



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MÁSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

**MEDIACIÓN EN EL PROCESO DE
GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE
SEGUNDO DE EDUCACIÓN PRIMARIA**

Presentado por:

D^a Romina A. Narvárez Orellana

Granada, 2020.



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MÁSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

**MEDIACIÓN EN EL PROCESO DE
GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE
SEGUNDO DE EDUCACIÓN PRIMARIA**

Presentado por:

Dirigido por:

D^a Romina A. Narváez Orellana

D. María C. Cañadas Santiago

Granada, 2020.

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a la Doctora María C. Cañadas Santiago por guiarme en este proceso, siendo un gran apoyo para culminar este trabajo de investigación. Profesora, muchas gracias por la gran paciencia y conocimientos entregados en este tiempo.

Gracias a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) por otorgarme la Beca de Magíster en el extranjero Becas Chile, folio 77180067.

Agradezco a mi esposo y compañero de sueños Francisco quien ha estado apoyándome constantemente, siendo un pilar importante para cumplir con este proceso. A mi hija Trinidad quien me da las energías para seguir aprendiendo y luchar por mis metas.

A mis padres, aun cuando están lejos, siempre me han alentado para seguir y aprender cada día más. Por enseñarme que puedo conseguir grandes cosas si me lo propongo. A mis hermanas, por el amor y apoyo que me entregan. A mi familia, que son todo para mí.

Gracias a mis amigos, porque siempre me alentaron a seguir. A Denisse y Elvis, porque siempre estuvieron presentes y me ayudaron en todo momento. A mis amigos Alexis y Marisol, que han pasado a ser parte de nuestra familia.

Sobre todo, agradezco a Dios por darme la posibilidad de vivir y disfrutar momentos que nunca imagine.

Resumen

En esta investigación caracterizamos la mediación de un entrevistador cuando seis estudiantes de segundo de primaria (7 -8 años) trabajan en una tarea de generalización que involucra una función lineal. A través de un método mixto describimos la generalización de los estudiantes antes y después de llevar a cabo las mediaciones. Posteriormente realizamos un estudio de caso para cada estudiante. Dentro de los resultados destacamos que las mediaciones invitar y desafiar son las más utilizadas, siendo de ayuda para que los seis estudiantes generalicen. Concluimos que las mediaciones son una guía y motivación para ayudar a los estudiantes a generalizar.

Abstract

In this research we characterize the mediation of an interviewer when six second grade students (7-8 years old) work on a generalization task that involves a linear function. Using a mixed method, we describe the generalization of the students before and after carrying out the mediations. Later we carry out a case study for each student. Among the results we highlight that the inviting and challenging mediations are the most used, being helpful for the six students to generalize. We conclude that mediations are a guide and motivation to help students generalize.

El presente trabajo de investigación se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU201675771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y en el seno del grupo de investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” (FQM-193) de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

Índice

Introducción	1
Capítulo 1. Planteamiento del problema y de los objetivos de investigación	4
1.1. Problema de investigación	4
1.2. Justificación	5
1.3. Objetivos de investigación	8
Capítulo 2. Marco teórico y antecedentes	9
2.1. Pensamiento algebraico y pensamiento funcional	9
2.2. Generalización	13
2.3. Mediación	14
Capítulo 3. Metodología	18
3.1. Tipo de investigación	18
3.2. Sujetos y centro	18
3.3. Recogida de información	19
3.4. Instrumentos de recogida de información	20
3.5. Categorías de análisis	23
3.6. Método de análisis de datos	25
Capítulo 4. Análisis de datos y resultados	26
4.1. Generalización de los estudiantes antes de la mediación	26
4.2. Mediaciones realizadas por el entrevistador	28
4.3. Generalización de los estudiantes después de la mediación	31
4.4. Estudio de caso	32

Capítulo 5. Conclusiones	43
5.1. Logro de objetivos de investigación	43
5.2. Aportes de la investigación	46
5.3. Limitaciones de la investigación y líneas abiertas	47
Referencias	48
Anexo A. Cuestionario de los estudiantes	55
Anexo B. Transcripción de entrevistas	56

Introducción

La presente investigación constituye el Trabajo de Fin de Máster (TFM) realizado por la estudiante Romina Narváez Orellana, dentro del programa de Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, dirigido por la Doctora María C. Cañadas Santiago.

La introducción del pensamiento algebraico en cursos iniciales de educación primaria ha sido una propuesta apoyada en diferentes países por la comunidad investigadora en Didáctica de la Matemática, entre ellos España. Diversos estudios han demostrado que esta introducción temprana del pensamiento algebraico ayuda a los estudiantes a enfrentarse a tareas que involucren pensamiento funcional (e.g., Pinto y Cañadas, 2019; Warren, Miller y Cooper, 2013). Nuestro trabajo forma parte de un proyecto de investigación más amplio sobre el pensamiento funcional. El principal objetivo de investigación de este proyecto se centra en describir el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria en España, haciéndolo a través de diferentes aproximaciones y distintos elementos conceptuales. Uno de los focos en este proyecto es la generalización de dichos estudiantes. En este trabajo abordamos la mediación que realiza un entrevistador trabajando con estos estudiantes y la generalización que evidencian al trabajar con una tarea que aborda el pensamiento funcional, específicamente la generalización.

La propuesta curricular *early algebra* propone introducir el pensamiento algebraico en cursos iniciales de educación, considerándose para Kaput (2000) como una “algebrización del currículo”. Esta propuesta “persigue fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas y en especial facilitar el aprendizaje del álgebra” (Molina, 2009, p. 136). Una de las áreas que se abordan en el *early algebra*, está el trabajo con el pensamiento funcional, el cual pretende “promover la percepción y generalización de patrones detectados en situaciones donde hay dos variables relacionadas que covarían” (Molina y Cañadas, 2018, p. 133). Es considerado el pensamiento funcional por Blanton y Kaput (2011) propicio para introducir el álgebra.

Un elemento clave del pensamiento funcional es la generalización (e.g., Kaput, 2008). Para Cañadas y Castro (2007) la generalización se produce cuando una “conjetura se

expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados” (p. 57). Hay evidencias de que los estudiantes de educación primaria logran avances importantes en relación al pensamiento funcional y, en particular, en la generalización (e.g., Pinto y Cañadas, 2019). Sin embargo, este trabajo no está exento de dificultades (Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020). En este sentido, hemos observado que es relevante la guía que puedan recibir por parte del docente o entrevistador. Por ello destacamos el rol que cumplen los docentes como personas intervinientes en los procesos de enseñanza-aprendizaje, considerándolos mediadores de este proceso. Según Escobar (2011) la mediación es considerada como un proceso de interacción destinado a generar experiencias de buen aprendizaje. Dentro de los antecedentes relacionados con la mediación y generalización, existen trabajos que lo abordan en diferentes cursos (e.g., Mata-Pereira y Ponte, 2017; Ureña, Ramírez y Molina, 2019). En estos trabajos se evidenció que las acciones de los maestros o mediaciones del entrevistador promueven el razonamiento matemático, guiándolos hacia la generalización. Los antecedentes encontrados tratan la mediación en el ámbito algebraico de últimos cursos de educación primaria y primeros de educación secundaria. Respecto a los primeros cursos de educación primaria no hemos encontrado publicaciones que lo aborden. Es de gran interés para nosotros investigar en los primeros cursos de primaria, puesto que en esta etapa los estudiantes tienen menor autonomía y la mediación puede jugar un rol clave para abordar el pensamiento funcional. Nuestro interés en este estudio, está en caracterizar la mediación de un entrevistador en relación con el trabajo de estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización. Para ello describimos la generalización de los estudiantes antes y después de la mediación, así como las mediaciones realizadas por el entrevistador.

Estructuramos este trabajo en seis capítulos. El primero hace referencia al planteamiento del problema de investigación, la justificación que avala el interés de este estudio y el planteamiento de los objetivos de investigación.

El segundo capítulo está constituido por el marco teórico y los antecedentes, que serán la base para el desarrollo de este trabajo.

En el tercer capítulo describimos la metodología utilizada en la investigación, los estudiantes con los que trabajamos, la recogida de información y los instrumentos utilizados, las categorías de análisis y cómo llevamos a cabo el análisis de datos.

En el cuarto capítulo detallamos los resultados obtenidos relativos a los objetivos de investigación.

En el quinto y último capítulo, presentamos las conclusiones. En ellas incluimos el aporte de esta investigación en el área, limitaciones del trabajo y líneas que quedan abiertas para investigar en el futuro.

Capítulo 1. Planteamiento del problema y de los objetivos de investigación

En el presente capítulo describimos el problema de investigación, justificado a través de tres perspectivas: (a) investigadora, (b) curricular y (c) personal. El capítulo concluye con el planteamiento de los objetivos de investigación.

1.1. Problema de investigación

El pensamiento algebraico en cursos iniciales ha sido un tema investigado por diversos autores (e.g., Blanton y Kaput, 2005; Kaput 1999, 2000). Estos autores evidencian que los estudiantes poseen habilidades para desarrollar pensamiento algebraico a edades tempranas.

La mayoría de las investigaciones que abordan la generalización de los estudiantes en educación primaria ponen de manifiesto sus logros en nociones relativas al pensamiento funcional, evidenciando que los estudiantes generalizan (Warren y Cooper, 2005 y Pinto y Cañadas, 2017). Esto muestra que los estudiantes de primaria tienen la capacidad de enfrentarse a tareas que involucren funciones. El trabajo con pensamiento funcional en los estudiantes de cursos iniciales puede ayudar a desarrollar habilidades que les permitan analizar relaciones entre cantidades y deducir la regla general de una regularidad en una situación dada (Kaput, 2008). Lo descrito no significa que debamos introducir las funciones en niveles educativos iniciales tal y como se trabajan en los cursos superiores, sino que se pueden utilizar como contenido para plantear tareas que les permitan promover el pensamiento algebraico (Cañadas y Molina, 2016).

Sin embargo, también somos conscientes de la existencia de ciertas dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el pensamiento funcional, especialmente en los primeros cursos de educación primaria. Algunas de las dificultades se manifiestan en las respuestas incorrectas de los estudiantes (Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020; Morales y Cañadas, 2017). Dentro del proceso de generalización en cursos de educación primaria, el profesorado y otros agentes cumplen un rol esencial en el logro de dicha habilidad. Ureña, Ramírez y Molina (2019) consideran que, a través

de las interacciones entre docente y estudiante, se establece un proceso conocido como mediación.

A raíz de lo expuesto consideramos que, aun cuando se han realizado importantes avances en lo relativo a la generalización de los estudiantes de los primeros cursos en el contexto funcional del pensamiento algebraico en educación primaria, falta profundizar sobre la mediación y su relación con el proceso de generalización de estos estudiantes. En este estudio nos centramos en caracterizar las mediaciones realizadas por un entrevistador durante el proceso de resolución de una tarea de generalización. Describimos el trabajo autónomo de los estudiantes al trabajar una tarea que involucra una función lineal, la mediación realizada y el trabajo de los estudiantes después de esa mediación.

1.2. Justificación

En este apartado justificamos el problema de investigación desde una mirada curricular, investigadora y personal.

1.2.1. Justificación curricular

Este trabajo parte de la propuesta *early algebra* que propone trabajar el pensamiento algebraico en los cursos iniciales de educación, descrito por Kaput (2000) como una “algebrización del currículo”. Molina (2009) señala que esta propuesta surge por varias razones:

Por una parte, la insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales propios de esta sub-área de las matemáticas y la preocupación por hacer su estudio accesible a todos los estudiantes, han conducido a buscar formas más efectivas de abordar su enseñanza. (p. 138).

Existen diversos países que han incorporado esta propuesta a sus currículos, entre ellos Australia, Canadá, China, Corea, Chile, Estados Unidos, Japón o Portugal (Merino, Cañadas y Molina, 2013; Ministerio de Educación de Chile, 2012). Como referente internacional, Estados Unidos elaboró el primer documento curricular que incluye el trabajo con pensamiento algebraico en el currículo desde educación infantil en adelante (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Este documento destaca la

importancia de “construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior” (p. 37).

Respecto al currículo español, contexto en el que se lleva a cabo esta investigación, se menciona que, al finalizar la educación primaria, los estudiantes deben ser capaces de “describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19.387). Asumimos que no es una propuesta fácil de abordar, entre otras cosas, porque los maestros de este nivel educativo, al día de hoy, no tiene formación inicial en estos aspectos. Por ello es que indagamos y describimos lo que hacen los estudiantes de primaria respecto a una tarea referida a pensamiento funcional, específicamente en un grupo de estudiantes de segundo, para así, entregar aportes para la enseñanza del pensamiento algebraico en cursos iniciales.

1.2.2. Justificación investigadora

Existen diversas investigaciones asociadas a los logros que consiguen los estudiantes de educación primaria al enfrentarse a tareas de generalización que involucran funciones. Warren y Cooper (2005) mostraron que los niños pequeños (6 y 7 años) son capaces de generalizar, dar ejemplos de relaciones y funciones, describir el inverso de tales relaciones y dan razones válidas de cómo encontraron las relaciones inversas. Cañadas y Fuentes (2015) reconocieron que es viable la incorporación de tareas relacionadas con pensamiento funcional en cursos iniciales, destacando que los estudiantes son capaces de desarrollar estrategias e identificar patrones de forma general. Castro, Cañadas y Molina (2017) señalaron que algunos niños de 5-6 años desarrollan ideas intuitivas asociadas a las relaciones funcionales lineales. Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez (2018) confirmaron que, desde muy tempranas edades, hay estudiantes que pueden resolver un problema de generalización que involucre una relación funcional lineal. Las investigaciones descritas en este apartado ponen de manifiesto que los estudiantes de educación primaria abordan con éxito tareas que involucren funciones lineales, representando sus respuestas, argumentando sus procedimientos y así evidenciando su capacidad para generalizar.

El trabajo hacia la generalización a través de tareas que involucran relaciones funcionales no siempre resulta sencillo. En los estudios citados y que se centran en el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria existe una interacción o mediación entre estudiantes, de estudiantes con un profesor y/o investigador. En este sentido, aunque pocas, existen investigaciones que relacionan el proceso de generalización con las mediaciones que realiza el docente para ayudar al estudiante en el logro de su aprendizaje. Ejemplo de esto es la investigación realizada por Warren (2006), quien señaló que las acciones particulares del profesor ayudan a los estudiantes a identificar la generalización. Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020) destacaron dentro de sus resultados que las acciones mediadoras del docente permitieron al estudiante cambiar su estrategia o la forma inadecuada en la que estaba entendiendo el patrón y la relación entre las variables implicadas en la tarea. Ureña, Ramírez y Molina (2019) concluyeron que la mediación de los profesores tiene un impacto considerable sobre la generalización de los estudiantes. Estos autores describieron que la mediación motivó a los estudiantes a responder y a reforzar sus ideas, ayudando a los estudiantes a expresar sus capacidades algebraicas en el contexto de la generalización.

Por tanto, evidenciamos que existen investigaciones relacionadas a las mediaciones y la generalización con estudiantes de distintas edades y niveles educativos que abordan la generalización y las mediaciones por parte de docentes o entrevistadores, pero no hemos encontrado publicaciones que lo hayan investigado desde los primeros cursos. Por consiguiente, es de nuestro interés describir lo que sucede con estudiantes de este nivel educativo; estudiantes que no han tenido experiencia previa con tareas relacionadas a generalización, siendo un estudio de carácter exploratorio, el cual busca contribuir con mayor información dentro de esta área.

1.2.3. Justificación personal

Como profesora de Educación General Básica con mención en matemática, he trabajado con estudiantes de primero a sexto básico (6 a 11 años) en Chile. Esto me ha permitido analizar las fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes en los primeros años de Enseñanza Básica. Una de las principales dificultades se observa al trabajar con el eje de patrones y álgebra, incorporado en el currículo chileno desde el año 2012. En ese

sentido, desde un comienzo tuve interés por realizar mi trabajo en la línea de investigación de “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” y, específicamente, en un proyecto en el que se aborda el pensamiento funcional, con especial énfasis en la generalización.

Abordar el problema de investigación presentado, además de hacer aportes al ámbito investigador de la disciplina, será útil para los docentes de matemáticas que trabajan con niños de las primeras edades. Conocer las mediaciones de un profesor y los posibles efectos que producen en la generalización de estudiantes de los primeros años de educación primaria permitirá contar con una base de conocimiento que oriente a profesores y otros intervinientes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

1.3. Objetivos de investigación

Presentamos a continuación nuestros objetivos de investigación, general y específicos.

1.3.1. Objetivo general

Describir la mediación de un entrevistador en relación con el trabajo de estudiantes de segundo de educación primaria (7-8 años) en una tarea de generalización que involucra una función lineal.

1.3.2. Objetivos específicos

En el contexto del objetivo general, nos centramos en la mediación en sí y la relación entre esta y la generalización de los estudiantes. Así, nuestros objetivos de investigación específicos son los siguientes.

1. Describir la generalización de los estudiantes cuando trabajan de forma autónoma en una tarea que involucra una función lineal.
2. Caracterizar la mediación realizada por un entrevistador durante el trabajo de estudiantes.
3. Describir la generalización de los estudiantes después de la mediación.

Capítulo 2. Marco teórico y antecedentes

En este capítulo detallamos los sustentos teóricos de este trabajo, así como los antecedentes relacionados con los objetivos de nuestro estudio.

2.1. Pensamiento algebraico y pensamiento funcional

Varios autores (e.g., Cañadas, Dooley, Hodgen y Oldenburg, 2012; Kaput, 2008) reconocen que definir pensamiento algebraico no es una tarea sencilla. Distintos autores han realizado aproximaciones en su definición. Radford (2011) indica que “el pensamiento algebraico no se trata de usar o no notaciones, sino de razonar de ciertas maneras. Lo que caracteriza al pensamiento como algebraico es que se ocupa de cantidades indeterminadas concebidas de forma analítica” (p. 310).

El pensamiento algebraico considera las formas de hacer, de pensar y de hablar sobre el álgebra, permitiendo desarrollar diversas habilidades en los estudiantes que les ayudan a comprender de mejor forma los componentes del álgebra (Cañadas, 2016). Blanton y Kaput (2011) expresan que el desarrollo del pensamiento algebraico debe ser un proceso continuo que comienza en el inicio de la educación formal, no un contenido para los grados posteriores. Kieran (2004) describe el pensamiento algebraico de la siguiente forma:

El pensamiento algebraico en los primeros grados implica el desarrollo de formas de pensar dentro de actividades para las cuales el álgebra de letras simbólicas se puede usar como una herramienta, pero que no son exclusivos del álgebra y que podrían estar involucrados sin utilizar ningún tipo de álgebra de letras simbólicas, como, por ejemplo, analizar las relaciones entre cantidades, la estructura de la nota, el estudio del cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir. (p. 149)

Existen diversas nociones que se relacionan con el pensamiento algebraico. Kaput (2008) menciona dos aspectos centrales: (a) hacer y expresar generalizaciones en sistemas de símbolos cada vez más formales y convencionales, y (b) razonar con formas simbólicas. Así mismo, este autor indica que estos aspectos abarcan al álgebra como el estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones; como estudio de

funciones, relaciones y variación articular; y como la aplicación de un grupo de lenguajes para expresar y el razonamiento sobre situaciones que están siendo modeladas. Radford (2014) menciona tres condiciones que caracterizan el pensamiento algebraico: (a) la indeterminación (incógnitas, variables, etc.); (b) denotación (simbolismo de los números indeterminados y (c) su analiticidad (las cantidades indeterminadas se tratan como conocidas).

Blanton y Kaput (2005) consideran que el desarrollo del pensamiento algebraico se puede abordar desde los primeros cursos de primaria, lo que contribuye al desarrollo conceptual de experiencias matemáticas más profundas y complejas. Por tanto, el docente debe tomar “conciencia sobre los requerimientos para posibilitar el desarrollo del pensamiento algebraico, a través del diseño e implementación de actividades, en diferentes contextos, para potenciar en los estudiantes formas diferenciadas de pensamiento algebraico” (Rojas y Vergel, 2013, p. 5).

Existen distintos componentes del pensamiento algebraico que ayudan a introducir el álgebra en cursos iniciales. Uno de ellos es el pensamiento funcional, tipo de pensamiento algebraico, considerado propicio para introducir el álgebra en las primeras edades (Blanton y Kaput, 2011).

El pensamiento funcional es un “componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción y razonamiento con y sobre funciones y sus constituyentes” (Cañadas y Molina, 2016, p. 210). El pensamiento funcional es un proceso cognitivo de construir, describir y razonar sobre las funciones, “centrándose en la relación entre dos o más variables; es decir, específicamente los tipos de pensamiento que van desde relaciones específicas a generalizaciones de relaciones” (Kaput, 2008, p. 143). Rico (2007) lo describe como la forma de pensar en términos de y acerca de relaciones, considerándolo como una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Para Smith (2008) el pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas que se centra en la relación entre dos o más cantidades que varían. Pinto, Cañadas, Moreno y Castro (2016) caracterizan el pensamiento funcional como “una actividad cognitiva que se inicia y desarrolla al trabajar sobre las relaciones entre cantidades, específicamente cuando se ponen en funcionamiento conceptos determinados para responder a

cuestiones específicas” (p. 418). Blanton y Kaput (2011) lo describen como un hilo por el cual los maestros pueden construir generalidad en su currículo e instrucción. Autores como Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens (2015) indican que trabajar con pensamiento funcional implica (a) generalizar las relaciones entre cantidades covariables; (b) representar y justificar estas relaciones de múltiples maneras utilizando lenguaje natural, notación variable, tablas, y gráficas; y (c) razonar con fluidez con estas representaciones generalizadas para comprender y predecir el comportamiento funcional. Cañadas y Fuentes (2015) indican que se puede identificar el pensamiento funcional “cuando el niño hace explícita la relación entre las variables o entre los conjuntos, y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia una regla general o generalización” (p. 213).

En nuestra investigación asumimos que pensamiento funcional es “un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (Cañadas y Molina, 2016, p. 210).

Abordar pensamiento funcional y trabajar con problemas que involucran funciones ayuda para que los estudiantes identifiquen patrones y generalizaciones, favoreciendo la construcción de una base sólida para trabajar con álgebra en cursos superiores. Así mismo fomenta en los estudiantes el desarrollo del razonamiento matemático, siendo una herramienta que les permite analizar, describir y simbolizar patrones y relaciones. Blanton y Kaput (2005) consideran el pensamiento funcional como un medio que permite desarrollar el razonamiento de los estudiantes en los grados elementales. Se destaca que, si los maestros establecieran estas ideas desde el inicio de la educación formal, los símbolos algebraicos ya no serán elementos abstractos y sin sentido, como ocurre en ocasiones con los estudiantes, sino herramientas mediante las cuales podrán mediar y comunicar ideas más amplias (Blanton y Kaput, 2011).

Existen diversos estudios que abordan el pensamiento funcional con estudiantes de primaria. Un ejemplo de ello es el estudio realizado por Warren y Cooper (2005) quienes trabajaron con 75 niños de segundo de primaria (6 a 7 años). La finalidad de su investigación era introducir el pensamiento funcional. Los resultados mostraron que los

estudiantes de cursos iniciales son capaces de generalizar, dar ejemplos de relaciones y funciones, describir el inverso de tales relaciones y dan razones válidas de cómo encontraron las relaciones inversas. Blanton et al. (2015) realizaron una investigación sobre generalizar las relaciones funcionales con niños de primer grado (de 6 años). A través de un análisis cualitativo de los datos caracterizaron niveles de sofisticación en el pensamiento de los niños sobre las relaciones funcionales. En sus resultados sugieren que los estudiantes pueden aprender a pensar de manera sofisticada y generalizada sobre las relaciones en los datos de funciones. Castro, Cañadas y Molina (2017) presentaron un estudio sobre pensamiento funcional, trabajando con un grupo de 12 estudiantes de 5 a 6 años. Desarrollaron distintas sesiones a través de un experimento de enseñanza con un carácter exploratorio. Los estudiantes evidenciaron pensamiento funcional a través de las relaciones funcionales de correspondencia o covariación.

Así también, se han realizado estudios en el área de pensamiento funcional relacionados a las representaciones y estrategias que realizan los estudiantes. Merino, Cañadas y Molina (2013) investigaron sobre las estrategias utilizadas por estudiantes de quinto de educación primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. Los autores se centran en las respuestas de estos estudiantes a las cuestiones de dicha tarea relativas a una relación funcional inversa entre dos variables. Dentro de sus conclusiones, mencionan que el uso de diferentes patrones lo utilizan como la estrategia más frecuente para la realización de la tarea planteada, destacándose la capacidad de generalización que poseen los estudiantes. Cañadas y Fuentes (2015) presentaron una primera aproximación a la descripción del pensamiento funcional de los estudiantes de primero de educación primaria en España a través de un estudio exploratorio descriptivo. En su estudio mostraron los sistemas de representación y las estrategias que utilizan los estudiantes en la realización de una tarea que involucra la relación funcional. Dentro de sus resultados destacan la viabilidad de incorporar tareas relacionadas con este pensamiento en ese curso, siendo capaces de desarrollar estrategias y de identificar patrones de forma general.

2.2. Generalización

Asumimos que la generalización es un elemento importante dentro del pensamiento algebraico, siendo considerada por Mason (1996) como el núcleo central del álgebra. Pólya (1990) señala que la generalización es “pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado” (p. 97). Driscoll (1999) la define como un proceso de pensamiento matemático fundamental, la cual requiere analizar las particularidades de una situación matemáticas y sacar una conclusión. Kaput (1999) considera que la generalización implica extender deliberadamente el rango de razonamiento, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, identificando patrones, procedimientos, estructuras, y relaciones. Cañadas (2007) describe que la generalización es una situación particular, que parte de un único ejemplo, siendo un ejemplo genérico donde se puede leer lo general. A su vez destaca que trabajar con lo particular es un paso fundamental para generalizar. Cañadas y Castro (2007) describen que la generalización se produce cuando una “conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados” (p. 57). Considerando la generalización como un concepto clave en el pensamiento algebraico, en el conocimiento matemático y en el conocimiento en general. Por lo expuesto es que consideramos que generalizar es pasar de lo particular a lo general y ver lo general en lo particular (Mason, 1996). Cuando se considera la generalización en una situación con una relación funcional subyacente entre dos cantidades, implica identificar y representar la regla que relaciona ambas cantidades desde lo particular a casos más generales (Ureña, Ramírez y Molina, 2019).

Existen diversas investigaciones que abordan la generalización de estudiantes de educación primaria. Carraher, Martínez y Schliemann (2008) describen cómo 15 estudiantes de tercer curso (9 años) representaron generalizaciones. Muchos estudiantes comprendieron los valores que van obteniendo con $f(n)$ a medida que n aumenta. Warren, Miller y Cooper (2013) realizaron un estudio con estudiantes de primero a cuarto de educación primaria australiana (de 5 a 9 años) analizando cómo este grupo de estudiantes comprendían y expresaban las generalizaciones. Dentro de sus resultados se destacó

que el uso de los gestos (de estudiantes y entrevistadores), las conversaciones entre los estudiantes y las acciones, ayudaron a los estudiantes a buscar y expresar generalizaciones. Por último, Pinto y Cañadas (2019) realizaron un estudio donde describieron la generalización de 24 estudiantes de tercero y 24 de quinto, los que trabajaron con el mismo problema funcional. Para ello, describieron las relaciones funcionales evidenciadas en las respuestas de los estudiantes y las representaciones que los estudiantes utilizaban. En sus resultados mencionan que 11 estudiantes de tercer grado y 19 estudiantes de quinto grado evidenciaron relaciones funcionales en sus respuestas. Así también, tres estudiantes de tercer grado y todos los estudiantes de quinto grado generalizaron la relación.

2.3. Mediación

Existen diversas acciones realizadas por los docentes para facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes. La mediación es una de ellas, considerada por Escobar (2011) como “un proceso de interacción pedagógica; social, dialógica, lúdica, consciente, intencional, sistemática, destinada a generar experiencias de buen aprendizaje” (p. 60). Ponte, Quaresma y Mata-Pereira (2017) señalan que las mediaciones buscan que el profesor pueda explorar una respuesta incorrecta para hacer una respuesta correcta, pueda explorar los desacuerdos a través del apoyo y guía e incentivar para que los estudiantes puedan justificar sus respuestas. Por ello, Mata-Pereira y Ponte (2017) mencionan que la labor del maestro se basa principalmente en informar y sugerir acciones que proporcionen información a los estudiantes o que puedan validar sus declaraciones. Así mismo, realizar acciones de apoyo y guía poder guiar a los estudiantes a presentar información. Además, realizar acciones desafiantes, animando a los estudiantes a ir más allá de su conocimiento previo. En esos tres conjuntos de acciones, se consideran procesos matemáticos que están involucrados como representar, interpretar, razonar y evaluar.

Considerando que la mediación del aprendizaje implica la interacción enseñanza y aprendizaje como elementos que conducen a las experiencias positivas de aprendizaje, destacamos el importante rol que poseen los docentes en el proceso de mediación. Sarduy (2008) menciona que “la conciencia y la intencionalidad mediadora, en el sentido

pedagógico están de lleno en manos de los profesores” (p. 90). Para realizar este proceso de guía efectiva, los docentes necesitan promover la reflexión y mejorar la práctica educativa (Parras y Keila, 2014). Para Ureña, Ramírez y Molina (2019) la mediación puede alentar a los estudiantes a lograr sus objetivos de aprendizaje, motivándolos a responder, a reforzar ideas y constructos asociados al reconocimiento y la representación de las relaciones funcionales. La experiencia de aprendizaje a través de un mediador favorece que el niño desarrolle sus habilidades cognitivas, la flexibilidad, la autoplaticidad y la modificabilidad (Escobar 2011). Las mediaciones producen interacciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Estas interacciones conducen a experiencias positivas de aprendizaje. Las intervenciones educativas pueden considerarse como acciones realizadas por el educador para guiar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje (Cañadas, Morales y Bautista, en revisión; Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020).

Sabemos que mediar no es un proceso fácil, el docente debe saber cómo ayudar a los estudiantes y cómo guiarlos hacia el aprendizaje. Mata-Pereira y Ponte (2017) señalan que no se debe facilitar inmediatamente las respuestas a los estudiantes ya que esto permitirá que los estudiantes trabajen a través del descubrimiento guiado, el cual dará lugar a un aprendizaje más significativo. En cambio, el docente no debe dar demasiadas indicaciones y sugerencias; o si no, la tarea se simplifica y resolverla se convierte en un ejercicio simple, que no requiere mucho razonamiento. Así mismo, si el maestro no presta atención a las acciones de sus estudiantes, estos pueden equivocarse o formular o mal concepto matemático. Estos autores establecieron las acciones que el maestro puede realizar en el proceso de mediación:

- Monitorear a los estudiantes mientras resuelven la tarea, con el objetivo de no reducir su nivel de desafío.
- Pedir a los estudiantes que expliquen “por qué” y presentar justificaciones alternativas.
- Pedir a los estudiantes que identifiquen válido e inválido algunas justificaciones, destacando lo que puede validarlas.
- Fomentar el intercambio de ideas.
- Aceptar y valorar las contribuciones incorrectas o parciales deconstruyéndolas, complementándolas o clarificándolas.

- Apoyar o informar a los estudiantes para resaltar procesos de razonamiento tales como generalizar y justificar.
- Desafiar a los estudiantes a ir más allá de la tarea formulando nuevas preguntas, generalizando o justificando.

Ponte, Quaresma y Mata-Pereira (2017) describen las siguientes acciones del docente para facilitar el aprendizaje de los estudiantes:

- Invitar, acciones dirigidas a iniciar una discusión.
- Apoyar / guiar, acciones destinadas a guiar a los estudiantes a resolver una tarea a través de preguntas u observaciones y ese punto, de manera explícita o implícita, el camino para que sigan.
- Informar / sugerir, acciones en las que el maestro introduce información, da sugerencias, presenta argumentos o valida las respuestas de los estudiantes.
- Desafiar, en las que el profesor busca que los estudiantes asuman el papel de producir nuevas representaciones, interpretar una declaración, establecer conexiones o formular un razonamiento o una evaluación.

Existen distintas investigaciones que han trabajado con el concepto de mediación y proceso de generalización de los estudiantes, los cuales han buscado analizar la influencia de la mediación. Warren (2006), realizó una investigación que tenía por objetivos (a) determinar si los estudiantes de quinto de educación primaria pueden escribir una generalización en palabras y en símbolos y (b) identificar las acciones del maestro que ayudan a establecer vínculos entre descripciones verbales y simbólicas de generalización. Con esta investigación la autora observó que después de determinadas acciones del docente, una quinta parte de estos estudiantes expresó generalizaciones tanto en lenguaje natural como mediante simbolismo algebraico.

Ureña, Ramírez y Molina (2019) analizaron la generalización y representación de generalizaciones exhibida por estudiantes de cuarto curso (9 a 10 años). Los autores clasificaron las mediaciones en tres grupos: (a) informar-sugerir, (b) apoyar-guiar y (c) cuestionar. Cada una de ellas la desglosaron en función de las acciones realizadas por la entrevistadora para favorecer la generalización y su representación. En sus conclusiones consideran que la mediación de los profesores tiene un impacto considerable sobre la

capacidad de generalización de los estudiantes, indicando que los ocho estudiantes entrevistados reconocieron y representaron la relación funcional de la tarea y fueron capaces justificar sus respuestas. La mediación asociada a las acciones de informar-sugerir y desafiar o cuestionar resultó de particular utilidad. Destacaron que la mediación motivó a los estudiantes a responder y a reforzar sus ideas, permitiéndoles la transición entre distintas representaciones de la generalización, considerándose que la mediación de la entrevistadora fue de gran valor para ayudar a los estudiantes a expresar sus capacidades algebraicas en el contexto de la generalización.

Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020) describieron las intervenciones de un entrevistador ante errores en los que incurren estudiantes de 6° de educación primaria (11-12 años) durante el desarrollo de una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función afín y representada mediante configuraciones puntuales. Para ello consideraron los siguientes tipos de intervenciones realizadas por el entrevistador: (a) verbalizar el argumento o reflexión del estudiante, (b) repetir la pregunta, (c) reformular la pregunta, (d) calmar y (e) repetir respuesta y pedir argumento. Entre los resultados, destacamos que las acciones mediadoras del docente permitieron al estudiante cambiar su estrategia o la forma inadecuada en la que estaba entendiendo el patrón y la relación entre las variables implicadas en la tarea.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo presentamos el marco metodológico que utilizamos para esta investigación.

3.1. Tipo de investigación

Esta investigación tiene un enfoque mixto el cual implica un conjunto de procesos de recolección, análisis y vinculación de datos cuantitativos y cualitativos en un mismo estudio (Hernández-Sampieri, Collado y Baptista, 2014). Así mismo, en esta investigación realizamos un estudio de casos, definido como “la descripción y el examen o análisis en profundidad de una o varias unidades y su contexto de manera sistémica y holística” (Hernández et al, 2014, p. 2). Este tipo de investigación nos permite tener una visión detallada y en profundidad del proceso de generalización del grupo de estudiantes con los que trabajamos y las mediaciones utilizadas para cada uno de ellos.

3.2. Sujetos y centro

Iniciamos el trabajo con un grupo de segundo de educación primaria (7-8 años) en un centro concertado de la zona norte de la ciudad de Granada. Se trata de un centro de nivel socio-económico y cultural bajo-medio. La muestra fue intencional, teniendo en cuenta la disponibilidad del centro y del docente.

En la primera sesión trabajamos con los 24 estudiantes. Posteriormente, Para la realización de las entrevistas, consideramos la aplicación y revisión de los cuestionarios, organizando a los 24 estudiantes en tres grupos (inicial, intermedio y avanzado). El grupo inicial (ocho estudiantes), no habían identificado el patrón o solo lo habían hecho en alguna ocasión. El grupo intermedio (nueve estudiantes) habían identificado, en varias de las preguntas la regularidad existente. Por último, el grupo avanzado (siete estudiantes) habían generalizado, pero no de forma completa. De la clasificación anterior, junto con la maestra del grupo seleccionamos a seis estudiantes, dos de cada grupo, considerándose además que los seis estudiantes tuviesen buena disposición a participar y comunicarse, y que tuvieran diferentes logros de aprendizaje respecto a su mismo grupo (alto-medio-bajo).

En lo relativo a los conocimientos previos de los estudiantes que pueden influir en el trabajo que les proponíamos, ellos habían trabajado con los números del 0 hasta el 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas. Nunca habían trabajado con problemas que involucraran alguna función lineal ni de generalización.

Respecto al entrevistador, es un investigador del proyecto de investigación con referencia EDU2016-75771-P. El entrevistador participó en la primera sesión y posteriormente realizó la entrevista semiestructurada. Además, fue el encargado de videograbar la entrevista

3.3. Recogida de información

Este trabajo es parte de una investigación más amplia centrada en el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria. Dentro del proyecto, se diseñaron e implementaron experimentos de enseñanza para distintos cursos de educación primaria. En este Trabajo Fin de Máster nos centramos en las dos primeras sesiones realizadas en segundo de educación primaria. A continuación, describimos las principales características de estas dos sesiones.

- Sesión 1. Se trata de una sesión explicativa a todo el grupo de 24 estudiantes de una tarea de generalización que involucra la relación funcional $f(x) = x+3$. La variable independiente es el número de bolas que metemos en una máquina y la dependiente el número de bolas que salen. Explicamos a los estudiantes el problema con una representación pictórica de la máquina en la que se les presentaron diferentes casos particulares. En ningún momento el entrevistador les indicó la relación funcional. A continuación, mostramos en la figura 1 la imagen de máquina utilizada.

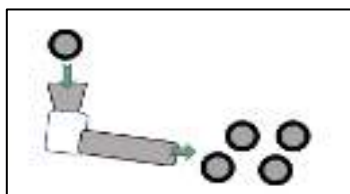


Figura 1. Representación pictórica de la máquina

Posterior a la explicación e interacción con los veinticuatro estudiantes del curso, se les aplicó un cuestionario individual el cual se detallará más adelante.

- Sesión 2. Se trata de una entrevista semiestructurada individual a seis estudiantes. La entrevista se realizó dos semanas después de la primera sesión y tuvo una duración aproximada de 20 minutos máximo, no siendo el tiempo una limitación para el trabajo en la tarea.

3.4. Instrumentos de recogida de información

Diseñamos e implementamos dos instrumentos de recogida de información en esta investigación: (a) el cuestionario y (b) la entrevista.

Las preguntas del cuestionario y de las entrevistas se basan en el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), donde incluimos preguntas sobre casos particulares hasta llegar a la generalización.

La aplicación de un cuestionario perseguía indagar el estado inicial de los estudiantes respecto a la capacidad de generalizar antes de la mediación. Posterior a dicha aplicación, realizamos la entrevista semiestructurada. Diseñamos la entrevista con base en las preguntas del cuestionario y a los objetivos planteados, confeccionando un protocolo de entrevista. La intención de las entrevistas fue profundizar en el proceso de generalización y analizar el rol de la mediación.

El cuestionario y la entrevista semiestructurada utilizada fueron validadas a través de la triangulación de expertos. Tanto el cuestionario como el protocolo de entrevista fue diseñado y validado por miembros del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y pertenecientes al proyecto de investigación con referencia EDU2016-75771-P en el que se desarrolla este trabajo.

Respecto al cuestionario, este incluyó siete preguntas divididas entre casos particulares y generalización. Este cuestionario se refería a una máquina donde se metía una cantidad de bolas y salían tres bolas más, bajo la relación funcional $f(x) = x+3$. Buscamos un contexto que fuera fácil de entender por los estudiantes. Las preguntas eran de diferentes tipos: unas eran abiertas y otras de doble opción (verdadero o falso). Las primeras cuatro

preguntas son abiertas y en ellas se trabajó con casos particulares. En la figura 2 presentamos un ejemplo de pregunta abierta sobre casos particulares.

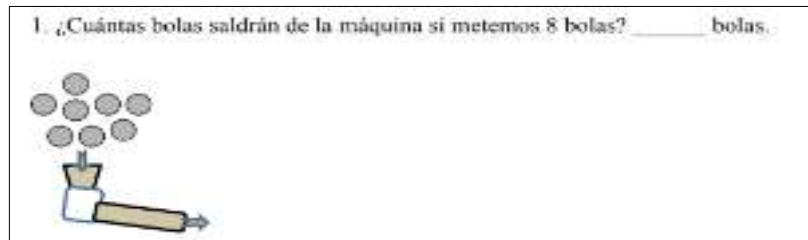


Figura 2. Pregunta abierta sobre casos particulares

Dos preguntas abiertas son sobre generalización. Un ejemplo de este tipo de pregunta se observa en la figura 3.

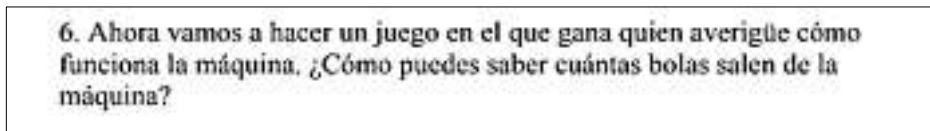


Figura 3. Pregunta abierta sobre generalización

En la pregunta 7 de verdadero o falso, la dividimos en dos subgrupos, tres sobre casos particulares (ver figura 4) y cuatro sobre generalización (figura 5).

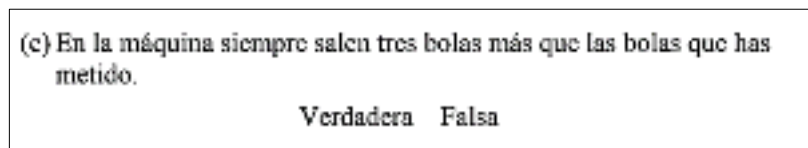


Figura 4. Verdadero y falso sobre caso particular

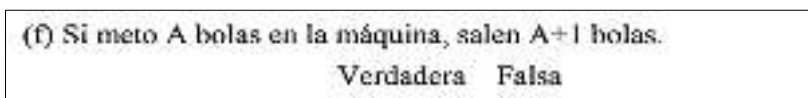


Figura 5. Verdadero y falso sobre generalización

En la tabla 1 recogemos las características de las preguntas del cuestionario por tipo de pregunta y por tipo de caso:

Tabla 1. Clasificación de preguntas realizadas en el cuestionario

Tipos de preguntas	Tipo de caso	
	Caso particular	Generalización
Preguntas abiertas	P1, P2, P3 y P4	P5 y P6
Verdadero y falso	P7a, P7b y P7c	P7d, P7e, P7f y P7g

Implementamos este cuestionario a los 24 estudiantes del curso durante la primera sesión. Les explicamos que en las preguntas abiertas podían responder como quisiera, usando dibujos o palabras. Para las preguntas de verdadero y falso debían rodear la opción que ellos consideraran correcta. Contaron con una hora para trabajar en el cuestionario.

El segundo instrumento de recogida de datos que utilizamos fue una entrevista semiestructurada, basada “en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información” (Hernández et al. 2014, p. 403). En la figura 6 detallamos el protocolo de entrevista.

1º Recordar el problema presentado

- ¿Recuerdas cómo funcionaba esta máquina?
- Si la respuesta era positiva se preguntaba: ¿Me darías dos ejemplos? ¿qué hiciste para obtener esa respuesta?
- Si la respuesta era negativa se procedía a recordar y mostrar los ejemplos y se preguntaba: ¿qué relación existen entre las bolas que entran y salen? Siguiendo por volver a preguntar por ejemplos concretos que habían aparecido.

2º Aplicar regularidad en casos particulares:

- Casos particulares dados
- Casos particulares del estudiante
- Caso particular de un tercero

3º Identificar las ideas de los estudiantes sobre las letras y su uso

- Interpretación de lo indeterminado. Se preguntaba: ¿qué podemos usar al principio de la máquina para indicar que entra un número de bolas?
- Generalización: ¿cómo puedes saber cómo funciona la máquina?

Uso de letras:

- ¿Para qué crees que se usan las letras? ¿qué puede significar A bolas?
- ¿Si meto A bolas en la máquina salen A?
- ¿Si meto A bolas en la máquina salen A+1?
- ¿Si meto A bolas en la máquina salen A+3?
- Si entran a bolas ¿cuántas salen?

Figura 6. Protocolo de entrevista

Las entrevistas fueron videograbadas y aplicadas dentro de un espacio del centro educativo. Cabe destacar que, al momento de realizar la entrevista, cada estudiante contaba con su cuestionario del cual podía revisar sus respuestas. Esto ayudó a guiar las entrevistas, según las necesidades de cada estudiante.

3.5. Categorías de análisis

Diseñamos un sistema de categorías para analizar la información recogida. Partimos de las categorías establecidas en investigaciones previas relacionadas con el tema que trabajamos. Para identificar la generalización, consideramos las expresiones o respuestas de forma verbal o escrita donde el estudiante manifestaba que se agregaba o sumaba tres a la cantidad de pelotas introducidas a la máquina. Es por ello, que al revisar clasificamos las respuestas en las siguientes categorías de análisis:

- **Generalizar:** es formular la conjetura de manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados (Cañadas y Castro, 2007). Para nuestro estudio consideramos que el estudiante generaliza cuando responde correctamente las preguntas que abordan la generalización, expresando la regularidad de la tarea planteada.
- **Generalizar incorrectamente:** dentro de generalizar, identificamos generalizar incorrectamente. Esta situación se evidencia cuando el estudiante identifica una regularidad en la tarea planteada, aunque no es la correcta (indica que la cantidad de bolas que salen de la máquina es mayor, pero no la cantidad adecuada). Es decir, aunque sus respuestas estén incorrectas, pero en ellas demuestra que identifica un patrón. Entendiendo la regularidad como un patrón, o pauta, lo que significa que es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse (Cañadas y Castro, 2007).

Respecto a la mediación, en la tabla 2 detallamos las categorías utilizadas para analizar las mediaciones realizadas durante las entrevistas, considerando sus referencias, descripciones y subcategorías:

Tabla 2. *Categorías de mediaciones*

Categorías	Autores	Definición	Subcategorías
Invitar	Mata-Pereira y Ponte (2017); Ponte, et al., (2013, 2017);	Acciones dirigidas a iniciar una discusión	Intercambio de ideas Justificación de respuestas
Apoyar/guiar	Mata-Pereira y Ponte (2017); Ponte, et al., (2013, 2017)	Acciones destinadas a guiar a los estudiantes a resolver una tarea a través de preguntas u observaciones y ese punto, de manera explícita o implícita, el camino para que sigan.	Reiterar información Aclarar preguntas
Informar/sugerir	Mata-Pereira y Ponte (2017); Ponte, et al., (2013, 2017);	Acciones en las que el maestro introduce información, da sugerencias, presenta argumentos o valida las respuestas de los estudiantes	Validar respuestas Sugerir un proceso para resolver
Desafiar	Mata-Pereira y Ponte (2017); Ponte, et al., (2013, 2017);	El profesor busca que los estudiantes asuman el papel de producir nuevas representaciones, interpretar una declaración, establecer conexiones o formular un razonamiento o una evaluación	Aumentar dificultad Razonamiento a través de una pregunta
Cuestionar	Ureña et al. (2019)	A través de preguntas y correcciones por parte del maestro, el estudiante puede corregir sus respuestas	Cambio de rumbo Corrección

3.6. Método de análisis de datos

Para dar respuesta a nuestros objetivos de investigación específicos, describimos el proceso de generalización de los estudiantes de forma espontánea, las mediaciones del entrevistador y la generalización después de la mediación.

Primeramente, organizamos la información. Escaneamos los cuestionarios iniciales (ver anexo A), para su posterior revisión. Con base en las categorías descritas sobre generalización, organizamos las respuestas de los estudiantes a todas las preguntas. Respecto a las entrevistas, el tratamiento que realizamos fue escuchar cada una de ellas para así transcribirlas (ver anexo B). Con ayuda de esto, analizamos las entrevistas de cada estudiante. Identificamos y destacamos las mediaciones realizadas por el entrevistador, considerando las categorías detalladas en el apartado 3.5 de esta investigación. A su vez, identificamos la generalización de los estudiantes dentro de las respuestas y opiniones que entregaban los estudiantes en las entrevistas. Con este último paso, describimos la generalización después de la mediación y comparamos este proceso antes y después de que el entrevistador mediara.

Para los dos instrumentos de recogida de información, realizamos un análisis grupal respecto a cada una de las categorías definidas y un análisis individual, el cual describimos en el estudio de caso de cada estudiante. Los resultados los detallamos de forma cuantitativa y cualitativa, lo que permitió abordar nuestros objetivos de investigación.

Capítulo 4. Análisis de datos y resultados

En este capítulo detallamos el análisis de los datos y los resultados obtenidos, teniendo en cuenta nuestros objetivos de investigación. Estructuramos el análisis según los objetivos específicos planteados: (a) generalización antes de la mediación; (b) mediaciones realizadas por el entrevistador y (c) generalización después de la mediación

Para resguardar la identidad de los estudiantes que participaron en esta investigación, les asignamos una codificación numérica de uno a seis, acompañado de la letra A para hacer referencia (ej. A1, A2, A3, etc.).

A continuación, presentamos los resultados, detallando en un primer momento los resultados obtenidos de forma general y posteriormente, los resultados de los seis estudiantes de forma individual.

4.1. Generalización de los estudiantes antes de la mediación

En este subapartado presentamos los resultados obtenidos a partir de la aplicación del cuestionario inicial. En la Tabla 3 detallamos la presencia o ausencia de generalización en las respuestas de los estudiantes.

Tabla 3. *Generalización antes de la mediación*

Estudiante	Preguntas												
	Casos particulares							Generalización					
	P1	P2	P3	P4	P7a	P7b	P7c	P5	P6	P7d	P7e	P7f	P7g
A1	1*	1*	1	1*	1	1	1	1*	1	1	0	1	1
A2	1*	1*	1*	1*	0	1	0	0	1*	0	0	0	0
A3	1*	1*	1*	1*	0	0	0	0	0	0	1	1	0
A4	1	1*	1*	1*	0	0	1	0	1*	1	1	0	0
A5	1*	1*	1*	1	1	1	1	0	1*	0	1	0	0
A6	1	1*	1	1	1	1	1	1	1*	1	0	1	1

Nota. 0 = no generaliza, 1 = generaliza y 1* = generaliza incorrectamente.

Es posible apreciar que todos los estudiantes responden de forma completa sus cuestionarios.

Respecto a las preguntas referidas a casos particulares, los estudiantes presentan mayor rango de asertividad en sus respuestas. En las primeras cuatros preguntas todos los estudiantes identifican que existe un aumento en la cantidad de bolas que salen de la máquina. En este caso, el estudiante A6 responde seis de las siete preguntas relacionadas a casos particulares de forma correcta y una de ella identifica el aumento de bolas, pero no la cantidad exacta.

Respecto a las preguntas donde se abordaba la generalización (P5, P6, P7d, P7e, P7f y P7g) observamos que dos estudiantes (A1 y A6) generalizan en la mayoría de las preguntas, respondiendo correctamente cuatro de las seis preguntas que proponen trabajar con generalización, mientras que las otras dos preguntan generalizaron de forma incorrecta. Los otros cuatro estudiantes presentaron mayor rango de error en este tipo de preguntas.

En la P6 del cuestionario (sobre generalización), les solicitamos a los estudiantes describir el funcionamiento de la máquina. A continuación, detallamos las respuestas de los seis estudiantes:

- El estudiante A1 escribe que “en el primero y una bola nos salen 4. En la segunda hay dos bolas salen cinco. En la tercera hay tres bolas salen seis. En la cuarta hay cuatro bolas salen siete”.
- El estudiante A2 escribe que “si hay siete bolas y salen ocho, echando bolas”.
- La estudiante A3 escribe “que parten la mitad”.
- La estudiante A4 escribe que “es porque se tiene que sumar”.
- El estudiante A5 escribe que funciona “sumando el doble”.
- El estudiante A6 escribe que “metiendo bolas, meten una bola, pero adentro ya hay bolas y salen muchas como siete y salen ocho”.

Al analizar los datos obtenidos, identificamos que un estudiante (A6) generaliza en el cuestionario inicial respondiendo en su mayoría, de forma correcta. Respecto a los otros cinco estudiantes (A1, A2, A3, A4 y A5) identificamos que generalizan de forma incorrecta, puesto que identifican que hay un aumento en la cantidad de bolas que salen de la máquina, pero existen errores en la cantidad exacta que se debe sumar.

4.2. Mediaciones realizadas por el entrevistador

En este apartado detallamos los resultados obtenidos a raíz del análisis de las entrevistas de los seis estudiantes. Mostramos en la tabla 4 la cantidad de mediaciones realizadas por el entrevistador con cada estudiante. Al finalizar cada columna referida a las categorías de mediaciones, detallamos el total de cada una de ellas.

Tabla 4. *Mediaciones realizadas por el entrevistador*

Estudiantes	Mediaciones					Total
	Invitar	Apoyar /guiar	Informar /sugerir	Desafiar	Cuestionar	
A1	6	2	1	6	3	18
A2	7	1	1	4	3	16
A3	6	2	0	5	5	18
A4	6	2	4	2	2	16
A5	5	2	0	6	1	14
A6	6	4	1	3	3	17
Total	36	13	7	26	17	99

Las mediaciones que identificamos en las entrevistas fueron de cinco, (a)invitar; (b)apoyar/guiar; (c)informar/sugerir; (d) desafiar y (e) cuestionar, de las cuales las más utilizadas son invitar, desafiar y cuestionar. La cantidad de mediaciones realizadas a cada estudiante fueron distintas para cada uno de ellos, moviéndose entre 14 y 18 por cada estudiante. Informar/sugerir es la única mediación que no se utilizó en todos los estudiantes, siendo además la menos usada por parte del entrevistador. La mediación invitar

fue la más utilizada en todas las entrevistas. A continuación, describimos las mediaciones usadas en las entrevistas y cómo influyeron en el proceso de generalización de los estudiantes.

La mediación invitó a los estudiantes a explicar sus ideas, justificando los procedimientos y respuestas que utilizaban. Esta mediación fue una de las más eficaces para ayudar a los estudiantes a generalizar. En las entrevistas, constantemente se les pide a los estudiantes que expliquen su razonamiento sobre la tarea, ayudando para que expresen la generalización. Un ejemplo se evidencia con el estudiante A1 en el siguiente fragmento de entrevista.

E: Sale esa cantidad ¿cómo sabes que son seis?

A1: No tengo ni idea. Es que cuando habíamos hecho lo de mates me había quedado con un truquillo.

E: ¿Cuál era ese truquillo? ¿Me lo puedes contar?

A1: Pues que mira a una bola le sumamos tres más, seis bolas le sumamos otros tres más y así.

La mediación desafiante motivó a los estudiantes a requerir un esfuerzo mayor para dar respuesta a las situaciones planteadas, las que cada vez aumentaban en complejidad. En ocasiones el entrevistador les desafiaba con números mayores para identificar si comprendían la regularidad con cualquier caso planteado. Esta mediación ayudó en la generalización de los estudiantes porque al proponer ejemplos con números mayores, comprobaban que su generalización era correcta para todos los casos posibles. Un ejemplo se refleja en la entrevista del estudiante A5, donde se aumenta el rango numérico con el que estaban trabajando.

E: Vale. O sea que siempre le sumas tres. ¿Y si...? Imagínate que tienes un número, voy a poner aquí (escribe en el folio), un número muy grande de bolas. ¿Cuántas te saldrían?

A5: Pues si es un millón pues te saldría un millón tres

E: Vale. O sea que si fuera un millón sería un millón tres (escribe folio) por ejemplo. ¿Y si...tuviéramos por ejemplo...?

A5: ¿Cien millones?

E: Eso es, ¿si tuviéramos cien millones?

A5: Pues cientos millones, es que no sé decirlo bien.

Cuestionar permitió que los estudiantes corrigieran sus errores. Cuando el entrevistador solicitaba a los estudiantes que confirmaran sus resultados, ayudaba para que los estudiantes identificaran el error. Detallamos a continuación parte de una entrevista con el estudiante A1, donde se realiza esta mediación:

E: Y por ejemplo en esta, ¿Cuántas entran?

A1: Seis.

E: ¿Seguro que hay seis?

A1: Cinco... Cinco.

E: ¿Y cuántas debieran salir?

A1: Seis.

E: ¿Debiera salir seis?

A1: Ocho... Ocho.

La mediación guiar/apoyar es la que se utilizó al inicio de cada entrevista. El entrevistador reiteraba la información presentada en la clase, ayudando a contextualizar la situación en la que se estaba trabajando. También se repetían ciertos datos o resultados anteriores, con el fin de guiar al estudiante a la generalización. En el ejemplo que detallamos a continuación con A5, observamos cómo el entrevistador guía/apoya al inicio de la entrevista.

E: Mira, esto fue lo que os contó en clases ¿te acuerdas que llevó a la clase unos posters grandes de una máquina? La máquina siempre funciona de la misma manera, entonces os decía, si metes una bola, ¿cuántas salen?

A5: Cuatro, triplete.

E: Eso es. ¿Y si metes dos?

A5: Cinco, ¿no?

E: Vale. ¿Si metes tres?

A5: Seis.

La mediación que menor uso tuvo en las entrevistas fue informar/sugerir. Cuando se sugería, el entrevistador ayudaba al estudiante a buscar un procedimiento para encontrar la respuesta. A continuación, detallamos parte de la entrevista al estudiante A4 donde se evidencia la mediación señalada:

E: Vale, vamos a hacer una cosa; yo voy a anotar los datos que me has ido diciendo para acordarnos. Mira habíamos visto que si metíamos una bola salían cuatro.

A4: Y si le metemos tres salen cuatro bolas.

E: ¿Si metemos tres bolas salen cuatro?

A4: No, si metemos una y después metemos tres bolas salen cuatro bolas.

4.3. Generalización de los estudiantes después de la mediación

Analizamos ahora las respuestas de los estudiantes después de las mediaciones. Mostramos un resumen de estos resultados en la tabla 5, mostrando el estado final de las respuestas de los cuestionarios de cada estudiante, obtenidas al revisar los cuestionarios en cada entrevista.

Tabla 5. Generalización después de la mediación

Estudiante	Preguntas												
	Casos particulares							Generalización					
	P1	P2	P3	P4	P7a	P7b	P7c	P5	P6	P7d	P7e	P7f	P7g
A1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
A2	1*	1*	1*	1*	0	1	1	1*	1*	0	0	1	1
A3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
A4	1*	1*	1*	1*	0	0	0	1*	1*	0	0	0	0
A5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
A6	1	1*	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Nota. 0 = no generaliza, 1 = generaliza y 1* = generaliza incorrectamente

En la tabla detallada, observamos que en la mayoría de las preguntas existe un cambio positivo, donde los estudiantes corrigieron sus errores.

Respecto a las preguntas que abordan casos particulares, evidenciamos que cuatro de los seis estudiantes (A1, A3, A5 y A6) generalizan en casos particulares. Los estudiantes A2 y A4 continúan generalizando incorrectamente.

Referente a las preguntas que abordan la generalización, existe un cambio en las preguntas P5 y P6. Los seis estudiantes generalizan en estas dos preguntas, donde cuatro de ellos (A1, A3, A5 y A6) generalizan y los otros dos (A2 y A4) generalizan incorrectamente. En cuanto P7d, P7e, P7f y P7g del cuestionario, los seis estudiantes presentaron mayor dificultad.

Al momento de revisar la pregunta P6 (sobre generalización) durante las entrevistas los estudiantes (A1, A3, A5 y A6) expresaron la máquina funcionaba sumándole tres bolas. Los otros dos estudiantes (A2 y A4), expresan que se suma, pero no determinan una cantidad exacta para cada número de bolas que ingresan a la máquina.

Al analizar los datos obtenidos, identificamos que los estudiantes A1, A3, A5 y A6 generalizan después de la mediación. Respecto a los estudiantes A2 y A4 generalizan de forma incorrecta, puesto que identifican que existe un aumento en la cantidad de bolas que salen de la máquina.

4.4. Estudio de caso

A continuación, detallamos el estudio de caso realizado a los seis estudiantes. En cada caso, analizamos la generalización antes y después de la mediación, describiendo las mediaciones aplicadas para cada uno de ellos.

4.4.1. Estudio de caso A1

Al analizar las respuestas del cuestionario inicial de A1, evidenciamos que el estudiante identifica que existe un aumento en la cantidad de bolas que salen de la máquina, pero no establece una misma cantidad para sumar en cada ejercicio. Un ejemplo de lo expuesto es que en P1 suma once, P2 suma diez, P3 suma tres, etc. Cuando se le solicita explicar el funcionamiento de la máquina, lo explica a través de ejemplos, donde establece que a la cantidad que él indica, se le debe agregar tres bolas. Por último, al

contestar las preguntas de verdadero y falso, responde correctamente indicando que se debe sumar tres. A raíz de lo expuesto, es que indicamos que A1 generaliza incorrectamente antes de la mediación.

Al momento de realizar la entrevista con el estudiante, se realizaron las mediaciones invitar, guiar/apoyar, informar/sugerir, desafiar y cuestionar, siendo cada una de ellas aplicadas en distintas frecuencias y momentos. Se destacan las mediaciones invitar y desafiar por ser las más utilizadas durante su entrevista. A su vez, la mediación informar/sugerir fue la menos utilizada con este estudiante. La mediación invitar ayudó para que el estudiante justificara sus respuestas, permitiéndole que expresara la generalización. Un ejemplo de ello se detalla a continuación:

E: Si entran diecinueve bolitas ¿Cuántas debieran salir?

A1: Veintidós.

E: Veintidós. ¿Me podrías volver a contar como lo encontraste?

A1: Pues si hay una nos salen cuatro, le tenemos que sumar tres más.

Así también, la mediación desafiar ayudó para que el estudiante generalizara. El entrevistador le realizó preguntas que aumentaban los números planteados en las preguntas de casos particulares. Con esto, el estudiante evidencia que independientemente del número o letra que se le presentara en la pregunta, la regularidad era sumar tres, identificando la función $f(x) = x + 3$, como se muestra a continuación.

E: Cinco. O sea... ¿el truquillo es...?

A1: Es que mira. Una bola, nos salen cuatro; dos bolas, salen cinco; tres bolas, salen seis; y cuatro bolas, salen siete.

E: Vale. Algo está pasando con la cantidad de bolas que salen, ¿cierto? Que tú me habías explicado que hay un truquillo que habías visto. Vamos a ver ahora, esta era la parte en la que tenías que encerrar [rodear] la oración según era verdadera o falsa. En la primera decía: si en la máquina metes cuatro bolas salen siete bolas. Tú dijiste que es verdadero, ¿sigues pensando que es verdadero?

A1: Sí.

E: Vale y ¿por qué?

A1: Siempre hay que sumarle tres como te he dicho

Al realizar la entrevista, identificamos que el A1 generaliza para casos particulares y que reconoce la generalización cuando el entrevistador se la expresa con símbolos algebraicos, como se detalla a continuación:

E: Perfecto. Y después dice si meto A bolas en la máquina nuevamente salen $A + 1$ bolas.

A1: Falsa.

E: ¿Por qué?

A1: No tengo nada que decir, pero es falsa.

E: Es falsa. Y después dice si meto A bolas en la máquina salen $A + 3$ bolas.

Alejandro: Verdadera

Eder: ¿Por qué?

A1: No tengo nada que decir, pero es verdadera.

4.4.2. Estudio de caso A2

Al analizar el cuestionario inicial de A2, evidenciamos que el estudiante generaliza incorrectamente. Identifica que existe un aumento, sumando uno a la cantidad de bolas que salen de la máquina (ver figura 7).

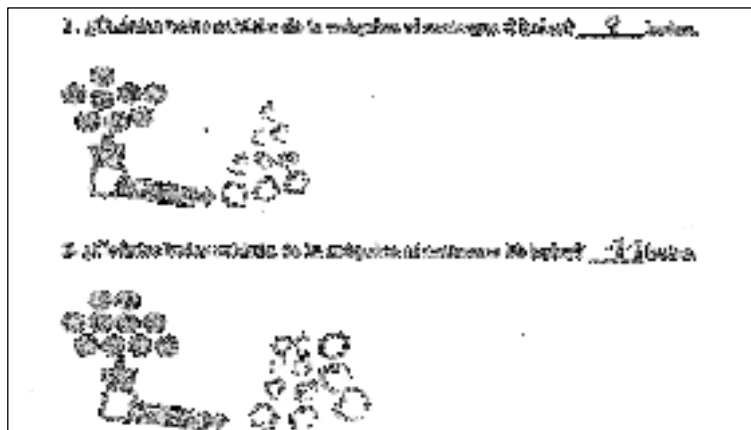


Figura 7. Respuestas cuestionario inicial de A2

En relación a las preguntas que abordan la generalización, el estudiante no responde correctamente.

Respecto a la entrevista con el estudiante, se realizaron las mediaciones invitar, guiar/apoyar, informar/sugerir, desafiar y cuestionar, siendo cada una de ellas aplicadas en distintas frecuencias y momentos. Se destacan las mediaciones invitar y desafiar por ser las más utilizadas durante la entrevista. Las mediaciones apoyar/guía e informar/sugerir solo se usaron una vez cada una durante la entrevista. La mediación invitar permitió que la estudiante justificara sus respuestas, como se detalla a continuación:

E: ¿Cómo supiste que eran nueve?

A2: Pues lo sume en mi cabeza.

E: ¿Y cuánto le sumaste a la cantidad ocho?

A2: ¿A ocho?

E: Sí, ¿para qué te diera nueve?

A2: Uno...

Las distintas mediaciones lo motivaron a la justificación y participación continua de la conversación sobre los resultados, desafiándolo en distintas situaciones a razonar sobre sus procedimientos y respuestas.

Al realizar la entrevista, el estudiante A2 responde de forma incorrecta la mayoría de las preguntas, tanto de casos particulares y generalización. Expresa que el funcionamiento de la máquina es variado y que en algunos casos le agregaba dos o tres bolas, hasta el doble, dependiendo el número con el que se trabaja. A continuación, detallamos parte de la entrevista:

A2: Doce. Pero como antes lo hemos sumado así, saldrían trece creo yo.

E: ¿Trece?

A2: Sí porque el uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve son distintos al diez, once, doce y a los demás números entonces....

E: ¿Y por qué son distintos los números del uno al nueve?

A2: Porque yo he estado sumando uno al uno, dos y tres y desde el diez al cien esos tienen que sumarse dos o tres...

E: ¿Si entran mil bolas cuantas debieran salir?

A2: Pues deberían salir mil uno, pero saldrían mil tres porque sumándole tres da mil tres.

E: ¿Y por qué sumándole tres ahora?

A2: Porque desde el cien al mil es demasiado así que tienes que sumarle tres

Después de la entrevista y las mediaciones realizadas identificamos que A2 generaliza incorrectamente.

4.4.3. Estudio de caso A3

La estudiante A3 en su situación inicial generalizaba incorrectamente. En las preguntas relacionadas a casos particulares, la estudiante identifica una regularidad, sumando dos a la cantidad de bolas que entran en la máquina. Respecto a las preguntas sobre generalización, responde incorrectamente, puesto que confunde términos como mitad y doble. A su vez, marca las opciones que relacionan con sumar dos bolas en la cantidad total. En la figura 8 se detalla parte de sus respuestas.

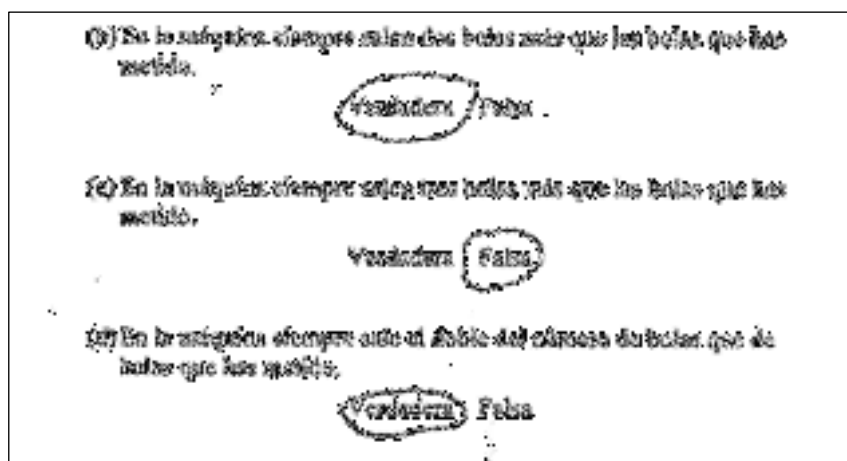


Figura 8. Respuesta cuestionario inicial de A3.

En relación a la entrevista realizada para A3, se realizaron las mediaciones invitar, guiar/apoyar, desafiar y cuestionar. Con esta estudiante no se utilizó la mediación informar/sugerir. Las mediaciones más utilizadas en su entrevista fueron invitar, desafiar y

cuestionar. Estas mediaciones ayudaron a la estudiante a corregir, argumentar y contestar las preguntas. Cuestionar, mediación que la ayudó a corregir errores. Las otras dos mediaciones fueron invitar y desafiar, enfocadas a la argumentación y el razonamiento de los procesos que realizaba, las cuales la ayudaron a generalizar. Respecto a la mediación guiar/apoyar, aun cuando fue la menos utilizada, fue de gran importancia para que A3 recordara lo trabajado en clases y comprendiera la regularidad de la situación funcional que se planteaba en el cuestionario.

E: Veamos estos ejemplos para recordarlo. Era una máquina en la cual entraban y salían bolas. Este fue el primer ejemplo que os mostré: si entraba una bola salía esa cantidad de bolas. Si quieres puedes ir registrando o rayando en tu hoja que no hay problema. Si entraban esa cantidad de bolas salía esa cantidad de bolas. Ahora bien, tenemos más ejemplos. Fijate ahora entra otra cantidad de bolas y sale esa cantidad de bolas. Fijate que ahora entró otra cantidad de bolas ¿cuántas entraron acá?

A3: Pues ahí son cinco.

E: ¿Y cuántas salieron?

A3: Ocho.

E: Ocho. ¿Y aquí cuántas entraron?

A3: Tres.

E: ¿Y salieron?

A3: Seis

Posterior a los ejemplos mostrados, la estudiante reconoce la regularidad funcional, e presándole al entrevistador lo siguiente:

E: Te traigo acá la respuesta que tú me diste al cuestionario cuando lo trabajamos hace una semana Aurora. La primera pregunta decía: ¿cuántas bolas saldrán de la máquina si metes ocho bolas? Tú me las dibujaste y pusiste diez ahí ¿sigues pensando ahora que son diez bolas?

A3: Ahora ya no, porque ya sé que se suman tres.

Se destaca que a través de las mediaciones realizadas la estudiante reflexiona en sus respuestas y las corrige correctamente. Durante el desarrollo de la entrevista la

estudiante nos confirma con sus respuestas que generaliza, indicando que siempre se agrega tres a la cantidad que se le colocaba en la máquina.

E: Vale. Y ahora ¿te acuerdas de los verdaderos y falsos? Vamos a ver si estás de acuerdo con lo que escribiste sino no pasa nada. Recuérdalo. La primera decía: ¿si en la máquina metes cuatro bolas salen siete bolas? tú pusiste falso ¿sigues pensando que eso es falso?

A3: No, ahora creo que es verdadero.

E: Lo puedes cambiar ¿estás segura de que es verdadero?

A3: Sí.

E: ¿Por qué?

A3: Porque ahora que he visto esto sé que ahora siempre salen tres más

Al realizar la entrevista, identificamos que A3 generaliza para casos particulares, cuando expresa la regularidad funcional indica claramente que siempre se debe sumar tres o que salen tres bolas más en el total. Pero no reconoce la generalización cuando el entrevistador se la expresa con símbolos algebraicos, manifiesta que no sabe y que la letra puede reemplazar la posición del abecedario.

4.4.4. Estudio de caso A4

Al analizar las respuestas del cuestionario inicial de A4, analizamos que identifica un aumento en la cantidad de bolas que salen de la máquina, pero agrega distintas cantidades para sumar. En P1 suma tres, P2 suma ocho, P3 siete, etc. En las preguntas sobre generalización, presenta errores. Consideramos que inicialmente la estudiante generaliza incorrectamente porque no establece un patrón claro en el aumento de bolas y sus respuestas en el cuestionario en su mayoría están equivocadas.

En relación a la entrevista realizada para A4, se realizaron las mediaciones invitar, guiar/apoyar, informar/sugerir, desafiar y cuestionar. Las mediaciones más utilizadas en su entrevista fueron invitar e informar/sugerir. A través de la mediación invitar se buscaba que el intercambio de ideas y la justificación de sus respuestas. Para esta estudiante, las mediaciones fueron constantes y variadas en distintos momentos de la entrevista, buscando que la estudiante comprendiera la tarea presentada.

Al realizar la entrevista, A4 generaliza incorrectamente las preguntas P1 a P6 del cuestionario y los casos particulares que le presenta el entrevistador. Respecto a las preguntas sobre generalización, responde incorrectamente. La estudiante presentó dificultad para comprender que la máquina presentada en tarea propuesta siempre funciona de la misma forma, manifestando que en ocasiones esta aumenta el doble, o en otras aumenta en tres, etc.

E: Bueno, ya tenías tres. ¿Cuántas bolas más hace?

A4: Ha hecho tres más.

E: Ha hecho tres más, vale. ¿Y aquí?

A4: Hay cinco y después en la maquina por dentro ha echado tres bolas más para que tenga ocho.

E: O sea que parece que la máquina por dentro... ¿qué es lo que hace?

A4: Que cuando metemos cinco bolas, que ella mete más bolas

E: ¿Cuantas más?

A4: Tres.

E: Vale. Si metiéramos... yo te voy a cambiar el número ahora, ¿vale? Si metiéramos diez bolas, ¿cuántas bolas haría la máquina? ¿Cuántas saldrían?

A4: Yo creo que veinte.

E: Ah, ¿por qué?

A4: He sumado diez más diez.

E: Y ¿por qué sumas diez más diez? ¿No me has dicho que la máquina hacia tres bolas más?

A4: No, no que diez más, que me has dicho si ponemos diez en la máquina van a salir veinte porque si le ponemos diez más son veinte.

Después de la entrevista y las mediaciones realizadas identificamos que A4 generaliza incorrectamente.

4.4.5. Estudio de caso A5

Al revisar las respuestas de A5 en su cuestionario inicial, analizamos que generaliza incorrectamente en las preguntas de casos particulares y generalización, indicando en sus respuestas que las bolas que salen de la máquina son el doble de lo que entra. Así mismo, lo expresa en P6.

Al realizar la entrevista, se utilizaron las mediaciones, invitar, guiar/apoyar, desafiar y cuestionar. Con este estudiante no se utilizó la mediación informar/sugerir. Las mediaciones más utilizadas en su entrevista fueron invitar y desafiar. Respecto a desafiar, mediación con la que el entrevistador le realizó preguntas con números mayores y símbolos, fue de gran ayuda para que el estudiante expresara que siempre se cumplía la misma regularidad, sumar tres.

E: Vale, o sea que parece que sí podría ser ¿no? y ahora ¿si en vez de la N tuviéramos este símbolo? (escribe) esto es alfa, es una letra del alfabeto griego. ¿Lo has visto alguna vez?

A5: No.

E: Pues es la alfa pero da igual, es un símbolo. Si metiéramos eso, ese número de bolas en la máquina... hay otro niño que nos ha dicho esto: a alfa, ese número, le sumamos tres, ¿tú que crees?

A5: Yo...

E: ¿Se te ocurre algo? Es que está muy difícil A5, yo lo sé. Esta pregunta es de los niños mayores, pero como lo has hecho muy bien en el resto quería, ver como hacías este.

A5: Uf, esto pues le metemos esto, un símbolo, te saldría tres bolas más.

E: Sí.

A5: ¿Sí?

E: Sí.

A5: ¡Toma!

E: Entonces ¿podría ser esto: a alfa le sumamos tres? ¿Estás de acuerdo? A alfa le sumamos tres bolas (escribe) ¿con esto estarías de acuerdo?

A5: Sí.

Al realizar la entrevista, identificamos que A5 generaliza correctamente para casos particulares y en las preguntas de generalización presenta unos errores, pero identifica que la generalización.

4.4.6. Estudio de caso A6

La estudiante al responder su cuestionario inicial, identificamos generaliza. Respondió la mayoría de las preguntas de forma correcta. Respecto a las preguntas relacionadas a casos particulares, responde seis de las siete preguntas de forma correcta y una de ella identifica el aumento de bolas, pero no la cantidad exacta (ver figura 9).

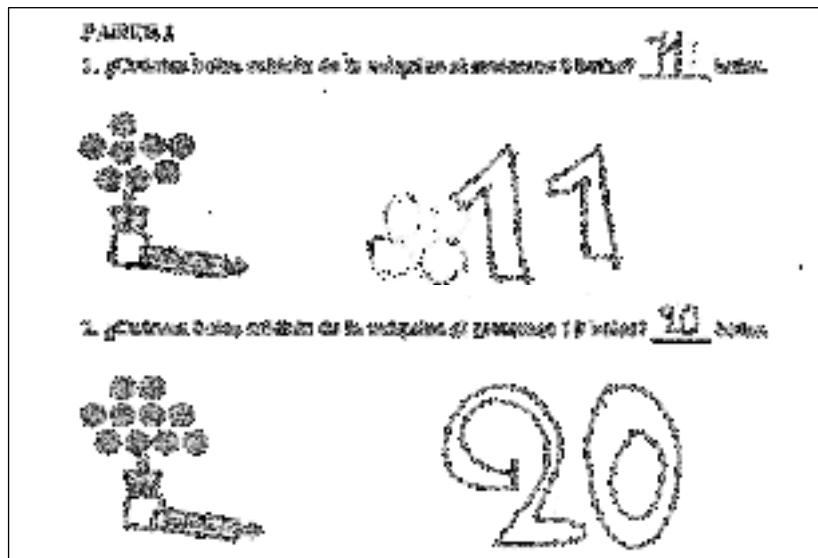


Figura 9. Respuestas cuestionario inicial de A6.

Al realizar la entrevista, se utilizaron las mediaciones, invitar, guiar/apoyar, informar/sugerir, desafiar y cuestionar. Las mediaciones utilizadas con la estudiante son variadas, siendo la más frecuente invitar y guiar/apoyar. Las mediaciones la motivaron a la justificación e intercambio de ideas. Un ejemplo de ello se detalla a continuación:

E: Vale ¿y aquí? ¿Qué pasaba aquí?

A6: Que dentro hay otras tres y salen seis.

E: Vale, entonces parece que la máquina está haciendo algo igual ¿no? ¿o no?

A6: Sí.

E: ¿Qué está haciendo siempre igual la máquina?

A6: Que dentro hay bolas y después meten más.

E: ¿Y cuantas bolas hay en la máquina?

A6: Por ejemplo, si aquí hay tres pues aquí hay otras tres y salen su resultado que hay que sumar.

E: ¿Y aquí cuantas hay dentro?

A6: Tres.

La estudiante no tuvo inconveniente para identificar la función $f(x) = x + 3$, manifestando que siempre se aumentaba tres. Destacamos que a través los distintos ejemplos que entrega la estudiante, la estudiante generaliza.

E: Entonces te preguntábamos pon el número que tú quieras al principio de la máquina ¿no? y tú pusiste un cuatro.

A6: Sí.

E: Entonces dijiste que sí... Esto significaba que si entraban cuatro bolas ¿cuántas salían aquí?

A6: Por ejemplo, si dentro hay tres y entran cuatro luego salen siete.

E: Vale y, ¿cómo lo estás haciendo?

A6: Pues sumando.

E: Vale, ¿y qué sumas?

A6: Pues si hay un número, debajo hay otro.

E: Aha ¿y qué número le estas sumando Laila?

A6: Pues el cuatro y tres.

Al realizar la entrevista, identificamos que A6 generaliza correctamente para casos particulares y en las preguntas de generalización presenta unos errores al generalizar con símbolos algebraicos.

Capítulo 5. Conclusiones

En este capítulo presentamos las conclusiones de este estudio. Las organizamos en cuatro partes (a) logro de objetivos de investigación, (b) aportes de la investigación, (c) limitaciones y (d) líneas abiertas que deja este estudio.

5.1. Logro de objetivos de investigación

El objetivo general de nuestra investigación es describir la mediación de un entrevistador en relación con el trabajo de estudiantes de segundo de educación primaria en una tarea de generalización. Este objetivo lo abordamos a través de tres objetivos específicos.

El primer objetivo específico (describir la generalización de los estudiantes cuando trabajan de forma autónoma), lo hemos cumplido. Evidenciamos que uno de los seis estudiantes generalizo al momento de responder el cuestionario en el momento inicial y los otros cinco estudiantes generalizaron de forma incorrecta. Con esto concluimos que, al trabajar de forma autónoma, los estudiantes pueden tener una idea sobre la regularidad trabajada, aun cuando no la identifiquen exactamente. Al analizar el estudio de caso de cada estudiante, observamos que responden más preguntas de casos particulares de forma correcta y en sus respuestas escritas evidencian que identificaban una regla general, en este caso, que se sumaba una cantidad. Compartimos lo expuesto por Pinto y Cañadas (2019) quienes indicaron que los estudiantes pueden definir una regla general, aunque en ocasiones sea incorrecta.

En relación al segundo objetivo específico (caracterizar la mediación realizada por el entrevistador durante la entrevista), fue cumplido en su totalidad. Identificamos las mediaciones realizadas por el entrevistador y describimos cada una de ellas. Dada la variedad de mediaciones, evidenciamos que estas cumplen un rol amplio, permitiendo motivar, ayudar y guiar a los estudiantes a generalizar. Las mediaciones realizadas a cada estudiante en cantidad fueron similares, independientemente de los logros de aprendizaje de los estudiantes. El entrevistador medió a lo largo de toda la entrevista, no observándose momentos concretos donde se presentaran con mayor énfasis. Incluso al

comienzo de la entrevista, donde se podría pensar que fueron menos frecuentes, fueron útiles porque permitieron a los estudiantes recordar y contextualizar la tarea propuesta en el cuestionario. Reconocemos por tanto el papel de las diferentes mediaciones, siendo cada una de ellas claves en diferentes momentos de la entrevista. Con los estudios de casos realizados, evidenciamos que las mediaciones utilizadas fueron según los requerimientos de cada uno de los estudiantes. En nuestra investigación la mediación invitar fue la más utilizada por parte del entrevistador. Esta mediación tiene como objetivo desencadenar una discusión donde se anime a los estudiantes a participar o compartir sus respuestas (Mata-Pereira y Ponte, 2017). Esto pone de manifiesto lo importante que es motivar a los estudiantes para que expliquen sus respuestas. Las mediaciones apoyar/guiar y desafiar, les ayudaron para comprender los casos particulares. Las otras mediaciones ayudaron a los estudiantes a corregir de forma correcta en diversas ocasiones sus respuestas. Resultado de estas acciones, después de la entrevista, cuatro estudiantes generalizan de forma correcta y los otros dos generalizaron incorrectamente. Analizamos que una sola mediación o un único tipo de mediación no ha sido suficiente para que un estudiante lograra generalizar. Los resultados obtenidos en este trabajo corroboran lo señalado por Ureña, Ramírez y Molina (2019) e Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020), quienes indicaron que la mediación alienta a los estudiantes a responder y ayudan a los estudiantes cuando presentan un error o dificultad. Respecto a la mediación desafiar descrita por Ponte, Quaresma y Mata-Pereira (2017) como acciones en las que el profesor busca que los estudiantes asuman el papel de producir nuevas representaciones, interpretar una declaración, establecer conexiones o formular un razonamiento o una evaluación. Dentro de nuestra investigación evidenciamos la importancia de llevar más allá a los estudiantes para generalizar. Los desafíos en la mayoría de las situaciones fueron realizados como preguntas de casos particulares, donde los estudiantes a través de diversos ejemplos o preguntas con mayor dificultad podían identificar la regularidad. En síntesis, las mediaciones que caracterizamos, fueron diversas, siendo cada una de ellas claves para guiar a los estudiantes a la comprensión de lo trabajado.

El tercer objetivo específico (describir la generalización de los estudiantes después de la mediación), observamos que este grupo de estudiantes avanzó en su proceso de generalización. Los seis estudiantes generalizaron, pero dos de ellos lo hicieron

incorrectamente. Con esto ratificamos lo expuesto en los distintos estudios realizados (e.g., Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Pinto y Cañadas, 2017) donde evidenciaron que los estudiantes pueden enfrentarse a tareas aborden el pensamiento funcional, específicamente la generalización. En los estudios de casos, evidenciamos que los estudiantes generalizaron para casos particulares con mayor facilidad. Además, la mayoría de los estudiantes reconocieron la generalización con simbolismo algebraico, cuando la expresa el entrevistador. Con esto ratificamos lo expuesto por Castro, Cañadas y Molina (2010), donde exponen que el trabajo debe realizarse comenzando por los pasos más accesibles como pueden ser tratar con casos particulares e ir avanzando en la búsqueda de patrones, hacer conjeturas y generalizaciones, así como llegar a expresar dichas generalizaciones. Los estudiantes al comenzar a trabajar con casos particulares, utilizando ejemplos simples para ellos, reconocieron con mayor facilidad la regularidad de la tarea planteada, ayudándolos a identificar y expresar la generalización. Además, con estos resultados coincidimos con lo mencionado por Ureña, Ramírez y Molina (2019) los que expresaron que la mediación de los profesores tiene un impacto considerable sobre la capacidad de generalizar de los estudiantes. Esta guía efectiva del proceso de razonamiento matemático, permite a los estudiantes reflexionar y apoyarse en las guías que entrega el mediador. Para los estudiantes fue clave que se le realizaran mediaciones, donde cada uno de ellos al intercambiar ideas, mejoraron en sus respuestas. Al describir la generalización de los estudiantes después de la mediación, comprendemos que puede ser una acción útil para ayudar a los estudiantes a generalizar. Al analizar cada estudio de caso comprendemos que cada estudiante necesitó de distintas mediaciones para lograr su objetivo y que cada estudiante tiene un logro de aprendizaje distinto, el cual se lleva a cabo de diferente forma para cada uno de ellos. Es por lo expuesto que consideramos que la mediación es un proceso complejo que se debe ir adecuando a las necesidades y estilos de aprendizajes de cada grupo con el cual se trabaja.

En síntesis, con esta investigación concluimos que al igual que otras investigaciones evidenciamos que los estudiantes de primaria, específicamente en segundo, generalizan. A su vez, creemos que se debe contar con acciones para ayudar a este proceso, más aún si el grupo de estudiantes no ha tenido una instrucción anterior sobre lo que es generalización. Por lo mismo sugerimos que existe una forma de ayudar a los estudiantes a

generalizar y esto es a través de la mediación. Como indicaba Escobar (2011) la experiencia de aprendizaje a través de un mediador favorece que el niño desarrolle sus habilidades cognitivas, la flexibilidad, la autoplaticidad y la modificabilidad. Esto nos refuerza en considerar que las mediaciones pueden ser un puente que ayude a los estudiantes a identificar la regularidad presentada, logrando generalizar.

Consideramos relevante que para identificar si el estudiante generaliza, debemos incentivar a que puedan expresar la generalización ya sea de forma verbal o escrita, argumentado su razonamiento. Como lo indica Mata-Pereira y Ponte (2017) es esencial que los estudiantes entiendan la necesidad de justificación. Es relevante para el pensamiento funcional que los estudiantes a través de la argumentación evidencien comprensión con lo trabajado. Esto motiva a dar espacios dentro del aula para que se realicen diálogos pedagógicos que motiven no solo a corregir las respuestas erróneas, sino que además los estudiantes se acostumbren a razonar y argumentar los procesos algebraicos.

En esta investigación se observa la capacidad de los estudiantes de cursos iniciales de primaria para generalizar y así confirmar diversas investigaciones que han trabajado este tema. Warren (2006) considera que la actividad algebraica puede ocurrir a una edad más temprana de lo que habíamos pensado posible y que estas experiencias con las acciones apropiadas del maestro puede ayudar a más estudiantes a unirse a la conversación en sus años de adolescencia. Esto nos muestra la importancia del apoyo del mediador en este proceso. Sin la mediación podemos lograr que una parte de los estudiantes generalicen, pero con ayuda de la mediación, esta parte puede transformarse en una totalidad. La oportunidad de experiencias pedagógicas permite que abordemos a las distintas formas y logros de aprendizaje que presentan los estudiantes.

5.2. Aportes de la investigación

Consideramos que el aporte de nuestra investigación es evidenciar que las mediaciones presentadas podrán ser de guía para que los docentes tengan un conocimiento de cuáles pueden ser de ayuda para guiar los estudiantes, dándole espacio para que exista una comunicación efectiva entre estudiantes y maestros.

Dentro de las mediaciones del entrevistador, destacaron invitar y desafiar. Este es un aporte a los docentes, pues les permite guiar la intervención pedagógica de forma más eficaz, sabiendo que con estas mediaciones se obtiene avances en las respuestas de los estudiantes.

Por último, con esta investigación evidenciamos que la mediación puede ser una ayuda para que los estudiantes de primaria generalicen, sobre todo si es un grupo de estudiantes que no ha tenido experiencia previa con este tema. La mediación puede ser utilizada como herramienta que permita desarrollar la argumentación y el razonamiento matemático en los estudiantes para que generalicen.

5.3. Limitaciones de la investigación y líneas abiertas

Debido al carácter exploratorio del presente estudio y dado el número limitado de participantes, entendemos que los resultados obtenidos no permiten la generalización de los mismos, no obstante, esperamos que estos sirvan de orientación para futuras investigaciones.

Una línea abierta que queda por analizar es identificar los efectos que producen cada una de las mediaciones en el proceso de generalización de los estudiantes. Esto es de gran importancia porque cada mediación cumple un rol específico, por lo creemos que sus efectos pueden ser distintos.

Otra línea abierta es identificar en qué medida afectan otros factores como los errores, dificultades, aspectos emocionales o socio cultural en la generalización de estudiantes de primeros cursos de educación primaria.

Por último, creemos relevante identificar si se producen distintos tipos de generalización en los estudiantes al mediar con una o todas de las categorías que establecimos en la investigación.

Referencias

- Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Blanton, M. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer.
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558.
- Brizuela, B. M. y Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th conference of Psychology of Mathematics Education North America*, (Vol. 2, pp. 137-144). Honolulu: College of Education, University of Hawaii.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Cañadas, M. C. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 73, 7-13.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 69-81.
- Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y

- N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.
- Cañadas, M. C., Dooley, T., Hodgen, J. y Oldenburg, R (2012): CERME7 Working Group 3: Algebraic thinking, *Research in Mathematics Education*, 14(2), 189-190.
- Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). Jaén, España: SEIEM.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 54, 55-67.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(2), 1-13.
- Corbin, J. M. y Strauss, A. (1990). A tierra la teoría de la investigación: procedimiento, cánones y criterios de evaluación. *Sociología Cualitativa*, 13(1), 3-21.
- Driscoll, M. J. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, 6(23), 23-32.
- Escobar, N. (2011). La mediación del aprendizaje en la escuela. *Acción Pedagógica*, 20, 58-73.

- Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. Madrid, España: Pirámide
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). México, DF: McGraw-Hill.
- Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA*, 14(3), 204-225.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Londres, Reino Unido: Kluwer Academic Publishers.
- Mata-Pereira, J. y Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.

- Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por estudiantes de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, A. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao, España: SEIEM.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria* (Vol. 52, pp. 19349-19420). Madrid, España: Autor.
- Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Santiago de Chile: Autor.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Granada, España: Atrio
- Morales, R. y Cañadas, M. C. (2017). *Acciones que ayudan a estudiantes de segundo de educación primaria cuando incurren en errores en una tarea de pensamiento funcional*. Trabajo presentado en grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM. En XXI Simposio de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Zaragoza, España.
- Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de estudiantes de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(3), 59-78.
- Moreno, A., Pinto, E. y Molina, M. (2017). Introduciendo las funciones en primaria. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 641-648). Madrid, España: FES.
- National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

- Parra F. y Keila N. (2014). El docente y el uso de la mediación en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Revista de Investigación*, 38(83), 155-180.
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera; P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457- 466). Gijón, España: SEIEM.
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2019). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Journal Mathematics Education Research Journal*. DOI 10.1007/s13394-019-00300-2.
- Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En A. Berciano; C. Fernández; T. Fernández; J. L. González; P. Hernández; A. Jiménez; J. A. Macías; F. J. Ruiz; M. T. Sánchez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga, España: Universidad de Málaga.
- Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México, DF: Trillas.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J. y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, XXII(2), 55-81.
- Ponte, J. P., Quaresma, M. y Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teacher's professional practice. *Didacticae*, 1, 45-59.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Berlín, Alemania: Springer.

- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Radford, L. y Peirce, C. S. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter 1*, pp. 2-21).
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: una empresa docente.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L. y Castro, E. (1994). *Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico*. Documento no publicado (Informe). Granada, España: Universidad de Granada.
- Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*, 9(4), 273-293.
- Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. En A. P. Gallego (Ed.), *Memorias del 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 760-766). Barranquilla, Colombia: Universidad Distrital.
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por estudiantes de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.
- Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 491-508.
- Sarduy, A. (2008). Bases conceptuales de la mediación y su importancia actual en la práctica pedagógica. *Summa Psicológica UST*, 5(2), 87-96.

- Strachota, S. (2015). Conceptualizing generalization. *IMVI Open Mathematical Education Notes*, 6, 41-55.
- Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 570-614.
- Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 377-384). Praga, República Checa: PME.
- Warren, E. y Cooper, T. J. (2005). Introducing functional thinking in year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6(2), 150-162.
- Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students functional thinking. *PNA*, 7(2), 75-84.

Anexo A. Cuestionario de los estudiantes

A continuación, se presenta el enlace que dirige a los cuestionarios escaneados de cada uno de los estudiantes.

https://www.dropbox.com/s/080sk1acm4kf41v/CUESTIONARIOS%20ANONIMIZADOS_%5BTFM%5D.pdf?dl=0

Anexo B. Transcripción de entrevistas

El siguiente enlace dirige a la transcripción de las entrevistas de cada estudiante.

https://www.dropbox.com/scl/fi/m7lj88rnswagvyzp6hth1/EntrevistasSegundo_TFM_NarvaezR.docx?dl=0&rlkey=xcnq9ukllo6k0eo7tiwvfils8