El Análisis de Manuales y la Identificación de Problemas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas

Bernardo Gómez

La ambigüedad del signo radical es un problema con raíces históricas que ha quedado recogido en una tradición de enseñanza reflejada en los manuales escolares. Como problema matemático ha sido resuelto, pero no como problema didáctico, ya que el signo radical presenta sutilezas conceptuales y operatorias cuya omisión en los manuales es a menudo causa de malentendidos y conflictos fuertemente arraigados. Algunos de esos malentendidos son un producto de la enseñanza tradicional reflejada en los manuales que ignora los desarrollos matemáticos actuales. En este artículo se utiliza el análisis textual y el epistemológico para presentar este problema en sus dimensiones matemática y didáctica.

Términos clave: Análisis epistemológico; Análisis textual; Manuales escolares; Problemas didácticos; Radicales; Raíces

Analysis of Textbooks and Identification of Research Problems in Teaching of Mathematics

The ambiguity of the radical sign is a problem with historical roots which is reflected in the teaching tradition gathered in textbooks. It has been solved as a mathematical problem but not as a didactical problem, because the radical sign presents conceptual and operative subtleties. The omission of these subtleties in textbooks is often due to misunderstandings and conflicts deeply rooted. Some of these misunderstandings are a result of the teaching tradition reflected in textbooks which ignores current mathematical developments. In this article we use textual and epistemological analysis to depict this problem in its mathematical and educational dimensions.

Keywords: Epistemological analysis; Radicals; Roots; Teaching problems; Textbooks; Textual analysis

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA, 5*(2), 49-65.

No ha sido hasta fechas recientes que los manuales escolares han merecido la debida atención de los investigadores en Educación Matemática. Su importancia es tal que, desde su nacimiento a finales del siglo XVIII[1], se han convertido en elementos omnipresentes en la escuela, como principal apoyo y fuente de información indispensable e inseparable de profesores y estudiantes.

Hablar de los manuales escolares implica hablar del paradigma del saber institucionalizado en el sistema educativo, del currículum realmente implementado y del modelo de organización y planificación de la enseñanza dominante en el tiempo en el que han estado vigentes.

No debe extrañar pues, que desde siempre hayan estado en el centro del debate educativo, como objeto de polémica y confrontación entre los defensores y detractores de su bondad pedagógica; y también, como objeto de manipulación ideológica, de control político o de abuso en su comercialización (Gómez, 2000, 2008).

Bajo estos distintos aspectos, que caracterizan su importancia e influencia, se puede enfocar el análisis de los manuales escolares como una línea más de la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Sin embargo, el que sean aspectos importantes que justifican por sí mismos el esfuerzo investigador, no enfoca el problema principal de la Educación Matemática, el verdadero y más importante (Freudenthal, 1981), el más urgente en en esta área del conocimiento: ¿por qué hay tantos niños que no aprenden las matemáticas como deberían?

Para intentar responder a esta cuestión, gran parte del esfuerzo de los investigadores de las últimas décadas se ha orientado a facetas del paradigma cognitivo centradas en la observación de procesos de aprendizaje, siendo el proceso de aprendizaje de la humanidad el mayor de estos (Freudenthal, 1981, p.137). Observar el proceso de aprendizaje de la humanidad requiere dirigir la atención a la historia de las ideas matemáticas, a través del único registro disponible de las mismas. Esto es, a través de textos y manuales escolares y mediante un análisis de los mismos.

El presente artículo está dirigido al análisis de los manuales y libros de texto para identificar problemas de enseñanza y aprendizaje, abordando el caso de los radicales como ejemplo ilustrativo de esta faceta de la investigación educativa.

Consideraciones Generales sobre los Manuales

Como paso previo al mencionado análisis, en este apartado caracterizamos los libros de texto y manuales escolares.

[1] Entre los primeros textos seleccionados por una comisión nacional destaca el de Condorcet, a raíz del Informe Arbogast ante la Convención Nacional francesa en 1792 (Sierra, Rico y Gómez, 1997, p. 376).

El Libro de Texto y el Manual Escolar

En un sentido amplio, un libro de texto es una publicación especializada, reconocible por su contenido y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata y, a menudo, indicando a quién va dirigido.

A partir de la implantación del sistema público de enseñanza surge el género más conocido de los libros de texto: los manuales escolares. Un manual es un libro de texto que es utilizado en la escuela, que es recomendado por los profesores y que nace en respuesta a las necesidades del sistema de enseñanza. Además, es un libro de texto que tiene una estructura, un diseño editorial y un sistema de comercialización específico.

La estructura de un manual se caracteriza por la forma de presentar y organizar el contenido textual que atiende a una combinación de elementos entre los que sobresalen: (a) un modelo de agrupación temática con denominación propia, a saber: lecciones, temas, unidades y actividades; (b) un modelo de codificación que usa diferentes tipos de letras, párrafos numerados y epígrafes resaltados; (c) unas formas específicas de expresión literaria como son las definiciones, explicaciones, demostraciones, preguntas y respuestas, diagramas, etc.; y (d) unos modos de orientación al lector mediante el uso de ejemplos, ejercicios, problemas, cuestiones o actividades.

Bajo estas consideraciones se puede decir que un ejemplo de libro de texto sería el que se ha considerado el mejor libro de texto de matemáticas del siglo XVIII: el "Álgebra" de Euler, publicado por primera vez en 1770, bajo el título de *Vollstandige Anleitung zur Algebra* (*Elementos de Álgebra*). Y un ejemplo de manual escolar sería cualquiera de los libros de primaria o secundaria, de uso común en los centros escolares.

Requisitos que Cumplen los Manuales

Los manuales escolares nacieron en respuesta a los requerimientos del sistema general de enseñanza. Su implantación hizo necesario un tipo de libro polivalente con tres propósitos.

Primero, suplir la falta de profesores suficientes con la formación necesaria. Para lo cual tenían que asumir la tarea de garantizar su formación y actualización científica y pedagógica. En otras palabras, los manuales tenían que servir tanto para informar a los profesores como para apoyarles y guiarles en su trabajo diario.

Segundo, dar respuesta al modelo de enseñanza simultánea frente al individual. Con esto, lo que se pretendía era asegurar la igualdad educativa y fomentar la democratización social. Para ello todos los estudiantes tendrían que tener acceso al mismo tipo de información y al mismo tiempo, ajustándose a unos programas comunes (normalizar) necesariamente reducidos para ajustarse al limitado tiempo escolar, pero suficientes para contener los elementos básicos del conocimiento para la enseñanza (elementalizar).

Y tercero, adaptarse a las características de los estudiantes en sus diferentes niveles educativos. Para ello tenían que reorganizar la forma tradicional de presentar el conocimiento, poniéndolo de forma graduada, racional y metódica; esto es, distribuyendo el conocimiento por cursos, ciclos o etapas, y poniéndolo en el mejor orden y de la manera más racional, clara y sencilla posible.

Los Manuales, un Conocimiento de Dominio Público

Los requisitos y las demandas de la institución escolar han modelado el contenido y la estructura de los manuales (Schubring, 1987) de una determinada manera: como libros normalizadores, elementalizadores, metódicos, graduados, racionales y formativos, a través de una propuesta curricular, de un programa y de la inercia de una tradición reflejada en los manuales ya existentes en la institución particular, de los que con frecuencia toman prestado o directamente copian.

Así, el conocimiento escolar se vuelve una especie de conocimiento comunitario, una propiedad común que no tiene derechos de autor, por lo que raramente se dice qué parte del texto es original o de producción propia, y cuál se ha tomado o copiado de otro autor, haciendo de los manuales una obra de autoría colectiva más que de una sola persona, de tal modo que sería más propio hablar de “desarrolladores de manuales” que de autores de manuales.

Este conocimiento comunitario es muy importante para los profesores porque es lo que se considera el saber institucional, entendido como el saber refrendado por la comunidad científica, de modo que gran parte de su trabajo depende de este conocimiento.

Los profesores tienen que decidir qué manual les parece más adecuado, después deben decidir qué parte o partes de ese libro son las que van a usar, y finalmente, deben decidir cómo van a hacer para usar esa parte o partes seleccionadas, en función de las capacidades de sus alumnos y de los objetivos de su enseñanza.

Esta decisión está mediatizada por las posiciones pedagógicas dominantes y por las estrategias de comercialización. En relación con las primeras, se enfrentan la posición de los que sostienen que los manuales son un buen medio de enseñanza, que salva las deficiencias formativas del profesorado y garantiza los soportes científicos que deben normalizar el conocimiento colectivo nacional, con las de los que sostienen que la enseñanza no es un trabajo automático, ni el maestro un eco de pensamientos ajenos, y que los manuales son *textos muertos*, que dan la ciencia hecha y la enseñan dogmáticamente, desarrollan la pasividad en los docentes, la memorización en los estudiantes y provocan el estancamiento en la enseñanza.

En cualquier caso, los profesores necesitan tener un buen conocimiento y comprensión de lo que aportan los manuales sobre los que deben decidir; no sólo en su contenido, sino también en relación con las capacidades de sus estudiantes y con la planificación, objetivos y metas de su enseñanza. Sin embargo, como señala Van Dormolen (1986), aunque "en algunos casos los profesores son capaces de decir por qué usan un libro y cómo lo usan, muchos de ellos no tiene una comprensión clara de las características del texto que están usando" (p.142), y tienden a dar por bueno su contenido ignorando los condicionantes que los han modelado, lo que a menudo se traduce, por acción o por omisión, en una verdadera fuente de problemas de enseñanza y aprendizaje.

Esto sitúa al análisis de manuales como un tema de investigación que, en el caso de las matemáticas, es responsabilidad de la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas.

El Análisis de los Manuales

El análisis de manuales se puede hacer a priori, como posible medio de instrucción, o a posteriori, para comparar su propuesta curricular con los resultados del aprendizaje (Van Dormolen, 1986) y para conocer las adaptaciones de las formas textuales de la disciplina a la retórica escolar.

En el análisis a posteriori, los manuales se convierten en documentos imprescindibles para indagar acerca de lo que es o ha sido la práctica real de la enseñanza, ya que los libros de texto son los únicos registros disponibles del conocimiento matemático que la institución escolar ha transmitido.

Esto se puede hacer siguiendo dos líneas principales: (a) el análisis textual, para describir, evaluar o caracterizar un/el contenido matemático en su dimensión curricular y metodológica; y (b) el análisis epistemológico, para conocer cómo se han concebido, configurado y establecido las matemáticas escolares, en diferentes momentos de la historia.

En relación con el análisis textual, no se puede afirmar que haya un marco teórico comúnmente aceptado con el cual analizar los manuales. No obstante, sí es posible encontrar en la revisión bibliográfica estudios que analizan textos desde el punto de vista de un contenido matemático concreto, para hacer inferencias mediante el establecimiento y la comparación de tablas de categorías en relación con definiciones, teoremas, pruebas, ejemplos, problemas, ejercicios, algoritmos y reglas, representaciones, signos y convenciones, etc.

Los otros aspectos, que determinan la presentación del contenido matemático seleccionado para la enseñanza, son consecuencia de las disposiciones oficiales curriculares y pedagógicas, tales como objetivos, procesos de aprendizaje, directrices, orientaciones, secuenciaciones, etc.

Los estudios que hacen un análisis epistemológico se suelen apoyar en la historia de las matemáticas, centrada en la enseñanza, tal y como ha quedado reflejada en los libros de texto, y más específicamente en los manuales, como una herramienta útil para identificar problemas de enseñanza y aprendizaje, analizando concepciones, ambigüedades, omisiones, inconsistencias, dificultades, etc., ligadas al desarrollo de un concepto y que previsiblemente se pueden presentar en los estudiantes.

La Ambigüedad del Signo Radical: un Problema Matemático y un Problema Didáctico

Para ilustrar esta línea de análisis, textual y epistemológica, se ha elegido como ejemplo el problema denominado *la ambigüedad del signo radical*.

El Signo Radical en Euler

Sorprende encontrar comentarios de los grandes matemáticos que derivan en problemas de enseñanza y aprendizaje que han trascendido al paso del tiempo. Un ejemplo de este tipo de comentarios se encuentra en el "álgebra" de Euler. En la Figura 1 se muestra lo afirmado por Euler (1770, p. 62) en el Volumen 1 de dicho texto.

150. Da nun aber nach der Anmerkung (122) die Quadratwurzel jeder Zahl immer einen doppelten Werth hat, nämlich so wohl negativ als auch positiv genommen werden kann, indem z. B. $\sqrt{4}$ so wohl $+2$ als auch -2 ist, und überhaupt für die Quadratwurzel aus a so wohl $+\sqrt{a}$, als auch $-\sqrt{a}$ geschrieben werden kann, so gilt dies auch bei den unmöglichen Zahlen; und die Quadratwurzel aus $-a$ ist so wohl $+\sqrt{-a}$, als auch $-\sqrt{-a}$, wobei man die Zeichen $+$ und $-$, welche vor das Zeichen $\sqrt{\ }$ gesetzt werden, von dem Zeichen, das hinter dem $\sqrt{\ }$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

150. …la raíz cuadrada de cualquier número tiene siempre dos valores, uno positivo y el otro negativo; esto es que $\sqrt{4}$, por ejemplo, es igualmente 2 y -2, y en general, se puede adoptar tanto $-\sqrt{a}$ como $+\sqrt{a}$ para la raíz cuadrada de a.

Figura 1. Consideraciones de Euler sobre la raíz cuadrada

En este comentario aparece la ambigüedad del signo radical, ya que el mismo signo se asocia al conjunto de dos valores, $+2$ y -2, en $\sqrt{4}$; y se asocia a un solo valor en $\sqrt{a}$, de modo que, en este caso, para distinguir las dos resultados de la raíz de *a* se le hace preceder del signo positivo o del signo negativo.

El texto refleja también el cambio de significado del signo radical como consecuencia de la extensión de su dominio de aplicación de la aritmética al álgebra. En aritmética se trabaja con números determinados, como 4, y la operación raíz cuadrada de cualquiera de esos números determinados existe y se puede calcular exactamente si el radicando es un número cuadrado perfecto o aproximadamente si no lo es. Mientras que en álgebra se trabaja con números genéricos, expresados mediante letras, y como la raíz cuadrada de una letra no se puede calcular, se usa el signo radical para indicar el resultado genérico de esa operación.

La Ambigüedad del Signo Radical como Problema Matemático y como Problema Didáctico

La ambigüedad del signo radical plantea un problema matemático y un problema didáctico. El problema matemático es debido a que pone en entredicho la racionalidad y la coherencia interna de las Matemáticas: o tiene un valor o tiene dos; pero no un valor o dos valores, según convenga. Esto ha obligado a los matemáticos a optar por una sola de las dos opciones posibles: (a) $\sqrt{4} = \pm 2$, o (b) $\sqrt{4} = 2$.

Los matemáticos han decidido asignar a la expresión radical $\sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, una sola de las raíces de *x*, la no negativa, a la que denominan raíz principal o aritmética. Así que, para ellos, lo correcto es $\sqrt{4} = 2$. A continuación, se presentan algunos ejemplos de ello:

- "Cada número real no negativo *a* tiene una raíz cuadrada no negativa única. Nota: Si $a \geq 0$, su raíz cuadrada no negativa se indicará por $a^{1/2}$ o por $\sqrt{a}$" (Apóstol, 1990, p. 36).
- "El símbolo $\sqrt{z}$ para $z \geq 0$ denota aquél número no negativo cuyo cuadrado es *z*" (Courant y John, 1979, p. 38).
- "Si *A* es un número real positivo, la única raíz positiva de $x^n - A = 0$ se escribe $x = \sqrt[n]{A} = A^{1/n}$" (Lentin y Rivaud, 1969, p. 164).
- "Acordamos denotar por $\sqrt{a}$ la raíz cuadrada positiva, y llamarla simplemente raíz cuadrada de *a*. Así, $\sqrt{4}$ es igual a 2 y no −2, aunque $(-2)^2 = 4$" (Lang, 1971, p. 10).

Optando por una de las dos opciones, el problema de la ambigüedad del signo radical deja de existir desde el punto de vista de las matemáticas formales. No así el problema didáctico, ya que los estudiantes no sólo aprenden de lo que se les dice, sino que también aprenden cuando están intentando dar sentido a las situaciones matemáticas que encuentran (Roach, Gibson y Weber, 2004).

Y las situaciones que encuentran parece que les lleva a pensar que $\sqrt{4} = \pm 2$. Al menos es eso lo que contestan cuando se les pregunta cuál de las dos opciones anteriores ya mencionadas es la respuesta correcta, como se ha observado en diferentes encuestas informales (Buhlea y Gómez, 2008; Roach, Gibson y Weber, 2004) con estudiantes y profesores de diversos niveles educativos, en las que la mayoría contestó que la respuesta correcta era la primera opción.

Este problema didáctico, por el que los estudiantes ignoran los desarrollos formales actuales del signo radical, parece ser un producto de la enseñanza (Buhlea y Gómez 2008; Gómez y Buhlea, 2009), que tal vez se puede explicar a la luz de la teoría de Sfard (1991) sobre la naturaleza dual de las concepciones matemáticas y su papel en la formación de conceptos. Sfard sustenta su teoría en el hecho de que una entidad matemática puede ser vista como un objeto y como un proceso. El tratamiento de una noción matemática como objeto conduce a un tipo de concepción que llama estructural; mientras que interpretar una noción como proceso implica una concepción que llama operacional.

De esta manera, si se percibe la expresión $\sqrt{4}$ como operación indicada, la concepción del símbolo radical sería operacional; mientras que si se percibe la expresión $\sqrt{a}$ como resultado de esa operación, la concepción del signo radical sería estructural.

Para Sfard (1991), la habilidad para ver una entidad matemática como un objeto y un proceso es indispensable para un entendimiento profundo de las matemáticas, de modo que "la formación del concepto implica que ciertas nociones matemáticas deberían ser consideradas totalmente desarrolladas solamente si pueden ser concebidas tanto operacionalmente como estructuralmente" (p. 23). A tal fin, conjetura que cuando una persona logra conocer una nueva noción matemática, la concepción operacional es a menudo la primera en desarrollar, mientras que la concepción estructural sigue un proceso prolongado y difícil que necesita intervención externa, de un profesor o de un libro de texto, por lo que es muy dependiente del modelo de enseñanza.

Esta afirmación apunta a que, para abordar el problema didáctico de la conceptualización del signo radical por los estudiantes y profesores, es necesario conocer la influencia del modelo de enseñanza sobre ese problema. Para eso la investigación puede sustentarse en una revisión de manuales y libros de texto, en su condición de modelo dominante de enseñanza y verdadero currículo implementado.

Raíz y Radical en los Manuales

En esta sección analizamos la presencia del signo radical en los manuales escolares españoles elaborados por algunas de las editoriales más representativas.

Raíz y Radical. ¡Es lo Mismo!

Algunos manuales suelen identificar entre raíz y radical, dado que afirman que el radical de un número es la raíz indicada de ese número. Este es el caso de los ejemplos presentados en la Figura 2.

¡Presta atención!

■ El término **radical** designa, indistintamente, el **símbolo radical**, $\sqrt[n]{\ }$, y la **raíz indicada**, $\sqrt[n]{a}$.

(Oxford University Press España, 2003, p. 27)

Radical de número es la raíz indicada de ese número.
En el radical $\sqrt[n]{a}$, n se llama **índice** y a es el **radicando**.
$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, n es número natural. !

(SM, 2003, p. 21)

Figura 2. Fragmentos de manuales donde raíz y radical son lo mismo

En esta misma línea, en otros manuales el símbolo $\sqrt{a}$ representa de modo abreviado la raíz n-ésima de un número real *a*, lo que definen como solución de la ecuación $x^2 = a$ (ver Figura 3).

Se llama **raíz *n*-ésima** de un número a, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la siguiente condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**; a, **radicando**, y n, **índice** de la raíz.

(Anaya, 2004, p. 52)

Figura 3. Fragmento donde raíz n-ésima y radical son lo mismo

Esta identificación entre raíz y radical junto con la definición de raíz a través de la ecuación $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$, tiene consecuencias que están relacionadas con el problema de la ambigüedad del signo radical.

Una de ellas es que al considerar los números negativos la definición de raíz cuadrada contiene dos valores, ya que la ecuación $b^2 = a$ tiene dos soluciones opuestas. Así, cuando *a* es un número determinado, como por ejemplo 4, su raíz cuadrada, el número *b*, vale $+2$ y -2, y lo mismo ocurre con su radical, lo que se escribe de modo abreviado con el doble símbolo $\pm$. Los fragmentos incluidos en la Figura 4 son ejemplos de ello.

Raíces de índice par

$\sqrt{9} = \pm 3$, ya que $\begin{cases} 3^2 = 9 \\ (-3)^2 = 9 \end{cases}$

(McGraw-Hill, 1997, p. 25)

RADICAL CUADRÁTICO

Índice $\rightarrow \sqrt[2]{36} = \pm 6 \leftarrow$ Raíces cuadradas

$\uparrow$

Radicando

(SM, 2004, p. 36)

Figura 4. Ejemplos donde la raíz cuadrada contiene dos valores

Una segunda consecuencia destacada de la ambigüedad del signo radical es que raíz y potencia (por ejemplo, raíz cuadrada y elevar al cuadrado) se presentan en los manuales como operaciones inversas (ver Figura 5).

La potenciación tiene una operación inversa: la radicación. En ella se conocen la potencia y el exponente y tenemos que encontrar la base.

(Santillana, 2005, p. 30)

Calcular la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado:

$$b^2 = a \leftrightarrow \sqrt{a} = b$$

(Anaya, 2005, p. 52)

La **radicación** es la operación inversa a la potenciación, es decir, la radicación consiste en hallar la base de una potencia conociendo su valor y el de su exponente natural.

(Oxford University Press España, 2003, p. 27)

Figura 5. Ejemplos donde raíz y potencia son operaciones inversas

En coherencia con esta concepción del radical, algunos desarrollos algebraicos, como el de la resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas, se concretan con formulaciones donde al despejar la x el radical no lleva doble signo: $x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$. En la Figura 6 se muestra un ejemplo de esta otra consecuencia. Como sutileza, nótese que en esta resolución se omite un paso intermedio, el $\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$, ya que sería $x^2 = 4 \rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$.

Ejemplos:

- Resolvemos la ecuación $2x^2 - 8 = 0$, despejando x: $x^2 = 8/2 = 4$; $x = \sqrt{4} = \pm 2$. La ecuación tiene dos soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

(Santillana, 1999, p. 64)

Figura 6. Ejemplo donde el radical no lleva doble signo

Raíz y Radical. ¡No es lo Mismo!

En una posición diferente a la anterior, otros manuales diferencian raíz y radical de tal modo que restringen el valor del radical a un solo valor, el valor positivo de la raíz. De este modo, aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, $\sqrt{4}$ sólo se refiere a la positiva, $\sqrt{4} = 2$. El fragmento incluido en la Figura 7 es una clara muestra de esta distinción.

- Aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, con $\sqrt{4}$ nos referimos solo a la positiva: $\sqrt{4} = 2$. En general, un número positivo, a, tiene dos raíces cuadradadas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$

(Anaya, 2004, p. 52)

Figura 7. El radical como valor positivo de la raíz

En otros casos, la diferenciación entre raíz y radical se observa en el hecho de que para representar las dos raíces cuadradas de un número se anteponen al radical los signos más (+) y menos (–) (ver Figura 8).

Radicando positivo: existen dos raíces opuestas.
Por ejemplo, la raíz cuadrada de 9 puede ser $+3$ y -3.
Para distinguir las dos raíces se escribe: $\sqrt{9} = 3$ y $-\sqrt{9} = -3$

(SM, 2003, p. 21)

■ Todo número real positivo, a, tiene dos raíces de igual índice, una positiva y otra negativa, que se representan por $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$:

- Las raíces cuartas de 16 son $\sqrt[4]{16} = 2$ y $-\sqrt[4]{16} = -2$, debido a que $2^4 = (-2)^4 = 16$.
- Las raíces cuadradas de 3 son $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$, que se dejan indicadas

(Oxford University Press España, 2003, p. 27)

Figura 8. Ejemplos donde la raíz aparece como radical con signo diferenciado

En coherencia con esta concepción restringida a un solo valor del signo radical, el desarrollo algebraico de, por ejemplo, las ecuaciones de segundo grado incompletas, lleva los signos más y menos o el doble signo delante del radical al despejar la *x*: $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ (ver Figura 9).

Ejemplo: Resolver la ecuación: $4x^2 - 9 = 0$

Despejamos x y obtenemos: $x^2 = \frac{9}{4}$ y, por tanto, sus soluciones son:

$$x_1 = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2}$$

(Ecir, 1996, p. 63)

- **Si $b = 0$** $\rightarrow$ Despejamos directamente x^2. Por ejemplo:

$$3x^2 - 48 = 0 \rightarrow 3x^2 = 48 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

(Anaya, 2004, p. 102)

Figura 9. Diferencias en el signo delante del radical

Como sutileza, nótese que en esta resolución también se omite el paso intermedio $\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$, algo que en este caso no es neutral, ya que tiene consecuencias en la conceptualización del signo radical (ver Roach, Gibson y Weber, 2004).

En resumidas cuentas, para unos manuales el desarrollo correcto de la ecuación es $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, y para otros es $x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$.

SUTILEZAS

Las sutilezas que presenta el signo radical son a menudo fuente de conflictos cognitivos que se manifiestan en forma de incoherencias, falsedades o paradojas. Un ejemplo de estas incoherencias es que si se asigna un doble valor al radical, como en $\sqrt{4} = \pm 2$, se viola la importante propiedad de equivalencia de radicales: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Esto se puede ver al aplicarla a $\sqrt[6]{3^2}$ y $\sqrt[3]{3}$, donde la propiedad dice que ambos radicales son iguales. Sin embargo, atendiendo al doble valor del radical no lo son, puesto que al ser el índice del primer radical par, éste tiene dos raíces cuadradas (una opuesta de la otra) y, como el índice del segundo radical es impar, éste sólo tiene una raíz. Entonces, ¿son equivalentes?

Si, por el contrario, se asigna un solo valor al radical, en la siguiente paradoja recogida en la Tabla 1, entresacada de un libro de recreaciones matemáticas, la explicación que da el autor carecería de sentido.

Tabla 1
Paradoja Extraída de un Libro de Recreaciones Matemáticas

Explicación textual	Pasos
Se tiene idénticamente $4-10=9-15$	$4-10=9-15$
Cuatro es el cuadrado de 2; 10 es igual a 2 veces el producto de 2 por $\frac{5}{2}$; igualmente, 9 es el cuadrado de 3 y 15 es igual a dos veces el producto de 3 por $\frac{5}{2}$	$2^2-2\cdot 2\cdot \frac{5}{2}=3^2-3\cdot 2\cdot \frac{5}{2}$
Completemos los cuadrados añadiendo a los dos miembros el cuadrado de $\frac{5}{2}$ o $\frac{25}{4}$	$2^2-2\cdot 2\cdot \frac{5}{2}+\frac{25}{4}=3^2-3\cdot 2\cdot \frac{5}{2}+\frac{25}{4}$
Tendremos así: $\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$	$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$
Extrayendo las raíces cuadradas de los dos miembros $\left(2-\frac{5}{2}\right)=\left(3-\frac{5}{2}\right)$	$\left(2-\frac{5}{2}\right)=\left(3-\frac{5}{2}\right)$
Y, por consecuencia, $2=3$	$2=3$

El absurdo viene de la omisión del doble signo al extraer la raíz (Rouse, 1992, p. 103). Lo que el autor sugiere en el texto es que el procedimiento correcto sea el que se muestra en la Figura 10.

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2\leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(3-\frac{5}{2}\right)^2}\leftrightarrow$$

Figura 10. Procedimiento correcto según Rouse

$$\pm\left(2-\frac{5}{2}\right)=\pm\left(3-\frac{5}{2}\right)\leftrightarrow$$

$$\pm\left(-\frac{1}{2}\right)=\pm\left(\frac{1}{2}\right)$$

Figura 10 (continuación). Procedimiento correcto según Rouse

Obsérvese que en esta explicación se da a entender que $\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}=\pm\left(2-\frac{5}{2}\right)$. Pero esto va en contra de la idea de que raíz cuadrada y elevar al cuadrado son operaciones inversas.

En definitiva, la restricción del signo radical a un solo valor es necesaria para no violar un requisito necesario para la definición de exponente racional: a^r, $r \in Q$, y es que éste no debe depender del representante de r elegido para ese número racional.

Si se aceptara el doble valor del radical la propiedad $\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$ sería falsa, como se ha mostrado en el caso de $\sqrt[6]{3^2}$ y $\sqrt[3]{3}$. Entonces, la definición de a^r, con $r=\frac{m}{n}=\frac{km}{kn}$, no sería posible, ya que no se cumpliría que $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{km}{kn}}=\sqrt[kn]{a^{km}}$. En efecto, $3^{\frac{2}{6}}$ no puede ser diferente de $3^{\frac{1}{3}}$ porque entonces ¿cuánto valdría $3^{0,3}$?

Por otra parte, en coherencia con el criterio de asignar un solo valor al radical, los matemáticos consideran que $\sqrt{x^2}=|x|$, con lo cual no violan el concepto formal de operación, ya que, a diferencia de lo que ocurre con la adición y la multiplicación, que establecen funciones biyectivas: $x \to x+a,\ x \to x \cdot a,\ x \neq 0$ que tienen inversas únicas, la operación $x \to x^2$, no establece biyección, ya que $x^2=(-x)^2$.

Para que la función x^2 sea biyectiva hay que restringir el conjunto de argumentos a la media recta positiva, así en este conjunto su función inversa es $\sqrt{x}$. Análogamente, restringiendo los argumentos a la mitad negativa del eje X obtendríamos $-\sqrt{x}$ como función inversa. Por consiguiente, la función x^2 considerada en todo el eje X no tiene una función inversa única, aunque puede decirse que la inversión de esta función tiene dos "ramas" (después de la restricción adecuada del conjunto de estos argumentos) (Kuratowski, 1981, p. 79).

En consecuencia, para que la función $x \rightarrow x^2$ tenga inversa tiene que confinarse a una de sus ramas. Análogamente, para que la operación inversa $\sqrt{x}$ sea única tiene que confinarse al conjunto imagen de los números positivos.

Una consecuencia de todo esto es que, en sentido estricto, en el conjunto de los números reales no se puede ni se debe decir que raíz cuadrada y elevar al cuadrado son operaciones inversas, ya que esto sólo es cierto cuando el radicando es un número positivo (ver Figura 11).

Si a es un número positivo, *la raíz cuadrada* de a es un número positivo cuyo cuadrado es a. Se escribe $\sqrt{a}$, el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *radical* y a es el *radicando.*

Además: si a es un número positivo $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{(-a)^2} = a$

si a es un número negativo $\sqrt{a^2} = -a$

Ejemplos: $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{13^2} = 13$; $\sqrt{(-2{,}5)^2} = 2{,}5$; $\left(\sqrt{3{,}2}\right)^2 = 3{,}2$

(Ecir, 1996, p. 11)

Figura 11. Una propuesta que supera la ambigüedad del signo radical

No debe entenderse que esto da la razón al argumento usado en la paradoja anterior de que $\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2} = \pm\left(2-\frac{5}{2}\right)$; la explicación que corresponde a los desarrollos matemáticos actuales es que el absurdo en la paradoja viene de la no consideración de que $\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2} = \left|2-\frac{5}{2}\right| = \frac{1}{2}$ y que $\sqrt{\left(3-\frac{5}{2}\right)^2} = \left|3-\frac{5}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

IMPLICACIONES EDUCATIVAS

A lo largo del texto anterior se han mostrado algunas de las sutilezas que presenta el signo radical y que suelen pasar desapercibidas por los desarrolladores de libros de texto, profesores y estudiantes.

Estas sutilezas afectan a la distinción entre raíz y radical, al doble uso del signo como operación o como resultado de una ecuación, a los requisitos y restricciones para definir las potencias racionales, y también a la necesidad de ser coherentes con la concepción funcional de las operaciones y sus inversas.

De acuerdo con Tirosh y Even (1997), es una buena idea que casos problemáticos, como el mencionado, puedan ser utilizados en la formación de profesores para facilitar su conocimiento acerca de la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza, contestando a cuestiones como, por ejemplo: ¿cuáles son las razones que hay detrás de la elección de una cierta definición?

Pero lo que parece más importante es aprovechar el valor que tienen estos casos para señalar que, en matemáticas, el aprendizaje no debe confiarse exclusivamente a lo que está escrito en los manuales. Hay casos, como los que se han discutido aquí, en que es obvio que producen confusión, por omisión de información o por la misma información que reproducen.

Por eso, el análisis de manuales trasciende a su consideración como herramienta para el análisis didáctico y adquiere el carácter de componente crucial en la investigación en Didáctica de las Matemáticas, que no puede quedar reducida a una interpretación del paradigma cognitivista exclusivamente volcado en lo que piensan los estudiantes o los profesores.

Referencias

Anaya (2004). *Matemáticas 4º Secundaria. Opción A*. Madrid, España: Autor.

Anaya (2005). *Matemáticas 1º Secundaria*. Madrid, España: Autor.

Apóstol, T. (1990). *Calculus. Vol. 1*. Barcelona, España: Reverté.

Buhlea, C. y Gómez, B. (2008). Sobre raíces y radicales. Efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumania). En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 217-239). Badajoz, España: SEIEM, SPCE y APM.

Courant, R. y John, F. (1979). *Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol. I*. México DF, México: Limusa.

Ecir (1996). *Matemáticas 4° ESO*. Valencia, España: Autor.

Euler, L. (1770). *Vollständige Anleitung zur Algebra. Vol. I*. Saint Petersburg, Rusia: Kays. Acad. der Wissenschaften.

Freudhental, H. (1981). Major problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 133-150.

Gómez, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. En A. Martinón (Ed.), *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos* (pp. 77-80). Madrid, España: Nivola.

Gómez, B. (2008). Pasado y presente de los manuales escolares. En Associação de Professores de Matemáticas (Eds.), *Actas do SIEM- 2007. XVIII SIEM. Seminário de Investigação em Educação Matemática. Painel: Avaliação de Manuais Escolares* (pp. 1-8). Lisboa, Portugal: SIEM.

Gómez, B. y Buhlea C. (2009). *The ambiguity of the sign* √. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 509-518). Lyon, Francia: ERME.

Kuratowski, K. (1981). *Introducción al cálculo.* México DF, México: Limusa.

Lang, S. (1971). *A first course in calculus*. Readding, MA: Addison-Wesley.
Lentin, A. y Rivaud, J. (1969). *Álgebra moderna.* Madrid, España: Aguilar.
McGraw-Hill (1997). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Autor.
Oxford University Press España (2003). *Matemáticas 4º Secundaria.* Madrid, España: Autor.
Roach, D., Gibson, D. y Weber, K. (2004). Why is $\sqrt{25}$ not ±5. *Mathematics Teacher*, *97*(1), 12-13.
Rouse, W. (1992). *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. Première partie. Arithmétique, algèbre et théorie des nombres*. (Segunda edición francesa). Paris: Librairie Scientifique A. Hermann.
Santillana (1999). *Matemáticas 4º Secundaria. Orbita 2000. Opción B*. Madrid, España: Autor.
Santillana (2005). *Matemáticas 4º Secundaria. Orbita 2000. Opción B.* Madrid, España: Autor.
Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 41-51.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.
Sierra, M., Rico, L. y Gómez, B. (1997). El número y la forma. Libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En A. Escolano (Ed.), *Historia ilustrada del libro escolar en España* (Vol. 2, pp. 373-398). Madrid, España: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.
SM (2003). *Matemáticas 4º Secundaria. Algoritmo. Opción B.* Madrid, España: Autor.
SM (2004). *Matemáticas 3º Secundaria. Algoritmo*. Madrid, España: Autor.
Tirosh, D. y Even, R. (1997). To define or not to define: the case of $(8)^{1/3}$. *Educational Studies in Mathematics, 33*(3), 321-330.
Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Este documento se publicó originalmente como Gómez, B. (2009). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *XIII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 21-36). Santander, España: Universidad de Cantabria.

Bernardo Gómez
Universidad de Valencia
Bernardo.gomez@uv.es