, par le 6^e^ Theoreme.

B D F & *b d f* sont semblables aussi. Car les angles *C D F* & *c d f* estant égaux par l'hypothese, si on en oste les angles *B D C* & *b d c* qui sont égaux aussi (comme on le vient de voir) les angles *B D F* & *b d f* demeureront égaux.

Or

Or les coſtez de ces angles *B D* & *D F* d'une part, & *b d* & *d f* de l'autre ſont proportionels. Donc les baſes *D F* & *d f* ſont proportionels aux coſtez, & les triangles *B D F* & *b d f* ſemblables. On prouvera la même choſe & de la même maniere des autres triangles. Donc les triangles d'une part ſont ſemblables à ceux de l'autre.

Il reſte à prouver que les coſtez homologues de deux de ces triangles ſemblables ſont en même raiſon que ceux de deux autres ſemblables, ce qui eſt aiſé. Car prenant les points *B* & *b* pour ſommet des quatre triangles d'une part & d'autre, ils auront chacun pour baſe un des coſtez de l'exagone. Les deux premiers *C D* & *c d*, les deux ſeconds *D F* & *d f* &c.

Or par l'hypotheſe *CD. c d* :: *D F. d f.*

Donc les baſes des deux premiers triangles ſont proportionelles aux baſes des deux ſeconds. Et ainſi des autres.

AVERTISSEMENT.

On omet diverſes choſes qui pourroient eſtre dittes des triangles ſemblables, parce qu'il n'y a rien en tout cela qui ne ſe trouve facilement par ce qui a eſté dit des angles conſiderez avec leurs baſes dans les deux livres des Proportionelles. XXVII.

DIVISION DU TRIANGLE EN SES ESPECES.

LE triangle ſe diviſe ſelon les coſtez & ſelon les angles. XXVIII.

Les côtez ſont	tous trois inégaux, & s'appelle		Scalene.
	Deux égaux,		Iſoſcele.
	Tous trois égaux,		Equilateral.
Les angles ſont	Tous trois aigus,		Oxygone.
	Deux aigus & l'autre	obtus,	Amblygone.
		droit,	Rectangle.

Le ſcalene à ſes trois angles inégaux.
L'Iſoſcele en a deux égaux.
L'equilateral les a tous trois égaux.

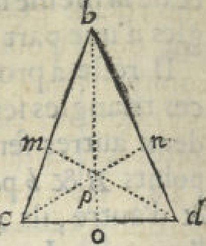
Le ſcalene / L'Iſoſcele	peuvent eſtre	Oxygone.
		Amblygone.
		Rectangle.

L'equilateral ne ſçauroit eſtre qu'oxygone.

DES TRIANGLES OXYGONES

THEOREME.

XXIX. Si de tous les angles d'un triangle oxygone on tire des perpendiculaires aux côtez, elles se couperont en un même point au dedans du triangle.



Soit le triangle *b c d*, & deux perpendiculaires aux costez *d m*, *cn*; je dis que *b o* menée par le point *p*; qui est celuy où *d m* & *c n* se coupent, sera aussi perpendiculaire.

Car les triangles *c b n* & *d b m* sont équiangles ayant chacun un angle droit & un angle commun; & par consequent les angles *b cn* & *b d m* sont égaux.

Et par consequent aussi les triangles *b d m* & *c p m* sont équiangles, ayant chacun un angle droit, & l'angle *m c p* (qui est le même que *b cn*) estant égal à l'angle *b d m*.

Donc *d m. m c : : m b. m p.* & *alternando d m. m b : : m c. m p.*

Donc les triangles *b m p* & *d m c* sont équiangles, par 24. *sup.* puisque dans le triangle *b m p* les costez *d m* & *m c*, qui comprennent un angle drait, sont proportionels à *m b* & *m p* qui comprennent aussi un angle droit.

Donc l'angle *m b p* soûtenu par *m p*, est égal à l'angle *m d c* soûtenu par *m c*.

Or les angles *m p b* & *o p d* sont égaux, parce qu'ils sont opposez au sommet. Donc les triangles *m p b* & *o p d* sont équiangles.

Or l'angle *p m b* est droit par la construction.

Donc l'angle *o p d* est droit aussi. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

XXX. Ces perpendiculaires coupant les angles d'un triangle, font 12 triangles rectangles: 6 grands, qui ont pour hypothenuse l'un des costez du triangle total, & qui enferment tous quelque choſe les uns des autres : & 6 petits entierement ſeparez, & qui ont chacun pour hypothenuſe la portion d'une perpendiculaire la plus proche de l'angle qu'elle coupe ; & ces 12 triangles rectangles ſont 4 à 4 équiangles, deux grands & deux petits. C'eſt un exercice d'eſprit de les trouver, & il vaut mieux le laiſſer à ceux qui commencent. Je diray ſeulement qu'entre les diverſes proportions qui ſe font par tous ces triangles, il y en a de deux ſortes fort conſiderables.

La premiere eſt, que le coſté d'un angle & ſa premiere portion ſont reciproques à l'autre coſté & ſa premiere portion c'eſt à dire que le grand coſté eſt au petit comme la premiere portion du petit à la premiere portion du grand. Exemple dans l'angle *b*.

grand, petit, :: 1. portion du grand, 1. portion du petit.
b d. b c. :: *b m. b n.*

La ſeconde eſt, que les portions d'un coſté du triangle total ſont reciproques à la perpendiculaire entiere, & ſa portion qui fait l'angle droit ; c'eſt à dire qu'une portion du coſté eſt à la perpendiculaire, comme la portion de la perpendiculaire qui fait l'angle droit, eſt à l'autre portion du coſté. Exemple :

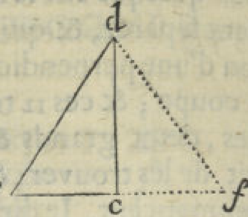
port. du coſté. perpend :: port. de la perp. port. du coſté.
m c. m d :: *m p. m b.*

DES TRIANGLES RECTANGLES.

I. Theoreme.

Si l'un des angles aigus du triangle rectangle eſt double XXXI.
de l'autre (ce qui ne peut eſtre qu'il ne vaille les deux tiers d'un angle droit, & l'autre le tiers, c'eſt à dire qu'il ne ſoit de 60 degrez & l'autre de 30) le petit coſté qui ſoûtient l'angle de 30 degrez & qui en eſt le ſinus, eſt la moitié de l'hypothenuſe de l'angle droit, qui eſt auſſi le rayon de cet angle de 30 degrez.

Soit le triangle *b d c* conforme à l'hypotheſe.



Tirant *d f* égale à *d b* sur *b c* prolongée, l'angle *d f b* sera égal à l'angle *d b f*, & par consequent l'un & l'autre sera de 60 degrez. Donc l'angle *b d f* sera aussi de 60 degrez, puisque tous les trois ensemble valent deux droits, c'est à dire 180 degrez.

Donc le triangle *b d f* est équilateral.

Donc $b\,c + c\,f = d\,b$.

Or $b\,c = c\,f$, les deux triangles *d b c* & *d c f* estant tout-égaux, par 18. *sup.*

Donc *b c* est la moitié de *d b*. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBLEME.

XXXII. TROUVER le triangle rectangle dont on a

1. Ou les deux costez comprenans l'angle droit.
2. Ou l'hypothenuse, & un des costez.
3. Ou l'hypothenuse, & la perpendiculaire du sommet de l'angle droit à cette hypothenuse.
4. Ou l'hypothenuse, & la moyenne proportionelle entre l'hypothenuse donnée, & un des costez.
5. Ou vn des costez & la moyenne proportionelle entre le costé donné & l'hypothenuse.
6. Ou l'un des costez, & la moyenne proportionelle entre ce costé donné & l'autre costé.

PREMIER CAS.

Mettant à l'angle droit les deux costez donnez, la ligne qui en joint les extremitez est l'hypothenuse.

SECOND CAS.

Décrivant la demy-circonference dont l'hypothenuse donnée est le diametre, le point de cette circonference où se terminera le costé donné sera le point du sommet de l'angle droit; ce qui determinera l'autre costé non donné.

TROISIEME CAS.

Voyez IX. 34.

QUATRE, CINQ ET SIXIEME CAS.

Trois lignes estant continuellement proportionelles, ayant la premiere & la seconde, qui est la moyenne, on a la 3^{e} par le Probleme, X. 34. Et par consequent le 4^{e} & 5^{e} Cas se rapportent au 2^{e}, & le 6^{e} au 1er.

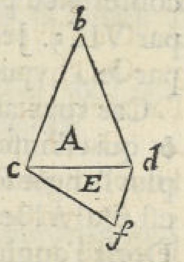
DES TRIANGLES ISOSCELES.

I. THEOREME.

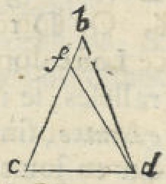
LORSQUE l'angle du sommet d'un triangle Isoscele est XXIII.
de 36 degrez, chacun des angles sur la base est de 72, & la base est la moyenne proportionelle entre le costé entier, & le costé moins cette base (c'est à dire que la base divise le costé en moyenne & extrême raison) & la base estant ajoûtée au côte, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. Voyez XI. 68. 69. 73.

II. THEOREME.

DEUX triangles Isosceles estant semblables XXIV.
& inégaux, si la même ligne est la base de l'un & le costé de l'autre, cette ligne sera moyenne proportionelle entre le costé de triangle dont elle est base, & la base de celuy dont elle est costé.



Soit l'un des triangles Isosceles *b c d*, & l'autre *c f d*, de sorte que *c d* soit la base de *b c d*, & le costé de *c f d*; Je dis que *c d* sera moyenne proportionelle entre *b c* costé du premier triangle, & *f d* base du second. Car ces triangles estant semblables, *b c* (costé du 1er) est à *c d* (costé du 2^{e}) comme le même *c d*, entant que base du premier, est à *f d* base du second.



Donc ∺ *b c. c d. f c.* Ce qu'il falloit demonstrer.

SECONDE SECTION.

Des Quadrilateres.

DEFINITIONS.

LE quadrilatere est une figure de 4 costez qui ne se XXXV.
joignent qu'aux extrêmitez : & par consequent de 4 an-

gles qui tous ensemble valent quatre droits. XII. 5.

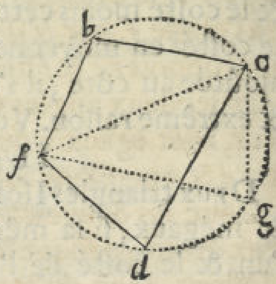
Les costez qui comprennent un même angle s'appellent costez angulaires.

Ceux qui ne comprennent point le même angle, costez opposez.

Les angles de même sont proches ou opposez.

THEOREME.

XXXVI. TOUT quadrilatere qui a ses angles opposez égaux à deux droits, peut estre inscrit au cercle, & nul autre n'y peut estre inscrit.



Soit le quadrilatere *b c d f*, dont les angles *b* & *d* soient égaux à deux droits, & par consequent aussi les angles *f*, *c*.

Soit trouvé le cercle dont la circonference passe par les 3 points *f b c*. par VII. 3. Je dis qu'elle passera aussi par le 4ᵉ, qui est *d*.

Car tout angle qui a *f c* pour base, & qui est inscrit dans ce cercle du costé de *d*, comme *f g c* plus l'angle *b*, vaut deux droits. IX. 26. Or l'angle *f g c* est égal à l'angle *d*, qui plus l'angle *b* vaut aussi deux droits. Donc l'angle *d* est aussi inscrit dans ce cercle par IX. 30.

DIVISION ET DEFINITIONS.

XXXVII. LORSQUE les costez opposez d'un quadrilatere sont paralleles, le 1ᵉʳ au 3ᵉ, & le 2ᵉ au 4ᵉ, on l'appelle *Parallelogramme*, sinon on l'appelle *Trapeze*, quand même deux des costez opposez, comme le 1ᵉʳ & le 3ᵉ seroient paralleles, si le 2ᵉ & le 4ᵉ ne le sont pas.

DES PARALLELOGRAMMES.

I. THEOREME.

XXXVIII SI les costez opposez d'un quadrilatere sont égaux, ils sont paralleles; & s'ils sont paralleles, ils sont égaux. VI. 26. & 27.

II. THEOREME.

XXXIX. SI tous les 4 angles d'un quadrilatere sont droits, il est parallelogramme. VI. 23.

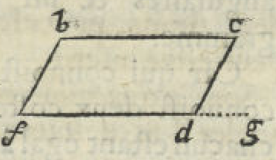
III. Theoreme.

Si deux costez opposez d'un quadrilatere sont égaux & paralleles, les deux autres sont aussi égaux & paralleles. VI. 28. XLI.

IV. Theoreme.

Les deux angles opposez d'un parallelogramme sont égaux, & les proches sont égaux à deux droits. XLII.

Soit le parallelogramme *b c d f*. Soit prolongé *f d* jusques à *g*, l'angle *c d g* est égal à l'angle *c*, par VIII. 53. & à l'angle *f*, par VIII. 54. Donc les aigus opposez *c* & *f* sont égaux.



Or les deux angles vers *d*, l'un exterieur & l'autre interieur, sont égaux à deux droits. Donc les angles interieurs vers *d* & vers *f* sont aussi égaux à deux droits.

Donc les deux autres vers *b* & vers *c* sont aussi égaux à deux droits; puisque les 4 valent 4 droits.

Ostant donc de part & d'autre les deux aigus *c* & *f* qui sont égaux, les obtus opposez *b* & *d* seront égaux.

I. Corollaire.

S'il y a un angle droit dans un parallelogramme, tous les autres le sont aussi, & alors il est appellé *Rectangle*. XLIII.

Car l'opposé est droit, puisqu'il est égal à celuy-là; & les proches ne peuvent valoir deux droits, que l'un estant droit, l'autre ne le soit aussi.

II. Corollaire.

Qui connoist un angle du parallelogramme, les connoist tous. Car ce qui manque de la demy-circonference à l'arc qui mesure l'angle donné, est la mesure de l'angle proche de celuy-là, & les deux autres sont égaux chacun à l'un de ces deux-là. XLIIII.

III. Corollaire.

Deux parallelogrammes qui ont un angle égal, sont equiangles. XLIV.

IV. Corollaire.

XLV. Si deux coſtez angulaires d'un parallelogramme ſont égaux, tous les 4 ſont égaux entr'eux. Car chacun des angulaires eſt égal à ſon oppoſé.

V. Corollaire.

XLVI. Qui connoiſt d'un parallelogramme deux coſtez angulaires & un angle, connoiſt tout le parallelogramme.

Car qui connoiſt un angle, les connoiſt tous; & qui connoiſt deux coſtez angulaires connoiſt les deux autres, chacun eſtant égal à ſon coſté.

Probleme.

XLVII. Decrire un parallelogramme dont on a un angle, & la grandeur de chacun des deux coſtez angulaires.

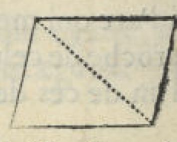
Les deux coſtez angulaires comprenant cet angle, de l'extremité du plus petit décrire un cercle de l'intervalle du plus grand, & de l'extremité du plus grand décrire un cercle de l'intervalle du plus petit: les lignes menées de ces extremitez au point où ces cercles ſe couperont, acheveront la deſcription de ce parallelogramme.

V. Theoreme.

XLVIII. Deux parallelogrammes ſont ſemblables quand ils ont un angle égal, & les coſtez angulaires proportionels.

Car l'égalité d'un angle donne celle des autres; & deux coſtez angulaires ne ſçauroient eſtre proportionels, que les deux autres ne le ſoient auſſi.

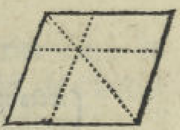
DEFINITION.



XLIX. La ligne qui joint deux angles oppoſez s'appelle *Diagonale*, & elle diviſe le parallelogramme en deux triangles tout-égaux. Car les deux angles non diviſez ſont égaux, parce qu'ils ſont oppoſez; & les parties des diviſez ſont alternativement égales, par VIII. 53.

Sixieme

VI. THEOREME.



SI on tire des paralleles aux costez angulaires qui passent par le même point de la Diagonale, les parties de ces nouvelles lignes sont proportionelles. L.

Demonstré X. 16.

DEFINITION.

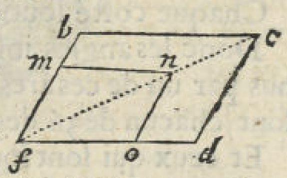
ON dit qu'un parallelogramme est décrit autour de la diagonale d'un autre parallelogramme, quand d'un point de cette diagonale on tire deux paralleles aux deux costez angulaires du parallelogramme, qui se terminant chacune à l'un de ces costez fassent un nouveau parallelogramme, dont une partie de cette diagonale est encore diagonale. LI.

VII. THEOREME.

TOUT parallelogramme décrit autour de la diagonale d'un autre, luy est semblable. LII.

b c d f est semblable à *m n o f*. Car d'une part *f d c* & *f o n* sont égaux ; parce que *c d* & *n o* sont paralleles.

Et par la même raison *f c d*, & *f n o* sont égaux aussi.



Donc *f d*. *f o* :: *d c*. *o n*.

Donc ces parallelogrammes sont equiangles, & ont les costez angulaires proportionels. Donc ils sont semblables par le 5ᵉ Theoreme.

DIVISION DU PARALLELOGRAMME EN SES ESPECES.

LIII.

- Selon ses
  - costez angulaires
    - égaux
      - Quarré
      - Rhombe
    - inégaux
      - Oblong
      - Rhomboïde
  - angles
    - droits, rectangle
      - Quarré
      - Oblong
    - non droits
      - Rhombe
      - Rhomboïde

Quarré, Oblong : angles droits. Rhombe, Rhomboïde : angles non droits.

Quarré, Rhombe : costez tous égaux. Oblong, Rhomboïde : côtez non tous égaux.

AUTREMENT.

Parallel.	rectangle	tous les coſtez égaux.	Quarré.
		les ſeuls oppoſez égaux.	Oblong.
	non rectangle	tous les coſtez égaux.	Rhombe.
		les ſeuls oppoſez égaux.	Rhomboïde.

DU PENTAGONE.

THEOREME.

LIV. LORSQUE deux lignes qui ſoutiennent chacune un angle d'un pentagone regulier ſe coupent, elles ſe coupent mutuellement en moyenne & extrême raiſon, & la plus grande partie de chacune de ces lignes eſt égale au coſté du pentagone.

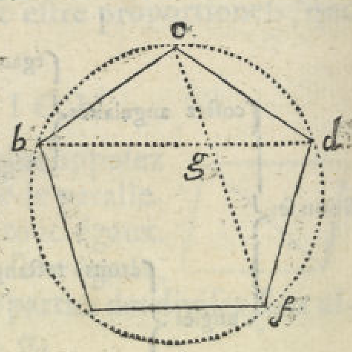
Soit le pentagone inſcrit dans un cercle.

Chaque coſté ſoutient un arc de 72 degrez. XII. 21.

Donc les angles inſcrits au même cercle qui ſont ſoutenus par un de ces arcs (tels que ſont *c b d*, *c d b*, *d c f*, *d f c*) ſont chacun de 36 degrez. IX. 18.

Et ceux qui ſont ſoutenus par deux de ces coſtez (comme l'angle *b c f*) ſont de 72. *ibid.*

Et les angles oppoſez au ſommet (*b g c* & *f g d*) ſont chacun auſſi de 72 degrez, par IX. 40. Et par conſequent *b g* eſt égale à *b c* côté du pentagone.



Donc l'angle *c b g* eſt tel par XI. 73. & 69. que la baſe étant jointe au coſté, il s'en fait une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon. Or *g d* eſt égale à la baſe *g c*. Donc la toute *b d* eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon. C'eſt à dire que,

b d. b g :: b g. g d.

Corollaire.

Un exagone & un decagone estant inscrits dans le même cercle, le côté de l'un ajoûté au costé de l'autre fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. LV.

Car l'angle compris entre deux demy-diametres, qui a pour base le costé du decagone, est un angle de 36 degrez (XII. 21. & 39.) Donc ajoûtant le costé à la base, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. XI. 73. & 69. *& sup.* 33.

Or le costé de cet angle qui est le demy-diametre, est aussi le costé de l'exagone inscrit dans ce cercle là.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QVATORZIE'ME.

DES FIGVRES PLANES considerées selon leur aire : c'est à dire selon la grandeur des surfaces qu'elles contiennent.

Et premierement des Rectangles.

IDE'E GENERALE DE LA MESURE DES SURFACES.

1. *LA surface estant une étenduë de deux dimensions, longueur & largeur, il est necessaire pour en connoistre la grandeur, de sçavoir quelle en est la longueur, & qu'elle en est la largeur.*

La longueur se mesure par une ligne droitte qui donne la distance d'un point à un point. C'est pourquoy on ne peut connoître la longueur des lignes courbes que par rapport à des lignes droites.

La largeur consiste dans la distance entre deux lignes ; comme entre b *&* c, *qui se mesure aussi par une ligne droite. C'est pourquoy les surfaces courbes ne se peuvent mesurer que par rapport à des surfaces planes.* Voyez la figure cy-dessous.

De plus toute ligne droitte n'est pas propre à mesurer la distance d'une ligne à une ligne. Car si elle tomboit du point d'une ligne obliquement sur l'autre, elle n'en mesureroit pas la distance ; mais tombant du point d'une ligne perpendiculairement sur l'autre, elle mesure la distance de ce point à cette ligne.

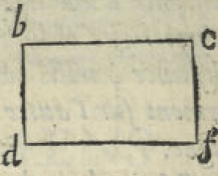
Mais il ne s'ensuit pas que pour avoir mesuré la distance d'un des points de la ligne b *à la ligne* c, *elle ait mesuré la distance de tous les autres points de la ligne* b, *à moins que tous les autres points de la ligne* b *fussent également distans de la ligne* c ; *c'est à dire qu'elle luy fust parallele.*

D'où il s'ensuit que si b *n'estoit pas parallele à* c, *il faudroit autant de differentes mesures pour connoistre la distance de* b *à* c, *qu'il y auroit de differens points dans* b. *Ce qui estant impossible, il paroist par là qu'afin qu'on puisse avoir distinctement la distance d'une ligne à une autre (ce qui fait la largeur) il faut que ces lignes soient paralleles.*

De plus, si ces lignes sont inégales, & que b *soit plus grande que* c, *on ne sçauroit laquelle prendre pour la longueur, parce que cette surface seroit plus longue d'un costé que de l'autre. Et ainsi afin qu'on puisse avoir exactement la mesure d'une surface, il faut que les lignes dont la distance en fait la largeur, soient non seulement paralleles ; mais aussi égales. D'où il arrivera que les autres lignes seront aussi égales & paralleles entr'elles.*

Et par consequent afin qu'une surface soit en estat d'estre exactement mesurée, il faut qu'elle soit terminée par 4 lignes paralleles ; c'est à dire que ce soit un parallelogramme.

Mais si les deux lignes égales & paralleles qu'on prend pour mesure de la longueur ne sont pas directement opposées, en sorte que de tous les points de l'une on puisse tirer des perpendiculaires sur tous les points de l'autre ; c'est à dire si ce parallelogramme n'est pas rectangle, mais obliquangle, on aura bien alors *dans la figure dequoy en mesurer la longueur, sçavoir lequel on voudra de deux costez opposez. Mais l'autre costé angulaire estant oblique sur cette longueur, ne sera pas propre à mesurer la distance entre les deux lignes qui font la longueur. D'où il s'ensuit qu'il n'y a que le rectangle qui ait en soy la mesure de sa longueur & de sa largeur. Car si* d f *est pris pour la longueur,* d b *qui est la mesure de la distance de tous les points de* b c *à* d f, *en mesurera la largeur.*



C'est pourquoy nulle surface ne se mesure proprement par soy-même, que le rectangle. Et dans tout rectangle l'un des costez angulaires à choisir, se peut appeller sa longueur, *& l'autre* sa largeur; *ou pour s'accommoder davantage aux termes communs, l'un* sa base, *& l'autre* sa hauteur.

Mais comme la mesure est d'autant plus parfaite qu'elle est plus simple, & que le quarré *qui n'a qu'une mesme mesure pour sa longueur & pour sa largeur, est plus simple que l'oblong qui en a deux; il est arrivé de là que les hommes prennent le quarré de quelque ligne connüe, comme d'une toise, d'un pied, d'un pouce &c. pour la mesure commune de toutes les surfaces; & qu'alors seulement ils en croïent connoître parfaitement la grandeur, quand ils peuvent dire qu'elle est de tant de toises quarrées, ou de tant de pieds quarrez, ou de tant de pouces quarrez &c. Et ainsi ce qu'on entend ordinairement par ces mots; avoir l'aire d'un plan, c'est sçavoir combien ce plan, de quelque figure qu'il soit, contient ou de toises quarrées, ou de pieds quarrez, ou de pouces quarrez; & quand on parle de surface on sous-entend le mot de quarré sans l'exprimer: comme quand on dit que la place d'un logis est de tant de toises, cela s'entend de toises quarrées, dont chacune vaut* 36 *pieds quarrez.*

Neanmoins comme cela ne se peut pas toûjours connoître à cause des grandeurs incommensurables, on se contente souvent en comparant des surfaces ensemble, de sçavoir que si l'une contient tant de petits rectangles, comme 16 *fois* b c, *l'autre en contient tant aussi; comme* 25 *fois le même* b c.

Tout cela nous fait voir, 1°. Que la premiere & la plus parfaitte mesure est le quarré, & que c'est par le quarré qu'on mesure les rectangles pour en connoitre exactement la grandeur.

2°. Que la plus parfaite aprés le quarré, & qui est même parfaite en son genre, parce qu'elle contient en soy la mesure de la longueur & de la largeur, est le rectangle oblong; & que c'est par là que l'on mesure les autres parallelogrammes.

3°. Que celle d'aprés, & qui est imparfaite, ne contenant pas en soy la mesure de la longueur & de la largeur, est le parallelogramme non rectangle: & que c'est d'ordinaire par ces parallelogrammes que l'on mesure les triangles, en ce qu'on les considere comme les moitiez de ces parallelogrammes.

4°. Que le triangle suit aprés, & que c'est par luy qu'on mesure d'ordinaire les autres polygones en les reduisant en triangles; comme ils s'y peuvent tous reduire.

5°. Qu'enfin les autres polygones sont mesurez & ne servent point de mesure, comme le quarré sert de mesure & n'est point mesuré si ce n'est par d'autres plus petits; comme quand on dit que la toise quarrée contient 36 pieds quarrez. Voilà en abregé tout ce qu'a pû faire l'art des hommes pour mesurer les surfaces rectilignes, sans parler des curvilignes qui ne se peuvent mesurer que part rapport à des rectilignes.

Mais comme toutes nos connoissances qui dependent de l'art en supposent de naturelles qu'on appelle Axiomes, voicy ceux sur lesquels est fondée toute la science de la dimension des figures planes.

I. Axiome.

Tous les quarrez de racine égale, sont égaux. C'est II.
à dire que les espaces compris dans le quarré de la ligne *b*, & dans celuy de la ligne *m* égale à *b*, & de quelque autre ligne que ce soit égale à *b*, sont égaux. Cela est clair par la notion même de la surface, qui n'ayant que deux dimensions, longueur & largeur, il n'est par plus clair que deux lignes droittes d'une même longueur sont égales, qu'il est clair que deux surfaces de même longueur & de même largeur sont égales. Or deux quarrez sont de même lon-

gueur & de même largeur, si la ligne qui mesure dans l'un tant la longueur que la largeur, est égale à celle qui mesure dans l'autre tant la longueur que la largeur.

C'est pourquoy aussi par tout où une ligne d'une certaine longueur se trouve, comme de la longueur de *b*, elle peut estre marquée par le même caractere & appellée *b*. Car il ne peut y avoir de difference que de situation, ce qui n'y fait rien. Et ainsi il ne faut pas s'étonner si *bb* est par tout égal à *bb*.

II. Axiome.

§ II. Si les costez angulaires d'un rectangle sont égaux aux costez angulaires d'autres rectangles, chacun à chacun, tous ces rectangles sont égaux. Ou ce qui est la même chose, tous ceux dont la base est égale à la base, & la hauteur à la hauteur, sont égaux.

C'est la même chose que le precedent. Car les costez angulaires d'un rectangle en mesurent la longueur & la largeur; & on peut méme, comme nous avons dit, en appeller l'un sa longueur, & l'autre sa largeur indifferemment. Et par consequent tous les rectangles dont les costez angulaires sont égaux, chacun à chacun, ont même longueur & même largeur.

On peut encore dire que les costez angulaires d'un rectangle pouvant estre marquez par les mesmes caracteres par tout où ils se rencontrent égaux, comme par *b* & par *c*, par tout où l'un est égal à *b* & l'autre à *c*, dire qu'ils sont égaux; c'est à dire que *bc* est égal à *bc*.

Avertissement.

§ V. *Ces deux axiomes nous font voir que tout ce que nous avons dit dans le premier livre de la multiplication des grandeurs incomplexes & complexes; & dans le 3^e de la raison entre les grandeurs planes, se peut appliquer aux quarrez & aux rectangles; & qu'il n'y a qu'à substituer des lignes au lieu des simples caracteres.*

C'est ce que nous verrons en peu de mots en commençant par la puissance des lignes.

Definition

QVARRÉ NATVREL DE XI.

1 e	2	3	4	5	6 m	7	8	9	10	11 o
12	13 e	14 è	15	16	17 m	18	19	20 ò	21 o	22
23	24 ω	25 e	26	27	28 m	29	30	31 o	32	33
34	35	36	37 e	38 è	39 m	40 ò	41 o	42	43	44
45	46	47	48 ω	49 e	50 m	51 o	52 β	53	54 β	55
56 α	57 α	58 α	59 α	60 α	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

QVARRÉ MAGIQVE DE XI.

58	26	30	95	93	97	47	42	86	69	28
35	37	12	45	84	63	82	99	88	39	87
43	100	60	119	118	73	5	2	50	22	79
90	67	7	13	102	65	108	17	115	55	32
76	74	10	98	56	121	6	24	112	48	46
31	41	51	21	11	61	111	101	71	81	91
107	70	114	68	116	1	66	54	8	52	15
103	33	113	105	20	57	14	109	9	89	19
18	44	72	3	4	49	117	120	62	78	104
16	83	110	77	38	59	40	23	34	85	106
94	96	92	27	29	25	75	80	36	53	64

QVARRÉ NATVREL DE XII.

e 1	è 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ò	12 o
13	e 14	è 15	ê 16	17	18	19	20	21 ô	22 ò	23 o	24
25	ω 26	e 27	è 28	29	30	31	32	33 ô	34 o	35	36
37	38	39	e 40	è 41	ê 42	43 ô	44 ò	45 o	46	47	48
49	50	51	ω 52	53	54	55	56	57 γ	58	59 γ	60
β 61	β 62	β 63	β 64	65	66	67	68	69 α	70 α	71 α	72 α
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140.	141	142	143	144

QVARRÉ MAGIQVE DE XII.

118	28	116	39	94	30	31	99	58	113	33	111
17	52	24	109	104	69	45	101	97	60	64	128
127	57	92	8	11	54	55	136	135	89	88	18
126	40	2	26	130	23	71	123	62	143	105	19
20	13	5	59	144	6	7	133	86	140	132	125
63	120	65	14	61	79	78	72	131	80	25	82
75	108	77	129	73	67	66	84	16	68	37	70
38	49	142	124	12	138	139	1	21	3	96	107
95	103	141	83	15	122	74	22	119	4	42	50
47	102	56	137	134	91	90	9	10	53	43	98
110	81	121	36	41	76	100	44	48	85	93	35
34	117	29	106	51	115	114	46	87	32	112	27

870

DEFINITION.

ON appelle puissance d'une ligne le quarré de cette li- V.
gne, comme *b b* est la puissance de *b*, ou bien le rectangle de deux lignes quand il s'agit de deux lignes, comme la puissan ce de *b* par *c* est le rectangle *b c*.

DE LA PVISSANCE D'VNE LIGNE comparée avec la puissance de ses parties.

TOUT ce qu'on enseigne de la puissance d'une ligne VI.
comparée avec la puissance de ses parties, n'est que la même chose que ce que nous avons dit dans le premier livre de la multiplication des grandeurs complexes; & se peut reduire à cet Axiome.

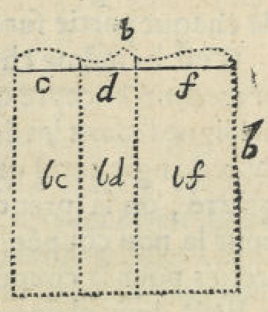
III. AXIOME.

C'est la même chose de multiplier le tout par le tout, VII.
& de multiplier le tout par chacune de ses parties, ou de multiplier chaque partie par toutes les parties, en faisant autant de multiplications partiales qu'est le produit des deux nombres des parties qu'on multiplie les unes par les autres.

AVERTISSEMENT.

Ainsi le plus grand mystere pour ne se point broüiller est de VIII.
nommer chaque ligne autant que l'on peut par un seul caractere, afin que deux caracteres joints ensemble puissent marquer une multiplication; c'est à dire un rectangle, & de marquer par un même caractere les lignes égales.

Exemple: La ligne b *soit divisée en trois portions inégales que j'appelleray* c. d. f. *il est visible que c'est la même chose de multiplier* b *par* b, *ce qui donne* b b, *que de multiplier* b *par toutes ces parties; c'est à dire par* c, *par* d, *& par* f, *ce qui donne* b c. b d. b f : *& par consequent* b b = b c + b d + b f.



Ainsi presque toutes les propositions du second livre d'Euclide ne sont que des Corollaires de cet

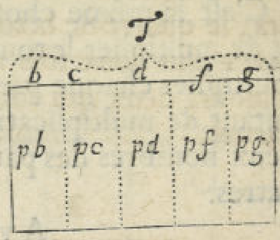
Axiome & de cet Avertissement. Ie ne proposeray que les principales qui sont d'usage.

Ie suppose toûjours qu'on mette à angles droits les lignes qui doivent faire les costez angulaires des rectangles, sans que je m'amuse plus à en avertir.

Et quand je parle d'une ligne coupée en plusieurs parties, j'entens toûjours égales ou inégales, à moins que j'exprime qu'on les doive prendre égales.

I. THEOREME.

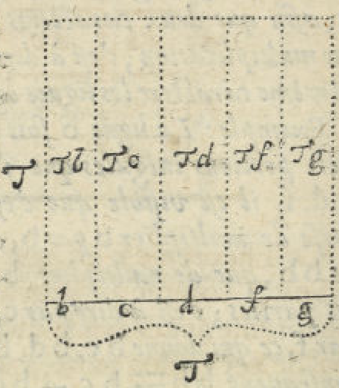
IX. AYANT deux lignes, l'une non coupée; & l'autre coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle des deux entieres est égal à tous les rectangles de la non coupée par chaque partie de la coupée. C'est à dire qu'un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.



Soit p la non coupée, & T la coupée en 5 parties b, c, d, f, g; il est bien visible qu'en tirant des lignes paralleles à p, & par consequent qui luy sont égales par tous les points de division de T, elles feront pb, pc, pd, pf, pg, qui pris ensemble sont égaux à pT, puisque c'en sont toutes les parties.

II. THEOREME.

X. UNE ligne estant coupée en plusieurs parties, le quarré de la toute est égal aux rectangles de chaque partie sur la toute.



C'est la même chose que le precedent, excepté que la même ligne faisant les deux costez du rectangle total qui est alors quarré, on la prend une fois pour la non coupée, & une autrefois pour la coupée.

Il est donc clair que T estant coupé en b, c, d, f, g.
TT doit estre égal à Tb, Tc, Td, Tf, Tg.

III. THEOREME.

UNE ligne eſtant coupée en tant de parties que l'on XI.
voudra, le rectangle de quelque partie que ce ſoit par la toute, eſt égal au quarré de cette partie plus les rectangles de cette partie par chacune des autres.

Soit *T* comme auparavant diviſé en 5 parties *b. c. d. f. g.* il eſt clair par le premier Theoreme, que le rectangle de *b* par la toute eſt êgal aux 5 rectangles de *b* par chaque partie de *T*. Or *b* eſt l'une de ces parties, & par conſequent l'un de ces 5 rectangles ſera *b b*. C'eſt à dire le quarré de cette partie, & les autres 4 rectangles ſeront le rectangle de *b* par chacune des autres parties; ſçavoir *b c. b d. b f. b g.*

IV. THEOREME.

UNE ligne eſtant diviſée en tant de parties que l'on vou- XII.
dra, le quarré de la toute eſt égal aux quarrez de chaque partie plus deux fois autant de rectangles, dont il y en a toujours deux qui ſont les rectangles des mêmes deux parties.

	b	*c*	*d*	*f*	*g*
b	*bb*	*bc*	*bd*	*bf*	*bg*
c	*cb*	*cc*	*cd*	*cf*	*cg*
d	*db*	*dc*	*dd*	*df*	*dg*
f	*fb*	*fc*	*fd*	*ff*	*fg*
g	*gb*	*gc*	*gd*	*gf*	*gg*

Ce Theoreme n'eſt que l'aſſemblage du 2e & du 3e.

Soit *T* comme auparavant diviſée en *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, par le 1er Theoreme ayant fait le quarré *T T*, & n'ayant diviſé qu'un ſeul de ces coſtez par *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, & tiré les paralleles à l'autre coſté, on a 5 bandes, dont on peut appeller chacune de nom de ſa partie, ſçavoir *T b*, *T c*, *T d*, *T f*, *T g*. Mais diviſant encore l'autre coſté par les mêmes *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, on divise chacune des 5 bandes en 5, ce qui fait 25, & dans chaque bande ainsi divisée se trouve un quarré de la partie dont elle est bande (dans *T b*, *b b*, dans *Tc*, *cc)* & quatre rectangles des autres parties par celle-là. Et il est aisé de voir que dans chaque bande se trouve toujours un rectangle de deux parties, dont le rectangle se trouve encore dans un autre, comme dans *T b* se trovve *b c*, qui se trouve aussi dans *T c*, & ainsi tout le quarré contient

5 quarrez *b b. c c. dd. ff. gg.*
20 rectangles 2. *b c.* 2. *b d.* 2. *bf.* 2. *b g.*
2. *cd.* 2. *c f.* 2. *c g.*
2. *df.* 2. *d g.*
2. *f g.*

COROLLAIRE.

XIII. LE plus grand usage de ces Theoremes est quand la ligne est coupée en deux. C'est pourquoy il faut bien retenir ces trois propositions.

1. Le quarré de la toute est égal aux deux rectangles de chaque partie par la toute.

2. Le rectangle d'une partie par la toute est égal au quarré de cette partie, plus le rectangle des deux parties.

3. Le quarré de la toute est égal aux 2 quarrez de chaque partie plus deux fois le rectangle des deux parties.

DE LA PROPORTION entre les Rectangles.

PROPOSITION FONDAMENEALE.

XIV. LES rectangles qui ont un costé égal à un costé, & l'autre inégal, sont entr'eux comme l'inégal.

Ou, les rectangles de même hauteur sont comme leurs bases.

D'égale base sont comme leurs hauteurs.

Ou, d'égale longueur sont comme leurs largeurs.

D'égale largeur sont comme leurs longueurs.

Tout cela n'est que la mesme chose, & peut passer pour prouvé dans le 2^e Livre.

Neanmoins en voicy encore la preuve. La these est

b c. b d :: c. d.

L'aliquote quelconque de *c* soit appellée *x*.

Si par tous les points de la division on tire des paralleles à *b*, il est clair que *b x* sera autant de fois dans *b c*, qu'*x* dans *c*. C'est à dire que *b x* & *x* seront toûjours les aliquotes pareilles, l'une de *b c*, & l'autre de *c*. Car il est bien clair que toutes les *x* estant égales, tous les *b x* seront égaux.

Que si on applique *x* à *d*, base du rectangle *b d*, & qu'on tire aussi par tous les points de la division des paralleles à *b*, il est clair que *b x* sera autant de fois dans *b d*, qu'*x* dans *d*, & que si *x* est precisément tant de fois dans *d*, *b x* sera aussi precisément tant de fois dans *b d*. Et si *x* n'est pas precisément tant de fois dans *d*, mais avec quelque reste; *b x* de mesme ne sera pas precisément tant de fois dans *b d*, mais avec un rectangle de reste plus petit que *b x*.

Donc les aliquotes pareilles de *b c* & de *c* sont également contenuës, celles de *b c* dans *b d*, & celles de *c* dans *d*.

Donc par la definition de l'égalité des raisons *b c* & *b d* sont en mesme raison que *c* & *d*; puisque les aliquotes pareilles des antecedens *b c* & *c* sont également contenuës dans les consequens *b d* & *d*. Donc *b c. b d :: c. d.*

I. Corollaire.

Les rectangles sont en raison composée de la longueur à la longueur, & de la largeur à la largeur. C'est la definition mesme de la raison composée. III. 2. 4. XV.

b c. mn :: b + m. c + n.

II. Corollaire.

Les rectangles semblables sont en raison doublée de leurs costez homologues, XVI.

Car les rectangles sont semblables, quand la longueur est à la longueur, comme la largeur à la largeur.

bf & *cg* sont semblables, si *b. c :: f. g.*

Donc la raison de ces deux rectangles est composée de deux raisons égales, par le premier Corollaire.

Donc cette raison est doublée de chacune par la definition de la raison doublée.

III. COROLLAIRE.

XVII. LES quarrez sont en raison doublée de leurs racines. C'est la mesme chose que le precedent.

Et ainsi si *b* est double de *d*, *bb* est quadruple de *dd*.

IV. COROLLAIRE.

XVIII. LES rectangles reciproques sont égaux. Car on appelle les rectangles reciproques quand la longueur du premier est à la longueur du second, comme la largeur du second est à la largeur du premier.

Ainsi *b g* & *c f* sont reciproques, si

b c. :: *f. g.*

Or la grandeur plane des deux extremes d'une proportion est égale à la grandeur plane des moyens.

Donc *b g* ⊐ *c f.*

MESMES COROLLAIRES AUTREMENT PROPOSEZ.

SI 4 lignes sont proportionelles,

b. c. :: *f. g.*

XIX. 1. Le rectangle des antecedens *b f*, est au rectangle des consequens *c g*, en raison doublée de la raison de cette proportion *b. c.* ou *f. g.*

2. Le rectangle des deux premiers termes *b c* est au rectangle des deux derniers *f g* en raison doublée de la raison alterne de cette proportion *b. f.* ou *c. g.*

3. Le rectangle des deux extrêmes est égal au rectangle des deux moyens, *b g* ⊐ *c f.* II. 27.

4. Les quarrez de ces quatre lignes sont proportionels *bb. cc.* :: *ff. gg.* par III. 24.

5. Si trois lignes sont continüement proportionelles, le quarré de celle du milieu est égal au rectangle des extremes.

Si ÷ *b. c. d.* *cc* ⊐ *bd.* II. 27.

6. Les quarrez des deux premiers *bb* & *cc* sont en même raison que la premiere & la troisiéme.

bb. cc :: *b. d.* par III. 26.

V. COROLLAIRE.

UNE ligne estant divisée en deux parties, si deux autres lignes sont moyennes proportionelles, l'une entre la toute & sa plus grande partie, & l'autre entre la même toute & sa plus petite partie : les deux quarrez de ces deux lignes sont égaux au quarré de cette toute. XX.

Soit *h* divisée en *m* & *n*.

Soit *b* moyenne entre *h* & *m*.

Et *d* entre *h* & *n*.

Puisque ∺ *h. b. m.* $bb = hm$.

Et puisque ∺ *h. d. n.* $dd = hn$.

Donc $bh + dd = hm + hn$.

Or $hm. + hn. = hh$.

Donc $bb + dd = hh$.

AVERTISSEMENT.

On peut rapporter icy tout ce qui a esté demonstré dans le 2e & 3e livre des grandeurs planes en general. Car le rectangle est la grandeur plane en matiere d'estenduë ou espace. XXI.

APPLICATION DE CETTE DOCTRINE Generale à quelques lignes particulieres qu'on a fait voir cy-devant être proportionelles.

I. THEOREME.

SI deux lignes se coupent dans un cercle, le rectangle des portions de l'une est égal au rectangle des portions de l'autre. Voyez XI. 55. XXII.

II. THEOREME.

LE quarré de la perpendiculaire d'un point de la circonference au diametre, est égal au rectangle des portions du diametre. Voyez XI. 57. XXIII.

III. Theoreme.

XXIV. Si d'un point hors le cercle deux lignes sont menées jusqu'à la concavité du cercle, le rectangle d'une toute & de sa portion qui est hors le cercle, est égal au rectangle de l'autre toute & de sa portion, qui est aussi hors le cercle. Voyez XI. 52.

IV. Theoreme.

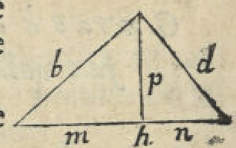
XXV. Si d'un point hors le cercle on mene une ligne qui touche le cercle, & l'autre qui le coupe jusqu'à la concavité, le quarré de la tangente est égal au rectangle de l'autre toute, & de sa portion qui est hors le cercle. XI. 54.

Et si on appelle la tangente p, la secante entiere t, la partie qui est hors le cercle h, & celle qui est au dedans d on aura toutes ces égalitez par ce qui a esté dit cy-devant.

$pp = ht.$
$pp = hh. + hd.$
$hh = pp. - hd.$
$tt = ht. + dt.$
$tt = pp. + dt.$

V. Theoreme.

XXVI. Si du sommet d'un angle droit on tire une perpendiculaire sur l'hypothenuse,



1. Le quarré de cette perpendiculaire est égal au rectangle des deux portions de l'hypothenuse. $pp = mn.$

2. Le quarré du grand côté de l'angle droit est égal au rectangle de l'hypothenuse entiere & de sa grande portion, $bb = hm.$

3. Le quarré du petit costé est égal au rectangle de l'hypothenuse entiere, & de sa petite portion, $dd = hn.$

4. Le quarré de toute l'hypothenuse est égal aux quarrez des deux costez $bb + dd. = hh.$

Les 3 premiers points sont clairs, par XI. 58.

Et le 4[e] par le 5[e] Corollaire S.

I. Corollaire

I. COROLLAIRE.

La diagonale d'un rectangle peut autant que les quarrez des deux costez. XXVII.

II. COROLLAIRE.

La diagonale d'un quarré peut 2 fois le quarré du costé. XXVIII.

III. COROLLAIRE.

La diagonale du quarré est incommensurable en longueur au costé, & commensurable en puissance. XI. 76. XXIX.

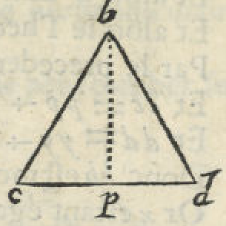
IV. COROLLAIRE.

La hauteur d'un triangle equilateral (c'est à dire la perpendiculaire du sommet à la base) est incommensurable en longueur au costé, & commensurable en puissance, le quarré du costé estant au quarré de cette perpendiculaire comme 4 à 3. XXX.

La premiere partie est claire, par XI. 79.

La seconde se prouve ainsi: *p d* est la moitié de *b d*. Donc le quarré de *b d* est au quarré de *p d* comme 4 à un. Or ce même quarré de *p d*, plus celuy de *b p*. est égal au quarré de *b d*.

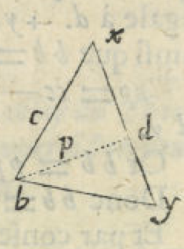
Donc le quarré de *b d* est à celuy de *b p* comme 4 à 3.



VI. THEOREME.

Le quarré de la base d'un angle aigu est égal aux quarrez des costez qui le comprennent moins deux fois le rectangle du costé sur lequel on mene une perpendiculaire de l'extremité opposée de la base &: de la ligne comprise entre le sommet de cet angle aigu & de cette perpendiculaire. XXXI.

Soit la base de l'angle aigu nommé *b*.
Le costé vers lequel on ne mene point la perpendiculaire, *c*.
Celuy sur lequel on la mene, *d*.
La perpendiculaire, *p*.
La ligne comprise entre la perpendiculaire & le sommet de l'angle aigu. *x*.



Celle qui eſt compriſe entre la perpendiculaire & la baſe, y.

Je dis que $bb = cc. + dd. — 2. dx$.

Mais il faut remarquer qu'x eſt quelquefois $d — y$.

Quelquefois d ſimplement.

Et quelquefois $d. + y$.

Selon que d fait ſur la baſe, ou un angle aigu, ou un droit, ou un obtus.

Mais quand d fait un angle droit ſur b, il eſt plus court de dire que bb baſe de l'angle aigu, eſt égal à cc. moins dd. comme il eſt clair par le precedent Theoreme. Et ainſi reſte ſeulement les deux autres cas.

PREMIER CAS.

QUAND d fait ſur la baſe un angle aigu, la perpendiculaire coupe d en deux parties.

Et ainſi $d = x + y$. & $x = d — y$.

Et alors le Theoreme ſe prouve ainſi.

Par le precedent Theoreme $bb. = pp + yy$.

Et $cc = pp + xx$.

Et $dd = yy + xx + 2. yx$.

Donc bb eſt moindre que $cc + dd$. de $2. xx$, & $2. yx$.

Or x eſtant égale, $d — y. \; xx = dx — xy$.

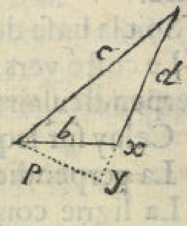
Donc $xx + xy = dx$.

Donc $2. xx + 2 xy = 2. dx$.

Donc $bb. = cc. + dd. — 2. dx$. Ce qu'ill falloit demonſtrer.

SECOND CAS.

SI d fait un angle obtus ſur b, alors p ne tombe ſur d qu'eſtant prolongé, & y eſt une ligne ajoûtée à d. & x eſt égale à $d. + y$. Ce qui fait qu'on prouve ainſi que $bb = cc + dd — 2. dx$.



$pp = cc — xx$. c'eſt à dire — $dd — yy — 2. dy$.

Or $bb = pp. + yy$.

Donc $bb = cc — dd — dy$.

Et par conſequent $bb = cc + dd — 2. dd. — 2. dy$.

Or $x = d. + y$. Donc $dd + dy = dx$.

Donc $2.\ dd + 2.\ dy = 2.dx$.

Donc $bb = cc + dd - 2.\ d\,x$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

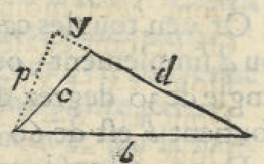
De tout cecy il eſt aiſé de conclure que ſi des deux extremitez de la baſe d'un angle aigu, on tire des perpendiculaires à chaque coſté, le rectangle d'un coſté & de la ligne compriſe entre le ſommet de l'angle aigu; & la perpendiculaire qui tombe ſur ce coſté ſera toûjours égale au rectangle de l'autre coſté & de la ligne compriſe entre le ſommet de l'angle aigu & la perpendiculaire qui tombe ſur cet autre coſté.

VII. Theoreme.

Le quarré de la baſe de l'angle obtus eſt égal aux quarrez des coſtez, plus le rectangle du coſté vers lequel on aura mené une perpendiculaire de l'extremité de cette baſe & de la ligne compriſe entre cette perpendiculaire & le ſommet de l'angle obtus. XXXII.

Il eſt clair que cette perpendiculaire ne peut tomber ſur aucun coſté qu'en le prolongeant.

Soit donc la baſe b.
Le coſté non prolongé c.
L'ajoûtée y.
La perpendiculaire p.



bb eſt égal au quarré de p, plus le quarré de $d + y$. C'eſt à dire que

$bb = pp + yy\ \ dd. + 2.dy$.

Or $cc = pp. + yy$.

Donc $bb = cc + dd + 2.dy$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Avertissement.

On peut faire icy un Corollaire ſemblable à celuy du Theoreme precedent. Ie le laiſſe à chercher, & à prouver ſi l'on veut par les principes du livre des lignes proportionelles. XXXIII.

VIII. Theoreme.

Le quarré de la baſe d'un angle obtus, qui vaut les deux XXXIV.

tiers de deux angles droits ; c'est à dire qui est de 120 degrez, est égal aux quarrez des deux costez plus le rectangle de ces deux mêmes costez.

Toutes choses estant faites, & les lignes nommées comme dans le precedent Theoreme, l'angle obtus ne peut valoir 120 degrez, que l'angle que fait *c* sur l'ajoûtée *y* (qui est le complement de cet angle obtus) ne soit de 60 degrez. Or le triangle que font *cyp* est rectangle. Donc *y* est le sinus d'un angle de 30 degrez. Donc par XIII. *y* est la moitié de *c*, qui en est le rayon.

Donc $dc = 2.dy$.

Or par le precedent Theoreme,

$bb = cc. + dd + 2.dy.$

Donc $bb = cc + dd + dc$. égal à $2.dy$.

IX. Theoreme.

XXXV. Le quarré de la base d'un angle aigu de 60 degrez est égal aux quarrez des costez moins le rectangle des costez.

Car par le 6^e Theoreme *b* estant la base d'un angle aigu,

$bb = cc + dd - 2.dx.$

Or *x* en tous les cas (c'est à dire soit qu'*x* soit ou $d - y$, ou *d* simplement, ou $d + y$.) il est toûjours le sinus d'un angle de 30 degrez dont *c* est le rayon, quand l'angle que soutient *b* est de 60 degrez.

Donc *x* est toûjours la moitié de *c*, par XIII. . . . . .

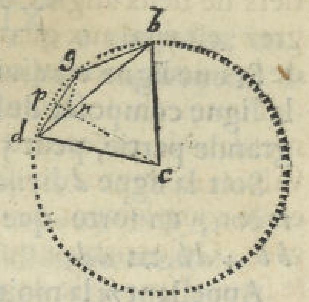
Donc $dc = 2.dx.$

Donc $bb. = cc. + dd. \left\{ \begin{array}{l} -\ 2.dx. \\ \text{ou} \\ -\ dc. \end{array} \right.$

X. Theoreme.

XXXVI. Le quarré du costé du pentagone est égal au quarré du costé du decagone, plus le quarré du costé de l'exagone inscrits dans le même cercle.

Soit *b d* le costé du pentagone.



cb & *c d* deux demy-diametres du cercle dàns lequel il est inscrit, qui sont aussi les costez de l'exagone, par XII. 36.

d g & *g b* deux costez du decagone.

c p une ligne qui coupe perpendiculairement & par la moitié, tant le costé du decagone *dg*, que l'arc *dg* qui coupe en *r* le costé du pentagone.

Cela estant, je prouve 1°. Que *b c* (costé de l'exagone) est moyenne entre *b d* costé du pentagone, & sa partie *b r*.

Car les deux angles vers *b* & vers *d* sont chacun de 54 degrez, XII. 23.

Or l'angle *r c b* est aussi de 54 degrez, puisque l'arc *g b* est de 36 degrez, XII. & l'arc *g p* de 18, ce qui ensemble fait 54.

Donc les deux triangles *b c d*, & *b r c* sont isosceles & semblables.

Donc par (34 S. *b c* est moyenne entre *b d* & *b r*. C'est à dire entre le costé du pentagone & sa plus grande partie.

Je prouve 2°. Que *d g* coste du decagone, est moyenne entre *b d* costé du pentagone, & *d r* sa plus petite partie.

Car *r p* coupant *g d* perpendiculairement & par la moitié, *r g* est égale à *r d*. Donc les angles que chacun fait sur *g d* sont égaux.

Donc les deux triangles *d g b* & *d r g* sont isosceles & semblables. Donc par (34 S.) *d g*. (base du petit & costé du grand) est moyenne entre *b d* (base du grand) & *r d* (costé du petit.)

Donc le costé du decagone est moyenne entre le costé du decagone & sa plus petite partie.

Donc par le 5^{e} Corollaire (20.S.) le quarré du pentagone est égal au quarré du costé de l'exagone, plus le quarre du costé du decagone inscrit dans le même cercle. Ce qu'il falloit demonstrer.

XI. Theoreme.

XXXVII. Si une ligne eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon, la ligne compoſée de la moitié de cette ligne & de ſa plus grande partie, peut 5 fois le quarré de la moitié.

Soit la ligne d diviſée en b, & c en moyenne & extrême raiſon, en ſorte que $bb = dd - db$, & par conſequent $bb + db. = dd$.

Appellant m la moitié de d, je dis que le quarré de $m + b$ vaut 5 fois le quarré d'm.

Car m étant la moitié de d, $dd = 4.mm$. Et $2mb. = bd$.

Et ainſi le quarré de $m + b$.

Eſtant égal à $mm + bb + 2.mb$.

Donc à $mm + bb + db$.

Donc à $mm + dd$.

Donc à $mm + 4.mm$.

Donc à $5.mm$.

XII. Theoreme.

XXXVIII Une ligne eſtant diviſée en moyenne & extrême raiſon, la ligne compoſée de la petite portion & de la moitié de la plus grande, peut 5 fois le quarré de la moitié de la plus grande.

Soit comme auparavant la toute d, la plus grande partie b, & ſa moitié n, la plus petite c; en ſorte que $dc = bb$.

Or $dc = cc + cb$. Donc $cc + cb = bb$.

Cela eſtant, je dis que le quarré de $n. + c. = 5.nn$.

Car ce quarré de $n + c$.

Eſt égal à $nn + cc. + 2.nc$. Donc à $nn + cc. + bc$. Puiſque n eſt $\frac{1}{2}$ de b.

Donc à $nn + bb$. (puiſque $bb = cc. + bc$)

Donc à $nn + 4.nn$. Donc à $5.nn$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

XIII. Theoreme.

XXXIX. Une ligne eſtant diviſée en moyenne & extrême raiſon, le quarré de la toute, plus le quarré de la plus petite partie, valent 3 fois le quarré de la plus grande.

Soit comme auparavant $d = b. + c.$ & b moyenne entre d & c, en sorte que $bb = dc$. Et par consequent à $cc + cb$. Je dis que $dd + cc. = 3. bb$.

Car $dd = bb + cc + 2. cb$.

Donc $dd + cc. = bb. + 2. cc + 2. cb$.

Or $2. cc + 2. cb = 2. bb$. puisque $cc + cb = bb$.

Donc $dd + cc. = 3. bb$. Ce qu'il falloit demonstrer.

I. Probleme.

Trouver le quarré égal à un rectangle donné. XLI.

Ou ayant l'aire d'un quarré, en trouver la racine.

Il ne faut que trouver la moyenne proportionelle entre les costez du rectangle donné.

Ou entre les deux lignes qui font l'aire donnée; comme si l'aire est supposée de 20 toises, ou pieds, ou pouces, entre un & 20, ou 2 & 10, ou 4 & 5.

II. Probleme.

Ayant le costé d'un rectangle, trouver quel doit estre l'autre, afin qu'il soit égal à un rectangle donné. Prendre le costé donné pour premier terme de la proportion, les deux costez du rectangle donné pour 2 & 3, le costé que l'on cherche se trouvera en trouvant une 4^e proportionelle. XLI.

III. Probleme.

Trouver un quarré égal à deux ou plusieurs quarrez donnez.

Soient les quarrez donnez bb, cc, dd, mettant b & c à angle droit, le quarré de l'hypothenuse de cet angle droit que je nomme f, sera égal à $bb + cc$. Et mettant de nouveau f & d à angle droit, le quarré de l'hypothenuse de cet angle sera égal à $ff. + dd$. Et par consequent à $bb + cc. + dd$. Et on peut conduire cela jusqu'à l'infini.

Corollaire.

Trouver le quarré égal à plusieurs rectangles donnez, il ne faut que trouver les quarrez égaux à chacun de ces rectangles. Et puis on trouvera le quarré égal à tous ces quarrez. XLII.

IV. PROBLEME.

XLIII. TROUVER un quarré à qui un quarré donné ſoit en raiſon donnée.

Soit le quarré donné bb.

La raiſon donnée mn.

AYANT diſpoſé $m.n.b.$ & trouvé pour 4^e proportionelle d, en ſorte que

$m.\ n.\ ::\ b.\ d.$

Et trouvant auſſi la moyenne proportionelle entre b & d, que je ſuppoſe eſtre c, le quarré de c ſatisfera au Probleme. Car puiſque $\div$ $b.\ c.\ d.$ par le....

$bb.\ cc.\ ::\ b.\ d.$

Or $b.\ d\ ::\ m.\ n.$

Donc $bb.\ cc\ ::\ m.\ n.$

V. PROBLEME.

XLIV. DIVISER une ligne, en ſorte que le quarré de la plus grande portion ſoit égal au rectangle de la toute & de la plus petite portion.

Ce Probleme a eſté reſolu (XI. 68.) quand on a appris à couper une ligne en moyenne & extrême raiſon : c'eſt à dire, en ſorte que la toute ſoit à la plus grande portion, comme la plus grande portion à la plus petite.

VI. PROBLEME.

XLV. DIVISER une ligne en ſorte que le quarré de la plus grande portion ſoit au rectangle de la toute & de la plus petite portion en raiſon donnée.

Soit la ligne donnée d.

La raiſon donnée $m.n.$

La plus grande portion que l'on cherche x.

Et la plus petite qui eſt la meſme choſe que $d—x$ ſoit appellée y.

Il n'y a qu'à trouver x, ce qui ſe fera en cette maniere.

1. Trouver une ligne qui ſoit à d, comme $m.$ eſt à $n.$ Je la ſuppoſe trouvée par X. 38. & je l'appele c.

2. Chercher la moyenne entre $c.$ & $d.$ Je la ſuppoſe trouvée par XI..... Et je l'appelle $p.$ d'où il s'enſuivra, que $cd = pp.$

3. Faire

3. Faire un cercle qui ait c pour diametre, & p pour tangente. Si de l'extremité de p qui est hors le cercle on tire une ſecante qui paſſe par le centre du cercle, la partie de cette ſecante qui eſt au dedans du cercle eſtant c, celle qui eſt au dehors ſera x. Et $d - x$ ſera y. D'où il s'enſuivra

4. Que $cd - cx$ ſera la même choſe que cy. Car y étant égal à $d - x$. c'eſt la meſme choſe de multiplier c par $d - x$, (ce qui fait $cd - cx$) que de multiplier c par y; ce qui fait cy.

Cela étant ainſi il eſt facile de prouver que

$$xx.\ dy.\ ::\ m.\ n.$$

C'eſt à dire que le quarré de la plus grande partie de d eſt au rectangle de d par l'autre partie que j'ay nommée y, en raiſon donnée.

Car (par la 3. ſupp.) p tangente eſt moyenne entre x & $x + c$.

Donc $x.\ p\ ::\ p.\ x + c$.

Donc $xx + cx = pp$.

Or $pp = cd$ (par la 2. ſupp.)

Donc $xx + cx = cd$.

Donc $xx = cd - cx$.

Or $cd - cx = cy$ (par la 4. ſupp.)

Donc $xx = cy$.

Et $cy.\ dy\ ::\ c.\ d\ ::\ m.\ n.$ (par la 1. ſupp.)

Donc xx (égal à cy) $dy\ ::\ m.\ n.$ ce qu'il falloit demonſtrer.

VII. Probleme.

Trouver la racine d'un quarré dont on ne ſçait autre choſe, ſinon qu'étant comparé au quarré d'une ligne donnée, & à un rectangle d'une autre ligne donnée & de cette racine inconnuë, il eſt XLVI.

Ou $\left\{\begin{array}{l}\text{1. Egal au quarré plus le rectangle.}\\ \text{2. Egal au quarré moins le rectangle.}\\ \text{3. Egal au rectangle moins le quarré.}\end{array}\right.$

Ainſi la racine inconnuë eſtant nommée x ou y.

La ligne donnée qui fait le quarré b.

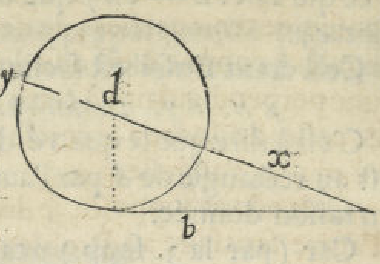
Et l'autre ligne donnée coſté du rectangle, d.

Le 1^er^ Cas sera $yy = bb + yd$.

Le 2^e^ Cas, $xx = bb - xd$.

Et le 3^e^, $\begin{cases} yy = yd - bb. \\ xx = xd - bb. \end{cases}$

CONSTRUCTION COMMUNE *au premier & au second Cas.*



Decrire un cercle de l'intervale de la moitié de d, élevée perpendiculairement sur l'une des extremitez de b.

Et tirer de l'autre extremité de b une secante qui passant par le centre du cercle se termine à la circonference.

Cette secante entiere soit appelée y.

Qui sera composée de sa partie hors le cercle appellée x.

Et du diametre du cercle qui sera d par la construction.

Et b sera tangente du cercle.

Preuve du Premier Cas.

Dans le 1^er^ Cas, c'est y (c'est à dire la secante entiere) qui est la racine que l'on cherche.

Car y estant égale à $x + d$.

$yy = yx + yd$. S. 13.

Or $bb = xy$. S. 25.

Donc $yy = bb + yd$. Ce qu'il falloit demonstrer.

Preuve du second Cas.

Dans le 2^e^ Cas, c'est x (c'est à dire la partie de la secante qui est hors le cercle) qui est la racine que l'on cherche.

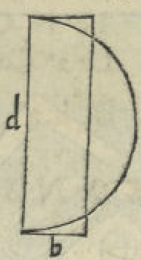
Car $x.\ b\ ::\ b\ x + d$.

Donc $xx + xd = bb$.

Donc $xx = bb - xd$. Ce qu'il falloit demonstrer.

Construction et preuve du troisieme Cas.

Faisant un cercle qui ait d pour diametre, & b pour tangente, il faut tirer une parallele à d de l'extremité de b qui est hors le cercle.



Que ſi cette parallele ne coupe point le cercle, parce que b eſt auſſi grande ou plus grande que la moitié de d, le Probleme eſt impoſſible.

Mais ſi elle le coupe tirant une tangente parallele à b de l'autre extremité de d, & prolongeant juſqu'à cette tangente la ſecante parallele à d, cette ſecante (égale à d) ſera compoſée de trois parties ; de deux hors le cercle, qui eſtant égales (comme il eſt aiſé de le prouver en tirant du centre une perpendiculaire à cette ſecante) chacun s'appellera x, & celle de dedans le cercle plus une de dehors, c'eſt à dire plus x, s'appellera y.

Cela eſtant ſuppoſé, je dis dis qu'x & y peuvent l'une & l'autre ſatisfaire au Probleme.

Car $xy = bb$, par le 4^e^ Theoreme, & d eſtant égale à $x + y$.

$$\left.\begin{array}{l} xx + xy = xd. \\ \text{Et } yy + xy = yd. \end{array}\right\} \text{par 13. S.}$$

Donc $xx = xd - xy$ égal à bb.

Et $yy = yd - xy$ égal à bb.

Donc ſoit qu'on prenne x ou y, on ſatisfait au Probleme. Et le choix depend de ſçavoir d'ailleurs ſi la racine que l'on cherche doit eſtre plus petite que b. Car alors c'eſt x, au lieu que ſi elle doit eſtre plus grande, c'eſt y.

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUINZIE'ME.

DE LA MESVRE DE L'AIRE des Parallelogrammes, des Triangles, & autres Polygones.

Definitions.

1. QUAND on parle des coſtez d'un parallelogramme, on entend les coſtez angulaires, à moins qu'on ne marque autre choſe.

On peut prendre lequel on veut de ces coſtez pour meſure de la longueur du parallelogramme; & alors ce coſté s'appelle la baſe.

Et la perpendiculaire qui meſure la diſtance entre la baſe & ſon coſté oppoſé s'appelle la hauteur du parallelogramme.

FONDEMENT DE LA MESURE des Parallelogrammes.

Par ce que nous avons dit au commancement du livre precedent, que dans les parallelogrammes non rectangles (à qui pour abreger nous donnerons ſimplement le nom de parallelogrammes) on pouvoit prendre lequel on vouloit de leurs coſtez angulaires pour meſure de l'une de leurs dimenſions, qui eſt la longueur ; mais que l'autre coſté angulaire ne pouvoit pas en meſurer la largeur, parce qu'étant oblique il ne meſuroit pas la diſtance entre les coſtez oppoſez qui avoient eſtê pris pour la longueur. Et ainſi au lieu de cet autre coſté angulaire, il faut prendre la perpendiculaire qui meſure la diſtance entre le premier coſté & ſon oppoſé, pour avoir l'autre dimenſion de ces parallelogrammes. II.

Or de là il s'enſuit que le rectangle de la baſe & de cette perpendiculaire appellée la hauteur du parallelogramme eſt égal à ce parallelogramme, puiſque n'ayant tous deux que deux dimenſions, longueur & largeur, la longueur de l'un eſt égale à la longueur de l'autre, en ce qu'ils ont tous deux une baſe égale, & que la largeur de l'un eſt égale à la largeur de l'autre, puiſqu'elle eſt meſurée par une perpendiculaire égale dans l'une & dans l'autre ; quoy qu'en l'un elle ſoit l'un des coſtez de la figure, ſçavoir dans le rectangle, & que dans l'autre elle n'y ſoit pas marquée.

Cela pourroit ſuffire pour ceux qui cherchent plûtoſt à s'aſſurer de la verité qu'à en pouvoir convaincre les autres.

Neanmoins pour plus grande certitude on peut employer deux voyes pour prouver cette propoſition : l'une nouvelle appellée la *Geometrie des indiviſibles* : & l'autre ancienne & plus commune. Nous expliquerons l'une & l'autre.

NOUVELLE METHODE APPELLE'E LA GEOMETRIE DES INDIVISIBLES.

III. QUOIQUE les Geometres conviennent que la ligne n'eſt pas composée de points, ny la ſurface de lignes, ny le ſolide de ſurfaces, neanmoins on a trouvé depuis peu de temps un art de démonſtrer une infinité de choſes, en conſiderant les ſurfaces comme ſi elles eſtoient composées de lignes, & les ſolides de ſurfaces.

Je n'ay rien veu de ce qui en a eſté écrit : mais voicy ce qui m'en eſt venu dans l'eſprit, en ne m'arreſtant maintenant qu'à ce qui regarde les ſurfaces.

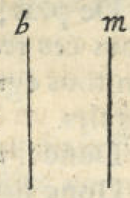
Le fondement de cette nouvelle Geometrie eſt de prendre pour l'aire d'une ſurface la ſomme des lignes qui la rempliſſent ; de ſorte que deux ſurfaces ſont eſtimées égales, quand l'une & l'autre eſt remplie par une ſomme égale de lignes égales ; ſoit que chacune de celles d'une ſomme ſoit àgale à chacune de celles de l'autre ſomme ; ſoit qu'il ſe faſſe une compenſation ; en ſorte par exemple, que deux d'une ſomme qui pourront eſtre inegales entr'elles, ſoient égales à deux priſes enſemble de l'autre ſomme qui ſeront égales entr'elles.

Mais pour ne pas donner lieu à beaucoup de paralogiſmes où l'on tombe aiſément en ſe ſervant de cette methode, ſi on n'y prend bien garde, il faut remarquer,

1. Qu'afin que des lignes ſoient cenſées remplir un eſpace, il faut qu'elles ſoient toutes paralleles entr'elles ; ſoit qu'elles ſoient droittes pour remplir un eſpace rectiligne, ſoit qu'elles ſoient circulaires pour remplir des cercles ou des portions de cercle. Il eſt facile d'en voir la raiſon. Et ainſi il faut bien prendre garde de ne pas employer pour cela des lignes qui ne ſeroient pas paralleles en l'une ou l'autre de ces deux manieres.

2. Afin qu'une ſomme de lignes ſoit cenſée égale à une autre ſomme de lignes, il ne faut pas s'imaginer qu'on puiſſe dire le nombre qu'en contient chaque eſpace (car il n'y

a point de si petit espace qui n'en contienne un nombre infini) mais ce qui fait qu'on appelle ces sommes égales, c'est que toutes les lignes d'un costé & d'autre coupent perpendiculairement deux lignes égales. Par exemple si la ligne *b* est égale à la ligne *m*, le nombre infini des lignes qui peuvent couper perpendiculairement *b* en tous ses points, est censé égal au nombre infini de celles qui peuvent aussi couper perpendiculairement *m*, étant visible qu'il n'y a point de raison pourquoy on en puisse faire passer davantage par l'une que par l'autre.



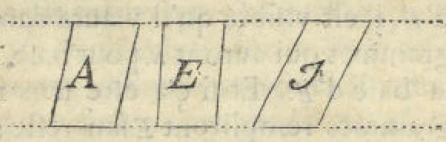
Car les aliquotes pareilles de l'une & de l'autre étant toûjours égales jusques à l'infini, on pourra toûjours de part & d'autre tirer par tous les points de ces divisions autant de lignes paralleles entr'elles, & qui contiendront toujours de part & d'autre un espace parallele égal. Et c'est proprement delà que depend la verité de cette nouvelle methode (& non que le continu soit composé d'indivisibles) ce qui l'a fait mesme appeller par quelques-uns, la Geometrie de l'infini.

Il faut donc bien prendre garde que les lignes (par le rapport desquelles on dit qu'une somme de ces lignes paralleles qui remplissent un espace, est égale à une autre somme) les coupent perpendiculairement. Et c'est où il y a plus de danger de se tromper. Sur ces fondemens voicy les Theoremes que l'on établit.

I. Theoreme.

Tous les parallelogrammes de base égale & de même hauteur sont égaux entr'eux. I V.

Soient divers parallelogrammes, comme *A*, *E*, *I*, enfermez dans le même espace parallele (comme ils le peuvent éstre, puisqu'ils sont supposez de même hauteur) & ayant tous les bases égales, il est clair que toutes les paralleles qui peuvent remplir cet espace, rempliront tous ces parallelogrammes ; & qu'ainsi ils seront tous rem-



plis d'une ſomme égale de lignes, cette ſomme eſtant meſurée dans tous par la perpendiculaire qui meſure la hauteur de ces rectangles, qui eſt la même en tous, puiſqu'ils ſont de même hauteur ?

De plus, toutes ces lignes étant paralleles à la baſe dans tous ces rectangles, ſont égales en tous, puiſqu'elles ſont en tous égales à la baſe, & que les baſes ſont ſuppoſées égales.

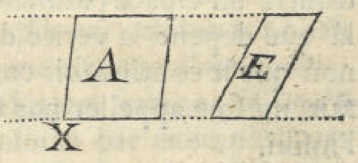
Donc il y a partout ſomme égale de lignes égales.

Donc ils ſont tous égaux ſelon le fondement de la Geometrie des indiviſibles.

II. Theoreme.

Tous les parallelogrammes de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes.

C'eſt une ſuite du precedent. Soient les parallelogrammes *A*, *E*, entre mêmes paralleles, & qui ayent des baſes inégales; en quelques aliquotes que je diviſe la



baſe d'*A*, en tirant les paralleles au coſté par tous les points de la diviſion, il y aura dans *A* autant de parallelogrammes égaux entr'eux, que cette baſe aura de parties égales : de ſorte que ſi elle avoit eſté diviſée en 7 parties, dont j'appelleray chacune *x*, il y aura dans *A* 7 parallelogrammes qui auront chacun *x* pour baſe.

Que ſi appliquant *x* à la baſe d'*E*, il ſe trouve qu'il y ſoit trois fois, ou ſans reſte, ou avec reſte, tirant encore de tous les points de la diviſion, des lignes paralleles au coſté d'*E*, il eſt viſible qu'il y aura dans *E* autant de parallelogrammes qui auront *x* pour baſe, qu'*x* ſe ſera trouvé dans la baſe d'*E*. Et ſi ç'a eſté ſans reſte, ces trois parallelogrammes rempliront *E* ſans reſte : & ſi avec reſte, il reſtera auſſi un parallelogramme qui aura ce reſte pour baſe.

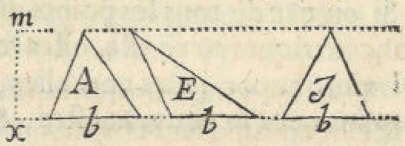
Or les parallelogrammes qui dans *E* ont *x* pour baſe ſont égaux à ceux qui dans *A* ont auſſi *x* pour baſe ; par le precedent Theoreme.

Donc

Donc par la definition de l'égalité des raiſons *A* eſt à *E* en même raiſon que la baſe d'*A* à la baſe d'*E*, puiſqu'autant que les aliquotes quelconques de la baſe d'*A* ſont contenuës dans la baſe d'*E*, les aliquotes pareilles d'*A* ſont contenuës dans *E*: ſi ſans reſte, ſans reſte; ſi avec reſte, avec reſte.

III. Theoreme.

Les triangles de même hauteur & de même baſe ſont égaux. Car eſtant mis entre les mêmes paralleles, comme devant, & ayant tous *b* pour baſe, toutes les lignes paralleles qui rempliront cet eſpace, rempliront ces triangles; & chacune de ces lignes tirées tout le long de l'eſpace d'un point quelconque de la perpendiculaire *m x*, ce qui ſera enfermé dans chaque triangle ſera toûjours égal, comme il a eſté prouvé dans le livre XIII. & X. 20. quoy que toûjours de plus petit en plus petit montant vers le ſommet. VI.



Donc une ſomme égale de lignes égales chacune à chacune de chaque triangle, remplit tous ces triangles.

Donc ces triangles ſont egaux.

IV. Theoreme.

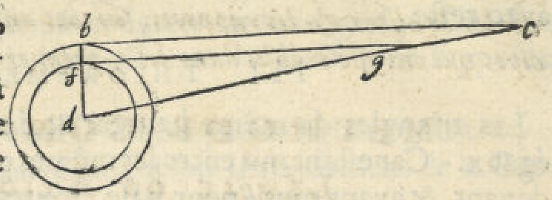
Les triangles de même hauteur ſont entr'eux comme les baſes. VII.

C'eſt la même choſe que le 2e Theoreme, & qui ſe prouve de la même ſorte, excepté qu'on employe icy au lieu de parallelogrammes des triangles qui ont pour baſe, & qui aboutiſſent de part & d'autre au ſommet de chaque triangle dont ils ſont parties. Or ces triangles qui ont *x* pour baſe dans l'un & dans l'autre triangle, ſont auſſi de même hauteur dans l'un & dans l'autre; & par conſequent ils ſont égaux. Enſuite dequoy il ne faut appliquer que ce que nous avons dit pour la demonſtration du 2e Theoreme.

V. THEOREME.

VIII. Le cercle eſt égal au triangle rectangle, qui a pour côtez de ſon angle droit le rayon du cercle, & une ligne égale à la circonference du cercle.

Soit le cercle *d*, le rayon *d b*, la tangente *b c*, égale à la circonference & l'hypothenuſe *d c*.



Si on tire de tous les points du rayon, des circonferences concentriques au cercle, elles rempliront tout le cercle, & elles ſeront paralleles entr'elles, en la maniere que les circonferences le peuvent eſtre, & coupées perpendiculairement par le rayon.

Si on tire auſſi de tous ces mêmes points du rayon par leſquels auront paſſé ces circonferences, des paralleles à *b c*, juſques en *d c*, ces paralleles rempliront le triangle. Et ainſi la ſomme de ces circonferences & de ces paralleles ſera égale, étant determinée de part & d'autre par les points du même rayon, étant clair que l'on ne ſçauroit tirer une circonference par aucun point, qu'on ne tire auſſi une parallele à *d c* par ce même point; & au contraire.

Or la circonference & la parallele tirées du même point ſont égales, comme on peut voir en examinant laquelle on voudra: par exemple celle du point *b* Car

$$bd.\ df :: \begin{cases} \text{circonf. } b. & \text{circonf. } f. \\ bc. & fg. \end{cases}$$

Donc circonf. *b*. circonf. *f* :: *b c*. *f g*.

Donc *alternando* circonf. *b*. *b c* :: circonf. *f*. *f g*.

Or par l'hypotheſe la circonference *b*, qui eſt celle du cercle, eſt égale au coſté du triangle *b c*.

Donc la circonference paſſant par le point *f*, eſt égale à *f g*, parallele à *b c*.

Avertissement.

Je n'en diray pas davantage de cette nouvelle methode. Il est aisé de juger que ces 5 Theoremes sont de suffisans fondemens pour mesurer sans peine toutes les figures rectilignes, & en trouver les égalitez & les rapports, sur tout en y joignant les principes qui ont esté établis dans les 3 premiers livres. IX.

METHODE COMMUNE.

Lemme ou Axiome.

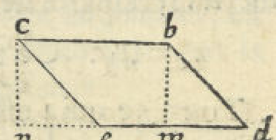
Deux triangles tout-égaux sont égaux. C'est à dire que lorsque les angles d'un triangle sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun, & les costez égaux aussi chacun à chacun, ces deux triangles comprennent un espace égal; en quoy consiste ce qu'on appelle égalité dans les figures. X.

Cela est clair de soy-même, étant visible que deux triangles de cette sorte ne different que de position.

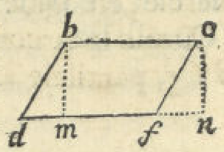
PROPOSITION FONDAMENTALE de la mesure des Parallelogrammes, & des Triangles.

Tout parallelogramme est égal au rectangle de sa hauteur & de sa base. XI.

Soit le parallelogramme *b c d f*, tirant ses perpendiculaires *b m* & *c n* sur la base *d f*, prolongée autant qu'il est necessaire; je dis que le rectangle *b c m n*, qui est le rectangle de la base & de la hauteur de *b c d f*, est égal à *b c d f*.



Car *b c* étant égale tant à *d f* qu'à *m n*, *d f* est égale à *m n*. Donc ôtant *m f*, commune de l'une & de l'autre, *d m* demeurera égale à *f n*. Et ainsi *b d* étant égale à *c f*, & *b m* à *c n*, les triangles *b d m* & *c f n*



ſont égaux par le Lemme precedent. Et ainſi ajoûtant à l'un & à l'autre le trapeze commun *b m c f*, *b c d f* ſera égal à *b m c n*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

I. Corollaire.

XII. Les parallelogrammes de même hauteur & de baſe égale ſont égaux.

Car ils ont tous pour leur meſure commune le même rectangle de cette hauteur & de cette baſe.

II. Corollaire.

XIII. Les parallelogrammes de même hauteur ſont comme leurs baſes; de baſe égale, ſont comme leurs hauteurs.

Car chacun eſt égal au rectangle de ſa baſe & de ſa hauteur. Or les rectangles de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes. Il en faut donc dire de même des parallelogrammes qui leur ſont égaux.

On peut auſſi prouver ce 2e Corollaire par le premier de la même façon qu'on a déja fait en demonſtrant le 2e Theoreme de la premiere methode.

III. Corollaire.

XIV. La raiſon de deux parallelogrammes quelconques eſt toûjours compoſée de la raiſon de la hauteur à la hauteur, & de la baſe à la baſe.

Car les parallelogrammes ſont toûjours entr'eux comme les rectangles de leur hauteur & de leur baſe.

IV. Corollaire general.

XV. Tout ce qui a eſté dit de la raiſon des rectangles par la comparaiſon de leurs coſtez angulaires, eſt vray des parallelogrammes, en comparant la hauteur à la hauteur, & la baſe à la baſe. Cela eſt clair par la raiſon du precedent Corollaire.

DES PARALLELOGRAMMES EQUIANGLES.

THEOREME GENERAL.

LES parallelogrammes equiangles sont entr'eux en raison composée de leurs costez angulaires, de méme que s'ils étoient rectangles. XVI.

Car tous les parallelogrammes sont entr'eux en raison composée de celle de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

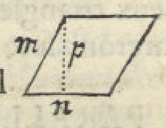
Or quand ils sont equiangles, la raison des costez obliques sur la base de chacun est la même que celle de la hauteur à la hauteur. Parce que les lignes également inclinées sont en même raison que leurs perpendiculaires, qui est ce qui mesure cette hauteur. X. 11.

Exemple. Soient $b\,c$ & $m\,n$ deux parallelogrammes equiangles, dont les hauteurs soient f & p.

Par les precedens Corollaires,

$b\,c.\ m\,n :: c.\,n. + f.\,p.$

Or $f.\,p :: b.\,m.$ par X. 11.



Donc $b\,c.\ m.\,n :: c.\,n + b.\,m.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE GENERAL.

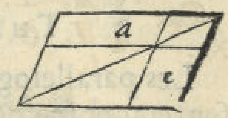
TOUT ce qui a esté dit de la raison des rectangles entr'eux par la comparaison de leurs costez angulaires, est vray aussi des autres parallelogrammes equiangles par la même comparaison de leurs costez angulaires. XVII.

C'est à dire par exemple, que s'ils sont semblables, le grand côté du premier étant au grand côté du second, comme le petit côté du premier au petit côté du second, ils sont en raison doublée de leurs costez homologues.

Si leurs côtez sont reciproques (c'est à dire, si le grand côté du premier est au grand côté du second, comme le petit côté du second est au petit côté du premier) ils sont égaux. Et ainsi de tout le reste.

Corollaire particulier.

XVIII. Lorsque deux lignes paralleles chacune aux costez angulaires d'un parallelogramme se coupent en un même point de la diagonale, il se fait 4 parallelogrammes, dont les deux qui ne sont point coupez par la diagonale, comme *A* & *E*, sont égaux.



Car ils sont equiangles, puisqu'il y a un angle de l'un qui est opposé au sommet à un angle de l'autre.

Et il est visible par XIII. 21. que le grand côté d'*a* est au grand côté d'*e*, comme le petit côté d'*e* est au petit côté d'*a*.

Je sçay bien que cela se prouve ordinairement d'une autre maniere plus palpable, qui est que la diagonale partage par la moitié tant le parallelogramme total, que chacun de ceux qui sont autour de cette diagonale. Donc la moitié du total dans laquelle est *a* étant égale à la moitié dans laquelle est *e*, & ôtant de chacune de ces deux moitiez deux triangles égaux, les deux parallelogrammes qui demeureront seront égaux.

DES PARALLELOGRAMMES SEMBLABLES.

I. Theoreme.

XIX. Deux parallelogrammes semblables (c'est à dire qui étant equiangles ont leurs costez proportionels) sont en raison doublée de leurs costez homologues, comme il vient d'estre dit S. 17.

II. Theoreme.

XX. Les costez homologues de deux parallelogrammes semblables, étant en même raison que les côtez homologues de deux autres parallelogrammes semblables entr'eux, ces 4 parallelogrammes sont proportionels.

Soient les deux premiers semblables *A* & *E*, & les deux derniers *I* & *O*; si la raison d'entre les costez d'*A* & *E* est

$x. y$, & de même entre les côtez d'I & O, je dis que
$A. E :: I. O.$

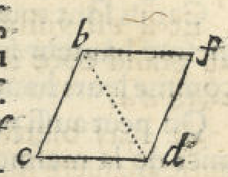
Car $\left\{ \begin{array}{ll} A. & E. \\ I. & O. \end{array} \right\} :: xx. yy.$

DES TRIANGLES.

Lemme.

Tout triangle eſt la moitié d'un parallelogramme de même baſe & de même hauteur. XXI.

Soit le triangle $b\,c\,d$. Si de b on tire $b\,f$, égale & parallele à la baſe $c\,d$, & que du point f on tire $f\,d$; je dis 1. que $b.\,c.\,d.\,f.$ eſt un parallelogramme. Car $c\,d$ & $b\,f$ ſont paralleles & égales par la conſtruction; & par conſequent $b\,c$ & $f\,d$ ſont auſſi paralleles & égales, par VI. 28.



Et par conſequent $b\,d$, qui eſt la diagonale de ce parallelogramme, le diviſe en deux triangles égaux $b\,c\,d$ & $b\,f\,d$. Donc $b\,c\,d$ eſt la moitié de ce parallelogramme.

Or il eſt viſible que ce triangle & ce parallelogramme ſont de même hauteur, puiſqu'ils ſont enfermez entre les mêmes paralleles $b\,f$ & $c\,d$, & qu'ils ont la même baſe, ſçavoir $c\,d$.

Donc tout triangle eſt la moitié d'un parallelogramme de même baſe & de même hauteur.

Theoreme general.

Tout triangle eſt égal au rectangle de la moitié de ſa baſe, & de toute ſa hauteur; ou de la moitié de ſa hauteur & de toute ſa baſe. XXII.

Car il eſt la moitié d'un parallelogramme de ſa baſe & de ſa hauteur. Or ce parallelogramme eſt égal au rectangle de ſa baſe & de ſa hauteur.

Donc prenant la moitié de la baſe & toute la hauteur, ou la moitié de la hauteur & toute la baſe, on a un rectangle qui vaut la moitié du rectangle de toute la baſe & de toute la hauteur. Donc on a un rectangle égal au triangle.

I. Corollaire.

XXIII. Les triangles de mesme hauteur & de base égale, sont égaux.

Car ils sont tous égaux au mesme rectangle, qui est celuy de la moitié de leur base & de toute leur hauteur.

II. Corollaire.

XXIV. Les triangles de mesme hauteur sont comme leurs bases, & d'égale base comme leurs hauteurs.

Car ils sont tous égaux à des rectangles, qui estant de mesme hauteur sont comme leurs bases, & d'égale base comme leurs hauteurs.

On peut aussi prouver ce second Corollaire par le premier de la mesme façon qu'on a demonstré le 4[e] Theoreme de la premiere methode.

III. Corollaire.

XXV. La raison de deux triangles quelconques est toûjours composée de la raison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base. Car ces triangles sont toûjours entr'eux comme les rectangles de la moitié de leur base & de toute leur hauteur, qui ont entr'eux cette raison composée.

IV. Corollaire general.

XXVI. Tout ce qui a esté dit de la raison des rectangles par la comparaison de leurs costez, est vray des triangles par la comparaison de la hauteur à la hauteur, & de la base à la base.

DES TRIANGLES EQUIANGLES ou semblables.

I. Theoreme.

XXVII. Tous les triangles equiangles & par consequent semblables, sont en raison doublée de la raison de leurs côtez homologues.

Car

Car par les Corollaires precedens, les triangles sont entr'eux en raison composée de la raison de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.

Or quand ils sont equiangles, les côtez sur la base de part & d'autre sont chacun à chacun en même raison que les perpendiculaires du sommet à la base qui en mesure la hauteur. X. 12.

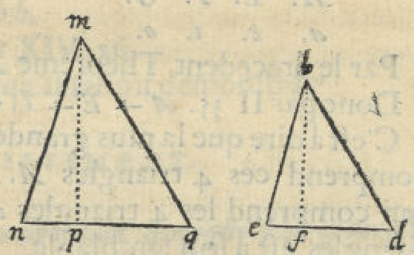
Et par consequent ils sont en raison composée de celle de la base à la base ; & d'un côté à un côté.

Or étant equiangles, la base est à la base comme chacun des côtez à chacun des côtez.

Et par consequent leur raison est composée de deux raisons égales ; ce qui s'appelle raison doublée.

Exemple. Soient triangles semblables *b c d* & *m n o*, dont *b f* & *m p* mesurent les hauteurs.

b c d. m n o :: c d. n o.
+ *b f. m p.*



Or $\left.\begin{array}{l} bc.\ mn \\ bd.\ mn \\ cd.\ no \end{array}\right\} :: bf.\ mp.$

Donc tous les costez ayant la même raison, chacun à chacun, & avec les perpendiculaires, la raison de ces triangles *b c d* & *m n o* ne peut estre composée de la raison de la base *c d* & *n o*, & de celle des hauteurs *b f*, *m p*, qu'ils ne soient en raison doublée de l'une de ces raisons, puisqu'elles sont égales ; & par consequent aussi de la raison des autres costez homologues, qui est la même.

II. Theoreme.

Si les costez homologues de deux triangles semblables sont en mesme raison que les costez homologues de deux autres triangles semblables entr'eux, ces 4 triangles sont proportionels. C'est la mesme chose que ce qu'on a demonstré des parallelogrammes. S. 20. XXVIII.

DES FIGURES SEMBLABLES.

I. Theoreme.

XXIX. Deux figures ſemblables quelconques ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

Car par XIII. 26. elles peuvent eſtre partagées chacune en autant de triangles, tels que ceux d'une part étant ſemblables à ceux de l'autre, chacun à chacun les coſtez homologues de deux ſemblables ſeront en meſme raiſon que ceux des deux autres quelconques ſemblables.

Ainſi ſuppoſant qu'elles ſoient partagées chacune en 4 triangles qui ſoient

$A.\ E.\ I.\ O.$

$a.\ e.\ i.\ o.$

Par le precedent Theoreme $A.a :: E.e :: I.i.\ O.o.$

Donc par II. 35. $A+E+I.+O.\ a+e+i+o :: A.a.$

C'eſt à dire que la plus grande des figures ſemblables qui comprend ces 4 triangles $A.E.I.O.$ ſera à la plus petite qui comprend les 4 triangles $a.\ e.i.o.$ comme l'un de ces triangles eſt à ſon ſemblable.

Or ces triangles ſemblables ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs baſes, & les baſes de ces deux triangles ſemblables ſont coſtez homologues de ces deux figures (comme on a veu XIII. 26.)

Donc ces figures ſemblables ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

Corollaire.

XXX. Les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrez de leurs coſtez homologues.

Car par le Theoreme precedent les figures ſemblables ſont entr'elles en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

Or les quarrez de ces coſtez homologues ſont auſſi entr'eux en raiſon doublée de ces coſtez qui ſont leurs racines.

II. THEOREME.

SI l'on construit sur l'hypothenuse & sur les deux costez d'un angle droit des figures semblables quelconques, celle qui sera construite sur l'hypothenuse sera égale aux deux qui seront construites sur les costez. XXXI.

Soit le grand costé de l'angle droit b, le petit c, l'hypothenuse h.

La figure construite sur b soit nommée A. sur c. E, & sur h. I.

Par le Theoreme precedent.

$A.\ bb :: E.\ cc :: I.\ hh.$

Donc $A + E, bb + cc :: I.\ hh.$ (par II. 44.)

Donc *alternando*,

$A + E.\ I. :: bb + cc.\ hh.$

Or $bb + cc. = hh.$ par XIV. 26.

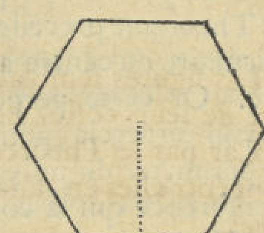
Donc $A + E. = I.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

AVERTISSEMENT.

On voit par là que cette proposition quoyque plus generale que celle des quarrez, n'a dû estre traitée qu'aprés celle des quarrez; parce que le quarré est la vraye & naturelle mesure de la dimension des autres figures planes. XXXII.

DES FIGURES REGULIERES.

I. THEOREME.



TOUT polygone est égal au rectangle du rayon droit (qui est la perpendiculaire du centre à l'un des costez) & de la moitié de son perimetre, ou au triangle qui a pour hauteur ce rayon droit, & pour base ce perimetre. XXXIII.

Car tout polygone regulier comprend autant de triangles tout-égaux qu'il a de costez, lesquels ont tous pour mesure de leur hauteur la perpendiculaire du centre au costé qui leur sert de base.

Donc chaque triangle est égal au rectangle de ce rayon droit qui est leur hauteur, & de la moitié de la base.

Or toutes ces moitiez des bases de ces triangles prises ensemble font la moitié du perimetre, puisque toutes les bases font tout le perimetre.

Donc le rectangle de cette perpendiculaire & de la moitié du perimetre est égal à tous ces triangles; & par consequent au polygone.

Et c'est la mesme chose du triangle qui a pour hauteur cette perpendiculaire, & pour base tout le perimetre, puisqu'il est égal à ce rectiligne. Outre qu'il est aisé de prouver qu'il est égal à tous les triangles que contient le polygone, estant de mesme hauteur que chacun, & sa base étant égale à toutes les bases des autres prises ensemble.

II. THEOREME.

XXXIV. PAR l'analogie du cercle à un polygone infini, le cercle est égal au rectangle du rayon & de la moitié de la circonference, ou au triangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base toute la circonference.

Nous l'avons prouvé par la premiere methode, qui est la Geometrie des indivisibles. On le peut aussi prouver par la voye d'Archimede, en montrant que le rectangle du rayon & de la moitié de la circonference est plus grand que tout polygone inscrit au cercle, & plus petit que tout circonscrit.

Il est plus grand que tout inscrit, parce que l'inscrit par le Theoreme precedent est égal au rectangle de la perpendiculaire du centre au costé, & de la moitié du perimetre. Or cette perpendiculaire est plus petite que le rayon du cercle, puisqu'elle est terminée dans le cercle, & le perimetre du polygone inscrit est plus petit que la circonference qui la comprend, par la maxime d'Archimede. V. 6.

Donc le rectangle du rayon du cercle & de la moitié de la circonference est plus grand que tout polygone inscrit.

Et il eſt plus petit que tout polygone circonſcrit, parce que le polygone circonſcrit eſt égal au rectangle du rayon du cercle (qui eſt alors la même choſe que la perpendiculaire au coſté) & de la moitié de ſon perimetre, lequel perimetre eſt plus grand que la circonferenee du cercle, puiſqu'il la comprend, ſelon la même maxime d'Archimede. Donc &c.

III. Theoreme.

Les figures regulieres de même eſpece ſont entr'elles en raiſon doublée de celle de leurs rayons droits. XXXV.

Car elles ſont égales chacune au rectangle du rayon droit, & de la moitié du perimetre. Or le rayon droit eſt au rayon droit comme le perimetre au perimetre, par XII. 26. Donc ces rectangles (auſquels ces figures regulieres ſont égales) étant ſemblables, ſont entr'eux en raiſon doublée de celle du rayon droit, qui eſt l'un de leurs côtez.

I. Corollaire.

Les cercles ſont entr'eux en raiſon doublée de celle de leurs rayons, ou de leurs diametres, ce qui eſt la même choſe. XXXVI.

II. Corollaire.

Les cercles ſont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres. Car les uns & les autres ſont en raiſon doublée de celle de leurs diametres. XXXVII.

IV. Theoreme.

Les triangles ſemblables inſcrits en des cercles ſont entr'eux en raiſon doublée des diametres de ces cercles : ou, ce qui eſt la même choſe, comme les cercles, ou comme les quarrez des diametres. XXXVIII.

Car les cordes de divers cercles qui ſoutiennent les angles inſcrits égaux, ſont entr'elles comme les diametres, par X. 24. & 25.

Donc les coſtez de ces triangles ſemblables qui ſoutiennent les mêmes angles (qui ſont ceux qu'on appelle homologues) ſont entr'eux comme les diametres.

Or ces triangles eſtant ſemblables, ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

Donc ils ſont auſſi en raiſon doublée de ces diametres.

Donc ils ſont auſſi entr'eux comme les cercles & comme les quarrez des diametres.

V. Theoreme.

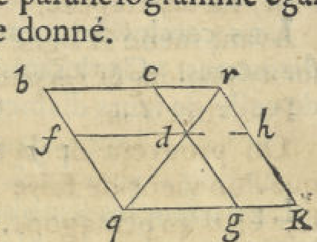
XXXIX. Les figures ſemblables inſcrites dans les cercles ſont entr'elles en raiſon doublée des diametres.

Car comme il a eſté prouvé S. & XIII. 26. ces figures ſemblables ſe peuvent reſoudre en triangles ſemblables, chacun d'une figure à chacun de l'autre qui ſeront tous inſcrits dans le cercle.

Donc tous les triangles d'une figure ſont à tous ceux de l'autre (& par conſequent une figure eſt à l'autre) comme un des triangles d'une figure à un ſemblable de l'autre. Or par le Theoreme precedent ces deux triangles ſemblables ſont entr'eux en raiſon doublée des diametres. Donc les figures ſemblables inſcrites dans les cercles ſont entr'elles en raiſon doublée des diametres. Donc auſſi comme les cercles. Donc auſſi comme les quarrez des diametres.

I. Probleme.

XL. Decrire ſur un coſté donné le parallelogramme égal & equiangle à un parallelogramme donné.



Soit le parallelogramme donné *b ç d f.* Soit continuée *c d* juſques à *g*, en ſorte que *d g* ſoit égale au coſté donné.

Soit auſſi continuée *b f* juſques à ce que *f q* ſoit égale à *d g*. Soit menée de *q* par *d* une indefinie.

Soit prolongée *b c*, juſqu'à ce qu'elle rencontre en *r* cette indefinie.

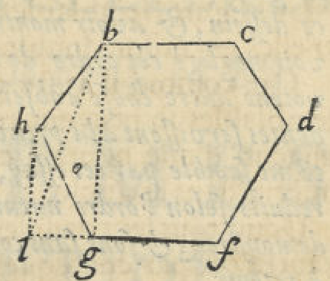
Soit prolongée *q g* juſques en *k*, en ſorte que *q k* ſoit égale à *b r*, joignant les points *r k*, & prolongeant *f d* juſques en *h*, où elle rencontre *k*.

Le parallelogramme *d h k g* ſera égal & equiangle au donné *b c d f.*

II. PROBLEME.

Faire une figure égale à une donnée qui ait moins d'un coſté que la donnée. C'eſt à dire que ſi la donnée en a 6, on en cherche une qui n'en ait que 5 ; & ſi elle en a 5, on en cherche une qui n'en ait que 4 : de ſorte que par là on pourra venir juſqu'au triangle. XLI.

Soit propoſé de reduire l'exagone *b c d f g h* en un pentagone qui luy ſoit égal.



Ayant prolongé *f g*, je tire la ligne *b g.*

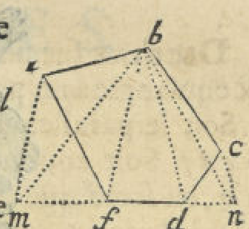
Puis de *h* je tire ſur *g* prolongée *h l* parallele à *b g.*

Et de *b* je tire *b l*; Je dis que le pentagone *b c d f l* eſt égal à l'exagone donné.

Car les triangles *h l b* & *h l g* ſont égaux, parce qu'ils ſont ſur la meſme baſe & entre meſmes paralleles.

Donc ôtant *h l o* commun à l'un & à l'autre, *h o b* demeurera égal à *l g o*, tout le reſte eſt commun à l'exagone & au pentagone.

On reduira de meſme le pentagone *b c d f l* à un trapeze.



Ayant mené la ligne *b f*, mener de *l* ſur *d f* prolongée *l m* parallele à *b f.*

Puis tirer *b m.*

On prouvera de la meſme maniere que l'on vient de faire, que le trapeze ſera égal au pentagone.

Que ſi de *b d* on tire une ligne.

Et de *c* ſur *f d* prolongée de ce coſté là *c n*, parallele à *b d.*

Et tirant *b n*, le triangle *b m n* ſera egal tant au trapeze *b c d m*, qu'au pentagone *b c d f l*. Et ainſi l'exagone aura eſté reduit en un pentagone, & le pentagone en un trapeze, & le trapeze en un triangle.

AVERTISSEMENT ET CONCLUSION.

XLII. *Ie laiſſe d'autres Problemes qui ſont tres faciles à reſoudre par les principes qui ont eſté établis. Outre que n'ayant entrepris ces Elemens que pour donner un eſſay de la vraye methode qui doit traitter les choſes ſimples avant les compoſées, & les generales avant les particulieres, je penſe avoir ſatisfait à ce deſſein, & avoir montré que les Geometres ont eu tort d'avoir negligé cét ordre de la nature, en s'imaginant qu'ils n'avoient autre choſe à obſerver, ſinon que les propoſitions precedentes ſerviſſent à la preuve des ſuivantes : au lieu qu'il eſt clair, ce me ſemble par cet eſſay, que les elemens de Geometrie eſtant reduits ſelon l'ordre naturel, peuvent eſtre auſſi ſolidement demonſtrez, & ſont ſans comparaiſon plus aiſez à concevoir & à retenir.*

FIN.

SOLUTION
D'UN DES PLUS CELEBRES
ET DES PLUS DIFFICILES
PROBLEMES
D'ARITHMETIQUE,
APPELLÉ COMMUNEMENT
LES QUARREZ
MAGIQUES.

SOLUTION D'UN DES PLUS CELEBRES ET DES PLUS DIFFICILES PROBLEMES D'ARITHMETIQUE, APPELLE' COMMUNEMENT LES QUARREZ MAGIQUES.

§. 1. *Ce que c'est que ce Probleme.*

AYANT un quarré de cellules pair ou impair. I.
Et l'ayant remply de chiffres ou selon l'ordre naturel des nombres 1. 2. 3. 4. &c.

Ou de quelqu'autre progression arithmetique que ce soit, comme 2. 5. 8. 11. 14. &c.

Disposer tous ces chiffres dans un autre quarré de cellules semblables à celuy-là, en sorte que tous les chiffres de chaque bande soit de gauche à droit, soit de haut en bas, soit mesme les deux diagonales, fassent toûjours la mesme somme.

Soient pris pour exemples les quarrez d'onze pour les impairs ; & de douze pour les pairs, comme on les peut voir dans les figures qui sont à la fin de ce Traité.

§. 2. *Considerations sur les quarrez naturels.*

J'APPELLE quarrez naturels ceux où les chiffres sont dis- II.
posez en progression arithmetique en commençant par les plus petits.

SUR LES QUARREZ IMPAIRS.

III. DANS le milieu du quarré impair il y a une cellule qui en eſt le centre. Le chiffre qui eſt dans cette cellule ſoit nommé centre & marqué par *c*.

IV. DE tous les autres chiffres la moitié ſont plus petits & les autres plus grands que le centre. Les uns ſoient appellez ſimplement *petits* & les autres *grands*.

V. LES cellules autour du centre ſoient appelées 1^re enceinte.

Autour de la premiere enceinte, 2^e enceinte.
Autour de la ſeconde enceinte, 3^e enceinte.
Et ainſi de ſuite.

VI. LES enceintes 1. 3. 5. 7. 9. &c. ſoient appellées *enceintes impaires*.

Les 2. 4. 6. 8. 10. &c. *enceintes paires*.

VII. IL eſt important de conſiderer dans chaque enceinte où ſont les petits chiffres, & où ſont les grands.

Les petits ſont premierement dans toute la bande d'en-haut, qui eſt de 3. dans la 1^re enceinte, de 5 dans la 2^e, de 7 dans la 3^e &c.

Secondement dans la bande à gauche les plus hauts juſqu'à celuy qui eſt vis-à-vis le centre *incluſive*.

Troiſiémement dans la bande à droits les plus hauts juſqu'à celuy qui eſt vis à vis le centre *excluſive*.

SUR LES QUARREZ PAIRS.

VIII. IL n'y a point de cellule qui ſoit au centre. Mais on doit prendre pour centre la moitié de la ſomme que font le premier & le dernier chiffre.

Et cette ſomme entiere s'appellera 2. *c*.

IX. LA moitié des bandes, ſçavoir celles qui ſont les plus hautes contiennent les petits chiffres, & les plns baſſes les grands.

X. LES quatre cellules du milieu font la 1^re enceinte.
Les cellules autour de ces quatre, la 2^e enceinte.
Celles autour de la ſeconde, la 3^e enceinte.
Et ainſi de ſuite.

Les enceintes 1. 3. 5. 7. 9. &c. soient aussi appellées les enceintes impaires. XI.

Et les 2. 4. 6. &c. les paires.

Les petits chiffres sont, XII.

1. Dans la bande d'en haut de chaque enceinte.

2. Au costé gauche depuis la bande d'enhaut jusqu'à la bande où commencent les grands chiffres.

3. Et de même au costé droit.

§. 3. PREPARATION.

Le plus grand mystere de la solution de ce Probleme consiste à marquer par lettres quelques-uns des petits chiffres de chaque bande. XIII.

Quarrez impairs.

Dans toutes les enceintes generalement marquer le coin à gauche de la bande d'enhaut par *e.* XIV.

Le coin à droit de la même bande par *o.*

Le milieu de cette bande par *m.*

La cellule à gauche qui est vis à vis le centre par *a.*

Marquer de plus dans les enceintes impaires XV.

Deux cellules dans la bande d'enhaut également distantes, l'une d'*e*, l'autre d'*o*, par les mêmes lettres accentuées.

L'une par *è.*

L'autre par *ò.*

Et la cellule à gauche au dessous d'*e* par *à.*

Et au costé droit celle qui est au dessus de la cellule qui est vis à vis le centre par *ϐ.*

Dans les Quarrez pairs.

Ne rien marquer dans les premieres & secondes enceintes. XVI.

Dans toutes les autres generalement marquer XVII.

Le coin à gauche d'enhaut par *e.*

A droit par *o.*

Le plus bas des petits nombres à droit par. *a.*

Le plus bas des petits nombres à gauche par *ϐ.*

Marquer de plus dans les enceintes impaires, à commencer par la 3e (qui est celle qui a 6 cellules dans la bande d'enhaut.) XVIII.

4 cellules dans la bande d'en-haut, deux par $\left\{\begin{array}{l} é. \\ ô. \end{array}\right.$

& deux par $\left\{\begin{array}{l} è. \\ ò. \end{array}\right.$

ſelon ce qui a eſté dit S. 15.

A gauche marquer la cellule au deſſous d'*e* par ω.

Et à droit celle au deſſus d'*α* par γ.

§. 4. MAXIMES
POUR LA DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

XIX. Deux chiffres, l'un *petit*, l'autre *grand*, également diſtans du centre, & qui ſe joignent par une ligne paſſant par le centre font une ſomme égale à deux fois le centre.

XX. Quand un *petit* chiffre eſt marqué par une lettre, ſon *grand* ſoit nommé (quand on le voudra exprimer) par la majuſcule de la meſme lettre, quoy qu'elle ne ſoit pas marquée.

Ainſi *e E* font deux fois le centre.

Et de meſme *α. A*, ou *ϐ. B*, ou *o. O*.

Seconde Maxime.

XXI. Quatre chiffres dans la meſme bande, dont le premier eſt autant diſtant du 2, que le 3 du 4 ſont en proportion arithmetique.

Et par conſequent la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme de ceux du milieu.

EXEMPLES.

XXII. *e. è : : ò. o.* Donc *e. o* ⊐ *è. ò.*

D'où il s'enſuit que par tout où ſont enſemble *è. ò*, ou bien *è. ò*, ou leurs majuſcules *E' O'*, on peut ſuppoſer, lorſqu'il s'agit de trouver des égalitez avec d'autres chiffres, que c'eſt comme ſi c'eſtoit *e. o*, *E. O*, parce que ſi l'égalité s'y trouve en ſuppoſant que c'eſt *e. o*, elle ne ſera pas troublée en remettant *è. ò*, en leur place, qui valent autant que *e. o*.

XXIII. *e. m : : m. o.* Donc *e. o* ⊐ *m. m.*

Dans les Quarrez pairs.

XXIV. *e. ω : : ϐ. A.* Donc *e. A* ⊐ *ω. ϐ.*

Pour trouver *A*, voyez S. 20.

TROISIEME MAXIME.

LORSQUE 4 cellules font un parallelogramme rectangle ou non rectangle, leurs 4 chiffres sont en proportion arithmetique. Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme de ceux du milieu. XXV.

EXEMPLES.

DANS LES QUARREZ IMPAIRS.

e. m :: *α. c.* Donc *e. c* = *m. α.* XXVI.
m. o :: *α. c.* Donc *m. c* = *o. α.* XXVII.
ω. m :: *c. β.* Donc *ω. β.* = *m. c.* XXVIII.

DANS LES PAIRS.

e. o :: *β. α.* Donc *e. α* = *o. β.* XXIX.
ω. β :: *o. γ.* Donc *ω. γ* = *β. o.* XXX.

§. 5. *Methode pour disposer magiquement le le Quarré naturel.*

CETTE methode consiste en fort peu de regles; les unes generales, les autres particulieres, selon lesquelles il faut transposer les chiffres du quarré naturel dans le magique. XXXI.

PREMIERE REGLE GENERALE.

IL faut disposer les chiffres par enceintes, ceux d'une enceinte en l'enceinte semblable, & tout le soin qu'on doit avoir d'abord, est de sçavoir où l'on doit mettre les petits nombres de l'enceinte, parce que la situation des *petits* donne celle des *grands* selon les deux regles suivantes. XXXII.

SECONDE REGLE GENERALE.

QUAND on a placé un *petit* chiffre dans un coin, il faut placer son *grand* dans le coin diagonalement opposé. XXXIII.

Ainsi α estant placé dans le coin gauche de la bande d'enhaut, il faudra mettre *A* dans le coin droit de la bande d'en bas.

TROISIEME REGLE GENERALE.

HORS les coins il faut placer les grands vis à vis des petits de la bande opposée. XXXIV.

C'eſt pourquoy il faut obſerver de ne mettre jamais deux petits en des bandes oppoſées vis à vis l'un de l'autre.

COROLLAIRE DE CES REGLES.

XXXV. Les chiffres eſtant diſpoſez ſelon ces regles,

Il s'enſuit, 1. Que les chiffres de deux bandes oppoſées pris enſemble, valent autant de fois *c* qu'il y a de chiffres dans les deux bandes. Car un petit & un grand valent deux fois *c*. Or il y a autant de *petits* que de *grands*. Donc

XXXVI. Il s'enſuit, 2. Que lorſqu'on a prouvé que les chiffres d'une bande aprés cette diſpoſition valent autant de fois le centre qu'il y a de chiffres, cette bande eſt égale à ſon oppoſée.

XXXVII. Il s'enſuit, 3. Que quand il y a autant de petits chiffres dans une bande que dans l'oppoſée, & que la ſomme des uns eſt égale à la ſomme des autres, c'eſt une marque aſſurée que la bande eſt égale à la bande.

La preuve en eſt facile ſans que je m'arreſte à l'expliquer.

QUATRIEME REGLE GENERALE.

XXXVIII Il ne faut ſe mettre en peine d'abord que de placer les petits chiffres qui ſont marquez par des lettres : car cela fait, le reſte ſe trouve ſans peine par cette raiſon.

Dans la bande d'en-haut, dans quelque quarrez & quelques enceintes que ce ſoit, outre les cellules marquées par des lettres

Ou il ne reſte rien.

Ou il reſte toûjours des cellules non marquées en nombre pairement pair ; C'eſt à dire 4. 8. 12. 16. &c.

Et de plus, ils ſont toûjours 4 à 4 en proportion arithmetique.

Donc prenant les extrêmes & les mettant dans une bande, & ceux du milieu dans l'oppoſée, ils ne troubleront point l'égalité qui y eſtoit déja par les chiffres marquez de lettres.

XXXIX. Il en eſt de même des deux coſtez droit & gauche. Car les petits chiffres qui reſtent (s'il en reſte outre les marquez)

quez) ſont toûjours en nombre pairement pair 4. 8. 12. 16. &c. & de 4 en 4 en proportion arithmetique.

Donc comme cy-deſſus.

Il n'y a donc plus à ſe mettre en peine que de diſpoſer les lettres. Ce qui ſe fait par les regles particulieres.

§. 6. *Regles particulieres pour les Quarrez impairs.*

Il y a deux regles pour ces quarrez, l'une pour les enceintes impaires, & l'autre pour les paires. XL.

Pour les enceintes impaires.

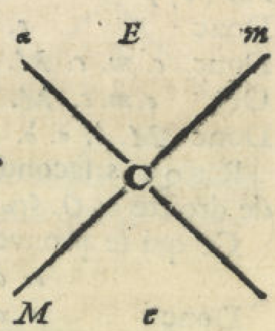
Au coin gauche de la bande d'en haut mettre *a.*

Au coin droit de la même bande. *m.*

A la bande d'en bas en queque cellule hors les coins, *e,*

A la bande de coſté du coſté d'*a*, *o.*

DEMONSTRATION.



IL eſt requis premierement à demonſtrer que dans la bande d'enhaut *a. E. m.* valent trois fois le centre. D'où il s'enſuivra qu'elle ſera égale à la bande d'en bas par 36. XLI.

Or par (26.) *e. c.* = *a. m.*

Donc *e. c. E* = *a. E. m.*

Or *e. c. E* = 3 *c.* par 20.

Donc *a. E. m* = 3 *c.* Ce qu'il falloit demonſtrer.

REQUIS ſecondement à demonſtrer que *a. o. M.* valent 3 *c.* D'où il s'enſuivra que cette bande ſera égale à l'oppoſée par 36. XLII.

Or par (17) *a. o* = *m. c.*

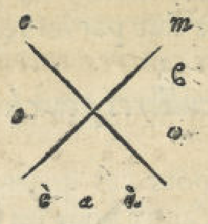
Donc *m. c. M* = *a. o. M.*

O *m. c. M* = 3 *c.* par 20.

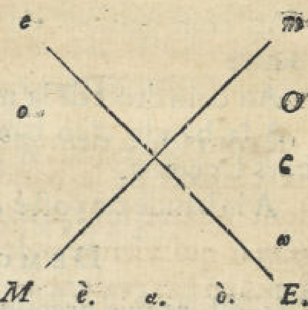
Donc *a. o. M* = 3 *c.*

Pour les enceintes impaires.

XLIII. Il suffira de les figurer tout d'un coup.



DEMONSTRATION.



XLIV. Requis premierement à demonstrer que la bande d'en bas *M. è. a. ò. E* = 5 *c*. C'est à dire qu'elle vaut ensemble cinq fois le centre.

Ce qui se prouve ainsi.

Par (27) *a. o* = *m. c.*
Donc *e. a. o* = *e. m. c.*
Donc *e. m. c. M. E.* = *è, a. ò. M. E.* (par 22.)
Or *e. m. c. M. E.* = 5. *c.* par 20.
Donc *M. è. a. ò. E.* = 5 *c.* Ce qu'il falloit demonstrer.

XLV. Requis secondement à demonstrer que dans la bande droitte *m. O. c. ω. E* = 5 *c.*

Ce qui se prouve ainsi.

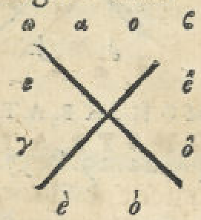
e. o = *m. m.* par (23.)
Donc *e. o. c* = *m. m. c.*
Or *m. m. c* = *m. ω. c.*
Parce que *m. c* = *ω. c.* par 28.
Donc *e. o. c.* = *m. ω. c.*
Donc *e. o. c. E. O* = *m. ω. c. E. O.*
Or *e. o. c. E. O* = 5 *c.* par 20.
Donc *m. O. ω. c. E* = 5 *c.* Ce qu'il falloit demonstrer.

§. 7. *Pour les Quarrez pairs.*

On laisse à part les deux premieres enceintes, qui ont XLVI.
leur regle particuliere.

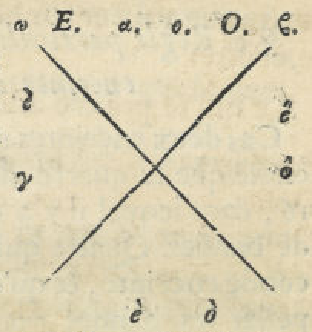
Pour les autres enceintes impaires.

La disposition s'en figure ainsi. XLVII.



Demonstration.

Requis 1. à demonstrer que les six chiffres de la bande d'en haut dont quatre sont *petits*, & deux *grands* qui viennent de *é* & *ò* qu'on a mis en bas, valent six fois le centre. Ce qui se prouve ainsi. XLVIII.



α. A. o. O. e. E = 6 *c.* par (20.)

Or ces six lettres sont égales aux six, *ω. E. α. o. O. ϛ.*

Car ôtant les mêmes qui se trouvent de part & d'autre, sçavoir *α. o. O. E.* il ne restera d'un costé que *A. e*: & de l'autre que *ω. ϛ.*

Or par (24.) *A. e* = *ω. ϛ.*

Donc les six lettres *ω. E. α. o. O. ϛ* = 6 *c.*

Requis 2. à demonstrer que *ω. e. γ* = *ϛ. ê. ô.* Car si cela est, les grandes seront aussi égales aux grandes, & le tout au tout par (37.) XLIX.

Supposant donc que *ê. ô* soient *e. o.* (S. 22.) & ostant *e* & *e* de part & d'autre, reste d'une part *ω. γ.* & de l'autre *ϛ. o.* qui sont des sommes égales par (30)

Donc *ω. e. γ* = *ϛ. ê. ô.*

Donc la bande égale à la bande par (30)

Pour les enceintes paires.

L. LA diſpoſition en eſt tres facile, & ſe figure ainſi.

DEMONSTRATION.

LI. ELLE eſt ſi facile par 22. 29. & 37. que je ne m'amuſe pas à l'expliquer.

Cette enceinte ſe peut encore faire en tranſpoſant les coins &c.

§. 8. *Regle particuliere pour la premiere & ſeconde enceinte des Quarrez pairs.*

LII. CEs deux enceintes ne ſont autre choſe que le quarré de 4 qui fait 16, dans lequel il y a deux ſortes de bandes. Quatre qui font la ſeconde enceinte, & qu'on peut appeller les bandes *exterieures*. Et quatre autres qui coupent le quarré, & qu'on peut appeller *tranſverſales* : ſçavoir la 2^e^ & la 3^e^ de haut en bas.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Et la 2^e^ & la 3^e^ de gauche à droit.

LIII. CE qui eſt cauſe que ces deux enceintes ne ſe peuvent pas diſpoſer par les regles des autres, c'eſt que les 4 chiffres du milieu faiſant en divers ſens quatre bandes de deux chacune en ligne droitte, & deux en diagonale, les bandes droittes ne ſçauroient faire des ſommes égales, mais ſeulement les diagonales.

Or ces 16 chiffres ſe pouvant diſpoſer en tant de manieres que cela eſt preſque incroyable ; ſçavoir en plus de 20 millions de millions.

20:922:789:872:000.

Il n'y en a proprement que 16 qui ſoient magiques, c'eſt à dire où toutes les bandes faſſent des ſommes égales (car je ne compte pas pour differentes diſpoſitions celles qui ne viennent que de la differente ſituation du même quarré.)

Et voicy comme on les trouve. LV.

Il faut prendre toûjours les chiffres 4 à 4 en cet ordre.

1. Les quatre du dedans ou interieurs.

2. Les quatre coins exterieurs.

3. Les deux du milieu de la bande d'en haut, avec les deux du milieu de celle d'en bas.

4. Les deux du milieu de la bande à gauche, avec les deux du milieu de celle à droit.

Or chacun de ces chiffres pris ainſi 4 à 4 (& qu'on nommera dans la ſuitte par 1. 2. 3. 4.) peuvent

Ou eſtre laiſſez en leur même place; ce qui ſe marquera par *o.*

Ou eſtre tranſportez en croix S. André; ce qui ſe marquera par *c.*

Ou directement de gauche à droit; ce qui ſe marquera par *g.*

Ou directement de haut en bas; ce qui ſe marquera par *h.*

Suivant ces remarques, & ſe ſouvenant de ce que ſignifient les 4 nombres (1. 2. 3. 4.) & les 4 lettres (*o. c. h. g.*) les deux tables ſuivantes feront trouver ſans peine les 16 diſpoſitions magiques du quarré de 4: ou ce qui eſt la même choſe des deux premieres enceintes de tous les quarrez pairs. LVI.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1.	*o*	*o*	*o*	*o*	*c*	*c*	*c*	*c*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*c*	*g*	*c*	*g*	*h*	*o*	*h*	*o*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.
1.	*g*	*g*	*g*	*g*	*h*	*h*	*h*	*h*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*h*	*o*	*h*	*o*	*c*	*g*	*c*	*g*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

LVII. De ces 16 diſpoſitions magiques du quarré de 4. il y en a deux, ſçavoir la 1re & la 6e, où on ne change que 8 chiffres.

Deux, ſçavoir la 11e & la 16e, où on les change tous 16.

Et 12 où on en change 12.

LVIII. Voicy un exemple de la 6e diſpoſition, & un autre de la 16e. On laiſſe à trouver les autres.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

DEMONSTRATION.

LIX. CHAQUE bande tant exterieure que tranſverſale du quarré de quatre (ou du quarré compoſé des 2 premieres enceintes de tous les quarrez pairs) eſt de 4 chiffres en proportion arithmetique.

Et par conſequent la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens.

Soit donc, par exemple, la ſomme des extrêmes de la bande d'enhaut appellée *b*, la ſomme des moyens qui luy eſt égale pourra eſtre auſſi appellée *b*, & ainſi toute la bande ſera *b*+*b*.

Et par la même raiſon la bande d'en bas pourra eſtre $f+f$.

Cela étant on peut faire ces bandes égales par deux voies.

La 1re en tranſpoſant les extrêmes de l'une à l'autre ſans changer les moyens. Car alors l'une deviendra $f+b$.

Et l'autre $b+f$. & ainſi ſeront égales.

La 2e en tranſpoſant les moyens ſans changer les extrêmes. Car alors l'une deviendra $b+f$. & l'autre $f+b$. & ainſi ſeront encore égales.

Il ne faut qu'appliquer cecy à chacune de ces 16 diſpoſitions, & l'on verra que les tranſpoſitions que l'on y fait les doivent rendre magiques.

§. 9. *Divers moyens de varier les Quarrez Magiques.*

De ces moyens j'omets ceux qui ſont trop faciles à trouver, & je n'en marqueray que deux qui ſont plus importans, & qu'on a pratiquez dans les deux exemples qu'on a donnez de quarrez magiques.

PREMIER MOYEN.

Nous avons ſuppoſé qu'on tranſporteroit les chiffres de la premiere enceinte du quarré naturel dans la premiere enceinte du quarré magique; & ceux de la 2e dans la 2e; & de la 3e dans la 3e &c. Mais cela n'eſt pas neceſſaire. Car pour les chiffres marquez de lettres, il ſuffit de ne les tranſporter que d'une enceinte impaire à une autre quelconque qui ſoit impaire, comme de la 5e à la 1re; & d'une enceinte paire à une paire, comme de la 6e à la 4e. LX.

SECOND MOYEN.

Et pour tous les autres chiffres non marquez de lettres, on les peut tranſporter de quelque enceinte que ce ſoit à quelque autre enceinte que l'on voudra; pourvû qu'on en prenne quatre enſemble qui ſoient en proportion arithmetique, & qu'on ait ſoin de mettre les extrêmes dans une bande, & les moyens dans la bande oppoſée. LXI.

CONCLUSION.

LXII. Je pense pouvoir conclure de tout cecy, qu'il n'est pas possible de trouver une methode plus facile, plus abregée & plus parfaite pour faire les quarrez magiques, qui est un des plus beaux Problemes d'Arithmetique.

Ce qu'elle a de singulier, c'est 1. qu'on n'écrit les chiffres que deux fois.

2. Qu'on ne tâtonne point, mais qu'on est toûjours asſuré de ce que l'on fait.

3. Que les plus grands quarrez ne sont pas plus difficiles à faire que les plus petits.

4. Qu'on les varie autant que l'on veut.

5. Qu'on ne fait rien dont on n'ait demonstration.

6. A quoy on peut ajoûter, que cette methode est si generale, que sans y rien changer on pourroit resoudre sans aucune peine par la mesme voie cet autre Probleme qui paroist encore plus merveilleux.

Ayant mis dans un quarré naturel tous les nombres que l'on voudra en progression geometrique, comme 1. 2. 4. 8. 16. &c. les disposer de telle sorte dans un quarré semblable, que tous les nombres de chaque bande multipliez les uns par les autres fassent une somme égale à celle que font les nombres de toute autre bande multipliez aussi les uns par les autres.

En voicy un exemple dans le quarré de trois.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Fin *de l'Explication des Quarrez Magiques.*