



ugr

Universidad  
de Granada

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

---

# Análisis de una metodología de ranking difuso utilizando números difusos trapezoidales con aplicaciones en Estadística

**Autor**

Antonio Márquez Montávez

**Director**

Antonio Francisco Roldán López de Hierro

## Memoria de Tesis Doctoral

para optar al grado de doctor por la Universidad de Granada  
dentro del programa de Doctorado *Estadística Matemática y Aplicada*



FACULTAD DE CIENCIAS

Granada, junio de 2020



ugr

Universidad  
de Granada

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

---

Análisis de una metodología de  
ranking difuso utilizando números  
difusos trapezoidales  
con aplicaciones en Estadística

**Autor**

Antonio Márquez Montávez

**Director**

Antonio Francisco Roldán López de Hierro

**MEMORIA DE TESIS DOCTORAL**

para optar al grado de doctor por la Universidad de Granada  
dentro del programa de Doctorado *Estadística Matemática y Aplicada*



FACULTAD DE CIENCIAS

Granada, junio de 2020

Tesis Doctoral

Doctorado en Estadística Matemática y Aplicada



Universidad de Granada

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

**Análisis de una metodología de ranking  
difuso utilizando números difusos  
trapezoidales con aplicaciones en  
Estadística**

Antonio Márquez Montávez

Granada, junio de 2020

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales  
Autor: Antonio Márquez Montávez  
ISBN: 978-84-1306-744-5  
URI: <http://hdl.handle.net/10481/66170>



El doctorando / The doctoral candidate:

Antonio Márquez Montávez

y el director de la tesis / and the thesis supervisor:

Dr. Antonio Francisco Roldán López de Hierro

Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección del director de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

/

Guarantee, by signing this doctoral thesis, that the work has been done by the doctoral candidate under the direction of the thesis supervisor/s and, as far as our knowledge reaches, in the performance of the work, the rights of other authors to be cited (when their results or publications have been used) have been respected.

Lugar y fecha / Place and date: Granada, a 20 de enero de 2020.

Director de la Tesis / Thesis supervisor:

Antonio Francisco Roldán López de Hierro

Doctorando / Doctoral candidate:

Antonio Márquez Montávez



# Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero y profundo agradecimiento a todos/as aquellos/as que con su ayuda han hecho posible que este trabajo sea realidad. Especialmente al profesor D. Antonio Francisco Roldán López de Hierro y a la profesora D<sup>a</sup>. Concepción Beatriz Roldán López de Hierro por su inestimable ayuda y constante apoyo, por sus consejos y dedicación, dándome su tiempo y trabajo incondicionalmente, tanto en la parte investigadora como en el aspecto humano.

Asimismo, quiero dar las gracias a mi familia, esposa e hijos que me han apoyado en todo momento. También a mis amigos/as y compañeros/as del I.E.S. Zaidín-Vergeles, especialmente al Departamento de Matemáticas, por la comprensión y ánimo que de ellos/as he recibido.

Finalmente, agradecer a mi compañero Miguel Sánchez por ayudarme a programar la librería *RankingTwoTraFNs* en *R*.





# Publicaciones

- ▶ A.F. Roldán López de Hierro, **A. Márquez Montávez**, C. Roldán. *A novel fuzzy methodology applied for ranking trapezoidal fuzzy numbers and new properties*. International Journal of Computer Mathematics, **97** (1-2), 358-386 (Posición 116/254 en “*Mathematics, Applied*”, Q2).
  
- A.F. Roldán López de Hierro, C. Aguilar Peña, **A. Márquez Montávez**, C. Roldán. *An approach for ranking fuzzy numbers using finite fuzzy numbers and its application in Economics*. Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 2017), 4-8 July, 2017, pp. 1793-1800.
  
- A.F. Roldán López de Hierro, **A. Márquez Montávez**, C. Roldán. *On some properties and applications of a new fuzzy ranking methodology*. Proceedings of the 18th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 2018), 9-14 July, 2018.
  
- A.F. Roldán López de Hierro, M. Sánchez, **A. Márquez Montávez**, C. Roldán. *Multicriteria decision making involving uncertain information via fuzzy ranking and fuzzy aggregation functions*. Proceedings of the 19th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 2019), 30 June-6 July, 2019.



---

# Índice

---

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodología. Números difusos y ranking</b>	<b>7</b>
2.1. Los números difusos . . . . .	8
2.1.1. La noción de número difuso . . . . .	8
2.1.2. Elementos analíticos y geométricos asociados a los números difusos . . . . .	11
2.1.3. Algunas clases de números difusos . . . . .	13
2.1.4. Interpretación estadística de la noción de número difuso	21
2.1.5. Operaciones con números difusos . . . . .	26
2.2. Metodologías de ranking con números difusos . . . . .	29
2.2.1. Clasificación de los métodos de ordenación . . . . .	32
2.2.2. Metodologías basadas en índices . . . . .	33
2.2.3. Ejemplos de metodologías basadas en índices . . . . .	35

---

2.2.4. Ejemplos de clasificación con metodologías basadas en índices . . . . .	49
2.2.5. Inconsistencia de procedimientos de ordenación según diferentes enfoques . . . . .	57
2.2.6. Propiedades razonables que debería satisfacer un procedimiento de ranking difuso . . . . .	60
2.2.7. Verificación de los axiomas de los métodos de ranking . . . . .	62
2.2.8. Extensión de las propiedades anteriores . . . . .	63
2.3. Una metodología propiamente difusa de ordenación de números difusos . . . . .	64
<b>3. Resultados principales</b>	<b>69</b>
3.1. Algunas propiedades de los números difusos trapezoidales . . . . .	71
3.1.1. Los lados de un número difuso trapezoidal . . . . .	73
3.1.2. Los conjuntos $\mathbb{I}_{A,B}$ y $\mathbb{I}_{B,A}$ . . . . .	78
3.2. Relaciones binarias sobre la familia de números difusos trapezoidales . . . . .	82
3.2.1. Algunas relaciones binarias en el conjunto $\mathcal{T}$ . . . . .	82
3.3. Algunos resultados en los que el ranking difuso es equivalente a un ranking acumulativo . . . . .	86
3.4. Ranking de números difusos trapezoidales . . . . .	94
3.5. Clasificación incompatible y exhaustiva . . . . .	104
3.6. Ejemplos ilustrativos de clasificación de números difusos trapezoidales . . . . .	109
<b>4. Posibles aplicaciones estadísticas y desarrollo de la librería <i>RankingTwoTraFNs</i> implementada en <i>R</i></b>	<b>117</b>

## ÍNDICE

---

4.1. Una metodología de consenso basada en un ranking difuso . . .	118
4.2. Instalación de la librería . . . . .	123
4.3. Funciones implementadas en la librería . . . . .	124
4.4. Ejemplos de utilización de la librería . . . . .	133
<b>5. Conclusiones</b>	<b>137</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>143</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>145</b>



---

# Resumen

---

Los números difusos son entidades matemáticas que sirven para generalizar, a un ambiente de incertidumbre o imprecisión, la noción de número real. Aunque la aritmética usual con números reales puede ser extendida al contexto difuso, la relación binaria de orden en  $\mathbb{R}$  no es sencilla de generalizar. Existen muchas metodologías para ordenar (o clasificar) números difusos, pero ninguna de ellas es globalmente aceptada. En 2018, Roldán López de Hierro, Roldán y Herrera presentaron una nueva relación binaria difusa con objeto de ordenar números difusos que tenía dos ventajas muy importantes: por un lado, esta relación verifica muchas propiedades que habían sido descritas por varios autores anteriormente; por otro lado, proporciona ordenaciones acordes con la intuición humana.

Debido a su posible aplicación en el ámbito de la Estadística y de la Computación, el principal objetivo de la presente Memoria es el de describir cómo actúa esta relación binaria difusa entre números difusos trapezoidales (y las subclases que contiene esta familia) a través de sus vértices (o esquinas), mostrando a la vez nuevas propiedades de esta metodología de ordenación difusa.

Además, se ha creado la librería *rankingTwoTraFNs* en código abierto en R para que cualquier investigador que lo desee pueda poner a prueba este algoritmo de ordenación de números difusos trapezoidales en contextos reales sin tener un conocimiento profundo del tema, y utilizando una cantidad mínima de recursos computacionales. Finalmente, se expone un estudio comparativo con otros



métodos de ordenación existentes para ilustrar las ventajas de la metodología propuesta.

**Palabras clave:** Número difuso, Ranking, Ranking difuso, Intervalo de confianza, Relación de preferencia.

---

# Abstract

---

Fuzzy numbers are mathematical entities that serve to generalize the notion of real number to a probabilistic or uncertain setting. Although the usual arithmetic with real numbers can be extended to the fuzzy context, the order in  $\mathbb{R}$  is not easy to generalize. There are many methodologies for ranking (or classifying) fuzzy numbers, but none of them is universally accepted. In 2018, Roldán López de Hierro, Roldán and Herrera presented a new fuzzy binary relationship between fuzzy numbers satisfying two important advantages: on the one hand, this relationship verifies many reasonable properties that had been proposed by several authors previously; on the other hand, it provides consistent with human intuition rankings.

Due to its feasible application in statistics and computation, the main aim of this report is to describe how this fuzzy binary relationship works on the family of all trapezoidal fuzzy numbers (including the subclasses that it contains) showing, at the same time, new properties of this novel ranking methodology.

In addition, a new library in R (called *rankingTwoTraFNs*) has been introduced so that any interested researcher may test this algorithm for ranking fuzzy trapezoidal numbers in real contexts by using very few computational resources and avoiding the mathematical details of this methodology. Finally, a comparative study with other existing algorithms is carried out to show the reasonability of the obtained rankings and to illustrate the advantages of the proposed methodology.

**Keywords:** Fuzzy number, Ranking, Fuzzy ranking, Confidence interval, Preference relation.

---

# Introducción

---

Uno de los principales problemas a los que se enfrenta la comunidad científica en la actualidad es el de la toma de decisiones en entornos imprecisos. Por ejemplo, a la hora de programar cualquier máquina o robot, hemos de decirle lo que ha de hacer en cualquier momento. Esta tarea puede ser sencilla cuando se trata de máquinas destinadas a producir un movimiento repetitivo en el tiempo (por ejemplo, una envasadora). El desafío está, obviamente, en las máquinas que han de tomar decisiones por sí mismas. En general, son muchas las variables que pueden condicionar la respuesta a adoptar en cada momento. Por ello, solo es posible controlar algunas variables externas a través de sensores. No obstante, ¿cuál debe ser la respuesta de la máquina?

Existen ya máquinas que superan, con mucho, las habilidades humanas. Por ejemplo, hace años que un ordenador mediano es capaz de ganarle al campeón mundial de ajedrez con relativa facilidad y, recientemente, también ha ocurrido esto con el juego *Go*. No parece que los juegos con reglas fijas puedan ofrecer mucha resistencia en los próximos años. Sin embargo, cuando hay que tomar muchas decisiones de manera rápida y coordinada, aún la inteligencia artificial no ha conseguido superar al cerebro humano. Es el caso de la conducción de un coche por una ciudad. Hay coches autónomos que son capaces ya de llegar de una punta a otra de un país eligiendo el camino óptimo, tanto en kilometraje como en tiempo (teniendo en cuenta las densidades de tráfico a las que tienen acceso vía Internet). Un coche autónomo debe tomar cientos de decisiones por

segundo ante unas circunstancias de tráfico cambiantes, imitando el comportamiento humano. Las decisiones que se toman afectan a las vidas humanas porque pueden producir accidentes incluso mortales. Y estos coches se encuentran ante las mismas encrucijadas en las que nos podemos encontrar nosotros mismos. Valga el siguiente ejemplo extremo para comprender la importancia de la toma de decisiones: si un coche en marcha continúa recto, atropellará a un niño, pero si se desvía a un lado, chocará y morirán los ocupantes del coche. ¿Qué decisión debe tomar?

La toma de decisiones no afecta solo a la inteligencia artificial. Todos los días tomamos multitud de decisiones en nuestro quehacer diario; por ejemplo, en el ámbito familiar, qué carretera tomar para ir a un supermercado o qué productos comprar. En el ámbito profesional, las decisiones pueden afectar a millones de personas: los políticos que dirigen los países toman todos los días decisiones que benefician a unos y perjudican a otros. Y no siempre son sencillas. ¿Qué opción elegir en cada caso? Y lo más importante, ¿tienen la información necesaria para elegir la mejor opción? De hecho, ¿existe la mejor opción? Si la hay, ¿se aplican los procedimientos adecuados para llegar a ella?

Estas decisiones son especialmente difíciles cuando las variables que intervienen son imprecisas. Quien no se ha preguntado alguna vez: dependiendo de la meteorología, ¿me abrigaré más o menos para el evento de mañana? ¿Cuál es el mejor camino para volver a casa teniendo en cuenta el tráfico? En el ambiente empresarial, hay decisiones que repercuten sobre cientos o miles de personas: ¿qué tipo de vino se ha de producir para vender lo máximo? ¿cuáles son los mejores candidatos que debo contratar para trabajar en mi empresa cuando todos ellos poseen características relativamente similares? En el ambiente mundial, las decisiones nos afectan a todos: desde las medidas a adoptar contra el cambio climático como el hecho de que suban o bajen los tipos de interés. En la mayoría de los casos las decisiones se adoptan con un único criterio: la buena voluntad de quienes las adoptan ante la información de que disponen. Nadie sabe cómo acertar a priori con total seguridad. En este sentido, ¿cómo adoptar un criterio

---

predeterminado que se pueda aplicar en cualquier situación?

En este contexto surge la *toma de decisiones* como un campo de estudio de máximo interés y con importantísimas aplicaciones prácticas. Los primeros trabajos en este sentido ya mostraban la necesidad de afinar, con el mayor detalle posible, las variables que afectan o que pueden afectar a la decisión final, teniendo en cuenta que la elusión de algunas de ellas puede llevar a decisiones completamente equivocadas. Se suele seguir entonces un proceso relativamente estándar. Una vez determinadas las variables de interés, éstas han de medirse en tiempo real, obteniendo una serie de valores. De estos valores se ha de extraer la mayor cantidad de información posible, aplicándoles cualquier procedimiento matemático durante su análisis. Con frecuencia, esta información se resume en un único valor numérico asociado a cada una de las posibilidades que ofrece el experimento. Estos valores han de ser ordenados atendiendo a algún criterio, tras lo cual llega el momento de tomar la decisión final eligiendo el máximo o el mínimo de ellos.

Esta descripción tan resumida del proceso de toma de decisiones se ejecuta mediante múltiples pasos, cada uno de los cuales son importantes en sí mismos, y han de ser estudiados de forma separada de cara a ensamblar un proceso general lo más adecuado posible. La temática principal de la presente Memoria puede situarse en uno de los momentos finales del proceso global: la ordenación de la información resumida asociada a cada alternativa que podría ser adoptada. En concreto, nos centraremos en la descripción de una metodología muy reciente de ordenación de la información cuando nos situamos en un ambiente de incertidumbre.

Describimos un ejemplo que puede servirnos para comprender mejor el contexto en el que nos movemos. Supongamos que deseamos elegir el mejor vino entre cinco posibles. Puede que la decisión sea sencilla porque cuatro de ellos no sean razonablemente buenos, y uno de ellos destaque entre los demás. Sin embargo, esto no suele ser lo usual. Lo normal es que, siendo todos diferentes, con sus características propias, sean todos de una calidad muy similar. ¿Cuál es

el que elegiremos? El sentido común nos invita a medir en cada uno de ellos todas las variables que puedan influir en su calidad (tipo de uva empleada, acidez, color, textura, grado de alcohol, etc.), y a descartar aquellas que parezcan menos importantes (punto de ebullición, punto de congelación, etc.) Si observamos, algunas características pueden ser completamente objetivas (como la acidez o el grado de alcohol), pero también es posible que manejemos variables subjetivas: las principales compañías suelen hacer encuestas donde determinados expertos muestran su predilección por unos u otros vinos. El gusto de cada experto es una variable absolutamente personal, que puede depender incluso del momento concreto en el que se encuentre quien emite la opinión. Su subjetividad lo convierte en un dato que no es rebatible. Existe, pues, un cierto grado de imprecisión inherente al proceso de opinar y de valorar globalmente un vino. Esta imprecisión puede llevarnos a fallar, lo cual es obviamente una opción del proceso. Mínimas variaciones pueden hacer que nos decantemos por otras alternativas.

Cuando la información asociada a cada alternativa se resume en un único número real, lo usual es ordenarlos utilizando el orden usual de los números reales, y quedarnos con aquella alternativa que esté asociada a la mayor (o menor, dependiendo del contexto) valoración. Sin embargo, esto no siempre es posible. A lo mejor el resultado final no es un número, sino una matriz de valores incomparables, y la ordenación no es tan sencilla. En los últimos años se están empleando nuevas metodologías que, experimentalmente, están ofreciendo mejores resultados. Especialmente cuando éstas tienen en cuenta la naturaleza propiamente imprecisa de las variables que intervienen en el proceso y son capaces de manejarlas utilizando procedimientos adecuados, que imiten a los mejores procesos reales conocidos pero que no se reduzcan a estos, que en todo momento tengan presente la naturaleza incierta de los propios datos y de sus posibles manipulaciones.

Una de las concepciones matemáticas que mejor se adapta a este nuevo contexto es la *teoría de los conjuntos difusos*, originalmente introducidos por Lofti A. Zadeh en 1965 (véase [75]). En su trabajo observó que, en muchos casos,

---

las clases de objetos que se encuentran en el mundo físico real no siguen criterios definidos con total precisión. Para estudiarlos, introdujo los *conjuntos difusos* como clases de objetos sobre los que existe un cierto grado de incertidumbre en el nivel de certeza que poseemos de que el elemento pertenezca, o no, al conjunto. Desde este punto de vista, la teoría de Zadeh está basada en la idea de que no siempre es posible determinar, con total exactitud, si un elemento pertenece, o no, a un conjunto. Por ejemplo, consideremos el conjunto de individuos que caerán enfermos por neumonía durante el invierno del año próximo. Si hoy tuviéramos que determinar si una persona pertenece o no a ese conjunto, no lo podríamos hacer con total precisión, sino que tendríamos que hablar de una cierta probabilidad de que el individuo pertenezca a ese conjunto. Dicho de otra forma, puede existir una cierta incertidumbre sobre la pertenencia, o no, de una persona a ese conjunto.

En el contexto difuso, las afirmaciones categóricas no tienen por qué ser completamente verdaderas o completamente falsas, sino que cualquier interpretación de la realidad lleva asociado un cierto grado de incertidumbre. Las técnicas difusas son las que tratarán de dar rigurosidad matemática a esa imprecisión que necesitamos en nuestro día a día. La *lógica difusa* parte del hecho de que la realidad no tiene por qué ser sólo verdadera o falsa, sino que existen grados intermedios de incertidumbre. Frases como “nos vemos luego” o “no me siento muy bien” serán expresiones difusas ya que surgen de las diferentes interpretaciones que podemos dar a las palabras “luego” o “muy bien”. Dichas palabras, dependiendo del campo en el que se usen, adquirirán distinta interpretación. Por ejemplo, ¿qué significa la expresión “tardó muy poco”? Mientras que en ingeniería podríamos estar hablando de un orden de nanosegundos, en paleontología podría hacer referencia a un orden de miles de años. Por tanto, será importante establecer de manera clara el contexto en el que se utilizan para poder encontrar un punto de referencia y una unidad de medida.

Uno de los puntos cruciales de todo este proceso es el de traducir las expresiones lingüísticas que utilizamos en el lenguaje usual a expresiones matemáticas



capaces de conllevar inherentemente este grado de inexactitud. La teoría de conjuntos difusos se ha mostrado como una de las herramientas más útiles y de mayor éxito en este sentido. En concreto, lo usual es traducir estas expresiones coloquiales a *etiquetas lingüísticas* (véase [38]) que pueden ser fácilmente convertidas en una clase muy especial de conjuntos difusos: los denominados *números difusos*.

Los *números difusos* son entidades matemáticas que podemos asociar a la medición de la mayoría de los fenómenos que observamos cada día y que, de manera natural, conllevan un cierto grado de imprecisión; dicho de otro modo, son extensiones abstractas de la noción de *número real* que presentan un cierto grado de indeterminación o incertidumbre en la descripción de su naturaleza. Su objetivo principal es el de extender la noción de número real desde un ambiente en el que podemos determinar un valor con total precisión hasta un contexto en el que existe una cierta incertidumbre sobre el valor exacto que, en sí mismo, puede tomar el objeto representado. Así, cada número difuso real puede verse como un único número difuso concreto (al que se le suele llamar *crisp*). Desde el punto de vista puramente matemático, un número difuso no es más que una función cuyo dominio es  $\mathbb{R}$ , cuyo codominio es el intervalo real  $[0, 1]$  y que verifica ciertas propiedades. Existen varias posibles definiciones de la noción de número difuso (véase, por ejemplo, [61, 62, 53, 54]) atendiendo a las diferentes condiciones que se le impongan, si bien, en general, hay propiedades que se consideran absolutamente imprescindibles bajo cualquier perspectiva (por ejemplo, la semicontinuidad inferior y la convexidad difusa). Otras, sin embargo, pueden ser omitidas al emplear puntos de vista alternativos (es el caso de la normalidad). De hecho, hay visiones que producen definiciones ciertamente particulares (como es el caso de los números difusos *finitos*, [61, 8]).

El conjunto formado por todos los números difusos posee una cualidad que lo hace especialmente complicado. Si bien está relativamente estandarizada la forma en la que se extienden, de manera natural, las cuatro operaciones aritméticas básicas con números reales al conjunto formado por los números difusos, no

---

ocurre lo mismo con el orden natural propio de los números reales. Por ello, a lo largo del tiempo han surgido numerosos procedimientos que afrontan este problema desde diversos puntos de vista. La única característica común que tratan de verificar todas estas metodologías de ordenación es que, aplicadas a números difusos *crisp*, han de producir la misma ordenación que los números reales subyacentes. Sin embargo, las formas de conseguirlo son absolutamente variadas. En este contexto, las técnicas que se describen suelen denominarse procesos de *ranking*. Precisamente, la Real Academia Española incorpora la palabra anglosajona *ranking*, describiéndola como “clasificación de mayor a menor, útil para establecer criterios de valoración”. En este contexto también se emplea la palabra *clasificación* para referirse a la ordenación cuyo resultado final es el de elegir la mejor opción. Nosotros emplearemos indistintamente estas palabras.

Teniendo en cuenta que no existe una única forma universal y globalmente aceptada para clasificar y/o ordenar números difusos, un rápido repaso a las diversas metodologías empleadas hasta el momento pone de manifiesto los siguientes aspectos. Después del primer acercamiento a este problema, presentado por Jain [39] en 1976, se han introducido muchos métodos de clasificación en las últimas décadas desde diferentes puntos de vista (véase, por ejemplo, [17, 43]). Muy recientemente, Ban y Coroianu [13] introdujeron una extensa revisión sobre el estado actual de este problema. Básicamente distinguieron dos enfoques.

- Métodos basados en los denominados *índices de ordenación* (traducción de la expresión inglesa *ranking index*), que son funciones desde la familia de todos los números difusos que toman valores reales.
- Métodos basados en relaciones binarias difusas.

La elección de uno u otro método de clasificación tiene un efecto notable en la solución del problema y, en función de los resultados obtenidos a partir de algunos ejemplos numéricos, no podemos concluir qué enfoque es mejor. Un enfoque difuso de clasificación se considerará una buena metodología si verifica algunas propiedades que son naturales desde el punto de vista humano. Wang y

Kerre [63] propusieron una lista de propiedades razonables para ordenar cantidades difusas y Ban y Coroianu [13] adaptaron estos requisitos al caso en el que el enfoque utilizado es inducido por una relación binaria general (describiremos estas propiedades en mayor detalle en la Subsección 2.2.6). Lo cierto es que hay metodologías de ordenación que producen resultados absolutamente discordantes con la intuición humana: por ejemplo, si la gráfica de un número difuso está situada a la izquierda de la gráfica de otro número difuso, es natural que consideremos al primero menor que el segundo. Esta propiedad no la respetan todos los algoritmos presentados hasta la fecha (pueden encontrarse algunos ejemplos en [13]).

Desde 1976 se han presentado más de 35 índices de ordenación de números difusos, muchos de los cuales están basados en índices. Un índice es un ejemplo de *defusificación* (traducción literal del inglés *defuzzification*). Una defusificación es un procedimiento por el cual a cada cantidad imprecisa (por ejemplo, un número difuso) se le asocia un único número real que, en algún sentido, resume la mayor cantidad de información posible acerca de la cantidad incierta. Existen muchos ejemplos de defusificaciones (valor esperado, ambigüedad, centro de gravedad, etc.) y cada uno de ellos se aplica en el contexto en el que fue introducido. No obstante, todos presentan el mismo inconveniente: conllevan una importante pérdida de información desde el número difuso hasta su realización a través del número real, pues el proceso contrario es, en general, imposible de llevar a cabo.

Desde nuestro punto de vista, aunque todos los enfoques son interesantes, las clasificaciones generadas por procedimientos basados en la simple ordenación de números reales asociados a cantidades difusas no son consistentes con la idea de vaguedad o incertidumbre que es intrínseca a la teoría difusa. En otras palabras, si el orden entre dos números difusos depende de un número real (por ejemplo, el área entre ellos), este método puede no captar, a la vez, tanto la imprecisión como la incertidumbre y, en consecuencia, no es coherente con factores como la vaguedad y la ambigüedad de variables que pueden afectar al comportamiento del fenómeno estudiado en el contexto difuso. Nos parece más

---

razonable utilizar técnicas genuinamente difusas en lugar de reducir el proceso de ordenación de números difusos a cantidades reales. En consecuencia, consideramos necesario introducir nuevos procedimientos de clasificación que satisfagan tres características principales:

- No deben basarse en un número real único (para evitar la pérdida de información).
- Deben verificar tantas propiedades razonables como sea posible.
- Pero, sobre todo, deben ser tan coherentes con la intuición humana como sea posible.

En este contexto científico se enmarca el tema de investigación de la presente Memoria. Con objeto de afrontar este problema, en 2018, Roldán López de Hierro, Roldán y Herrera presentaron en [56] una nueva metodología de ordenación de cantidades difusas que trataba de solventar algunos de los principales inconvenientes de los procedimientos presentados anteriormente. A la vista de las restricciones antes comentadas, el objetivo principal de su trabajo fue introducir una nueva relación binaria difusa en el conjunto formado por todos los números difusos. De hecho, esta relación puede ser usada en la práctica para comparar dos números difusos distintos. Las principales características de la relación binaria introducida son las siguientes.

1. Permite comparar cualesquiera dos números difusos arbitrarios, no reduciéndose a un subconjunto concreto de ellos (como números triangulares o trapezoidales).
2. Esta relación binaria suele producir resultados acordes a la intuición humana.
3. Tiene especialmente en cuenta la forma geométrica de los números difusos y de los subconjuntos medibles en los que un número difuso es claramente menor o igual que otro número difuso.

4. Como su resultado no depende de un número real único, este método no es un índice de ordenación en sí mismo.
5. Además, es compatible con la suma y la multiplicación por números escalares.
6. De hecho, satisface el mayor número de propiedades razonables que se pueden encontrar en la literatura (incluso más de las descritas en [39, 13]), lo que conlleva que, en la mayoría de los casos, esté en concordancia con la intuición humana.

Los datos difusos analizados en [56] pusieron de manifiesto que la principal ventaja de la metodología propuesta era su capacidad para proporcionar un orden razonable entre los números difusos trapezoidales generalizados considerados. De hecho, es un proceso particularmente simple y fácil de calcular cuando se trabaja con números difusos triangulares y trapezoidales en problemas de la vida real. En su artículo, los autores también explicaron por qué la técnica propuesta no puede ser una relación binaria difusa transitiva.

El interés de este nuevo acercamiento al problema de ordenación de números difusos y, por ende, al problema de toma de decisiones en un ambiente general de incertidumbre, nos llevó a tratar de desentrañar los entresijos de esta nueva relación binaria difusa. En [56] los autores habían dejado varios interrogantes abiertos. Por un lado, el tema principal de investigación que podía derivarse de este trabajo era el de determinar qué otras propiedades, acordes con la intuición humana, verificaba esta relación difusa. Se trataba entonces de buscar nuevas propiedades que pudieran ser características del pensamiento humano y que pudieran ser interpretadas en el contexto difuso. Cuantas más propiedades razonables se verifiquen, mejores serán las ordenaciones propuestas por el método empleado. Por otro lado, podría darse el caso de que un estudio más detallado llevase a la necesidad de modificar dicha relación binaria con objeto de conseguir más y mejores propiedades y clasificaciones (es una posibilidad a la que estamos abiertos en cualquier momento). En todo momento ha sido necesario comparar

---

la metodología original con la empleada por otros investigadores en este campo.

Otro de los interrogantes abiertos en el mencionado artículo era la forma en la que la relación binaria actuaría sobre números difusos trapezoidales. Los números difusos trapezoidales forman una clase muy importante de números difusos porque, en la práctica, son los números difusos más generales que se emplean en los estudios empíricos en este campo de investigación. Es muy extraño encontrar estudios que aludan a números difusos más generales. Todo al contrario, la mayor parte de los estudios se reducen a números difusos triangulares, que son una clase especial de trapezoidales. Este dato no es casual: la clase formada por los números difusos trapezoidales (o triangulares) es lo suficientemente amplia como para satisfacer todas las necesidades generales de modelización con datos imprecisos. Aunque Roldán López de Hierro *et al.* habían descrito con detalle la forma en la que se ordenan dos números difusos triangulares mediante esta relación binaria difusa, también es cierto que ni habían dado todos los detalles de este algoritmo ni habían abordado el interesante caso práctico de los números difusos trapezoidales, que resultaba ser de una complejidad mucho mayor que el de los números difusos triangulares.

El principal objetivo de la presente Memoria es el de desentrañar la forma en que actúa esta relación binaria difusa sobre las categorías más importantes desde el punto de vista práctico de números difusos: crisp, rectangulares, triangulares y, en el caso más general posible, trapezoidales. Para ello, hemos necesitado investigar nuevas propiedades que verifica la relación binaria mencionada, y desarrollar las técnicas matemáticas y estadísticas adecuadas para trabajar con esta clase de números. Nuestro estudio se ha centrado en el caso más complicado posible, en el que las gráficas de los números difusos trapezoidales están entrelazadas, lo que impide, en muchas ocasiones, que la intuición nos proporcione una respuesta inmediata sobre la ordenación final que ha de aceptarse. Por ejemplo, considérense los números difusos trapezoidales de la Figura 1, los cuales son propuestos por nosotros mismos para comparar nuestra metodología de ordenación con la de otros autores (véase el Ejemplo 3.6.4).

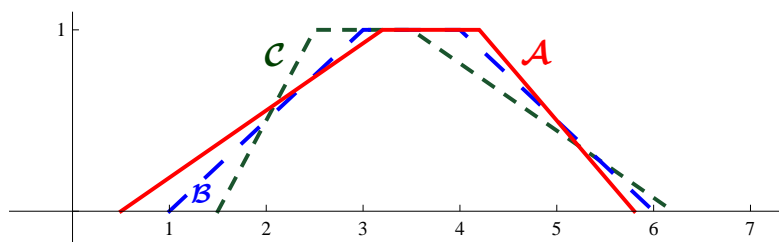


Figura 1: Números difusos trapezoidales cuya ordenación no es una tarea inmediata.

Esta Memoria está organizada de la siguiente manera.

- A lo largo de esta introducción hemos hecho una descripción del problema de investigación planteado.
- En el primer capítulo se describen los objetivos que deseamos alcanzar a la vista de la situación planteada, clasificados en matemáticos y estadísticos, computacionales y, por último, relacionados con la sociedad de la información y de la comunicación.
- El segundo capítulo está dedicado a los antecedentes matemáticos, estadísticos y computacionales que debemos conocer sobre números difusos y sobre las metodologías previas de ordenación de estos para poder comprender el resto de la Memoria. Hacemos un repaso de la noción de *número difuso* y describimos algunas de las clases de números difusos que más se utilizan en los estudios científicos. También damos una interpretación estadística de la noción de número difuso, visto como una forma de construir intervalos de confianza o bien como una función que representa dos funciones de distribución.
- Los principales resultados de la presente Memoria, junto con una completa interpretación de los mismos, se recogen en el tercer capítulo. Su principal objetivo es el de explicar cómo actúa la relación binaria difusa introducida por Roldán López de Hierro *et al.* en [56] cuando se desean comparar dos números difusos trapezoidales.

- En el cuarto capítulo se describe una posible aplicación de la ordenación proporcionada por la relación binaria difusa en el contexto de la necesidad de alcanzar un cierto nivel de consenso entre expertos. Para desarrollar eficientemente este proceso cuando la información es imprecisa y hay un gran número de expertos, adquiere gran importancia la posibilidad de disponer de una herramienta informática que agilice todos los cálculos que deben realizarse. Es por ello que hemos desarrollado una librería en *R*, a la que hemos denominado *rankingTwoTraFNs*, que permite a investigadores o a cualquier persona interesada en esta temática ordenar dos números difusos trapezoidales cualesquiera expresados a través de sus cuatro esquinas. Su implementación concreta se describe también en este capítulo.
- El último capítulo está dedicado a la exposición de conclusiones que pueden extraerse de los resultados obtenidos en la presente Memoria, junto con algunas propuestas para el futuro.
- La parte final incluye las referencias bibliográficas que se han empleado en el estudio junto con la lista de tablas y figuras contenidas en el mismo.





# CAPÍTULO 1

---

## Objetivos

---

Teniendo en cuenta los antecedentes comentados en el capítulo anterior, nos centramos ahora en la descripción de los objetivos generales que nos planteamos alcanzar al principio del periodo de investigación. Podemos clasificarlos en objetivos matemáticos y estadísticos, objetivos computacionales y, finalmente, objetivos de cara a la sociedad de la información y de la comunicación. Comenzamos por éstos últimos pues son los más generales y pueden servir para comprender mejor los siguientes.

### **Objetivos de cara a la sociedad de la información y de la comunicación**

El principal objetivo que nos planteamos desde esta perspectiva fue el de poner a disposición de cualquier persona interesada en esta temática un texto claro y conciso, en castellano, de acceso libre, sobre el concepto de número difuso y sobre sus posibles aplicaciones en el mundo de las matemáticas, de la estadística y de la informática. A lo largo de nuestra experiencia investigadora, hemos encontrado diversos textos que abordan esta cuestión, la mayoría en inglés debido, principalmente, a tres causas: por un lado, suele tratarse de contenidos científicos que requieren una cierta preparación matemática para su comprensión (no están destinados al público en general); por otro lado, la mayoría de ellos han sido escritos por personas angloparlantes; y, finalmente, cuando han sido

escritos por personas de habla no inglesa, su vocación de darlos a conocer a la mayor cantidad de lectores de todo el mundo les ha llevado a decidirse por este idioma.

Nuestro punto de vista es completamente diferente: aunque es cierto que esta temática está impregnada de un fuerte contenido matemático y estadístico, también es cierto que las herramientas empleadas son realmente sencillas, y pueden ser perfectamente manejadas por el alumnado de Bachillerato (e incluso por el alumnado de los últimos cursos de la ESO): números reales, funciones reales de variable real, ordenación numérica, formas geométricas muy sencillas, continuidad, etc. Es por ello que sentimos, desde el principio, la necesidad de escribir un texto que pueda ser utilizado como referencia básica en castellano para acercar al público en general la noción de *número difuso* y su utilidad dentro de las matemáticas, la computación y la toma de decisiones.

En esta línea de investigación relacionada con la estadística, nos pareció de igual forma conveniente introducir, para el público en general, la gran utilidad de los números difusos en contextos estadísticos y probabilísticos, en los que somos conscientes de que ya no nos podemos limitar a considerar números reales como medición de variables naturalmente imprecisas, y cuya variabilidad es modelizada con mayor rigor por *variables aleatorias difusas*. Aunque no será uno de los objetivos de esta Memoria, describiremos cómo un número difuso puede ser interpretado a través de dos funciones de distribución asociadas a variables aleatorias.

Finalmente, consideramos de gran utilidad hacer una somera introducción a los modernos métodos de ranking de números difusos que son empleados actualmente en multitud de contextos científicos y empresariales: toma de decisiones en ambientes de incertidumbre, optimización de procesos industriales, restauración de imágenes digitales, etc. Para ello, el lector interesado debe tener unos conocimientos algo más elevados a nivel matemático y estadístico, pero que son ampliamente conocidos por el alumnado de Bachillerato: funciones elementales, derivación, integración, función inversa, etc.

---

## Objetivos matemáticos y estadísticos

Desde el punto de vista matemático y estadístico, nos planteamos alcanzar los siguientes objetivos.

- Desentrañar en la medida de lo posible la relación binaria difusa  $\preceq$  introducida por Roldán López de Hierro *et al.* en [56].
- Describir la mayor cantidad posible de propiedades de esta relación binaria difusa, prestando especial atención a aquellas propiedades que puedan ser consideradas acordes con el razonamiento o la intuición humana.
- Describir cómo pueden ser utilizados los números difusos como entidades probabilísticas en sí mismos, capaces de generalizar algunos aspectos característicos del pensamiento humano, especialmente en su carácter impreciso al referirse a circunstancias que, bien por su dimensión o su temporalidad, no pueden ser descritos con total precisión.
- Desarrollar una descripción lo más detallada y clara posible de la forma en la que dos números difusos trapezoidales  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  pueden ser ordenados mediante la relación binaria difusa  $\preceq$ .
- Dado que la presente Memoria se centra, principalmente, en el contexto de los números difusos trapezoidales, uno de los objetivos principales es el de describir algunas de sus características, tanto analíticas como geométricas, de esta clase de números difusos, con especial atención a la forma en la que pueden cortarse sus lados (los cuales pueden ser vistos como segmentos rectilíneos en el plano).
- Desarrollar una aplicación de la relación binaria difusa introducida en un contexto estadístico.
- Elaborar un algoritmo que, ejecutado adecuadamente, permita la clasificación y ordenación, en pocos pasos, de dos números difusos trapezoidales.

- Desarrollar una notación clara y precisa, lo suficientemente general, como para trabajar en el ámbito de los números difusos, que unifique las notaciones empleadas por otros autores y sea cómoda a la hora de desarrollar nuevos conceptos y nuevas ideas.
- Elaborar una introducción lo suficientemente amplia para describir las técnicas más modernas que suelen emplearse para la ordenación y clasificación de números difusos, distinguiendo entre metodologías basadas en *índices* o en relaciones binarias más generales. También abordaremos la problemática que plantea cada metodología, capaz de llevar a ordenaciones poco acordes a la intuición humana, que pueden afectar tanto a nosotros mismos como a las personas de nuestro entorno cuando las decisiones son tomadas en ambientes políticos, sociales, económicos, empresariales o médicos.

### **Objetivos informáticos y computacionales**

- Poner al alcance de la comunidad científica en general y de cualquier persona interesada en esta temática en particular, una herramienta, elaborada en software libre, que permita la ordenación de cualesquiera pares de números difusos trapezoidales, expresado a través de sus cuatro esquinas.
- Dicha herramienta debe ser lo suficientemente general como para funcionar en el caso de utilizar subfamilias de números difusos (por ejemplo, reales, rectangulares y/o triangulares).
- Dado su carácter abierto, su enorme potencialidad y la gran atención que está recibiendo en la actualidad tanto en el ámbito científico como en el docente, elegimos el programa informático *R* (también manejable desde *R Studio*) para llevar a cabo esta tarea, pues solo habría que confeccionar una librería que debería ser cargada por las personas que quisiesen utilizarla.
- Poner a disposición del público en general dicha librería, utilizando los repositorios ofrecidos tanto por *R* como por la Universidad de Granada.

- Mostrar la aplicabilidad de los distintos métodos de ranking de números difusos utilizando esta herramienta informática con datos reales o tomados de artículos científicos.
- Utilizar esta herramienta informática para buscar ejemplos de contextos en los que la relación binaria pueda producir resultados tanto acordes como no acordes con la intuición humana (por ejemplo, su no transitividad descrita en Roldán López de Hierro *et al.* [56]).



## CAPÍTULO 2

---

### Metodología. Números difusos y ranking

---

En este capítulo presentamos la metodología que hemos seguido a la hora de desarrollar la investigación que presentamos. Para ello, necesitamos previamente introducir los preliminares básicos que emplearemos a lo largo de la presente Memoria, centrándonos en la noción de *número difuso* sobre la que pivotan casi todos los contenidos que describiremos. Mostraremos sus principales características analíticas y geométricas de cara a poder trabajar con ellos, y algunas de las clases más importantes (especialmente, por su sencillez y por su alto grado de utilización en artículos científicos) de números difusos. Debemos aclarar desde este momento que nuestro interés se centra, especialmente, en la familia formada por todos los números difusos trapezoidales, que contienen a otras subfamilias casi del mismo interés desde el punto de vista práctico. Además, también prestaremos atención a las metodologías de trabajo que han sido empleadas en el pasado por una importante cantidad de investigadores que han afrontado diversos problemas relacionados con los números difusos y, en concreto, describiremos sus métodos de ordenación a través de números reales, relaciones de preferencia o relaciones binarias generales. Para una ampliación de las definiciones y las propiedades que se describen en este capítulo, véase [30, 31, 32].



A lo largo de la presente Memoria, denotaremos por  $\mathbb{R}$  al conjunto formado por todos los números reales  $y$ , dada su enorme importancia en el ambiente difuso, denotaremos por  $\mathbb{I}$  al intervalo compacto (cerrado y acotado) real  $[0, 1]$ . Utilizaremos letras en minúscula como  $x$ ,  $y$ ,  $a$  ó  $b$  para denotar números reales, y reservaremos letras griegas, como  $\alpha$  y  $\beta$ , para referirnos a números reales entre 0 y 1 ( $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ ).

## 2.1. Los números difusos

En general, un *conjunto difuso*  $F$  sobre un conjunto arbitrario  $X$  (no vacío) es cualquier función  $\mu_F : X \rightarrow \mathbb{I}$ . Como hemos comentado en la introducción, el número  $\mu_F(x) \in \mathbb{I}$  representa el grado de certeza que poseemos de que el elemento  $x \in X$  pertenezca, o no, al conjunto difuso. En ocasiones, identificado en cierta manera el conjunto difuso con la gráfica de la función  $\mu_F$ , el conjunto difuso se denota como  $F = \langle x, \mu_F(x) \rangle_{x \in X}$  y la función  $\mu_F$  se denomina *función de pertenencia* del conjunto difuso  $F$ . Cuando  $\mu_F(x_0) = 1$ , entendemos que estamos absolutamente seguros de que el elemento  $x_0$  pertenece al conjunto, y cuando  $\mu_F(x_0) = 0$ , ocurre lo contrario: estamos absolutamente seguros de que  $x_0$  no pertenece al conjunto. Valores intermedios entre 0 y 1 llevan a diversos grados de certidumbre (o de incertidumbre, según se mire).

Para simplificar la notación, nosotros no distinguiremos entre el conjunto difuso  $F$  y su función de pertenencia  $\mu_F$ , utilizando letras enfatizadas como  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  o  $\mathcal{C}$  para referirnos a una clase muy especial de conjuntos difusos como son los números difusos que presentamos a continuación.

### 2.1.1. La noción de número difuso

Como hemos comentado en el capítulo de Introducción, los números difusos son entidades probabilísticas que utilizamos para hacer una representación de la incertidumbre que encontramos al manejar datos ambiguos o imprecisos. En

realidad, el lenguaje humano está lleno de imprecisiones como las siguientes: “nos vemos dentro de un rato”, “esta calle es muy larga”, “póngame una cerveza fresquita”, etc. Sin imprecisión no podríamos vivir, y sin utilizar un lenguaje ambiguo no podríamos entendernos (cuando queremos comprar un lápiz en una librería, por suerte, no necesitamos aclarar el tipo de madera o de grafito, la longitud, la temperatura, su fecha de fabricación, etc.). Para gestionar esta imprecisión utilizamos palabras como “luego”, “casi”, “alrededor de”, “mediano”, “cuanto antes”, etc., que nos dan una idea aproximada según el contexto pero que no nos permiten conocer con total exactitud la información concreta. Su formalización matemática no es nada sencilla. El ambiente de trabajo difuso se ha mostrado en los últimos años como uno de los mejores contextos en lo que se puede trabajar manejando estos grados de imprecisión.

A lo largo del tiempo, son muchas las nociones que se han ido introduciendo de “número difuso”  $X \rightarrow \mathbb{I}$  (véase, por ejemplo, [61, 62, 53, 54]). Es más, hoy en día, cada autor emplea la que le parece más conveniente para su estudio. Las propiedades más usuales que se le exigen a un número difuso  $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$  (y que sirven para extender su definición a conjuntos más generales que  $\mathbb{R}$ , como puede ser el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ ), definido sobre  $\mathbb{R}$ , son las siguientes:

- *Normalidad*: existe un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{A}(x_0) = 1$ ;
- *Convexidad difusa*: para cada  $x, y \in \mathbb{R}$  y cada  $\lambda \in [0, 1]$  se verifica que

$$\mathcal{A}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)\};$$

- *Semicontinuidad superior*: para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  y cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_0) < \varepsilon.$$

Cuando se unifican todas las propiedades anteriores de la forma más compacta posible, se llega a la siguiente definición.

**Definición 2.1.1** Un número difuso sobre  $\mathbb{R}$  es cualquier conjunto difuso  $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$  con la propiedad de que, para cada  $\alpha \in (0, 1]$ , el conjunto  $\mathcal{A}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(x) \geq \alpha\}$  es un subintervalo cerrado y no vacío de  $\mathbb{R}$ .

El conjunto  $\mathcal{A}_\alpha$  se denomina conjunto de nivel  $\alpha$  (o  $\alpha$ -corte) de  $\mathcal{A}$ . Denotaremos por  $\mathcal{F}$  al conjunto formado por todos los números difusos sobre  $\mathbb{R}$ .

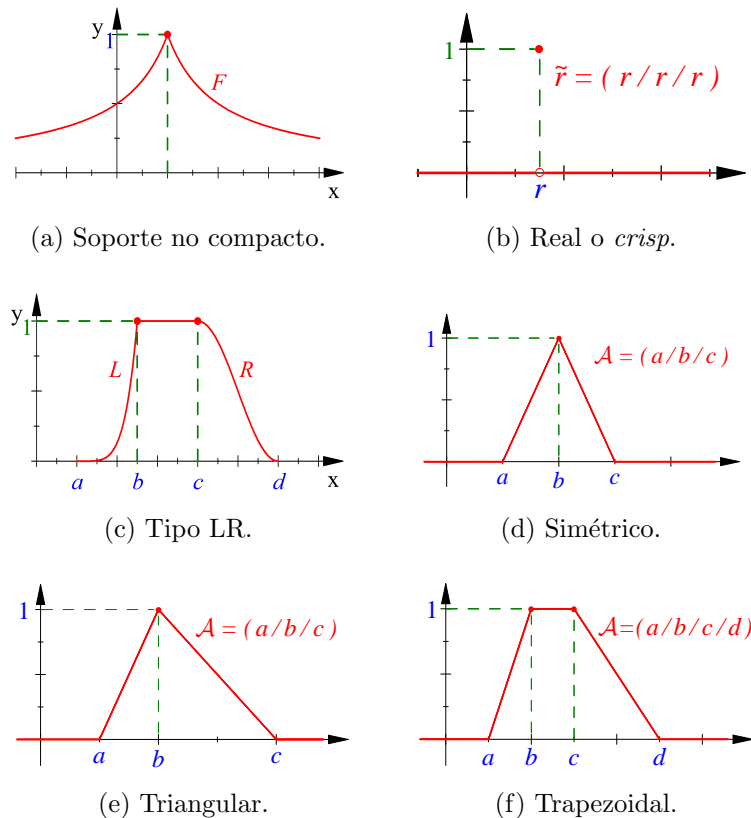


Figura 2.1: Ejemplos de diferentes clases de números difusos.

Teniendo en cuenta que un número difuso no es más que una función real de variable real,  $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ , que cumple ciertas propiedades, una de las mejores formas de comprender cómo son es a través de su gráfica. La Figura 2.1 recopila ejemplos de gráficas de varias clases de números difusos (que más adelante se comentarán en mayor profundidad). Aunque algunas de ellas son funciones discontinuas en algunos puntos, puede observarse que hay una característica común: la función  $\mathcal{A}$  es no decreciente en el intervalo  $(-\infty, x_0]$  (hasta llegar a

un punto  $x_0$  donde se alcanza la condición de normalidad, es decir,  $\mathcal{A}(x_0) = 1$ ) y es no creciente en  $[x_0, +\infty)$ .

### 2.1.2. Elementos analíticos y geométricos asociados a los números difusos

El 1-corte  $\mathcal{A}_1$  de un número difuso  $\mathcal{A}$  se denomina su *núcleo*, y se representa por  $\ker(\mathcal{A})$ . La condición de normalidad garantiza que este núcleo nunca es vacío. Dados  $\alpha, \beta \in (0, 1]$  tales que  $\alpha \leq \beta$ , es claro que  $\emptyset \neq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}_\alpha$ , lo que origina una cadena creciente de intervalos cerrados encajados  $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]}$ . Su unión coincide con el conjunto de puntos en los que el número difuso toma valores estrictamente positivos:

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1]} \mathcal{A}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(x) > 0\}.$$

La clausura en la topología euclídea de  $\mathbb{R}$  de este conjunto se denomina el *soporte* del número difuso, y se denota por  $\text{sop}(\mathcal{A})$ .

$$\text{sop}(\mathcal{A}) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(x) > 0\}} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} \mathcal{A}_\alpha}.$$

La Figura 2.2 representa el núcleo y el soporte de un número difuso trapezoidal.

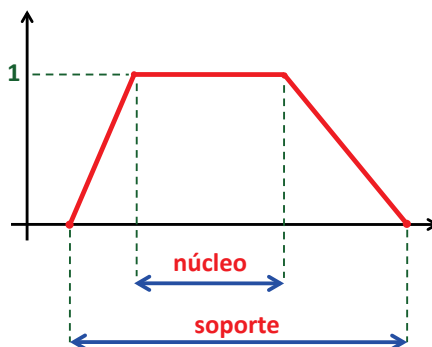


Figura 2.2: El núcleo y el soporte de un número difuso trapezoidal.

Aunque la noción que hemos introducido de número difuso puede dar lugar a números difusos cuyo soporte no es acotado en  $\mathbb{R}$  (véase, por ejemplo, la Figura 2.3), en lo que sigue sólo consideraremos números difusos cuyo soporte es compacto (es decir, cerrado y acotado) y, por coherencia, lo denotaremos por  $\mathcal{A}_0$  (o sea,  $\mathcal{A}_0 = \text{sop}(\mathcal{A})$ ).

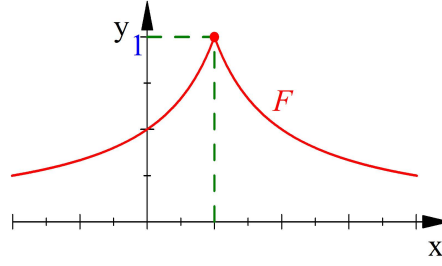


Figura 2.3: Un número difuso cuyo soporte no es compacto.

Fijado cualquier  $\alpha \in \mathbb{I}$ , el  $\alpha$ -corte (o el soporte)  $\mathcal{A}_\alpha$  de un número difuso  $\mathcal{A}$  es un intervalo cerrado real y, dado que  $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_0$  y este último conjunto suponemos que es acotado, entonces cada  $\mathcal{A}_\alpha$  es un intervalo compacto y no vacío de la recta real. Como tal, posee un extremo inferior, al que denotaremos por  $\underline{a}_\alpha$ , y un extremo superior,  $\bar{a}_\alpha$ . De esta forma, podemos expresar cada  $\alpha$ -corte como

$$\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha],$$

siendo  $\ker \mathcal{A} = [\underline{a}_1, \bar{a}_1]$  y  $\text{sop} \mathcal{A} = [\underline{a}_0, \bar{a}_0]$ . Surgen así las funciones  $\underline{a}, \bar{a} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  que determinan los extremos inferior y superior, respectivamente, de cada  $\alpha$ -corte (identificamos  $\underline{a}(\alpha) = \underline{a}_\alpha$  y  $\bar{a}(\alpha) = \bar{a}_\alpha$  para cada  $\alpha \in \mathbb{I}$ ). Teniendo en cuenta que  $\emptyset \neq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_0$ , deducimos que

$$\underline{a}_0 \leq \underline{a}_\alpha \leq \underline{a}_\beta \leq \underline{a}_1 \leq \bar{a}_1 \leq \bar{a}_\beta \leq \bar{a}_\alpha \leq \bar{a}_0$$

para cada  $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$  tales que  $\alpha \leq \beta$ . Las funciones  $\underline{a}, \bar{a} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  caracterizan completamente el número difuso  $\mathcal{A}$  a través de las propiedades que verifican.

**Lema 2.1.2** (Véase [36]) Un conjunto difuso  $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$  es un número difuso si, y solo si, existen dos funciones continuas a la izquierda  $\underline{a}, \bar{a} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\underline{a}$  es no decreciente,  $\bar{a}$  es no creciente y  $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$  para todo  $\alpha \in \mathbb{I}$ .

De esta forma, es equivalente conocer la función de pertenencia  $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$  o las funciones  $\underline{a}, \bar{a} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  que determinan los conjuntos de nivel mediante la expresión  $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$  para todo  $\alpha \in \mathbb{I}$ .

**Observación 2.1.3** *Aunque nosotros hemos preferido la notación  $\underline{a}$  y  $\bar{a}$  para las funciones que determinan los extremos inferior y superior, respectivamente, de cada conjunto de nivel de un número difuso  $\mathcal{A}$ , muchos autores emplean la notación  $A_L, A_U : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  para referirse a dichas funciones ( $L$  de lower y  $U$  de upper), escribiendo*

$$A(\alpha) = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] \quad \text{para cada } \alpha \in [0, 1],$$

*siendo  $A$  el número difuso. Esta notación no es mejor ni peor, solamente es distinta.*

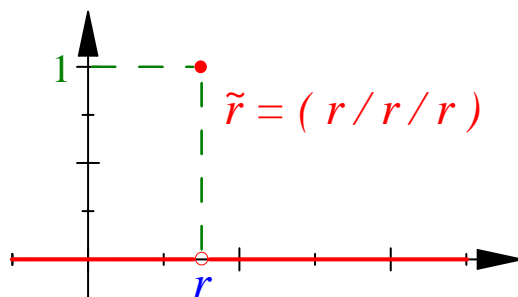
### 2.1.3. Algunas clases de números difusos

En la práctica, la familia formada por todos los números difusos es muy amplia. De esta forma, es usual considerar diferentes clases de números difusos que son capaces de modelizar distintos fenómenos observados. A continuación, describimos algunas de estas subfamilias cuya clasificación está basada en la representación gráfica del número difuso y, más concretamente, en su forma geométrica.

#### Números difusos *crisp*

Generalmente nos sirven para representar cualquier número real como un número difuso. Dado un número real  $r \in \mathbb{R}$ , su correspondiente versión difusa es el número difuso *crisp*  $\tilde{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$  que viene dado, como función, de la siguiente forma:

$$\tilde{r}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = r, \\ 0, & \text{si } x \neq r. \end{cases}$$

Figura 2.4: Número difuso *crisp*.

### Números difusos rectangulares

Diremos que un número difuso  $\mathcal{A}$  es **rectangular** si se puede expresar de la forma:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a, b], \\ 0, & \text{si } x \notin [a, b], \end{cases}$$

siendo  $a, b \in \mathbb{R}$  dos números reales tales que  $a \leq b$ . Su nombre procede de la forma rectangular que adopta su gráfica (véase la Figura 2.5). En el caso de que  $a$  y  $b$  coincidan, el número rectangular es un número difuso *crisp*, ya que su gráfica sería un rectángulo degenerado<sup>1</sup>.

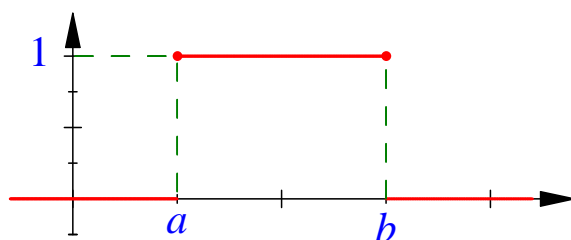


Figura 2.5: Número difuso rectangular.

<sup>1</sup>Es un caso donde la clase de un objeto cambia a un objeto generalmente más simple. Los casos degenerados son limitación, significando que el objeto original no se puede cambiar más lejos.

### Números difusos triangulares

Dados tres números reales  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que  $a \leq b \leq c$ , denotaremos por  $\mathcal{A} = (a/b/c)$  al número difuso **triangular** dado por:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{si } b < x \leq c, \\ 0, & \text{si } x \notin [a, c]. \end{cases}$$

Si  $a < b < c$ , la gráfica del número difuso  $(a/b/c)$  adopta la forma de un triángulo de base  $[a, c]$  y vértice en  $x = b$  (véase la Figura 2.6). Por ello, esta clase de números difusos es la más utilizada en la práctica: es muy sencilla tanto de manejar como de interpretar.

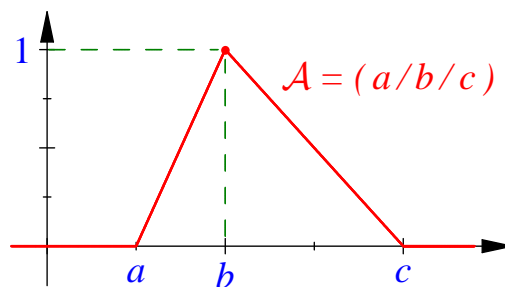


Figura 2.6: Número difuso triangular.

En la Figura 2.7 pueden observarse diferentes clases de números difusos triangulares. Observándola podemos comprender mejor por qué los llamamos *generalizados*: no sólo aceptamos la posibilidad de que la gráfica sea la de un triángulo a través de una función continua, sino que entendemos que funciones no continuas también dan lugar a números difusos triangulares. Lo único que le pedimos es que si tienen “*lados*” izquierdo y derecho, estos deben ser rectilíneos, y solo podrán tener un vértice superior.

Dado cualquier  $\alpha \in \mathbb{I}$ , el  $\alpha$ -corte del número difuso triangular  $\mathcal{A} = (a/b/c)$  es:

$$\mathcal{A}_\alpha = [ (1 - \alpha)a + \alpha b, (1 - \alpha)c + \alpha b ].$$



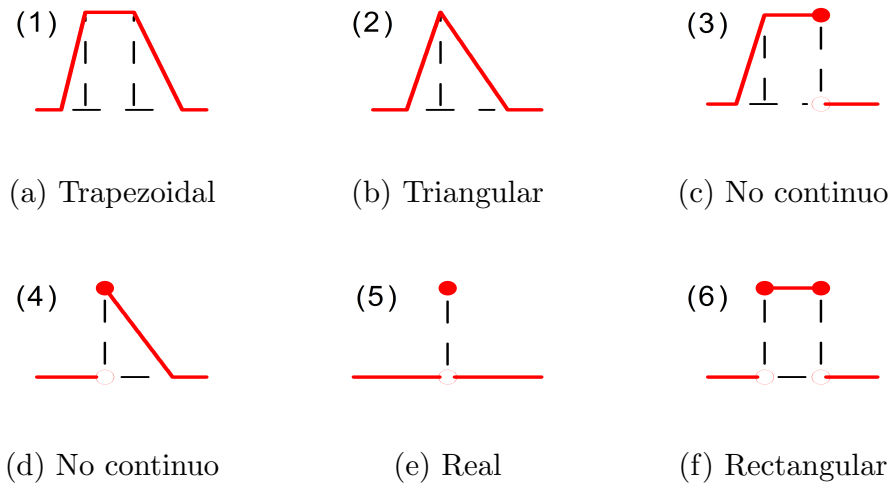


Figura 2.7: Distintas clases de números difusos triangulares (generalizados).

En el caso concreto de que  $\alpha = 0$ , obtenemos el intervalo  $[a, c] = \text{sop } \mathcal{A}$ , y si  $\alpha = 1$ , encontramos el vértice  $\{b\} = \text{ker } \mathcal{A}$ . Además, si  $b = \frac{a+c}{2}$ , diremos que el número difuso triangular es *simétrico* (véase la Figura 2.8.a).

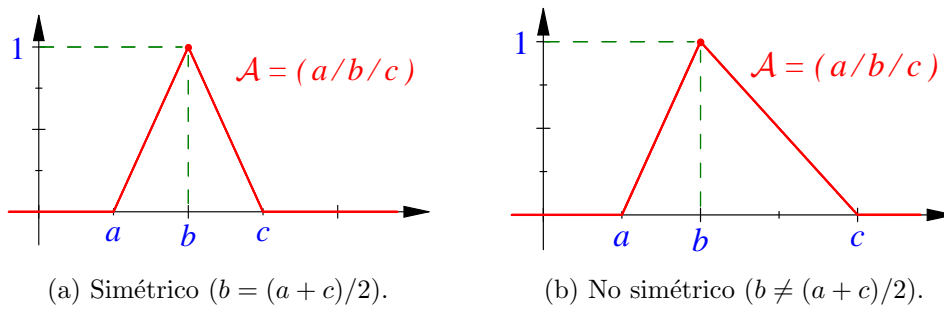


Figura 2.8: Ejemplos de números difusos triangulares (simétrico y no simétrico).

Obsérvese que los números difusos triangulares generalizados podrían no ser continuos, como vemos en la Figura 2.9.

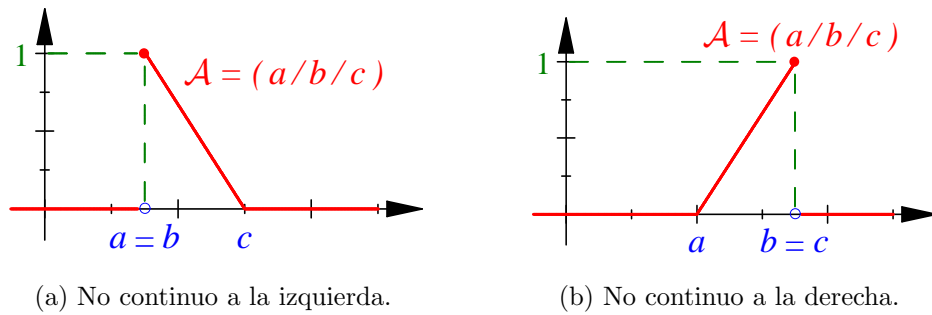


Figura 2.9: Números difusos triangulares no continuos.

### Números difusos trapezoidales

Dados cuatro números reales  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que  $a \leq b \leq c \leq d$ , denotaremos por  $\mathcal{A} = (a/b/c/d)$  al número difuso **trapezoidal** definido como sigue:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a < x < b, \\ 1, & \text{si } b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{si } c < x < d, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Los números reales  $a, b, c$  y  $d$  se denominan las *esquinas* del número difuso  $(a/b/c/d)$ . Si  $a < b < c < d$ , la gráfica del número difuso  $(a, b, c, d)$  es un trapecio de base mayor  $[a, d]$ , base menor  $[b, c]$  y altura una unidad (véase la Figura 2.10.a).

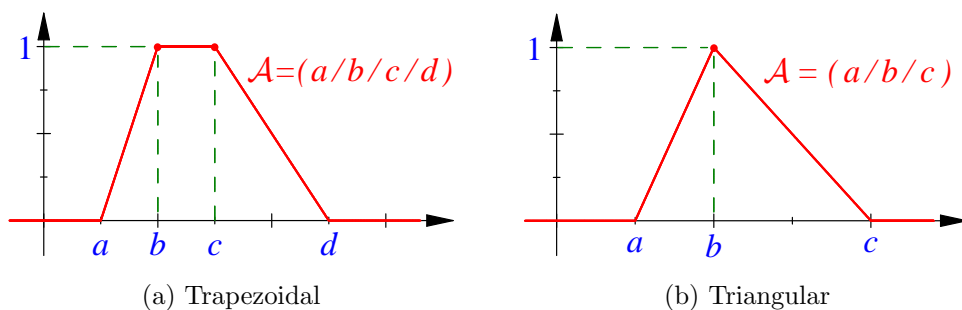


Figura 2.10: Número difuso trapezoidal (comparado con uno triangular).

**Proposición 2.1.4** Dado cualquier  $\alpha \in \mathbb{I}$ , el  $\alpha$ -corte del número difuso trapezoidal  $\mathcal{A} = (a/b/c/d)$  es:

$$\mathcal{A}_{[\alpha]} = [ (1 - \alpha)a + \alpha b, (1 - \alpha)d + \alpha c ].$$

Si  $\alpha = 0$ , obtenemos el intervalo  $[a, d] = \text{sop } \mathcal{A}$ , mientras que si  $\alpha = 1$ , encontramos el intervalo  $[b, c] = \text{ker } \mathcal{A}$ . Una de las ventajas fundamentales de los números difusos trapezoidales es que, dentro de su definición, atrapa a las categorías anteriores, es decir, los números difusos *crisp*, rectangulares y triangulares pueden verse como casos particulares de los números difusos trapezoidales.

**Caso 2.1.5**  $a = b = c = d \rightarrow$  número difuso *crisp*.

**Caso 2.1.6**  $a = b \leq c = d \rightarrow$  número difuso *rectangular*.

**Caso 2.1.7**  $a \leq b = c \leq d \rightarrow$  número difuso *triangular*.

Los números difusos trapezoidales se usan cuando nuestra información nos indica que una medida toma valores, con la máxima probabilidad, en el intervalo  $[b, c]$ . No obstante, asumiendo que puede haber un cierto error en la medición, el mencionado valor real debe estar, necesariamente, comprendido en  $[a, d] \supseteq [b, c]$ .

## Números difusos de tipo LR

Los números difusos de tipo LR (del inglés, *left-right*) se obtienen al considerar funciones más generales que las lineales en los lados del trapecio.

**Definición 2.1.8** Dados cuatro números reales  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b \leq c < d$ , sean  $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{I}$  y  $R : [c, d] \rightarrow \mathbb{I}$  funciones continuas tales que  $L$  es estrictamente creciente,  $R$  es estrictamente decreciente,  $L(a) = 0 = R(d)$  y  $L(b) = 1 = R(c)$ . Un **número difuso de tipo LR** viene definido por la

siguiente función:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} L(x), & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{si } b < x < c, \\ R(x), & \text{si } c \leq x \leq d, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

La idea de esta clase de números difusos consiste en permitir que la parte creciente de la izquierda del núcleo no sea necesariamente rectilínea, sino que venga dada por una función creciente y continua  $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{I}$ , biyectiva de  $[a, b]$  en  $\mathbb{I}$ , y su parte derecha mediante una función  $R : [c, d] \rightarrow \mathbb{I}$  de similares características pero estrictamente decreciente (véase la Figura 2.11). Obviamente, se trata de una clase de números difusos más general que las presentadas anteriormente ya que, a partir de esta definición, podemos construir cualquiera de los tipos de números difusos anteriores. Por ejemplo, si las funciones  $L$  y  $R$  son afines, tendremos un número trapezoidal, y ya observamos anteriormente que a partir de un trapezoidal se obtienen las otras tres clases.

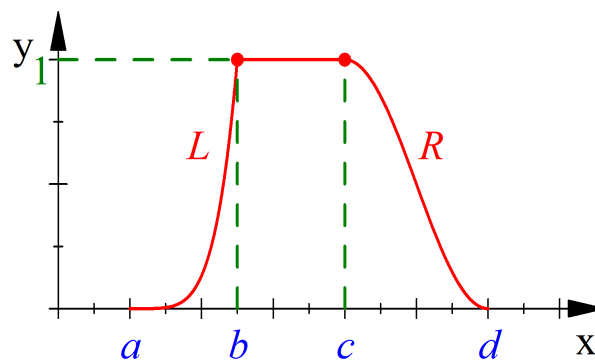


Figura 2.11: Número difuso tipo LR.

Nuestro interés para el desarrollo de los resultados que presentamos en esta Memoria se centra únicamente en el conjunto de números difusos que satisfacen la *condición de normalidad*, es decir, toman el valor 1 en algún punto (existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{A}(x_0) = 1$ ). No obstante, otros autores han considerado en el pasado números difusos que pueden no verificar esta condición. Dado que más adelante presentaremos los métodos de ranking que han sido propuestos por

algunos de estos autores (para darle un carácter autocontenido a esta Memoria), es conveniente que extendamos la definición anterior a este caso aún más general, especialmente por introducir la notación empleada por los mencionados autores.

Un número difuso de tipo LR que no satisfaga necesariamente la condición de normalidad viene dado por una función del siguiente tipo:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} L(x), & \text{si } a \leq x \leq b, \\ \omega, & \text{si } b < x < c \\ R(x), & \text{si } c \leq x \leq d \\ 0, & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

donde  $0 < \omega \leq 1$  es una constante,  $L : [a, b] \rightarrow [0, \omega]$  es una función continua estrictamente creciente,  $R : [c, d] \rightarrow [0, \omega]$  es una función continua estrictamente decreciente, y ambas son biyectivas entre los intervalos indicados, es decir,  $L(a) = 0 = R(d)$  y  $L(b) = \omega = R(c)$ . En tal caso, denotaremos al número difuso trapezoidal utilizando la notación  $\mathcal{A} = (a/b/c/d; \omega)$ .

Dado que las funciones  $L : [a, b] \rightarrow [0, \omega]$  y  $R : [c, d] \rightarrow [0, \omega]$  son estrictamente monótonas y biyectivas, existen sus correspondientes funciones inversas,

$$L^{-1} : [0, \omega] \rightarrow [a, b] \quad \text{y} \quad R^{-1} : [0, \omega] \rightarrow [c, d],$$

las cuales también son biyectivas (entre los intervalos indicados) y estrictamente monótonas ( $L^{-1}$  es estrictamente creciente y  $R^{-1}$  es estrictamente decreciente). Es más, como  $L$  y  $R$  son continuas, sus inversas  $L^{-1}$  y  $R^{-1}$  también son continuas. Incluso al estar definidas en intervalos cerrados y acotados, está garantizado que son funciones localmente integrables (es decir, integrables en cualquier subintervalo cerrado y acotado incluido en su dominio), por lo que existen los valores

$$\int_0^\omega L^{-1}(r)dr \quad \text{y} \quad \int_0^\omega R^{-1}(r)dr.$$

Si observamos, las funciones  $L$  y  $R$  pueden ser vistas como las restricciones a ciertos subintervalos reales de la función de pertenencia  $\mathcal{A}$ , es decir,

$$L = \mathcal{A}|_{[a,b]} \quad \text{y} \quad R = \mathcal{A}|_{[c,d]}.$$

Sus inversas,  $L^{-1} : [0, \omega] \rightarrow [a, b]$  y  $R^{-1} : [0, \omega] \rightarrow [c, d]$  determinan los extremos de los correspondientes conjuntos de nivel, por lo que, en realidad, para un número difuso  $\mathcal{A}$  de tipo LR, se verifica:

$$L^{-1}(\alpha) = \underline{a}_\alpha \quad \text{y} \quad R^{-1}(\alpha) = \bar{a}_\alpha \quad \text{para cada } \alpha \in [0, \omega].$$

Por ello, la traducción de la Proposición 2.1.4 al conjunto de números trapecoidales que no satisfacen necesariamente la condición de normalidad es la siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{a}_\alpha &= L^{-1}(\alpha) = a + \frac{(b-a)\alpha}{\omega}, & 0 < \alpha \leq 1, \\ \bar{a}_\alpha &= R^{-1}(\alpha) = d - \frac{(d-c)\alpha}{\omega}, & 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

#### 2.1.4. Interpretación estadística de la noción de número difuso

Los *números difusos* fueron concebidos como entidades matemáticas que sirviesen para generalizar la noción de *número real* a un ambiente de incertidumbre, en el que no estuviésemos absolutamente seguros del valor exacto de una cierta cantidad. Por ejemplo, podemos decir que un lápiz mide 15 *cm* pero, si somos capaces de medir con mayor precisión, seguramente observemos que esta medida es incorrecta. Como comentamos en la introducción, trabajar con números que ya son capaces de manejar, por sí mismos, esta imprecisión, produce mejores resultados que trabajar con números exactos (sabiendo que estos dependen de la precisión del aparato de medida).

Un primer contexto en el que surge de manera natural cierta indeterminación en nuestra vida cotidiana podría ser el siguiente. Consideremos el siguiente enunciado.

*«María cree firmemente que su nota en el último examen que ha realizado está entre 7 y 7.25 puntos. No obstante, hay factores (que*

*no ha considerado María) que podrían hacer que su nota fuese mayor o menor en medio punto.»*

Esta situación de incertidumbre se adapta perfectamente a la noción de número difuso trapezoidal. En concreto, si María cree firmemente que ha obtenido una nota entre 7 y 7.25 puntos, su núcleo será  $\ker \mathcal{A} = [7, 7.25]$ . No obstante, si la nota pudiera ser 0.5 puntos mayor o menor, su soporte será más grande, obteniéndose  $\text{sop } \mathcal{A} = [7 - 0.5, 7.25 + 0.5] = [6.5, 7.75]$ . Así, el número difuso trapezoidal considerado es  $\mathcal{A} = (6.5/7/7.25/7.75)$ , cuya representación gráfica podemos observar en la Figura 2.12.

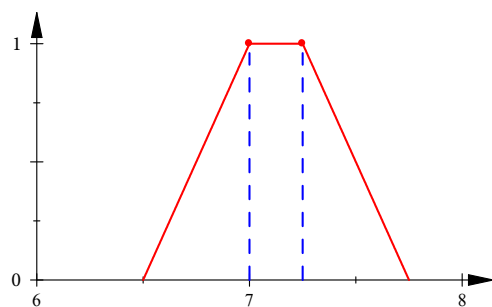


Figura 2.12: Número difuso trapezoidal  $\mathcal{A} = (6.5/7/7.25/7.75)$ .

Sin embargo, los números difusos son capaces de representar situaciones mucho más complejas que las anteriores, especialmente en el contexto de la Estadística y de la Probabilidad. Como hemos puesto de manifiesto al introducir los números difusos de tipo LR, la representación gráfica de cualquier número difuso tiene una parte creciente (entre 0 y 1) a la izquierda del núcleo y una parte decreciente a la derecha del mismo. En concreto, el Lema 2.1.2 garantiza que si  $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$  es un número difuso, entonces las funciones  $\underline{a}, \bar{a} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas a la izquierda, y además  $\underline{a}$  es no decreciente y  $\bar{a}$  es no creciente. De hecho, es sencillo demostrar que si  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$  es cualquier número difuso (de soporte compacto) y  $x_0 \in \ker \mathcal{A}$  es cualquier punto de su núcleo, entonces se verifican las siguientes propiedades:

- la función  $\mathcal{A}|_{(-\infty, x_0]} : (-\infty, x_0] \rightarrow \mathbb{I}$  es continua a la derecha, no decreciente

y verifica  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(t) = 0$  y  $\mathcal{A}(x_0) = 1$ ;

- la función  $\mathcal{A}|_{[x_0, \infty)} : [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{I}$  es continua a la izquierda, no creciente y verifica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}(t) = 0$  y  $\mathcal{A}(x_0) = 1$ .

De esta forma, la función  $\mathcal{A}|_{(-\infty, x_0]}$ , extendida a todo  $\mathbb{R}$  mediante el valor 1 en el intervalo  $(x_0, \infty)$ , es una *función de distribución en  $\mathbb{R}$*  (que llega a tomar los valores 0 y 1 en tiempo finito) que modeliza una variable aleatoria real. Por otro lado, la función  $\mathcal{A}|_{[x_0, \infty)}$ , extendida a todo  $\mathbb{R}$  mediante el valor 1 en el intervalo  $(-\infty, x_0)$ , es conocida como *función de supervivencia en  $\mathbb{R}$* , pues suele emplearse para modelizar experimentos en los que se mide, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , la probabilidad de que un animal siga vivo en el momento de tiempo  $t$  (por ello va disminuyendo con el paso del tiempo).

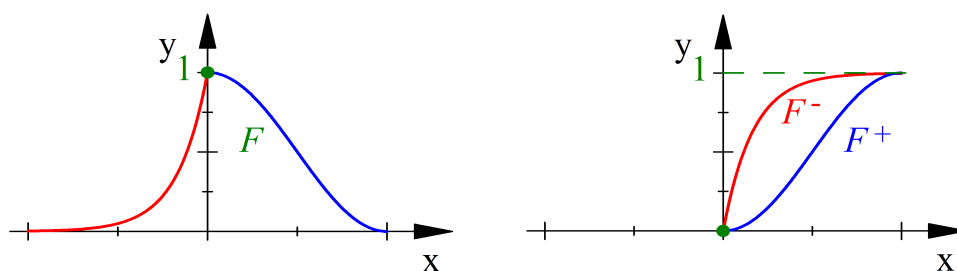


Figura 2.13: Un número difuso descompuesto en sus dos funciones de distribución.

Uniendo estas dos interpretaciones en un sólo concepto, cada número difuso puede ser visto como una pareja de funciones de distribución, a saber,  $(\mathcal{A}|_{(-\infty, x_0]}, 1 - \mathcal{A}|_{[x_0, \infty)})$  (extendidas convenientemente a todo  $\mathbb{R}$ ), como se ha representado en la Figura 2.13.

Esta interpretación de los números difusos como pares de funciones de distribución fue utilizada por Roldán *et al.* en [55] para estudiar interrelaciones entre muy diversas clases de espacios métricos abstractos: espacios métricos probabilísticos, co-espacios métricos probabilísticos, espacios métricos probabilísticos intuicionistas, espacios métricos difusos en el sentido de Kaleva y Seikkala, espacios métricos difusos intuicionistas, espacios métricos difusos en el sentido de Kramosil y Michálek, espacios métricos difusos en el sentido de George y



Veeramani y espacios de Menger.

Ver cada número difuso como un par de funciones de distribución nos permite también interpretar cada conjunto de nivel  $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$  como un intervalo al que pertenece el verdadero valor de la cantidad incierta representada con seguridad  $1 - \alpha$ , es decir, como un *intervalo de confianza*. De esta forma, cada método de construcción de una cierta clase de intervalos de confianza (por ejemplo, para la media poblacional o para el cociente de varianzas poblacionales) puede ser interpretado como un cierto número difuso de tal forma que cuando calculamos el correspondiente intervalo de confianza (por ejemplo, al nivel  $\alpha = 0,05$ ) obtenemos únicamente un conjunto de nivel del tipo  $\mathcal{A}_{0,05}$ . Esto es lo que ocurre en la Figura 2.14, donde observamos el número difuso de tipo LR que obtendríamos si representamos los extremos inferior y superior de cada intervalo de confianza para la media poblacional  $\mu$  cuando la desviación típica poblacional es conocida ( $\sigma = 6$ ) y se ha tomado una muestra de tamaño  $n = 64$ , la cual ha arrojado una media muestral de  $\bar{x} = 35$ .

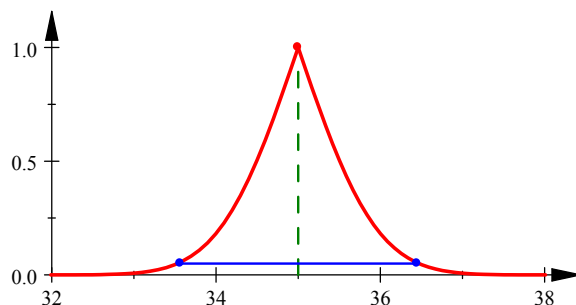


Figura 2.14: Número difuso de tipo LR obtenido al representar los intervalos dados mediante  $IC(\mu) = \left[ \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$  variando  $\alpha \in \mathbb{I}$ .

Para terminar este repaso acerca de algunas aplicaciones sencillas de los números difusos (hay muchas más), comentamos la posibilidad de utilizarlos para representar ciertas *etiquetas lingüísticas* que empleamos en nuestra vida cotidiana para expresar una idea sin necesidad de ofrecer una precisión total, sino un significado lo suficientemente ambiguo como para entendernos suficientemente. Es el caso de las expresiones “casi”, “luego”, “más tarde”, “alrededor de”,

“*mediano*”, etc. Por ejemplo, la frase “*llegaré sobre las ocho*” es una afirmación que comunica una idea clara, pero ésta es lo suficientemente vaga o imprecisa como para dejar cierta flexibilidad a quien la ejecuta. Estas expresiones pueden traducirse en muchas ocasiones en números difusos, como lo que luego se puede operar aritméticamente. Veamos un ejemplo. Imaginemos un contexto en el que tenemos que expresar nuestro grado de satisfacción respecto de un servicio que nos han ofrecido. Para ello, es usual emplear etiquetas lingüísticas como las siguientes:

$$\{ \text{“muy malo”, “malo”, “regular”, “bueno”, “muy bueno”} \}. \quad (2.1)$$

Este conjunto está totalmente ordenado, pero no nos permite operar aritméticamente por ejemplo para calcular una valoración media de una gran cantidad de clientes. Además, tiene el inconveniente de que, al expresar una opinión subjetiva, no está claro el límite entre dos etiquetas consecutivas. Quizá un día valoremos el servicio como “*regular*” y, al siguiente día, siendo el mismo servicio, lo valoremos como “*bueno*”. Este inconveniente desaparece cuando pasamos de una escala discreta a una escala continua. Sin entrar en mucho detalle, las etiquetas lingüísticas del conjunto (2.1) pueden expresarse como números difusos triangulares mediante las identificaciones que se muestran en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Equivalencias entre etiquetas lingüísticas y números triangulares.

Etiqueta lingüística	Número difuso triangular
“ <i>muy malo</i> ”	(0/0/0.25)
“ <i>malo</i> ”	(0/0.25/0.5)
“ <i>regular</i> ”	(0.25/0.5/0.75)
“ <i>bueno</i> ”	(0.5/0.75/1)
“ <i>muy bueno</i> ”	(0.75/1/1)

La Figura 2.15 muestra la representación gráfica de los números difusos considerados en la Tabla 2.1.

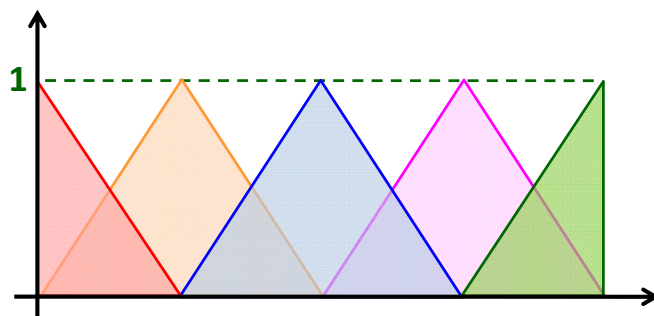


Figura 2.15: Números difusos triangulares que representan las etiquetas de una variable lingüística.

### 2.1.5. Operaciones con números difusos

Como ya hemos comentado anteriormente, los números difusos nacen a partir de la idea de extender los números reales a un ambiente de incertidumbre. Por tanto, como extensiones de números reales, también es necesario extender las operaciones aritméticas básicas a este conjunto. Como los números difusos son funciones, podríamos creer que las operaciones usuales entre funciones también podrían resolver este problema. Sin embargo, no es así. Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son dos números difusos tales que  $\mathcal{A}(x_0) = \mathcal{B}(x_0) = 1$  para cierto valor  $x_0$ , entonces  $\mathcal{A}(x_0) + \mathcal{B}(x_0) = 2$ , lo que significa que la función suma  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  no es un número difuso.

En esta sección presentamos las operaciones con números difusos a través de la *aritmética intervalar* y a través del *principio de extensión de Zadeh*. De ambas formas se llega al mismo resultado en el caso de las operaciones con números difusos.

#### La aritmética entre números difusos (a partir de la aritmética intervalar)

Denotemos por  $\diamond$  a una operación aritmética básica entre números reales (suma  $+$ , resta  $-$ , multiplicación  $\cdot$ , división  $/$ ). Sea  $\mathcal{I}$  la familia de intervalos reales, no vacíos y compactos. Dados  $[a, b], [d, e] \in \mathcal{I}$ , se define:

$$[a, b] \diamond [d, e] = \{ s \diamond t : a \leq s \leq b, d \leq t \leq e \}.$$

Puede demostrarse que  $[a, b] \diamond [d, e]$  es otro intervalo de  $\mathcal{I}$ . Además:

- $[a, b] + [d, e] = [a + d, b + e]$ .
- $[a, b] - [d, e] = [a - d, b - e]$ .
- Si  $\Pi = \{ad, ae, bd, be\}$ , entonces  $[a, b] \cdot [d, e] = [ \text{mín } \Pi, \text{ máx } \Pi ]$ .
- Si  $\Lambda = \{\frac{a}{d}, \frac{a}{e}, \frac{b}{d}, \frac{b}{e}\}$ , entonces  $[a, b] / [d, e] = [ \text{mín } \Lambda, \text{ máx } \Lambda ]$  siempre que  $0 \notin [d, e]$ .

Teniendo en cuenta la aritmética intervalar que acabamos de introducir, es posible definir las cuatro operaciones básicas con números difusos utilizando los conjuntos de nivel. De esta forma, se consideran las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}, \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B})_\alpha &= [ \underline{a}_\alpha + \underline{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha + \bar{b}_\alpha ], \\
 &\quad \underline{c}_\alpha = \underline{a}_\alpha + \underline{b}_\alpha, \quad \bar{c}_\alpha = \bar{a}_\alpha + \bar{b}_\alpha; \\
 \mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}, \quad (\mathcal{A} - \mathcal{B})_\alpha &= [ \underline{a}_\alpha - \bar{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha - \underline{b}_\alpha ], \\
 &\quad \underline{c}_\alpha = \underline{a}_\alpha - \bar{b}_\alpha, \quad \bar{c}_\alpha = \bar{a}_\alpha - \underline{b}_\alpha; \\
 \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}, \quad (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})_\alpha &= [ \text{mín } \Delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha, \text{ máx } \Delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha ], \\
 &\quad \text{donde } \Delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha = \{ \underline{a}_\alpha \underline{b}_\alpha, \underline{a}_\alpha \bar{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha \underline{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha \bar{b}_\alpha \}; \\
 \mathcal{C} = \mathcal{A} / \mathcal{B}, \quad (\mathcal{A} / \mathcal{B})_\alpha &= [ \text{mín } \Lambda_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha, \text{ máx } \Lambda_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha ], \\
 &\quad \text{donde } \Lambda_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha = \{ \underline{a}_\alpha / \underline{b}_\alpha, \underline{a}_\alpha / \bar{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha / \underline{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha / \bar{b}_\alpha \}.
 \end{aligned}$$

(la división  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  solo está bien definida cuando el número cero no pertenece al soporte de  $\mathcal{B}$ ). Obsérvese que la aritmética con números difusos determina una estructura semilineal, lo que implica que no existe una definición aplicable en general para la diferencia de valores difusos que preserve la conexión con la suma en el caso numérico ya que, curiosamente,  $\mathcal{A} - \mathcal{A} \neq \tilde{0}$ .

Cuando los números difusos son triangulares, la suma y la resta son muy sencillas de calcular, pues sólo hay que actuar sumando o restando sobre las

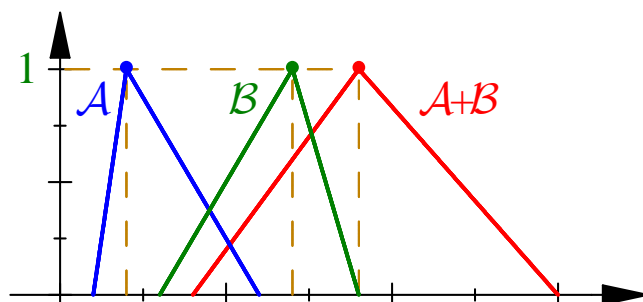


Figura 2.16: Representación gráfica de la suma de dos números difusos triangulares.

esquinas (véase la Figura 2.16).

$$(a_1/b_1/c_1) + (a_2/b_2/c_2) = (a_1 + a_2/b_1 + b_2/c_1 + c_2),$$

$$(a_1/b_1/c_1) - (a_2/b_2/c_2) = (a_1 - c_2/b_1 - b_2/c_1 - a_2).$$

### El principio de extensión de Zadeh

Desde el punto de vista de Zadeh, podemos realizar la siguiente definición.

**Definición 2.1.9** Si  $\diamond$  es una operación aritmética básica, entonces dados dos números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  se define  $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B}$  mediante:

$$(\mathcal{A} \diamond \mathcal{B})(x) = \sup(\min\{\mathcal{A}(s), \mathcal{B}(t)\} : s \diamond t = x) \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

De esta forma, puede probarse que  $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B}$  es otro número difuso. No obstante, la división  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  sólo puede considerarse cuando  $0 \notin \text{sop } \mathcal{B}$ . Como casos concretos, tenemos las siguientes definiciones:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) = \sup_{x=s+t} \min\{\mathcal{A}(s), \mathcal{B}(t)\},$$

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B})(x) = \sup_{x=s-t} \min\{\mathcal{A}(s), \mathcal{B}(t)\},$$

$$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x) = \sup_{x=s \cdot t} \min\{\mathcal{A}(s), \mathcal{B}(t)\},$$

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\right)(x) = \sup_{x=\frac{s}{t}} \min\{\mathcal{A}(s), \mathcal{B}(t)\}.$$

Esta definición es equivalente a la definición que surge cuando se emplea la aritmética intervalar.

## 2.2. Metodologías de ranking con números difusos

En la toma de decisiones, frecuentemente se utilizan cantidades difusas para describir las mediciones que surgen en el mundo real. En este contexto, el *ranking* (o elección de alternativas, o clasificación de números difusos) es una herramienta esencial del proceso de decisión. A diferencia de los números reales, las cantidades difusas no están ordenadas de manera natural de una forma coherente con la intuición humana. Esta cuestión ha sido, y sigue siendo, motivo de interés para muchos investigadores a lo largo de los últimos años.

Esta situación ha llevado a un gran aumento en la investigación en distintos campos como el de la neuroingeniería, con el objetivo de sintetizar la lógica difusa con redes neuronales computacionales. Estas dos tecnologías se complementan; las redes neuronales proporcionan la base metodológica necesaria para acomodar e interpretar grandes cantidades de datos recogidas de sensores, y la lógica difusa proporciona un marco estructural que utiliza y explora estos resultados de bajo nivel.

El problema de ordenación de cantidades difusas es un problema de gran interés que ha sido considerado por muchos investigadores. Más de 35 índices de clasificación difusa se han propuesto desde 1976. En 1976 y 1977, Jain [39, 40] propuso un método utilizando el concepto de *conjunto de maximización* para ordenar los números difusos que hace que el tomador de decisiones considere solamente la función de pertenencia del lado derecho. En 1977, Bass y Kwakernaak [14] sugirieron una forma canónica de extender el ordenamiento natural de

los números reales a los números difusos. Dubois y Prade [30] en 1978, usaron conjuntos de maximización para ordenar números difusos. En 1979, Baldwin y Guild [12] indicaron que los dos métodos anteriores tenían algunas desventajas. Además, en 1980, Adamo [7] utilizó el concepto de  $\alpha$ -corte para introducir una regla de preferencia. En 1981, Chang [18] introdujo el concepto de la *función de preferencia* de una alternativa y, en ese mismo año, Yager [69, 70] propuso cuatro índices que pueden ser empleados con el fin de ordenar las cantidades difusas en  $\mathbb{I}$ . Bortolan y Degani [16] realizaron una revisión de algunos de estos métodos de clasificación propuestos hasta 1985. Chen y Hwang [22] también revisaron minuciosamente los enfoques existentes y señalaron algunas relaciones ilógicas que surgen entre los números difusos que se pretenden clasificar. Chen [19], Choobineh [26] y Cheng [25] presentaron algunos métodos de ordenación y, más recientemente, numerosas técnicas de clasificación han sido propuestas e investigadas por Wang [66], Abbasbandy y Hajjari [4], y Asady [10].

Dado que los números difusos no mantienen un orden lineal natural, una técnica comúnmente utilizada consiste en construir una función apropiada que transforme los números difusos en números reales. Dichas funciones son conocidas como *defusificaciones* (del inglés *defuzzification*). En este caso, las comparaciones entre números difusos se basan en las comparaciones entre los números reales correspondientes. En este sentido, en este tipo de enfoque (véase, entre otros, por ejemplo, Abbasbandy y Asady [6], Abbasbandy y Hajjari [3, 4], Asady [10], Chen y Chen, [20], Wang [66]), basándose en una medición del área que encierra el número difuso o en una distancia real respecto a un origen o entre los números difusos, a cada número difuso se le asigna un número real y la ordenación de estos números reales es la que lleva a un ranking de números difusos.

Algunos autores consideran que el enfoque tendrá algunos defectos si sólo un número real está asociado con cada número difuso. Freeling [35] señaló “*al reducir el conjunto de nuestro análisis a un sólo número, estamos perdiendo gran parte de la información que hemos mantenido a lo largo de los cálculos*”.

Además, algunos de estos métodos dan resultados contra-intuitivos y no discriminantes [16, 1, 2, 6, 5, 23, 49, 71].

Hoy en día, distintos investigadores siguen desarrollando nuevos enfoques para comparar y clasificar los números difusos. Se trata de un tema que ha generado un profundo debate entre los investigadores en este campo ya que las metodologías propuestas por unos autores suelen estar en desacuerdo con otras. Por ello, puede decirse que no hay ningún método comúnmente aceptado.

En esta sección vamos a revisar algunos de los métodos más conocidos de ranking de números difusos. Empezaremos describiendo una técnica comúnmente utilizada que se conoce como enfoque basado en el *centroide*. Cheng [25] propuso un método de clasificación utilizando índices centroides, donde la distancia del punto centroide de cada número difuso al punto original se calcula para mejorar el enfoque de Yager [70]. A continuación describiremos el método basado en la distancia de Abbasbandy y Asady [6]. Estos autores consideraron un origen difuso para los números difusos y utilizando la distancia de los números difusos con respecto a este origen, los clasifican. El método del índice basado en el coeficiente de variación parte de la metodología propuesta en Lee y Li [45] quienes propusieron, para la comparación de los números difusos, utilizar los valores de la media y la desviación típica basados en las distribuciones de probabilidad uniforme y proporcional. A partir de estos valores, Cheng [25] definió el índice del coeficiente de variación (CV), es decir, el cociente entre  $\sigma$  (desviación típica) y  $|\mu|$  (media), siendo  $\sigma > 0$ , para mejorar el enfoque de clasificación de Lee y Li. Sin embargo, el índice de distancia, por lo general, contradice el índice CV introducido por Cheng en la clasificación de los números difusos. Para superar estas limitaciones, Chu y Tsao [27] propusieron un enfoque para clasificar números difusos basado en el área entre el centroide y los puntos originales. Además, Wang [67] demostró que las fórmulas de centroides para clasificar los números difusos proporcionados por Cheng (1998) son incorrectas y conducen a algunas aplicaciones erróneas en Chu y Tsao (2002). En dicho trabajo se corrigen las fórmulas de centroides para clasificar los números difusos que se justificaban



desde el punto de vista de la geometría analítica. Después, Wang y Lee [65] hicieron una revisión en la clasificación de números difusos utilizando el área entre el centroide y los puntos originales para mejorar el enfoque de Chu y Tsao [27].

Algunos de los ejemplos propuestos en estos trabajos siguen siendo muy utilizados en la actualidad para mostrar cómo se aplican y qué resultados producen los nuevos enfoques. Los resultados de la aplicación de estos métodos se mostrarán utilizando uno de ellos: en concreto nos basaremos en el ejemplo numérico propuesto por Yao y Wu [71] que considera cuatro conjuntos distintos de números difusos.

### 2.2.1. Clasificación de los métodos de ordenación

Existen muchos criterios para clasificar los diferentes métodos de ordenación de cantidades difusas que se han propuesto a lo largo de la historia. Desde nuestro punto de vista, existen tres grandes categorías en las que podemos agrupar dichos procedimientos, y son las siguientes.

- **Metodologías de defusificación:** Se aplican asociando a cada número difuso un único número real de tal manera que la ordenación de los números difusos surge de la ordenación de sus correspondientes números reales asociados.
- **Metodologías de referencia:** Estos procedimientos se aplican determinando inicialmente un conjunto difuso como conjunto de referencia y comparando todas las cantidades difusas a clasificar con este conjunto de referencia.
- **Metodologías basadas en relaciones difusas:** se basan en la consideración de relaciones binarias (con las mejores propiedades posibles) en el conjunto  $\mathcal{F}$  de todos los números difusos, sin que puedan ser reducidas a ninguno de los dos tipos de metodologías anteriores.

### 2.2.2. Metodologías basadas en índices

Al igual que ocurre con la extensión de las operaciones básicas de los números reales a los números difusos, interpretar estos como funciones y tratar de aplicar las defusificaciones usuales con funciones no lleva a resultados razonables. Vistos como funciones, dados dos números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , podríamos definir que  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$  cuando  $\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{B}(x)$  para cada número real  $x \in \mathbb{R}$ . Esta relación  $\leq$  dota a la familia  $\mathcal{F}$  formada por todos los números difusos de estructura de conjunto parcialmente ordenado. Sin embargo, esta estructura no es útil en la práctica, pues no permitiría comparar, en general, dos números difusos cuyas gráficas estén entrelazadas. De hecho, gráficamente esta relación no tiene ninguna interpretación que pueda estar asociada al hecho de que el número  $\mathcal{A}$  es, en algún sentido, menor que el número  $\mathcal{B}$ .

La metodología más sencilla que se puede aplicar (y que, de hecho, se aplica en la práctica), es la siguiente. Basta con considerar una aplicación  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  que asocie, a cada número difuso  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$  un único número real  $P(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}$ , y definir, para cada par de número difusos  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet \mathcal{A} \leq_P \mathcal{B} & \text{si } P(\mathcal{A}) \leq P(\mathcal{B}), \\ \bullet \mathcal{A} <_P \mathcal{B} & \text{si } P(\mathcal{A}) < P(\mathcal{B}), \\ \bullet \mathcal{A} \sim_P \mathcal{B} & \text{si } P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}). \end{array} \right.$$

Esta definición permite considerar una relación binaria sobre  $\mathcal{F}$  que siempre es reflexiva y transitiva. La antisimetría (que conllevaría ser un orden parcial) no está garantizada ya que la relación  $\mathcal{A} \sim_P \mathcal{B}$  (que proviene de  $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$ ) no garantiza que  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ . No obstante es una relación *total* ya que, dados  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ , siempre se cumple que  $\mathcal{A} \leq_P \mathcal{B}$  o que  $\mathcal{B} \leq_P \mathcal{A}$  (es decir, siempre se puede comparar cualesquiera dos números difusos).

En este contexto, a la función  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  se la denomina *índice de clasificación* o de *ordenación* (del inglés, *ranking index*). La principal ventaja de esta metodología es su sencillez y su facilidad para ser programada en el ámbito computacional: el ordenador determina un valor numérico para  $P(\mathcal{A})$  y para

$P(\mathcal{B})$  y, simplemente, los compara como números reales. Entendida de esta manera, podemos considerar que una función de este tipo es una *defusificación* en el sentido de que, a cada número difuso, le asocia un único número real. Desde hace tiempo se vienen utilizando muchas clases de defusificaciones. Por su interés, comentamos a continuación algunas de las más conocidas.

Siguiendo la terminología empleada por Ban y Coroianu en [13], una función  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  se dice una *función reductora* si  $f$  es creciente,  $f(0) = 0$  y  $f(1) = 1$ . Además,  $f$  es una *función regular* si  $\int_0^1 f(r) dr = \frac{1}{2}$ . Dado un número difuso  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$  y una función reductora  $f$ , llamaremos:

- *valor de  $\mathcal{A}$  (con respecto a la función reductora  $f$ )*, y lo denotaremos por  $\text{Val}_f(\mathcal{A})$ , al número real

$$\text{Val}_f(\mathcal{A}) = \int_0^1 f(\alpha) (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha) d\alpha;$$

- *ambigüedad de  $\mathcal{A}$  con respecto a  $f$*  al número real:

$$\text{Amb}_f(\mathcal{A}) = \int_0^1 f(\alpha) (\bar{a}_\alpha - \underline{a}_\alpha) d\alpha;$$

- *inespecificidad de  $\mathcal{A}$*  a:

$$w(\mathcal{A}) = \int_0^1 (\bar{a}_\alpha - \underline{a}_\alpha) d\alpha;$$

- dado  $q \in \mathbb{I}$ , el *valor esperado ponderado de  $\mathcal{A}$*  al número real:

$$EV_q(\mathcal{A}) = (1 - q) \int_0^1 \underline{a}_\alpha d\alpha + q \int_0^1 \bar{a}_\alpha d\alpha.$$

- *valor esperado de  $\mathcal{A}$*  al número

$$EV(\mathcal{A}) = EV_{1/2}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(\alpha) (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha) d\alpha;$$

- *área bajo  $\mathcal{A}$*  al número

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(x) dx.$$

Obsérvese que el valor de  $\mathcal{A}$  depende del punto medio (o sea, de  $\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha$ ) de cada uno de sus conjuntos de nivel ( $\mathcal{A}_\alpha$ ). Sin embargo, los otros parámetros son definidos a partir de la consideración de la anchura  $\bar{a}_\alpha - \underline{a}_\alpha$  de cada intervalo  $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$ .

El *intervalo esperado* de un número difuso  $\mathcal{A}$ , que se denota por  $EI(\mathcal{A})$ , es el intervalo

$$EI(\mathcal{A}) = \left[ \int_0^1 \underline{a}_\alpha d\alpha, \int_0^1 \bar{a}_\alpha d\alpha \right].$$

### 2.2.3. Ejemplos de metodologías basadas en índices

En esta sección vamos a describir la formulación matemática de distintos métodos de clasificación clásicos con los que la mayoría o muchos de los investigadores que publican actualmente sus nuevos métodos de ranking comparan sus resultados.

#### Método del punto central

El objetivo de este método es determinar los puntos del centroide  $(x_0, y_0)$  de un número difuso  $\mathcal{A} = (a/b/c/d; \omega)$ . Este método fue introducido por Cheng [25] en 1998 aunque Wang y Lee [65] fueron los que encontraron una fórmula desde el punto de vista de la geometría analítica y determinaron los puntos del centroide como sigue:

$$x_0 = \frac{\int_{\text{sop}(\mathcal{A})} x \mathcal{A}(x) dx}{\int_{\text{sop}(\mathcal{A})} \mathcal{A}(x) dx} = \frac{\int_a^b x \mathcal{A}(x) dx + \int_b^c x dx + \int_c^d x \mathcal{A}(x) dx}{\int_a^b \mathcal{A}(x) dx + \int_b^c dx + \int_c^d \mathcal{A}(x) dx}, \quad (C1)$$

$$y_0 = \frac{\int_0^\omega \alpha \bar{a}_\alpha d\alpha - \int_0^\omega \alpha \underline{a}_\alpha d\alpha}{\int_0^\omega \bar{a}_\alpha d\alpha - \int_0^\omega \underline{a}_\alpha d\alpha}.$$

En el caso del número difuso trapezoidal, donde  $L$  y  $R$  son las funciones lineales,

$$L(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad y \quad R(x) = \frac{d - x}{d - c},$$

el método del centroide nos lleva a los siguientes resultados:

$$x_0 = \frac{1}{3} \left( a + b + c + d - \frac{dc - ab}{(d + c) - (a + b)} \right),$$

$$y_0 = \frac{\omega}{3} \left( 1 + \frac{c - b}{(d + c) - (a + b)} \right)$$

Además como los números difusos triangulares son casos especiales de los trapezoidales donde  $b = c$ , las fórmulas pueden simplificarse para este caso:

$$x_0 = \frac{a + b + d}{3},$$

$$y_0 = \frac{\omega}{3}.$$

En este caso, los números difusos triangulares pueden ser clasificados en términos de sus coordenadas centroides en el eje horizontal o abscisas. Cheng [25] definió su idea como sigue:

$$R(\mathcal{A}) = \sqrt{x_0(\mathcal{A})^2 + y_0(\mathcal{A})^2}.$$

Unos años más tarde Chu y Tsao [27] mejoraron el inconveniente de la distancia anterior, calculando el área entre el centroide y los puntos originales y por tanto clasificaban los números difusos a partir de

$$S(\mathcal{A}) = x_0(\mathcal{A}) \cdot y_0(\mathcal{A}) \quad (\text{S(A)})$$

Finalmente Abbasbandy y Hajjari [4] mejoraron la distancia del centroide de Cheng obteniendo:

$$IR(\mathcal{A}) = \gamma(\mathcal{A}) \sqrt{x_0(\mathcal{A})^2 + y_0(\mathcal{A})^2}$$

donde

$$\gamma(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \int_0^1 (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha) d\alpha > 0, \\ 0, & \text{si } \int_0^1 (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha) d\alpha = 0, \\ -1, & \text{si } \int_0^1 (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha) d\alpha < 0. \end{cases}$$

Hay que añadir que Wang y Lee [65] establecieron un ranking a partir del centroide basándose en si los respectivos valores de  $x_0$  eran diferentes. Además para el caso que los  $x_0$  sean iguales, compararon sus valores de  $y_0$  para formular el ranking. De modo que si  $x_0(\mathcal{A}) = x_0(\mathcal{B})$  e  $y_0(\mathcal{A}) \geq y_0(\mathcal{B})$ , entonces  $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$ .

### Método de la distancia de signo

Consideremos el número difuso  $\mathcal{A}$ , definido por sus  $\alpha$ -cortes  $\mathcal{A} = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$  y el número difuso crisp  $\tilde{0}$ . Fijado  $p > 0$ , la función

$$D_p(\mathcal{A}, \tilde{0}) = \left( \int_0^1 (|\underline{a}_\alpha|^p + |\bar{a}_\alpha|^p) d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}$$

es la distancia de  $\mathcal{A}$  al origen.

**Definición 2.2.1** Sea  $\gamma(\mathcal{A}) : \mathcal{F} \longrightarrow \{-1, 1\}$  la función definida como

$$\gamma(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } \int_0^1 (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha) d\alpha > 0 \\ -1, & \text{si } \int_0^1 (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha) d\alpha < 0 \end{array} \right\} = \text{signo} \left( \int_0^1 (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha) d\alpha \right).$$

Algunas propiedades de la definición anterior son las siguientes.

1. Si  $\text{sop}(\mathcal{A}) \geq 0$  o  $\inf_{\alpha \in \mathbb{I}} \underline{a}_\alpha \geq 0$ , entonces  $\gamma(\mathcal{A}) = 1$ .
2. Si  $\text{sop}(\mathcal{A}) < 0$  o  $\sup_{\alpha \in \mathbb{I}} \bar{a}_\alpha < 0$ , entonces  $\gamma(\mathcal{A}) = -1$ .

**Definición 2.2.2** Sea  $\mathcal{A}$  un número difuso. Llamaremos distancia de signo [6] de  $\mathcal{A}$  al valor:

$$d_p(\mathcal{A}, \tilde{0}) = \gamma(\mathcal{A}) D_p(\mathcal{A}, \tilde{0}).$$

Utilizando el número anterior como un índice asociado a cada número difuso, podemos establecer la siguiente metodología para ordenar números difusos:

- $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$  si  $d_p(\mathcal{A}, \tilde{0}) > d_p(\mathcal{B}, \tilde{0})$ ;
- $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  si  $d_p(\mathcal{A}, \tilde{0}) < d_p(\mathcal{B}, \tilde{0})$ ;
- $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$  si  $d_p(\mathcal{A}, \tilde{0}) = d_p(\mathcal{B}, \tilde{0})$ .

### Método de la magnitud

Para un número difuso  $\mathcal{A}$  definido por sus  $r$ -cortes  $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$  definimos la *magnitud* [3] de dicho número difuso como:

$$\text{Mag}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha + b + c) f(\alpha) d\alpha,$$

donde la función  $f(\alpha)$  es no negativa y creciente en  $[0, 1]$  con  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  y  $\int_0^1 f(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$ . Esta función actúa como una función ponderadora. La función  $f(\alpha)$  debe ser elegida de acuerdo con la situación real que estamos evaluando. Nosotros usaremos la función  $f(\alpha) = \alpha$  para cada  $\alpha \in \mathbb{I}$ . El valor escalar de la magnitud resultante se utiliza para clasificar los números difusos. El que tenga mayor magnitud será el número difuso mayor, por lo que para cualesquiera dos números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , la clasificación que podemos establecer es la siguiente:

- $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$  si  $\text{Mag}(\mathcal{A}) > \text{Mag}(\mathcal{B})$ ;
- $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  si  $\text{Mag}(\mathcal{A}) < \text{Mag}(\mathcal{B})$ ;
- $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$  si  $\text{Mag}(\mathcal{A}) = \text{Mag}(\mathcal{B})$ .

**Observación 2.2.3** Si  $\inf \text{sop}(\mathcal{A}) \geq 0$  o  $\inf_{\alpha \in \mathbb{I}} \underline{a}_\alpha \geq 0$ , entonces  $\text{Mag}(\mathcal{A}) \geq 0$ .

**Observación 2.2.4** Se verifican las siguientes propiedades:

- Si  $\sup \text{sop}(\mathcal{A}) < 0$  o  $\sup_{\alpha \in \mathbb{I}} \bar{a}_\alpha < 0$ , entonces  $\text{Mag}(\mathcal{A}) < 0$ .
- Para dos números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  se verifica  $\text{Mag}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \text{Mag}(\mathcal{A}) + \text{Mag}(\mathcal{B})$ .
- Si  $\mathcal{A}$  es un número difuso trapezoidal simétrico, entonces  $\text{Mag}(\mathcal{A}) = 0$ .
- Para dos números difusos trapezoidales simétricos  $\text{Mag}(\mathcal{A}) = \text{Mag}(\mathcal{B})$ .

Si consideramos un número difuso trapezoidal  $\mathcal{A} = (a/b/c/d; \omega)$  expresado mediante su representación por  $\alpha$ -cortes  $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$ , puede demostrarse que:

$$\text{Mag}(\mathcal{A}) = \frac{(3\omega + 2)(b + c)}{12\omega} + \frac{(3\omega - 2)(a + d)}{12\omega}.$$

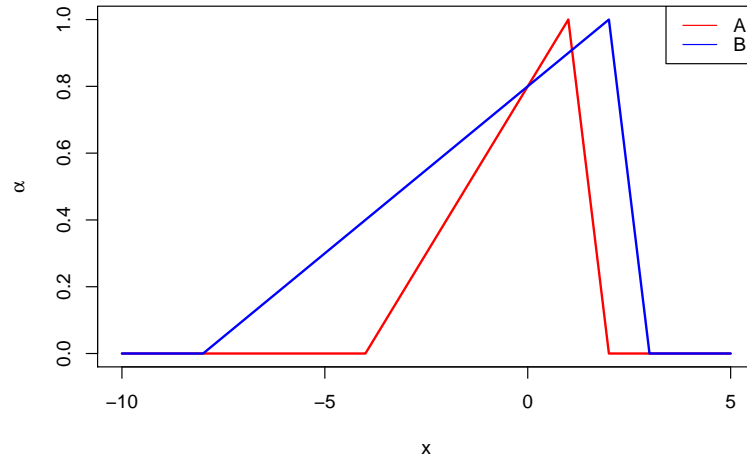


Figura 2.17: Gráficas de los números difusos  $A$  y  $B$  del Ejemplo 2.2.5.

En particular, si  $\omega = 1$ , se tiene que

$$\text{Mag}(\mathcal{A}) = \frac{a + 5b + 5c + d}{12}.$$

**Ejemplo 2.2.5** Las magnitudes de los números difusos (de tipo triangular)  $\mathcal{A} = (-4/1/2)$  y  $\mathcal{B} = (-8/2/3)$  son:

$$\text{Mag}(\mathcal{A}) = \frac{5}{12}(1 + 1) + \frac{1}{12}(-4 + 2) = 0.6667,$$

$$\text{Mag}(\mathcal{B}) = \frac{5}{12}(2 + 2) + \frac{1}{12}(-8 + 3) = 1.25.$$

Por tanto  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

### Principio de descomposición y distancia

El objetivo de este método es calcular la distancia que hay entre dos números difusos pertenecientes al conjunto. Sea  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$  dos números difusos definidos por sus  $\alpha$ -cortes  $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$  y  $\mathcal{B}_\alpha = [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]$ . La *distancia de signo* entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  se define como:

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha - \underline{b}_\alpha - \bar{b}_\alpha) d\alpha.$$

A partir de esta definición se considera que:



- $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{B} \prec \mathcal{A}$
- $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$
- $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{B} \sim \mathcal{A}$

La fórmula anterior nos permite averiguar la distancia entre dos números difusos. Pero para hacer ranking sobre varios números difusos necesitamos calcular un índice o valor para cada número difuso, para posteriormente poder compararlos.

Yao y Wu [71] definieron un índice como la distancia que hay del número  $\tilde{0}$  al número difuso. Es decir, suponemos que  $\tilde{0} \in \mathcal{S}$  y nos queda

$$d(\mathcal{A}, \tilde{0}) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha] d\alpha$$

Entonces el ranking se obtendría de la siguiente forma:

- $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > 0 \Leftrightarrow d(\mathcal{A}, \tilde{0}) > d(\mathcal{B}, \tilde{0}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \prec \mathcal{A}$
- $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < 0 \Leftrightarrow d(\mathcal{A}, \tilde{0}) < d(\mathcal{B}, \tilde{0}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$
- $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0 \Leftrightarrow d(\mathcal{A}, \tilde{0}) = d(\mathcal{B}, \tilde{0}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \sim \mathcal{B}$

**Lema 2.2.6** Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$  dos números difusos.

- Si  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  entonces  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ .
- Si  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  y  $\frac{1}{2} \int_0^1 [\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha] d\alpha \leq \frac{1}{2} \int_0^1 [\underline{b}_\alpha + \bar{b}_\alpha] d\alpha$ , entonces  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .
- Si  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  y  $\frac{1}{2} \int_0^1 [\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha] d\alpha \geq \frac{1}{2} \int_0^1 [\underline{b}_\alpha + \bar{b}_\alpha] d\alpha$ , entonces  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$

Por último, teniendo en cuenta que pueden calcularse las funciones  $\underline{a}$  y  $\bar{a}$  a partir de la definición del número difuso trapezoidal  $\mathcal{A} = (a/b/c/d)$  con  $\omega = 1$ , las integrales anteriores nos llevan a los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{A}, \tilde{0}) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [a + (b-a)\alpha + d - (d-c)\alpha] d\alpha \\
&= \frac{1}{2} \left( a + \frac{b-a}{2} + d - \frac{d-c}{2} \right) = \frac{a+b+c+d}{4}.
\end{aligned}$$

### Método del coeficiente de variación

El método CV es una mejora del método que propusieron Lee y Li [45]. Estos autores hicieron uso de una media generalizada y una desviación típica sobre la base de las medidas de probabilidad de sucesos difusos para obtener índices en base a los cuales realizan la clasificación de los números difusos. Por tanto, este método clasifica los números considerando dos distribuciones diferentes en base a las cuales calcula las correspondientes **medias** y **desviaciones típicas** de los números difusos.

1. Distribución uniforme:

$$\begin{aligned}
\bar{x}(\mathcal{A}) &= \frac{\int_{\text{sop}(\mathcal{A})} x\mathcal{A}(x)dx}{\int_{\text{sop}(\mathcal{A})} \mathcal{A}(x)dx}, \\
\sigma(\mathcal{A}) &= \sqrt{\frac{\int_{\text{sop}(\mathcal{A})} x^2\mathcal{A}(x)dx}{\int_{\text{sop}(\mathcal{A})} \mathcal{A}(x)dx} - \bar{x}(\mathcal{A})^2}.
\end{aligned}$$

Si el número difuso es triangular,  $\mathcal{A} = (a/b/c)$  las expresiones anteriores se reducen a:

$$\begin{aligned}
\bar{x}(\mathcal{A}) &= \frac{a+b+c}{3}, \\
\sigma(\mathcal{A}) &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - cb}{18}.
\end{aligned}$$

2. Distribución proporcional:

$$\bar{x}(\mathcal{A}) = \frac{\int_{\text{sop}(\mathcal{A})} x \mathcal{A}(x)^2 dx}{\int_{\text{sop}(\mathcal{A})} \mathcal{A}(x)^2 dx},$$

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sqrt{\frac{\int_{\text{sop}(\mathcal{A})} x^2 \mathcal{A}(x)^2 dx}{\int_{\text{sop}(\mathcal{A})} \mathcal{A}(x)^2 dx} - \bar{x}(\mathcal{A})^2}.$$

Si el número difuso es triangular,  $\mathcal{A} = (a/b/c)$ , las expresiones anteriores dan lugar a:

$$\bar{x}(\mathcal{A}) = \frac{a + 2b + c}{4},$$

$$\sigma(\mathcal{A}) = \frac{3a^2 + 4b^2 + 3c^2 - 4ab - 2ac - 4cb}{80}.$$

Por tanto para Lee y Li [45] había 4 índices para clasificar, o a partir del valor de las medias o de la desviación tanto de la distribución uniforme como la distribución proporcional. La mejora que hace Cheng [25] sobre este método, y que dio lugar a su propio método, fue sacar un índice que relacionara las dos variables anteriores, y sobre ese índice realizar la clasificación. A este índice lo denotó como CV y se obtiene:

$$CV_{\mathcal{A}} = \frac{\sigma_{\mathcal{A}}}{\bar{x}_{\mathcal{A}}}.$$

Obtenemos un índice para la distribución uniforme y otro para la distribución proporcional, es decir podemos hacer clasificación sobre la distribución uniforme o sobre la proporcional.

La ordenación asociada se establece de la siguiente forma:

- si  $CV_{\mathcal{A}} > CV_{\mathcal{B}} \Rightarrow \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ;
- si  $CV_{\mathcal{A}} < CV_{\mathcal{B}} \Rightarrow \mathcal{A} \succ \mathcal{B}$ ;
- si  $CV_{\mathcal{A}} = CV_{\mathcal{B}} \Rightarrow \mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ .

### Método del centroide

Volviendo a la definición de punto central o centroide de un número difuso  $(x_0, y_0)$ , que viene dado de la siguiente forma:

$$x_0 = \frac{\int_a^b x L_{\mathcal{A}}(x) dx + \int_b^c x dx + \int_c^d x R_{\mathcal{A}}(x) dx}{\int_a^b L_{\mathcal{A}}(x) dx + \int_b^c dx + \int_c^d R_{\mathcal{A}}(x) dx},$$

$$y_0 = \frac{\int_0^\omega \alpha \bar{a}_\alpha d\alpha + \int_0^\omega \alpha \underline{a}_\alpha d\alpha}{\int_0^\omega \bar{a}_\alpha d\alpha + \int_0^\omega \underline{a}_\alpha d\alpha},$$

Chu y Tsao [27] basaron su método en la distancia del punto central  $(x_0, y_0)$  al origen  $(0, 0)$ . De esta manera la superficie o área viene definida por:

$$S(\mathcal{A}) = x_0 \cdot y_0.$$

La ordenación se establece de la siguiente forma:

- si  $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ ;
- si  $S(\mathcal{A}) < S(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ;
- si  $S(\mathcal{A}) > S(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \succ \mathcal{B}$ .

### Método de Chen

El método de Chen [19] calcula un índice, que denotamos por  $U_T$ , sobre un conjunto de números difusos  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\} \subseteq \mathcal{S}$ . Ese índice establece la clasificación de la siguiente forma. Antes de definir  $U_T$  trabaja con dos funciones:

$$f_M(x) = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad \text{si } x \in [x_{\min}, x_{\max}],$$

$$f_G(x) = \frac{x - x_{\max}}{x_{\min} - x_{\max}} \quad \text{si } x \in [x_{\min}, x_{\max}],$$

donde  $\mathcal{S} = \cup_{i=1}^n \text{sop}(\mathcal{A}_i)$ ,  $x_{\min} = \inf \mathcal{S}$  y  $x_{\max} = \sup \mathcal{S}$ .

La función  $f_M$  maximizará el conjunto y  $f_G$  lo minimizará. Para ello define los conjuntos:

$$U_M(i) = \sup_x (f_{\mathcal{A}_i}(x) \wedge f_M(x))$$

$$U_G(i) = \sup_x (f_{\mathcal{A}_i}(x) \wedge f_G(x))$$

El índice para este método se obtiene como:

$$U_T(i) = \frac{U_M(i) + 1 - U_G(i)}{2}$$

Posteriormente, Chen hizo una mejora de este método a partir de las funciones  $f_M(i)$  y  $f_G(i)$  considerando un número  $k > 0$  y definiendo:

$$f_M(x) = \left( \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \right)^k \quad \text{si } x \in [x_{\min}, x_{\max}],$$

$$f_G(x) = \left( \frac{x - x_{\max}}{x_{\min} - x_{\max}} \right)^k \quad \text{si } x \in [x_{\min}, x_{\max}].$$

En este caso, el índice se sigue definiendo como antes:

$$U_T(i) = \frac{U_M(i) + 1 - U_G(i)}{2}.$$

Los valores de  $k$  más usados son  $k = 1$  y  $k = \frac{1}{2}$ . Veamos a continuación como quedarían los índices para esos valores de  $k$  considerando el número difuso  $\mathcal{A}_i = (a/b/c/d)$ .

1. Cuando  $k = 1$

$$U_T(i) = \frac{1}{2} \left( \frac{d - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min} - (c - d)} + 1 - \frac{x_{\max} - a}{x_{\max} - x_{\min} + (b - a)} \right).$$

2. Cuando  $k = \frac{1}{2}$

$$U_T(i) = \frac{(c - d) + \sqrt{(c - d)^2 + 4(x_{\max} - x_{\min})(d - x_{\min})}}{4(x_{\max} - x_{\min})} + \frac{2(x_{\max} - x_{\min})}{4(x_{\max} - x_{\min})} + \frac{(b - a) - \sqrt{(b - a)^2 + 4(x_{\min} - x_{\max})(a - x_{\max})}}{4(x_{\max} - x_{\min})}.$$

Estos son los valores más usados de  $k$  para este método, aunque se puede usar cualquier valor siempre que  $k > 0$ .

### Relaciones de preferencia Integral y de Yuan

Una *relación de preferencia* entre números difusos es una función  $\mu : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{I}$  que a cada pareja de números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  le asocia un número real  $\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{I}$  que indica cómo de preferido es  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{B}$ . De esta forma, se establece el siguiente orden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mu(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > 0.5 \Rightarrow \mathcal{A} \succ_{\mu} \mathcal{B}, \\ \bullet \mu(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0.5 \Rightarrow \mathcal{A} \sim_{\mu} \mathcal{B}, \\ \bullet \mu(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < 0.5 \Rightarrow \mathcal{A} \prec_{\mu} \mathcal{B}. \end{array} \right.$$

En este apartado vamos a describir dos relaciones de preferencia, una conocida como *integral*  $\mu_I$  (introducida en [72]) y otra presentada por *Yuan*  $\mu_Y$  (definida en [74] y estudiada en profundidad en [64]). Ambas parten de la siguiente idea: para elegir cómo de preferido es el número  $\mathcal{A}$  sobre el número  $\mathcal{B}$  determinan su diferencia  $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$  y calculan un cociente de áreas siguiendo métodos parecidos que describimos a continuación.

El área (o superficie) que hay bajo la curva definida por un número difuso  $\mathcal{A}$  (supongámoslo de soporte compacto) puede calcularse de dos formas distintas, según se integra respecto de  $x$  o respecto de  $\alpha$  (que hace la vez de variable  $y$ ) de la siguiente forma:

$$S(\mathcal{A}) = \int_{\text{sop}(\mathcal{A})} \mathcal{A}(x) dx = \int_0^1 (\bar{a}_{\alpha} - \underline{a}_{\alpha}) d\alpha.$$

El área que hay bajo el número difuso  $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$  no se puede calcular integrando la diferencia entre las funciones de pertenencia de  $\mathcal{A}$  y de  $\mathcal{B}$  ya que esta diferencia no es la función de pertenencia de  $\mathcal{C}$  (haciendo esta diferencia podrían salir incluso valores negativos). Sin embargo, sí se puede utilizar la segunda expresión de la fórmula anterior, pues conocemos cómo se determinan los extremos de cada conjunto de nivel de la diferencia, y surge la siguiente curiosa propiedad.

**Proposición 2.2.7** El área bajo la diferencia de dos números difusos es la suma de las áreas bajo cada uno de ellos.

$$S(\mathcal{A} - \mathcal{B}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}).$$

Esta propiedad se deduce del siguiente argumento:

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A} - \mathcal{B}) &= \int_0^1 (\overline{\mathcal{A} - \mathcal{B}}_\alpha - \underline{\mathcal{A} - \mathcal{B}}_\alpha) d\alpha = \int_0^1 [(\bar{a}_\alpha - \underline{b}_\alpha) - (\underline{a}_\alpha - \bar{b}_\alpha)] d\alpha \\ &= \int_0^1 (\bar{a}_\alpha - \underline{a}_\alpha) d\alpha + \int_0^1 (\bar{b}_\alpha - \underline{b}_\alpha) d\alpha = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Veamos ahora cómo se definen las relaciones de preferencia integral y de Yuan. Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos números difusos cualesquiera y consideremos la diferencia  $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$  cuyos conjuntos de nivel vienen dados por:

$$\mathcal{C}_\alpha = [\underline{c}_\alpha, \bar{c}_\alpha] = [\underline{a}_\alpha - \bar{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha - \underline{b}_\alpha] \quad \text{para cada } \alpha \in \mathbb{I}.$$

En la Figura 2.18.a se ha representado una posible diferencia  $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$  a través de su función de pertenencia, mientras que en la Figura 2.18.b se ha representado el mismo número difuso pero atendiendo a las funciones  $\underline{c}_\alpha$  y  $\bar{c}_\alpha$  definidas para  $\alpha \in \mathbb{I}$ . La idea básica para definir tanto la relación de preferencia integral como la de Yuan es la misma: comparando las áreas que deja por debajo el número  $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$  en los cuadrantes primero y segundo, cuanto más área haya en el primer cuadrante con respecto al segundo, mayor será el valor de la relación de preferencia  $\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , de manera que, en este caso,  $\mathcal{A}$  tendrá un ranking mayor que  $\mathcal{B}$ . No obstante, estas dos relaciones de preferencia operan de forma ligeramente diferente, como veremos a continuación.

Denotemos por  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  a la *función de Heavyside* dada por

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Es claro que  $x\theta(x) = \text{máx}(x, 0)$ ,  $x(1 - \theta(x)) = \text{mín}(x, 0)$  y  $x(\theta(x) - \theta(-x)) =$

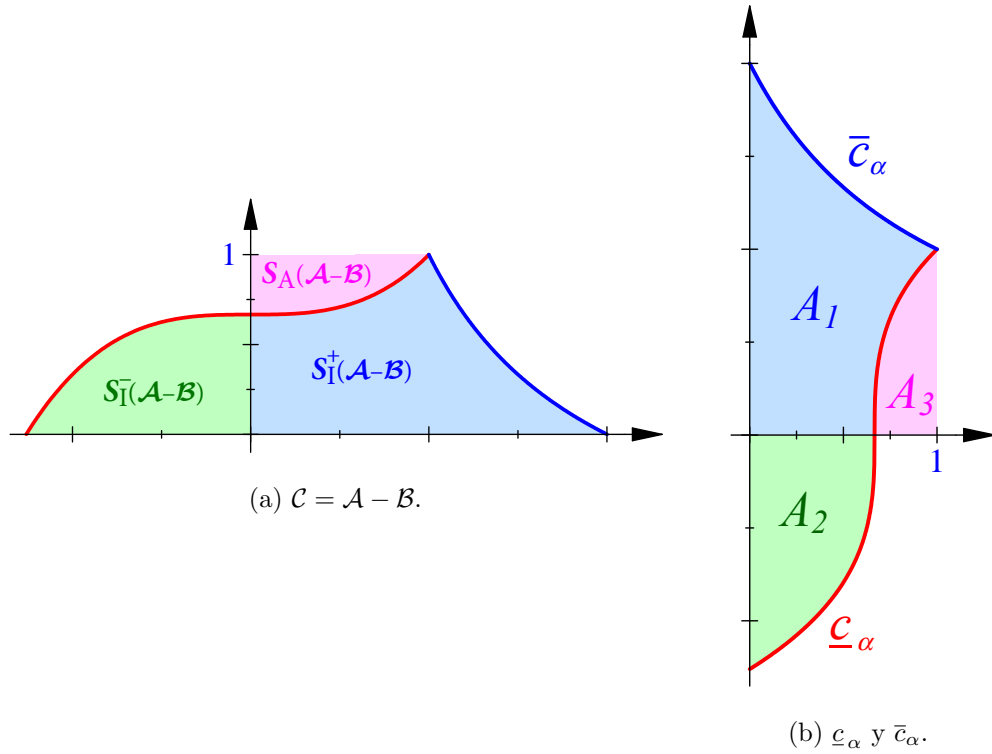


Figura 2.18: Áreas consideradas en las relaciones de preferencia Integral y de Yuan (se representa el número  $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$  junto con sus respectivas funciones  $\underline{c}_\alpha$  y  $\bar{c}_\alpha$ ).

$|x|$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Llamemos:

$S_I^+(\mathcal{A} - \mathcal{B}) = \text{área } A_1 = \text{área bajo } \mathcal{A} - \mathcal{B} \text{ en el primer cuadrante}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 [\bar{c}_\alpha \theta(\bar{c}_\alpha) - \underline{c}_\alpha \theta(\underline{c}_\alpha)] d\alpha \\ &= \int_0^1 [\text{máx}(\bar{c}_\alpha, 0) - \text{máx}(\underline{c}_\alpha, 0)] d\alpha; \end{aligned}$$

$S_I^-(\mathcal{A} - \mathcal{B}) = \text{área } A_2 = \text{área bajo } \mathcal{A} - \mathcal{B} \text{ en el segundo cuadrante}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 [\bar{c}_\alpha (1 - \theta(\bar{c}_\alpha)) - \underline{c}_\alpha (1 - \theta(\underline{c}_\alpha))] d\alpha \\ &= \int_0^1 [\text{mín}(\bar{c}_\alpha, 0) - \text{mín}(\underline{c}_\alpha, 0)] d\alpha. \end{aligned}$$

La Figura 2.18.b proporciona una interpretación geométrica de las integrales



anteriores descritas como áreas. Obviamente,

$$\begin{aligned}
& S_I^+(\mathcal{A} - \mathcal{B}) + S_I^-(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \\
&= \int_0^1 [\text{máx}(\bar{c}_\alpha, 0) - \text{máx}(\underline{c}_\alpha, 0)] d\alpha + \int_0^1 [\text{mín}(\bar{c}_\alpha, 0) - \text{mín}(\underline{c}_\alpha, 0)] d\alpha \\
&= \int_0^1 [\text{máx}(\bar{c}_\alpha, 0) + \text{mín}(\bar{c}_\alpha, 0) - \text{máx}(\underline{c}_\alpha, 0) - \text{mín}(\underline{c}_\alpha, 0)] d\alpha \\
&= \int_0^1 (\bar{c}_\alpha - \underline{c}_\alpha) d\alpha = S(\mathcal{C}) = S(\mathcal{A} - \mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la anterior descomposición, la *relación de preferencia integral*  $\mu_I$  viene definida de la siguiente manera:

$$\mu_I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{S_I^+(\mathcal{A} - \mathcal{B})}{S(\mathcal{A} - \mathcal{B})} = \frac{S_I^+(\mathcal{A} - \mathcal{B})}{S_I^+(\mathcal{A} - \mathcal{B}) + S_I^-(\mathcal{A} - \mathcal{B})} = \frac{A_1}{A_1 + A_2}.$$

En el caso de que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  fuesen números difusos *crisp*, es decir,  $\mathcal{A} = \tilde{a}$  y  $\mathcal{B} = \tilde{b}$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ , el denominador sería nulo (pues carecería de área) y, en tal caso, la relación de preferencia integral vendría definida de la forma obvia:

$$\mu_I(\tilde{a}, \tilde{b}) = \begin{cases} 1, & \text{si } a - b > 0, \\ 0.5, & \text{si } a - b = 0, \\ 0, & \text{si } a - b < 0. \end{cases}$$

La relación de preferencia de Yuan es ligeramente diferente al considerar el siguiente área:

$$S_Y^+(\mathcal{A} - \mathcal{B}) = \int_0^1 [\bar{c}_\alpha \theta(\bar{c}_\alpha) + \underline{c}_\alpha \theta(\underline{c}_\alpha)] d\alpha = \int_0^1 [\text{máx}(\bar{c}_\alpha, 0) + \text{máx}(\underline{c}_\alpha, 0)] d\alpha.$$

Obsérvese que si llamamos

$$\begin{aligned}
S_A(\mathcal{A} - \mathcal{B}) &= \text{área sobre } \mathcal{A} - \mathcal{B} \text{ en el primer cuadrante antes de su núcleo} \\
&= \int_0^1 \underline{c}_\alpha \theta(\underline{c}_\alpha) d\alpha = \int_0^1 \text{máx}(\underline{c}_\alpha, 0) d\alpha,
\end{aligned}$$

(que se interpreta como el área  $A_3$  de la Figura 2.18.b), entonces

$$\begin{aligned}
S_Y^+(\mathcal{A} - \mathcal{B}) &= \int_0^1 [\bar{c}_\alpha \theta(\bar{c}_\alpha) + \underline{c}_\alpha \theta(\underline{c}_\alpha)] d\alpha \\
&= \int_0^1 [\bar{c}_\alpha \theta(\bar{c}_\alpha) - \underline{c}_\alpha \theta(\underline{c}_\alpha)] d\alpha + 2 \int_0^1 \underline{c}_\alpha \theta(\underline{c}_\alpha) d\alpha \\
&= S_I^+(\mathcal{A} - \mathcal{B}) + 2S_A(\mathcal{A} - \mathcal{B}) = \text{área } A_1 + 2 \text{área } A_2.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la descomposición de las áreas  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  mostradas en la Figura 2.18.b, la *relación de preferencia de Yuan*  $\mu_Y$  viene dada mediante:

$$\begin{aligned} \mu_Y(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \frac{\int_0^1 [\bar{c}_\alpha \theta(\bar{c}_\alpha) + \underline{c}_\alpha \theta(\underline{c}_\alpha)] d\alpha}{\int_0^1 [|\bar{c}_\alpha| + |\underline{c}_\alpha|] d\alpha} = \frac{S_Y^+(\mathcal{A} - \mathcal{B})}{\int_0^1 [|\bar{c}_\alpha| + |\underline{c}_\alpha|] d\alpha} \\ &= \frac{A_1 + 2A_3}{A_1 + A_2 + 2A_3}. \end{aligned}$$

El denominador sólo puede anularse si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  coinciden entre sí y, además, son números difusos *crisp*, en cuyo caso se definiría  $\mu_Y(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0.5$ .

#### 2.2.4. Ejemplos de clasificación con metodologías basadas en índices

A continuación vamos a describir algunos ejemplos acerca de cómo actúan los métodos descritos en las secciones anteriores sobre varios conjuntos de números difusos. Los primeros en considerar estos datos fueron Yao y Wu [71] en el año 2000. Desde entonces, muchos autores los han utilizado en sus contribuciones para describir cómo funcionan sus respectivas metodologías desarrollando estudios comparativos.

Como  $\omega = 1$ , cada número difuso vendrá definido como  $\mathcal{A}_i = (a_i/b_i/c_i/d_i)$ . A partir de esta definición obtendremos la funciones lineales  $L_{\mathcal{A}_i}$  y  $R_{\mathcal{A}_i}$  y representaremos en una tabla cada número difuso utilizando estas funciones  $L_{\mathcal{A}_i}$  y  $R_{\mathcal{A}_i}$  y sus inversas  $L_{\mathcal{A}_i}^{-1}$  y  $R_{\mathcal{A}_i}^{-1}$ . Para finalizar esta sección, generaremos una tabla en la que vamos a aplicar los distintos métodos de clasificación a dichos números difusos para obtener ordenaciones entre ellos.

- **Conjunto 1** :  $\mathcal{A} = (0.4/0.5/1)$  ;  $\mathcal{B} = (0.4/0.7/1)$  ;  $\mathcal{C} = (0.4/0.9/1)$

Las funciones de pertenencia de los números difusos anteriores son las siguientes.

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} 10x - 4, & \text{si } 0.4 \leq x \leq 0.5, \\ 2 - 2x, & \text{si } 0.5 < x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}(x) = \begin{cases} \frac{x - 0.4}{0.3}, & \text{si } 0.4 \leq x \leq 0.7, \\ \frac{1 - x}{0.3}, & \text{si } 0.7 < x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}(x) = \begin{cases} 2x - 0.8, & \text{si } 0.4 \leq x \leq 0.9, \\ 10 - 10x, & \text{si } 0.9 < x \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

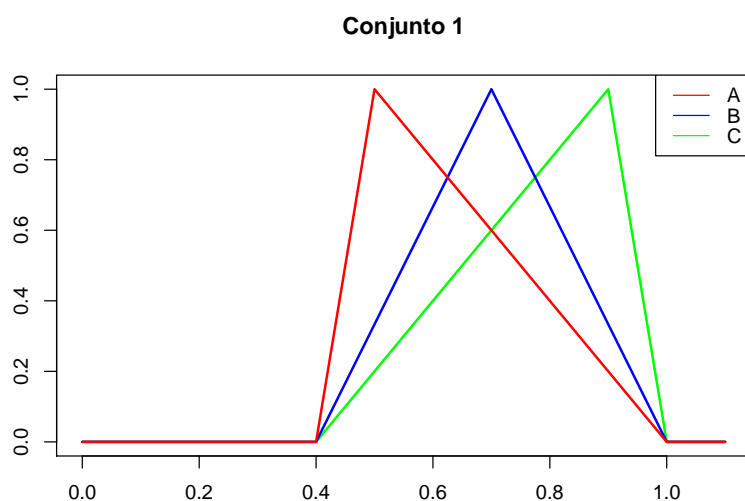


Figura 2.19: Números difusos del Conjunto 1.

- **Conjunto 2:**  $\mathcal{A} = (0.3/0.4/0.7/0.9)$ ;  $\mathcal{B} = (0.3/0.7/0.9)$ ;  $\mathcal{C} = (0.5/0.7/0.9)$

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} 10x - 3, & \text{si } 0.3 \leq x \leq 0.4, \\ 1, & \text{si } 0.4 < x \leq 0.7, \\ 4.5 - 5x, & \text{si } 0.7 < x \leq 0.9, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}(x) = \begin{cases} \frac{x - 0.3}{0.4}, & \text{si } 0.3 \leq x \leq 0.7, \\ 4.5 - 5x, & \text{si } 0.7 < x \leq 0.9, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}(x) = \begin{cases} 5x - 2.5, & \text{si } 0.5 \leq x \leq 0.7, \\ 4.5 - 5x, & \text{si } 0.7 < x \leq 0.9, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

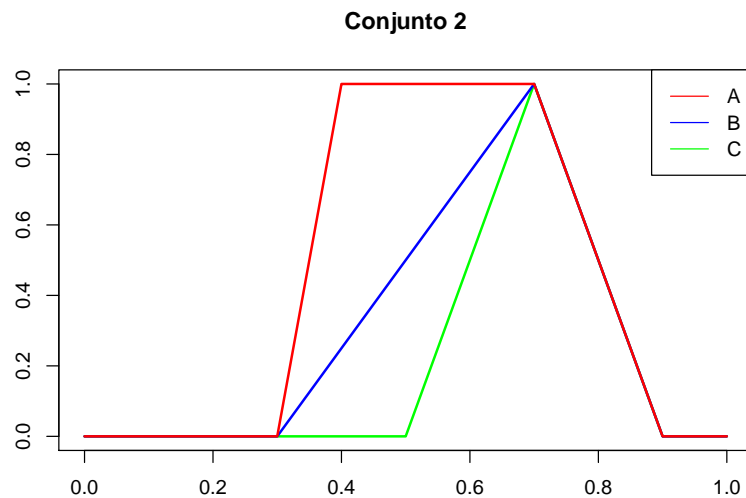


Figura 2.20: Números difusos del Conjunto 2.

- **Conjunto 3:**  $\mathcal{A} = (0.3/0.5/0.7)$ ;  $\mathcal{B} = (0.3/0.5/0.8/0.9)$ ;  $\mathcal{C} = (0.3/0.5/0.9)$

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} \frac{x - 0.3}{0.2}, & \text{si } 0.3 \leq x \leq 0.5, \\ \frac{0.7 - x}{0.2}, & \text{si } 0.5 < x \leq 0.7, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}(x) = \begin{cases} \frac{x - 0.3}{0.2}, & \text{si } 0.3 \leq x \leq 0.5, \\ 1, & \text{si } 0.5 < x \leq 0.8, \\ 9 - 10x, & \text{si } 0.8 < x \leq 0.9, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}(x) = \begin{cases} \frac{x - 0.3}{0.2}, & \text{si } 0.3 \leq x \leq 0.5, \\ \frac{0.9 - x}{0.4}, & \text{si } 0.5 < x \leq 0.9, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

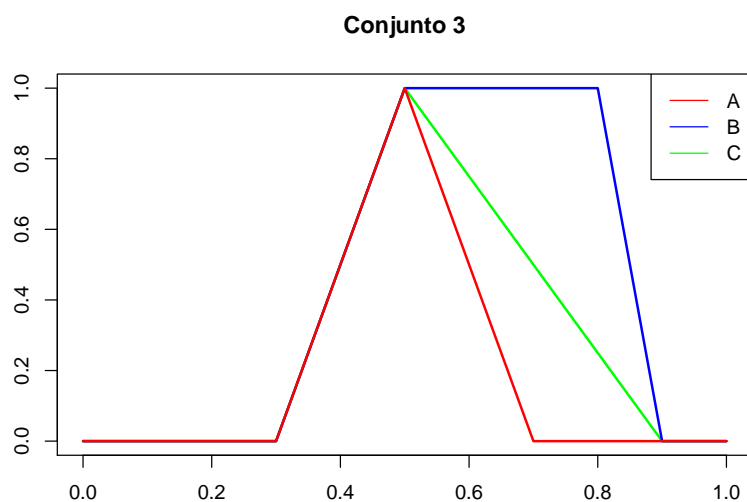


Figura 2.21: Números difusos del Conjunto 3.

- **Conjunto 4:**  $\mathcal{A} = (0/0.4/0.7/0.8)$ ;  $\mathcal{B} = (0.2/0.5/0.9)$ ;  $\mathcal{C} = (0.1/0.6/0.8)$

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} 2.5x, & \text{si } 0 \leq x \leq 0.4, \\ 1, & \text{si } 0.4 < x \leq 0.7, \\ 8 - 10x, & \text{si } 0.7 < x \leq 0.8, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}(x) = \begin{cases} \frac{x - 0.2}{0.3}, & \text{si } 0.2 \leq x \leq 0.5, \\ \frac{0.9 - x}{0.4}, & \text{si } 0.5 < x \leq 0.9, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}(x) = \begin{cases} \frac{x - 0.1}{0.5}, & \text{si } 0.1 \leq x \leq 0.6, \\ 4 - 5x, & \text{si } 0.6 < x \leq 0.8, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

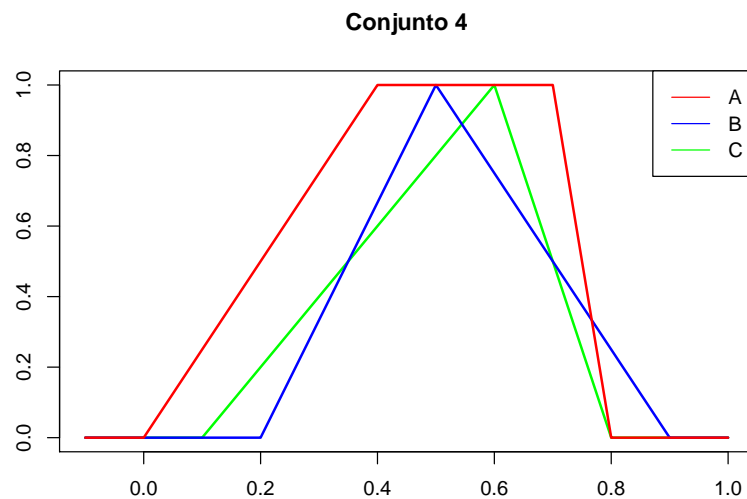


Figura 2.22: Números difusos del Conjunto 4.

La Tabla 2.2 muestra, para cada número difuso de cada Conjunto  $i$ , siendo  $1 \leq i \leq 4$ , el valor de la funciones  $L$  y  $R$  y sus respectivas inversas.

Tabla 2.2: Tabla de funciones de pertenencia y extremos de  $\alpha$ -cortes de los números difusos de los cuatro conjuntos mostrados en la Subsección 2.2.4.

N <sup>os</sup> Difusos	$L = \mathcal{A} _{[a,b]}$	$R = \mathcal{A} _{[c,d]}$	$L^{-1}(\alpha) = \underline{a}_\alpha$	$R^{-1}(\alpha) = \bar{a}_\alpha$
<b>Conjunto 1</b>				
A	$10x - 4$	$2 - 2x$	$\frac{\alpha+4}{10}$	$\frac{\alpha-2}{-2}$
B	$\frac{x-0.4}{0.3}$	$\frac{1-x}{0.3}$	$0.3\alpha + 0.4$	$-0.3\alpha + 1$
C	$2x - 0.8$	$10 - 10x$	$\frac{\alpha+0.8}{2}$	$\frac{\alpha-10}{-10}$
<b>Conjunto 2</b>				
A	$10x - 3$	$4.5 - 5x$	$\frac{\alpha+3}{10}$	$\frac{\alpha-4.5}{-5}$
B	$\frac{x-0.3}{0.4}$	$4.5 - 5x$	$0.4\alpha + 0.3$	$\frac{\alpha-4.5}{-5}$
C	$5x - 2.5$	$4.5 - 5x$	$\frac{\alpha+2.5}{5}$	$\frac{\alpha-4.5}{-5}$
<b>Conjunto 3</b>				
A	$\frac{x-0.3}{0.2}$	$\frac{0.7-x}{0.2}$	$0.2\alpha + 0.3$	$-0.2\alpha + 0.7$
B	$\frac{x-0.3}{0.2}$	$9 - 10x$	$0.2\alpha + 0.3$	$\frac{\alpha-9}{-10}$
C	$\frac{x-0.3}{0.2}$	$\frac{0.9-x}{0.4}$	$0.2\alpha + 0.3$	$-0.4\alpha + 0.9$
<b>Conjunto 4</b>				
A	$2.5x$	$8 - 10x$	$\frac{\alpha}{2.5}$	$\frac{\alpha-8}{-10}$
B	$\frac{x-0.2}{0.3}$	$\frac{0.9-x}{0.4}$	$0.3\alpha + 0.2$	$-0.4\alpha + 0.9$
C	$\frac{x-0.1}{0.5}$	$4 - 5x$	$0.5\alpha + 0.1$	$\frac{\alpha-4}{-5}$

A continuación, describimos en la Tabla 2.3 los índices de ranking para todos los números difusos de los conjuntos que acabamos de indicar utilizando los distintos métodos de ordenación. De esta manera, podemos observar qué números tienen mayor ranking así como comparar los resultados producidos con cada una de ellas.

Tabla 2.3: Comparación de ordenaciones mediante índices.

Método	Nº Dif.	Conjunto 1	Conjunto 2	Conjunto 3	Conjunto 4
Distancia	$\mathcal{A}$	0.7151	0.7289	0.6009	0.6284
de Wang	$\mathcal{B}$	0.7753	0.7157	0.7646	0.6289
[65]	$\mathcal{C}$	0.8360	0.7753	0.6574	0.6009
<b>Resultados</b>		$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \prec \mathcal{A} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$	$\mathcal{C} \prec \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$
Dist. signo	$\mathcal{A}$	1.2	1.15	1	0.95
$p = 1$	$\mathcal{B}$	1.4	1.3	1.25	1.05
[6]	$\mathcal{C}$	1.6	1.4	1.1	1.05
<b>Resultados</b>		$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \sim \mathcal{C}$
Dist. signo	$\mathcal{A}$	0.8869	0.8756	0.7257	0.7853
$p = 2$	$\mathcal{B}$	1.0194	0.9522	0.9416	0.7958
[6]	$\mathcal{C}$	1.1605	1.0033	0.8165	0.8386
<b>Resultados</b>		$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$
Magnitud	$\mathcal{A}$	0.5334	0.5584	0.5	0.5250
[3]	$\mathcal{B}$	0.7	0.6334	0.6416	0.5084
	$\mathcal{C}$	0.8666	0.7	0.5166	0.5750
<b>Resultados</b>		$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \prec \mathcal{A} \prec \mathcal{C}$
Distancia	$\mathcal{A}$	0.6	0.575	0.5	0.475
Yao y Wu	$\mathcal{B}$	0.7	0.65	0.625	0.525
[71]	$\mathcal{C}$	0.8	0.7	0.55	0.525
<b>Resultados</b>		$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \sim \mathcal{C}$
CV Unif.	$\mathcal{A}$	0.0272	0.0328	0.0133	0.0693
Cheng [25]	$\mathcal{B}$	0.0214	0.0246	0.0304	0.0385
	$\mathcal{C}$	0.0225	0.0095	0.0275	0.0433
<b>Resultados</b>		$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$
CV Prop.	$\mathcal{A}$	0.0183	0.026	0.008	0.0471
Cheng [25]	$\mathcal{B}$	0.0128	0.0146	0.0234	0.0236
	$\mathcal{C}$	0.0137	0.0057	0.0173	0.0255
<b>Resultados</b>		$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$
Centroide	$\mathcal{A}$	0.299	0.2847	0.25	0.2440
Chu y Tsao	$\mathcal{B}$	0.350	0.3248	0.3153	0.2624
[27]	$\mathcal{C}$	0.3993	0.350	0.2748	0.2619
<b>Resultados</b>		$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$

Continúa en la siguiente página.



Tabla 2.3 – Continuación de la página anterior.

Método	Nº Dif.	Conjunto 1	Conjunto 2	Conjunto 3	Conjunto 4
Centroide	$\mathcal{A}$	0.2111	0.2568	0.1778	0.1967
de Wang	$\mathcal{B}$	0.2333	0.2111	0.2765	0.1778
[65]	$\mathcal{C}$	0.2555	0.2333	0.1889	0.1667
<b>Resultados</b>		$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$	$\mathcal{C} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{A}$
Chen [19]	$\mathcal{A}$	0.3375	0.4315	0.375	0.52
	$\mathcal{B}$	0.5	0.5625	0.425	0.57
	$\mathcal{C}$	0.667	0.625	0.55	0.625
<b>Resultados</b>		$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$

Como podemos observar para un mismo conjunto de números difusos, podemos obtener distinta ordenación dependiendo del método empleado. El método del CV, descrito en [25], tiene el inconveniente de que a veces se utiliza incorrectamente. Según [25], cuanto menor sea el índice CV, mayor será el número difuso correspondiente.

A continuación vamos a comentar estos resultados de ranking:

1. En relación con el Conjunto 1, por el enfoque del CV [25], el orden de clasificación es  $\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$ , que parece ir contra la intuición (ver Figura 2.19). El resto de los enfoques proporcionan la misma ordenación de números difusos,  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ , que es el ranking que podríamos considerar razonable.
2. Para el Conjunto 2, los métodos de la distancia con  $p = 1, 2$ , de la Magnitud [6], de Yao y Wu [66], del CV [25], del centroide de Chu y Tsao [66], el orden de clasificación es  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ . Por el de la distancia de Wang [65] es  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A} \prec \mathcal{C}$  y por el centroide de Wang [27], el orden es  $\mathcal{B} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{A}$ . Si observamos la Figura 2.20, es fácil ver que ninguno de ellos es consistente con la intuición humana.

3. Para el Conjunto 3 (ver Figura 2.21), deberíamos de obtener el resultado  $\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$ . En este caso, todos los métodos concluyen esta ordenación excepto el método de del CV [25] cuya ordenación es  $\mathcal{B} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{A}$  y el de Chen [19] cuyo ranking es  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ .
4. Para los números difusos  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  que se muestran para el Conjunto 4 (ver Figura 2.22) podemos observar numerosas ordenaciones. El método de la distancia ( $p = 1, 2$ ) [6], el método de Yao y Wu [71] y el método de Chen [19], obtienen el mismo orden de clasificación,  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ . Sin embargo la ordenación obtenida en Chu y Tsao [27] y por el CV [25],  $\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$  puede considerarse mejor. Por el método de la Magnitud [3] es  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ , por el del distancia de Wang [65] es  $\mathcal{C} \prec \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  y por el del centroide de Wang [65] es  $\mathcal{C} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ . Observando las clasificaciones obtenidas, podemos ver que algunos métodos consideran que la amplitud de un número difuso es más importante que el valor que se obtiene al defusificar el número difuso.

### 2.2.5. Inconsistencia de procedimientos de ordenación según diferentes enfoques

El mayor o menor éxito de un índice de ordenación difuso depende, sin duda, de la función  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ . Por ello, esta debe intentar resumir, en un único número real, la mayor cantidad de información posible referente al número difuso de manera que su valor real asociado lo represente lo mejor posible. La facilidad con la que los ordenadores aplican los índices de ordenación ha llevado a que estos adquieran un gran protagonismo en el ambiente computacional. Sin embargo, un proceso de este tipo siempre conlleva un problema inherente: supone una enorme pérdida de información pues pasamos de una cantidad incierta, de la que tenemos cierta información, que es vaga, a un único número real (se supone que debe ser el que mejor lo representa), el cual ya representa cantidad absolutamente precisa. Desde nuestro punto de vista, esta pérdida de información podría solventarse

aplicando métodos genuinamente difusos (como expondremos en la siguiente sección).

En esta subsección presentamos un par de situaciones concretas con números difusos trapezoidales cuyas ordenaciones al aplicar diferentes metodologías llevan a interpretaciones personales que pueden generar cierta polémica.

**Ejemplo 2.2.8** (*Ban y Coroianu [13], Example 5*) El índice de ordenación parametrizado de Ezzati y Saneifard,  $M_r$ , siendo  $r > 0$ , introducido en 2010 en [33] actúa, para cada número difuso trapezoidal  $\mathcal{A} = (a/b/c/d) \in \mathcal{T}$ , de la siguiente forma:

$$M_r(\mathcal{A}) = \sqrt[r]{\frac{2(a^{r+2} - b^{r+2})(c - d) - 2(c^{r+2} - d^{r+2})(a - b)}{(r + 2)(r + 1)(a - b)(c - d)(a + b - c - d)}}.$$

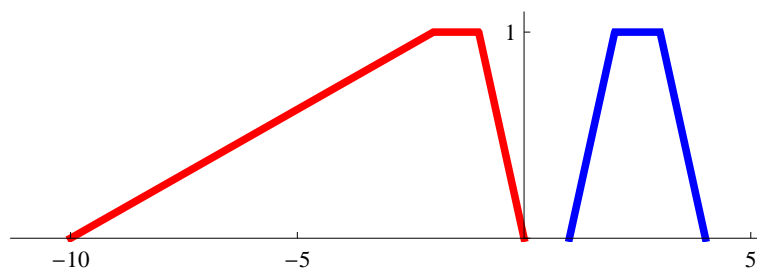


Figura 2.23: Números difusos trapezoidales del Ejemplo 2.2.8.

Si tomamos  $\mathcal{A} = (-10/-2/-1/0)$  y  $\mathcal{B} = (1/2/3/4)$  (véase la Figura 2.23), utilizando  $r = 2$ , encontramos que:

$$M_2(\mathcal{A}) = \sqrt{\frac{1247}{66}} \approx 4.3467 > 2.5820 \approx \sqrt{\frac{20}{3}} = M_2(\mathcal{B}),$$

lo que conduce a la ordenación  $(-10/-2/-1/0) \succ_{M_2} (1/2/3/4)$ , la cual, a la vista de la Figura 2.23, contradice nuestra intuición.

**Ejemplo 2.2.9** Consideremos los números difusos  $\mathcal{A} = (0.3/0.4/0.7/0.9)$ ,  $\mathcal{B} = (0.3/0.7/0.9)$  y  $\mathcal{C} = (0.5/0.7/0.9)$  cuyas gráficas se representan en la Figura 2.24. Estos toman los mismos valores a la derecha, y sólo se diferencian por sus valores en la parte izquierda de sus representaciones gráficas.

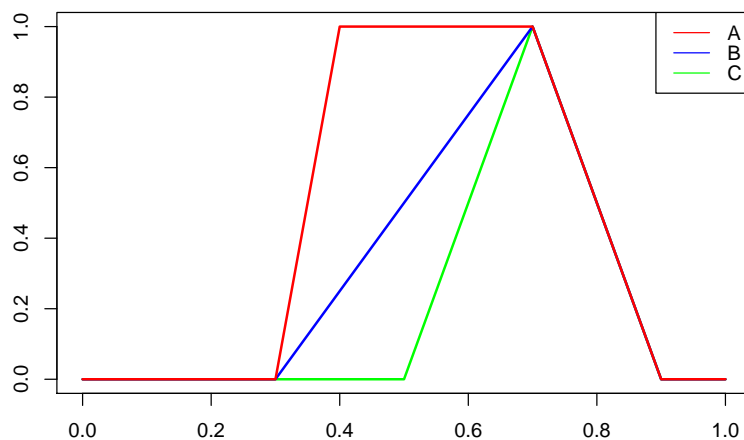


Figura 2.24: Un ejemplo de inconsistencia en la aplicación de índices de ordenación.

Si usamos el principio de extensión, obtenemos

$$\text{máx}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \text{mín}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{B}.$$

Claramente  $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$  y por el principio de extensión,  $\mathcal{A}$  debe tener una clasificación más alta que  $\mathcal{B}$ , de la misma manera  $\mathcal{B}$  tiene una clasificación más alta que  $\mathcal{C}$ .

Muchos enfoques de ordenación como los índices de Yager [69, 70] o el índice de Chen [19] obtienen estos órdenes de clasificación en  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ . Esto también está de acuerdo con la intuición de Baldwin [12] aunque su método lleva a la conclusión de que  $\mathcal{A}$  tiene una clasificación más alta pero  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  tienen una misma clasificación.

Sin embargo Chang [18] argumentó que  $\mathcal{C}$  es intuitivamente preferible a  $\mathcal{B}$  mientras que la aplicación de Bass y Kwakernaak [14], Jain [39, 40] y Adamo [7] lleva a la misma clasificación para los tres números difusos.

En relación a la intuición de Chen [19] que indica que  $\mathcal{A}$  debería de tener un ranking mayor que  $\mathcal{B}$ , Saade y Schwarlander [59] argumentan que el orden de clasificación de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  debería depender de la actitud subjetiva de la persona que toma la decisión (decision maker, DM) y, además, añaden que para un DM optimista  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tendrían el mismo rango.

A la vista de este ejemplo, podemos observar que existen muchos argumentos

a favor y en contra de las posibles ordenaciones de números difusos que pueden dar lugar a cierta controversia. Desde nuestro punto de vista, si un investigador intenta establecer un nuevo procedimiento de ordenación, debe centrar sus esfuerzos en que su algoritmo produzca resultados acordes a su propia intuición y, además, para estudiar si este es el caso, debe contrastar su método con los procedimientos ya introducidos utilizando los ejemplos que hay descritos en la literatura. Además, debe estudiar las propiedades que verifica su metodología, como explicamos en la siguiente sección.

### 2.2.6. Propiedades razonables que debería satisfacer un procedimiento de ranking difuso

Cuando se propone un nuevo método de ranking, es conveniente hacer un estudio de las propiedades que dicho procedimiento de ranking verifica con objeto de determinar la racionalidad del mismo, es decir, si produce resultados razonables o no. Como hemos comentado, el que sea más o menos razonable depende de la intuición humana.

Wang y Kerre [63] presentaron algunas de las propiedades que ellos consideraban que serían apropiadas para cualquier metodología de ordenación de números difusos. Las describimos a continuación.

Sea  $M$  un método de ordenación o ranking, sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de todos los números difusos (dotado de las operaciones suma y multiplicación) y sea  $\mathcal{S}$  un subconjunto no vacío de  $\mathcal{F}$  donde podemos aplicar  $M$ .

Dados dos números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{S}$ , escribiremos  $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$  por  $M$  cuando aceptemos que  $\mathcal{A}$  tiene una clasificación más alta que  $\mathcal{B}$  (es decir, que  $\mathcal{A}$  ocupa una posición más alta en el ranking que  $\mathcal{B}$ ) cuando se aplica el método  $M$ . Emplearemos la notación  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$  por  $M$  cuando  $\mathcal{A}$  tenga una clasificación más alta o similar a la de  $\mathcal{B}$  cuando se aplica el método  $M$ . Finalmente, escribiremos  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$  por  $M$  si  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}$  por  $M$ .

Supongamos que, durante la aplicación del método  $M$ , se verifican las siguientes condiciones:

1. Cuando investigamos un método, los números difusos cumplen las condiciones para la aplicación del método de clasificación.
2. Cuando aplicamos un método de clasificación o ranking en el conjunto  $\mathcal{F}$ , una de las siguientes afirmaciones es verdadera para cada  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^2$ :

$$\mathcal{A} \succ \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \sim \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \succ \mathcal{A}.$$

Las siguiente son propiedades, introducidas por Wang y Kerre, parecen razonables para cualquier metodología de ordenación de los números difusos de un subconjunto concreto  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{F}$  (obsérvese que no siempre se aspira a que una metodología se pueda aplicar a cualquier par de números difusos).

- A1.** Para cada subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{A}$  por  $M$  en  $\mathcal{S}$ .
- A2.** Para cada subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{F}$  y  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{S}^2$ , con  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}$  por  $M$  en  $\mathcal{S}$ , entonces tenemos  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$  por  $M$  en  $\mathcal{S}$ .
- A3.** Para cada subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{F}$  y  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \in \mathcal{S}^3$ , con  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \succeq \mathcal{C}$  por  $M$  en  $\mathcal{S}$ , entonces tenemos  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{C}$  por  $M$  en  $\mathcal{S}$ .
- A4.** Para cada subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{F}$  y  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{S}^2$ , con  $\inf \text{sop}(\mathcal{A}) > \sup \text{sop}(\mathcal{B})$ , tenemos que  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$  por  $M$  en  $\mathcal{S}$ .

Este axioma significa que si dos números difusos tienen soportes separados, entonces el número difuso con soporte a la derecha es al menos tan bueno como el de soporte a la izquierda. La versión fuerte del axioma anterior es la siguiente.

- A4'.** Para cada subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{F}$  y  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{S}^2$  con  $\inf \text{sop}(\mathcal{A}) > \sup \text{sop}(\mathcal{B})$  tenemos que  $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$  por  $M$  en  $\mathcal{S}$ .

Esta versión además de ser más fuerte nos dice que si  $M$  satisface esta versión y  $M$  puede clasificar números reales, entonces para cada  $a, b > 0$  con  $a < b$  se tiene que  $\{\frac{1}{a}\} \succ \{\frac{1}{b}\}$  por  $M$ , es decir, es una extensión del orden natural de los números reales.

**A5.** Sean  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  dos conjuntos arbitrarios de números difusos en los que  $M$  puede ser aplicado y  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ , entonces  $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$  por  $M$  en  $\mathcal{F}_2$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$  por  $M$  en  $\mathcal{F}_1$ .

**A6.** Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A} + \mathcal{C}$  y  $\mathcal{B} + \mathcal{C}$  elementos de  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$  por  $M$  en  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ , entonces  $\mathcal{A} + \mathcal{C} \succeq \mathcal{B} + \mathcal{C}$  por  $M$  en  $\{\mathcal{A} + \mathcal{C}, \mathcal{B} + \mathcal{C}\}$ .

Este axioma nos indica que ‘+’ es compatible con la relación binaria  $\succeq$  definida por el método  $M$ . Otro axioma similar sería el siguiente:

**A6’.** Si  $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$  por  $M$  en  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ , entonces  $\mathcal{A} + \mathcal{C} \succ \mathcal{B} + \mathcal{C}$  por  $M$  en  $\{\mathcal{A} + \mathcal{C}, \mathcal{B} + \mathcal{C}\}$  cuando  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Además, si  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$  en  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ , entonces  $\mathcal{A} + \mathcal{C} \sim \mathcal{B} + \mathcal{C}$  en  $\{\mathcal{A} + \mathcal{C}, \mathcal{B} + \mathcal{C}\}$ .

**A7.** Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{AC}$  y  $\mathcal{BC}$  elementos de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{C} \succeq \tilde{0}$ . Si  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$  por  $M$  en  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \Rightarrow \mathcal{AC} \succeq \mathcal{BC}$  por  $M$  en  $\{\mathcal{AC}, \mathcal{BC}\}$ .

### 2.2.7. Verificación de los axiomas de los métodos de ranking

Los axiomas que Wang y Kerre [63] presentaron en 2001 permiten comprobar si un método de ordenación de cantidades difusas puede considerarse razonable. En la siguiente tabla se resumen todos los resultados relacionados con el cumplimiento de estos axiomas para algunos de los métodos analizados en esta

Memoria.

Método	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A' <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A' <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>
Distancia de Wang [65]	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No	No
Distancia signo $p = 1$ [6]	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Distancia signo $p = 2$ [6]	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No
Magnitud [3]	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Chen [19]	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No	No

A partir de estos resultados, podemos concluir que los procedimientos de ordenación descritos en esta Memoria son razonablemente apropiados para establecer rankings entre números difusos en base a los axiomas A1-A7.

### 2.2.8. Extensión de las propiedades anteriores

Ban y Coroianu [13] adaptaron las propiedades de Wang y Kerre para el caso en el que el enfoque de ordenación viene inducido por una relación binaria de la siguiente manera.

Sea  $\mathcal{S}$  un subconjunto de la familia  $\mathcal{F}$  de todos los números difusos. Dada una relación binaria  $\preceq$  en  $\mathcal{F}$ , escribimos  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$  cuando  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ , y escribimos  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  si  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  es cierto pero  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$  es falso.

(A<sub>1</sub>) (Reflexividad)  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}$  para cada  $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ .

(A<sub>2</sub>) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$ , de  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$  se obtiene  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ .

(A<sub>3</sub>) (Transitividad) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{S}$ , de  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$  se obtiene  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$ .

(A<sub>4</sub>) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$ , de  $\sup \text{sop } \mathcal{A} \leq \inf \text{sop } \mathcal{B}$  se obtiene  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ .

(A'<sub>4</sub>) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$ , de  $\sup \text{sop } \mathcal{A} < \inf \text{sop } \mathcal{B}$  se obtiene  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

(A<sub>5</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A} + \mathcal{C}, \mathcal{B} + \mathcal{C} \in \mathcal{S}$  son tales que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{A} + \mathcal{C} \preceq \mathcal{B} + \mathcal{C}$ .

(A'<sub>5</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A} + \mathcal{C}, \mathcal{B} + \mathcal{C} \in \mathcal{S}$  son tales que  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{A} + \mathcal{C} \prec \mathcal{B} + \mathcal{C}$ .



(A<sub>6</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  son tales que  $\lambda\mathcal{A}, \lambda\mathcal{B} \in \mathcal{S}$ , de  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  se deduce  $\lambda\mathcal{A} \preceq \lambda\mathcal{B}$  si  $\lambda \geq 0$ , y  $\lambda\mathcal{B} \preceq \lambda\mathcal{A}$  si  $\lambda \leq 0$ .

### 2.3. Una metodología propiamente difusa de ordenación de números difusos

Como comentamos en el capítulo introductorio (y repetimos aquí por su interés), desde nuestro punto de vista, aunque todos los enfoques son interesantes, las clasificaciones generadas por un procedimiento basado en el orden estándar de los reales no son consistentes con la idea de vaguedad o incertidumbre que es intrínseca a la teoría difusa. En otras palabras, si el orden entre dos números difusos depende de un número real (por ejemplo, el área entre ellos), es posible que este método no sea capaz de describir tanto la imprecisión como la incertidumbre y, por lo tanto, no sea compatible con factores como la vaguedad y la ambigüedad, lo que afecta al comportamiento del fenómeno estudiado en el entorno difuso. Sería más razonable utilizar técnicas genuinamente difusas en lugar de números reales para ordenar los números difusos. En consecuencia, es necesario introducir nuevos procedimientos de clasificación que satisfagan tres características principales:

- No deben estar basados en un número real único (para evitar la pérdida de información).
- Deben verificar tantas propiedades razonables como sea posible.
- Pero, sobre todo, deben ser tan coherentes con la intuición humana como sea posible.

Teniendo en cuenta estas limitaciones, en esta sección introducimos una nueva relación binaria difusa en todo el conjunto de números difusos que se pueda utilizar en la práctica para comparar dos números difusos distintos. Esta relación

binaria es capaz de llevar a comparaciones que son coherentes con la intuición humana. Especialmente tiene en cuenta la forma geométrica de los números difusos y los subconjuntos medibles en los que un número difuso es claramente menor o igual a otro número difuso. Como su resultado no depende de un número real único, este método no es un índice de ordenación. Además, es compatible con la suma y la multiplicación escalar. De hecho, satisface el mayor número de propiedades razonables que se pueden encontrar en la literatura (más de las propuestas en [39, 13]), lo que conlleva que sea acorde a la intuición humana en la mayoría de los casos. Los datos difusos analizados muestran que la principal ventaja de la metodología propuesta es su capacidad para proporcionar un orden correcto de los números borrosos trapezoidales generalizados. Señalamos que nuestra técnica es aplicable al conjunto formado por todos los números difusos (y no solo a números difusos trapezoidales), aunque es particularmente simple y fácil de ejecutar cuando se trabaja con números difusos triangulares y trapezoidales en problemas de la vida real.

En [56] los autores introdujeron una metodología propia de ranking de números difusos de la siguiente forma. En primer lugar, consideremos el orden usual de Kulisch y Miranker [44] entre intervalos compactos reales: dados dos subintervalos reales compactos  $[a, b]$  y  $[c, d]$ , escribiremos  $[a, b] \leq [c, d]$  si  $a \leq c$  y  $b \leq d$ . Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos números difusos arbitrarios y consideremos los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \{ \alpha \in \mathbb{I} : \mathcal{A}_\alpha \leq \mathcal{B}_\alpha \},$$

$$\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}} = \{ \alpha \in \mathbb{I} : \mathcal{B}_\alpha \leq \mathcal{A}_\alpha \}.$$

Sea  $\mu$  la medida euclídea de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  (la cual, aplicada a intervalos, actúa de la siguiente forma:  $\mu([a, b]) = b - a$ ).

**Definición 2.3.1** (Roldán López de Hierro et al. [56], Definición 4) *Dados*

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ , escribiremos:

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \geq \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) & \text{y} & \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0, & \text{o} \\ \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0 & \text{y} & \underline{a}_0 + \underline{a}_1 + \bar{a}_1 + \bar{a}_0 \leq \underline{b}_0 + \underline{b}_1 + \bar{b}_1 + \bar{b}_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Directamente asociada a la relación  $\preceq$ , podemos considerar las relaciones binarias  $\sim$ ,  $\succ$ ,  $\not\preceq$  y  $\prec$  sobre  $\mathcal{F}$  definidas como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \sim \mathcal{B} & \quad \text{si} \quad \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ y } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A}; \\ \mathcal{A} \succ \mathcal{B} & \quad \text{si} \quad \mathcal{B} \preceq \mathcal{A}; \\ \mathcal{A} \not\preceq \mathcal{B} & \quad \text{si} \quad \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ es falso}; \\ \mathcal{A} \prec \mathcal{B} & \quad \text{si} \quad \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ es cierto y } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A} \text{ es falso.} \end{aligned}$$

Además de que produce ordenaciones acordes con la intuición humana, la principal ventaja de la relación  $\preceq$  es la gran cantidad de propiedades razonables que verifica. En [56] los autores demostraron las siguientes propiedades (en la propiedad  $\mathbb{A}_3$ ,  $\mathcal{F}_{\text{rec}}$  denota el conjunto de los números difusos rectangulares y, en las propiedades  $\mathbb{B}_8$  y  $\mathbb{B}_9$ ,  $\mathcal{F}_{4c}$  simboliza el conjunto de los números difusos que son continuos, como funciones, en las cuatro esquinas  $\underline{a}_0$ ,  $\underline{a}_1$ ,  $\bar{a}_1$  y  $\bar{a}_0$ ).

( $\mathbb{A}_1$ ) (Reflexividad)  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}$  para cada  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ .

( $\mathbb{A}_2$ ) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ , de  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$  se deduce  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ .

( $\mathbb{A}_3$ ) (Transitividad) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}_{\text{rec}}$ , de  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$  se deduce  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$ .

( $\mathbb{A}_4$ ) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_{4c}$ , de  $\text{sup sop } \mathcal{A} \leq \text{ínf sop } \mathcal{B}$  se deduce  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  (de hecho,  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ).

( $\mathbb{A}'_4$ ) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ , de  $\text{sup sop } \mathcal{A} < \text{ínf sop } \mathcal{B}$  se deduce  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

- (A<sub>5</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$  son tales que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{A} + \mathcal{C} \preceq \mathcal{B} + \mathcal{C}$ .
- (B<sub>5</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$  son tales que  $\mathcal{A} + \mathcal{C} \preceq \mathcal{B} + \mathcal{C}$ , entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ .
- (A'<sub>5</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$  son tales que  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{A} + \mathcal{C} \prec \mathcal{B} + \mathcal{C}$ .
- (B'<sub>5</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$  son tales que  $\mathcal{A} + \mathcal{C} \prec \mathcal{B} + \mathcal{C}$ , entonces  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .
- (A<sub>6</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , de  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  se sigue  $\lambda\mathcal{A} \preceq \lambda\mathcal{B}$  si  $\lambda \geq 0$ , y  $\lambda\mathcal{B} \preceq \lambda\mathcal{A}$  si  $\lambda \leq 0$ .
- (B<sub>6</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$  y  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , de  $\lambda\mathcal{A} \preceq \lambda\mathcal{B}$  se sigue  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si  $\lambda > 0$ , y  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$  si  $\lambda < 0$ .
- (A'<sub>6</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$  y  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , de  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  se sigue  $\lambda\mathcal{A} \prec \lambda\mathcal{B}$  si  $\lambda > 0$ , y  $\lambda\mathcal{B} \prec \lambda\mathcal{A}$  si  $\lambda < 0$ .
- (B'<sub>6</sub>) Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$  y  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , de  $\lambda\mathcal{A} \prec \lambda\mathcal{B}$  se sigue  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  si  $\lambda > 0$ , y  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$  si  $\lambda < 0$ .
- (B<sub>7</sub>)  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $-\mathcal{B} \preceq -\mathcal{A}$ .
- (B'<sub>7</sub>)  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $-\mathcal{B} \prec -\mathcal{A}$ .
- (B<sub>8</sub>) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_{4c}$ , de  $\sup(\ker \mathcal{A}) \leq \inf(\text{sop } \mathcal{B})$  se deduce  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  (de hecho,  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ).
- (B'<sub>8</sub>) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ , de  $\sup(\ker \mathcal{A}) < \inf(\text{sop } \mathcal{B})$  se deduce  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .
- (B<sub>9</sub>) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_{4c}$ , de  $\sup(\text{sop } \mathcal{A}) \leq \inf(\ker \mathcal{B})$  se deduce  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  (de hecho,  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ).
- (B'<sub>9</sub>) Para cada  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ , de  $\sup(\text{sop } \mathcal{A}) < \inf(\ker \mathcal{B})$  se deduce  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .



# CAPÍTULO 3

---

## Resultados principales

---

Como se comentó en el capítulo de introducción, en 2018, Roldán López de Hierro *et al.* introdujeron la relación binaria difusa  $\preceq$  en [56] y estudiaron sus principales propiedades, a las que consideraron como acordes con la intuición humana. Con objeto de no extender mucho aquel trabajo, los autores estudiaron el comportamiento de dicha metodología de ordenación difusa en el contexto de los números difusos triangulares, y anunciaron el siguiente teorema.

**Roldán López de Hierro *et al.* [56], Teorema 21.** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3)$  dos números difusos triangulares (tales que  $a_1 < a_2 < a_3$  y  $b_1 < b_2 < b_3$ ). Entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si, se verifica una de los siguientes posibilidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \ a_2 = b_2 \quad y \quad a_1 + a_3 \leq b_1 + b_3; \\ \bullet \ b_2 < a_2 \quad y \quad a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 \quad y \\ \qquad \qquad \qquad (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) \geq (b_2 - a_2)^2; \\ \bullet \ a_2 < b_2 \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} \circ \ a_1 \leq b_1; \\ \circ \ a_3 \leq b_3; \\ \circ \ b_1 < a_1 < a_2 < b_2 < b_3 < a_3 \quad y \\ \qquad \qquad \qquad (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) \leq (b_2 - a_2)^2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Este enunciado fue incluido en dicho artículo sin demostración, quedando el mismo un poco aislado del resto del contenido. Sin embargo, fue precisamente este enunciado el que motivó el principal objetivo de la presente Memoria, pues puso de manifiesto que la actuación de la relación binaria  $\preccurlyeq$  sobre números difusos triangulares, aun cuando puede ser reducida al estudio de sus tres esquinas, es ciertamente enrevesada y no se reduce, en absoluto, a un caso lineal. Es por ello que, desde el principio, nos planteamos extender el estudio anterior a números trapezoidales, los cuales aportan un nivel de complejidad mucho mayor ya que permiten una enorme cantidad de posiciones relativas diferentes. Por describir brevemente la magnitud del problema: ¿de cuántas formas diferentes se pueden ordenar ocho números reales  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4\}$  de manera que  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$  y  $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$ ? Téngase en cuenta que se han de considerar diferentes las desigualdades estrictas –por ejemplo,  $a_1 < b_1$ – y las igualdades –por ejemplo,  $a_1 = b_1$ –.

Para afrontar el objetivo propuesto, en el presente capítulo llevamos a cabo un estudio detallado de la actuación de la relación binaria difusa  $\preccurlyeq$  centrándonos en el contexto de los números difusos trapezoidales. Para ello, las primeras secciones están dedicadas a describir propiedades de esta metodología de ordenación difusa, atendiendo especialmente a la forma geométrica de esta clase tan especial de números difusos. En concreto, será de gran utilidad la consideración de los lados izquierdo y derecho de cada número difuso trapezoidal, y prestaremos especial atención a la forma en la que se intersecan. Debido a la forma rectilínea de sus lados, dicha intersección sólo puede dar lugar a tres casos: o bien no se cortan, o bien se cortan en un único punto, a bien los lados son completamente iguales.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la primera sección recordamos la noción de número difuso trapezoidal, junto con sus principales elementos geométricos asociados, y describimos sus lados y los conjuntos  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  y  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ . En la segunda sección introducimos varias relaciones binarias en la familia de los números difusos trapezoidales que nos servirán para describir cómo

actúa la relación  $\preceq$  en algunos casos. En la tercera sección presentamos algunas situaciones concretas en las que la relación binaria difusa  $\preceq$  actúa simplemente mediante la ordenación de la suma de las cuatro esquinas de los números difusos trapezoidales, de tal manera que, en dichos casos,  $(a_1/a_2/a_3/a_4) \preceq (b_1/b_2/b_3/b_4)$  si, y sólo si,  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq b_1 + b_2 + b_3 + b_4$  (por ejemplo, cuando la gráfica de uno de ellos está situada *debajo* de la gráfica del otro). La cuarta sección está dedicada al estudio de propiedades generales de la relación binaria  $\preceq$ , centrándose algunos enunciados en situaciones en las que los números difusos que se quieren comparar poseen algunas esquinas en común. La quinta sección es la más importante pues describimos una metodología completa de ordenación de dos números difusos mediante  $\preceq$ , desarrollando una clasificación exhaustiva y con casos incompatibles dos a dos. Finalmente, en la última sección, ilustramos la metodología propuesta y la comparamos con los resultados obtenidos por otros autores que desarrollaron procedimientos diferentes al nuestro, analizando la coherencia de los resultados obtenidos.

### 3.1. Algunas propiedades de los números difusos trapezoidales

En esta sección, estudiamos algunas propiedades de la clasificación difusa  $\preceq$  dada por (2.2) al caso particular de los números difusos trapezoidales. Antes de ello, recordamos su definición y características principales.

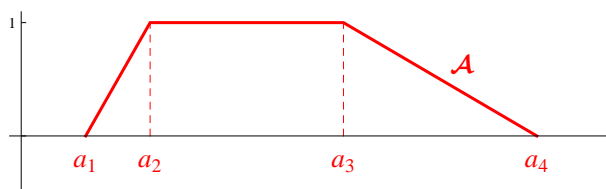


Figura 3.1: Un ejemplo de un número difuso trapezoidal.

Un *número difuso trapezoidal* (véase la Figura 3.1) es un número difuso  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$ , donde  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$  (llamadas las *esquinas* de  $\mathcal{A}$ ),  $a_1 \leq$



$a_2 \leq a_3 \leq a_4$ , definido por:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & \text{si } a_1 < x < a_2, \\ 1, & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3, \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & \text{si } a_3 < x < a_4, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, el núcleo de  $\mathcal{A}$  es  $[a_2, a_3]$  y su soporte es  $[a_1, a_4]$ . Un número difuso trapezoidal es *real* (respectivamente, *rectangular*, *triangular*) si  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$  (respectivamente,  $a_1 = a_2 \leq a_3 = a_4$ ,  $a_1 \leq a_2 = a_3 \leq a_4$ ). Un número difuso trapezoidal real se denomina *número difuso crisp*. Por simplicidad, si  $a_2 = a_3$ , el número difuso  $(a/b/b/c)$  se denotará como  $(a/b/c)$ . En lo que sigue, sea  $\mathcal{T}$  la familia por todos números difusos trapezoidales.

Por comodidad, de ahora en adelante denotaremos por  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  a cualesquiera números difusos trapezoidales. Sus esquinas vendrán dadas por  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$ . Para nuestros propósitos, en este estudio sólo consideraremos aquellos números difusos trapezoidales tales que:

$$a_1 < a_2 \leq a_3 < a_4 \quad \text{y} \quad b_1 < b_2 \leq b_3 < b_4$$

porque, en este caso, la representación gráfica de cada número difuso es un verdadero trapecio y las funciones  $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$  son continuas (en otro caso, podrían ser discontinuas en  $x = a_2$  y en  $x = a_3$ ).

En general, la gráfica de la función de pertenencia  $\mathcal{A}$  representa un trapecio mediante la yuxtaposición de tres segmentos cerrados sobre el plano, formado una poligonal: el primero es el segmento que va desde el punto  $(a_1, 0)$  hasta el punto  $(a_2, 1)$ , el segundo es el segmento entre  $(a_2, 1)$  y  $(a_3, 1)$  (que podría reducirse a un único punto cuando  $a_2 = a_3$ , dando lugar a un número difuso triangular), y el último es el segmento que va desde el punto  $(a_3, 1)$  hasta el punto  $(a_4, 0)$ . Vista en su conjunto, la función  $\mathcal{A}$  es estrictamente creciente en  $[a_1, a_2]$ , es estrictamente decreciente en  $[a_3, a_4]$  y es constante tanto en  $[a_2, a_3]$  como en  $(-\infty, a_1] \cup [a_4, \infty)$ .

Por fijar un criterio y no tener que indicarlo en cada momento, acordamos que cuando dos números difusos trapezoidales  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  están representados en una misma gráfica, siempre representaremos el número  $\mathcal{A}$  en color rojo (línea continua) y el número  $\mathcal{B}$  en color azul (línea discontinua), como puede observarse en la Figura 3.2.

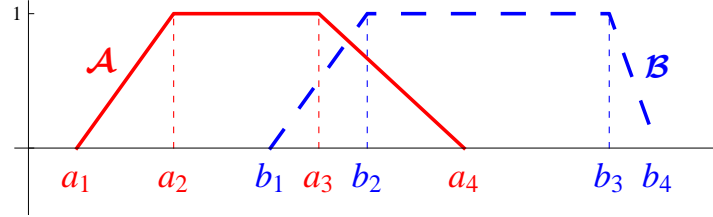


Figura 3.2: Siempre representaremos  $\mathcal{A}$  en rojo y  $\mathcal{B}$  en azul.

Para cada  $\alpha \in \mathbb{I}$ , el  $\alpha$ -corte de  $\mathcal{A}$  viene dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha &= [(1 - \alpha) a_1 + \alpha a_2, \alpha a_3 + (1 - \alpha) a_4] \\ &= [a_1 + \alpha (a_2 - a_1), a_4 - \alpha (a_4 - a_3)]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

En consecuencia, las funciones  $\underline{a}, \bar{a} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  asociadas al número difuso trapezoidal  $\mathcal{A}$  vienen dadas por:

$$\underline{a}_\alpha = a_1 + \alpha (a_2 - a_1) \quad \text{and} \quad \bar{a}_\alpha = a_4 - \alpha (a_4 - a_3)$$

para cualquier  $\alpha \in \mathbb{I}$ . Obsérvese que, en el caso de un número difuso trapezoidal, tanto la función  $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$  como las funciones  $\underline{a}, \bar{a} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en todo su dominio.

### 3.1.1. Los lados de un número difuso trapezoidal

Dado un número difuso trapezoidal  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$ , denotaremos por  $\ell_{\mathcal{A}}$  al *lado izquierdo* del trapecio que define la gráfica de  $\mathcal{A}$ , es decir,  $\ell_{\mathcal{A}}$  es el segmento cerrado en el plano que une los puntos  $(a_1, 0)$  y  $(a_2, 1)$ . Este segmento puede parametrizarse de la siguiente forma:

$$\ell_{\mathcal{A}} = \{(\underline{a}_\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{I}\} = \{(a_1 + \alpha (a_2 - a_1), \alpha) : \alpha \in \mathbb{I}\}.$$

Igualmente, denotaremos por  $r_{\mathcal{A}}$  al *lado derecho* del gráfico de  $\mathcal{A}$ , es decir, al segmento cerrado en el plano cuyos extremos son los puntos  $(a_3, 1)$  y  $(a_4, 0)$  y que, al igual que antes, puede describirse como:

$$r_{\mathcal{A}} = \{(\bar{a}_{\alpha}, \alpha) : \alpha \in \mathbb{I}\} = \{(a_4 + \alpha(a_3 - a_4), \alpha) : \alpha \in \mathbb{I}\}.$$

Nos referiremos a  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{A}}$  como los *lados de*  $\mathcal{A}$ . Dado que estos lados no son curvas arbitrarias sino que son rectilíneos, encontramos la siguiente propiedad acerca de la posible intersección de los lados de números difusos trapezoidales (situados a la izquierda o a la derecha de los mismos).

**Lema 3.1.1** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos números difusos trapezoidales.

1. Si la intersección  $\ell_{\mathcal{A}} \cap \ell_{\mathcal{B}}$  contiene dos puntos distintos, entonces  $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{B}}$ .
2. Si la intersección  $r_{\mathcal{A}} \cap r_{\mathcal{B}}$  contiene dos puntos distintos, entonces  $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{B}}$ .

DEMOSTRACIÓN: Explicamos solo el primer apartado. Supongamos que la intersección  $\ell_{\mathcal{A}} \cap \ell_{\mathcal{B}}$  contiene dos puntos distintos, es decir, existen  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{I}$  tales que  $\alpha_1 < \alpha_2$  y

$$\begin{aligned} (a_1 + \alpha_1(a_2 - a_1), \alpha_1) &= (\underline{a}_{\alpha_1}, \alpha_1) = (\underline{b}_{\alpha_1}, \alpha_1) = (b_1 + \alpha_1(b_2 - b_1), \alpha_1), \\ (a_1 + \alpha_2(a_2 - a_1), \alpha_2) &= (\underline{a}_{\alpha_2}, \alpha_2) = (\underline{b}_{\alpha_2}, \alpha_2) = (b_1 + \alpha_2(b_2 - b_1), \alpha_2). \end{aligned}$$

Entonces  $a_1 + \alpha_1(a_2 - a_1) = b_1 + \alpha_1(b_2 - b_1)$  y  $a_1 + \alpha_2(a_2 - a_1) = b_1 + \alpha_2(b_2 - b_1)$ . Restando estas igualdades, deducimos que  $(\alpha_2 - \alpha_1)(a_2 - a_1) = (\alpha_2 - \alpha_1)(b_2 - b_1)$ . Dado que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son distintos, observamos que  $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$ . Así, de la igualdad

$$a_1 + \alpha_1(a_2 - a_1) = b_1 + \alpha_1(b_2 - b_1)$$

concluimos que  $a_1 = b_1$ . De la misma forma se obtiene que  $a_2 = b_2$  por lo que los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  son iguales. ■

Los lados izquierdos de dos números difusos trapezoidales sólo se pueden colocar en cuatro posiciones relativas diferentes (que son incompatibles dos a dos):

- los dos lados son iguales, es decir,  $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{B}}$ , lo cual ocurre si, y sólo si,  $a_1 = b_1$  y  $a_2 = b_2$ ;
- el lado  $\ell_{\mathcal{A}}$  está situado a la izquierda de  $\ell_{\mathcal{B}}$  (en este caso, escribiremos  $\ell_{\mathcal{A}} < \ell_{\mathcal{B}}$ ), lo cual ocurre si  $a_1 < b_1$  y  $a_2 < b_2$ ;
- el lado  $\ell_{\mathcal{A}}$  está situado a la derecha de  $\ell_{\mathcal{B}}$  (escribiremos  $\ell_{\mathcal{A}} > \ell_{\mathcal{B}}$ ), lo cual ocurre si  $a_1 > b_1$  y  $a_2 > b_2$ ;
- los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común.

En el caso concreto de que los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  posean un único punto en común, denotaremos por  $(x_1, y_1)$  a dicho punto en común, es decir,  $\ell_{\mathcal{A}} \cap \ell_{\mathcal{B}} = \{(x_1, y_1)\}$ . Existen dos únicas posibilidades para que esto suceda:

$$\text{o bien } a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2 \quad \text{o bien } b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2,$$

de donde se deduce que si  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común, entonces  $a_1 \neq b_1$  o  $a_2 \neq b_2$  (o ambas desigualdades a la vez).

De forma similar, podemos considerar los casos  $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{B}}$ ,  $r_{\mathcal{A}} < r_{\mathcal{B}}$ ,  $r_{\mathcal{A}} > r_{\mathcal{B}}$  o  $r_{\mathcal{A}} \cap r_{\mathcal{B}} = \{(x_2, y_2)\}$ , donde  $(x_2, y_2)$  denota el único punto común de  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  (cuando éste existe y es único). En el siguiente resultado, calculamos las coordenadas sobre el plano de los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , cuando éstos existen.

**Proposición 3.1.2** Dados dos números difusos trapezoidales  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$ , si los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común, entonces este punto es:

$$(x_1, y_1) = \left( \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(b_1 - a_1) + (a_2 - b_2)}, \frac{b_1 - a_1}{(b_1 - a_1) + (a_2 - b_2)} \right).$$

En este caso,

$$y_1 = \frac{|a_1 - b_1|}{|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|}. \quad (3.2)$$

De manera análoga, si los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común, este punto es:

$$(x_2, y_2) = \left( \frac{a_3 b_4 - a_4 b_3}{(a_3 - b_3) + (b_4 - a_4)}, \frac{b_4 - a_4}{(a_3 - b_3) + (b_4 - a_4)} \right).$$

En este caso,

$$y_2 = \frac{|a_4 - b_4|}{|a_3 - b_3| + |a_4 - b_4|}. \quad (3.3)$$

En concreto, en todos los casos anteriores, los denominadores indicados no son nulos.

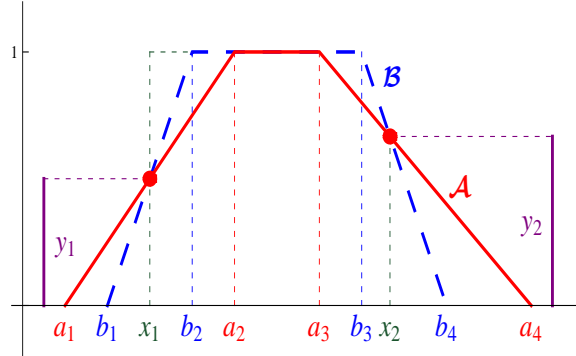


Figura 3.3: Los lados de los números difusos tienen puntos comunes únicos.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que los lados  $\ell_A$  y  $\ell_B$  tienen un único punto en común  $\ell_A \cap \ell_B = \{(x_1, y_1)\}$ . Hay dos casos posibles:  $a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2$  o  $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$ , donde es imposible alcanzar ambas igualdades en las desigualdades de los extremos al mismo tiempo (en tal caso, si ocurriese  $a_1 = b_1$  y  $a_2 = b_2$ , se tendría que  $\ell_A = \ell_B$ , lo cual es falso). Supongamos, por ejemplo, que  $a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2$  (véase la Figura 3.3). Entonces, utilizando el *Teorema de Thales*,

$$\frac{y_1}{x_1 - b_1} = \frac{1 - y_1}{b_2 - x_1} \quad \text{y} \quad \frac{y_1}{x_1 - a_1} = \frac{1 - y_1}{a_2 - x_1},$$

o, de forma equivalente (para evitar denominadores nulos),

$$y_1(b_2 - x_1) = (1 - y_1)(x_1 - b_1) \quad \text{y} \quad y_1(a_2 - x_1) = (1 - y_1)(x_1 - a_1). \quad (3.4)$$

Resolviendo este sistema lineal, se obtiene el punto:

$$(x_1, y_1) = \left( \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(b_1 - a_1) + (a_2 - b_2)}, \frac{b_1 - a_1}{(b_1 - a_1) + (a_2 - b_2)} \right).$$

Observemos que, en este caso,  $(b_1 - a_1) + (a_2 - b_2) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| > 0$ , por lo que el denominador es no nulo.

El caso  $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$  es similar ya que las ecuaciones (3.4) son las mismas. En este caso,  $(b_1 - a_1) + (a_2 - b_2) = -|a_1 - b_1| - |a_2 - b_2| < 0$  y también  $b_1 - a_1 = -|a_1 - b_1| \leq 0$ , por lo que  $0 \leq y_1 \leq 1$ .

Repitiendo los argumentos anteriores podemos encontrar las coordenadas de  $(x_2, y_2)$ , que son las descritas en el enunciado. ■

En el siguiente resultado estudiamos algunas posibilidades para los valores  $y_1$  y  $y_2$ , cuando éstos existen.

**Corolario 3.1.3** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  dos números difusos trapezoidales.

1. Si los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común  $(x_1, y_1)$ , entonces

$$y_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1;$$

$$y_1 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq b_1 \Leftrightarrow |a_1 - b_1| > 0;$$

$$y_1 < 1 \Leftrightarrow a_2 \neq b_2 \Leftrightarrow |a_2 - b_2| > 0;$$

$$y_1 = 1 \Leftrightarrow a_2 = b_2.$$

2. Si los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común  $(x_2, y_2)$ , entonces

$$y_2 = 0 \Leftrightarrow a_4 = b_4;$$

$$y_2 > 0 \Leftrightarrow a_4 \neq b_4 \Leftrightarrow |a_4 - b_4| > 0;$$

$$y_2 < 1 \Leftrightarrow a_3 \neq b_3 \Leftrightarrow |a_3 - b_3| > 0;$$

$$y_2 = 1 \Leftrightarrow a_3 = b_3.$$

3. Si los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común  $(x_1, y_1)$  y los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común  $(x_2, y_2)$ , entonces se cumplen las siguientes equivalencias.

$$y_1 \leq y_2 \Leftrightarrow |a_1 - b_1| |a_3 - b_3| \leq |a_2 - b_2| |a_4 - b_4|; \quad (3.5)$$

$$y_1 + y_2 \leq 1 \Leftrightarrow |a_1 - b_1| |a_4 - b_4| \leq |a_2 - b_2| |a_3 - b_3|. \quad (3.6)$$

(las mismas equivalencias son ciertas si reemplazamos, a la vez, el símbolo  $\leq$  por  $<$ ,  $=$ ,  $>$  o  $\geq$  en las desigualdades anteriores).

DEMOSTRACIÓN: Los dos primeros puntos se obtienen directamente de la igualdad (3.2) y (3.3), que proporcionan expresiones explícitas para  $y_1$  e  $y_2$  (donde los denominadores son estrictamente positivos). Además,

$$\begin{aligned} y_1 \leq y_2 &\Leftrightarrow \frac{|a_1 - b_1|}{|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|} \leq \frac{|a_4 - b_4|}{|a_3 - b_3| + |a_4 - b_4|} \\ &\Leftrightarrow |a_1 - b_1| |a_3 - b_3| + |a_1 - b_1| |a_4 - b_4| \\ &\quad \leq |a_1 - b_1| |a_4 - b_4| + |a_2 - b_2| |a_4 - b_4| \\ &\Leftrightarrow |a_1 - b_1| |a_3 - b_3| \leq |a_2 - b_2| |a_4 - b_4|. \end{aligned}$$

El mismo argumento es cierto si reemplazamos  $\leq$  por  $<$ ,  $=$ ,  $>$  o  $\geq$  porque los denominadores son estrictamente positivos. De la misma forma,

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{|a_1 - b_1|}{|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|} + \frac{|a_4 - b_4|}{|a_3 - b_3| + |a_4 - b_4|} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |a_1 - b_1| |a_3 - b_3| + |a_1 - b_1| |a_4 - b_4| \\ &\quad + |a_1 - b_1| |a_4 - b_4| + |a_2 - b_2| |a_4 - b_4| \\ &\quad \leq |a_1 - b_1| |a_3 - b_3| + |a_1 - b_1| |a_4 - b_4| \\ &\quad + |a_2 - b_2| |a_3 - b_3| + |a_2 - b_2| |a_4 - b_4| \\ &\Leftrightarrow |a_1 - b_1| |a_4 - b_4| \leq |a_2 - b_2| |a_3 - b_3|. \end{aligned}$$

De manera similar, el mismo argumento es válido si reemplazamos  $\leq$  por  $<$ ,  $=$ ,  $>$  o  $\geq$ . ■

### 3.1.2. Los conjuntos $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ y $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$

En este apartado prestamos atención a los conjuntos  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  y  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  en el caso de que los números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  sean trapezoidales. Recordemos que, desde nuestro punto de vista, interpretamos que sus respectivas medidas sirven para estimar la probabilidad de que  $\mathcal{A}$  sea menor que  $\mathcal{B}$  y de que  $\mathcal{B}$  sea menor que  $\mathcal{A}$ , respectivamente.

En el siguiente resultado demostramos que, cuando  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son números difusos trapezoidales, cada uno de los conjuntos  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  y  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  es o bien vacío o bien un subintervalo cerrado de  $\mathbb{I}$ . Además, su intersección  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cap \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  o bien es vacía o bien se reduce a un único punto.

**Lema 3.1.4** Dados dos números difusos trapezoidales  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  se verifican las siguientes propiedades.

1. Los conjuntos  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  y  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  pueden describirse como:

$$\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \left/ \begin{array}{l} \alpha [(b_2 - a_2) - (b_1 - a_1)] + (b_1 - a_1) \geq 0, \\ \alpha [(b_3 - a_3) - (b_4 - a_4)] + (b_4 - a_4) \geq 0, \\ \alpha \geq 0, \\ \alpha \leq 1 \end{array} \right. \right\} \quad (3.7)$$

$$= \left\{ \alpha \in \mathbb{I} \left/ \begin{array}{l} \alpha [(b_2 - a_2) - (b_1 - a_1)] + (b_1 - a_1) \geq 0, \\ \alpha [(b_3 - a_3) - (b_4 - a_4)] + (b_4 - a_4) \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

y

$$\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \left/ \begin{array}{l} \alpha [(b_2 - a_2) - (b_1 - a_1)] + (b_1 - a_1) \leq 0, \\ \alpha [(b_3 - a_3) - (b_4 - a_4)] + (b_4 - a_4) \leq 0, \\ \alpha \geq 0, \\ \alpha \leq 1 \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ \alpha \in \mathbb{I} \left/ \begin{array}{l} \alpha [(b_2 - a_2) - (b_1 - a_1)] + (b_1 - a_1) \leq 0, \\ \alpha [(b_3 - a_3) - (b_4 - a_4)] + (b_4 - a_4) \leq 0 \end{array} \right. \right\}.$$

2.  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  (respectivamente,  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ ) o bien es vacío o bien es un subintervalo cerrado de  $\mathbb{I}$ . En particular, es un subconjunto conexo y convexo de  $\mathbb{R}$ .
3. Si la intersección  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cap \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  contiene dos puntos distintos, entonces los números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son iguales.
4. Si los números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son distintos, entonces los conjuntos  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  y  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  son dos subintervalos cerrados de  $\mathbb{I}$  (incluyendo la posibilidad de que sean vacíos), y la intersección  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cap \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  o bien es vacía o bien se reduce a un único punto.



DEMOSTRACIÓN: **(1)** Dados  $\alpha \in \mathbb{I}$ , se sigue de (3.1) que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha \leq \mathcal{B}_\alpha &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 + \alpha (a_2 - a_1) \leq b_1 + \alpha (b_2 - b_1), \\ a_4 + \alpha (a_3 - a_4) \leq b_4 + \alpha (b_3 - b_4) \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha [(b_2 - a_2) - (b_1 - a_1)] + (b_1 - a_1) \geq 0, \\ \alpha [(b_3 - a_3) - (b_4 - a_4)] + (b_4 - a_4) \geq 0 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} &= \{ \alpha \in \mathbb{I} : \mathcal{A}_\alpha \leq \mathcal{B}_\alpha \} \\ &= \left\{ \alpha \in \mathbb{I} \left/ \begin{array}{l} \alpha [(b_2 - a_2) - (b_1 - a_1)] + (b_1 - a_1) \geq 0, \\ \alpha [(b_3 - a_3) - (b_4 - a_4)] + (b_4 - a_4) \geq 0 \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Las desigualdades que definen  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  son las mismas pero cambiando el sentido de las desigualdades.

**(2)** Si el conjunto  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  no es vacío, entonces éste queda completamente definido por las cuatro desigualdades dadas en (3.7). Todas ellas dan lugar a un subconjunto cerrado, conexo y convexo de  $\mathbb{R}$ , por lo que su intersección es también un subconjunto cerrado, conexo y convexo de  $\mathbb{R}$ . Como está incluido en  $\mathbb{I}$ , concluimos que  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  es un subintervalo cerrado de  $\mathbb{I}$ .

**(3)** Supongamos que  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cap \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  contiene dos puntos distintos  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{I}$  tales que  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Como  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  y  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  son subintervalos de  $\mathbb{I}$ , entonces  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cap \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  es también un subintervalo de  $\mathbb{I}$  y podemos afirmar que  $[\alpha_1, \alpha_2] \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cap \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ . Consideremos las funciones  $f_1, f_2 : [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas, para cualquier  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ , por:

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \alpha [(b_2 - a_2) - (b_1 - a_1)] + (b_1 - a_1), \\ f_2(\alpha) &= \alpha [(b_3 - a_3) - (b_4 - a_4)] + (b_4 - a_4). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha_1 \in \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} &\Rightarrow \underline{a}_{\alpha_1} \leq \underline{b}_{\alpha_1} \Leftrightarrow a_1 + \alpha_1 (a_2 - a_1) \leq b_1 + \alpha_1 (b_2 - b_1) \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 [(b_2 - a_2) - (b_1 - a_1)] + (b_1 - a_1) \geq 0 \Leftrightarrow f_1(\alpha_1) \geq 0. \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \in \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} &\Rightarrow \underline{b}_{\alpha_1} \leq \underline{a}_{\alpha_1} \Leftrightarrow a_1 + \alpha_1 (a_2 - a_1) \geq b_1 + \alpha_1 (b_2 - b_1) \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 [(b_2 - a_2) - (b_1 - a_1)] + (b_1 - a_1) \leq 0 \Leftrightarrow f_1(\alpha_1) \leq 0. \end{aligned}$$

Entonces  $f_1(\alpha_1) = 0$ . De la misma forma puede probarse que  $f_1(\alpha_2) = 0$ . Como hemos demostrado que  $f_1$  es un polinomio de primer grado en  $\alpha$  con dos raíces distintas (a saber,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ), entonces debe ser obligatoriamente nulo, de donde deducimos que  $a_1 = b_1$  y  $a_2 = b_2$ . Utilizando la función  $f_2$  puede comprobarse que  $a_3 = b_3$  y  $a_4 = b_4$ , por lo que concluimos que  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ . ■

**Observación 3.1.5** *Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son dos números trapezoidales distintos, entonces los conjuntos  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  y  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  son dos subintervalos de  $\mathbb{I}$  (si son no vacíos). Esto significa que sus respectivas medidas euclídeas pueden calcularse como la diferencia entre su máximo y su mínimo, es decir, si  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [\alpha, \beta]$ , entonces  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \beta - \alpha$ . Además, la igualdad  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = 0$  ocurre si, y sólo si,  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  o bien es vacío o bien se reduce a un único punto.*

Computacionalmente, es fácil caracterizar el conjunto  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  como el intervalo de soluciones del sistema de inecuaciones:

$$\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \equiv \begin{cases} m_1\alpha + n_1 \geq 0, \\ m_2\alpha + n_2 \geq 0, \\ \alpha \geq 0, \\ \alpha \leq 1, \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} m_1 = (b_2 - a_2) - (b_1 - a_1), \\ n_1 = b_1 - a_1, \\ m_2 = (b_3 - a_3) - (b_4 - a_4), \\ n_2 = b_4 - a_4. \end{cases}$$

Análogamente,

$$\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \equiv \begin{cases} m_1\alpha + n_1 \leq 0, \\ m_2\alpha + n_2 \leq 0, \\ \alpha \geq 0, \\ \alpha \leq 1, \end{cases}$$

Sin embargo, los signos de  $m_1$ ,  $n_1$ ,  $m_2$  y  $n_2$  producen una gran variedad de casos distintos. En general, si consideramos las líneas

$$y_1 = m_1\alpha + n_1 \quad \text{e} \quad y_2 = m_2\alpha + n_2,$$

entonces  $y_1 = 0$  nos lleva a

$$\alpha_1 = -\frac{n_1}{m_1} = \frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2) - (b_1 - a_1)}, \quad (3.8)$$

e  $y_2 = 0$  nos lleva a

$$\alpha_2 = -\frac{n_2}{m_2} = \frac{-(b_4 - a_4)}{(b_3 - a_3) - (b_4 - a_4)} \quad (3.9)$$

cuando los denominadores de (3.8) y (3.9) son no nulos. Cuando estos números pertenecen al intervalo  $\mathbb{I}$ , entonces pueden verse como los extremos de los intervalos  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  y  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ . En cualquier caso, debemos considerar varias posibilidades para describir cuándo se cumple la condición  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  siguiendo el criterio dado en (3.10).

## 3.2. Relaciones binarias sobre la familia de números difusos trapezoidales

En esta sección, con objeto de estudiar la relación binaria  $\preceq$  dada en (2.2) en el contexto de los números difusos trapezoidales, vamos a introducir nuevas relaciones binarias entre esta clase de números (o incluso entre números difusos más generales) que nos ayudarán a comprender mejor el comportamiento de la relación  $\preceq$ .

### 3.2.1. Algunas relaciones binarias en el conjunto $\mathcal{T}$

Es claro que si  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  es un número difuso trapezoidal, entonces  $\underline{a}_0 = a_1$ ,  $\underline{a}_1 = a_2$ ,  $\bar{a}_1 = a_3$  y  $\bar{a}_0 = a_4$ . Por lo tanto, el ranking difuso dado en (2.2) puede particularizarse a los números difusos trapezoidales  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  como sigue:

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{o bien} \quad \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \geq \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) \quad \text{y} \quad \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0, \\ \text{o bien} \quad \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0 \quad \text{y} \\ \quad \quad \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq b_1 + b_2 + b_3 + b_4. \end{array} \right.$$

Como consecuencia, la condición

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

será de importancia a lo largo de la presente memoria. Es conveniente, pues, introducir una nueva notación para denotar esta propiedad. De paso, aprovechamos para introducir algunas relaciones binarias que serán consideradas en lo sucesivo.

**Definición 3.2.1** *Dados dos números difusos trapezoidales  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$ ,  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4) \in \mathcal{T}$ , diremos que:*

- $\mathcal{A}$  es coordenadamente menor o igual que  $\mathcal{B}$ , y escribiremos  $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$ , si  $a_i \leq b_i$  para cualquier  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  (cada esquina de  $\mathcal{A}$  es menor o igual que su correspondiente esquina de  $\mathcal{B}$ );
- se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  si existen tres índices distintos  $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$  tales que  $a_{i_j} < b_{i_j}$  para cualquier  $j \in \{1, 2, 3\}$  ( $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  poseen, al menos, tres esquinas correspondientes diferentes);
- $\mathcal{A}$  es sumativamente menor o igual que  $\mathcal{B}$ , y escribiremos  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ , si  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ ;
- $\mathcal{A}$  está incluido en  $\mathcal{B}$ , y escribiremos  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ , si  $\mathcal{A}(t) \leq \mathcal{B}(t)$  para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ .

Además, denotaremos por  $N_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  al número de esquinas comunes correspondientes entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , es decir,

$$N_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \text{card}(\{i \in \{1, 2, 3, 4\} : a_i = b_i\}).$$

**Observación 3.2.2** 1. Las relaciones binarias  $\leq_c$  y  $\leq$  son órdenes parciales (reflexivas, antisimétricas y transitivas) sobre la familia  $\mathcal{T}$  formada por todos los números trapezoidales difusos. Sin embargo, hay muchos casos en los que no están de acuerdo con la intuición humana de ordenación de

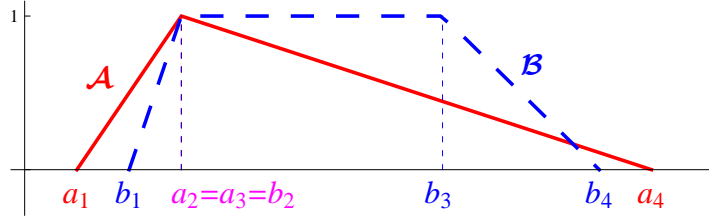


Figura 3.4: ¿Nos dice la intuición que  $\mathcal{A}$  es menor que  $\mathcal{B}$ ?

menor a mayor. Por ejemplo, en la Figura 3.4, la intuición nos dice que  $\mathcal{A}$  es menor que  $\mathcal{B}$ . En consecuencia, se verifica  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ . Sin embargo, las desigualdades  $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$  son falsas.

2. La relación binaria  $\leq$  también podría introducirse para números difusos arbitrarios  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$  y, en este caso, también es un orden parcial sobre  $\mathcal{F}$ .
3. Si  $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$  entonces  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ , pero el recíproco es falso.
4. Utilizando la notación previa, el ranking dado en (2.2) puede particularizarse a números difusos trapezoidales  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{T}$  como sigue:

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \text{o bien} & \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \geq \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) \quad \text{y} \quad \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0, \\ \text{o bien} & \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}. \end{cases} \quad (3.10)$$

5. La relación de inclusión de números difusos  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$  puede interpretarse como sigue: si  $\mathcal{A}$  ocurre (es decir,  $\mathcal{A}(t) > 0$ ), entonces necesariamente  $\mathcal{B}$  también ocurre (ya que  $0 < \mathcal{A}(t) \leq \mathcal{B}(t)$ ), incluso con más probabilidad. Algunos autores también escriben  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ .
6. La Figura 3.5 muestra algunos ejemplos en los que el número difuso trapezoidal  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$ . Obsérvese que ello quiere decir que la gráfica de  $\mathcal{B}$  está bajo la gráfica de  $\mathcal{A}$ .
7. Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son números difusos trapezoidales, entonces  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$  si, y sólo si,

$$a_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq b_2, \quad a_3 \geq b_3 \quad \text{y} \quad a_4 \geq b_4. \quad (3.11)$$

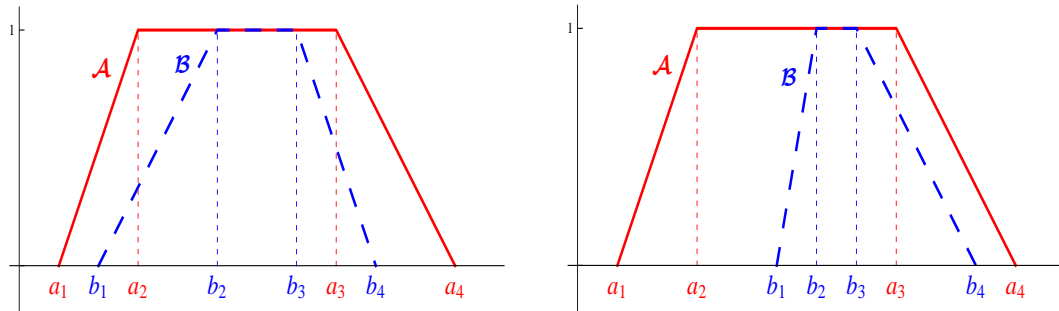


Figura 3.5: Representaciones gráficas donde  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$ .

De forma análoga,  $\mathcal{A}$  está incluido en  $\mathcal{B}$  si, y sólo si,

$$a_1 \geq b_1, \quad a_2 \geq b_2, \quad a_3 \leq b_3 \quad \text{y} \quad a_4 \leq b_4. \quad (3.12)$$

8. No hay relación directa entre las relaciones binarias  $\preceq$  y  $\leq$ . Es posible que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  cuando ocurre  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$  y cuando ocurre  $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$  (véase la Figura 3.6).

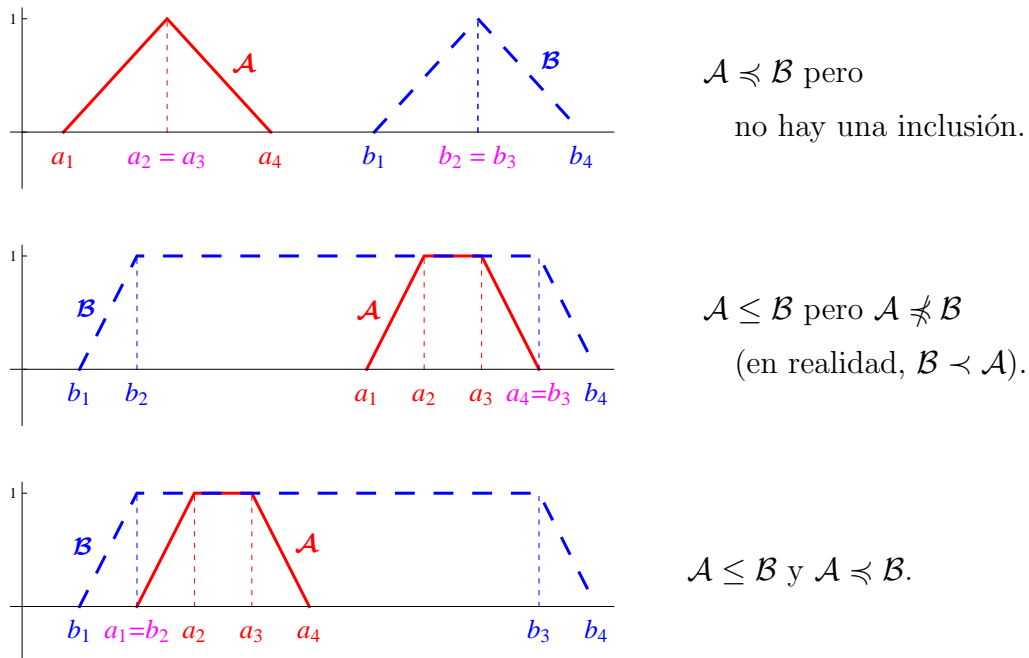


Figura 3.6: Diferentes posiciones relativas de números difusos.

En lo que sigue, usaremos la notación  $\mathcal{A} \not\leq \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$  para indicar que  $\mathcal{A}$  no

está incluido en  $\mathcal{B}$  y que  $\mathcal{B}$  no está incluido en  $\mathcal{A}$ , es decir, globalmente, ninguna gráfica está por debajo de la del otro número difuso.

**Proposición 3.2.3** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos números difusos trapezoidales.

1. Si se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ , entonces  $\mathcal{A} \not\leq \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$ .
2. Si  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$  o  $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ , entonces no se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ .

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de (3.11) y de (3.12) ya que, en tal caso,  $\mathcal{A}$  no puede tener tres vértices estrictamente inferiores a sus correspondientes vértices en  $\mathcal{B}$ .

■

**Proposición 3.2.4** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos números difusos trapezoidales.

1. Si se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ , entonces  $N_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \leq 1$ .
2. Si  $N_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \geq 2$  entonces no se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ .

### 3.3. Algunos resultados en los que el ranking difuso es equivalente a un ranking acumulativo

Antes de particularizar la relación de ordenación difusa dada por (2.2) o, equivalentemente, por (3.10), al caso de números difusos trapezoidales, describimos algunos casos en los que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  es equivalente a  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ , que es, en algún sentido, acorde con la intuición humana. Por ello, en esta sección mostramos algunas condiciones iniciales bajo las que la ordenación de números difusos se reduce a la ordenación de la suma de sus cuatro esquinas. De esta forma, computacionalmente la ordenación es aún más sencilla en los casos que vamos a describir.

**Lema 3.3.1** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  dos números difusos trapezoidales.

1. Si  $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$  entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y también  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ .
2. Si  $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$  y existe  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  tales que  $a_j < b_j$ , entonces  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ . En tal caso,  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y también  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ .

DEMOSTRACIÓN: (1) Supongamos que  $a_i \leq b_i$  para cualquier  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Entonces, para cualquier  $\alpha \in \mathbb{I}$ ,

$$\begin{aligned} \underline{a}_\alpha &= (1 - \alpha) a_1 + \alpha a_2 \leq (1 - \alpha) b_1 + \alpha b_2 = \underline{b}_\alpha \quad \text{y} \\ \bar{a}_\alpha &= \alpha a_3 + (1 - \alpha) a_4 \leq \alpha b_3 + (1 - \alpha) b_4 = \bar{b}_\alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \mathbb{I}$  y  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Además,  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ , por lo que  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ .

(2) Teniendo en cuenta el primer apartado,  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ . Siguiendo su demostración, deducimos que  $\underline{a}_\alpha \leq \underline{b}_\alpha$  y  $\bar{a}_\alpha \leq \bar{b}_\alpha$  para cualquier  $\alpha \in \mathbb{I}$ , lo cual implica que  $\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \mathbb{I}$  y también  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}) = 1$  (el máximo valor posible). Afirmamos que si existe un índice  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  tal  $a_j < b_j$ , entonces  $\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}$  no puede ser  $\mathbb{I}$ . Por ejemplo, supongamos que  $a_1 < b_1$ . Como  $\underline{a}_0 = a_1 < b_1 = \underline{b}_0$  y las funciones  $\underline{a}, \underline{b} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas, existe  $\varepsilon \in (0, 1)$  tal que  $\underline{a}_\alpha < \underline{b}_\alpha$  para cualquier  $\alpha \in [0, \varepsilon]$ . Por lo tanto  $[0, \varepsilon] \cap \mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}} = \emptyset$ , lo que significa que  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}) \leq 1 - \varepsilon < 1 = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}})$ . Esto implica que la condición  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$  no puede verificarse y, por lo tanto,  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ . Los otros casos son similares. ■

**Lema 3.3.2** Dados  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{T}$ , si  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$  o  $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ , entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$  (el caso contrario es similar). Entonces  $a_1 \leq b_1$ ,  $a_2 \leq b_2$ ,  $a_3 \geq b_3$  y  $a_4 \geq b_4$  (véase, por ejemplo, la Figura 3.7).

Consideremos los siguientes casos.



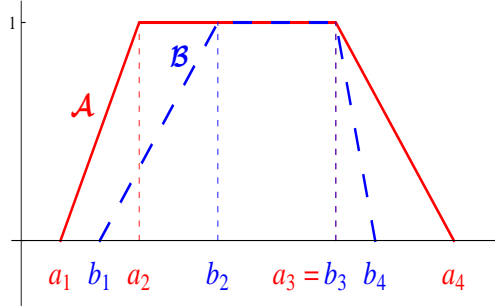


Figura 3.7:  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$ .

- *Caso 1: Supongamos que  $a_3 = b_3$  y  $a_4 = b_4$ .* En este caso, dado que  $a_i \leq b_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , deducimos que  $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$ , por lo que se verifican, a la vez, las dos desigualdades  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$  (téngase en cuenta el apartado 1 del Lema 3.3.1).
- *Caso 2: Supongamos que al menos una de las desigualdades  $a_3 \geq b_3$  y  $a_4 \geq b_4$  es estricta.* En tal caso, el lado  $r_{\mathcal{A}}$  se sitúa estrictamente a la derecha del lado  $r_{\mathcal{B}}$  y dichos lados tienen, como mucho, un único punto en común, que ha de ser un extremo común de ambos. Por tanto, la condición  $\bar{b}_\alpha \leq \bar{a}_\alpha$  sólo se puede cumplir para  $\alpha = 0$  o para  $\alpha = 1$ . De esta forma,  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \subseteq \{0, 1\}$ , lo que significa que  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = 0$ . A continuación, consideramos dos subcasos dependiendo de la posición relativa de los lados izquierdos.

  - *Subcaso 2.1: Supongamos que  $a_1 = b_1$  y  $a_2 = b_2$ .* En este caso,  $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{B}}$ , lo que significa que  $\underline{a}_\alpha = \underline{b}_\alpha$  para cualquier  $\alpha \in \mathbb{I}$ . De esta forma,  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \subseteq \{0, 1\}$  y  $]0, 1[ \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  (véase la Figura 3.8). Así,  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = 0 < 1 = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}})$ . Por lo tanto, en este caso, las condiciones  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$  son falsas al mismo tiempo.
  - *Subcaso 2.2: Supongamos que al menos una de las desigualdades  $a_1 \leq b_1$  y  $a_2 \leq b_2$  es estricta.* En este caso, el lado  $\ell_{\mathcal{A}}$  está situado en el lado izquierdo del lado  $\ell_{\mathcal{B}}$  y ambos lados tienen, como mucho, un único punto en común, que ha de situarse en un extremo común de ambos (véase la Figura 3.9). De esta forma, deducimos que  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \subseteq \{0, 1\}$  e igualmente  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} \subseteq \{0, 1\}$ , por lo que  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0$ .

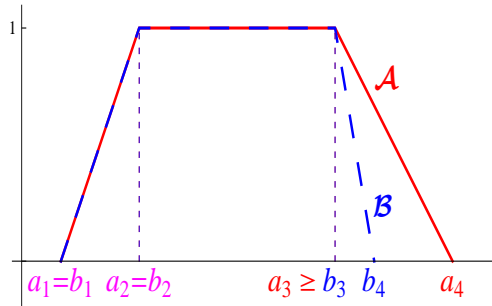


Figura 3.8:  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$  con el mismo lado izquierdo.

Aplicando el ranking difuso dado en (3.10), concluimos que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ .

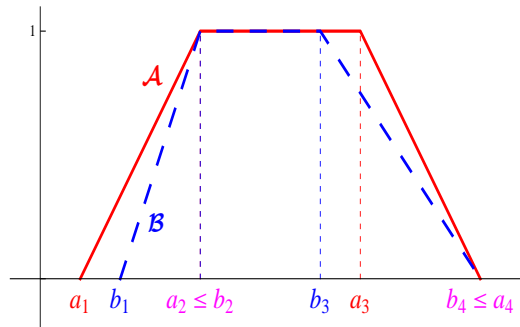


Figura 3.9:  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$  con esquinas comunes.

Si ocurriese que  $\mathcal{A}$  está incluido en  $\mathcal{B}$ , la demostración es similar. ■

**Lema 3.3.3** Si dos números difusos trapezoidales  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tienen un lado común ( $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{B}}$  o  $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{B}}$ ), entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$ . Supongamos que  $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{B}}$ , esto es,  $a_1 = b_1$  y  $a_2 = b_2$ . Si  $a_3 \leq b_3$  y  $a_4 \leq b_4$  (incluyendo el caso  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ), entonces el apartado 1 del Lema 3.3.1 garantiza que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . En este caso, también se cumple que  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ , por lo que las dos condiciones  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$  ocurren al mismo tiempo. A continuación, supongamos que  $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$  y que las condiciones  $a_3 \leq b_3$  y  $a_4 \leq b_4$  no se verifican al mismo tiempo. Así, debe ocurrir al menos una de las desigualdades  $a_3 > b_3$  o  $a_4 > b_4$ . Los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y

$r_{\mathcal{B}}$  no pueden ser iguales ya que  $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ . Entonces el apartado 2 del Lema 3.1.1 asegura que estos pueden tener, a lo sumo, un único punto en común.

Supongamos que  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  no tienen ningún punto en común. En este caso, deben ocurrir, a la vez, las desigualdades  $b_3 < a_3$  y  $b_4 < a_4$  (ya que el caso  $a_3 < b_3$  y  $a_4 < b_4$  ya fue considerado). Entonces  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \emptyset$  y  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \mathbb{I}$ , por lo que las dos condiciones  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$  son falsas a la vez.

A continuación supongamos que  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común, al que denominamos  $(x_2, y_2)$ . Hay dos casos posibles: o bien  $a_3 \leq b_3 < b_4 \leq a_4$  o bien  $b_3 \leq a_3 < a_4 \leq b_4$  (véase la Figura 3.10).

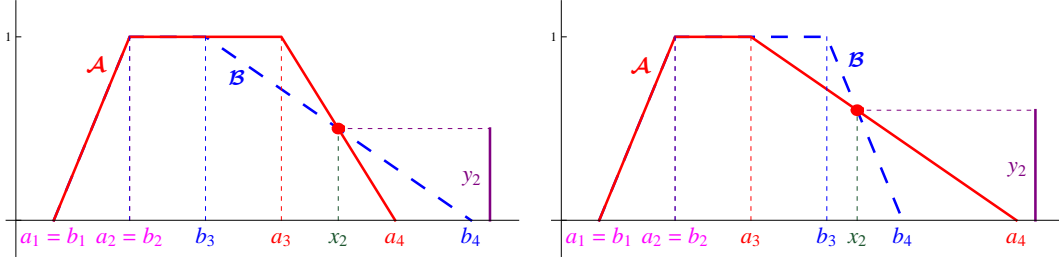


Figura 3.10: Los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  poseen un único punto en común.

Supongamos, por ejemplo, que  $a_3 \leq b_3 < b_4 \leq a_4$ . Observemos que es imposible que  $a_3 = b_3$  y que  $a_4 = b_4$  (ya que  $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ ), por lo que  $(b_3 - a_3) + (a_4 - b_4) > 0$ . Utilizando la Proposición 3.1.2, la segunda coordenada del punto común de  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  es:

$$y_2 = \frac{b_4 - a_4}{(a_3 - b_3) + (b_4 - a_4)} = \frac{a_4 - b_4}{(b_3 - a_3) + (a_4 - b_4)}.$$

Esto significa que

$$\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [y_2, 1] \quad \text{y} \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [0, y_2].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} &\Leftrightarrow \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \geq \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) \Leftrightarrow 1 - y_2 \geq y_2 \\ &\Leftrightarrow y_2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a_4 - b_4}{(b_3 - a_3) + (a_4 - b_4)} \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2(a_4 - b_4) \leq (b_3 - a_3) + (a_4 - b_4) \\ &\Leftrightarrow a_4 - b_4 \leq b_3 - a_3 \Leftrightarrow a_3 + a_4 \leq b_3 + b_4. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $a_1 = b_1$  y  $a_2 = b_2$ , concluimos que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ , que significa que  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ .

Finalmente, supongamos que  $b_3 \leq a_3 < a_4 \leq b_4$ , so  $(a_3 - b_3) + (b_4 - a_4) > 0$ . En este caso,  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [0, y_2]$  y  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [y_2, 1]$ , y tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} &\Leftrightarrow \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \geq \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) \Leftrightarrow y_2 \geq 1 - y_2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{b_4 - a_4}{(a_3 - b_3) + (b_4 - a_4)} \\ &\Leftrightarrow (a_3 - b_3) + (b_4 - a_4) \leq 2(b_4 - a_4) \\ &\Leftrightarrow a_3 - b_3 \leq b_4 - a_4 \Leftrightarrow a_3 + a_4 \leq b_3 + b_4, \end{aligned}$$

y la conclusión es la misma. El otro caso (considerando  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$ ) es similar. ■

La siguiente consecuencia significa que si tres (o cuatro) esquinas de  $\mathcal{A}$  son iguales a las correspondientes esquinas de  $\mathcal{B}$ , podemos concluir la equivalencia de  $\preceq$  y  $\leq_{\Sigma}$ .

**Corolario 3.3.4** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  dos números difusos trapezoidales. Si existen tres índices distintos  $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$  tales que  $a_{i_j} = b_{i_j}$  para cualquier  $j \in \{1, 2, 3\}$  (esto es,  $N_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \geq 3$ ), entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ .

DEMOSTRACIÓN: Se obtiene directamente del Lema 3.3.3 ya que si tres esquinas son iguales, entonces  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  comparten, al menos, un lado, es decir,  $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{B}}$  o  $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{B}}$ . ■

Uno de nuestros próximos objetivos será mostrar que el enunciado anterior también se verifica si sólo se da la igualdad en dos esquinas. Pero antes de ello, necesitamos probar el siguiente enunciado.

**Lema 3.3.5** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  dos números difusos trapezoidales. Si existen tres índices distintos  $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$  tales que  $a_{i_j} < b_{i_j}$  para cualquier  $j \in \{1, 2, 3\}$ , entonces  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  (en particular,  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ ).

DEMOSTRACIÓN: Como  $i_1, i_2, i_3$  son tres índices distintos, dos de ellos deben de ser del mismo lado, esto es,  $\{1, 2\} \subset \{i_1, i_2, i_3\}$  o  $\{3, 4\} \subset \{i_1, i_2, i_3\}$ . Supongamos, por ejemplo, que  $\{1, 2\} \subset \{i_1, i_2, i_3\}$ . Entonces  $a_1 < b_1$  y  $a_2 < b_2$ , lo que significa que  $\underline{a}_\alpha < \underline{b}_\alpha$  para cualquier  $\alpha \in \mathbb{I}$ . De esta forma,  $\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}} = \emptyset$  y  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}) = 0$ . Consideramos ahora dos casos según cuál sea el tercer índice.

- Si el tercer índice es 3, entonces  $a_3 < b_3$ . En este caso  $\bar{a}_1 = a_3 < b_3 = \bar{b}_1$ . Como las funciones  $\bar{a}, \bar{b} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas, existe  $\varepsilon \in (0, 1)$  tal que  $\bar{a}_\alpha < \bar{b}_\alpha$  para cualquier  $\alpha \in [1 - \varepsilon, 1]$ . Por lo tanto,  $[1 - \varepsilon, 1] \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ , lo que significa que  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}) \geq \varepsilon > 0 = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}})$ . Por consiguiente  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Además, la condición  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$  es falsa, lo que nos permite concluir que  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .
- Si el tercer índice es 4, entonces  $a_4 < b_4$ . En este caso  $\bar{a}_0 = a_4 < b_4 = \bar{b}_0$ . Como las funciones  $\bar{a}, \bar{b} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas, existen  $\varepsilon \in (0, 1)$  tal que  $\bar{a}_\alpha < \bar{b}_\alpha$  para cualquier  $\alpha \in [0, \varepsilon]$ . Por lo tanto  $[0, \varepsilon] \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ , lo que significa que  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}) \geq \varepsilon > 0 = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}})$ . Así  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Además, la condición  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$  es falsa, por lo que  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .

Si se diese el caso en el que  $\{3, 4\} \subset \{i_1, i_2, i_3\}$ , la demostración sería similar.

■

A continuación mejoramos el Corolario 3.3.4 suponiendo que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  sólo tienen dos esquinas correspondientes iguales.

**Lema 3.3.6** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  dos números difusos trapezoidales. Si existen dos índices distintos  $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$  tales que  $a_{i_j} = b_{i_j}$  para cualquier  $j \in \{1, 2\}$  (es decir,  $N_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \geq 2$ ), entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$  es una permutación  $\{1, 2, 3, 4\}$  tal que  $a_{i_1} = b_{i_1}$  y  $a_{i_2} = b_{i_2}$ . Si ocurriese que  $a_{i_3} = b_{i_3}$  o  $a_{i_4} = b_{i_4}$ , entonces el Corolario 3.3.4 sería aplicable y la demostración estaría terminada. En caso contrario, supongamos que  $a_{i_3} \neq b_{i_3}$  y que  $a_{i_4} \neq b_{i_4}$ . Si ocurriese que  $a_{i_3} \leq b_{i_3}$  y

$a_{i_4} \leq b_{i_4}$ , entonces  $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$  y el apartado 1 del Lema 3.3.1 garantiza que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$  se verifican al mismo tiempo. Nos quedan por analizar los siguientes dos casos.

- *Caso 1.* Supongamos que  $a_{i_3} > b_{i_3}$  y  $a_{i_4} > b_{i_4}$ . Entonces  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$  es falsa ya que  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ , y podemos considerar las siguientes dos posibilidades (en las que también probamos que la condición  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  es falsa).
  - Si los dos vértices que coinciden están en el mismo lado, es decir, si o bien  $\{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$  o bien  $\{i_1, i_2\} = \{3, 4\}$ , entonces  $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{B}}$  o  $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{B}}$ , por lo que podemos aplicar el Lema 3.3.3 (en este caso las dos condiciones  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$  son falsas).
  - Si  $a_{i_1}$  y  $a_{i_2}$  están en lados distintos, debemos considerar los casos de la Figura 3.11.

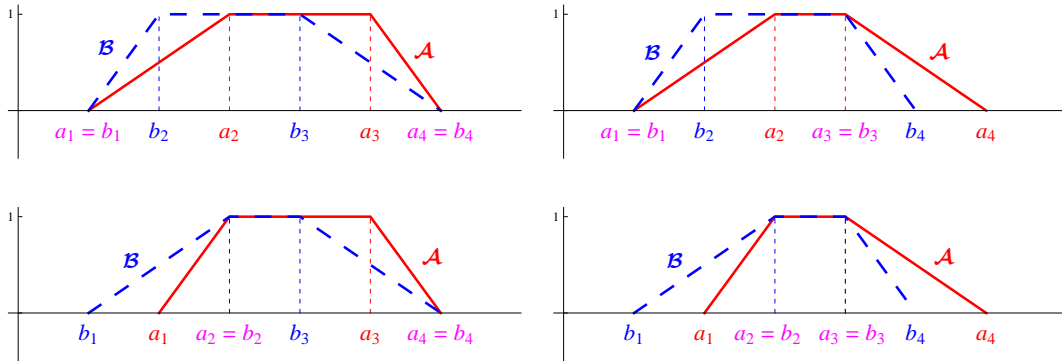


Figura 3.11: Posibles situaciones cuando  $a_{i_1}$  y  $a_{i_2}$  están en lados distintos.

En todos los casos,  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \subseteq \{0, 1\}$  y  $]0, 1[ \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ , por lo que  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = 0 < 1 = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}})$ , lo que significa que la condición  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  es falsa.

Como consecuencia, hemos demostrado que si  $a_{i_3} > b_{i_3}$  y  $a_{i_4} > b_{i_4}$ , entonces ambas condiciones  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$  son falsas al mismo tiempo.

- *Caso 2.* Supongamos que  $a_{i_3} > b_{i_3}$  y  $a_{i_4} < b_{i_4}$  (en el caso contrario, permutamos  $i_3$  e  $i_4$ ). Consideremos algunos subcasos.

- ▶ Si  $\{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$ , entonces  $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{B}}$ , y el Lema 3.3.3 es aplicable.
- ▶ Si  $\{i_1, i_2\} = \{3, 4\}$ , entonces  $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{B}}$ , y el Lema 3.3.3 es aplicable.
- ▶ Si  $\{i_1, i_2\} = \{1, 3\}$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 a_2 < b_2, \quad a_4 > b_4 &\Rightarrow \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \{1\}, \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{0\} \\
 &\Rightarrow \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0; \\
 a_2 > b_2, \quad a_4 < b_4 &\Rightarrow \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \{0\}, \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{1\} \\
 &\Rightarrow \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0.
 \end{aligned}$$

En ambos casos,  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ .

- ▶ Si  $\{i_1, i_2\} = \{1, 4\}$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 a_2 < b_2, \quad a_3 > b_3 &\Rightarrow \mathcal{B} \text{ está incluido en } \mathcal{A}; \\
 a_2 > b_2, \quad a_3 < b_3 &\Rightarrow \mathcal{A} \text{ está incluido en } \mathcal{B}.
 \end{aligned}$$

En ambos casos, el Lema 3.3.2 es aplicable.

- ▶ Si  $\{i_1, i_2\} = \{2, 3\}$ , también podemos aplicar el Lema 3.3.2 ya que  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$  o viceversa.
- ▶ Si  $\{i_1, i_2\} = \{2, 4\}$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 a_1 < b_1, \quad a_3 > b_3 &\Rightarrow \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \{0\}, \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{1\} \\
 &\Rightarrow \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0; \\
 a_1 > b_1, \quad a_3 < b_3 &\Rightarrow \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \{1\}, \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{0\} \\
 &\Rightarrow \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0.
 \end{aligned}$$

En ambos casos,  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ .

En cualquier caso, concluimos que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ . ■

### 3.4. Ranking de números difusos trapezoidales

Teniendo en cuenta que el objetivo principal de la presente Memoria es el de describir de la forma más precisa posible la metodología de actuación de la

relación binaria difusa  $\preceq$  introducida en (2.2) sobre el conjunto de los números difusos trapezoidales, en esta sección vamos a demostrar varias afirmaciones en este sentido que nos servirán, en la siguiente sección, para completar esta tarea. Para ello, recordemos primeramente que la condición  $\ell_{\mathcal{A}} > \ell_{\mathcal{B}}$  significa que  $a_1 > b_1$  y  $a_2 > b_2$ .

**Proposición 3.4.1** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  dos números difusos trapezoidales. Si  $\ell_{\mathcal{A}} > \ell_{\mathcal{B}}$  y el conjunto  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  se reduce a un único punto, entonces o bien  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{0\}$  o bien  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{1\}$ .

DEMOSTRACIÓN: Dado que  $\ell_{\mathcal{A}} > \ell_{\mathcal{B}}$ , sabemos que  $b_1 < a_1$  y  $b_2 < a_2$ , lo que implica que  $\underline{b}_{\alpha} < \underline{a}_{\alpha}$  para cualquier  $\alpha \in \mathbb{I}$ . Sabiendo que el conjunto  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  se reduce a un único punto, existe  $\alpha_0 \in \mathbb{I}$  tal que  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{\alpha_0\}$ . Queremos probar que  $\alpha_0 = 0$  o  $\alpha_0 = 1$  y, para ello, razonamos por contradicción suponiendo que  $\alpha_0 \in (0, 1)$ . En tal caso, sabemos que  $\bar{b}_{\alpha_0} \leq \bar{a}_{\alpha_0}$  y  $\bar{a}_{\alpha_0} < \bar{b}_{\alpha_0}$  para cualquier  $\alpha \in \mathbb{I} \setminus \{\alpha_0\}$ . Como  $\alpha_0 \in (0, 1)$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon \in \mathbb{I}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_4 - (\alpha_0 - \varepsilon)(a_4 - a_3) &= \bar{a}_{\alpha_0 - \varepsilon} < \bar{b}_{\alpha_0 - \varepsilon} = b_4 - (\alpha_0 - \varepsilon)(b_4 - b_3), \\ a_4 - (\alpha_0 + \varepsilon)(a_4 - a_3) &= \bar{a}_{\alpha_0 + \varepsilon} < \bar{b}_{\alpha_0 + \varepsilon} = b_4 - (\alpha_0 + \varepsilon)(b_4 - b_3). \end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades,

$$2a_4 - 2\alpha_0(a_4 - a_3) = \bar{a}_{\alpha_0 - \varepsilon} + \bar{a}_{\alpha_0 + \varepsilon} < \bar{b}_{\alpha_0 - \varepsilon} + \bar{b}_{\alpha_0 + \varepsilon} = 2b_4 - 2\alpha_0(b_4 - b_3).$$

Por lo tanto,

$$\bar{a}_{\alpha_0} = a_4 - \alpha_0(a_4 - a_3) < b_4 - \alpha_0(b_4 - b_3) = \bar{b}_{\alpha_0},$$

lo que contradice que  $\bar{b}_{\alpha_0} \leq \bar{a}_{\alpha_0}$ . ■

**Lema 3.4.2** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  dos números difusos trapezoidales.

1. Si  $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{B}}$ , entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ .



2. Si  $\ell_{\mathcal{A}} < \ell_{\mathcal{B}}$ , entonces

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{o se verifica la propiedad } \mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \text{ (en este caso, } \mathcal{A} \prec \mathcal{B}\text{),} \\ \text{o } \mathcal{B} \text{ está incluido en } \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}. \end{cases}$$

3. Si  $\ell_{\mathcal{A}} > \ell_{\mathcal{B}}$ , entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$  (en este caso,  $a_3 \leq b_3$  y  $a_4 \leq b_4$ ).

DEMOSTRACIÓN: (1) Véase el Lema 3.3.3.

(2) Supongamos que  $\ell_{\mathcal{A}} < \ell_{\mathcal{B}}$ , es decir,  $a_1 < b_1$  y  $a_2 < b_2$ .

( $\Leftarrow$ ) Ambas condiciones implican que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  por el Lema 3.3.2 y el apartado 2 del Lema 3.3.1.

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Si ocurriese que  $a_3 < b_3$  o  $a_4 < b_4$ , entonces  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  se verifica. En el caso contrario, si ocurriese que  $a_3 \geq b_3$  y  $a_4 \geq b_4$ , entonces necesariamente  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ ) y, además, el Lema 3.3.2 garantiza que  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ .

(3) Supongamos que  $\ell_{\mathcal{A}} > \ell_{\mathcal{B}}$ , es decir,  $a_1 > b_1$  y  $a_2 > b_2$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  por el Lema 3.3.2.

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Si  $a_3 > b_3$  o  $a_4 > b_4$ , entonces  $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  se verifica, y el apartado 2 del Lema 3.3.1 garantiza que  $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ . Esto es una contradicción ya que asumimos que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Entonces necesariamente  $a_3 \leq b_3$  y  $a_4 \leq b_4$ . En este caso,  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ , y por el apartado 2 del Lema 3.3.1 concluimos que  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ .

■

El siguiente resultado puede probarse de manera análoga al anterior.

**Lema 3.4.3** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  dos números difusos trapezoidales.

1. Si  $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{B}}$ , entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ .

2. Si  $r_{\mathcal{A}} < r_{\mathcal{B}}$ , entonces

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{o se verifica la propiedad } \mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \text{ (en este caso, } \mathcal{A} \prec \mathcal{B}\text{),} \\ \text{o } \mathcal{A} \text{ está incluido en } \mathcal{B} \text{ y } \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}. \end{cases}$$

3. Si  $r_{\mathcal{A}} > r_{\mathcal{B}}$ , entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{B}$  está incluido en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$  (en este caso,  $a_1 \leq b_1$  y  $a_2 \leq b_2$ ).

En el siguiente resultado suponemos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tienen, a lo sumo, una esquina correspondiente común, es decir, el cardinal del conjunto

$$\{i \in \{1, 2, 3, 4\} : a_i = b_i\}$$

es 0 ó 1. En otras palabras, si encontramos  $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$  tal que  $a_{i_0} = b_{i_0}$  y además  $a_j \neq b_j$  para cualquier  $j \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i_0\}$ .

**Lema 3.4.4** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  dos números difusos trapezoidales. Supongamos que los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común y que los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  también tienen un único punto en común. Además, supongamos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tienen, como mucho, una esquina correspondiente en común. Entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si, se verifica uno, y solo uno, de los siguientes casos (que son, entre sí, exhaustivos e incompatibles):

$$(c_1) \quad a_1 < b_1, \quad a_2 \geq b_2, \quad a_3 < b_3, \quad a_4 \geq b_4 \text{ y}$$

$$\begin{cases} (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) > (a_2 - b_2)(a_4 - b_4), \\ \circ \\ (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) = (a_2 - b_2)(a_4 - b_4) \text{ y } \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}. \end{cases}$$

$$(c_2) \quad a_1 < b_1, \quad a_2 \geq b_2, \quad a_3 \geq b_3, \quad a_4 < b_4 \text{ y}$$

$$(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) \leq (b_1 - a_1)(b_4 - a_4).$$

$$(c_3) \quad a_1 \geq b_1, \quad a_2 < b_2, \quad a_3 < b_3, \quad a_4 \geq b_4 \text{ y}$$

$$(a_1 - b_1)(a_4 - b_4) \leq (b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

(c<sub>4</sub>)  $a_1 \geq b_1$ ,  $a_2 < b_2$ ,  $a_3 \geq b_3$ ,  $a_4 < b_4$  y

$$\begin{cases} (a_1 - b_1)(a_3 - b_3) < (b_2 - a_2)(b_4 - a_4), \\ \circ \\ (a_1 - b_1)(a_3 - b_3) = (b_2 - a_2)(b_4 - a_4) \text{ y } \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Utilizando la notación que introdujimos anteriormente, llamemos  $(x_1, y_1)$  al único punto de corte entre los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  y llamemos  $(x_2, y_2)$  al único punto de corte entre los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$ . Por la Proposición 3.1.2:

$$y_1 = \frac{|a_1 - b_1|}{|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{|a_4 - b_4|}{|a_3 - b_3| + |a_4 - b_4|}, \quad (3.13)$$

donde los denominadores no pueden ser nulos. Dependiendo de la posición relativa de los dos parejas de lados (derechos e izquierdos), hay cuatro casos posibles:

*Caso 1.*  $a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2$  y  $a_3 \leq b_3 < b_4 \leq a_4$ ,

*Caso 2.*  $a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2$  y  $b_3 \leq a_3 < a_4 \leq b_4$ ,

*Caso 3.*  $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$  y  $a_3 \leq b_3 < b_4 \leq a_4$ ,

*Caso 4.*  $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$  y  $b_3 \leq a_3 < a_4 \leq b_4$ ,

donde  $a_1 \neq b_1$  o  $a_2 \neq b_2$  (lo que significa que  $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| > 0$ ) y también  $a_3 \neq b_3$  o  $a_4 \neq b_4$  (y así se tiene que  $|a_3 - b_3| + |a_4 - b_4| > 0$ ).

- *Caso 1:* Supongamos que  $a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2$  y  $a_3 \leq b_3 < b_4 \leq a_4$ . En este caso, podemos encontrar las posiciones relativas de la Figura 3.12.

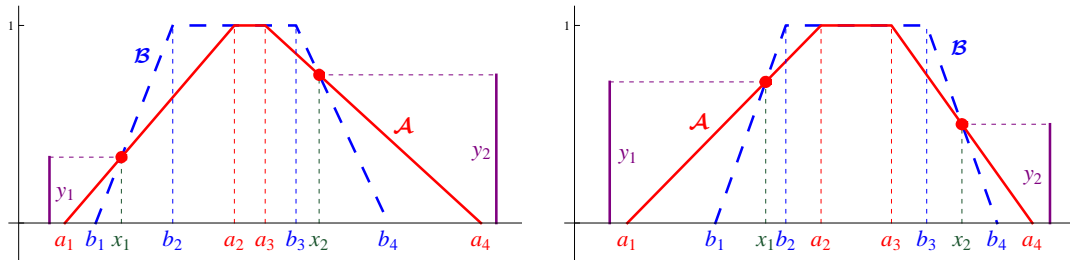


Figura 3.12: Posiciones relativas del caso 1:  $a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2$  y  $a_3 \leq b_3 < b_4 \leq a_4$ .

Así:

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \emptyset \text{ y } \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [y_1, y_2], & \text{si } y_1 < y_2, \\ \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{y_1\}, & \text{si } y_1 = y_2, \\ \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [y_2, y_1] \text{ y } \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \emptyset, & \text{si } y_1 > y_2. \end{cases}$$

Si  $y_1 < y_2$ , la condición  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  no puede ocurrir ya que  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = 0 < y_2 - y_1 = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}})$ . Si  $y_1 > y_2$ , entonces  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = y_1 - y_2 > 0 = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}})$ , por lo que la condición  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  sí ocurre. Finalmente, si  $y_1 = y_2$ , entonces  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0$ , por lo que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ . Teniendo en cuenta el apartado 3 del Corolario 3.1.3,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 > y_2, \\ \circ \\ y_1 = y_2 \text{ y } \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B} \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a_1 - b_1| |a_3 - b_3| > |a_2 - b_2| |a_4 - b_4|, \\ \circ \\ |a_1 - b_1| |a_3 - b_3| = |a_2 - b_2| |a_4 - b_4| \text{ y } \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B} \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) > (a_2 - b_2)(a_4 - b_4), \\ \circ \\ (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) = (a_2 - b_2)(a_4 - b_4) \text{ y } \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Observemos que, en cualquiera de los dos casos anteriores, si ocurriese  $a_1 = b_1$  o  $a_3 = b_3$ , entonces

$$|a_2 - b_2| |a_4 - b_4| = (a_2 - b_2)(a_4 - b_4) \leq (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) = 0,$$

lo que llevaría a que  $a_2 = b_2$  o  $a_4 = b_4$ . Sin embargo, esto es imposible porque suponemos que los números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  no llegan a tener dos esquinas correspondientes en común (por hipótesis tienen, como mucho, una esquina en común). Esto demuestra que, en este caso,  $a_1 < b_1$  y  $a_3 < b_3$ .

- *Caso 2: Supongamos que  $a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2$  y  $b_3 \leq a_3 < a_4 \leq b_4$ .* En este caso, debemos analizar las posiciones relativas de la Figura 3.13.

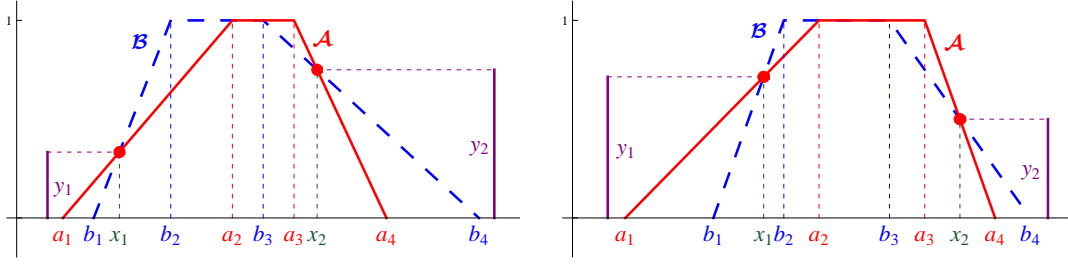


Figura 3.13: Posiciones relativas del caso 2:  $a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2$  y  $b_3 \leq a_3 < a_4 \leq b_4$ .

Entonces:

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [0, y_1] & \text{y} & \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [y_2, 1], & \text{si } y_1 < y_2, \\ \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [0, y_1] & \text{y} & \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [y_1, 1] & \text{si } y_1 = y_2, \\ \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [0, y_2] & \text{y} & \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [y_1, 1], & \text{si } y_1 > y_2. \end{cases}$$

En cualquier caso,

$$\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [0, \min\{y_1, y_2\}] \quad \text{y} \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [\max\{y_1, y_2\}, 1].$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \geq \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) &\Leftrightarrow \min\{y_1, y_2\} \geq 1 - \max\{y_1, y_2\} \\ &\Leftrightarrow \min\{y_1, y_2\} + \max\{y_1, y_2\} \geq 1 \Leftrightarrow y_1 + y_2 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow |a_1 - b_1| |a_4 - b_4| \geq |a_2 - b_2| |a_3 - b_3| \\ &\Leftrightarrow (b_1 - a_1)(b_4 - a_4) \geq (a_2 - b_2)(a_3 - b_3). \end{aligned}$$

Observemos que si ocurriese  $a_1 = b_1$  o  $a_4 = b_4$ , entonces

$$|a_2 - b_2| |a_3 - b_3| = (a_2 - b_2)(a_3 - b_3) \leq (b_1 - a_1)(b_4 - a_4) = 0,$$

por lo que se tendría que  $a_2 = b_2$  o  $a_3 = b_3$ . En tal caso,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tendrían dos esquinas correspondientes en común, pero esto es imposible por hipótesis.

Por lo tanto, deducimos que  $a_1 < b_1$  y  $a_4 < b_4$ . Utilizando el Corolario 3.1.3,  $a_1 < b_1$  implica que  $y_1 > 0$ , y  $a_4 < b_4$  significa que  $y_2 > 0$ . En cualquier caso,  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0$ , por lo que la condición anterior es equivalente a  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ .

- *Caso 3: Supongamos que  $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$  y  $a_3 \leq b_3 < b_4 \leq a_4$ . En este caso, las posiciones relativas que podrían darse vienen descritas en la Figura 3.14.*

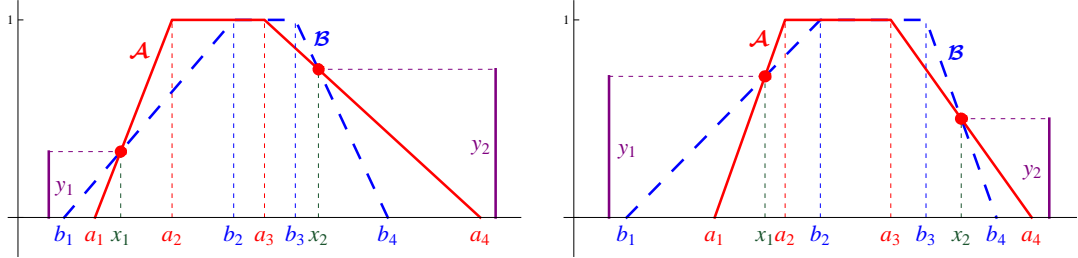


Figura 3.14: Posiciones relativas del caso 3:  $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$  y  $a_3 \leq b_3 < b_4 \leq a_4$ .

De esta forma:

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [y_2, 1] & \text{y} & \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [0, y_1], & \text{si } y_1 < y_2, \\ \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [y_1, 1] & \text{y} & \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [0, y_1] & \text{si } y_1 = y_2, \\ \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [y_1, 1] & \text{y} & \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [0, y_2], & \text{si } y_1 > y_2. \end{cases}$$

En cualquier caso,

$$\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [\max\{y_1, y_2\}, 1] \quad \text{y} \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [0, \min\{y_1, y_2\}].$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \geq \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) &\Leftrightarrow 1 - \max\{y_1, y_2\} \geq \min\{y_1, y_2\} \\ &\Leftrightarrow \min\{y_1, y_2\} + \max\{y_1, y_2\} \leq 1 \Leftrightarrow y_1 + y_2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |a_1 - b_1| |a_4 - b_4| \leq |a_2 - b_2| |a_3 - b_3| \\ &\Leftrightarrow (a_1 - b_1)(a_4 - b_4) \leq (b_2 - a_2)(b_3 - a_3). \end{aligned}$$

Observemos que si ocurriese que  $a_2 = b_2$  o  $a_3 = b_3$ , entonces

$$|a_1 - b_1| |a_4 - b_4| = (a_1 - b_1)(a_4 - b_4) \leq (b_2 - a_2)(b_3 - a_3) = 0,$$

por lo que se tendría que  $a_1 = b_1$  o  $a_4 = b_4$ . En tal caso,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tendrían dos esquinas correspondientes comunes, pero esto es imposible por hipótesis. Por lo tanto  $a_2 < b_2$  y  $a_3 < b_3$ . Por el Corolario 3.1.3,  $a_2 < b_2$  implica que  $y_1 < 1$ , y  $a_3 < b_3$  significa que  $y_2 < 1$ . En cualquier caso,  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0$ , por lo que la desigualdad anterior es equivalente a  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ .

- *Caso 4:* Supongamos que  $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$  y  $b_3 \leq a_3 < a_4 \leq b_4$ . En este caso, las posiciones relativas que pueden adoptar las gráficas de los números difusos están representadas en la Figura 3.15. Por lo tanto:

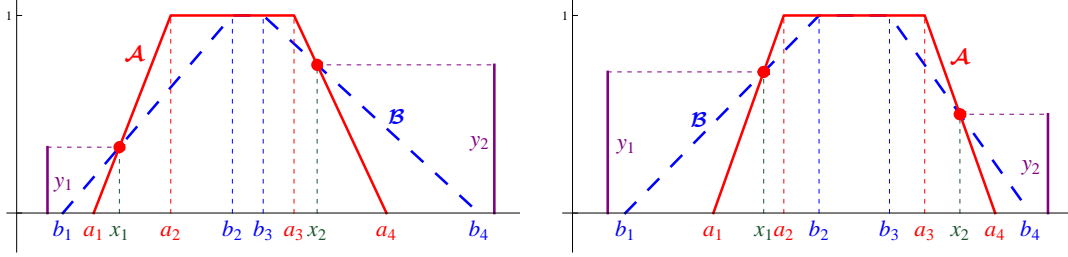


Figura 3.15: Posiciones relativas del caso 4:  $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$  y  $b_3 \leq a_3 < a_4 \leq b_4$ .

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [y_1, y_2] \quad \text{y} \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \emptyset, & \text{si} \quad y_1 < y_2, \\ \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{y_1\}, & \text{si} \quad y_1 = y_2, \\ \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \emptyset \quad \text{y} \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [y_2, y_1], & \text{si} \quad y_1 > y_2. \end{cases}$$

Si  $y_1 > y_2$ , la condición  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  no ocurre. Si  $y_1 < y_2$ , entonces  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = y_2 - y_1 > 0 = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}})$ , por lo que la condición  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  sería cierta. Finalmente, si  $y_1 = y_2$ , entonces  $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0$ , por lo que tendríamos que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si,  $\mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}$ . Teniendo en cuenta el apartado 3 del Corolario 3.1.3, deducimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 < y_2, \\ \circ \\ y_1 = y_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B} \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a_1 - b_1| |a_3 - b_3| < |a_2 - b_2| |a_4 - b_4|, \\ \circ \\ |a_1 - b_1| |a_3 - b_3| = |a_2 - b_2| |a_4 - b_4| \quad \text{y} \quad \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B} \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a_1 - b_1)(a_3 - b_3) < (b_2 - a_2)(b_4 - a_4), \\ \circ \\ (a_1 - b_1)(a_3 - b_3) = (b_2 - a_2)(b_4 - a_4) \quad \text{y} \quad \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Observemos que si ocurriese  $a_2 = b_2$  o  $a_4 = b_4$ , entonces

$$|a_1 - b_1| |a_3 - b_3| = (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) \leq (b_2 - a_2)(b_4 - a_4) = 0,$$

por lo que se tendría que  $a_1 = b_1$  o  $a_3 = b_3$ . En tal caso,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  tendrían dos esquinas correspondientes comunes, pero esto es imposible por hipótesis. Por lo tanto, en este caso,  $a_2 < b_2$  y  $a_4 < b_4$ .

■

Reescribimos el resultado anterior en términos de cocientes.

**Corolario 3.4.5** Bajo las hipótesis del Lema 3.4.4,  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si, se verifica uno, y sólo uno, de los siguientes casos (que son exhaustivos e incompatibles):

(c<sub>1</sub>)  $a_1 < b_1$ ,  $a_2 \geq b_2$ ,  $a_3 < b_3$ ,  $a_4 \geq b_4$  y

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} \cdot \frac{a_4 - b_4}{a_3 - b_3} < 1, \\ \circ \\ \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} \cdot \frac{a_4 - b_4}{a_3 - b_3} = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}. \end{array} \right.$$

(c<sub>2</sub>)  $a_1 < b_1$ ,  $a_2 \geq b_2$ ,  $a_3 \geq b_3$ ,  $a_4 < b_4$  y

$$\frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} \cdot \frac{a_3 - b_3}{a_4 - b_4} \leq 1.$$

(c<sub>3</sub>)  $a_1 \geq b_1$ ,  $a_2 < b_2$ ,  $a_3 < b_3$ ,  $a_4 \geq b_4$  y

$$\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \cdot \frac{a_4 - b_4}{a_3 - b_3} \leq 1.$$

(c<sub>4</sub>)  $a_1 \geq b_1$ ,  $a_2 < b_2$ ,  $a_3 \geq b_3$ ,  $a_4 < b_4$  y

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \cdot \frac{a_3 - b_3}{a_4 - b_4} < 1, \\ \circ \\ \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \cdot \frac{a_3 - b_3}{a_4 - b_4} = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B}. \end{array} \right.$$

DEMOSTRACIÓN: Sólo hay que destacar que, en todos los casos, los numeradores son no negativos y los denominadores son negativos, por lo que el producto es no negativo (no es necesario considerar sus valores absolutos). ■



Si utilizamos las diferencias  $\delta_i = a_i - b_i$  para cualquier  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.4.6** Bajo las hipótesis del Lema 3.4.4,  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si, se verifica uno, y sólo uno, de los siguientes casos (que son exhaustivos e incompatibles):

$$(c_1) \quad \delta_1 < 0, \delta_2 \geq 0, \delta_3 < 0, \delta_4 \geq 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{\delta_2 \delta_4}{\delta_1 \delta_3} < 1 \quad \text{o} \quad \left( \frac{\delta_2 \delta_4}{\delta_1 \delta_3} = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B} \right).$$

$$(c_2) \quad \delta_1 < 0, \delta_2 \geq 0, \delta_3 \geq 0, \delta_4 < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\delta_2 \delta_3}{\delta_1 \delta_4} \leq 1.$$

$$(c_3) \quad \delta_1 \geq 0, \delta_2 < 0, \delta_3 < 0, \delta_4 \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\delta_1 \delta_4}{\delta_2 \delta_3} \leq 1.$$

$$(c_4) \quad \delta_1 \geq 0, \delta_2 < 0, \delta_3 \geq 0, \delta_4 < 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{\delta_1 \delta_3}{\delta_2 \delta_4} < 1 \quad \text{o} \quad \left( \frac{\delta_1 \delta_3}{\delta_2 \delta_4} = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{A} \leq_{\Sigma} \mathcal{B} \right).$$

En la Figura 3.16 podemos encontrar una interpretación de las diferencias  $\{\delta_i\}_{i=1}^4$  que intervienen en el corolario anterior.

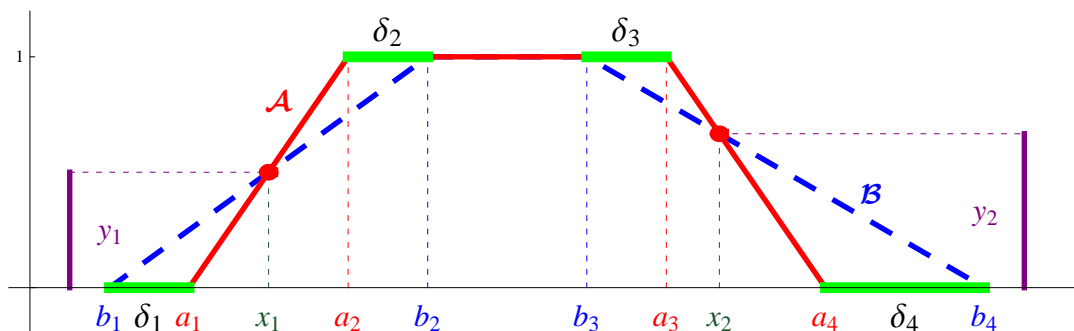


Figura 3.16: Representación gráfica de las cantidades  $\{\delta_i\}_{i=1}^4$ .

### 3.5. Clasificación incompatible y exhaustiva

Toda vez desarrollado el estudio acerca de la relación binaria  $\preceq$  que hemos expuesto en las secciones anteriores, en esta sección resumimos todos los casos

estableciendo una afirmación que sirve para aclarar sin ambigüedad cuándo un número difuso trapezoidal es menor o igual que otro número difuso trapezoidal al involucrar la mencionada relación binaria. Para ello, necesitamos el siguiente resultado previo.

**Proposición 3.5.1** Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son dos números difusos trapezoidales tales que no se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ ,  $\mathcal{A} \not\leq \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$  y  $N_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \leq 1$ , entonces los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto común y los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  también tienen un único punto común.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la posición relativa de los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$ .

- Es imposible que  $\ell_{\mathcal{A}} = \ell_{\mathcal{B}}$  ya que  $N_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \leq 1$ .
- Si  $\ell_{\mathcal{A}} < \ell_{\mathcal{B}}$ , el apartado 2 del Lema 3.4.2 garantiza que o se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  o  $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ , lo cual contradice la hipótesis del enunciado.
- Si  $\ell_{\mathcal{A}} > \ell_{\mathcal{B}}$ , el apartado 3 del Lema 3.4.2 asegura que  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ , lo cual no ocurre por hipótesis.

Como los casos anteriores son imposibles, entonces necesariamente los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto en común. Razonando de forma similar se puede probar que los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  también deben de tener un único punto en común.

■

Resumimos todos los resultados obtenidos en las secciones previas en el siguiente resultado de ordenación de números difusos trapezoidales bajo la relación binaria  $\preceq$ .

**Teorema 3.5.2** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  dos números difusos trapezoidales (tales que  $a_1 < a_2 \leq a_3 < a_4$  y  $b_1 < b_2 \leq b_3 < b_4$ ). Entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si, se verifica uno, y sólo uno, de los siguientes casos (que son exhaustivos e incompatibles):

( $\Psi_1$ )  $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$ .

( $\Psi_2$ )  $\mathcal{A} \not\leq_c \mathcal{B}$  y se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ .

( $\Psi_3$ )  $\mathcal{A} \not\leq_c \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$  y ( $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$  o  $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ ).

( $\Psi_4$ )  $\mathcal{A} \not\leq_c \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ ,  $N_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \geq 2$  y  $\mathcal{A} \not\leq \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$ .

( $\Psi_5$ )  $\mathcal{A} \not\leq_c \mathcal{B}$ , no se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ ,  $\mathcal{A} \not\leq \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$ ,  $N_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \leq 1$  y se verifica uno, y sólo uno, de los siguientes casos:

( $c_1$ )  $a_1 < b_1$ ,  $a_2 \geq b_2$ ,  $a_3 < b_3$ ,  $a_4 \geq b_4$  y

$$\begin{cases} (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) > (a_2 - b_2)(a_4 - b_4), \\ \circ \\ (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) = (a_2 - b_2)(a_4 - b_4) \text{ y } \mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}. \end{cases}$$

( $c_2$ )  $a_1 < b_1$ ,  $a_2 \geq b_2$ ,  $a_3 \geq b_3$ ,  $a_4 < b_4$  y

$$(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) \leq (b_1 - a_1)(b_4 - a_4).$$

( $c_3$ )  $a_1 \geq b_1$ ,  $a_2 < b_2$ ,  $a_3 < b_3$ ,  $a_4 \geq b_4$  y

$$(a_1 - b_1)(a_4 - b_4) \leq (b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

( $c_4$ )  $a_1 \geq b_1$ ,  $a_2 < b_2$ ,  $a_3 \geq b_3$ ,  $a_4 < b_4$  y

$$\begin{cases} (a_1 - b_1)(a_3 - b_3) < (b_2 - a_2)(b_4 - a_4), \\ \circ \\ (a_1 - b_1)(a_3 - b_3) = (b_2 - a_2)(b_4 - a_4) \text{ y } \mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Si  $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$ , entonces ( $\Psi_1$ ) se verifica. En los siguientes casos, supongamos que  $\mathcal{A} \not\leq_c \mathcal{B}$ .

Si se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ , entonces ( $\Psi_2$ ) se verifica. En los siguientes casos, supongamos que  $\mathcal{A} \not\leq_c \mathcal{B}$  y que no se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ .

Si  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$  o  $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ , el Lema 3.3.2 garantiza que  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ , por lo que ( $\Psi_3$ ) se verifica. Observemos que los casos ( $\Psi_2$ ) y ( $\Psi_3$ ) son incompatibles por la

Proposición 3.2.3. En los siguientes casos, supongamos que  $\mathcal{A} \not\leq_c \mathcal{B}$ , que no se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  y que  $\mathcal{A} \not\leq \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$ .

Si  $N_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \geq 2$ , el Lema 3.3.6 asegura que  $\mathcal{A} \leq_\Sigma \mathcal{B}$ , por lo que  $(\Psi_4)$  se verifica. Observemos que no es necesario especificar que no se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  en  $(\Psi_4)$  ya que  $N_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \geq 2$  (recordemos el apartado 2 de la Proposición 3.2.4).

En el siguiente caso, supongamos que  $\mathcal{A} \not\leq_c \mathcal{B}$ , no se verifica la propiedad  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ ,  $\mathcal{A} \not\leq \mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$  y que  $N_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \leq 1$ . La Proposición 3.5.1 garantiza que los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto común y que los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  también tienen un único punto en común. Entonces, el Lema 3.4.4 es aplicable, y concluimos que uno, y sólo uno, de los casos  $(c_1)$ - $(c_4)$  se verifica.

( $\Leftarrow$ ) Si  $(\Psi_1)$  se verifica, podemos aplicar el apartado 1 del Lema 3.3.1; si  $(\Psi_2)$  se verifica, podemos utilizar el Lema 3.3.5; si  $(\Psi_3)$  se verifica, podemos usar el Lema 3.3.2; si  $(\Psi_4)$  se verifica, el Lema 3.3.6 es aplicable; finalmente si  $(\Psi_5)$  se verifica, la Proposición 3.5.1 garantiza que los lados  $\ell_{\mathcal{A}}$  y  $\ell_{\mathcal{B}}$  tienen un único punto común y los lados  $r_{\mathcal{A}}$  y  $r_{\mathcal{B}}$  también tienen un único punto común, y concluimos que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  por el Lema 3.4.4.  $\blacksquare$

La siguiente consecuencia fue anunciada, pero no probada, en [56, Teorema 21].

**Corolario 3.5.3** Sean  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3)$  dos números difusos triangulares (tales que  $a_1 < a_2 < a_3$  y  $b_1 < b_2 < b_3$ ). Entonces  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  si, y sólo si, se verifica uno, y sólo uno, de los siguientes casos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \ a_2 = b_2 \quad y \quad a_1 + a_3 \leq b_1 + b_3; \\ \bullet \ b_2 < a_2 \quad y \quad a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 \quad y \\ \qquad \qquad \qquad (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) \geq (b_2 - a_2)^2; \\ \bullet \ a_2 < b_2 \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} \circ \ a_1 \leq b_1; \\ \circ \ a_3 \leq b_3; \\ \circ \ b_1 < a_1 < a_2 < b_2 < b_3 < a_3 \quad y \\ \qquad \qquad \qquad (b_1 - a_1)(b_3 - a_3) \leq (b_2 - a_2)^2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Condiciones para  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$

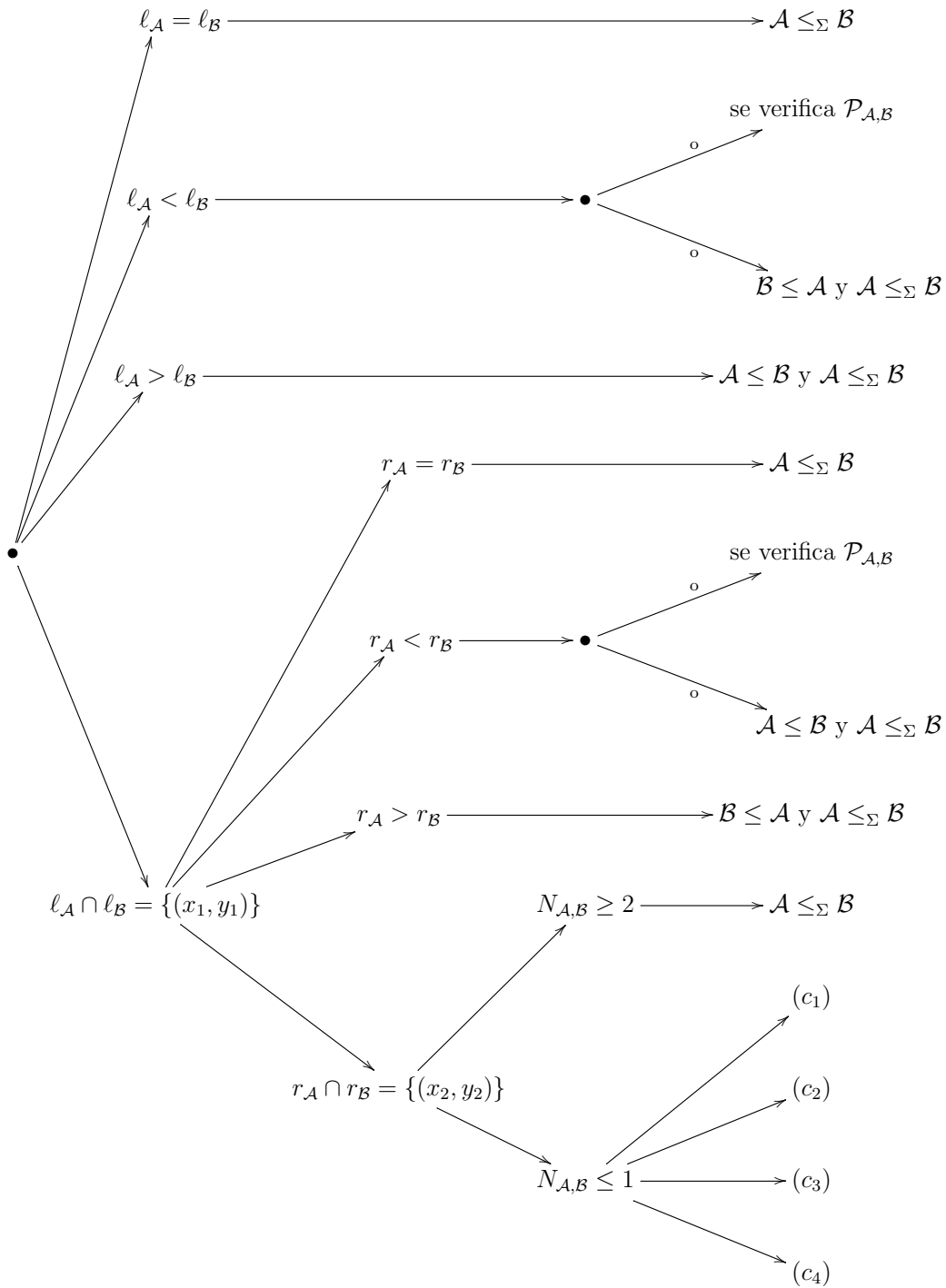


Figura 3.17: Esquema para ordenar números difusos trapezoidales.

Un esquema sobre cómo podemos establecer que  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  puede observarse en la Figura 3.17.

### 3.6. Ejemplos ilustrativos de clasificación de números difusos trapezoidales

En esta sección ilustramos cómo aplicar la metodología de ordenación difusa propuesta en las secciones anteriores en el caso particular de que se consideren números difusos trapezoidales. Aunque muchos de los procedimientos fueron diseñados para ser aplicados con números difusos arbitrarios (es decir, no necesariamente trapezoidales), en la práctica, la mayoría de los ejemplos que podemos encontrar en la literatura sobre este tema se llevaron a cabo considerando números difusos triangulares (porque son los más sencillos tanto de manejar como de interpretar) o, a lo sumo, números trapezoidales. Con el fin de comparar las metodologías propuestas por otros autores con el algoritmo aquí desarrollado, nosotros consideraremos los propios ejemplos que los investigadores manejaron y estudiaron en el pasado, con objeto de contrastar sus resultados con los nuestros. Finalmente también pondremos a prueba el método de ranking aquí propuesto mediante el estudio de un caso complejo que involucra a tres números difusos trapezoidales con posiciones relativas “*entrelazadas*”.

**Ejemplo 3.6.1** En [24, Conjunto 8] los autores consideraron los siguientes números difusos (véase la Figura 3.18):

$$\mathcal{A} = (0/0.4/0.6/0.8), \quad \mathcal{B} = (0.2/0.5/0.5/0.9) \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = (0.1/0.6/0.7/0.8).$$

El Lema 3.3.5 garantiza que  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$  y  $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$  ya que se verifican las propiedades  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  y  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\mathcal{C}}$ . Para comparar  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ , como sus lados se cortan en un único punto común,  $b_1 > c_1$ ,  $b_2 < c_2$ ,  $b_3 < c_3$ ,  $b_4 > c_4$ , y

$$\frac{b_1 - c_1}{b_2 - c_2} \cdot \frac{b_4 - c_4}{b_3 - c_3} = \frac{0.2 - 0.1}{0.5 - 0.6} \cdot \frac{0.9 - 0.8}{0.5 - 0.7} = 0.5 \leq 1$$

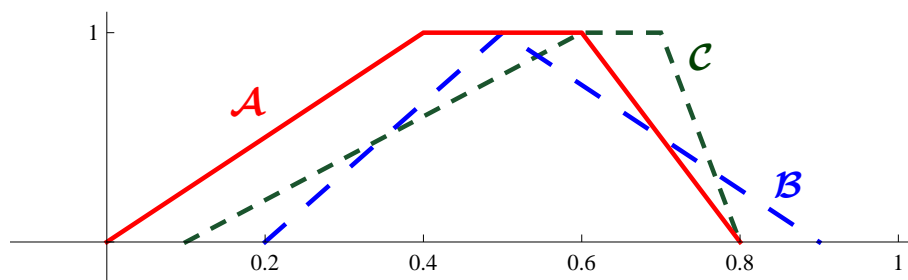


Figura 3.18: Números difusos del Ejemplo 3.6.1.

entonces el Corolario 3.4.5 garantiza que  $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$ . De forma análoga, como  $\mathcal{C} \preceq \mathcal{B}$  es falsa, entonces  $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ , por lo que concluimos la ordenación  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ . En la Tabla 3.1 comparamos nuestros resultados con los obtenidos mediante la aplicación de metodologías previas (que pueden encontrarse en [24]). Añadimos el asterisco (\*) para aquellos resultados que, en nuestra opinión, no son acordes con la intuición humana.

Tabla 3.1: Los resultados del ranking de los números difusos del Ejemplo 3.6.1.

Metodología	Ranking
Método de Yager ([68], 1978)	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$ (*)
Método de Murakami y otros ([50], 1983)	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$ (*)
Método de Cheng ([25], 1998)	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$
Método de Chu and Tsao ([27], 2002)	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$
Método de Chen and Chen ([21], 2009)	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$
Método de Chen y K. Sanguansat ([24], 2011)	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$
Método propuesto	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$

Obsérvese que también hubiésemos podido llegar a la misma ordenación calculando los siguientes números:

$$y_2^{A,B} = \frac{|a_4 - b_4|}{|a_3 - b_3| + |a_4 - b_4|} = \frac{|0.8 - 0.9|}{|0.6 - 0.5| + |0.8 - 0.9|} = \frac{1}{2},$$

$$y_2^{A,C} = \frac{|a_4 - c_4|}{|a_3 - c_3| + |a_4 - c_4|} = 0,$$

$$y_1^{B,C} = \frac{|b_1 - c_1|}{|b_1 - c_1| + |b_2 - c_2|} = \frac{|0 - 0.1|}{|0 - 0.1| + |0.5 - 0.6|} = \frac{1}{2},$$

$$y_2^{B,C} = \frac{|b_4 - c_4|}{|b_3 - c_3| + |b_4 - c_4|} = \frac{|0.9 - 0.8|}{|0.5 - 0.7| + |0.9 - 0.8|} = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto,  $\mathbb{I}_{A,B} = [0, 1/2]$ ,  $\mathbb{I}_{B,A} = \emptyset$ ,  $\mathbb{I}_{B,C} = [1/2, 1]$ ,  $\mathbb{I}_{C,B} = [0, 1/3]$ ,  $\mathbb{I}_{A,C} = [0, 1]$  y  $\mathbb{I}_{C,A} = \emptyset$ , por lo que  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ .

**Ejemplo 3.6.2** En [23, Ejemplo 4] los autores consideraron los siguientes números difusos (véase la Figura 3.19):

$$\mathcal{A}_1 = (0.6/0.7/0.7/0.8), \quad \mathcal{A}_2 = (0.4/0.5/0.6/0.7), \quad \mathcal{A}_3 = (0.2/0.5/0.5/0.8),$$

$$\mathcal{A}_4 = (0.3/0.4/0.4/0.9) \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_5 = (0.1/0.2/0.2/0.3).$$

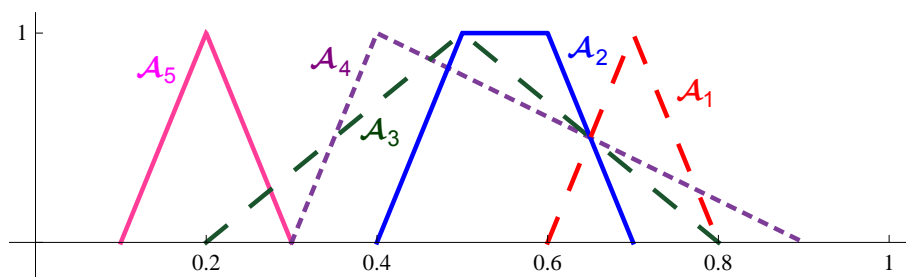


Figura 3.19:  $\mathcal{A}_1$  en rojo,  $\mathcal{A}_2$  en azul,  $\mathcal{A}_3$  en verde,  $\mathcal{A}_4$  en morado y  $\mathcal{A}_5$  en rosa (Ejemplo 3.6.2).

Aplicando la metodología propuesta, deducimos que  $\mathcal{A}_5 \prec \mathcal{A}_3 \sim \mathcal{A}_4 \prec \mathcal{A}_2 \prec \mathcal{A}_1$ . Observemos que  $\mathcal{A}_3 \sim \mathcal{A}_4$ . Los números difusos  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_3$ ,  $\mathcal{A}_4$  y  $\mathcal{A}_5$  también fueron considerados en [23, 34, 46, 60, 70], obteniendo los resultados de ranking recogidos en la Tabla 3.2.

Destacamos que el método de Chen lleva a la ordenación  $\mathcal{A}_5 \sim \mathcal{A}_1$ , de la cual pensamos que no es razonable. Observar también que el método de Thorani, Rao y Shankar da lugar a la ordenación  $\mathcal{A}_4 \prec \mathcal{A}_3$ , que es difícil de interpretar.

**Ejemplo 3.6.3** En [73], los autores desarrollaron una nueva metodología de ranking de números difusos, denominada Análisis de Aceptabilidad de Rango



Tabla 3.2: Los resultados del ranking de números difusos del Ejemplo 3.6.2.

Metodología	Ranking
Método de Yager ([70], 1981)	$\mathcal{A}_5 \prec \mathcal{A}_3 \sim \mathcal{A}_4 \prec \mathcal{A}_1$
Método de Liou and Wang ([46], 1992) ( $\alpha = 1$ o $\alpha = 0,5$ o $\alpha = 0$ )	$\mathcal{A}_5 \prec \mathcal{A}_3 \sim \mathcal{A}_4 \prec \mathcal{A}_1$
Método de Fortemps and Roubens ([34], 1996)	$\mathcal{A}_5 \prec \mathcal{A}_3 \sim \mathcal{A}_4 \prec \mathcal{A}_1$
Método de Chen ([23], 2001) ( $\beta = 1$ o $\beta = 0,5$ o $\beta = 0$ )	$\mathcal{A}_5 \sim \mathcal{A}_1 \prec \mathcal{A}_3 \sim \mathcal{A}_4$ (*)
Método de Thorani, Rao and Shankar ([60], 2012)	$\mathcal{A}_5 \prec \mathcal{A}_4 \prec \mathcal{A}_3 \prec \mathcal{A}_1$
Método propuesto	$\mathcal{A}_5 \prec \mathcal{A}_3 \sim \mathcal{A}_4 \prec \mathcal{A}_1$

Difuso (FRAA), que proporciona un grado de confianza (expresado mediante un número real) acerca de la ordenación de cada pareja de números difusos. En su trabajo, dichos investigadores mostraron algunas propiedades de la metodología de ordenación FRAA y la correspondencia con los axiomas básicos para ordenar números difusos. En dicho artículo se consideraron los siguientes números difusos triangulares (que son muy similares entre sí) con objeto de ilustrar que tanto la relación de preferencia Integral como la relación de preferencia de Yuan no son transitivas.

$$\text{Conjunto 1: } \mathcal{A}_1 = (11/13.95/16.91), \quad \mathcal{A}_2 = (13.9/13.95/14) \quad y \\ \mathcal{A}_3 = (10/14.95/16.29).$$

$$\text{Conjunto 2: } \mathcal{B}_1 = (11/13.95/16.91), \quad \mathcal{B}_2 = (13.9/13.95/14) \quad y \\ \mathcal{B}_3 = (10/14.95/16.3).$$

$$\text{Conjunto 3: } \mathcal{C}_1 = (11/13.95/16.9), \quad \mathcal{C}_2 = (13.9/13.95/14) \quad y \\ \mathcal{C}_3 = (10/14.95/16.3).$$

La Figura 3.20 representa gráficamente los números difusos del conjunto 1. No merece la pena representar los números difusos de los conjuntos 2 y 3 ya que, a simple vista, obtendríamos la misma gráfica (los números considerados en los tres conjuntos son muy similares). La Tabla 3.3 resume la ordenación que

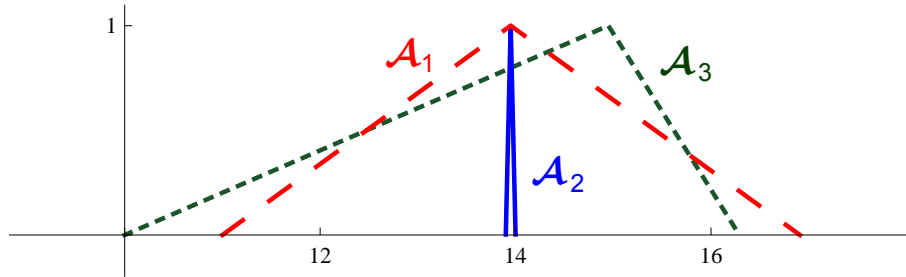


Figura 3.20: Números difusos del Ejemplo 3.6.3.

se obtiene aplicando los distintos procedimientos.

Tabla 3.3: Resultados del ranking de números difusos del Ejemplo 3.6.3.

Metodología	Ranking		
	Conjunto 1	Conjunto 2	Conjunto 3
Ranking Integral ( $\prec_I$ )	$\mathcal{A}_1 \prec_I \mathcal{A}_3 \prec_I \mathcal{A}_2 \prec_I \mathcal{A}_1$	$\mathcal{B}_2 \prec_I \mathcal{B}_1 \prec_I \mathcal{B}_3 \sim_I \mathcal{B}_2$	$\mathcal{C}_1 \prec_I \mathcal{C}_3 \sim_I \mathcal{C}_2 \sim_I \mathcal{C}_1$
Ranking de Yuan ( $\prec_Y$ )	$\mathcal{A}_2 \prec_Y \mathcal{A}_1 \prec_Y \mathcal{A}_3$	$\mathcal{B}_2 \prec_Y \mathcal{B}_1 \prec_Y \mathcal{B}_3$	$\mathcal{C}_1 \sim_Y \mathcal{C}_2 \prec_Y \mathcal{C}_3$
Método propuesto	$\mathcal{A}_2 \prec \mathcal{A}_1 \prec \mathcal{A}_3$	$\mathcal{B}_2 \prec \mathcal{B}_1 \prec \mathcal{B}_3$	$\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_2 \prec \mathcal{C}_3$

De acuerdo con la Tabla 3.3, la relación de preferencia Integral no es una relación binaria transitiva, la cual es una propiedad común con la metodología propuesta. Esta tabla ilustra algunos tipos de ausencia de transitividad a través de la relación de preferencia Integral.

**Ejemplo 3.6.4** Consideremos los siguientes números difusos trapezoidales (véase la Figura 3.21):

$$\mathcal{A} = (0.5/3.2/4.2/5.8), \quad \mathcal{B} = (1/3/4/6) \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = (1.5/2.5/3.5/6.2).$$

Todas las comparaciones entre las parejas de números difusos que podemos hacer con los números anteriores son complicadas ya que los lados izquierdos y derechos de cada uno de los posibles números difusos comparados se cortan en puntos comunes únicos. No obstante, podemos aplicar repetidamente el Corolario 3.4.5. En tal caso, obtenemos la ordenación  $\mathcal{C} \prec \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ . Este caso es particularmente enrevesado porque todos los intervalos  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [0, 1/2]$ ,  $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [5/7, 1]$ ,

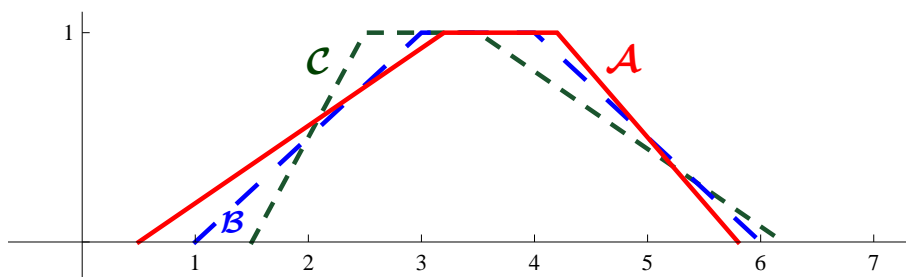


Figura 3.21: Números difusos del Ejemplo 3.6.4.

$\mathbb{I}_{B,C} = [0, 2/7]$ ,  $\mathbb{I}_{C,B} = [1/2, 1]$ ,  $\mathbb{I}_{A,C} = [0, 4/11]$  e  $\mathbb{I}_{C,A} = [10/17, 1]$  son no triviales y complicados de obtener.

En la Tabla 3.4 comparamos nuestra metodología de ordenación difusa con los procedimientos de ranking introducidos por otros investigadores con anterioridad. Se pueden observar varios ordenamientos posibles, pero ninguno de ellos puede ser evaluado con la etiqueta “sin sentido” ya que la posición relativa de los números considerados es ciertamente particular.

Tabla 3.4: Resultados del ranking de números difusos en el Ejemplo 3.6.4.

Metodología	Ranking
CV distribución uniforme de Cheng ([25], 1998)	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$
CV distribución proporcional de Cheng ([25], 1998)	$\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$
Método de Yao y Wu ([71], 2000)	$\mathcal{A} \sim \mathcal{C} \prec \mathcal{B}$
Método de Chu y Tsao ([27], 2002)	$\mathcal{C} \prec \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$
Método del centroide Wang ([65], 2008)	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$
Método de la distancia de Wang([65], 2008)	$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$
Método de Abbasbandy and Hajjari ([3], 2009)	$\mathcal{C} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{A}$
Método propuesto	$\mathcal{C} \prec \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$

Finalizamos este capítulo poniendo de manifiesto que, como puede observarse en todos los ejemplos de ordenación anteriores con números difusos triangulares

y trapezoidales, la metodología de ordenación propuesta por Roldán López de Hierro *et al.* en [56] es acorde a lo que nos dicta nuestra intuición, lo cual la convierte en una poderosa herramienta de clasificación en varios campos científicos en general, con aplicaciones especialmente interesantes en los ámbitos de la computación y de la toma de decisiones (como estamos estudiando actualmente).



## CAPÍTULO 4

---

# Posibles aplicaciones estadísticas y desarrollo de la librería *RankingTwoTraFNs* implementada en *R*

---

El presente capítulo está dedicado a la descripción del código fuente y a la utilización de la librería *RankingTwoTraFNs* que hemos desarrollado<sup>1</sup> para ser ejecutada en el entorno de programación *R* (o *R Studio*) y que, indicando las esquinas de los dos números difusos trapezoidales que deseamos ordenar, es capaz de desarrollar todos los cálculos necesarios para determinar su ranking.

Esta librería ha sido desarrollada con objeto de dar a conocer nuestro método de ranking con números difusos trapezoidales a la comunidad científica en general de manera que, quien lo desee, pueda comparar esta metodología con procedimientos anteriores o algoritmos que se desarrollen en el futuro.

Esta librería ha sido programada en *R* para ponerla al alcance, en forma de software libre, de cualquier persona interesada en la misma, utilizando una cantidad de recursos muy pequeña y sin necesidad de hacer uso de otros pro-

---

<sup>1</sup>Desde aquí deseo agradecer a mi compañero Miguel Sánchez Maldonado por ayudarme a desarrollar todos los algoritmos que se describen en el presente capítulo.

gramas más complicados para que realicen los cálculos necesarios (en concreto, no hemos necesitado *Python* ni *Mathematica*).

Antes de comentar los detalles de dicha librería y con objeto de describir una posible aplicación de la misma en un contexto estadístico, vamos a poner un ejemplo (enmarcado en el campo de la toma de decisiones) en el que se pone de manifiesto la necesidad de emplear una herramienta informática como la que hemos desarrollado para ordenar, de forma rápida y eficiente, las opiniones subjetivas (expresadas a través de número difusos triangulares o trapezoidales) de un grupo de expertos que tratan de llegar a un cierto nivel de consenso respecto de un tema concreto.

## 4.1. Una metodología de consenso basada en un ranking difuso

Entre las numerosas aplicaciones que puede tener en el ámbito de la Estadística el uso de metodologías de ordenación de números difusos y el establecimiento de rankings, en esta sección destacamos la búsqueda de consensos.

Los métodos de consenso, aunque no son técnicas que impliquen un diseño muestral estricto en cuanto a la selección de las personas que han de formar el comité de expertos (son elegidas sin que intervenga el azar) ni se realiza una determinación del tamaño de muestra (no es representativo numéricamente de la comunidad de profesionales que podrían opinar), utilizan cuestionarios para la recogida de información y emplean medidas estadísticas de agregación para obtener sus conclusiones. El objetivo de esta técnica es obtener el grado de consenso o de acuerdo entre los especialistas en una tecnología, un proceso social o un problema planteado en lugar de dejar la decisión a un único profesional.

Su aplicación se inicia reuniendo un grupo de expertos y elaborando un cuestionario al que debe responder cada experto. En realidad los miembros del mismo nunca se llegan a reunir; de hecho, cada participante desconoce quiénes son las

---

otras personas que participan en el estudio. La forma tradicional de responder al cuestionario consiste en utilizar escalas de calificación clásicas, por ejemplo, escalas de Likert de 5 ó 7 puntos. En una escala de Likert de 5 niveles, las posibles respuestas acostumbra a ser etiquetas lingüísticas del siguiente tipo: “*Totalmente en desacuerdo*”, “*En desacuerdo*”, “*Ni de acuerdo ni en desacuerdo*”, “*De acuerdo*” y “*Totalmente de acuerdo*”. Además de elegir una respuesta, el experto dispone de un campo abierto en cada ítem para explicar brevemente su opinión. Una vez que se han obtenido todas las respuestas, se analizan los resultados globales y se elabora un informe valorando, de forma global, los juicios de los expertos (utilizando para ello medidas cuantitativas y comentarios escritos). Si se observa que no hay consenso en alguna de las cuestiones sobre las que se ha preguntado, estos informes sirven de retroalimentación a los mismos expertos, a los que se les vuelve a pedir su opinión, iniciándose una nueva ronda de consultas (usualmente, con el mismo cuestionario). A lo largo de la misma, los expertos vuelven a evaluar sus opiniones teniendo en cuenta los mencionados informes, y el objetivo final es el de alcanzar el consenso a lo largo de un número finito de rondas. El proceso puede repetirse varias veces o bien hasta alcanzar el consenso unánime (lo cual es muy complicado) o bien hasta alcanzar un cierto nivel aceptable de consenso. Finalmente, el responsable del estudio elaborará sus conclusiones a partir de la explotación estadística de los datos obtenidos.

Para intentar llegar a un cierto nivel de consenso se tienen en cuenta ciertos criterios (véase [37]), entre los que destacamos los siguientes :

- Un número acordado de rondas. Los diferentes trabajos consultados indican que utilizar tres rondas suele ser suficiente para identificar los puntos de consenso.
- Establecer un cierto nivel de acuerdo. En algunos estudios, el consenso se define como un 51 % de acuerdo entre los expertos. En otros estudios, el consenso en un ítem se alcanza si al menos el 80 % de los expertos elige uno de los dos niveles más altos de la escala (en una escala de Likert de



5 niveles, significaría que el 80 % de las respuestas fuesen “*De acuerdo*” o “*Totalmente de acuerdo*”).

- Utilizar la media y la desviación típica. En algunos estudios, obtener una media en la respuestas con un rango aceptable (media  $\pm 0.5$ ), con un coeficiente de variación aceptable también se considera consenso.
- Utilizar mediana y rango relativo intercuartílico (RRQ). En una escala de Likert de 10 niveles, se alcanza el consenso si el RRQ no es superior a 2 unidades. En escalas de Likert de 5 niveles, el consenso se alcanza si el RRQ es 1 o menos.
- Coeficiente de variación. Obtener un coeficiente de variación de 0.5 o inferior se acepta como indicador de un acuerdo razonable.
- Observar una disminución consistente entre la primera y la segunda ronda en el número de items a valorar también es indicativo de un aumento en el nivel de consenso.

Son numerosas las medidas estadísticas que se utilizan. Mientras que algunos autores recomiendan utilizar la media y la desviación típica, Murphy y otros [51] se inclinan por usar la mediana y el rango intercuartílico mejor que las anteriores en estudios Delphy ya que son, generalmente, más robustas cuando se usan junto a escalas de Likert.

En algunos estudios, se utiliza el *coeficiente W de Kendall* para determinar el grado de acuerdo entre varios expertos. En la página web [80] podemos encontrar una forma resumida para su cálculo, como describimos a continuación.

1. Ordenar las observaciones por rangos, en función de la posible variable independiente.
2. Efectuar la sumatoria de los rangos en función de cada variable.
3. Obtener la sumatoria de la sumatoria anterior y obtener un promedio.

4. Calcular las diferencias obtenidas entre la sumatoria y el promedio, elevarlas al cuadrado y sumarlas. Lo anterior es el valor  $S$ .
5. Aplicar la ecuación para obtener el ajuste dado por las ligas o empates.
6. Aplicar a ecuación coeficiente de concordancia de Kendall ( $W$ ).
7. Transformar  $W$  en Chi-cuadrada y calcular los grados de libertad,  $gl = N - 1$ .
8. Decidir si se acepta o se rechaza la hipótesis.

No basta con saber si  $W$  está más próximo a 0 o a 1 sino que, además, debemos conocer si  $W$  es significativamente distinta de 0 para rechazar la hipótesis de concordancia casual. Es decir, no es suficiente calcular el coeficiente, hay que hacer la prueba de hipótesis indicada para verificar un resultado significativo.

Aunque los métodos tradicionales de Delphi han sido ampliamente aceptados como una herramienta efectiva y se han utilizado en una amplia gama de aplicaciones, todavía existen problemas de ambigüedad e incertidumbre en las opiniones de expertos. La medición de un juicio humano se considera un fenómeno emocional, complejo de percepción, subjetivo y personal que involucra muchos dominios de una experiencia de vida individual. En general, las escalas de calificación clásicas (por ejemplo, escalas Likert de 5 ó 7 puntos) consideran números enteros para medir el pensamiento humano. Sin embargo, debido a la complejidad y la incertidumbre que intervienen en un juicio humano, es muy difícil dar un valor numérico exacto para determinarlo.

La teoría de conjuntos difusos ofrece una posible forma de superar este problema. Kaufmann y Gupta [41] fueron los primeros en proponer un procedimiento más completo denominado *Método Fuzzy Delphi (FDM)*. Los estudios de Delphi consideran diferentes criterios para la determinación del consenso. En [41], se utilizó la teoría de conjuntos difusos solicitando a los participantes que diesen un juicio basado en una estimación de tres puntos (es decir, aportando valores pesimistas, moderados y optimistas). A continuación, se tuvieron en

cuenta los números difusos triangulares que se podían considerar a partir de las respuestas dadas y se calculó la media. El proceso termina cuando las distancias entre las respuestas dadas por todos los expertos individualmente y las medias para todos los ítems de la encuesta satisfacen un determinado criterio (o valor). En un contexto de incertidumbre, en esta Memoria proponemos utilizar una nueva relación binaria difusa introducida para determinar el porcentaje de respuestas difusas que son mayores de un número difuso que indique “*De acuerdo*” y “*Muy de acuerdo*”.

En concreto, proponemos que pudiera llevarse a cabo un proceso como el siguiente. A un comité de expertos, representados por  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , se les pregunta sobre  $m$  ítems o criterios de decisión. Sean  $\mathcal{A}_i^k = (a_i^k/b_i^k/c_i^k)$  números difusos triangulares que representan el nivel de acuerdo difuso asignado a la alternativa  $A_i$  (por ejemplo, el nivel de acuerdo en la traducción al español de un ítem de una escala aceptada internacionalmente para medir la calidad de vida de un enfermo) por el experto  $E_k$  para el  $i$ -ésimo criterio (donde  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  y  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ). En las siguientes líneas, describimos un algoritmo que permite aplicar un método Delphi difuso de consenso.

**Paso 1:** Crear un grupo de expertos.

**Paso 2:** Enviar por correo electrónico el cuestionario a los diferentes expertos y recopilar las respuestas. En este paso, se invita a los expertos a responder al cuestionario utilizando una escala de calificación difusa con formato de respuesta libre, el cual involucra números difusos triangulares (los cuales también podrían ser trapezoidales si así se estableciese desde el principio).

**Paso 3:** Obtener el porcentaje de acuerdo y el número de comentarios realizados. En esta propuesta, el número difuso que indica “*De acuerdo*” y “*Totalmente de acuerdo*” pudiera ser, por ejemplo,  $C = (7/8/9)$  en una escala de 0 a 10. Calcular el número de casos en los que se verifica  $C \preceq \mathcal{A}_i^k$  para cada ítem  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  y el correspondiente porcentaje de acuerdo.

**Paso 4:** Identificar un criterio de consenso basado en el porcentaje de calificaciones del acuerdo y el número de comentarios. Por ejemplo, más del 80 % de acuerdo entre expertos y 0 comentarios pueden considerarse consenso. Si el criterio de consenso se cumple, se detiene el proceso, y si el criterio de consenso no se cumple, se continua al siguiente paso.

**Paso 5:** Informar de los resultados a los expertos y modificar el cuestionario a tenor de los comentarios de los expertos, y volver al Paso 2.

Disponer de una metodología de ranking difusa (como la que hemos manejado en esta Memoria a través de la relación binaria difusa  $\preceq$ ) también permitiría obtener coeficientes  $W$  de Kendall, coeficientes de Spearman, medianas, etc., a partir de datos difusos.

Para acabar esta sección, destacamos que muchos procesos tecnológicos y relacionados con la salud necesitan que se alcance un cierto nivel de consenso para su aprobación. Los métodos que se proponen en esta Memoria son fáciles entender y de aplicar, algo que no siempre ocurre cuando se consideran respuestas difusas en los juicios de los expertos.

Para agilizar la aplicación de estos métodos es conveniente disponer de una herramienta informática que permita ordenar números difusos según la metodología aquí mostrada. Dedicamos las siguientes secciones a describir la librería en R que hemos desarrollado para este fin.

## 4.2. Instalación de la librería

Para poder utilizar la librería que hemos desarrollado, es necesario instalar, en el orden que se indica, el siguiente software.

- 1) Instalar el programa  $R$  [77] descargando los archivos necesarios desde la siguiente página web:

<https://www.r-project.org/>

- 2) Por comodidad, sugerimos instalar el programa *R-Studio* [78] desde la siguiente página web:

<https://rstudio.com/>

- 3) Teniendo abierto el programa *R-Studio*, instalar la librería *FuzzyNumbers* [79] (en nuestro caso, desde un directorio local en el que hemos descargado el archivo adecuado).

```
install.packages("C:/FuzzyNumbers_0.4-6.tar.gz",  
  repos = NULL, type = "source")
```

- 4) Dentro también del programa *R-Studio*, ejecutar el siguiente comando para instalar la librería *RankingTwoTraFNs*:

```
install.packages("C:/RankingTwoTraFNs_0.1.0.tar.gz",  
  repos = NULL, type = "source")
```

De esta forma, ya estaremos listos para utilizar, dentro de *R-Studio*, las funcionalidades que aporta la librería, las cuales son descritas en la siguiente sección.

### 4.3. Funciones implementadas en la librería

Toda vez que hemos instalado las librerías anteriores, el programa *R-Studio* habrá almacenado los archivos necesarios para poder utilizar las funciones que llevan implementadas sin necesidad de volver a instalar los paquetes al completo. Para ello, sólo será necesario cargar las librerías adecuadas de la siguiente forma:

```
library(FuzzyNumbers)  
library(RankingTwoTraFNs)
```

En este momento, la función `menu()` que describiremos más adelante ya nos permitiría introducir y ordenar los números difusos trapezoidales que deseemos. No obstante, a continuación vamos a describir las líneas de código que se han implementado para llevar a cabo el proceso descrito.

Supongamos que deseamos ordenar dos números difusos trapezoidales  $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$  y  $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$  de los que conocemos sus respectivas cuatro esquinas. De cara al programa, identificaremos dicho números difusos como vectores en  $R$  descritos como  $FNa = c(a_1, a_2, a_3, a_4)$  y  $FNb = c(b_1, b_2, b_3, b_4)$ . Describimos las funciones implementadas.

(✕) La función *LeftInterval*( $a, b$ ) toma como argumentos dos vectores  $a = c(a_1, a_2)$  y  $b = c(b_1, b_2)$  que representan las dos esquinas inferiores de cada uno de los números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , a saber,  $a_1, a_2, b_1$  y  $b_2$ , y devuelve el subintervalo compacto (cerrado y acotado)  $I \subseteq \mathbb{I}$  formado por todos aquellos valores  $\alpha$  tales que  $\underline{a}_\alpha \leq \underline{b}_\alpha$ . Dicho intervalo viene descrito como un vector  $c(\alpha, \beta)$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los extremos de dicho intervalo. Si dicho intervalo es vacío, devuelve el vector  $c(-1, -1)$  (en lo que sigue, utilizamos el número  $-1$  para indicar si hay algún error).

```
LeftInterval= function(a,b){
  a1<-a[1]
  a2<-a[2]
  b1<-b[1]
  b2<-b[2]
  if(a1<= b1 && a2 <= b2){
    return(c(0,1))
  } else if(b1<a1 && b2<a2){
    return(c(-1,-1))
  } else if(a1<=b1 && b1<=b2 && b2<= a2){
    y1<-abs(a1-b1)/(abs(a1-b1) + abs(a2-b2))
    return(c(0,y1))
  }
}
```

```

} else if(b1<=a1 && a1 <= a2 && a2<= b2){
  y1<-abs(a1-b1)/(abs(a1-b1) + abs(a2-b2))
  return(c(y1,1))
} else{# some parameter is wrong
  cat(paste("Something's wrong:
  Failure in function -LeftInterval-."))
}
}

```

- (⊠) La función *RightInterval*( $a, b$ ) toma como argumentos dos vectores  $a = c(a_3, a_4)$  y  $b = c(b_3, b_4)$  que representan las dos esquinas superiores de cada uno de los números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , a saber,  $a_3, a_4, b_3$  y  $b_4$ , y devuelve el subintervalo  $I \subseteq \mathbb{I}$  formado por todos aquellos valores  $\alpha$  tales que  $\bar{a}_\alpha \leq \bar{b}_\alpha$ . Dicho intervalo viene descrito como un vector  $c(\alpha, \beta)$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los extremos de dicho intervalo. Si dicho intervalo es vacío, devuelve el vector  $c(-1, -1)$ .

```

RightInterval= function(a,b){
  a3<-a[1]
  a4<-a[2]
  b3<-b[1]
  b4<-b[2]
  if(a3<= b3 && a4 <= b4){
    return(c(0,1))
  } else if(b3<a3 && b4<a4){
    return(c(-1,-1))
  } else if(a3<=b3 && b3<=b4 && b4<= a4){
    y2<-abs(a4-b4)/(abs(a3-b3) + abs(a4-b4))
    return(c(y2,1))
  } else if(b3<=a3 && a3 <= a4 && a4<= b4){
    y2<-abs(a4-b4)/(abs(a3-b3) + abs(a4-b4))

```

```

        return(c(0,y2))
    } else{# some parameter is wrong
        cat(paste("Something's wrong:
                Failure in function -RightInterval-."))
    }
}

```

- (⊠) La función  $Intersection(i_1, i_2)$  toma como argumentos dos intervalos compactos  $i_1$  e  $i_2$  (descritos como vectores  $c(i_{j1}, i_{j2})$ ) y determina su intersección  $i_1 \cap i_2$  (también descrita como un vector  $c(\alpha, \beta)$ ). Si dicho intervalo es vacío, devuelve el vector  $c(-1, -1)$ .

```

Intersection= function(i1,i2){
  alfa1<-i1[1]
  beta1<-i1[2]
  alfa2<-i2[1]
  beta2<-i2[2]
  if(alfa1 == -1 || alfa2 == -1){
    return(c(-1,-1))
  }
  else {
    if(max(alfa1,alfa2)<= min(beta1,beta2)){
      return(c(max(alfa1,alfa2),min(beta1,beta2)))
    } else{
      return(c(-1,-1))
    }
  }
}

```

- (⊠) La función  $Interval(FNa, FNb)$  toma como argumentos dos números difusos trapezoidales  $FNa = c(a_1, a_2, a_3, a_4)$  y  $FNb = c(b_1, b_2, b_3, b_4)$  y



devuelve el intervalo  $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  visto como un vector  $c(\alpha, \beta)$ . Si dicho intervalo es vacío, devuelve el vector  $c(-1, -1)$ .

```
Interval= function(FNa, FNb){
  return(Intersection(
    LeftInterval(c(FNa[1], FNa[2]), c(FNb[1], FNb[2])),
    RightInterval(c(FNa[3], FNa[4]), c(FNb[3], FNb[4]))
  ))
}
```

- (⊠) La función  $LengthInterval(i)$  toma un intervalo compacto  $i$  (visto como un vector  $c(\alpha, \beta)$ ) y devuelve su longitud  $\beta - \alpha$  (que es un número real). Si el intervalo es vacío, devuelve  $-1$ .

```
LengthInterval= function(i){
  if(i[1]==-1 )
    return(0)
  else
    return(i[2]-i[1])
}
```

- (⊠) La función  $Decision(FNa, FNb)$  toma como argumentos dos números difusos trapezoidales  $FNa = c(a_1, a_2, a_3, a_4)$  y  $FNb = c(b_1, b_2, b_3, b_4)$  y devuelve  $TRUE$ , si  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ , y  $FALSE$ , si la ordenación  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  es falsa.

```
Decision= function(FNa, FNb){
  lengthAB<- LengthInterval(Interval(FNa, FNb))
  lengthBA<- LengthInterval(Interval(FNb, FNa))
  if(lengthAB>0 && lengthAB>lengthBA)
    return(TRUE)
  else if(lengthAB==0&&lengthBA==0&&(sum(FNa)<=sum(FNb)))
    return(TRUE)
}
```

```

else
  return(FALSE)
}

```

- (✕) La función  $Ranking2TraFN(FNa, FNb, TextoA, TextoB)$  toma como argumentos dos números difusos trapezoidales  $FNa = c(a_1, a_2, a_3, a_4)$  y  $FNb = c(b_1, b_2, b_3, b_4)$  y las respectivas etiquetas  $TextoA$  y  $TextoB$  con las que deseamos nombrarlos, y devuelve la siguiente cadena de caracteres:

$$\left\{ \begin{array}{l} TextoA \sim TextoB, \quad \text{si } \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ y } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A} \text{ son ciertas a la vez,} \\ TextoA < TextoB, \quad \text{si } \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ es cierta y } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A} \text{ es falsa,} \\ TextoA > TextoB, \quad \text{si } \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ es falsa y } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A} \text{ es cierta.} \end{array} \right.$$

Obsérvese que esta función nos solicita las etiquetas lingüísticas con las que denotaremos a los números difusos. Es usual llamar “A” a primer número difuso y “B” al segundo. De esta forma, la función nos ofrecerá una de las tres siguientes salidas: “A < B”, “A ~ B” o “A > B”. No obstante, cuando se trabaja con más de dos números difusos, es usual emplear otras etiquetas. En este caso, si escribimos otras etiquetas lingüísticas, podríamos obtener salidas como “C < D”, “A1 ~ B2” o “FN1 > FN2”. Dependerá del texto que introduzcamos en los argumentos.

```

Ranking2FN = function(FNa, FNb, texta, textb){
  AlessB<- Decision(FNa,FNb)
  BlessA<- Decision(FNb,FNa)
  if(AlessB == TRUE && BlessA == TRUE)
    return(paste(texta,"~",textb))
  else if(AlessB == TRUE && BlessA == FALSE)
    return(paste(texta,"<",textb))
  else if(AlessB == FALSE && BlessA == TRUE)
    return(paste(texta,">",textb))
  else
    cat(paste("Something's wrong:

```

```

    Failure in function -Ranking2FN-."))
}

```

- (⊠) La función `menu()` nos pide las cuatro esquinas de cada uno de los dos números difusos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  junto con sus respectivas etiquetas *TextoA* y *TextoB* y, tras comprobar que se satisfacen las desigualdades  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$  y  $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$ , devuelve la ordenación correcta de los números  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  utilizando las etiquetas *TextoA* y *TextoB* (si no se satisfacen las desigualdades, devuelve un texto informativo de error).

```

menu = function(){
  # We check that library 'FuzzyNumbers' is installed
  if (!require('FuzzyNumbers'))
    stop("Please, install library 'FuzzyNumbers'
         before continuing.")
  library('FuzzyNumbers') # start

  cat(paste("Insert the quantity of trapezoidal fuzzy numbers
            to carry out the ranking"))
  cantidadNumeros<-scan(n=1)
  # if a positive number has been loaded
  if(cantidadNumeros>0){
    # Initializing the vectors for parameters as null
    a=NULL
    b=NULL
    c=NULL
    d=NULL
    etiqueta = NULL

    cat(paste("\nPlease, insert each fuzzy number through
              its corners (a,b,c,d) and a label (text)\n"))
  }
}

```

---

```
cat(paste("\n(recall b=c if it is triangular)\n"))
cat(paste("\n(make sure a<=b<=c<=d)\n"))

# caption of the corners of the fuzzy numbers
for(i in 1:cantidadNumeros){
  cat(paste("\nCorners of the trapezoidal fuzzy
            number",i,"are :\n"))
  num=scan(nmax =4)
  # We check that corners are correctly ordered as
  # real numbers
  if(num[1]<=num[2]&&num[2]<=num[3]&&num[3]<=num[4]){
    a=c(a,num[1])
    b=c(b,num[2])
    c=c(c,num[3])
    d=c(d,num[4])
    # caption of labels
    cat(paste("Insert the label of this fuzzy
              number\n"))
    etiqueta= c(etiqueta,scan(,what = character(),1))

  }else{
    cat(paste("Failure:
              corners are incorrectly ordered. END. "))
    return(0)
  }
}
else{
  cat(paste("Failure: incorrect quantity of fuzzy
            numbers. END. "))
  return(0)
}
```

```
}

# computation of ranking
valorRanking<-Ranking2FN(c(a[1],b[1],c[1],d[1]),
  c(a[2],b[2],c[2],d[2]), etiqueta[1],etiqueta[2])

# definition of the trapezoidal fuzzy number for plotting
A<-TrapezoidalFuzzyNumber(a[1],b[1],c[1],d[1])
B<-TrapezoidalFuzzyNumber(a[2],b[2],c[2],d[2])

A1<-as.PiecewiseLinearFuzzyNumber(A, knot.n=0)
B1<-as.PiecewiseLinearFuzzyNumber(B, knot.n=0)

# computation of the appropriate interval for plotting
FNa<-c(a[1],b[1],c[1],d[1])
FNb<-c(a[2],b[2],c[2],d[2])
m1<-min(FNa,FNb)
m2<-max(FNa,FNb)
l<-m2-m1
l1<-m1-0.15*l
l2<-m2+0.15*l

# Plotting fuzzy numbers and ranking
plot(A1, xlim=c(l1,l2), main="Ranking trapezoidal
  fuzzy numbers",lwd=2, col="red")
plot(B1, add=TRUE, lwd=2,col="blue")
legend("topright", legend=c(etiqueta[1], etiqueta[2]),
  col=c("red","blue"), lty=c(1,1), title = valorRanking,
  bg='lightblue')
}
```

## 4.4. Ejemplos de utilización de la librería

En esta sección describimos cómo utilizar, en la práctica, la librería desarrollada. En primer lugar, cargamos las librerías oportunas, como se muestra en la Figura 4.1.

```
> library(FuzzyNumbers)
> library(RankingTwoTraFNs)
```

Figura 4.1: Cargando las librerías que se utilizarán.

El siguiente paso es ejecutar la orden `menu()`. Nos solicitará la cantidad de números difusos trapezoidales que se van a comparar (por ahora, aunque puede cargar más de dos números, sólo la vamos a utilizar con dos números). a continuación nos pedirá las cuatro esquinas de cada uno de los números difusos trapezoidales y sus correspondientes etiquetas (véase la Figura 4.2).

Cuando se han introducido estos datos, el programa realiza una representación gráfica de los dos números difusos, representando el primero en color rojo y el segundo en color azul. Además, escribe una leyenda en la parte superior derecha en la que indica la ordenación de los dos números difusos.

Veámoslo con ejemplos concretos.

- La Figura 4.3 se obtiene al comparar los números difusos trapezoidales  $\mathcal{A} = (2/5/8/13)$  y  $\mathcal{B} = (1/6/7/5)$ , resultando la ordenación “ $A < B$ ”, es decir,  $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ .
- La Figura 4.4 se obtiene al comparar los números difusos  $\mathcal{C} = (0.8/1.5/2.9/3.7)$  y  $\mathcal{D} = (1.1/1.4/4)$  (este último es triangular), resultando la ordenación “ $C > D$ ”, es decir,  $\mathcal{C} \succ \mathcal{D}$ .

```
> menu()
Insert the quantity of trapezoidal fuzzy numbers to carry out the ranking
1: 2
Read 1 item

Please, insert each fuzzy number through its corners (a,b,c,d) and a label (text)

(recall b=c if it is triangular)

(make sure a<=b<=c<=d)

Corners of the trapezoidal fuzzy number 1 are :
1: 2
2: 5
3: 8
4: 13
Read 4 items
Insert the label of this fuzzy number
1: A
Read 1 item

Corners of the trapezoidal fuzzy number 2 are :
1: 1
2: 6
3: 7
4: 15
Read 4 items
Insert the label of this fuzzy number
1: B
Read 1 item
```

Figura 4.2: Introducción manual de las esquinas y de las etiquetas de los números difusos con el comando `menu()`.

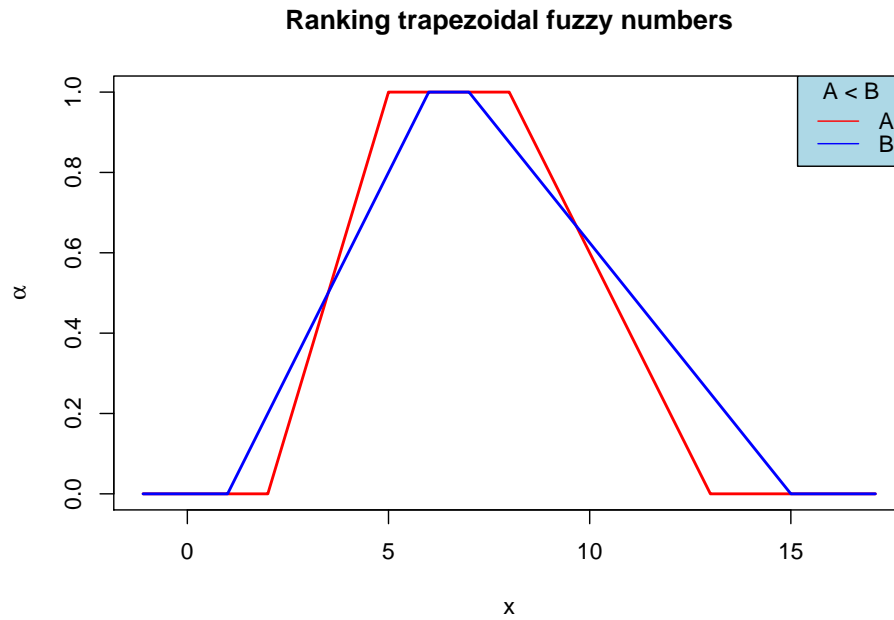


Figura 4.3: Comparación de los números difusos  $\mathcal{A} = (2/5/8/13)$  y  $\mathcal{B} = (1/6/7/5)$ .

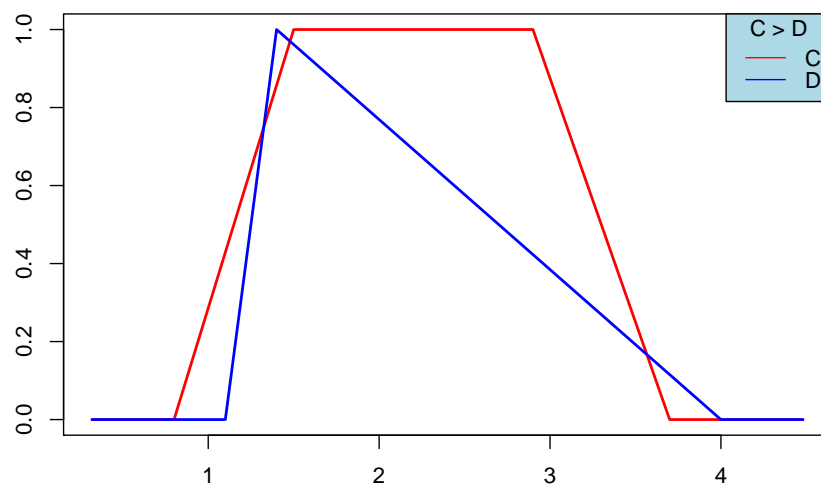


Figura 4.4: Comparación los números difusos  $\mathcal{C} = (0.8/1.5/2.9/3.7)$  (trapezoidal) y  $\mathcal{D} = (1.1/1.4/4)$  (triangular).



- La Figura 4.5 se obtiene al comparar los números difusos triangulares  $\mathcal{A}_1 = (1/5/9)$  y  $\mathcal{A}_2 = (3/5/7)$ , resultando la ordenación “ $A1 \sim A2$ ”, es decir,  $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$ .

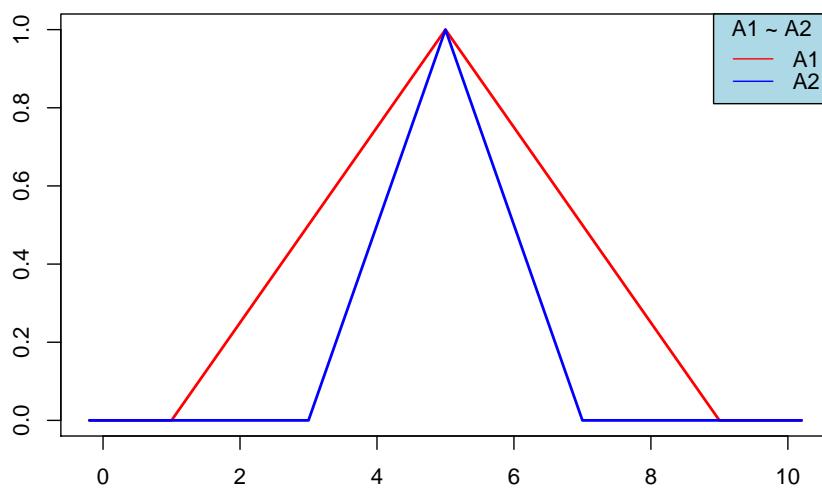


Figura 4.5: Comparación los números difusos triangulares  $\mathcal{A}_1 = (1/5/9)$  y  $\mathcal{A}_2 = (3/5/7)$ .

# CAPÍTULO 5

---

## Conclusiones

---

El objetivo fundamental de la presente Memoria era describir, de la forma más precisa posible, la metodología de ordenación de parejas de números difusos trapezoidales utilizando la relación binaria difusa  $\preceq$  introducida por Roldán López de Hierro *et al.* en [56]. Consideramos que lo hemos conseguido a la vista, especialmente, del Teorema 3.5.2, donde describimos un posible proceso de ordenación de números difusos trapezoidales mediante  $\preceq$ . No obstante, este objetivo ha sido el pretexto básico para alcanzar otros muchos propósitos generales que nos habíamos marcado y que habíamos comentado en el Capítulo 1. Describimos, a continuación, algunos de los más importantes.

- ✓ Hemos redactado un texto en castellano que permite a cualquier persona introducirse en esta temática tan apasionante partiendo de unos conocimientos matemáticos muy básicos.
- ✓ Hemos descubierto nuevas propiedades de la relación difusa binaria  $\preceq$  que sirven para conocerla un poco mejor y que confirman nuevamente que su forma de actuar es, en la mayoría de casos, acorde con la intuición humana.
- ✓ Hemos presentado la noción de número difuso de una forma sencilla y hemos descrito las principales clases de números difusos que se emplean en la investigación científica.

- ✓ Hemos introducido una interpretación estadística de los números difusos atendiendo a varias de sus principales características.
- ✓ Hemos descrito algunas de las metodologías de clasificación de números difusos basadas en índices de ordenación que más se utilizan en la práctica y que fueron propuestas por diferentes investigadores para afrontar distintas situaciones problemáticas.
- ✓ Hemos propuesto aplicaciones de la relación binaria difusa introducida en el contexto de las técnicas de consenso.
- ✓ Hemos desarrollado un paquete informático que permite la comparación de números difusos trapezoidales (generalizados, incluyendo las clases contenidas en los mismos) de una forma sencilla y eficaz, introduciendo únicamente las coordenadas que definen sus cuatro esquinas.

A la vista de los resultados obtenidos, se abre todo un campo de investigación para los próximos años en el que indagaremos sobre los siguientes problemas abiertos.

- ▶ Desarrollo de aplicaciones prácticas con datos difusos auténticos en el contexto de las Ciencias de la Salud.
- ▶ ¿Cómo actúa la relación binaria difusa  $\preceq$  sobre otras clases de números difusos? Inicialmente, podríamos plantearnos la consideración de números difusos finitos o de tipo LR.
- ▶ ¿Cómo aplicar la relación difusa binaria en problemas de toma de decisiones?
- ▶ ¿Qué elementos matemáticos y estadísticos podrían hacer falta para desarrollar dicha aplicación? Por ejemplo, se nos ocurre la necesidad de extender la noción de *función de agregación* a ciertas familias de números difusos.
- ▶ ¿Qué otras propiedades verifica la relación binaria difusa  $\preceq$ ?
- ▶ ¿Son estas propiedades acordes con la intuición humana?

- ▶ ¿Cómo pudiera utilizarse la relación binaria difusa  $\preceq$  en contextos de regresión difusa?
- ▶ ¿Cuál es la razón básica por la que la relación binaria difusa  $\preceq$  no es transitiva?
- ▶ ¿Cómo pudiera definirse el concepto de mediana de una cantidad finita de números difusos (de una clase particular) a la vista de que  $\preceq$  no es transitiva?
- ▶ ¿Cómo desarrollar una librería aún más general de la aquí descrita en la que se pueda comparar una cantidad finita de números difusos trapezoidales?

Como es usual en el contexto matemático y puede observarse a la perfección en estas líneas, la resolución de un problema matemático abre un campo de interrogantes aún más amplio que el enigma que lo originó.



---

## Índice de figuras

---

1. Números difusos trapezoidales cuya ordenación no es una tarea inmediata. . . . .	XVI
2.1. Ejemplos de diferentes clases de números difusos. . . . .	10
2.2. El núcleo y el soporte de un número difuso trapezoidal. . . . .	11
2.3. Un número difuso cuyo soporte no es compacto. . . . .	12
2.4. Número difuso <i>crisp</i> . . . . .	14
2.5. Número difuso rectangular. . . . .	14
2.6. Número difuso triangular. . . . .	15
2.7. Distintas clases de números difusos triangulares (generalizados). . . .	16
2.8. Ejemplos de números difusos triangulares (simétrico y no simétrico). . .	16
2.9. Números difusos triangulares no continuos. . . . .	17
2.10. Número difuso trapezoidal (comparado con uno triangular). . . . .	17
2.11. Número difuso tipo LR. . . . .	19
2.12. Número difuso trapezoidal $\mathcal{A} = (6.5/7/7.25/7.75)$ . . . . .	22
2.13. Un número difuso descompuesto en sus dos funciones de distribución. . .	23
2.14. Número difuso de tipo LR obtenido al representar los intervalos dados mediante $IC(\mu) = \left[ \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ variando $\alpha \in \mathbb{I}$ . . . . .	24

2.15. Números difusos triangulares que representan las etiquetas de una variable lingüística. . . . .	26
2.16. Representación gráfica de la suma de dos números difusos triangulares.	28
2.17. Gráficas de los números difusos $A$ y $B$ del Ejemplo 2.2.5. . . . .	39
2.18. Áreas consideradas en las relaciones de preferencia Integral y de Yuan (se representa el número $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$ junto con sus respectivas funciones $\underline{c}_\alpha$ y $\bar{c}_\alpha$ ). . . . .	47
2.19. Números difusos del Conjunto 1. . . . .	50
2.20. Números difusos del Conjunto 2. . . . .	51
2.21. Números difusos del Conjunto 3. . . . .	52
2.22. Números difusos del Conjunto 4. . . . .	53
2.23. Números difusos trapezoidales del Ejemplo 2.2.8. . . . .	58
2.24. Un ejemplo de inconsistencia en la aplicación de índices de ordenación.	59
3.1. Un ejemplo de un número difuso trapezoidal. . . . .	71
3.2. Siempre representaremos $\mathcal{A}$ en rojo y $\mathcal{B}$ en azul. . . . .	73
3.3. Los lados de los números difusos tienen puntos comunes únicos. . . . .	76
3.4. ¿Nos dice la intuición que $\mathcal{A}$ es menor que $\mathcal{B}$ ? . . . . .	84
3.5. Representaciones gráficas donde $\mathcal{B}$ está incluido en $\mathcal{A}$ . . . . .	85
3.6. Diferentes posiciones relativas de números difusos. . . . .	85
3.7. $\mathcal{B}$ está incluido en $\mathcal{A}$ . . . . .	88
3.8. $\mathcal{B}$ está incluido en $\mathcal{A}$ con el mismo lado izquierdo. . . . .	89
3.9. $\mathcal{B}$ está incluido en $\mathcal{A}$ con esquinas comunes. . . . .	89
3.10. Los lados $r_{\mathcal{A}}$ y $r_{\mathcal{B}}$ poseen un único punto en común. . . . .	90
3.11. Posibles situaciones cuando $a_{i_1}$ y $a_{i_2}$ están en lados distintos. . . . .	93

---

3.12. Posiciones relativas del caso 1: $a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2$ y $a_3 \leq b_3 < b_4 \leq a_4$ .	98
3.13. Posiciones relativas del caso 2: $a_1 \leq b_1 < b_2 \leq a_2$ y $b_3 \leq a_3 < a_4 \leq b_4$ .	100
3.14. Posiciones relativas del caso 3: $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$ y $a_3 \leq b_3 < b_4 \leq a_4$ .	101
3.15. Posiciones relativas del caso 4: $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$ y $b_3 \leq a_3 < a_4 \leq b_4$ .	102
3.16. Representación gráfica de las cantidades $\{\delta_i\}_{i=1}^4$ .	104
3.17. Esquema para ordenar números difusos trapezoidales.	108
3.18. Números difusos del Ejemplo 3.6.1.	110
3.19. $\mathcal{A}_1$ en rojo, $\mathcal{A}_2$ en azul, $\mathcal{A}_3$ en verde, $\mathcal{A}_4$ en morado y $\mathcal{A}_5$ en rosa (Ejemplo 3.6.2).	111
3.20. Números difusos del Ejemplo 3.6.3.	113
3.21. Números difusos del Ejemplo 3.6.4.	114
4.1. Cargando las librerías que se utilizarán.	133
4.2. Introducción manual de las esquinas y de las etiquetas de los números difusos con el comando <code>menu()</code> .	134
4.3. Comparación de los números difusos $\mathcal{A} = (2/5/8/13)$ y $\mathcal{B} = (1/6/7/5)$ .	135
4.4. Comparación los números difusos $\mathcal{C} = (0.8/1.5/2.9/3.7)$ (trapezoidal) y $\mathcal{D} = (1.1/1.4/4)$ (triangular).	135
4.5. Comparación los números difusos triangulares $\mathcal{A}_1 = (1/5/9)$ y $\mathcal{A}_2 =$ $(3/5/7)$ .	136





---

## Bibliografía

---

- [1] S. Abbasbandy, M. Amirfakhrian. *A new approach to universal approximation of fuzzy functions on a discrete set of points*. Appl. Math. Model. **30** (2006), 1525-1534.
- [2] S. Abbasbandy, M. Amirfakhrian. *The nearest trapezoidal form of a generalized left right fuzzy number*. Int. J. Approx. Reason. **43** (2006), 166-178.
- [3] S. Abbasbandy, T. Hajjari. *A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers*. Comput. Math. Appl. **57** (3) (2009), 413-419.
- [4] S. Abbasbandy, T. Hajjari. *An improvement on centroid point method for ranking of fuzzy numbers*. J. Sci. I.A.U. **78** (2011), 109-119.
- [5] S. Abbasbandy, B. Asady. *Note on A new approach for defuzzification*. Fuzzy Sets Syst. **128** (2002), 131-132.
- [6] S. Abbasbandy, B. Asady. *Ranking of fuzzy numbers by sign distance*. Inform. Sci. **176** (2006), 2405-2416.
- [7] M. Adamo. *Fuzzy decision trees*. Fuzzy Sets Syst. **128** (2002) 131-132.
- [8] G. Alfonso, A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán. *A fuzzy regression model based on finite fuzzy numbers and its application to real-world financial data*. J. Comput. Appl. Math. **318** (2017), 47-58.

- 
- [9] S. Alonso, F.J. Cabrerizo, F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma. *Group decision making with incomplete fuzzy linguistic preference relations*. Int. J. Intell. Syst. **24** (2009), 201-222.
- [10] B. Asady. *The revised method of ranking LR fuzzy number based on deviation degree*. Expert Syst. Appl. **37** (2010), 5056-5060.
- [11] B. Asady, A. Zendehnam. *Ranking fuzzy numbers by distance minimization*. Appl. Math. Model. **31** (2007), 2589-2598.
- [12] J.F. Baldwin, N.C.F. Guild. *Comparison of fuzzy numbers on the same decision space*. Fuzzy Sets Syst. **2** (1979), 213-233.
- [13] A.I. Ban, L. Coroianu. *Simplifying the search for effective ranking of fuzzy numbers*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **23** (2) (2015), 327-339.
- [14] S. Bass, H. Kwakernaak. *Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets*. Automatica **13** (1977), 47-58.
- [15] S. Bodjanova. *Median value and median interval of a fuzzy number*. Inform. Sci. **172** (2005), 73-89.
- [16] G. Bortolan, R. Degani. *A review of some methods for ranking fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **15** (1985), 1-19.
- [17] J.J. Buckley, L.J. Jowers. *Monte Carlo methods in fuzzy optimization*. Studies in Fuzziness and Soft Computing **222** (2008), Springer.
- [18] W.K. Chang. *Ranking of fuzzy utilities with triangular membership functions*. In: International Conference on Policy Analysis and Informations Systems, Tamkang University, ROC, 1981, 163-171.
- [19] S. Chen. *Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set*. Fuzzy Sets Syst. **17** (1985), 113-129.

- 
- [20] S.J. Chen, S.M. Chen. *A new method for handling multicriteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators*. Cybernetic and Systems **34** (2003), 109-137.
- [21] S.M. Chen, J.H. Chen. *Fuzzy risk analysis based on ranking generalized fuzzy numbers with different heights and different spreads*. Expert Syst. Appl. **36** (3) (2009), 6833-6842.
- [22] S.J. Chen, C.L. Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [23] L.-H. Chen, H.-W. Lu. *An approximate approach for ranking fuzzy numbers based on left and right dominance*. Comput. Math. Appl. **41** (12) (2001), 1589-1602.
- [24] S.-M. Chen, K. Sanguansat. *Analyzing fuzzy risk based on a new fuzzy ranking method between generalized fuzzy numbers*. Expert Syst. Appl. **38** (2011), 2163-2171.
- [25] C.H. Cheng. *A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method*. Fuzzy Sets Syst. **95** (1998), 307-317.
- [26] F. Choobineh, H. Li. *An index for ordering fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **54** (1993), 287-294.
- [27] T.C. Chu, C.T. Tsao. *Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point*. Comput. Math. Appl. **43** (1-2) (2002), 111-117.
- [28] R. Coppi, P. D'Urso, P. Giordani, A. Santoro. *Least squares estimation of a linear regression model with LR fuzzy response*. Comput. Stat. Data Anal. **51** (2006), 267-286.
- [29] N. Dalkey, O. Helmer. *An experimental application of the Delphi method to the use of experts*. Mgmt. Sci. **9** (3) (1963), 458-467.

- 
- [30] D. Dubois, H. Prade. *Operations on fuzzy numbers*. Int. J. Syst. Sci. **9** (3) (1978), 613-626.
- [31] D. Dubois, H. Prade. *Fuzzy Sets and System: Theory and Application*. Academic Press, New York, 1980.
- [32] D. Dubois, H. Prade. *Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory*. Inform. Sciences **30** (3) (1983) 183-224.
- [33] R. Ezzati, R. Saneifard. *A new approach for ranking of fuzzy numbers with continuous weighted quasi-arithmetic means*. Math. Sci. **4** (2) (2010), 143-158.
- [34] P. Fortemps, M. Roubens. *Ranking and defuzzification methods based on area compensation*. Fuzzy Sets Syst. **82** (1996), 319-330.
- [35] A.N.S. Freeling. *Fuzzy sets and decision analysis*. IEEE Trans. Syst. Man Cybernet. **10** (1980), 341-354.
- [36] R. Goetschel, W. Voxman. *Elementary calculus*. Fuzzy Sets Syst. **18** (1986), 31-43.
- [37] A. Heiko. *Consensus measurement in Delphi studies Review and implications for future quality assurance*. Technological Forecasting and Social Change **79** (8) (2012), 1525-1536.
- [38] F. Herrera, L. Martínez. *A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **8** (6) (2000), 746-752.
- [39] R. Jain. *Decision-making in the presence of fuzzy variables*. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **6** (1976), 698-703.
- [40] R. Jain. *A procedure for multi-aspect decision making using fuzzy sets*. Int. J. Syst. Sci. **8** (1977), 1-7.
- [41] A. Kaufmann, M.M. Gupta. *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*. North-Holland, Amsterdam, 1988.

- 
- [42] A. Kauffman, M.M. Gupta. *Introduction to fuzzy arithmetic: theory and application*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
- [43] G.J. Klir, B. Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic*. Prentice Hall, 1995.
- [44] U.W. Kulisch, W.L. Miranker. *Computer arithmetic*. Academic Press, New York, 1982.
- [45] E.S. Lee, R.L. Li. *Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events*. *Comput. Math. Appl.* **15** (1988), 887-896.
- [46] T.-S. Liou, M.-J. Wang. *Ranking fuzzy numbers with integral value*. *Fuzzy Sets Syst.* **50** (1992), 247-255.
- [47] M. Ma, M. Friedman, A. Kandel. *A new fuzzy arithmetic*. *Fuzzy Sets Syst.* **108** (1999), 83-90.
- [48] M. Ma, A. Kandel, M. Friedman. *A new approach for defuzzification*. *Fuzzy Sets Syst.* **111** (2000), 351-356.
- [49] M. Modarres, S. Sadi-Nezhad. *Ranking fuzzy numbers by preference ratio*. *Fuzzy Sets Syst.* **118** (3) (2001), 429-436.
- [50] S. Murakami, S. Maeda, S. Imamura. *Fuzzy decision analysis on the development of centralized regional energy control system*. In: *Proceedings of the IFAC symposium on fuzzy information, knowledge representation and decision analysis*, 1983, 363-368.
- [51] M.K. Murphy, N.A. Black, D.L. Lamping, C.M. McKee, C.F. Sanderson, J. Askham, T. Marteau. *Consensus development methods, and their use in clinical guideline development*. *Health Technol Assess.* **2** (3) (1998), 1-88.
- [52] W.G. Rieger. *Directions in Delphi developments: dissertations and their quality*. *Technol. Forecast. Soc. Chang.* **29** (1986), 195-204.
- [53] S.E. Rodabaugh. *Categorical foundations of variable-basis fuzzy topology*. *Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory* (U. Hohle

- 
- and S. E. Rodabaugh, eds.), The Handbooks of Fuzzy Sets Series, vol. 3, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 273-388, 1999.
- [54] S.E. Rodabaugh. *Fuzzy real lines and dual real lines as poslat topological, uniform, and metric ordered semirings with unity*. Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory (U. Hohle and S. E. Rodabaugh, eds.), The Handbooks of Fuzzy Sets Series, vol. 3, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 607-631, 1999.
- [55] A. Roldán, J. Martínez-Moreno, C. Roldán. *On interrelationships between fuzzy metric structures*. Iran. J. Fuzzy Syst. **10** (2) (2013), 133-150.
- [56] A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán, F. Herrera. *On a new methodology for ranking fuzzy numbers and its application to real economic data*. Fuzzy Sets Syst. **353** (2018), 86-110.
- [57] A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán López de Hierro, J. Martínez-Moreno, C. Aguilar Peña. *Estimation of a fuzzy regression model using fuzzy distances*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **24** (2016), 344-359.
- [58] A.F. Roldán López de Hierro. *Proyecto docente*. Universidad de Granada, 2019.
- [59] J.J. Saade, H. Schwarzlander. *Ordering fuzzy sets over the real line: an approach based on decision making under uncertainty*. Fuzzy Sets Syst. **50** (1992), 237-246.
- [60] Y.L.P. Thorani, P.P.B. Rao, N.R. Shankar. *Ordering generalized trapezoidal fuzzy numbers*. Int. J. Contemp. Math. Sciences **7** (2012), 555-573.
- [61] J. Vicente Riera, J. Torrens. *Aggregation of subjective evaluations based on discrete fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **191** (2012), 21-40.
- [62] W. Voxman. *Canonical representations of discrete fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **118** (2001), 457-466.

- 
- [63] X. Wang, E.E. Kerre. *Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I)*. Fuzzy Sets Syst. **118** (3) (2001), 375-385.
- [64] X. Wang, E.E. Kerre. *Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II)*. Fuzzy Sets Syst. **118** (3) (2001), 387-405.
- [65] Y.-J. Wang, H.-S. Lee. *The revised method of ranking fuzzy numbers with an area between the centroid and original points*. Comput. Math. Appl. **55** (9) (2008), 2033-2042.
- [66] Z.X. Wang, Y.J. Liu, Z.P. Fan, B. Feng. *Ranking L-R fuzzy numbers based on deviation degree*. Inform. Sci. **176** (2009), 2070-2077.
- [67] Y.M. Wang, J.B. Yang, D.L. Xu, K.S. Chin. *On the centroids of fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **157** (2006), 919-926.
- [68] R.R. Yager. *Ranking fuzzy subsets over the unit interval*. In: Proceeding of the 17th IEEE international conference on decision and control, San Diego, CA., 1978, 1435-1437.
- [69] R.R. Yager. *On choosing between fuzzy subsets*. Kybernetes **9** (1980), 151-154.
- [70] R.R. Yager. *A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval*. Inform. Sciences **24** (1981), 143-161.
- [71] J.S. Yao, K. Wu. *Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance*. Fuzzy Sets Syst. **116** (2000), 275-288.
- [72] B. Yatsalo, S. Gritsyuk, A. Tkachuk, O. Mirzeabasov. *Multicriteria acceptability analysis: ProMAA approach*. In Proceedings of the 25th Mini-EURO Conference Uncertainty and Robustness in Planning and Decision Making, (URPDM 2010), University of Coimbra, 2010.
- [73] B. Yatsalo, L. Martínez. *Fuzzy rank acceptability analysis: A confidence measure of ranking fuzzy numbers*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **26** (6) (2018), 3579-3593.



- [74] Y. Yuan. *Criteria for evaluating fuzzy ranking methods*. Fuzzy Sets Syst. **44** (1991), 139-157.
- [75] L.A. Zadeh. *Fuzzy sets*. Inf. Control **8** (1965), 338-353.
- [76] H.J. Zimmermann. *Fuzzy sets. Theory and its application*. Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1991.

## Enlaces Web

- [77] *The R Project for Statistical Computing*: <https://www.r-project.org/>
- [78] *R-Studio*: <https://rstudio.com/>
- [79] M. Gagolewski, J. Caha. *FuzzyNumbers: Tools to Deal with Fuzzy Numbers*.  
<https://cran.r-project.org/web/packages/FuzzyNumbers/>
- [80] Página web sobre el *coeficiente de Kendall*:  
[https://www.ecured.cu/Coeficiente\\_de\\_Kendall](https://www.ecured.cu/Coeficiente_de_Kendall)



