Leyes de los grandes números y Teorema Central del Límite

Sucesiones de Variables Aleatorias

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias infinita numerable asignando una variable aleatoria a cada natural según algún criterio.

Ejemplos:

X_n: Sale cara en el n-ésimo lanzamiento, $n \in \mathbb{N}$ $\quad X_n \rightsquigarrow B\left(\frac{1}{2}\right)$

X_n: La pieza n-ésima es defectuosa, $n \in \mathbb{N}$ $\quad X_n \rightsquigarrow B(p)$

X_n: Resultado en n-ésimo lanzamiento de un dado, $n \in \mathbb{N}$ $\quad X_n \rightsquigarrow U(1, \dots, 6)$

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ → Sucesión

Convergencia de sucesiones de v.v.a.a.

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y X variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, con funciones de distribución F_{Xn} y F_X y funciones generatrices de momentos M_{Xn} y M_X respectivamente. Se definen los siguientes tipos de convergencia:

1. Convergencia Puntual

$$\boxed{X_n \to X \ \ puntualmente \ \Leftrightarrow \forall\omega\epsilon\ \Omega \quad X_n(\omega) \to X(\omega)}$$

(*sucesión numérica a número*)

Ejemplo:

Definimos la sucesión: Ω =[0,1]

$$X_n(\omega)=\begin{cases} n & 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq \omega \leq 1 \end{cases}$$

Ejemplo:

Definimos la sucesión: Ω =[0,1]

$$X_n(\omega)=\begin{cases} n & 0 \le \omega \le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \le \omega \le 1 \end{cases}$$

$$X_1(\omega)=\begin{cases} 1 & 0 \le \omega \le 1 \end{cases}$$

$$X_2(\omega)=\begin{cases} 2 & 0 \le \omega \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \le \omega \le 1 \end{cases}$$

$$X_3(\omega)=\begin{cases} 3 & 0 \le \omega \le \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \le \omega \le 1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

Tomamos por ejemplo ω=1/4

$$X_n\left(\frac{1}{4}\right) = \{1,2,3,4,0,0,0,\ldots\} \quad \Rightarrow X_n \to 0$$

$$\boxed{X_n \to 0 \ \ \forall\ \omega \in \Omega - \{0\}}$$

2. Convergencia casi segura

$$\boxed{X_n \xrightarrow{c.s.} X \;\Leftrightarrow\; P[\lim_{n\to\infty} X_n = X] = 1}$$

Es decir:

$$X_n \xrightarrow{c.s.} X \;\Leftrightarrow\; P[\omega \epsilon\ \Omega : \lim_{n\to\infty} \;\; X_n(\omega) \to X(\omega)] = 1$$

Esto es: El conjunto de puntos en el que se da la convergencia tiene probabilidad 1 (salvo en un conjunto de puntos con probabilidad nula)

Ejemplo: Ω =[0,1]

$$X_n(\omega)=\begin{cases} n & 0 \le \omega \le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \le \omega \le 1 \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ (*único punto en que no existe la convergencia es en* ω=0)

$$\Rightarrow P[\lim_{n\to\infty} X_n = 0] = 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{c.s.} 0$$

3. Convergencia en probabilidad

$$\boxed{X_n \xrightarrow{P} X \quad \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| \leq \varepsilon] = 1}$$

Equivalentemente: $\lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] = 0$

Es decir:

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[\omega \epsilon\ \Omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon] = 0$$

Esto es: El conjunto de puntos de Ω tal que la distancia entre X_n y su límite X excede a ε es cada vez más pequeño conforme n $\rightarrow \infty$ en probabilidad.

4. Convergencia en ley o en distribución

$$1.\ X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in C(F(x))$$

(*sucesión numérica a número*)

Donde C(F(x)) es el conjunto de puntos de continuidad de F(x)

$$2.\ X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t) \quad \forall t \in (-\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1) \quad \mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1 \in R^+$$

Ejemplo:

X →N(0,1) Definimos la sucesión v.v.a.a: $X_n = \begin{cases} -x & \text{si n es impar} \quad \mathrm{n} = 1,3,5,\ldots \\ x & si\ n\ es\ par\ n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$

Probar si converge en ley y en probabilidad.

Ejemplo:

X →N(0,1) Definimos la sucesión v.v.a.a: $X_n = \begin{cases} -x & \text{si n es impar} \quad n = 1,3,5, \ldots \\ x & si\ n\ es\ par\ n = 2,4,6, \ldots \end{cases}$

Probar si converge en ley y en probabilidad.

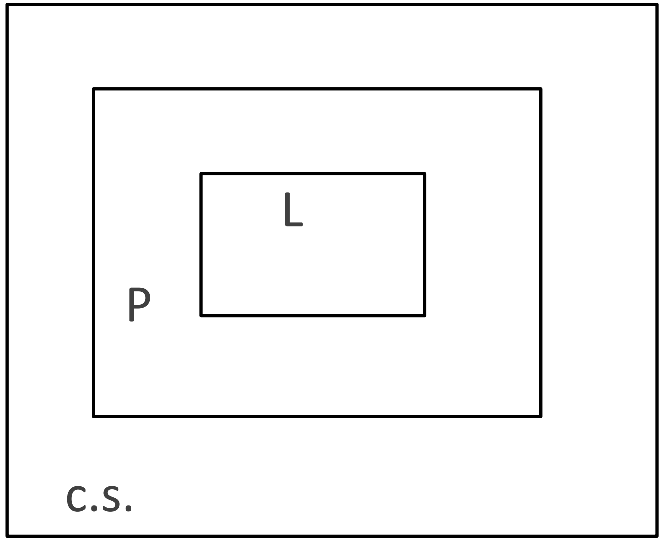
$\boxed{\text{X →N(0,1) en cualquier caso} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X}$ (Si X se distribuye según una N(0,1), -X también se distribuye según N(0,1)

Probemos si converge en probabilidad:

$[|X_n - X| \le \varepsilon] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n impar}}}{=} P[2|X| \le \varepsilon] = P[|X| \le \varepsilon/2] = \frac{1}{2}$ (para ε suficientemente pequeño, P[N(0,1) < 0]=1/2)

$\boxed{\text{Como esa probabilidad es distinta de 1} \Rightarrow X_n \overset{P}{\not\to} X}$

Relaciones entre los distintos tipos de convergencia



$X_n \xrightarrow{c.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$

Además:

$X_n \xrightarrow{c.s} X \Rightarrow X_n + c \xrightarrow{c.s} X$+c

$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n + c \xrightarrow{P} X$+c $\quad\quad \forall c \in R$

$X_n \xrightarrow{L} X \Rightarrow X_n + c \xrightarrow{L} X$+c

Leyes de los Grandes Números

Establecen la convergencia a 0 de sucesiones de sumas parciales de variables aleatorias independientes centradas y normalizadas por ciertas cantidades.

1. Establecen la convergencia en probabilidad (Leyes Débiles)
2. Establecen la convergencia casi segura (Leyes Fuertes)

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes sobre un mismo espacio de probabilidad y sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales t.q. $B_n \to \infty \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. $S_n = \sum_{i=1}^{n} Xi \Rightarrow$

- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la ley débil de los grandes números respecto a $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si: $\frac{S_n - A_n}{B_n} \xrightarrow{P} 0$
- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la ley fuerte de los grandes números respecto a $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si: $\frac{S_n - A_n}{B_n} \xrightarrow{c.s.} 0$

Ley débil de Bernoulli
Establece que cuando se realizan sucesivas repeticiones independientes de un experimento de Bernoulli, la sucesión de frecuencias relativas de cualquier suceso asociado al experimento converge a la probabilidad de dicho suceso

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0 \qquad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p \qquad (E[S_n]=\text{np})$$

Ley de Khintchine
Es un resultado más general que se refiere a sucesiones de variables aleatorias exigiendo sólo la existencia de los momentos de primer orden.

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0 \qquad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \qquad (E[S_n]=\text{n } \mu)$$

Ley de Borel
Refuerza la ley débil de Bernoulli estableciendo la convergencia casi segura.

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{c.s.} 0 \qquad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} p$$

Ley de Kolmogorov
Refuerza la ley débil de Khintchine estableciendo la convergencia casi segura.

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{c.s.} 0 \Leftrightarrow E[|X_n|] < \infty$$

Problema Central del Límite Clásico

1. **Primer Teorema del Límite (Bernoulli):** Establece la convergencia a la ley degenerada en 0.
2. **Segundo Teorema del Límite (De Moivre y Laplace):** Establece la convergencia de la Binomial a la Normal.
3. **Tercer Teorema del Límite (Poisson):** Establece la convergencia de la Poisson a la Normal.

Problema Central del Límite Clásico (Teorema Límite de Lèvy):

Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son variables aleatorias independientes sobre (Ω,A,P) y $S_n = \sum_{i=1}^{n} Xi,\ n \in \mathbb{N}$, sucesión de sumas parciales $\Rightarrow$

i) $\dfrac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{L} 0 \quad si\ \exists\ E[X_n] \qquad \forall\, n \in\ \mathbb{N}$

ii) $\dfrac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{L} N(0,1) \quad si\ \exists\ E\left[{X_n}^2\right] \qquad \forall\, n \in\ \mathbb{N}$