APUNTES DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Úrsula Torres Parejo

ÍNDICE

TEMA 1. PROGRAMACIÓN LINEAL

1.1. Introducción a los Métodos de Optimización
1.2. Resolución Gráfica
1.3. Algoritmo del Simplex
1.4. Dualidad
1.5. Análisis de Sensibilidad

1.1. INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

La optimización es la búsqueda de la mejor manera de realizar una actividad.

Chorman Arnott la define como "**una aplicación del método científico a problemas relacionados con el control de sistemas con el fin de que se produzcan las soluciones que mejor sirvan a los objetivos del sistema**".

CONTRIBUCIONES DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA.

1. **Modelizar situaciones de la vida real matemáticamente**, con lo que se logra una atracción de los elementos esenciales, para que pueda buscarse una solución que concuerde con los objetivos del que toma las decisiones.
2. Análisis de la estructura de tales **soluciones** y desarrollo de **procedimientos sistemáticos** para obtenerlas.
3. Desarrollo de una solución, incluyendo la teoría matemática, si es necesario, que lleve al **valor óptimo**.

Evolución histórica.

Las raíces se remontan a 1759, cuando el economista Quasnay empezó a utilizar modelos primitivos de lo que hoy se conoce como **Programación Matemática.**

La aplicación se lleva a cabo a partir de la II guerra mundial. En EEUU se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad, que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la Programación Lineal.

La **Programación Lineal** es una herramienta para resolver problemas de optimización. Esta técnica está diseñada para optimizar problemas de asignación de recursos limitados entre actividades competitivas.

Modelos de programación

1. La **Programación Lineal** debe su nombre a que trata de resolver problemas que se plantean en términos matemáticos con funciones lineales.
2. Si alguna de las funciones planteadas para resolver el problema no fuera lineal, se utiliza lo que se conoce como **Programación No Lineal.**
3. La **Programación Entera** es un caso particular de la Programación Lineal, en el que las variables están condicionadas a tomar valores enteros.
4. Existen otros tipos como **Programación Cuadrática, Programación Booleana,** etc.

ETAPAS DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN

1. Formulación del problema
2. Construcción del modelo
3. Obtención de soluciones
   a. Solución determinística
   b. Modelos de riesgo
   c. Bajo incertidumbre
4. Validación del modelo
5. Puesta en práctica

Modelización de un problema de programación lineal.

Ejemplo.
Una compañía produce pinturas, tanto para interiores como para exteriores, a partir de dos materias primas M1 y M2. Una encuesta de mercado restringe la demanda máxima diaria de pinturas para interiores a 2 toneladas. Además, la demanda diaria de pinturas para interiores no puede exceder a la de pintura para exteriores en más de una tonelada. La compañía quiere determinar la mezcla óptima de productos de pintura para exteriores e interiores que maximice la utilidad diaria total, teniendo en cuenta los siguientes datos:

	Pintura Exterior	Pintura Interior	Disponibilidad Máx. Diaria
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Utilidad por tonelada	5	4	

Elementos que intervienen en el problema:

1. Variables de decisión
2. Función objetivo
3. Restricciones

Paso 1.- Definir las variables de decisión que representan completamente las variables a tomar:

Variables de decisión
- *x: toneladas diarias producidas de pintura exterior*
- *y: toneladas diarias producidas de pintura interior*

Paso 2.- Establecer la función objetivo:

Objetivo: Maximizar la utilidad diaria total

Función objetivo: $Z = 5x + 4y$

Paso 3.- Establecer las restricciones

1. *Disponibilidad de M1:* $6x + 4y \leq 24$
2. *Disponibilidad de M2:* $x + 2y \leq 6$
3. *Demanda máxima de M2:* $y \leq 2$
4. *Demanda máxima diaria:* $y \leq x + 1$
5. *No negatividad:* $x, y \geq 0$

Programa Lineal:

Max $Z = 5x + 4y$

s.a.
$$\begin{aligned} 6x + 4y &\leq 24 \\ x + 2y &\leq 6 \\ y &\leq 2 \\ y - x &\leq 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Expresión matemática de un problema de programación lineal (P.L.).

Un problema de P.L. es un programa matemático en el cual la función objetivo Z y las restricciones son lineales en las variables de decisión. También se tiene una restricción de signo, es decir, la variables de la decisión son **no negativas.**

Un problema de P.L. corresponde a la siguiente expresión:

Maximizar:

$$\boxed{\begin{array}{ll} Max & Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ s.a. & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & \qquad\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{array}}$$

Expresión matemática de un problema de programación lineal (P.L.).

Un problema de P.L. es un programa matemático en el cual la función objetivo Z y las restricciones son lineales en las variables de decisión. También se tiene una restricción de signo, es decir, la variables de la decisión son **no negativas.**

Un problema de P.L. corresponde a la siguiente expresión:

Minimizar:

$$\boxed{\begin{array}{ll} Min & Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ s.a. & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ & \qquad\qquad\qquad\quad x_i \geq 0 \end{array}}$$

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\
&s.a. \quad a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
&\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
&\qquad\qquad x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\
&s.a. \quad a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
&\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
&\qquad\qquad x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

- **Z** es la función objetivo y $\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_n}$ las variables de decisión
- Los coeficientes $\mathbf{c_j}$ reciben el nombre de costos, representan los coeficientes de contribución, el incremento que resulta en el objetivo por cada incremento unitario en las variables de decisión.
- Los coeficientes $\mathbf{a_{ij}}$ representan las tasas de materia prima i en la producción de la variable j.
- Los $\mathbf{b_i}$ son los recursos o disponibilidades de la cantidad del recurso i-ésimo que consume cada unidad de la actividad j.

Forma matricial canónica:

Vectores:

$$C = (c_1 \ldots c_n) \qquad b = (b_1 \ldots b_m)$$

$$X = (x_{1\ldots} x_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Maximizar:

$$\boxed{\begin{array}{rl} \mathit{Max} & \mathrm{Z{=}CX}^T \\ \text{s.a.} & \mathrm{AX}^T \le b^T \\ & \mathrm{x}_i \ge 0 \end{array}}$$

Minimizar:

$$\boxed{\begin{array}{rl} \mathit{Min} & \mathrm{Z{=}CX}^T \\ \text{s.a.} & \mathrm{AX}^T \ge b^T \\ & \mathrm{x}_i \ge 0 \end{array}}$$

Forma estándar:

$$
\begin{array}{ll}
Max & Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
s.a. & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
 & \qquad\qquad\qquad x_i \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Min & Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
s.a. & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
 & \qquad\qquad\qquad x_i \geq 0
\end{array}
$$

¿Cómo pasar de forma canónica a forma estándar?

1. El objetivo no varía
2. Se añaden variables de **holgura**, que miden la diferencia entre lo que nos gastamos y lo que disponemos.

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - s_1 = b_1$$

Forma estándar:

$$\begin{array}{ll} Max & Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ s.a. & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ & \qquad\qquad x_i \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min & Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ s.a. & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ & \qquad\qquad x_i \geq 0 \end{array}$$

¿Cómo pasar de forma canónica a forma estándar?

1. El objetivo no varía
2. Se añaden variables de **holgura**, que miden la diferencia entre lo que nos gastamos y lo que disponemos.

$$AX^T \leq b^T \Rightarrow A\bar{X}^T = b^T$$

$$donde \quad \bar{X} = (x_1 \ldots x_n, s_1 \ldots s_m)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} &Max \quad Z=3x_1+2x_2+3x_3 \\ &\text{s.a.} \quad x_1+x_2+4x_3=10 \\ &\qquad 2x_1+x_2+3x_3\geq 9 \\ &\qquad x_1+x_2+x_3\leq 20 \\ &\qquad\qquad x_i\geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &Max \quad Z=3x_1+2x_2+3x_3 \\ &\text{s.a.} \quad x_1+x_2+4x_3=10 \\ &\qquad 2x_1+x_2+3x_3-s_1=9 \\ &\qquad x_1+x_2+x_3+s_2=20 \\ &\qquad\qquad x_i\geq 0 \end{aligned}$$

¿Y qué ocurre si una variable no está restringida?

La expreso como: $x_j = u_j - v_j$

donde: $u_j > v_j$

$u_j, v_j \geq 0$

Algunas aplicaciones de la programación lineal

1. **Problemas de dieta.** Se dispone de n tipos de productos alimenticios, que contienen diversas cantidades de m nutrientes. Se desea determinar la cantidad de cada alimento que debe constituir la dieta diaria, asegurando el aporte mínimo de cada nutriente, con un coste mínimo.
2. **Problemas de producción: maximizar el ingreso.** Se producen m bienes usando n factores productivos, disponibles en cantidades limitadas. Conocidos los beneficios unitarios de venta de los bienes, hay que establecer qué cantidad de cada tipo de bien debe producirse para optimizar el beneficio de venta total.
3. **Problemas de producción: minimizar el coste.** Se debe determinar la cantidad de factores que debe utilizarse para producir los bienes al menor coste posible.
4. **Problema de mezcla.** Son problemas en los que hay que mezclar unos ingredientes básicos para satisfacer y fabricar distintos productos.

SOLUCIONES DE UN PROBLEMA DE P.L.

- La **<u>Región Factible</u>** de un P.L. es la región formada por todas las soluciones factibles del problema. Si no existe ninguna solución factible, la región factible estará vacía, esto es lo que se conoce con el nombre de **<u>Infactibilidad</u>.**
- Una **<u>Solución Factible</u>** es la que satisface todas las restricciones del problema.
- La **<u>Solución Óptima</u>** es la solución factible de mejor valor para la función objetivo.
- Una **<u>Solución Básica</u>** es la obtenida con el siguiente procedimiento:
  1. Tomamos una base: Escogemos las variables a resolver, una por cada ecuación. Estas variables se denominan variables básicas
  2. El resto de variables (no básicas) se toman como parámetros y se les asigna el valor 0, con lo que tenemos un sistema compatible determinado, lo que nos da una solución única para las variables básicas, la solución básica (una por cada base).
  3. Si la solución básica tiene todas sus componentes no negativas, será **básica factible**, en caso contrario, será **básica no factible.**

Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_2 &\le 3 \\ x_i &\ge 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 &= 6 \\ x_2 + s_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b=}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Si\ \text{B=}\begin{pmatrix} 1\ 1 \\ 0\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_B = B^{-1} \cdot b^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = (X_B : (x_1 = 3, x_2 = 3), X_{NB} : (s_1 = 0, s_2 = 0))$$

Esta solución es **básica** factible y no es única, ya que B puede formarse por otras columnas, por ejemplo:

$$\Rightarrow Si\ \text{B=}\begin{pmatrix} 1\ 0 \\ 0\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_B = B^{-1} \cdot b^t = \begin{pmatrix} 1\ 0 \\ 0\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = (X_B : (x_1 = 6, s_2 = 3), X_{NB} : (x_2 = 0, s_1 = 0))$$

$$\Rightarrow Si \ \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_B = B^{-1} \cdot b^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = (X_B : (x_2 = 6, s_2 = -3), X_{NB} : (x_1 = 0, s_1 = 0))$$

Esta solución sería **básica no factible** ya que tiene una variable básica que toma un valor menor que 0.

TEOREMAS

Teorema Fundamental de la Programación Lineal

1. Si existe solución factible $\rightarrow$ existe solución básica factible
2. Si existe solución factible óptima $\rightarrow$ existe solución básica factible óptima

Teorema

Sea un problema de P.L. factible $\rightarrow$ la región factible es un conjunto convexo.

Teorema de equivalencia

Sea K un conjunto convexo y x un punto extremo de $K \rightarrow x$ es una solución básica factible del P.L.

Teorema del valor óptimo

Sea un P.L. factible y acotado, entonces el valor óptimo de la función objetivo se alcanza en un punto extremo de K.

Colorario 1.

Si el conjunto convexo K es distinto del vacío $\rightarrow$ tiene al menos un punto extremo

Colorario 2.

Si hay una solución óptima finita a un problema de P.L. $\rightarrow$ existe una solución óptima finita que es un punto extremo del conjunto de soluciones.

Colorario 3.

El conjunto K tiene un número finito de puntos extremos.

1.2. RESOLUCIÓN GRÁFICA

Pasos para resolver gráficamente un problema de P.L.:

1. Se determina la región factible.
2. Se determinan los puntos extremos de la región factible.
3. Se representa gráficamente la función objetivo.
4. Se evalúa la función objetivo en los puntos extremos y se determina cuál ofrece el valor óptimo, que será la solución del P.L.

Ejemplo.

$$\begin{aligned} Max\ \ & Z=2x_1+x_2 \\ \text{s.a.}\ \ & 5x_1+2x_2\le 10 \\ & 3x_1+5x_2\le 15 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow$$

$$5x_1+2x_2=10\rightarrow\begin{cases} x_1=0, x_2=5 \\ x_2=0, x_1=2 \end{cases}$$

$$3x_1+5x_2=15\rightarrow\begin{cases} x_1=0, x_2=3 \\ x_2=0, x_1=5 \end{cases}$$

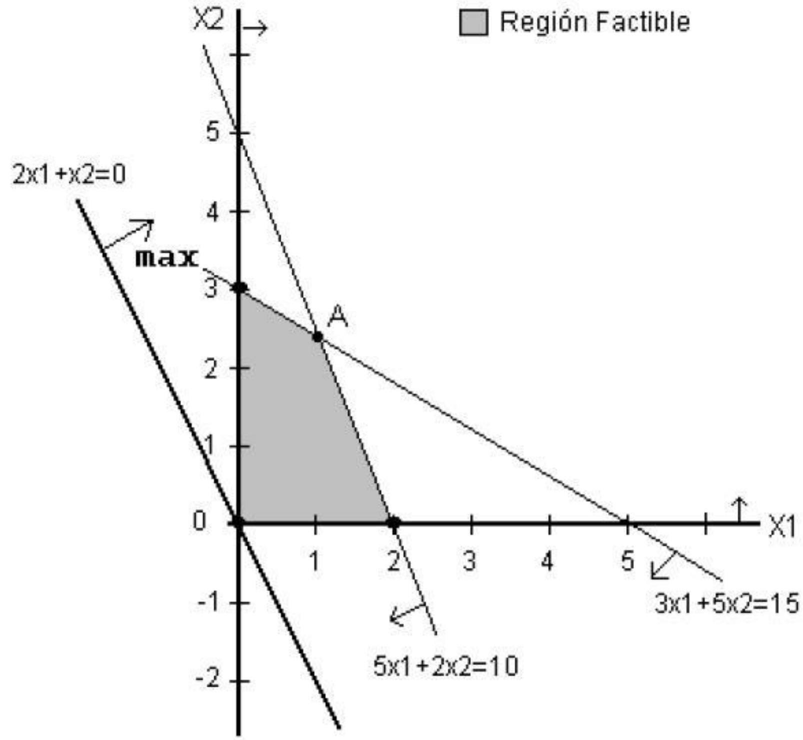
Puntos extremos:

$$A=\left(\frac{20}{19},\frac{45}{19}\right)$$

$$B=(0,3)$$

$$C=(0,0)$$

$$D=(2,0)$$



Como la región factible es un conjunto convexo, no vacío y acotado, la solución óptima se va a encontrar en un punto extremo:

$$Max \quad Z = 2x_1 + x_2$$

$$A = \left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right) \qquad Z(A) = 4.47$$

$$B = (0,3) \qquad Z(B) = 3$$

$$C = (0,0) \qquad \Longrightarrow \qquad Z(C) = 0$$

$$D = (2,0) \qquad Z(D) = 4$$

Como el problema es de maximizar, tenemos que buscar el valor que hace máxima la función objetivo, en este caso es el punto extremo A, por lo que la solución al P.L. es:

$$\boxed{x_1 = \frac{20}{19}, \; x_2 = \frac{45}{19}}$$

Consideraciones:

1. Si la región factible es el vacío, el P.L. no tiene solución factible.
2. Si la región factible es acotada, entonces siempre hay solución finita, pero puede ser única o múltiple.
3. Si la región factible es no acotada, entonces la solución puede ser finita o ilimitada.

1.3. ALGORITMO DEL SIMPLEX

Pasos básicos del algoritmo del Simplex:

1. Se parte de una solución básica factible (un punto extremo de la región factible).
2. Se comprueba si esa solución es óptima. Si es así, se termina. En caso contrario ir al paso 3.
3. Se halla una nueva solución básica adyacente a la anterior que mejore el valor de la función objetivo. Ir al paso 2.

Algoritmo del simplex detallado (ejemplo)

1. Se convierte el P.L. a formato estándar (las restricciones con signo igual y todas las variables no negativas)

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 2x + y \\ &\text{s.a.}\ \ 5x + 2y \le 10 \\ &\qquad 3x + 5y \le 15 \\ &\qquad\quad x, y \ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &Max\ Z = 2x + y + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 \\ &\text{s.a.}\ \ 5x + 2y + s_1 = 10 \\ &\qquad 3x + 5y + s_2 = 15 \\ &\qquad\quad x, y, s_i \ge 0 \end{aligned}$$

2. Se construye la siguiente tabla:

	x	y	s_1	s_2	b
s_1	5	2	1	0	10
s_2	3	5	0	1	15
c_i	2	1	0	0	0

3. Se localiza la matriz identidad que nos indica cuáles son las variables básicas y sus valores. Bajo las variables básicas los costes reducidos (coeficientes de la última fila) deben ser 0. **Solución básica: X=(0,0,10,15)**
4. Se comprueba si la solución obtenida es óptima:
   - Si el problema es de maximizar → la solución será óptima si todos los costes reducidos son no positivos.
   - Si el problema es de minimizar → la solución será óptima si todos los costes reducidos son no negativos.
5. Se halla una nueva solución básica adyacente a la actual que mejore el valor de la función objetivo.

Regla de la variable de entrada:

- Si el problema es de maximizar → entra en la base la que tenga el mayor coste reducido positivo
- Si el problema es de minimizar → entra en la base la que tenga el menor coste reducido negativo

Regla de la variable de salida:

- Sale de la base la variable que tenga el menor valor en el cociente b_i / a_{ik} para los $a_{ik}>0$. Si no hay ningún $a_{ik}>0$, el problema es no acotado y hemos terminado.

	x	y	s_1	s_2	b
s_1	5	2	1	0	10
s_2	3	5	0	1	15
c_i	2	1	0	0	0

↑

Entra x (mayor coste reducido positivo)

$$\boxed{b_1 / a_{11} = 10/5 = 2}$$

$$b_2 / a_{21} = 15/3 = 5$$

	x	y	s_1	s_2	b
s_1	5	2	1	0	10
s_2	3	5	0	1	15
c_i	2	1	0	0	0

Sale s_1 ⟶

6. Se realizan transformaciones en la tabla para conseguir una nueva matriz unidad tomando a_{ik} como pivote hasta lograr que la columna k tenga el valor 1 en el elemento pivote y 0 en los demás. De esta forma se obtiene una solución básica factible adyacente a la anterior.

	x	**y**	**s_1**	**s_2**	**b**
s_1	5	2	1	0	10
s_2	3	5	0	1	15
c_i	2	1	0	0	0

$\longrightarrow$

$\uparrow$

$\Longrightarrow$

	x	**y**	**s_1**	**s_2**	**b**
x	**1**			0	
s_2	0			1	
	0			0	

Para hacer un 1 aquí se divide la primera fila entre 5

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	2/5	1/5	0	2
s_2	**0**			1	
	0			0	

Para hacer un 0 ahí se multiplica la primera fila por -3 y se le resta a la segunda fila de la tabla original:

3	5	0	1	15
-3	-6/5	-3/5	0	-6
0	19/5	-3/5	1	9

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	2/5	1/5	0	2
s_2	0	19/5	-3/5	1	9
	0			0	

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	2/5	1/5	0	2
s_2	0	19/5	-3/5	1	9
	0			0	

Para hacer un 0 ahí se multiplica la primera fila por -2 y se le resta a la tercera fila de la tabla original:

2	1	0	0	0
-2	-4/5	-2/5	0	-4
0	1/5	-2/5	0	-4

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	2/5	1/5	0	2
s_2	0	19/5	-3/5	1	9
	0	1/5	-2/5	0	-4

Solución básica : X=(2,0,0,9) → No es óptima

↑

Volvemos al paso 4.

7. Repetimos hasta que no haya costes reducidos positivos para problema de maximizar (o negativos para problema de minimizar).

	x	**y**	**s_1**	**s_2**	**b**
x	1	0	5/19	-2/19	20/19
y	0	1	-3/19	5/19	45/19
	0	0	-7/19	-1/19	-85/19

Solución básica : X=(20/19,45/19,0,0) → Óptima

-Z*

8. Calculamos el valor de la función objetivo: $Z\left(\frac{20}{19},\frac{45}{19}\right)=\frac{85}{19}=Z^*$

Casos especiales en la aplicación del método simplex

1. **Degeneración:** Ocurre cuando algunas de las variables básicas alcanzan el valor 0. La solución degenerada no presenta problemas en la resolución. En el método Simplex se da cuando en la regla de la variable de salida el menor valor para el cociente b_i / a_{ik} no es único.
2. **Solución Múltiple:** Ocurre cuando distintas soluciones dan el mismo valor óptimo para la función objetivo. Si en la tabla del Simplex óptima alguno de los costes reducidos de la variables no básicas es nulo, entonces existe solución múltiple. Al tener al menos 2 soluciones básicas óptimas, las combinaciones convexas de las mismas también son soluciones óptimas (suele ocurrir que la función objetivo es paralela a algunas de las restricciones).
3. **Solución Ilimitada:** Ocurre cuando la región factible no está acotada. Si una variable debe entrar en la base pero en la columna de esa variable todos los a_{ik} son no positivos y no hay candidatos a salir, entonces la solución es ilimitada.
4. **Infactibilidad:** Ocurre cuando no se puede detectar una solución básica factible inicial.

Variables artificiales

Se utilizan cuando existen restricciones con los signos = o ≥.

Ejemplo: $\min\ Z = 3x + 5y$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad 8x + y &\geq 20 \\ 2x + 15y &\geq 18 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

	x	y	s_1	s_2	b
s_1	8	1	-1	0	20
s_2	2	15	0	-1	18
	3	5	0	0	0

Se corresponde con la solución X:(0,0,-20,-18), que no es factible ya que las variables de holgura son negativas.

El **Método de las 2 Fases** consiste en tomar variables artificiales en una primera fase y eliminarlas en la segunda:

1.

	x	y	s_1	s_2	A_1	A_2	b
A_1	8	1	-1	0	1	0	20
A_2	2	15	0	-1	0	1	18

2. Conforme las variables artificiales salen de la base se elimina la columna. Si una tabla es óptima y hay una variable artificial → no existe una solución factible (región factible ϕ).

1.4. DUALIDAD

Por cada P.L. que se resuelve, existe otro P.L. que se resuelve simultáneamente, el cual se llama **Problema Dual** y satisface las siguientes propiedades:

1. Se puede usar para resolver el P.L. original (**Problema Primal**).
2. Sus variables proporcionan información muy útil acerca de la solución óptima del P.L. original.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DUAL

1. Si el objetivo en el Primal es maximizar → en el Dual será minimizar (y viceversa).
2. Las restricciones que tengan signo ≤ en el Primal → en el Dual tendrán signo ≥ (y viceversa).
3. Las disponibilidades en el Primal son los coeficientes o costos de la función objetivo en el Dual.
4. Cada variable en el Primal da lugar a una restricción en el Dual.
5. Todas las variables correspondientes al Primal y Dual son no negativas.
6. La matriz A de tasas de uso en el Primal pasa a ser la traspuesta en el Dual.

Ejemplo:

Primal: $\Rightarrow$ Dual:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z=3x_1+x_2-x_3+2x_4 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1+x_2+2x_4 \le 18 \\
& 3x_1+4x_2+2x_3+x_4 \le 24 \\
& x_i \ge 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
Min \quad & W=18y_1+24y_2 \\
\text{s.a.} \quad & 2y_1+3y_2 \ge 3 \\
& y_1+4y_2 \ge 1 \\
& 2y_2 \ge -1 \\
& 2y_1+y_2 \ge 2 \\
& y_i \ge 0
\end{aligned}
$$

RELACIONES PRIMAL-DUAL

1. El Dual del Dual es el Primal.
2. **Dualidad Débil**: El valor de la función objetivo de un problema de maximizar, es siempre menor o igual que el valor de la función objetivo del problema dual de minimizar, si ambos son factibles.

   Consecuencias:

   a. El valor de la función objetivo para cualquier solución factible en la forma de maximizar del Primal, es una cota inferior del valor mínimo del objetivo del Dual.
   b. Si ambos problemas son factibles, ambos van a tener soluciones óptimas.
   c. Si el Primal en un problema de maximizar es factible, pero no acotado → el Dual es infactible.

Teorema de la dualidad principal.

Si existen soluciones factibles para ambos problemas tales que dan igual valor para sus respectivos objetivos → dichas soluciones son la óptima.

Colorario. En el punto óptimo coinciden los valores de la función objetivo de ambos problemas ($Z^*=W^*$)

Consecuencias:

1. Si el Primal es factible → El Dual es factible
2. Si el Primal es infactible → El Dual es infactible o no acotado
3. Si el Dual es infactible → El Primal es infactible o no acotado

Solución del problema dual en la resolución del primal.

Si se emplea el algoritmo del Simplex, la solución del Dual coincide con el valor absoluto de los costes reducidos en la tabla óptima del Primal.

Además, en el óptimo se cumple:

1. Si $x_i > 0 \Rightarrow T_i = 0$
2. Si $T_i > 0 \Rightarrow x_i = 0$
3. Si $u_j > 0 \Rightarrow S_j = 0$
4. Si $S_j > 0 \Rightarrow u_j = 0$

x_i: variables del Primal
T_i: holguras del Dual
u_j: variables del Dual
S_j: holguras del Primal

Ejemplo.

Supongamos que la siguiente es la tabla óptima de un problema primal:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_1	13	0	7	1	6	46
x_2	2	1	1	0	1	6
	-20	0	-1	0	-2	-12

La solución de este problema es X: (0, 6, 0, 46, 0), Z* = 12.

Entonces, la solución del problema dual es: U: (0, 2, 20, 0, 1), W*=12.

Interpretación económica de la dualidad. Precios sombra.

Los **precios sombra** son los costes reducidos de las variables de holgura no básicas en la tabla óptima, tomados en valor absoluto.

Se interpretan como sigue:

1. Si el término independiente de una restricción representa la cantidad disponible de un recurso productivo, el valor de la holgura de la restricción correspondiente representa la cantidad de ese recurso que sobra.
2. Si la holgura no es básica (entonces vale 0), es porque el recurso se agota.
3. Puede ocurrir que esa cantidad disponible se pueda modificar según nos interese, invirtiendo más en la compra de ese material.
4. La disponibilidad de mayor cantidad de un recurso puede suponer obtener un valor óptimo distinto en la función objetivo (o no).

El precio sombra representa el incremento del valor óptimo de la función objetivo por cada unidad que se incrementa la disponibilidad del recurso correspondiente.

Este incremento es igual a: $\boxed{\Delta Z^* = Z^* + (\text{precio sombra}) \cdot \Delta b_i}$

Ejemplo.

Tenemos la siguiente tabla óptima en un problema de maximizar:

	x	**y**	**s_1**	**s_2**	**b**
x	1	0	5/19	-2/19	20/19
y	0	1	-3/19	5/19	45/19
	0	0	-7/19	-1/19	-85/19

1. **¿Cuál de los recursos interesa más aumentar?** El correspondiente a la holgura s_1, ya que al tener el mayor precio sombra, producirá un mayor incremento en la función objetivo.

Ejemplo.

Tenemos la siguiente tabla óptima en un problema de maximizar:

	x	y	s_1	s_2	b
x	1	0	5/19	-2/19	20/19
y	0	1	-3/19	5/19	45/19
	0	0	-7/19	-1/19	-85/19

1. **¿Cuál de los recursos interesa más aumentar?** El correspondiente a la holgura s_1, ya que al tener el mayor precio sombra, producirá un mayor incremento en la función objetivo.
2. **Si aumentamos este recurso en dos unidades, ¿Cuál será el nuevo valor de la función objetivo?**

$$\Delta Z^* = Z^* + (\text{precio sombra}) \cdot \Delta b_i = 85/19 + (7/19) \cdot 2 = 99/19$$

1.5. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad es un método para investigar el efecto que tiene realizar cambios en los diferentes parámetros de un P.L. sobre la solución óptima del problema.

Los principales cambios pueden producirse en:

1. Los costes de la función objetivo
2. Los recursos o disponibilidades

Restricciones activas e inactivas

- Una restricción está **inactiva** cuando se cumple como desigualdad estricta y, por tanto, tiene holgura positiva. Esto significa, entre otras cosas, que esa holgura es una variable básica en el punto óptimo y que sobra parte del recurso correspondiente.
- Una restricción está **activa** cuando se cumple con signo igual y, por tanto, tiene holgura nula. Esto significa, entre otras cosas, que esa holgura es una variable no básica en el punto óptimo y que el recurso correspondiente se agota.

Cambios en las disponibilidades.

- Si la restricción correspondiente está **activa**, el punto óptimo dejará de serlo en cuanto cambie el valor de la disponibilidad. Sin embargo, esto no supone necesariamente que cambie la base óptima, habrá un intervalo dentro del cual la disponibilidad puede variar conservando la base óptima.
- Si la restricción correspondiente está **inactiva**, habrá un intervalo dentro del cual ni la base óptima ni el punto óptimo se modifican

Cambios en los costes

- Si hay un cambio en algún coste de una **variable básica**, el valor de la función objetivo cambia automáticamente. Habrá un intervalo de movimiento en el cual ni la base óptima ni el punto óptimo se modifican.
- Si el cambio es en el coste de una **variable no básica**, habrá un intervalo en el cual, la base óptima, el punto óptimo y el valor de la función objetivo permanecen invariantes.

Los intervalos de cambio son diferentes para cada problema concreto y habrá que calcularlos estudiando la tabla óptima y la fila de costes reducidos.

TEMA 2. PROGRAMACIÓN NO LINEAL

2.1. Programación No Restringida.

2.2. Programación Con Restricciones:

2.2.1. De Igualdad

2.2.2. De Desigualdad

2. PROGRAMACIÓN NO LINEAL

En el momento en que alguna de las funciones que aparecen en un programa de optimización no es lineal, éste requiere de un estudio matemático más complejo y no pueden establecerse una serie de reglas fijas de resolución.

Hará falta emplear las derivadas de las funciones, sus características, las propiedades de las matrices, etc. Aún así, muchas veces el programa no podrá resolverse de una manera exacta y nos contentaremos con tener una idea de cuáles son las posibles soluciones óptimas.

Elementos a considerar.

Tipos de Matrices.

Matriz definida positiva.- Es la que tiene todos su autovalores positivos.

Matriz semidefinida positiva.- Es la que tiene todos sus autovalores no negativos (positivos o cero).

Matriz definida negativa.- Es la que tiene todos sus autovalores negativos.

Matriz semidefinida negativa.- Es la que tiene todos sus autovalores no positivos (negativos o cero).

Matriz indefinida.- Tiene autovalores negativos y positivos.

Puntos notables de un programa.

Se considera un programa no lineal de la forma:

$$\begin{aligned} &Min \quad f(x_1,\ldots,x_n) \\ &s.a. \quad (x_1,\ldots,x_n) \in S \end{aligned}$$

donde S representa un conjunto factible. Definimos, entonces, los siguientes elementos:

Mínimo Global.

Un punto $x^* = (x^*_1,\ldots,x^*_n)$ se dice que es un **mínimo global** si:

$$\boxed{f(x) \geq f(x^*)}$$

para cualquier $(x_1,\ldots,x_n)$ de S.

Si la desigualdad es estricta, entonces **x*** se dice que es el **único mínimo global.**

Máximo Global.

Un punto $x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$ se dice que es un **máximo global** si:

$$f(x) \leq f(x^*)$$

para cualquier $(x_1, \ldots, x_n)$ de S.

Si la desigualdad es estricta, entonces **x*** se dice que es el **único máximo global.**

Mínimo Local.

Si se verifica que: $f(x) \geq f(x^*)$ para todos los puntos **x** que estén a menos de una cierta distancia de **x*** → se dice que **x*** es un **mínimo local o relativo**.

Si la desigualdad es estrica, entonces **x*** es un **mínimo local estricto.**

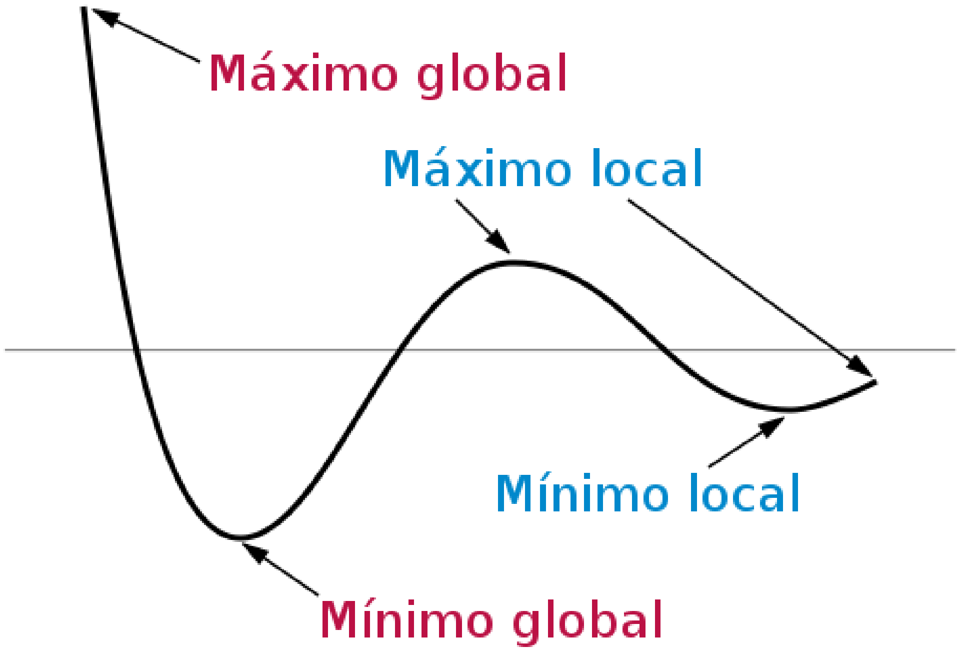
Máximo Local.

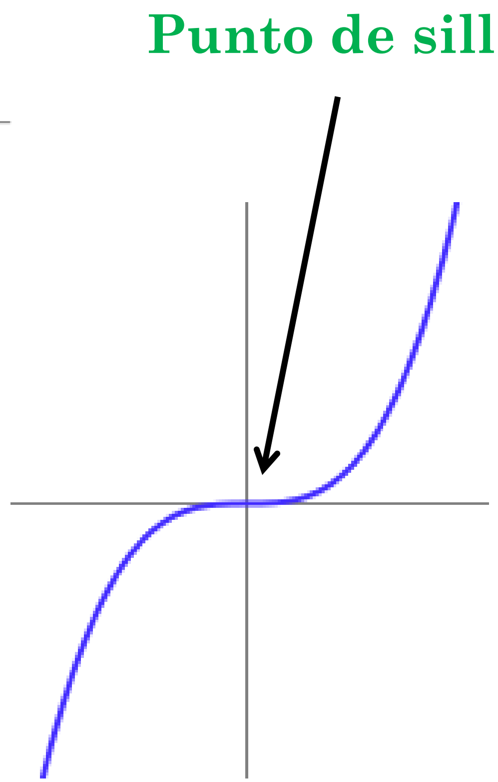
Si se verifica que: $f(x) \leq f(x^*)$ para todos los puntos **x** que estén a menos de una cierta distancia de **x*** → se dice que **x*** es un **máximo local o relativo**.

Si la desigualdad es estrica, entonces **x*** es un **máximo local estricto.**

Punto de Silla.

Se dice que **x*** es un **punto de silla** si puede verse, desde cierta perspectiva, como un mínimo local y desde la otra perspectiva, como un máximo local.


Máximo global
Máximo local
Mínimo local
Mínimo global


Punto de silla

Vector gradiente y matriz hessiana.

Vector Gradiente.

Dada una función $f(x_1,\ldots,x_n)$ se denomina el **vector gradiente** de la función f en el punto $x^0 = (x^0_1,\ldots,x^0_n)$ al vector:

$$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} \right)$$

Matriz Hessiana.

La **matriz Hessiana** de f en el punto $x^0 = (x^0_1,\ldots,x^0_n)$, es la matriz cuadrada de orden n dada por:

$$\nabla^2 f(x^0) = \left(\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

Ejemplo.

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^2$$

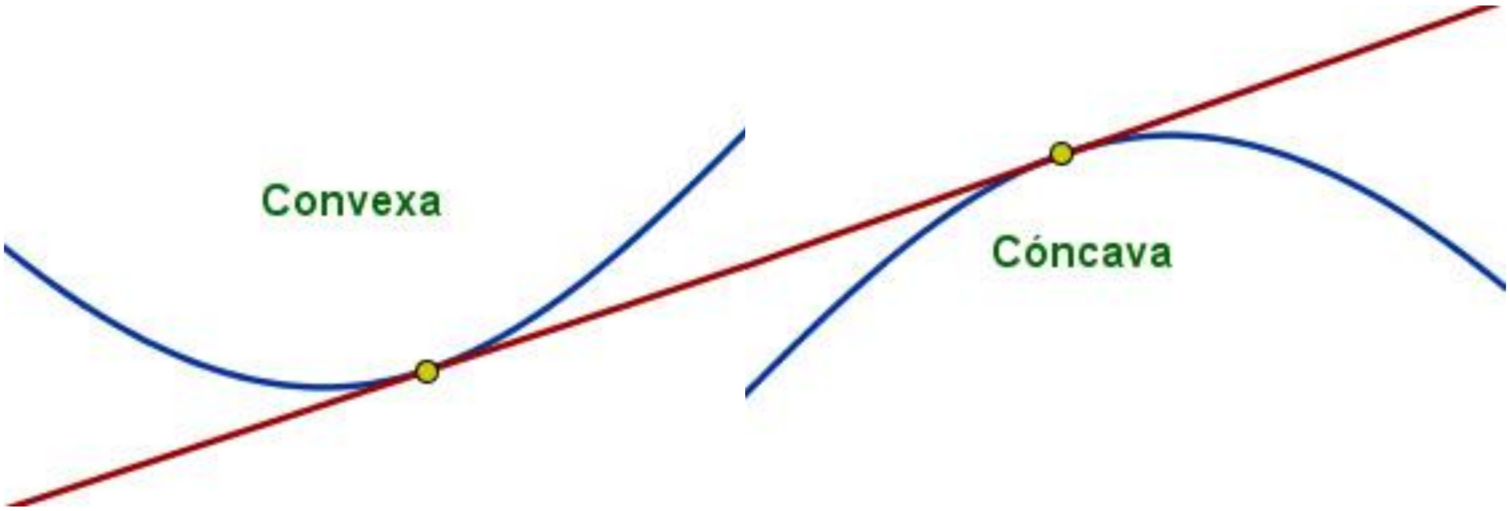
$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (3x^2 + y, x + 2y)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Concavidad y convexidad de funciones

Una función multidimensional f(x), dos veces diferenciable, es **convexa** (resp. **cóncava**) si y sólo si su matriz Hessiana es semidefinida positiva (resp. negativa) para todos los valores de x.

Una función multidimensional f(x), dos veces diferenciable, es **estrictamente convexa** (resp. **estrictamente cóncava**) si y sólo si su matriz Hessiana es definida positiva (resp. negativa) para todos los valores de x.



Concavidad y convexidad de funciones

Una función multidimensional f(x), dos veces diferenciable, es **convexa** (resp. **cóncava**) si y sólo si su matriz Hessiana es semidefinida positiva (resp. negativa) para todos los valores de x.

Una función multidimensional f(x), dos veces diferenciable, es **estrictamente convexa** (resp. **estrictamente cóncava**) si y sólo si su matriz Hessiana es definida positiva (resp. negativa) para todos los valores de x.

Si una función f es convexa (resp. cóncava), un mínimo local (resp. máximo local) de f será necesariamente un mínimo global (resp. máximo global)

Una función estrictamente convexa o estrictamente cóncava, tendrá un único mínimo o máximo global.

2.1. PROGRAMACIÓN NO RESTRINGIDA

La formulación de estos programas es:

$$\begin{aligned} &optimizar \;\; f(x_1,\ldots,x_n) \\ &\qquad\qquad s.a. \;\; x_i \in \Re, \;\; i=1,\ldots,n \end{aligned}$$

Si se cumplen las condiciones:

$$i)\nabla f(x^*) = 0$$

$$ii)\nabla^2 f(x^*) \text{ es definida positiva}$$

Entonces **x*** es un mínimo local de la función f.

Si se cumplen las condiciones:

$$i)\nabla f(x^*) = 0$$

$$ii)\nabla^2 f(x^*) \text{ es definida negativa}$$

Entonces **x*** es un máximo local de la función f.

Casos posibles:

1. Si la función f es convexa en todos los puntos → un mínimo local es un mínimo global de f.
2. Si la función f es estrictamente convexa en todos los puntos → f tiene un único mínimo global.
3. Si la función f es estrictamente convexa en un punto → el punto es un mínimo local de f (no sabemos si es el global).
4. Si la función f es convexa en un punto → el punto es un posible mínimo de f.

Y lo mismo cambiando convexa por cóncava y mínimo por máximo.

Ejemplo.

Se considera el programa: $Min\ \ f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1$

Calculamos el gradiente: $\nabla f(x) = (2x_1 + 1, 2x_2)$

Se plantea el sistema:
(así vemos qué puntos anulan el gradiente, que son los candidatos a puntos extremos).

$$\begin{cases} 2x_1 + 1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1}{2} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Se calcula la matriz Hessiana:
(vemos que es igual para todos los puntos)

$$H = \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \nabla^2 f\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$$

Calculamos los autovalores:

$$|H - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 =$$

$$(2-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$$

Como los dos autovalores son positivos → la matriz Hessiana es definida positiva → es estrictamente convexa en el punto que anula el gradiente (posible extremo) y en todos los demás puntos →**(-1/2, 0) mínimo global** y, por tanto, la **solución del programa**.

Nota: Si no tuviéramos mínimo global, no podríamos garantizar que hemos encontrado la solución del problema.

Ejemplo.

Encontrar los extremos relativos de la función: $f(x,y)=x^4+y^2+3x^2+6y$

Calculamos el gradiente: $\nabla f(x,y)=(4x^3+6x,2y+6)$

De los puntos que anulan el gradiente, calculamos el punto o puntos candidatos a punto extremo: (0,-3)

Calculamos la matriz Hessiana: $H=\nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix} 12x^2+6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Evaluamos la matriz Hessiana en el punto candidato, para ello sustituimos en el punto y calculamos los autovalores como los λ tales que |H - λI|=0. En el punto (0,-3):

$$\nabla^2(0,-3)=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(6-\lambda)(2-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=6, \lambda_2=2$$

La matriz en el punto (0,-3) es definida positiva, por lo tanto la matriz es estrictamente convexa en ese punto, que será un mínimo local. No podemos garantizar que sea global puesto que no sabemos cómo es la función en el resto de puntos.

2.2. PROGRAMACIÓN CON RESTRICCIONES

2.2.1. DE IGUALDAD

La formulación de estos programas es:

$$optimizar \quad f(x_1,\ldots,x_n)$$

$$s.a.$$

$$\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n)=0 \end{cases}$$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Definimos la **función Lagrangiana L**, que combina la función objetivo y las restricciones, ponderadas por unos valores indeterminados λ_i i=1,…,m de la siguiente forma:

$$L(x_1,\ldots,x_n;\lambda_i,\ldots,\lambda_m) = f(x_i,\ldots,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,\ldots,x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1,\ldots,x_n)$$

Las variables $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ se denominan **multiplicadores de Lagrange** y serán elementos importantes para resolver el problema.

Algoritmo:

1. Se construye la función Lagrangiana L.
2. Se imponen las condiciones de Lagrange:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \text{i=1,...,n;} \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \text{i=1,...,m;} \end{array}}$$

3. Se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido y las soluciones son los puntos candidatos a extremos relativos de la función.
4. Si en uno de estos puntos candidatos la matriz Hessiana es definida positiva (negativa), se puede afirmar que en ese punto hay un extremo local, que será global si la matriz es definida positiva (negativa) en todos los demás puntos.

Ejemplo.

Resolver el programa:
$$\begin{aligned} &Max \;\; x+z \\ &s.a. \;\; x^2+y^2+z^2=1 \end{aligned}$$

Tenemos:
$$f(x,y,z)=x+z$$
$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$$

Escribimos la función Lagrangiana: $L(x,y,z;\lambda)=x+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

Imponemos las condiciones de Lagrange:
$$\frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=2\lambda y=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}=1+2\lambda z=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1=0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones dadas por las condiciones de Lagrange y obtenemos dos soluciones:

$$A=\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}},y=0,z=\frac{1}{\sqrt{2}},\lambda=-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$B=\left(x=-\frac{1}{\sqrt{2}},y=0,z=-\frac{1}{\sqrt{2}},\lambda=\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Calculamos la matriz Hessiana de la función Lagrangiana:

$$\nabla^2 L=\nabla^2 f(x,y,z)+\lambda\nabla^2 g(x,y,z)$$

$$=\begin{pmatrix}2\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2\lambda\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\lambda & 0 & 0\\ 0 & 4\lambda & 0\\ 0 & 0 & 4\lambda\end{pmatrix}$$

Calcularíamos los autovalores como los t tales que |H-tI|=0:

$$\begin{vmatrix} 4\lambda - t & 0 & 0 \\ 0 & 4\lambda - t & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda - t \end{vmatrix} = (4\lambda - t)^3 = 0$$

En el punto A, λ es negativo y por tanto t es negativo, como consecuencia en A la matriz es definida negativa y A es un máximo local.

En el punto B, λ es positivo y por tanto t es positivo, como consecuencia en B la matriz es definida positiva y B es un mínimo local.

Si hacemos una interpretación geométrica, vemos que la restricción representa la esfera de centro (0,0,0) y radio 1 y que la función f es lineal, de modo que en cada caso f(x,y,z)=cte. es un plano. Con estos argumentos, deducimos que los puntos A y B son, respectivamente, los valores máximo y mínimo globales de la función f en el conjunto factible.

2.2.2. DE DESIGUALDAD

Una formulación de estos programas es:

$$Min \ \ f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$s.a.$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \end{cases}$$

Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T).

1. Condiciones de gradiente: $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \text{i=1,...,n.}}$

2. Condiciones de factibilidad: $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1,\ldots,x_n) \le 0 \quad \text{i=1,...,m}}$

3. Condiciones de ortogonalidad: $\boxed{\lambda_i g_i(x_1,\ldots,x_n) = 0, \quad \text{i=1,...,m}}$

4. Condición de no negatividad: $\boxed{\lambda_i \ge 0, \quad \text{i=1,...,m}}$

Nota: La condición de no negatividad es para los problemas de minimización, en problemas de maximización se cambia por la de no positividad.

CONDICIONES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (K-K-T).

1. Condiciones de gradiente: $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \text{i=1,...,n.}}$

2. Condiciones de factibilidad: $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1,\ldots,x_n) \leq 0 \quad \text{i=1,...,m}}$

3. Condiciones de ortogonalidad: $\boxed{\lambda_i g_i(x_1,\ldots,x_n) = 0, \quad \text{i=1,...,m}}$

4. Condición de no negatividad: $\boxed{\lambda_i \geq 0, \quad \text{i=1,...,m}}$

Teorema.- Si (x^*,λ^*) satisface las condiciones de K-K-T y todas las funciones implicadas en el programa son convexas (resp. cóncavas) $\rightarrow$ x^* es un mínimo global (resp. máximo global).

Ejemplo.

Resuelva el programa:

$$
\begin{aligned}
&Min \;\; f(x,y) = -2x + y^2 \\
&s.a. \;\; g_1(x,y) = -y + 1 \le 0 \\
&\qquad\;\; g_2(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4 \le 0
\end{aligned}
$$

Construimos la función Lagrangiana:

$$L(x,y;\lambda_1,\lambda_2) = -2x + y^2 + \lambda_1(-y+1) + \lambda_2\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 - 4\right]$$

Imponemos las condiciones de K-K-T:

1. Gradiente: $$\frac{\partial L}{\partial x} = -2 + 2\lambda_2(x-1) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda_1 + 2\lambda_2(y-1) = 0$$

2. Factibilidad: $$1 - y \le 0$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 - 4 \le 0$$

3. Ortogonalidad: $\lambda_1(1-y)=0$

$$\lambda_2\left[(x-1)^2+(y-1)^2-4\right]=0$$

4. No negatividad: $\lambda_1 \geq 0$

$$\lambda_2 \geq 0$$

Resolvemos el sistema formado por las condiciones de igualdad (que son las de gradiente y las de ortogonalidad) y obtenemos las soluciones:

$$A=\left(x=3, y=1, \lambda_1=2, \lambda_2=\frac{1}{2}\right)$$

$$B=\left(x=-1, y=1, \lambda_1=2, \lambda_2=-\frac{1}{2}\right)$$

Ahora comprobamos si esos puntos también cumplen el resto de condiciones (factibilidad y no negatividad) y vemos que el punto B no cumple la condición de no negatividad, por lo tanto el único punto candidato a punto extremo es el punto A.

A continuación estudiamos si todas las funciones implicadas en el programa son convexas. g_1 lo es por ser lineal, para ver si f y g_2 lo son calculamos sus matrices Hessianas:

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}_{g_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La primera es semidefinida positiva y la segunda definida positiva, por lo que la primera es convexa y la segunda estrictamente convexa → el punto (3,1) es el mínimo global.

TEMA 3. PROGRAMACIÓN LINEAL MULTIOBJETIVO

3.1. Método de las Ponderaciones.

3.2. Programación por Metas.

3. Programación lineal multiobjetivo

El programa a resolver es de la forma:

$$\begin{aligned} &Max \quad (f_1(x),\dots, f_k(x)) \\ &s.a. \ \ g_j(x) \le 0, \quad j=1,\dots,m \\ &\qquad x \ge 0 \end{aligned}$$

O equivalentemente:

$$\begin{aligned} &Max \quad C_1X^T,\dots,C_kX^T \\ &s.a. \ \ AX^T \le b^T \\ &\qquad X \ge 0 \end{aligned}$$

Desarrollando esta última expresión:

$$\begin{aligned} &Max \ \ (c_{11}x+\dots+c_{1n}x_n,\dots,c_{k1}x_1+\dots+c_{kn}x_n) \\ &\text{s.a.} \ \ a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \le b_1 \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n \le b_m \\ &\qquad x_1,\dots,x_n \ge 0 \end{aligned}$$

Solución eficiente.

Lo que se busca en un programa multiobjetivo no es una solución óptima en el sentido habitual hasta ahora, es decir, un punto donde cada función objetivo se haga óptima. De hecho, tal punto no existe en la mayoría de los casos. En su lugar, lo que se buscan son soluciones eficientes, entendidas como aquellas que **no pueden ser mejoradas en todas sus componentes a la vez.**

3.1. MÉTODO DE LAS PONDERACIONES.

Este método consiste en reducir el programa a la optimización de una única función, obtenida como la suma ponderada de las k funciones objetivo iniciales:

$$\boxed{\begin{aligned} &Max \;\; \lambda_1 C_1 X^T + \ldots + \lambda_k C_k X^T \\ &\;\; s.a. \;\; AX^T \leq b^T \\ &\qquad\qquad X \geq 0 \end{aligned}}$$

Se denota este programa como P(λ), con $\lambda=(\lambda_1,\ldots, \lambda_n)$, $\Sigma\lambda_i = 1$. De esta forma, el PL multiobjetivo, se reduce a un PL que se puede resolver por el algoritmo del Simplex.

Premisa: Que el conjunto factible esté acotado.

Cuando el conjunto factible está acotado y se calculan soluciones para distintos P(λ) (es decir, estudiando diversos programas, tomando distintos vectores λ, siempre ***con componentes λ_i positivas****), se obtiene el conjunto eficiente de soluciones.*

Ejemplo.

Resolvamos el programa multiobjetivo:

$$\begin{aligned} Max\ \ & (f_1(X) = 2x+3y,\ f_2(X) = 2x-y) \\ s.a.\ \ & x+3y \le 20 \\ & 2x+y \le 16 \\ & x+y \le 9 \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

Planteamos el programa:

$$\begin{aligned} Max\ \ & \lambda_1(2x+3y)+\lambda_2(2x-y) \\ s.a.\ \ & x+3y \le 20 \\ & 2x+y \le 16 \\ & x+y \le 9 \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_i \geq 0$, sustituyendo, el programa se escribe equivalentemente como:

$$\begin{aligned} Max\ \ & 2x + (4\lambda - 1)y \\ s.a.\ \ & x + 3y \leq 20 \\ & 2x + y \leq 16 \\ & x + y \leq 9 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

con $0 \leq \lambda \leq 1$.

En general, el número de parámetros, que coincide inicialmente con el número de funciones objetivo, se reduce de esta forma a uno menos. En el caso particular de dos funciones objetivo, se reduce a un único parámetro.

El conjunto factible está acotado, lo que podemos ver teniendo en cuenta por ejemplo las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{array}\right\}$$

En consecuencia, las soluciones eficientes son las soluciones de los programas P(λ).

A continuación, resolveremos los programas lineales P(λ) simultáneamente, mediante el algoritmo del Simplex. En cada tabla del Simplex que obtengamos, diferenciaremos dos partes:

	Variables	
Base	Matriz de coeficientes	Términos independientes
	Costes reducidos según λ	

1ª Fila de costes reducidos que dependen de λ.
2ª Resto de la tabla que no depende de λ.

Los vértices o soluciones básicas factibles son las mismas en todos los programas P(λ) porque dependen de las restricciones y la única diferencia es que una tabla puede ser o no óptima dependiendo de los valores de λ. Por lo tanto, se trata de obtener distintas tablas y comprobar su optimalidad dependiendo de λ.

	x	y	s_1	s_2	s_3	b
s_1	1	3	1	0	0	20
s_2	2	1	0	1	0	16
s_3	1	1	0	0	1	9
	2	4λ-1	0	0	0	

Esta tabla, que corresponde al vértice (0,0), no es óptima en ningún caso, pues tenemos un coste reducido positivo en programa de maximizar.

Seleccionamos para entrar la variable x, pues su coste reducido es positivo en cualquier caso.

	x	**y**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**b**
s_1	0	5/2	1	-1/2	0	12
x	1	1/2	0	1/2	0	8
s_3	0	1/2	0	-1/2	1	1
	0	4λ-2	0	-1	0	

Esta tabla es óptima siempre y cuando: $4\lambda-2 \leq 0$, es decir $\lambda \leq 1/2$.

Nótese que hay solución múltiple cuando $\lambda = 1/2$.

Como esta tabla es óptima para todos los programas $P(\lambda)$ con $0 \leq \lambda \leq 1/2$, el punto X: (8,0) es una **solución eficiente** del programa multiobjetivo.

¿Qué ocurre cuando $\lambda > 1/2$? Que la variable y debe entrar en la base.

	x	y	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	0	1	2	-5	7
x	1	0	0	1	-1	7
y	0	1	0	-1	2	2
	0	0	0	$4\lambda-3$	$4-8\lambda$	

Esta tabla es óptima siempre y cuando: $\begin{cases} 4\lambda-3\leq 0 \\ 4-8\lambda\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq\lambda\leq\frac{3}{4}$

Y el punto X: (7,2) es una solución eficiente cuando $1/2 \leq \lambda \leq 3/4$.

Cuando $\lambda > 3/4$, debe entrar en la base s_2.

	x	y	s_1	s_2	s_3	b
s_2	0	0	1/2	1	-5/2	7/2
x	1	0	-1/2	0	3/2	7/2
y	0	1	1/2	0	-1/2	11/2
	0	0	$3/2 - 2\lambda$	0	$-7/2+2\lambda$	

Esta tabla es óptima siempre y cuando: $\begin{cases} \frac{3}{2} - 2\lambda \leq 0 \\ -\frac{7}{2} + 2\lambda \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq \lambda \leq \frac{7}{4}$

Pero como $\lambda \leq 1$, ya no hay más casos que contemplar.

El punto X: (7/2,11/2) es una solución eficiente cuando $3/4 \leq \lambda \leq 1$.

En definitiva, las **soluciones básicas para los programas** P(λ) son:

$$\begin{cases} A:(8,0) \ \text{ para } \ 0 \le \lambda \le \dfrac{1}{2} \\ B:(7,2) \ \text{ para } \ \dfrac{1}{2} \le \lambda \le \dfrac{3}{4} \\ C:\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{11}{2}\right) \ \text{ para } \ \dfrac{3}{4} \le \lambda \le 1 \end{cases}$$

A éstas han de añadirse los segmentos con las soluciones múltiples:

$$\begin{cases} \text{Segmento } AB \ \text{ para } \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \text{Segmento } BC \ \text{ para } \lambda = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

3.2. PROGRAMACIÓN POR METAS.

Este método no busca soluciones eficientes, si no aproximaciones a un punto ideal prefijado para el valor conjunto de las funciones objetivo.

Dado el programa lineal multiobjetivo:

$$\begin{aligned} &Opt \quad (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \\ &\quad s.a. \;\; g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ &\qquad\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

En lugar de interesarnos en el valor óptimo de cada función $f_i(x)$, estableceremos un valor ideal o **meta** para cada función: $\mathbf{z_1, \ldots, z_k}$. Lo que se buscará entonces, será el punto o puntos factibles que hagan mínima la suma de distancias de cada función a su meta.

Esto es:

$$Min \quad \left| f_1(x) - z_1 \right| + \ldots + \left| f_k(x) - z_k \right|$$

Nos quedará, de esta forma, el siguiente programa:

$$\begin{array}{l} Opt \quad (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \\ \quad s.a. \;\; g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} Min \quad \sum_{i=1}^{k} \left| f_i(x) - z_i \right| \\ \quad s.a. \;\; g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{array}$$

Un problema que presenta este planteamiento es que la función objetivo no es lineal (y no sirve por tanto el método del Simplex).

En cada caso:

$$\left| f_i(x) - z_i \right| = \begin{cases} f_i(x) - z_i & \text{si } f_i(x) \geq z_i \\ -f_i(x) + z_i & \text{si } f_i(x) < z_i \end{cases}$$

Sin embargo, es posible reducir el problema al caso lineal utilizando dos variables auxiliares para cada función-meta:

$$d_i^+ = \frac{1}{2}\left[\left| f_i(x) - z_i \right| + (f_i(x) - z_i)\right]$$

$$d_i^- = \frac{1}{2}\left[\left| f_i(x) - z_i \right| - (f_i(x) - z_i)\right]$$

Se utilizan estas variables porque verifican las siguientes relaciones:

1. Su suma es la distancia, en valor absoluto, de cada función a su meta:

$$d_i^+ + d_i^- = \left| f_i(x) - z_i \right|$$

2. Su diferencia es la distancia anterior, pero con signo "+" o "-" según $f_i(x)$ sea mayor o menor que la meta z_i:

$$d_i^+ - d_i^- = f_i(x) - z_i$$

Sin embargo, es posible reducir el problema al caso lineal utilizando dos variables auxiliares para cada función-meta:

$$d_i^+ = \frac{1}{2}\left[\left| f_i(x) - z_i \right| + (f_i(x) - z_i)\right]$$

$$d_i^- = \frac{1}{2}\left[\left| f_i(x) - z_i \right| - (f_i(x) - z_i)\right]$$

Se utilizan estas variables porque verifican las siguientes relaciones:

3. Su producto es cero, porque siempre alguna de ellas es nula:

$$d_i^+ \cdot d_i^- = 0$$

4. Ambas son no negativas:

$$d_i^+, d_i^- \geq 0$$

De esta forma, el programa lineal se reformula como sigue (por la 1ª relación):

$$\begin{aligned} Min \quad & \sum_{i=1}^{k} \left| f_i(x) - z_i \right| \\ s.a. \quad & g_j(x) \le 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ & x \ge 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} Min \quad & \sum_{i=1}^{k} \left(d_i^+ + d_i^- \right) \\ s.a. \quad & g_j(x) \le 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ & d_i^+ - d_i^- = f_i(x) - z_i \\ & x, d_i^+, d_i^- \ge 0 \end{aligned}$$

Ejemplo.

Resolver el siguiente programa lineal multiobjetivo por el método de programación por metas:

$$Max \ \ (f_1(X) = 5x + 2y,\ f_2(X) = 2x + 3y)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } \ x + 4y &\leq 32 \\ 3x + 2y &\leq 21 \\ x + y &\leq 10 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Siendo los valores meta: z_1=35, z_2=43/2.

En la formulación del programa por metas, el objetivo sería:

$$Min \ \ Z = \left|5x + 2y - 35\right| + \left|2x + 3y - \frac{43}{2}\right|$$

A continuación, lo reescribimos para quitar el valor absoluto, introduciendo las variables auxiliares d_i^+ y d_i^-:

$$d_1^+ = \frac{1}{2}\left[\left|5x+2y-35\right| + (5x+2y-35)\right]$$

$$d_1^- = \frac{1}{2}\left[\left|5x+2y-35\right| - (5x+2y-35)\right]$$

$$d_2^+ = \frac{1}{2}\left[\left|2x+3y-\frac{43}{2}\right| + \left(2x+3y-\frac{43}{2}\right)\right]$$

$$d_2^- = \frac{1}{2}\left[\left|2x+3y-\frac{43}{2}\right| - \left(2x+3y-\frac{43}{2}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
&Min\ \ D = (d_1^+ + d_1^-) + (d_2^+ + d_2^-)\\
&s.a. \qquad x+4y \le 22\\
&\qquad\qquad 3x+2y \le 21\\
&\qquad\qquad x+y \le 10\\
&\qquad\qquad d_1^+ - d_1^- = 5x+2y-35\\
&\qquad\qquad d_2^+ - d_2^- = 2x+3y-\frac{43}{2}\\
&\qquad\qquad x, y, d_i^+, d_i^- \ge o
\end{aligned}$$

Este es un programa lineal con seis variables y seis restricciones, que se puede resolver por el algoritmo del Simplex. En este caso, la solución es:

$$\boxed{d_1^+ = 0, d_1^- = 6, d_2^+ = 0, d_2^- = 0, x = 4, y = \frac{9}{2}; D^* = 6.}$$

Interpretando el resultado:

La solución óptima con estas metas es**: x = 4, y = 9/2**.

Para esta solución, la distancia de cada función respecto de su meta es:

$$\boxed{\begin{aligned} d_1^+ - d_1^- &= f_1\left(4, \frac{9}{2}\right) - (35) = -6 \Rightarrow f_1\left(4, \frac{9}{2}\right) = 29 \\ d_2^+ - d_2^- &= f_2\left(4, \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{43}{2}\right) = 0 \Rightarrow f_2\left(4, \frac{9}{2}\right) = \frac{43}{2} \end{aligned}}$$

TEMA 4. PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA (PE)

4.1. Relajación de un Problema de PE.

4.2. Algunos problemas de PE.

4.3. El algoritmo de ramificación y acotación.

4.4. El algoritmo de enumeración.

4. PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

El programa a resolver es de la forma:

$$\begin{aligned}
&Opt \quad Z = f(X) \\
&\quad s.a. \; g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
&\qquad\quad x_j \in \Re \quad j = 1, \ldots, n \\
&\qquad\quad x_j \;\; \textit{entera para algún } j
\end{aligned}$$

Un problema de Programación **Entera Pura** es un problema de PL que ha de tener soluciones enteras. Si sólo algunas de las variables han de tomar valores enteros, el problema es de Programción **Entera Mixta.** Si las soluciones sólo pueden tomar los valores 0,1, el problema es de **Programación Entera Booleana o Binaria**.

4.1. RELAJACIÓN DE UN PROBLEMA DE PE.

La relajación se obtiene suprimiendo la condición de que las variables sean enteras.

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. La región factible de un PE está contenida en la región factible de su relajación.
2. Si el programa relajado tiene solución entera óptima, es también solución del PE correspondiente.
3. El valor del objetivo en la solución óptima de un PE (con objetivo de maximización/ minimización) es menor/mayor que la solución óptima de su relajación.

4.2. ALGUNOS PROBLEMAS DE PE.

El problema de la mochila.

El peso máximo que puede entrar en una mochila es de 28 kg. Podemos elegir los objetos siguientes con los pesos y utilidad descrita en la tabla:

Objeto	Peso	Utilidad
1	11	8
2	13	11
3	9	6
4	5	4

Elegir los objetos que se han de meter en la mochila para obtener la máxima utilidad

El planteamiento del problema sería:

$$\begin{aligned} &Max \;\; 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ &s.a. \;\; 11x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 5x_4 \leq 28 \\ &\qquad x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

El mismo planteamiento serviría para el ejemplo siguiente:

Se desean desarrollar 4 productos diferentes, cada uno sujeto a un determinado coste y por el cual obtenemos una determinada ganancia (esta ganancia puede ser en capital, en cantidad de contaminación producida en el proceso de fabricación, en ahorro de materiales, en innovación, etc.) y tenemos un dinero máximo para invertir.

Problema de costo fijo.

Un artesano fabrica tres tipos de productos de piel: monederos, bolsos y zapatos. Para realizar estos productos necesita alquilar maquinaria adecuada. Para hacer monederos debe alquilar una máquina que supone un gasto de 200 euros por semana, para hacer bolsos una máquina por 150 euros por semana y para los zapatos el gasto en maquinaria es de 100 euros semanales. El tiempo y la piel empleada para cada tipo de producto viene dada por la siguiente tabla:

	Costo	Precio de venta	Horas de trabajo	Piel Empleada
Monederos	4	8	2	3
Bolsos	10	20	3	4
Zapatos	8	15	6	5

Dispone de 140 horas de trabajo y 160 metros cuadrados de piel. Se pretende maximizar los beneficios semanales.

Se llaman costes fijos a los costes de alquiler de maquinaria, ya que no dependen del número de productos que se fabrique de cada tipo, si no del hecho de que se fabrique o no el producto.

Llamamos x_i al número de productos de cada clase que se fabrican e y_i al hecho de alquilar la maquinaria correspondiente para la clase i, variable que tomará los valores 0 o 1.

El planteamiento sería:

$$
\begin{aligned}
Max\ \ & (8x_1 + 20x_2 + 15x_3) - (4x_1 + 10x_2 + 8x_3) - (200y_1 + 150y_2 + 100y_3) \\
s.a.\ \ & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 140 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 160 \\
& \mathrm{x}_i \le M_i y_i \\
& x_i \ enteros,\ y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

La tercera restricción obliga a que siempre que x_i sea mayor que 0, y_i sea 1, con M un número positivo suficientemente grande.

4.3. El algoritmo de ramificación y acotación.

Explicaremos este algoritmo con el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= 5x + 6y \\ s.a. \quad 10x + 3y &\leq 52 \\ 2x + 3y &\leq 18 \\ x,\ y &\geq 0 \ y \ enteras \end{aligned}$$

La solución de este problema es: **x = 17/4, y = 19/6 y Z* = 40.25.**

Elegimos una variable con solución no entera, por ejemplo **x = 4.25** y consideramos los dos valores enteros más cercanos a esta solución: **4 y 5**.

Dividimos la región factible en tres partes:

1. $x \leq 4$
2. $4 < x < 5$
3. $x \geq 5$

La segunda parte no se considera puesto que ahí no se encuentra ningún punto con solución entera. Con lo que nos quedan los siguientes subproblemas:

Problema 2

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= 5x + 6y \\ s.a. \quad 10x + 3y &\leq 52 \\ 2x + 3y &\leq 18 \\ x &\leq 4 \\ x,\ y &\geq 0 \ y \ enteras \end{aligned}$$

Problema 3

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= 5x + 6y \\ s.a. \quad 10x + 3y &\leq 52 \\ 2x + 3y &\leq 18 \\ x &\geq 5 \\ x,\ y &\geq 0 \ y \ enteras \end{aligned}$$

La solución del problema original será la mayor de las soluciones de los dos problemas que hemos ramificado.

Elegimos para continuar resolver el problema 2. Del que se obtienen las soluciones: **x = 4, y = 3.3, Z* = 40.**

Como la solución no es entera, volvemos a ramificar con respecto a la variable **y.** Es decir, dividimos el problema 2 en dos subproblemas:

a) **Problema 4** = Problema 2 + restricción $y \leq 3$.
b) **Problema 5** = Problema 2 + restricción $y \geq 4$.

- La solución del problema 4 es: **x = 4, y = 2 y Z* = 38.** Como es entera, la registramos como solución candidata y el valor Z* = 38 como cota inferior de la función objetivo. Decimos que el problema 4 es un problema **terminal.**
- La solución del problema 5 es: **x = 5, y = 4, Z* = 39.** La consideramos solución candidata y registramos su valor como cota inferior del objetivo, ya que mejora la del problema 4.

Continuamos ahora con el problema 3. Su solución es: **x = 5, y = 2/3, Z* = 29.** Como tenemos una solución candidata anterior con mejor valor para el objetivo, declaramos el problema como terminal y no seguimos ramificando.

A continuación seleccionamos la solución óptima, que en este caso, es la correspondiente al problema 5.

ALGORITMO

1. (**Inicialización**).- Resolver el PL relajado. Si su solución es entera, parar y tal solución lo es del PE.
2. (**Ramificación**).- Dividir el problema en dos subproblemas, obtenidos al añadir restricciones que excluyan los valores fraccionarios de la componente elegida.
3. (**Acotación**).- En cada nuevo subproblema, determinar una cota (inferior o superior) para Z.
4. (**Sondeo**).- Determinar los conjuntos terminales y analizar su solución.
5. (**Convergencia**).- Si todos los subproblemas son terminales, parar y buscar el de mejor Z*.

Son conjuntos terminales:

1. Los infactibles
2. Aquellos con solución entera (candidata).
3. Aquellos cuyo valor de Z no supera la cota registrada actualmente.

La solución óptima es la mejor solución candidata.

PROGRAMACIÓN ENTERA MIXTA.

El algoritmo de ramificación y acotación es aplicable en los problemas mixtos, salvo que en este caso no se ramifica en las variables que son reales, si no únicamente en las que son enteras.

PROGRAMACIÓN ENTERA BOOLEANA O BINARIA.

Se utiliza el **algoritmo de Enumeración,** que requiere que se modifique el problema inicial para que los coeficientes de la función objetivo sean positivos y estén ordenados. Para conseguirlo, se ordenan los términos de la función objetivo por el valor absoluto del coeficiente, de menor a mayor. A continuación se realiza el cambio x_i por y_j si su coeficiente es positivo y por $1 - y_j$ si es negativo.

Ejemplo.

$$
\begin{aligned}
Max\quad & Z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \\
s.a.\quad & 2x_1 + x_2 - 3x_4 \le 1 \\
& x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 \ge 2 \\
& x_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Reordenando la función objetivo por el valor absoluto de sus coeficientes:

$$Z = -x_4 + x_2 + x_5 + 2x_3 + 3x_1$$

y tomando: $x_4 = 1 - y_1,\quad x_2 = y_2,\quad x_5 = y_3,\quad x_3 = y_4,\quad x_1 = y_5$

se obtiene el problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
Max\quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\
s.a.\quad & 3\mathrm{y}_1 + y_2 + 2y_5 \le 4 \\
& \mathrm{y}_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \ge 3 \\
& \mathrm{y}_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Cuando se va a aplicar el algoritmo de Enumeración se suprime la constante de la función objetivo (-1 en este caso).

4.4. EL ALGORITMO DE ENUMERACIÓN.

REGLAS QUE HAN DE SEGUIRSE:

1. Se realiza una **transformación de la función objetivo** con coeficientes positivos y ordenados de menor a mayor.
2. El problema relajado se define ahora **suprimiendo todas las restricciones** de las variables, excepto las que imponen que sean binarias.

3. En el **nodo de partida se dan los valores más favorables** para las variables (todos los valores 1 si el problema es de maximización y 0 si es de minimización). Se comprueba si estos valores cumplen las restricciones. Si es así, tenemos la solución óptima, en caso contrario, se ramifica.
4. **La ramificación se hace comenzando con la variable $x_1 = 0$, $x_1 = 1$**, siguiendo un orden ascendente de ramificación en los nodos sucesivos y fijando estos valores en los nodos que corresponden a la misma rama.

5. **Se comprueba el valor de la función objetivo** y si es factible se registra como candidata y el problema como terminal. Z* se registra como cota inferior.
6. Cuando analicemos un subproblema cuyo **mejor valor del objetivo sea peor** que la cota inferior registrada, será declarado como terminal.
7. Si el subproblema tratado no es declarado como terminal, lo **ramificamos** con respecto a la siguiente variable no tratada anteriormente.
8. **La solución óptima** es la solución candidata con mejor valor para el objetivo.

Ejemplo.

Resolvamos el problema del ejemplo anterior:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\
s.a. \quad & 3y_1 + y_2 + 2y_5 \le 4 \\
& y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \ge 3 \\
& y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

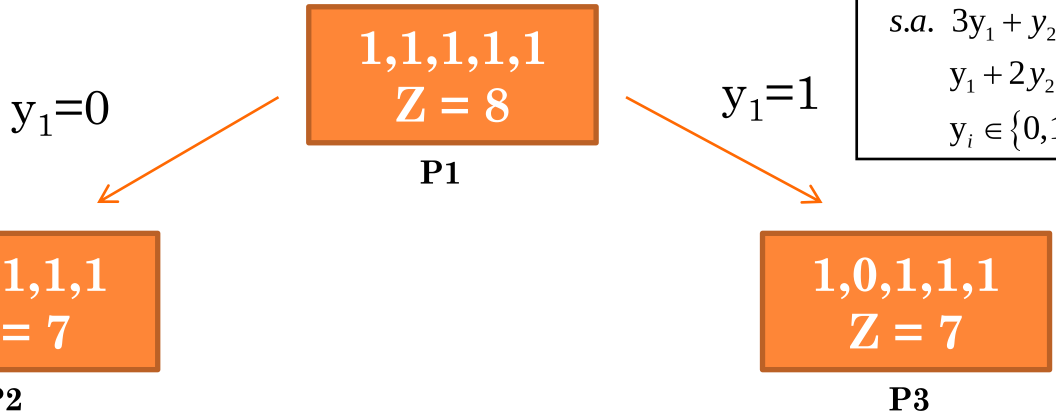
Como es de maximizar, comenzamos dándole a todos los coeficientes de la función objetivo el valor 1 (omitiendo la constante):

Problema 1. Z(1,1,1,1,1) = 8. Esta solución no es factible porque no cumple las restricciones.

El problema se ramifica en los subproblemas 2 y 3:

Subproblema 2. Z(0,1,1,1,1) = 7. No factible.
Subproblema 3. Z(1,0,1,1,1) = 7. No factible.

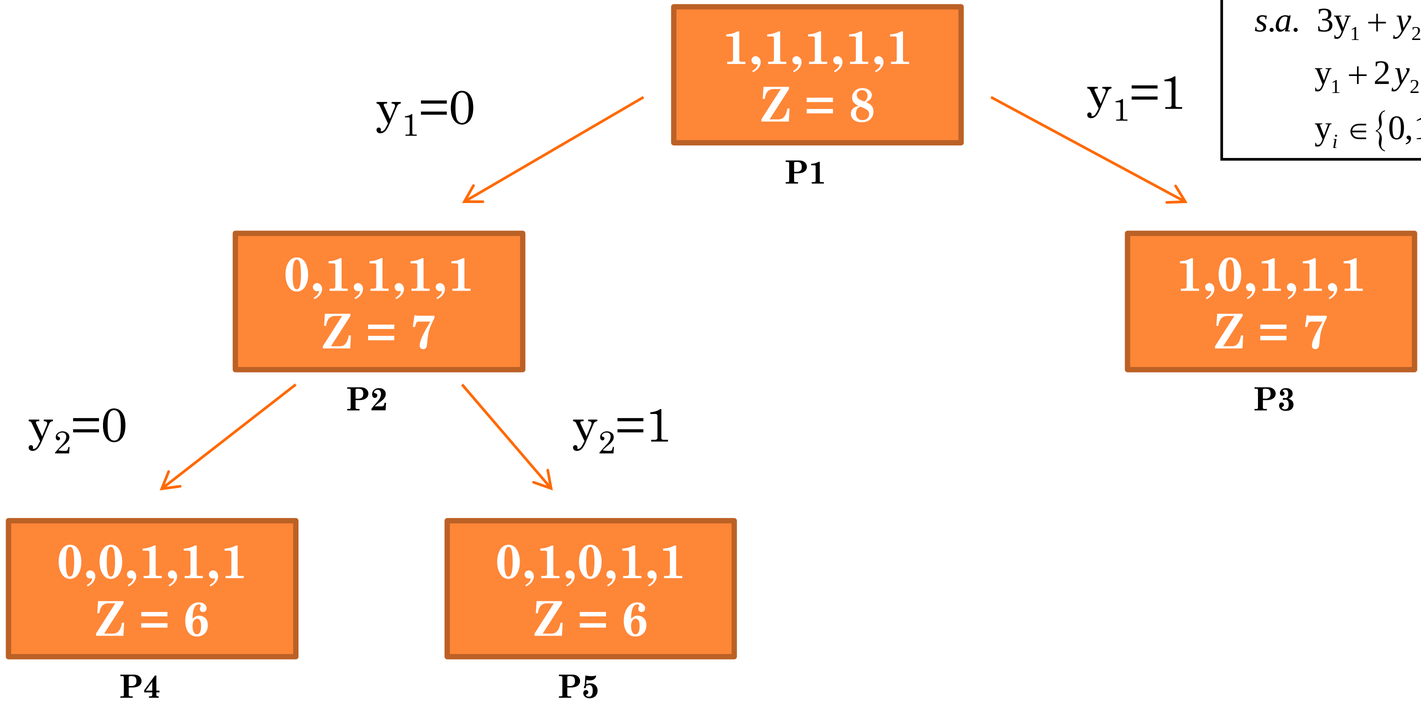
$$\begin{aligned} Max \quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\ s.a. \quad & 3y_1 + y_2 + 2y_5 \le 4 \\ & y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \ge 3 \\ & y_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$



El subproblema 2 se ramifica en los subproblemas 4 y 5:

Subproblema 4: Z(0,0,1,1,1) = 6. No factible.
Subproblema 5: Z(0,1,0,1,1) = 6. No factible.

$$\begin{aligned} Max \quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\ s.a. \quad & 3y_1 + y_2 + 2y_5 \leq 4 \\ & y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \geq 3 \\ & y_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$



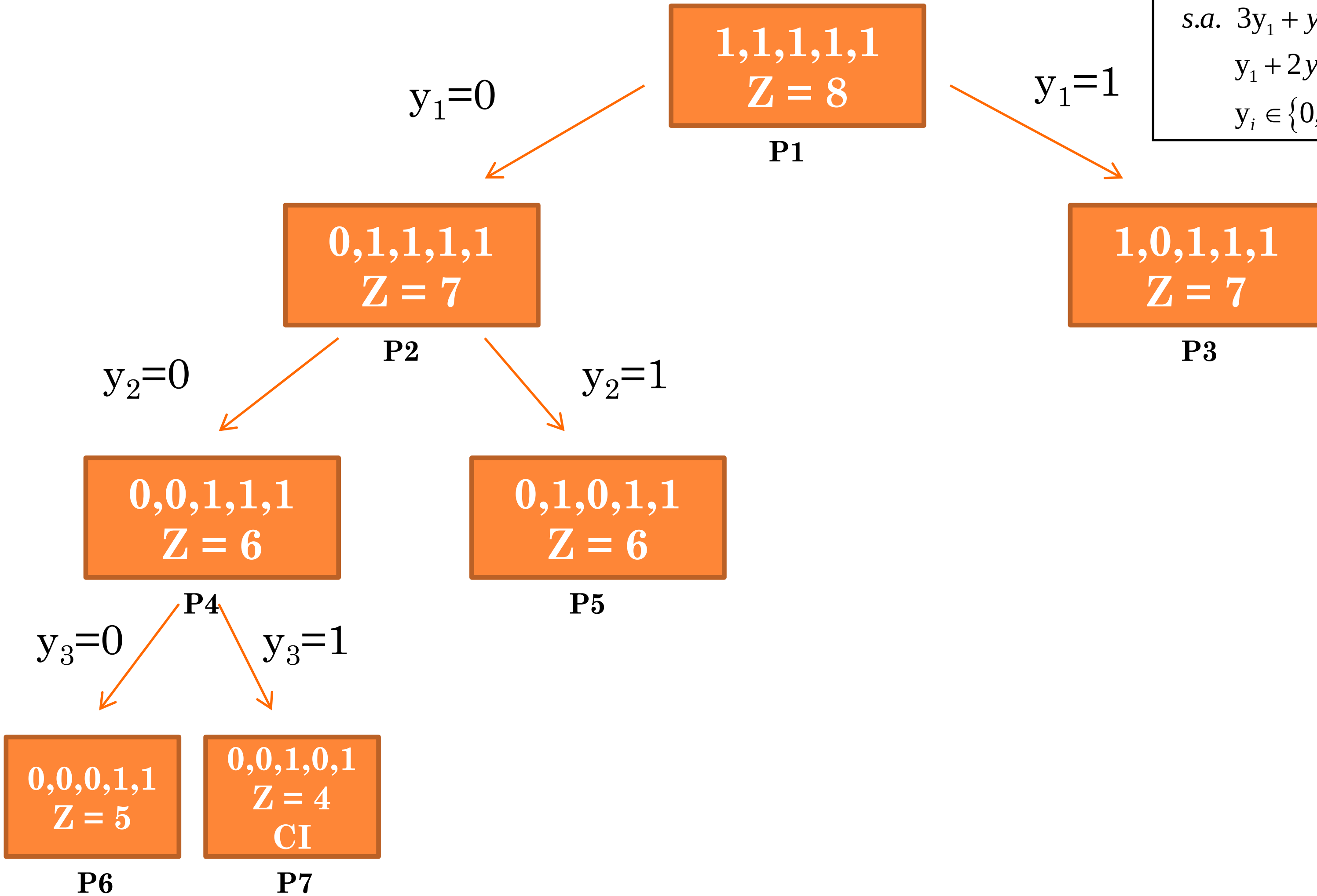
El subproblema 2 se ramifica en los subproblemas 4 y 5:

Subproblema 4: Z(0,0,1,1,1) = 6. No factible.
Subproblema 5: Z(0,1,0,1,1) = 6. No factible.

El subproblema 4 se ramifica en los subproblemas 6 y 7:

Subproblema 6: Z(0,0,0,1,1) = 5. No factible.
Subproblema 7: Z(0,0,1,0,1) = 4. Problema Terminal. Solución Candidata. Z* = 4 cota inferior (CI).

$$\begin{aligned} Max \quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\ s.a. \quad & 3y_1 + y_2 + 2y_5 \le 4 \\ & y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \ge 3 \\ & y_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$



El subproblema 2 se ramifica en los subproblemas 4 y 5:

Subproblema 4: Z(0,0,1,1,1) = 6. No factible.
Subproblema 5: Z(0,1,0,1,1) = 6. No factible.

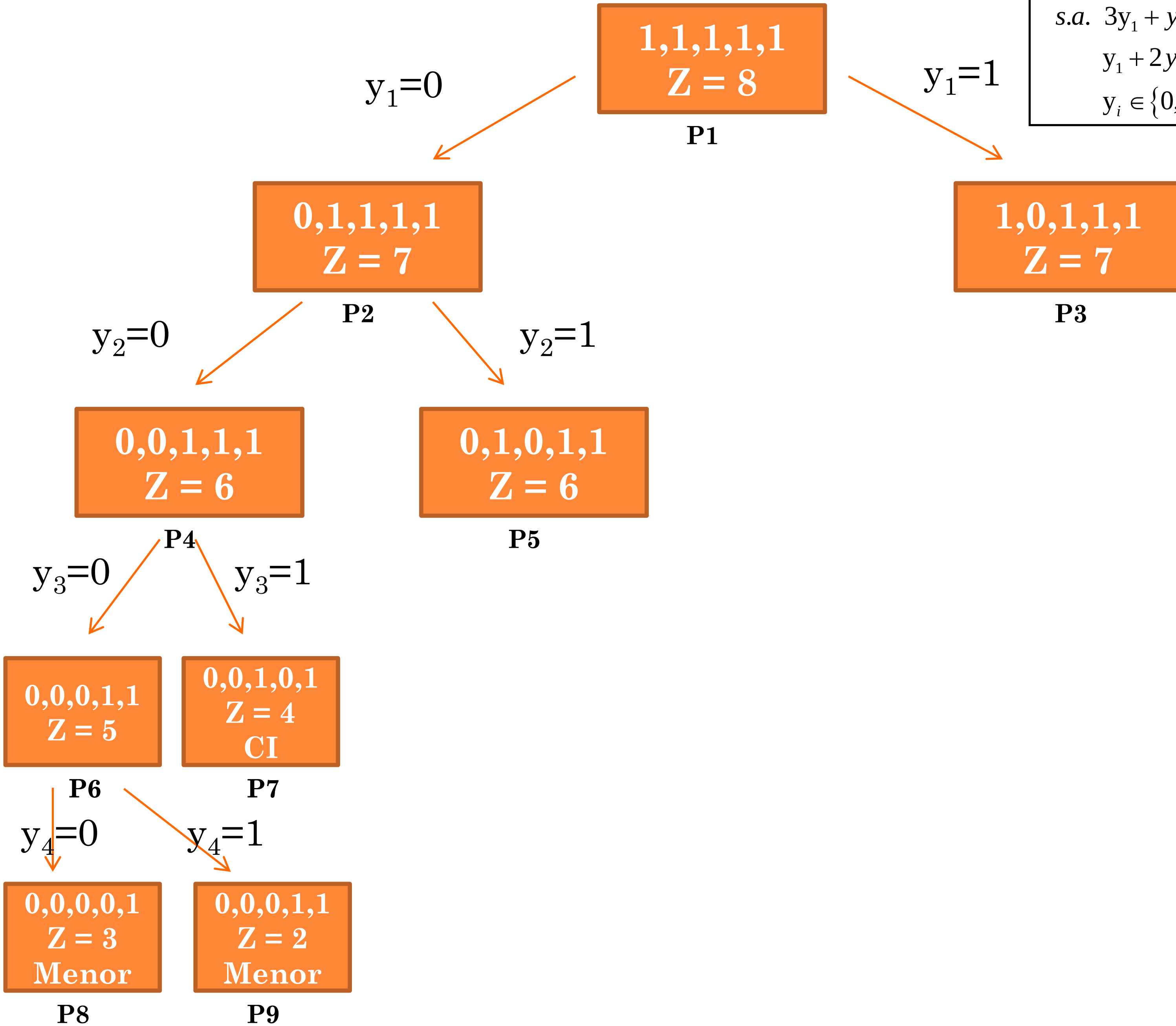
El subproblema 4 se ramifica en los subproblemas 6 y 7:

Subproblema 6: Z(0,0,0,1,1) = 5. No factible.
Subproblema 7: Z(0,0,1,0,1) = 4. Problema Terminal. Solución Candidata. Z* = 4 cota inferior (CI).

El subproblema 6 se ramifica en los subproblemas 8 y 9:

Subproblema 8: Z(0,0,0,0,1) = 3. Menor valor del objetivo que CI.
Subproblema 9: Z(0,0,0,1,0) = 2. Menor valor del objetivo que CI.

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\
s.a. \quad & 3y_1 + y_2 + 2y_5 \le 4 \\
& y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \ge 3 \\
& y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$



El subproblema 2 se ramifica en los subproblemas 4 y 5:

Subproblema 4: Z(0,0,1,1,1) = 6. No factible.
Subproblema 5: Z(0,1,0,1,1) = 6. No factible.

El subproblema 4 se ramifica en los subproblemas 6 y 7:

Subproblema 6: Z(0,0,0,1,1) = 5. No factible.
Subproblema 7: Z(0,0,1,0,1) = 4. Problema Terminal. Solución Candidata. Z* = 4 cota inferior (CI).

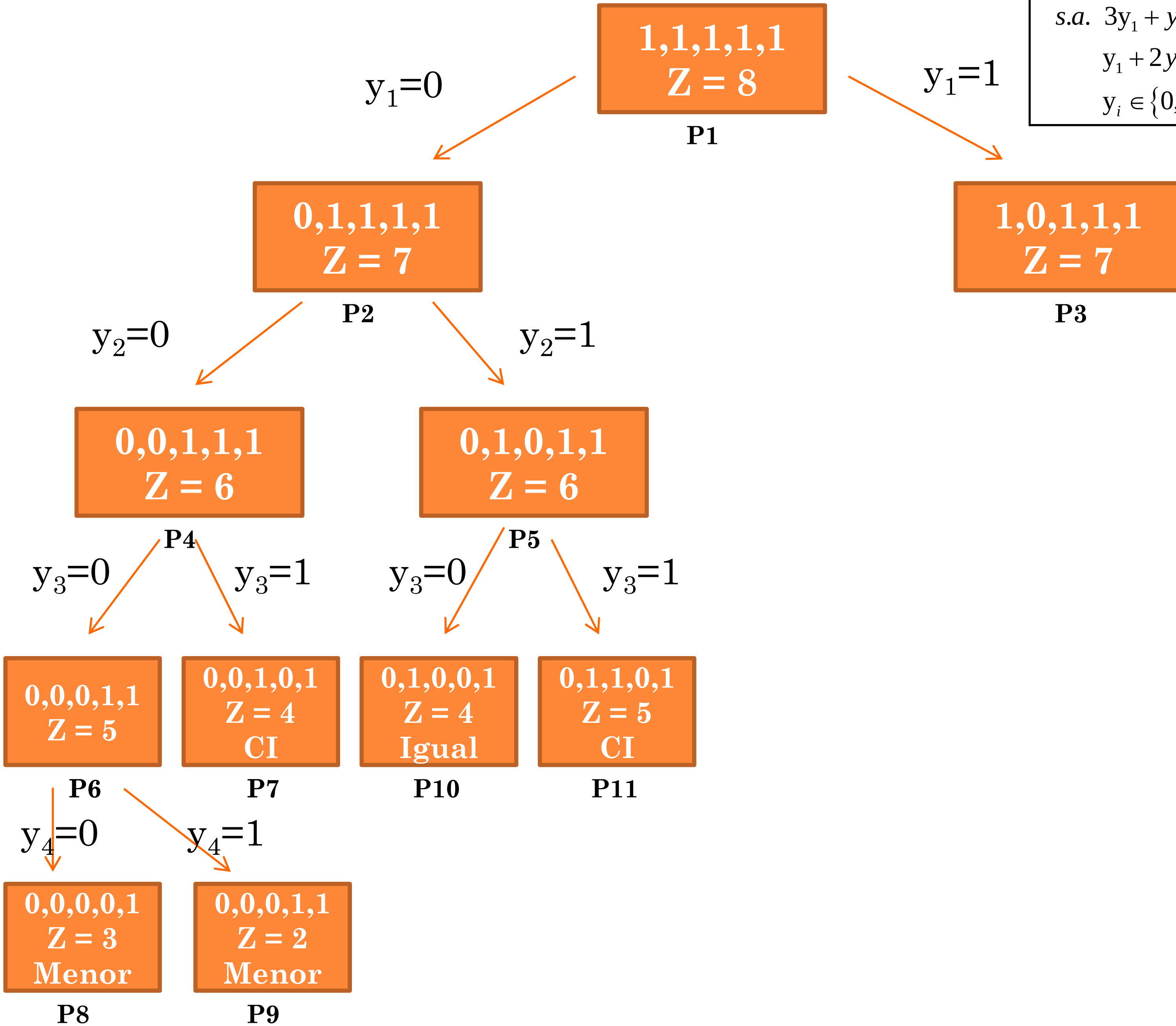
El subproblema 6 se ramifica en los subproblemas 8 y 9:

Subproblema 8: Z(0,0,0,0,1) = 3. Menor valor del objetivo que CI.
Subproblema 9: Z(0,0,0,1,0) = 2. Menor valor del objetivo que CI.

El subproblema 5 se ramifica en los subproblemas 10 y 11:

Subproblema 10: Z(0,1,0,0,1) = 4. Igual valor objetivo que CI.
Subproblema 11: Z(0,1,1,0,1) = 5. Problema Terminal. Solución Candidata. Z*=5 nueva CI.

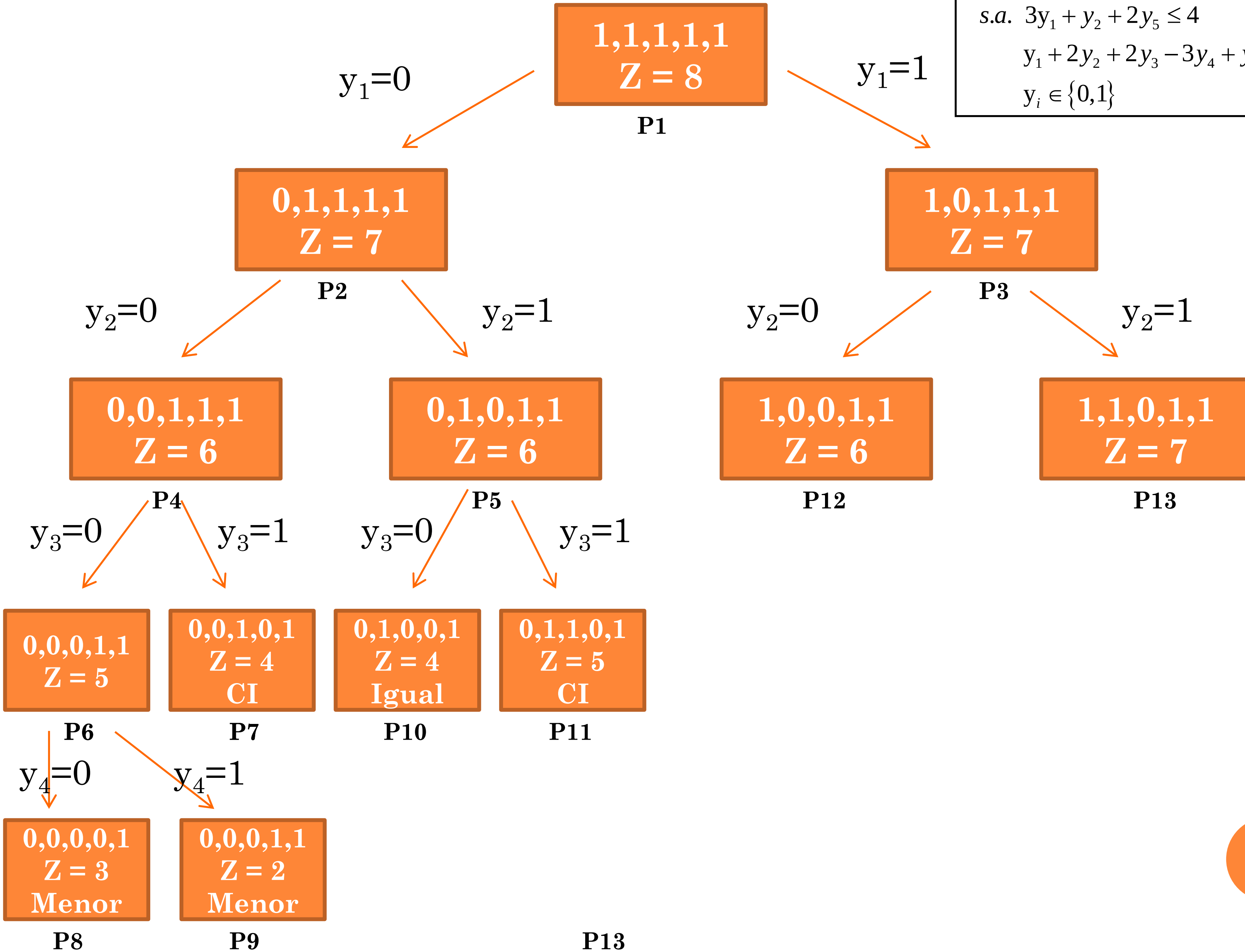
$$\begin{aligned} Max \quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\ s.a. \quad & 3y_1 + y_2 + 2y_5 \leq 4 \\ & y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \geq 3 \\ & y_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$



El subproblema 3 se ramifica en los subproblemas 12 y 13:

Subproblema 12: Z(1,0,0,1,1) = 6. No factible.
Subproblema 13: Z(1,1,0,1,1) = 7. No factible.

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\
s.a. \quad & 3y_1 + y_2 + 2y_5 \le 4 \\
& y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \ge 3 \\
& y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$



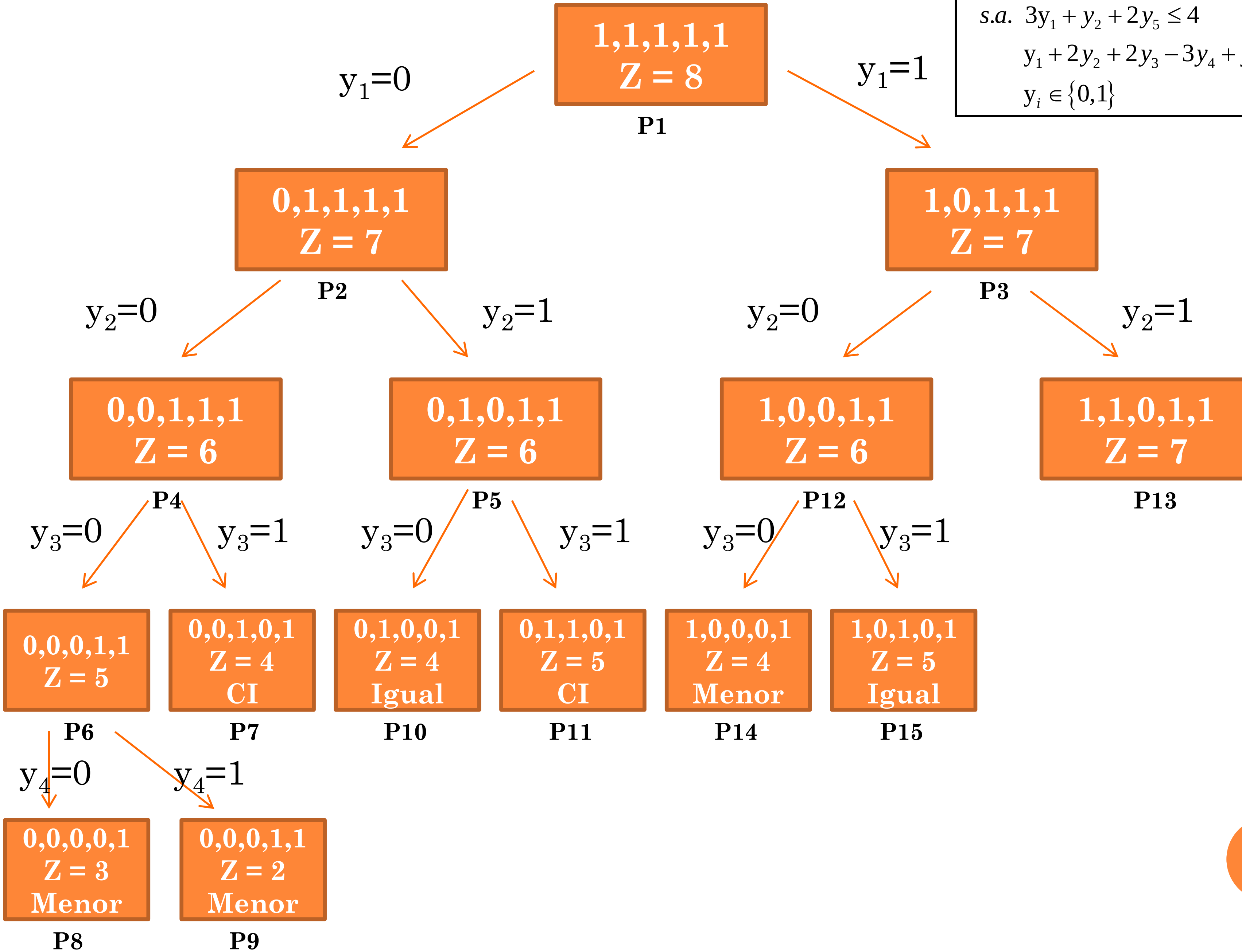
El subproblema 3 se ramifica en los subproblemas 12 y 13:

Subproblema 12: Z(1,0,0,1,1) = 6. No factible.
Subproblema 13: Z(1,1,0,1,1) = 7. No factible.

El subproblema 12 se ramifica en los subproblemas 14 y 15:

Subproblema 14: Z(1,0,0,0,1) = 4. Menor valor del objetivo que CI.
Subproblema 15: Z(1,0,1,0,1) = 5. Igual valor objetivo que CI y no factible.

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\
s.a. \quad & 3y_1 + y_2 + 2y_5 \leq 4 \\
& y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \geq 3 \\
& y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$



El subproblema 3 se ramifica en los subproblemas 12 y 13:

Subproblema 12: Z(1,0,0,1,1) = 6. No factible.
Subproblema 13: Z(1,1,0,1,1) = 7. No factible.

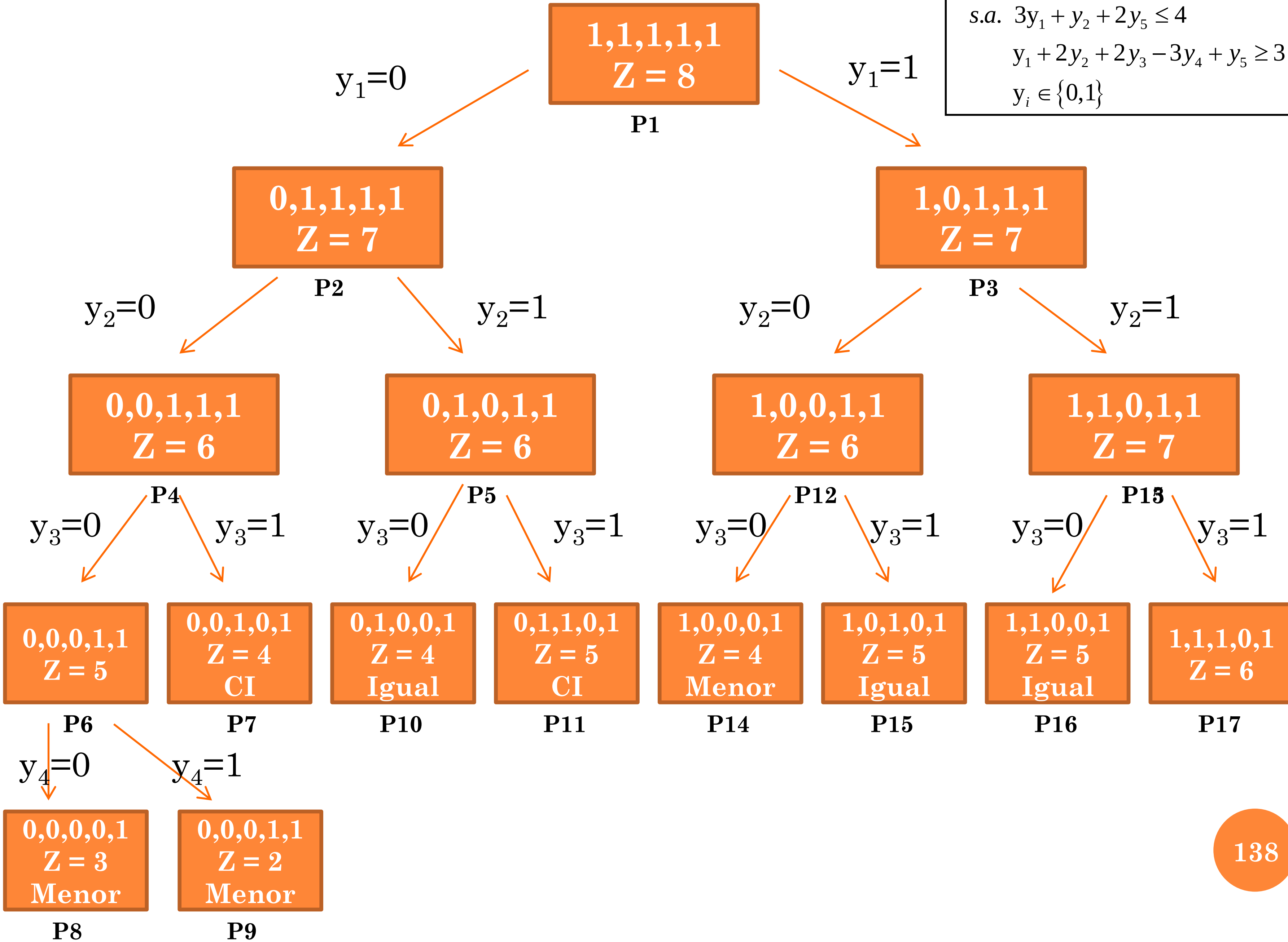
El subproblema 12 se ramifica en los subproblemas 14 y 15:

Subproblema 14: Z(1,0,0,0,1) = 4. Menor valor del objetivo que CI.
Subproblema 15: Z(1,0,1,0,1) = 5. Igual valor objetivo que CI y no factible.

El subproblema 13 se ramifica en los subproblemas 16 y 17:

Subproblema 16: Z(1,1,0,0,1) = 5. Igual valor objetivo que CI y no factible.
Subproblema 17: Z(1,1,1,0,1) = 6. No factible.

$$\begin{aligned} Max \quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\ s.a. \quad & 3y_1 + y_2 + 2y_5 \le 4 \\ & y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \ge 3 \\ & y_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$



El subproblema 3 se ramifica en los subproblemas 12 y 13:

Subproblema 12: Z(1,0,0,1,1) = 6. No factible.
Subproblema 13: Z(1,1,0,1,1) = 7. No factible.

El subproblema 12 se ramifica en los subproblemas 14 y 15:

Subproblema 14: Z(1,0,0,0,1) = 4. Menor valor del objetivo que CI.
Subproblema 15: Z(1,0,1,0,1) = 5. Igual valor objetivo que CI y no factible.

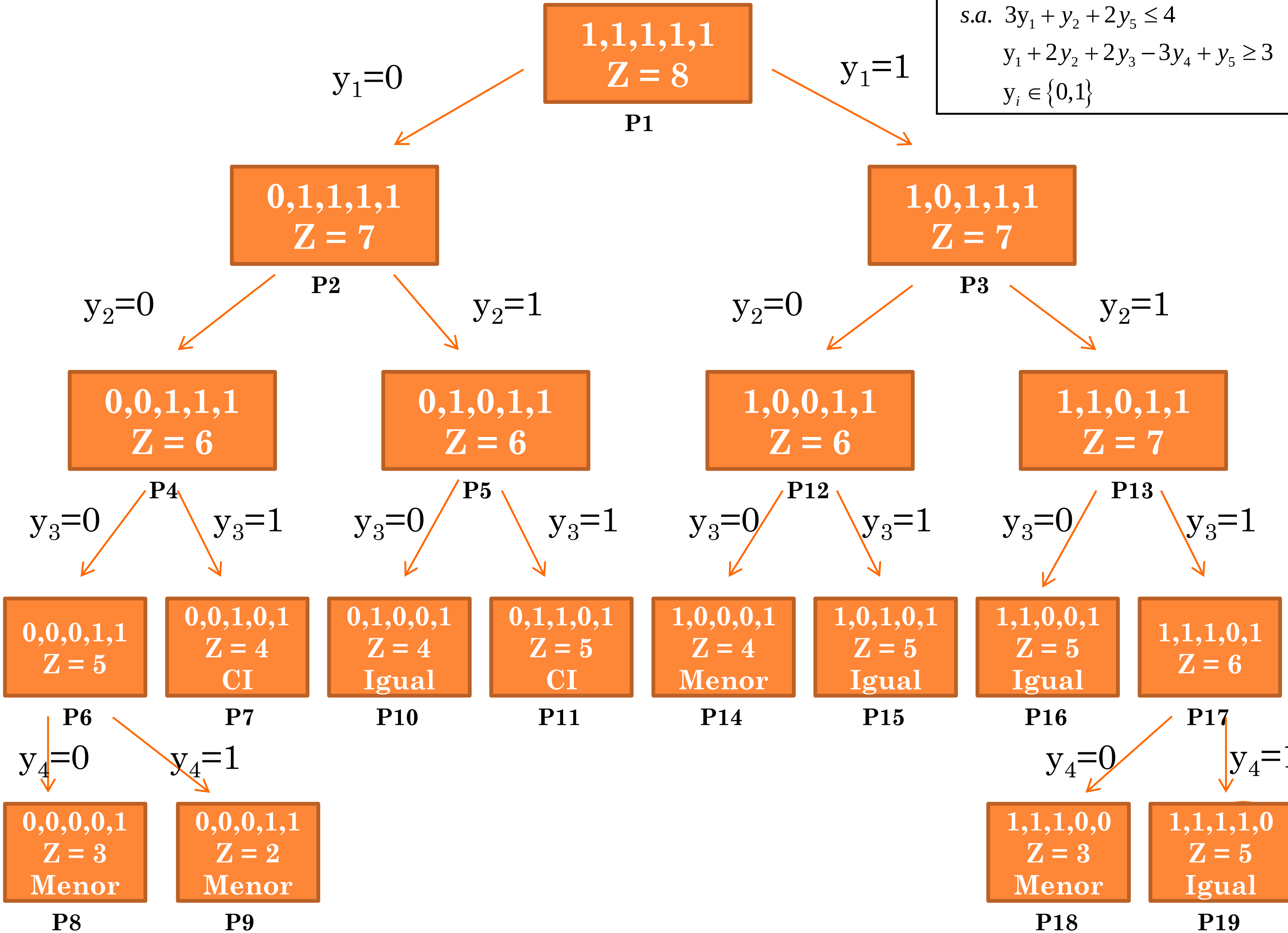
El subproblema 13 se ramifica en los subproblemas 16 y 17:

Subproblema 16: Z(1,1,0,0,1) = 5. Igual valor objetivo que CI y no factible.
Subproblema 17: Z(1,1,1,0,1) = 6. No factible.

El subproblema 17 se ramifica en los subproblemas 18 y 19:

Subproblema 18: Z(1,1,1,0,0) = 3. Menor valor del objetivo que CI.
Subproblema 19: Z(1,1,1,1,0) = 5. Igual valor del objetivo que CI y no factible.

$$\begin{aligned} Max\quad & Z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\ s.a.\quad & 3y_1 + y_2 + 2y_5 \le 4 \\ & y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \ge 3 \\ & y_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$



La solución óptima es la correspondiente al subproblema 11:
Z(0,1,1,0,1) = 5 (hay otras soluciones que también alcanzan el valor Z=5, pero las soluciones ensayadas no son factibles).

Trasladando este resultado al problema original se obtiene:
Z(1,1,0,1,1) = 4