UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Didáctica de la Matemática

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

QUE PRESENTA

Rafael Ramírez Uclés

Para optar a la plaza de Titular de Universidad, código 12/1/2020, adscrita al área de Didáctica de la Matemática en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Resolución del 9 de septiembre de 2020, de la Universidad de Granada, por la que se convocan a concurso de acceso a plazas de cuerpos de funcionarios docentes universitarios [BOE nº 260, del 1 de octubre de 2020, pp. 82934-82957]

Actividad docente: Diseño y desarrollo del currículum de matemáticas en Educación Primaria

Actividad investigadora: Habilidades de visualización y pensamiento funcional en estudiantes con talento matemático.

Proyecto de Investigación

El proyecto investigador responde al perfil de la plaza relativo a habilidades de visualización y pensamiento funcional en estudiantes con talento matemático. En este capítulo se presenta el proyecto de investigación. Para ello primero introducimos algunos aspectos de la trayectoria investigadora personal que apoyan el punto de partida de este proyecto. Posteriormente se presenta la justificación desde el punto de vista de la investigación actual en Didáctica de la Matemática y se matizan los referentes teóricos. Finalmente se desarrolla el proyecto de investigación con la metodología y las contribuciones esperadas.

Previamente a mostrar la pertinencia de la investigación sustentada en la investigación en Didáctica de la matemática, vamos a exponer distintos aspectos de la trayectoria de investigación de un grupo de profesores que aportan ideas para la perspectiva y viabilidad del proyecto que se plantea.

TESIS DOCTORAL

En mi tesis doctoral, (Ramírez, 2012) se analiza el uso de la visualización de un grupo de veinticinco alumnos, con edades comprendidas entre 13 y 15 años, que participan en el proyecto ESTALMAT para la estimulación del talento matemático. En la investigación se analiza la visualización mediante herramientas piscométricas (factor

E del test PMA, factor SR del DAT5 y versión APM del test de inteligencia general de Raven) y mediante el análisis de un experimento de enseñanza llevado a cabo en tres sesiones de enriquecimiento curricular. En las conclusiones, se destaca que:

- Tanto en los test de capacidades como en el de inteligencia general, los alumnos con talento matemático obtienen una puntuación significativamente superior a la obtenida por los alumnos de un grupo control
- El análisis retrospectivo de los datos muestra que no se evidencia relación entre la capacidad visual manifestada en los test por los alumnos con talento matemático y el uso de la visualización registrado en el experimento de enseñanza
- Las actividades de argumentación, especialmente en grupos reducidos, favorecen la manifestación de las habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático estudiados.

En el apartado de futuras líneas de investigación, entre otras muchas, se planteaban diferentes cuestiones de interés:

- *¿Qué papel desempeñan los demás elementos que componen la visualización (imágenes, procesos y representaciones externas) en la manifestación de estas habilidades?*
- *¿Qué papel ocupa en la caracterización del talento matemático la capacidad visual que manifiestan en los test? ¿Y la que manifiestan en las tareas matemáticas específicas?*

En relación a la visualización, en los últimos años, dentro del grupo Fqm-193 se ha avanzado en la conceptualización de sentido matemático y, particularmente en las componentes del sentido espacial (Flores et al., 2015), especialmente en su inclusión dentro de los planes de formación del profesorado en Educación Primaria. La organización de los elementos que caracterizan el sentido espacial se ha enriquecido respecto a la caracterización utilizada en el momento de realización de la tesis y aportan nuevas ideas para comprender la relación, ahora, entre talento matemático y sentido espacial.

En la tesis, los resultados se centraban específicamente en las habilidades de visualización que son una componente transversal que "fortalece" la conexión entre el resto de componentes del sentido espacial, más específicas de los conocimientos geométricos (propiedades, definiciones, relaciones geométricas, movimientos…). Consideramos pertinente ahora avanzar en una pregunta de investigación más genérica: ¿Qué papel desempeña el sentido espacial (y no sólo la visualización) en la caracterización del talento matemático?

Antes de abordar esta pregunta, vamos a matizarla con los resultados obtenidos en varios proyectos de investigación que han avanzado en esta línea.

PROYECTOS I+D+I

Varios proyectos de investigación I+D+I en los que he participado han avanzado en esta temática, inicialmente de un modo separado.

Por un lado, en colaboración con investigadores de distintas universidades liderados desde la Universidad de Valencia por Ángel Gutiérrez, Luis Puig y Bernardo Gómez he participado en tres proyectos que compartían un interés común en la atención a los estudiantes con alta capacidad matemática: *Modelos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas: análisis racional y empírico* (2018-2020, EDU2017-84377-R), *Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas: análisis multidimensional* (2016-2017, EDU2015-69731-R) y *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (2013-2016, EDU2012-37259). En estos proyectos se han diseñado y analizado tareas ricas para atender a los estudiantes de alta capacidad matemática, especialmente en trabajo colaborativo, y se han abordado objetivos como "Observar y analizar a estudiantes de altas capacidades matemáticas para caracterizar sus procesos de razonamiento y aprendizaje". En distintos resultados de estos proyectos se han establecido relaciones entre marcos teóricos asociados a la visualización y a la demanda cognitiva (Gutiérrez et al., 2018). En el contexto de talleres de demostración, se ha indagado en el papel que la visualización y del uso del lenguaje algebraico tienen en la resolución de problemas aritméticos y geométricos.

Por otro lado, dentro del grupo Fqm-193 de Pensamiento numérico y algebraico de la Universidad de Granada se ha consolidado un equipo de investigación en Pensamiento funcional, liderado por las investigadoras María Cañadas y Marta Molina. En el seno de los proyectos de investigación, *Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico* (2014-2017, EDU2013-41632-P) y *Pensamiento funcional en educación primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización* (2017-2020, EDU2016-75771P), se ha avanzado en la caracterización del pensamiento funcional y, entre otros, se han abordado el objetivo de "Describir el pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes españoles de los diferentes cursos de educación primaria". En una de las líneas de trabajo se han realizado investigaciones asociadas al talento matemático (Damián, 2020; Ramírez y Cañadas, 2008; Ureña et al., 2019), indagando en la relación entre pensamiento funcional y talento matemático y realizando experimentos de enseñanza con estudiantes de un programa de enriquecimiento.

Las investigaciones de ambos proyectos permiten comprender el talento matemático en facetas concretas. En este punto, consideramos pertinente "conectar" los aportes de los trabajos para enriquecer la inicial pregunta de investigación: *¿Qué papel desempeña la conexión entre el sentido espacial y el pensamiento funcional en la caracterización del talento matemático?*

Para abordar esta pregunta y concretarla en diferentes fases de investigación, consideramos relevante y necesario contextualizar este proyecto investigador en un trabajo colectivo.

FQM-193 Y DIDGEOMAACC

Este proyecto pretende conectar el trabajo de dos grupos de investigación consolidados en el ámbito de la Didáctica de la Matemática y contextualizándolo como una continuación de lo aportado por estos grupos en los últimos años.

Por un lado, el grupo Fqm-193 dirigido actualmente por María C. Cañadas y anteriormente por Luis Rico y Enrique Castro, está reconocido por el plan andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación. Pertenece a nivel nacional al grupo "Pensamiento numérico y Algebraico" de la SEIEM y tiene como objetivo principal comprender la naturaleza del pensamiento matemático, de su enseñanza y de su aprendizaje, y usar tal conocimiento en la práctica para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Algunos de los elementos de sus líneas de investigación extraídos de la web del grupo están relacionados con nuestra pregunta de investigación: los avances sobre el alcance y la delimitación conceptual de lo que significa ser competente en matemáticas; indagar sobre las representaciones externas e internas que intervienen en los procesos de aprendizaje de conceptos, procedimientos, resolución de problemas, actitudes y metacognición en matemáticas; y profundizar sobre los contenidos matemáticos, particularmente sobre las estructuras numéricas, las estructuras algebraicas.

Por otro lado, desde la Universidad de Valencia y dirigido por Ángel Gutiérrez, el Grupo de investigación en didáctica de la geometría y en enseñanza a estudiantes de altas capacidades matemáticas –DIDGEOMAACC (GIUV2013-095)- se centra en dos grandes líneas de investigación: 1) Didáctica de la geometría: Análisis de los problemas didácticos de enseñanza y aprendizaje de la geometría desde Educación Primaria hasta la Universidad. Investigación en enseñanza y aprendizaje de la demostración en matemáticas y 2) Atención a estudiantes de altas capacidades matemáticas: Variables didácticas relevantes en su enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el seno de ambos grupos de investigación se han defendido tesis doctorales relativas al talento matemático, la visualización y el pensamiento funcional. En el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada distintas tesis han abordado aspectos relativos a la caracterización del talento matemático en la resolución (Benavides, 2008) e invención de problemas (Espinoza, 2018), pero los aspectos geométricos y visuales se han abordado en el contexto de maestros en formación (Ruiz, 2010). En relación al pensamiento funcional, Morales (2018) analiza tareas que involucran patrones en estudiantes de 6-7 años y Pinto (2019) aborda la generalización de estudiantes de tercero a sexto de Educación Primaria (8-12 años), en el contexto del álgebra escolar. En la Universidad de Valencia, la tesis de Benedicto (2018) diseña y aplica un instrumento para valorar la demanda cognitiva en el caso de las alta capacidades.

Entre los avances relativos a la operativización de las componentes del sentido espacial se han realizado diferentes trabajos fin de máster en investigación en Didáctica de la Matemática. Algunos de estos trabajos se han focalizado en la descripción de las habilidades de visualización en tareas de patrones geométricos (Alba, 2012) o juegos de espejos (Salto, 2013). Aznarte (2018) utiliza las componentes del sentido espacial para analizar una tarea de pensamiento funcional utilizada en una prueba de detección del talento matemático (Ramírez y Cañadas, 2018). Aunque en el contexto de un trabajo fin de máster del Máster del profesorado, Serrano (2015), utiliza esta operativización para analizar el sentido espacial en las lecciones de un libro de texto. Roura (2020) utiliza también las componentes del sentido espacial en el contexto de la formación de profesores y analiza tanto la resolución como el análisis de las componentes en una tarea para desarrollar el sentido espacial en los estudiantes. En su tesis doctoral en realización, Cruz analizó las componentes del sentido espacial para describir los ítems de un test de capacidad visual (Cruz y Ramírez, 2018). Los resultados de estos trabajos refuerzan la idea de que la descripción de las componentes del sentido espacial junto con la componente transversal de la visualización, entendida según el marco de Gutiérrez (1996), resulta operativa para analizar el sentido espacial en diferentes ámbitos.

Por otro lado, la idea de generalización de la relación funcional y la representación se ha abordado en otros trabajos fin de máster también en el seno del máster de Didáctica de la Matemática. Ureña (2017) delimita unas categorías para describir la generalización, la representación de la generalización y la utilización de estímulos para favorecer la generalización. Gámez (2019) abordó la influencia en las representaciones de generalización en un periodo de instrucción para introducir el lenguaje algebraico en el pensamiento funcional. Los resultados de estos trabajos muestran el potencial de los estudiantes de primaria para reconocer las relaciones funcionales y resaltan el papel de la instrucción en la forma de representación. La evolución de estos trabajos lleva a Damián (2020) a conectar el pensamiento funcional con elementos geométricos y se abordan en su trabajo las relaciones funcionales de variables continuas en un entorno geométrico. Las investigaciones se han realizado con estudiantes de un programa de enriquecimiento curricular y han permitido identificar algunas dificultades para establecer relaciones funcionales con variables geométricas.

Ureña analiza la misma tarea de detección del talento (Ramírez y Cañadas, 2018) desde el punto de vista del pensamiento funcional, las estrategias y representación de la generalización (Ureña et.al., en prensa). La investigación analiza las diferencias entre estudiantes que han recibido instrucción en el uso del lenguaje algebraico y los que no. Los primeros resultados muestran que las principales diferencias se encuentran en la representación utilizada, pero no en la utilización de estrategias funcionales. Relacionar los resultados del análisis de los trabajos de Ureña y de Aznarte sobre la misma tarea puede aportar información del papel que el sentido espacial, el pensamiento funcional y la conexión entre ambos ha desempañado en la detección del talento matemático.

El marco teórico sobre visualización de Ángel Gutiérrez (1996) es un referente a nivel internacional y consideramos enriquecedor relacionarlo con las componentes de sentido espacial que se están matizando en los trabajos de la Universidad de Granada. Por otro lado, la investigación sobre pensamiento algebraico dentro del grupo Fqm-193 ha dado lugar recientemente a resultados novedosos sobre pensamiento funcional. Consideramos pertinente abordar nuestra problemática de investigación en el contexto de ambos grupos de investigación. Para establecer el punto de partida sobre el que establecer la conexión, sintetizo los aportes de dos estancias relacionadas con estos grupos de investigación

Los trabajos del grupo DIDGEOMAACC han aportado resultados destacables para identificar formas de trabajar o de razonar en matemáticas de estos estudiantes con talento matemático, observando sus características específicas y cómo difieren de las del resto de estudiantes. Se ha realizado un seguimiento a alumnos de altas capacidades matemáticas en talleres de demostración matemática y se ha avanzado en la determinación de unas categorías de análisis para estudiar la evolución relativa a la capacidad de justificación y demostración de los estudiantes. Desde el punto de vista teórico, se han establecido conexiones entre los marcos teóricos asociados al talento matemático y a la demostración matemática. Desde el punto de vista experimental, se ha identificado el tipo de demostración utilizado, estableciendo el papel de cada uno de ellos, su dependencia y las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes. Se ha avanzado en el conocimiento de los aspectos cognitivos que caracterizan el talento matemático, especialmente la visualización y la generalización. Una de las líneas de análisis es el uso del lenguaje algebraico y de la visualización en un taller sobre demostración para estudiantes de primer curso de enseñanza secundaria en un entorno online. Se ha avanzado en el establecimiento de las categorías de análisis a partir de los procesos cognitivos asociados a la visualización y la caracterización del talento matemático. Pese a su mayor competencia matemática, los estudiantes con talento matemático de los primeros cursos de educación secundaria han mostrado dificultades en el uso de lenguaje algebraico para representar relaciones entre variables. Pese a que en la literatura de investigación se ha señalado su preferencia por los métodos algebraicos frente a los visuales, el uso de estrategias visuales favoreció un mayor rendimiento en la tarea. Estos trabajos han aportado resultados destacables sobre el uso del álgebra en tareas ricas tanto en contextos aritméticos como geométricos.

Dentro del contexto de pensamiento funcional, mi estancia en Tufts University (Boston, USA) con Bárbara Brizuela me permitió colaborar en proyectos que se están llevando a cabo actualmente en dicha Universidad, específicamente “Early Algebra” y “Children´s Mathematical Representations”. Durante la estancia se avanzó en la delimitación de un marco teórico que caracterice los procesos cognitivos implicados en la generalización de la relación funcional y se diseñaron y validaron instrumentos para la recolección de datos con este fin. En este periodo se analizaron los datos recogidos en un experimento de enseñanza de estudiantes de 4º de Educación Primaria en España (Ramírez et al., 2020a) y de estudiantes de *Kindergarten y Grade 1* americanos (Ramírez et al., 2020b). La investigación abordó los procesos de generalización tanto en pensamiento funcional como en aritmética generalizada en los primeros cursos de Educación Primaria. Los resultados muestran el potencial desde infantil para generalizar propiedades aritméticas como la conmutativa y representarlas utilizando lenguaje algebraico, contrastan con las dificultades observadas en el uso de lenguaje algebraico para representar relaciones entre variables en los primeros cursos de educación secundaria, incluso en estudiantes con talento matemático.

En este contexto se demandan estudios que caractericen los procesos cognitivos específicos con los que los estudiantes establecen la relación funcional, específicamente la generalización a partir de los casos particulares, y el papel de la instrucción en la representación utilizando lenguaje algebraico. En este sentido, creemos novedoso conectar los marcos teóricos asociados al *early algebra* y el sentido espacial, concretamente en los aspectos cognitivos asociados a la generalización: identificación de las relaciones entre variables y la representación de la relación funcional. Veremos que en la literatura de investigación se demandan aportaciones para caracterizar los estudiantes "armónicos" que resultan los más eficaces al conjugar sus capacidades espaciales y algebraicas en la resolución de problemas. Algunos aspectos de esa "armonía" se han investigado en estudiantes con una mayor competencia matemática.

De trayectoria de estos grupos de investigación destacamos:

La conexión de los resultados obtenidos en los tres ámbitos (sentido espacial, pensamiento funcional, talento matemático) puede aportar información relevante en los respectivos marcos teóricos.

La generalización tiene un papel destacado en tres de los ámbitos tratados en las líneas de investigación citadas anteriormente: caracterización del talento matemático, identificación de la relación funcional y uso del sentido espacial en tareas de argumentación, entre otras. La conexión entre las tres perspectivas desde las que se abordan en los diferentes ámbitos puede aportar riqueza desde el punto de vista de la investigación para caracterizar las estrategias para generalizar, representar la generalización y utilizarla en la resolución de problemas en diferentes contextos (por ejemplo, modelización y argumentación). Indagar en esta conexión puede abordar preguntas como las siguientes:

¿Qué papel desempeña el sentido espacial y el pensamiento funcional en otras características del talento matemático, especialmente en lo relativo a la generalización?

¿De qué modo la "armonía" entre sentido espacial y pensamiento funcional (como parte del pensamiento algebraico) fortalece el talento matemático y determinadas competencias como argumentar o modelizar?

¿Qué hay de cierto en la "ecuación":

Sentido espacial + pensamiento algebraico = Mayor competencia matemática?

Hasta ahora hemos mostrado el interés de la investigación basándonos en la continuidad de dos consolidados grupos de investigación, especialmente con la perspectiva de entrelazar los resultados obtenidos. Vamos ahora a justificar el proyecto de investigación para dar respuesta a una línea de interés en Educación Matemática a partir de la revisión de la literatura de investigación y el reconocimiento de referentes en la comunidad investigadora.

JUSTIFICACIÓN

Para mostrar la pertinencia de la investigación, vamos inicialmente a presentar algunos de los planteamientos de investigadores relevantes en el área y grupos de trabajo en foros internacionales. En 1976, Krutetskii publica una investigación, que aún hoy, sigue siendo una referencia en los estudios sobre talento y, en nuestro caso, en la relación entre aspectos relacionados con la visualización y el álgebra. Bishop (1980), en una revisión considerada como uno de los cimientos para la investigación sobre habilidades espaciales y visualización (Presmeg, 2008), resalta en esta contribución las conexiones entre las habilidades espaciales y las matemáticas y documentar varios casos de alumnos, con buen rendimiento en matemáticas, que usaron predominantemente las ideas espaciales en la resolución de problemas. Estudios anteriores mostraban que las puntuaciones en test de álgebra y geometría eran relativamente independientes, pero que ambas estaban influenciadas por lo que podría llamarse una habilidad matemática general. A partir de una recopilación de componentes de las habilidades matemáticas que caracterizan el pensamiento matemático, Krutetskii caracteriza el talento matemático a partir de las siguientes habilidades:

- Habilidad para percibir la estructura formal de un problema
- Habilidad para utilizar en el pensamiento lógico las relaciones cuantitativas y espaciales, números y símbolos
- Habilidad para pensar en símbolos matemáticos
- Habilidad para generalizar rápida y ampliamente los objetos matemáticos, sus relaciones y sus operaciones
- Habilidad para abreviar los procesos de razonamiento matemático y el sistema de las operaciones correspondientes
- Flexibilidad de los procesos mentales que usan en la actividad matemática
- Interés por clarificar, simplificar, economizar y racionalizar las soluciones
- Reversibilidad de los procesos mentales de razonamiento
- Memoria matemática (para retener las relaciones matemáticas, las características, las estrategias de los argumentos y las demostraciones, los métodos de resolución de problemas y los principios de planteamientos)
- Mentalidad matemática.

Sin embargo, considera componentes no obligatorias en la estructura del talento matemático:

- Rapidez de los procesos mentales
- Habilidad computacional (habilidad para cálculos rápidos y precisos)
- Memoria para símbolos, números y fórmulas
- Habilidad para los conceptos espaciales
- Habilidad para visualizar relaciones matemáticas abstractas.

Una de las consideraciones del trabajo es la alta correlación obtenida entre la habilidad para visualizar relaciones matemáticas abstractas y la habilidad para conceptos espaciales geométricos. Según los resultados, clasifica a los estudiantes en analíticos, geométricos o armónicos, según el procedimiento utilizado en la resolución de las tareas. Estas categorías habían sido señaladas por otros autores como Hadamard, Menchinskaya, Poincaré, Richardson y Walter (Lean y Clements, 1981). De 34 alumnos con talento estudiados, seis son del tipo analítico, cinco geométricos y veintitrés armónicos. A partir de estas caracterizaciones, Krutetskii distingue tres tipos de talento matemático (Ramírez, 2012):

- Analítico, fuerte componente lógico-verbal predominante sobre una débil componente visual-pictórica. Conceptos espaciales bajos. No puede usar soporte visual para resolver problemas y no siente necesidad de soporte visual
- Geométrico, fuerte componente pictórica-visual predominante sobre la media componente lógica-verbal. Los conceptos espaciales son buenos, puede usar soporte visual en la resolución de problemas y los siente como necesarios
- Armónico, fuerte componente lógico-verbal y fuerte componente visual-pictórica en equilibrio. Conceptos espaciales buenos. Hay dos subtipos:
- Armónico abstracto, puede usar soporte visual en resolución de problemas, pero prefiere no hacerlo
- Armónico pictórico, puede usar suporte visual en resolución de problemas y prefiere hacerlo.

Esta caracterización del "equilibrio", sugiere una perspectiva de la enseñanza de la geometría en estrecha relación con otras áreas matemáticas. Por ejemplo, en un documento de discusión para el estudio del ICMI sobre las perspectivas de la enseñanza en la Geometría del siglo XXI (Mammana y Villani, 1998), se marcaba como propósito relevante para la enseñanza de la geometría, además de para describir e interpretar el mundo real y sus fenómenos, utilizarla como herramienta para otras áreas de las matemáticas. Estos autores señalan que parece que hay una tendencia a la enseñanza de métodos analíticos en los primeros años a expensas de otros aspectos geométricos (como los sintéticos). La geometría analítica se supone que presenta modelos algebraicos para situaciones geométricas. Pero, tan pronto como los estudiantes son introducidos en estos nuevos métodos, ellos son proyectados a un nuevo mundo de símbolos y cálculos en los que la conexión entre situaciones geométricas y sus modelos algebraicos se rompen y las interpretaciones geométricas o los cálculos numéricos son con frecuencia olvidadas. Por lo tanto, ¿qué actividades, métodos y marcos teóricos pueden ser usados para restaurar la conexión entre representación algebraica del espacio y las situaciones geométricas que simbolizan?

En este sentido, Duval (1998) plantea que la geometría supone tres tipos de procesos cognitivos: visualización (representación del espacio), construcción (de configuraciones que pueden ser modelos) y razonamiento en relación al proceso discursivo. La información recibida y organizada visualmente debe ser procesada en un nivel representacional y simbólico. Pero los registros puramente simbólicos o en lenguaje natural puede que no tengan los mismos significados ni dificultad para los estudiantes. El autor señala que la enseñanza de la geometría es más compleja y menos exitosa con frecuencia que enseñar operaciones aritméticas o álgebra elemental. Bishop (1983) se cuestionaba si el proceso de visualización que envuelve visualización y la traslación de relaciones abstractas y no figural información en términos visuales, se puede enseñar y, ¿si se hace con geometría, se transfiere a la aritmética o al álgebra?

Esta conexión entre el pensamiento geométrico y el analítico o el algebraico ha sido abordada por los investigadores con distintos resultados. Lean y Clements (1981) concluyen en su estudio con 116 estudiantes que la habilidad espacial y el conocimiento de convenciones espaciales no tienen gran influencia en el rendimiento matemático, y los alumnos que prefieren métodos de procesamiento lógicos-verbales superan a los estudiantes más visuales en los test matemáticos y espaciales. Distinguen entre visualizadores (individuos que habitualmente emplean "imaginería" visual o notación pictórica cuando intentan resolver problemas), los verbalizadores (aquellos que tienen a usar códigos verbales en vez de imágenes visuales o notaciones pictóricas) y mixtos (no tienen tendencia a preferir el modo visual o verbal).

Otra investigadora referente en el campo de la visualización, señala que los estudios muestran que son minoritarios los alumnos "visualizadores" (prefieren el uso de métodos visuales para resolver problemas que pueden ser resueltos tanto por métodos visuales como por otros métodos) entre los de un nivel matemático destacado y en su investigación discute el efecto que producían sobre alumnos visualizadores los modos cognitivos, actitudes y acciones de sus profesores de matemáticas (Presmeg, 1986). Para Presmeg un *método visual* de resolución es el que involucra como parte esencial imágenes visuales, con o sin diagramas, aunque también involucre razonamiento o métodos algebraicos. Presmeg (2008) afirma que sus estudios confirman que los estudiantes de secundaria podrían clasificarse según la fortaleza de la lógica y la preferencia visual.

Del grupo de trabajo *Representations and mathematics visualization* (Hitt, 2002), destacamos un estudio relacionado con rendimiento matemático en el que Stylianou y Pitta-Pantazi (2002) afirman que los alumnos de bajo rendimiento parecen utilizar imágenes descriptivas de objetos reales y acciones y tienen dificultad para verlas como objetos matemáticos con las que ellos puedan operar. Sin embargo, los estudiantes de alto rendimiento se esfuerzan en encontrar conexiones entre las imágenes visuales y los símbolos que usan en su experimentación.

En una completa revisión de los trabajos presentados en los PME relativos a visualización, Presmeg (2006b) comenta las dificultades que tienen los alumnos para utilizar las imágenes en su razonamiento analítico, encontrando pocos artículos que hayan mostrado evidencias empíricas para sugerir qué aspectos de la instrucción pueden ayudar a los profesores a usar la visualización y qué aspectos podrían ayudar a superar las dificultades y hacer un uso óptimo de la potencia del proceso visual. De las trece grandes cuestiones que plantea para futuras investigaciones sobre visualización destacamos: ¿Qué aspectos culturales de la enseñanza promueven que los alumnos usen pensamiento visual eficaz en matemáticas? ¿Cuánta visualización debe ser puesta en juego para promover la abstracción y generalización matemática?

En encuentros más recientes (ICME en 2017), en los grupos de trabajo relacionados con la enseñanza de la geometría (Teaching and Learning of Geometry) (Cheah et al., 2017) se sigue marcando como foco de interés la conexión entre la geometría y el estudio de otras ramas de las matemáticas, y la conexión entre la geometría y otras prácticas matemáticas como la argumentación, la demostración y la visualización, entre otras.

Aunque abordados de manera separada en los capítulos relativos a la enseñanza de la geometría, del análisis y del álgebra, el sentido espacial y el pensamiento funcional son temas actuales de investigación y aparecen en las líneas futuras que marcan relevantes revisiones de investigación, como por ejemplo *The second handbook of research* *on the psychology of mathematics education: The journey continues* (Gutiérrez et al., 2016). En el capítulo de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría (Jones y Tzekaki, 2016), aparecen el razonamiento geométrico y el razonamiento espacial en dos de las secciones en las que se organiza la revisión de las investigaciones. Los autores de la revisión señalan la relevancia de los trabajos en relación al conocimiento geométrico de los estudiantes y demandan una sistematización en los trabajos que intentan conectar ideas geométricas claves del currículo con otros ámbitos matemáticos, como son el razonamiento espacial, visualización, demostración o uso del lenguaje. En esta línea se dirige nuestra propuesta de operativización del sentido espacial y su conexión con la representación algebraica al abordar tareas de generalización.

Por otro lado, Hitt y González-Martín (2016) en el capítulo relativo a generalización, covariación, funciones y cálculo, también señalan que en los últimos años un gran número de investigaciones se han focalizado en la idea de generalización relativa a la variación entre cantidades en educación primaria. Los autores señalan que emerge una nueva era de investigación focalizada en los procesos de conversión entre representaciones, relacionando la visualización como una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica, citando los trabajos de Duval (1999) y Presmeg (2006a). En este sentido señala el potencial de la investigación en visualización y representaciones para hacer conexiones con otras formas de expresar las matemáticas, como el lenguaje y los gestos.

Temas relativos al pensamiento funcional como la concepción de variables y el desarrollo de la capacidad de generalizar y expresar la generalización se abordan en el capítulo relativo a la investigación sobre aprendizaje y enseñanza del álgebra (Warren et al., 2016). Los autores de la revisión marcan como línea futura de investigación el cómo ayudar a los estudiantes a desarrollar su lenguaje matemático y sus capacidades visuales y que ellos progresen a lo largo de los años de educación elemental. En la revisión mostrada, los trabajos de Rivera y colaboradores (Becker y Rivera, 2007; Rivera, 2013) sugieren que los estudiantes deben coordinar dos habilidades, su habilidad perceptual y su habilidad inferencial simbólica y señalan las dificultades para moverse desde un sistema representacional a otro, como desde las figuras a las formas algebraicas que describen las relaciones entre las figuras.

En relación al talento matemático, un tema de interés en la investigación es diseñar herramientas no psicométricas para reconocer las características de estos estudiantes (Pfeiffer y Blei, 2010; Pitta-Pantazi y Christou, 2009; Singer et al., 2016) y la vigencia de interés se refleja en encuentros internacionales, como es el grupo *Activities in program-*

mes for gifted students en el ICME (International Conference of Mathematical Education) o *International Conference on Mathematical Creativity and Giftedness.*

A la vista de lo anterior se ha resaltado la importancia de investigar en estos tres ámbitos y de establecer ciertas conexiones entre ellos. Para abordar esta conexión desde la perspectiva de la alta capacidad matemática nos basaremos en una de las conclusiones tras la completa revisión mostrada por Jaime y Gutiérrez (2017) en la conferencia impartida en la SEIEM:

La identificación de estudiantes con alta capacidad matemática está en sus comienzos. Dejando aparte el estudio de Krutetskii (1976), que en la actualidad sería muy difícil de llevar a cabo debido a su complejidad y larga duración, los estudios sobre identificación se han centrado en contenidos matemáticos específicos (por ejemplo, pensamiento multiplicativo, geometría, visualización o pre-álgebra) y se han basado en unos conjuntos de problemas que son adecuados para unos cursos concretos de Primaria o Secundaria. Estos instrumentos producen resultados parciales, a veces discrepantes, que sólo muestran la capacidad de estudiantes en un área matemática limitada. Es necesario organizar un proyecto de investigación más amplio y ambicioso que dé lugar a herramientas válidas y fiables, que cubran todo el espectro de las matemáticas escolares y, en lo posible, una mayor amplitud de cursos (p. 84).

Coincidiendo plenamente con los autores, intentaremos que este proyecto de investigación cubra alguna de estas expectativas en lo relativo a conectar distintas áreas de las matemáticas, especialmente en la Educación Primaria. Además de algunos de los estudios mostrados anteriormente, presentamos una revisión de la literatura en relación a la conexión entre estos aspectos.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

Abordamos la relevancia de la "armonía" con una doble perspectiva. Por un lado, la riqueza de poseer un equilibrio entre las componentes lógico-verbales y pictórica-visual que le permita usarlas indistintamente en la resolución de problemas. Por otro lado, el potencial para abstraer y generalizar que puede aportar el pensamiento algebraico al sentido espacial.

Hershkowitz et al. (1996) discuten tres perspectivas acerca de los posibles roles de forma y espacio: 1) Interactuar con formas reales en el espacio, 2) forma y espacio son ingredientes fundamentales para construir una teoría, 3) formas o representaciones visuales para comprender mejor conceptos, procesos y fenómenos en diferentes áreas de las matemáticas y las ciencias.

En relación a esta comprensión, Battista (2007) señala que el aprendizaje ocurre a través de un ciclo recursivo de fases de acción (físicas y mentales), reflexión y abstracción en una forma que permite desarrollar modelos mentales más sofisticados. La abstracción perceptual es uno de los niveles de abstracción junto con la internalización, interiorización y un segundo nivel de interiorización. Tres formas especiales de abstracción son fundamentales en el aprendizaje geométrico y razonamiento: estructuración espacial (acto mental de construir y abstraer una organización o forma para un objeto o conjunto de objetos), modelos mentales (conjuntos de abstracciones que son integradas para formar representaciones mentales no verbales que son activadas para interpretar y razonar acerca de situaciones) y esquema como una secuencia organizada de acciones y operaciones que han sido abstraídas desde la experiencia y pueden ser aplicadas en respuesta a circunstancias similares.

El aporte de la visualización va más allá del contexto geométrico. La visualización permite crear imágenes mentales ricas que el individuo puede manipular mentalmente y puede transitar por diferentes representaciones del concepto (Hitt et al., 2008). Zimmermann y Cunningham (1991) destacan un aspecto esencial, señalado por otros autores y que se refiere a la capacidad de las imágenes de transportar conceptos, ideas y significados. Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil de imaginar un curso exitoso que no enfatice los elementos visuales del tema, especialmente si el curso tiene la intención de tratar un entendimiento conceptual (Zimmermann y Cunningham 1991).

Usiskin (1987) incluye el aspecto formal, y describe cuatro dimensiones para la geometría: a) visualización, dibujo y construcción de figuras, b) estudio de los aspectos espaciales del mundo físico, c) uso como un vehículo para representar conceptos matemáticos no visuales y relaciones y d) representación como un sistema formal matemático. Las tres primeras requieren del uso de razonamiento espacial. El simbolismo algebraico es relevante en la estructura axiomática de las Matemáticas y por tanto es fundamental para avanzar en los niveles de Van Hiele y llegar a desarrollar deducciones geométricas (Gutiérrez y Jaime, 1991).

Este papel del algebra es destacado por Noss et al. (1997) en su idea de "abstracción situada". La formulación algebraica está con frecuencia desconectada de la actividad que la precede, un sinsentido extra que no ilumina el problema ni aporta un significado para validar la solución. El álgebra está vista como un punto final, una solución al problema en sí misma en vez de una herramienta para resolver el problema. Los autores señalan que una prioridad central en la investigación es ayudar a los estudiantes a construir conexiones en la construcción de los significados matemáticos.

Así, la geometría permite poner en juego convicciones que provienen del entorno que percibe el estudiante, mientras que el álgebra puede proporcionar herramientas para abordar esos problemas (Douady y Parzysz, 1998). Estos autores señalan que los estudiantes deberían explotar su conocimiento y habilidades numéricas y algebraicas, deberían ser capaces de usar su percepción geométrica y su práctica gráfica y permitir que estos dominios interactuasen durante su trabajo. Los problemas que favorezcan esta conexión deben poder ser formulados con sus diferentes formas de expresiones simbólicas y representaciones.

Zazkis et al. (1996) establecen una propuesta para superar la dicotomía visualizador/analítico y marcan consideraciones pedagógicas para que los estudiantes coordinen su pensamiento analítico y visual. A partir de su estudio con 32 estudiantes del primer curso de álgebra abstracta con el problema del grupo diédrico D4, proponen un modelo alternativo "visualizer/analyzer". Este método supone que la visualización y el análisis dependen mutuamente en la resolución de problemas intercalando en forma de hélice las dos formas de pensamiento que se aproximan cada vez más. El acto de visualización se completa con el de análisis, vuelve a la visualización, que ha cambiado por el análisis y así sucesivamente.

Ben-Chaim et al. (1989) resaltan la reflexión de Werdelin (1961) en la que afirma que es importante que los estudiantes desarrollen flexibilidad mental para usar ambas estrategias (analíticas y visuales). Los estudiantes con esta flexibilidad son mejores resolutores de problemas. Sheckels y Eliot (1983) concluye que el éxito en problemas matemáticos está relacionado con la habilidad de los estudiantes para relacionar verbal y espacialmente información visual y emplearla y trabajar con conceptos visuales e ilustraciones. Van Garderen y Montague (2003) indican que los alumnos con talento usan significativamente más representaciones visuales esquemáticas (el tipo más sofisticado de imaginería, para representar las relaciones espaciales entre las partes del problema, incluyendo transformaciones espaciales) que el resto de los grupos y que los estudiantes con dificultades de aprendizaje usan más representaciones pictóricas. El éxito en la resolución de problemas correlaciona positivamente con el uso de representaciones esquemáticas y negativamente con el uso de representaciones pictóricas.

McKim (1972) llamó pensamiento ambidiestro al equilibrio entre modos visuales y verbales y, aunque hay una correlación entre el tipo analítico y el éxito en el aprendizaje del álgebra y el tipo geométrico en el aprendizaje de la geometría, los tipos que representan modos de pensamiento son independientes de las disciplinas. Veamos a continuación esta conexión entre la geometría y el álgebra en algunos documentos curriculares de referencia.

Revisión curricular

En el principio de aprendizaje (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), se enfatiza que ser competente en un campo complejo como el matemático supone tener habilidad para usar los conocimientos con flexibilidad, y aplicar con propiedad lo aprendido en un contexto, a otro contexto. Si observamos los estándares para álgebra y geometría de la etapa Pre-K-2, esta flexibilidad implicaría establecer conexiones entre lo requerido en álgebra y geometría, como por ejemplo, "Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales" y "Relacionar ideas geométricas con ideas numéricas y de medida". La Tabla 1 motiva una comparativa de los estándares de Álgebra y Geometría para la etapa Pre-K-2.

Tabla 1. Posibles conexiones en los Estándares de Álgebra y Geometría para la Etapa Pre-K-2

Álgebra	Geometría
Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades	Reconocer, dar nombre, construir, dibujar, comparar y clasificar figuras de dos y tres dimensiones
Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencia de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar a de una representación a otra	Describir los atributos y los elementos de figuras de dos y tres dimensiones Investigar y predecir los resultados de juntar y separar figuras de dos y tres dimensiones
Analizar cómo se generan patrones de repetición y crecimiento	
Ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números	Describir, dar nombre e interpretar posiciones relativas en el espacio y aplicar ideas sobre posición relativa
Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales	Describir, dar nombre e interpretar la dirección y la distancia en los desplazamientos en el espacio y aplicar estas nociones Encontrar y denominar "lugares" con relaciones simples como "cerca de" y en sistemas de coordenadas tales como mapas
Modelizar situaciones relativas a la adición y	

Álgebra	Geometría
sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos Describir cambios cualitativos, como "ser más alto" Describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año	Reconocer y aplicar traslaciones, reflexiones y giros Reconocer y crear figuras que tengan simetrías Crear imágenes mentales de figuras geométricas usando la memoria y la visualización espacial Reconocer y representar figuras desde diferentes perspectivas Relacionar ideas geométricas con ideas numéricas y de medida Reconocer formas y estructuras geométricas en el entorno, y determinar su situación

Además de los estándares de contenidos (Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y Probabilidad), la idea de conexión se resalta explícitamente en los Estándares de procesos (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representación):

Estándar de Conexiones: Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas y en sus propios intereses y experiencias. Las matemáticas no son una colección de apartados o niveles separados, aunque con frecuencia se dividen y presentan así; constituyen más bien un campo integrado de estudio.

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar para:

- Reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas
- Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente
- Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.

Estándar de Representación: Es frecuente que representaciones diferentes aclaren distintos aspectos de un concepto complejo o de una relación. A lo largo de la educación matemática, debería hacerse hincapié en la importancia de usar múltiples representaciones.

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar para:

- Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas
- Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas
- Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Esta perspectiva también se enfatiza en los aspectos generales del área de matemáticas en la Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (Junta de Andalucía, 2015), donde se señala que la ciencia matemática se ocupa de describir y analizar las cantidades, el espacio y las formas, los cambios y relaciones, así como la incertidumbre (p. 219). El desarrollo del sentido numérico y de la simbolización algebraica, el estudio de las formas y sus propiedades, en especial las de nuestro entorno, y la interpretación de los fenómenos ambientales y sociales a través del tratamiento de la información y la probabilidad, completan la propuesta de contenidos para esta etapa educativa (p. 221).

En el Bloque de geometría se hace referencia a que "La geometría se presta a establecer relaciones constantes con el resto de los bloques" y, aunque no aparece un bloque específico para el álgebra, en el bloque de *"Procesos, métodos y actitudes matemáticas"* se señala que "a lo largo de la etapa se pretende que el alumnado sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones".

Es en los cursos de Primero y Segundo de ESO donde se introduce formalmente el álgebra, y también se podrían establecer conexiones en los contenidos y los criterios de evaluación como se muestra en la Tabla 2 elaborada a partir de la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía (Junta de Andalucía, 2016).

Tabla 2. Comparativa de algunos de los contenidos y criterios de evaluación para el primer ciclo de ESO

Álgebra	Geometría
Iniciación al lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos.	Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado expresar el procedimiento seguido en la resolución. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.
Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.	Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.). Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.

Una vez mostrada la pertinencia del abordar el proyecto tanto desde la investigación en Educación Matemática como en algunos documentos curriculares, vamos a exponer el marco teórico con algunos de los antecedentes más destacados.

MARCO TEÓRICO

Para abordar las preguntas de investigación, precisaremos los marcos teóricos que utilizaremos relativos a talento matemático, sentido espacial y pensamiento funcional.

Caracterización del talento matemático

Los términos talento matemático, alta capacidad matemática, sobredotación, etc. aparecen estrechamente relacionados y, en ocasiones, se llegan a considerar sinónimos (Mönks y Mason, 2002). Partimos de la definición de talento matemático como aquel que, en virtud de unas habilidades sobresalientes, es capaz de alcanzar este rendimiento en el ámbito matemático (Passow, 1993). Marland (1972) definía a los estudiantes talentosos como aquellos que en virtud de sus habilidades sobresalientes, eran capaces de obtener un alto rendimiento en cualquiera de las siguientes áreas, tanto separadamente como combinadas: habilidad intelectual general, habilidades académicas específicas, pensamiento creativo o productivo, liderazgo, artes visuales y escénicas y habilidades psicomotoras.

En esta definición se caracteriza a los estudiantes por poseer unas aptitudes, habilidades o capacidades por encima de la media en el ámbito específico de las matemáticas (Johnsen, 2004; Kaufman y Sternberg, 2010; Tannenbaum, 2003). Distintos autores han señalado diferentes caracterizaciones de estas habilidades (Davis et al., 2011; Freiman, 2006; Greenes, 1981; Miller, 1990, entre otros) que en esencia están relacionadas con la competencia de resolución de problemas: localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles y desarrolla estrategias eficientes.

En relación a la idea de conexión, Greenes (1981) identifica siete características a partir de situaciones particulares con niños de Primaria. Resaltamos dos especialmente:

- Habilidad para transferir ideas (para aplicar información aprendida en un contexto a un problema en otro contexto)
- Habilidad para generalizar. En el caso que analiza de Grado 6, observa que muestran preferencia por la representación oral más que la escrita.

Sentido espacial

En Educación Matemática, Arcavi (2003, p. 217), define: "Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión".

El marco teórico presentado por Ángel Gutiérrez en la conferencia plenaria del PME 19 (Gutiérrez, 1996) es reconocido por los expertos como integrador por unificar desarrollos teóricos elaborados hasta ese momento (Presmeg, 2006b) y permite operativizar la investigación en visualización, especialmente en el contexto geométrico. Así, Gutiérrez (1996) distingue cuatro elementos en la visualización:

- Imagen mental: tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos visuales o espaciales
- Representación externa: cualquier tipo de representación gráfica o verbal de conceptos o propiedades que incluye dibujos, esbozos, diagramas, etc., que ayudan a crear o transformar imágenes mentales y hacer razonamiento visual
- Procesos de visualización: acciones mentales o físicas en que están involucradas las imágenes
- Habilidades de visualización para realizar los procesos necesarios con imágenes mentales específicas para un problema dado.

Las representaciones externas son las manifestaciones físicas de un fenómeno, representaciones gráficas o verbales de conceptos o propiedades que incluyen dibujos, esbozos, diagramas, etc. y que ayudan a crear o transformar imágenes mentales y hacer razonamiento visual. Las imágenes mentales son representaciones estables que el sujeto hace de situaciones externas, atendiendo al menos a algunos elementos y características de la situación, son representaciones cognitivas de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos visuales o espaciales. Los procesos de visualización son las acciones mentales o físicas en que las que están involucradas las imágenes y que el sujeto emplea para transformar una representación externa en una imagen mental o para transformar y actuar con las imágenes mentales para incluirlas en sus razonamientos. Las habilidades de visualización son disposiciones estables del sujeto, desarrolladas a partir de la práctica, que le facilitan llevar a cabo procesos visuales.

Dentro de los grupos de investigación, un aspecto a destacar es el análisis de las habilidades de visualización, de las que se ha reconocido su importancia para el aprendizaje geométrico (Bishop, 1980; Hershkowitz, 1990). En la Tabla 3 se muestran las habilidades psicológicas enunciadas por Del Grande (1990), incluyendo su descripción para apreciarlas en los procesos de visualización con imágenes en geometría (Gutiérrez, 1992; 2006).

Tabla 3. Habilidades de visualización. (Extraído de Ramírez y Flores, 2017)

Coordinación ojo-motor (OM)	Coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.
Percepción figura-contexto (FC)	Reconocer una figura aislándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos.
Conservación de la percepción (CP)	Reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, textura,…) aunque cambie de posición o deje de verse por completo.
Percepción de la posición en el espacio (PE)	Relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como referencia.
Percepción de las relaciones espaciales (RE)	Identificar las relaciones internas entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.).
Discriminación visual (DV)	Comparar dos imágenes (o dos objetos en la misma imagen) e identificar sus semejanzas y diferencias visuales.
Memoria visual (MV)	Recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

En la investigación sobre visualización, aparecen variedad de términos (razonamiento visual, capacidad espacial, pensamiento espacial, percepción espacial, visión espacial, etc.) en las que aparecen dificultades para acordar los conceptos básicos (Lohman et al., 1987). Nuestra intención de investigación por conceptualizar y operativizar el sentido espacial responde a organizar la variedad de terminología relativa a sentido espacial (Bennie y Smit, 1999).

Bishop (1983) en una revisión de investigaciones sobre espacio y geometría, marca como elemento diferenciador los conceptos y significados frente a las habilidades y procedimientos. Tanto los conceptos de geometría tradicional como las habilidades aparecen explícitamente en la definición de sentido espacial recogida en el Estándar número 7, Geometría y sentido espacial:

> *"Todos los estudiantes desarrollarán el sentido espacial y una habilidad para usar las propiedades geométricas y las relaciones para resolver problemas en matemáticas y en la vida diaria (..). El sentido espacial es un sentido intuitivo para la forma y el espacio. Implica los conceptos de geometría tradicional, incluyendo una habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas. También supone otras formas, menos formales, de mirar el espacio de dos o tres dimensiones, tales como el doblado de papel, transformaciones, teselaciones y proyecciones(..). La geometría está presente en el mundo que nos rodea: arte, naturaleza y las cosas que hacemos (…). Los estudiantes de geometría pueden aplicar su sentido espacial y conocimiento de las propiedades de las formas y del espacio en el mundo real" (New Jersey Mathematics Coalition, 1996, p. 209).*

Richardson y Stein (2008) hablan de que el Estándar de Geometría pide que los estudiantes usen visualización, razonamiento espacial y conocimientos geométricos para resolver problemas. Ramírez (2012) señala que la distinción entre conceptos y procedimientos geométricos y destrezas que facilitan al sujeto ubicarse en su medio físico, son criterios que permiten organizar la terminología relativa a visualización y sentido espacial. Por ejemplo, razonamiento espacial o pensamiento espacial (Clements y Battista, 1992, Yakimanskaya, 1991) pueden considerarse matizaciones del sentido espacial. Mientas que *habilidad espacial, capacidad espacial, visualización, visión espacial, percepción espacial* y *orientación* (Ben-Chaim et al., 1989, Lean y Clements, 1981, Lohman, 1979, Zimmermann y Cunningham, 1991), entran a formar parte de la descripción de la habilidad.

Las investigaciones de Fishbein (1993) sobre conceptos figurales enfatizan la relación entre las componentes asociadas a visualización y las de conocimientos geométricos. Considera tres categorías de entidades mentales cuando se refiere a figuras geométricas: la definición, la imagen (basada en la experiencia perceptiva-sensorial, como la imagen de un dibujo) y el concepto figural. El concepto figural es una realidad mental, es el constructo manejado por el razonamiento matemático en el dominio de la geometría. Hershkowitz (1989) también marca la estrecha relación entre visualización y aprendizaje geométrico enfatizando el papel de la visualización para delimitar la imagen de un concepto. Jones y Tzekaki (2016) también destacan la inevitable superposición de la visualización geométrica y el razonamiento espacial. Lea (1990) aunque no incluye explícitamente los contenidos geométricos en su definición de sentido espacial, lo considera como un conjunto complejo de habilidades entrelazadas (memoria visual, la visualización y la orientación) que interactúan necesariamente para relacionarse con el espacio. Lee y Pang (2007) estudian en 483 estudiantes coreanos de Grado 2, 4 y 6 la comprensión de los contenidos relacionados con el sentido espacial y concluyen que urge investigar la comprensión de varios contenidos relacionados con el sentido espacial y enseñarlos a través de los diferentes grados.

En esta línea, dentro del grupo fqm-193 se ha avanzado en caracterizar el sentido espacial conectando el conocimiento geométrico con las habilidades asociadas a la visualización.

Lupiáñez y Flores (2011) plantean que el sentido espacial *es un campo del sentido matemático, que los escolares desarrollan cuando son capaces de identificar, analizar y describir características y propiedades de figuras geométricas en 2D o 3D. También se muestra en la habilidad para describir posiciones y trayectorias, así como aplicar e identificar transformaciones geométricas* (p.45). También destacan que en sentido espacial es importante la visualización y las nociones, propiedades y relaciones geométricas.

Avanzando en esta idea y para operativizar el análisis del sentido espacial, Flores et al. (2015) describen el sentido espacial como *"un modo intuitivo de entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y sus representaciones, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas"* (p.129). Consideran para su descripción cuatro componentes. Las tres primeras son:

- Elementos geométricos: Conocer propiedades de las formas y figuras que permiten la identificación, ordenación y clasificación de estas. Incluye identificarlas a través del nombre, la definición y diversas representaciones
- Relaciones geométricas: Apreciar cualidades en las formas y en los cuerpos geométricos como la simetría, equivalencia, congruencia, igualdad, características que permiten clasificarlas y diferenciarlas, etc.
- Ubicación y movimientos: Disponer de referentes para describir posiciones en el plano o en el espacio, llevar a cabo movimientos y reconocer en ellos regularidades o elementos invariantes.

Y consideran como cuarta componente la visualización entendida en el marco teórico de Gutiérrez (2006) como el conjunto de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos.

Las componentes no pueden entenderse de una manera aislada y están estrechamente relacionadas. La visualización es la que establece conexiones entre las tres primeras componentes puesto que conocimiento y habilidades no son independientes y la fortaleza del sentido espacial radica justamente en establecer dichas conexiones.

Esta conexión ha sido señalada en la propia concepción de la geometría. Battista (2007) define geometría como un complejo entorno interconectado de conceptos, formas de razonamiento y sistemas de representación que es usado para conceptualizar y analizar entorno espaciales físicos e imaginados. El razonamiento geométrico consiste en la invención y uso de un sistema conceptual formal para investigar la forma y el espacio.

Uno de los objetivos propuestos es avanzar en la conceptualización de sentido espacial para indagar en cómo establecer estas conexiones entre las componentes del sentido espacial. Consideramos que esta operativización aborda suficientemente parte de la intencionalidad del sentido espacial expuesto por el NCTM, específicamente en el estándar de Geometría (analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas; localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación; aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas; y utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas; NCTM, 2000, p. 43). En cambio, conjeturamos que para resolver tareas de razonamiento matemático y modelización geométrica podría ser necesario incluir componentes asociadas al lenguaje algebraico.

Partiendo de la intención de operativización del sentido espacial, los indicadores en cada nivel del Estándar número 7, geometría y sentido espacial hablan de relaciones espaciales, propiedades de figuras geométricas, transformaciones geométricas, geometría de coordenadas, geometría de medidas (componentes del sentido espacial en la caracterización de Flores, et al, 2015) junto con la modelización geométrica y el razonamiento deductivo. El sentido espacial (entendido como la intención educativa de la geometría, y por tanto como la competencia geométrica), tiene diversos aspectos según la componente de la competencia matemática con la que se relacione. Al tomar en consideración las competencias matemáticas PISA (INECSE, 2005), se pueden establecer relaciones con el sentido espacial.

Tabla 4. Relación entre Sentido espacial y competencias PISA (Extraído Ramírez, 2012)

Competencia (PISA, 2003)	Sentido espacial
Pensar y razonar	Identificar figuras por sus características, por su definición, definir, etc.
Argumentar y justificar	Razonamiento geométrico, empleo de la geometría por su estructura lógica
Comunicar	Definir, convertir elementos geométricos en frases, identificar definiciones
Modelizar	Caracterizar los elementos geométricos como abstracciones, como modelos ideales de la realidad, crear modelos nuevos a partir de los conocidos
Plantear y resolver problemas	
Representar	Conocer representaciones, relacionarlas entre sí, producir nuevas representaciones
Utilizar lenguaje simbólico	Identificación de los objetos por sus nombres, empleo del lenguaje geométrico
Emplear herramientas tecnológicas	Manejar programas dinámicos, dibujar figuras

El papel de la visualización en las características del talento ha sido abordado desde diferentes perspectivas. Numerosos autores han destacado la importancia de la visualización en las tareas de matematización (Arcavi, 2003; Clements y Battista, 1992; Guillén, 2010; entre otros), resaltando el papel que la visualización ha supuesto en la obra de grandes matemáticos (Hadamard, 1947) y vinculándola estrechamente con el éxito en las denominadas disciplinas STEM (ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas) (Uttal et al, 2013; Wai et al., 2009). Desde esta perspectiva de cualidad para afrontar tareas matemáticas, la visualización supone la habilidad para interpretar y comprender la información proveniente de figuras que se usan en el trabajo geométrico y la habilidad para contextualizar y trasladar las relaciones abstractas y la información no figural en términos visuales (Ben-Chaim et al., 1989).

En relación a la caracterización del talento matemático en relación al sentido espacial, y particularmente a la visualización, numerosos estudios han demostrado poca disposición de los estudiantes con talento matemático a utilizar métodos visuales (Krutetskii, 1976; Lee et al., 2007; Neria y Amit; 2010; Presmeg, 1986; Ryu et al., 2007). Sin embargo, otros trabajos han relacionado positivamente el uso de la visualización con el mayor rendimiento en la resolución de tareas matemáticas (Gruessing, 2011; Rabab´h y Veloo, 2015; Rivera, 2011, Van Garderen, 2006; Van Garderen y Montague, 2003). Pese a ello, varias revisiones focalizadas en la visualización en estudiantes con talento señalan que existen pocos programas para desarrollar su visualización (Kalbfleisch, 2013),

Pensamiento funcional

El pensamiento funcional está constituido por los tópicos, procedimientos y relaciones que involucran a las funciones (Rico, 2006). Se puede caracterizar como el proceso de construcción, descripción y razonamiento con y acerca de las funciones, incluyendo generalizar relaciones entre cantidades que covarían, expresar estas relaciones en palabras, símbolos, tablas o gráficos y usando representaciones para analizar funciones (Blanton et al., 2011). Se incluye dentro de un enfoque del *early algebra* que "no trata de introducir las funciones en niveles educativo previos tal y como se trabajan en educación secundaria, sino de aprovechar el potencial de este contenido matemático para promover capacidades en los niños que les sean útiles para el razonamiento en general y el matemático en particular, tanto en el nivel educativo en el que se encuentran como en los sucesivos" (Cañadas y Molina, 2016, p. 210). Establecer la relación funcional entre dos cantidades que varían y los sistemas de representación para manifestar la generalización son elementos clave para el desarrollo del pensamiento funcional en los primeros cursos.

Según los Principios y Estándares para las matemáticas escolares, estudiantes desde Infantil hasta Grado 12 deberían comprender patrones, sus relaciones y funciones y ser capaces de representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos; usar modelos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y analizar cambios en diferentes contextos (Blanton et al. 2011). Estudios empíricos evidencian la capacidad de alumnos de educación primaria para aprender y comprender nociones funcionales, y usar diferentes representaciones para resolver problemas que involucran variables (por ejemplo, Brizuela y Schliemann, 2003). La revisión de la literatura muestra que identificar patrones, relaciones y funciones en diferentes contextos es crucial para el pensamiento algebraico (Blanton and Kaput 2011;

Kieran et al., 2016; Lee et al., 2018). Comprender las funciones y usar gradualmente simbolismo algebraico podría disminuir las dificultades observadas en cursos superiores para usar el simbolismo algebraico y expresar relaciones entre cantidades (Bednarz 2001; Carraher y Schliemann 2007). Estudiantes desde los primeros cursos pueden generalizar y razonar con relaciones funcionales en contextos numéricos e incluso utilizar notación variable (Blanton y Kaput 2011; Blanton et al., 2015).

El pensamiento algebraico puede presentarse en los primeros años incluso sin el uso del simbolismo algebraico (Kieran 2006) y los estudiantes pueden verbalizar la generalización usando su lenguaje natural o incluso los gestos (Radford, 2018). Kaput (2008) considera que incrementar sistemáticamente la generalización en un sistema de símbolos convencional es un factor clave para el pensamiento algebraico. Una aproximación a la instrucción en el uso de notación variable podría empezar con representaciones intuitivas, seguidos de una adopción gradual de representaciones convencionales, incluyendo letras para representar variables, con tareas para representar y comprender relaciones matemáticas como las tablas o las coordenadas cartesianas (Carraher et al., 2008).

Con nuestra intención de contextualizar la identificación de relaciones funcionales en el contexto geométrico, también es de interés la aproximación al álgebra utilizando magnitudes (Carraher y Schliemann 2007). Respecto a los trabajos con patrones, hay un matiz relevante al distinguir entre variables discretas y continuas. Kaput (1989) siguiendo los trabajos de Fischbein y otros, ha señalado que la competencia para trabajar en aritmética con cantidades discretas no necesariamente se transfiere a la competencia en aritmética con cantidades continuas.

El comprender el comportamiento de las funciones permite al estudiante modelar situaciones del mundo real (Blanton, 2008) y les permite conectar con diferentes contenidos del currículo y facilitar el posterior trabajo con lenguaje algebraico. Particularmente interesados en este proyecto de investigación en el contexto geométrico, consideramos relevante el proceso de generalización en la identificación y representación de la relación funcional.

Uno de los focos de interés será reconocer el papel del sentido espacial y el pensamiento funcional en los procesos de generalización de los estudiantes con talento matemático y su conexión con las otras características. La generalización es un elemento común en la caracterización del talento matemático, el sentido espacial (argumentar y modelizar) y el pensamiento funcional. Aunque hay diferentes listados de características del talento matemático, la generalización aparece de manera destacada en todas ellas, bien de manera explícita o a través de habilidades que la requieren: habilidad para generalizar rápida y ampliamente los objetos matemáticos, sus relaciones y sus operaciones (Krutetskii (1976), habilidad para generalizar (Greenes, 1981), habilidad especial para trabajar de forma abstracta y ver relaciones entre objetos matemáticos (Miller, 1990), busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas (Freiman, 2006).

La generalización adquiere un papel predominante en el pensamiento funcional (Kaput 2008) y se considera clave para que se adquiera el conocimiento matemático desde las edades más tempranas (Mason, 2018; Pólya 1945). Kaput (1999) se refiere a la generalización como un razonamiento que se extiende más allá de los casos específicos al explicar las similitudes o reconocer los patrones, procedimientos y estructuras en sus relaciones. En el contexto funcional, generalizar una relación funcional consiste en identificar, explicar y representar la regla que subyace a la tarea, relacionando las cantidades involucradas más allá de los casos presentados, partiendo de los casos específicos y progresando hasta los casos generales (Hitt y González-Marín, 2016; Ureña et al., 2019; Warren et al., 2016). Los estudiantes pueden representar esta relación funcional utilizando lenguaje verbal, gráficos, símbolos o combinaciones de estos sistemas (Cañadas et al., 2008; Carraher et al., 2008).

Diferentes estudios con los primeros cursos de primaria (Blanton et al., 2015; Cañadas et al, 2016; Warren y Cooper, 2005) han evidenciado que los estudiantes son capaces de identificar la relación entre variables y usar variedad de sistemas de representación, incluido el simbolismo algebraico para comprender, representar y progresar en la expresión de las relaciones funcionales. Ureña et al (en prensa), analizan las estrategias que favorecen la generalización en una tarea propuesta para seleccionar estudiantes que participen en un proyecto de estímulo del talento matemático. No se perciben diferencias destacadas en las estrategias funcionales mostradas por estudiantes entre los estudiantes que han cursado introducción al álgebra y los que no. Sin embargo, sin son más sofisticadas las representaciones de la relación funcional de los estudiantes con instrucción en lenguaje algebraico.

En relación al pensamiento funcional, las características del talento se han abordado especialmente en la búsqueda de patrones, en lo relativo a generalización como un nivel avanzado de razonamiento (Amit y Neira, 2008; Lee y Freiman, 2006). Las tareas que impliquen representaciones gráficas y simbólicas pueden ser una oportunidad para conectar la visualización con otros tipos de representaciones. Presentar las tareas de pensamiento funcional en el contexto de patrones visuales puede permitir detectar diferentes tipos de usar la visualización (Rivera, 2007; Vale et al., 2012). En la experimentación con patrones, la conexión entre álgebra y generalización ha sido enfatizada para promover el desarrollo del pensamiento algebraico, pero pocos estudios se han focalizado en pensamiento no lineal (Amit y Neira, 2008).

Antes de generalizar, en el reconocimiento de patrones el estudiante debe reconocer la propiedad que es invariante, reconocer lo que es común o establecer una regularidad (Rivera y Becker, 2008). En esta primera fase, la visualización implica la comprensión de las relaciones de la estructura (Duval, 1999). Ver el patrón es el primer paso para la búsqueda de la regularidad, por lo tanto, el uso del apoyo visual puede ser el primer paso para conseguir la generalización (Barbosa y Vale, 2015). En las tareas de patrones que implican figuras, el estudio de la percepción cognitiva nos permite investigar cómo los estudiantes ven diferentes aspectos del patrón que consideran relevantes. La percepción cognitiva va más allá de lo sensorial cuando los individuos ven o reconocen un hecho o propiedad en relación al objeto (Rivera, 2007).

Con la intención de presentar a los estudiantes con talento matemático tareas que requieran generalización y la "armonía" entre el sentido espacial y su pensamiento funcional, consideramos que las tareas relativas a justificar y modelizar pueden ser un contexto adecuado tanto por su nivel de complejidad, como por la posibilidad de que intervengan representaciones gráficas y simbólicas, demanda tanto pensamiento algebraico como sentido espacial y, particularmente, pensamiento funcional y habilidades de visualización.

Por último, se pretenden analizar y comprender las posibles diferencias de género en los resultados obtenidos. Numerosos estudios han mostrado diferencias de género tanto en aspectos visualizadores como en rendimiento matemático y han sugerido posibles relaciones entre ellas (Ganley y Vasilyeva, 2011). Revisiones relevantes y meta-análisis han identificado mejor rendimiento en resolución de problemas entre los hombres (Hyde, 2014; Hyde et al., 1990; Maccoby y Jacklin, 1974). E igualmente, han reportado mejor rendimiento en habilidades espaciales en los hombres (Halpern et al., 2007; Hedges y Nowell, 1995, Linn y Petersen, 1985; Voyer y Saunders, 2004). Numerosos autores (Steinmayr y Spinath, 2008; Strand et al., 2006; Voyer y Voyer, 2014; Wach et al., 2015) han observado mayor puntuación de los hombres en test visoespaciales, en particular en los referidos a rotación mental. Pero diferentes factores de rendimiento han sido identificados en el efecto del género en los resultados de rotación mental, dependiendo de la forma de puntuar el test y las condiciones en las que es administrado, como por ejemplo el tiempo límite (Goldstein et al., 1990). En un estudio sobre el impacto del género en las relaciones espaciales con 331 estudiantes (145 participaban en un programa de estímulo del talento matemático) no se identificaron interacciones entre habilidades matemáticas y género en relación con las diferencias observadas en habilidades espaciales. En el test PMA-SR los chicos respondieron más ítems y obtuvieron mayores puntuaciones, mientras que en el DAT-SR las chicas tendieron a omitir más ítems (Ramírez-Uclés y Ramírez, 2020)

La revisión de la literatura enfatiza una mayor diferencia de género en los test de rotación mental más que en otras tareas espaciales. Mientras chicos y chicas difieren en aspectos visuales y rendimiento en geometría en cursos superiores, sin embargo, sus habilidades de razonamiento y uso de estrategias de resolución de problemas geométricos son indistinguibles (Battista, 1990). Pero no hay consenso en el impacto que en estas posibles diferencias pueden deberse a otros factores, como aspectos relativos a la forma de puntuación y condiciones de administración del test, como por ejemplo la limitación del tiempo. Pretendemos analizar las diferencias de género en los tres ámbitos de nuestro proyecto de investigación.

Una vez matizados los antecedentes teóricos, formulamos los objetivos del proyecto de investigación.

OBJETIVOS

Objetivos globales:

1. Operativizar las componentes del sentido espacial.
2. Analizar la armonía entre sentido espacial y pensamiento funcional en la caracterización del talento matemático.
3. Diseñar y experimentar bloques de actividades de matemáticas para facilitar la conexión entre el sentido espacial y el pensamiento funcional en los procesos de generalización, argumentación y modelización.

Estos objetivos globales se persiguen a través de los siguientes objetivos operativos que determinan las distintas fases del proyecto:

Fase 1. Realizar un análisis conceptual del sentido espacial, estableciendo un sistema de categorías para describir las componentes y sus relaciones.

Fase 2. Diseñar tareas matemáticas para facilitar la conexión entre el sentido espacial y el pensamiento funcional en los procesos de generalización, argumentación y modelización.

Fase 3. Realizar un estudio de casos con estudiantes de altas capacidades matemáticas de diversos cursos de E. Primaria y ESO en el que se les observe durante la resolución de las actividades experimentales diseñadas por el equipo del proyecto y otras actividades ordinarias.

Fase 4. Describir y caracterizar los procesos cognitivos de razonamiento, uso del sentido espacial y del pensamiento funcional de los estudiantes seleccionados para el estudio de casos.

Fase 5. Estudiar diferencias de género en el estudio de casos.

METODOLOGÍA

Para realizar el análisis conceptual del sentido espacial de la fase 1, el estudio poseerá un enfoque cualitativo, que según Hernández et al. (2014), permite recolectar y analizar datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación. Se realizará el análisis de diversas fuentes documentales sobre el tema (literatura de investigación, innovación educativa, documentos curriculares), que como resultados permitirá conceptualizar el sentido espacial y establecer sus componentes y significados. La investigación se basará en el modelo de análisis didáctico. Específicamente, se utilizarán las técnicas del análisis conceptual y del análisis de contenido. El análisis conceptual permitirá convertir conceptos en piezas teóricas precisas con enunciados textuales, descriptores, definiciones, listas extensivas, ejemplos de uso, contraposición de textos con significados alternativos y formulaciones simbólicas. El análisis de contenido es una técnica de investigación que permitirá elaborar inferencias válidas y replicables a partir de textos en aquellos contextos en que se utilizan (Rico et al., 2013).

Para el establecimiento de categorías, destacamos de la definición de la operativización presentada por Flores et al. (2015) que plantean que el sentido espacial requiere generar una amplia red de imágenes de los conceptos geométricos para su aprendizaje, acompañada del descubrimiento y la práctica de destrezas para ubicarlos en el espacio, percibirlos y representarlos de diversas formas, como son la visualización y la orientación. Tanto la visualización como la orientación son componentes principales de las habilidades espaciales que no se deben separar por considerarse esenciales para el desarrollo del sentido espacial. En el tema de estudio se utilizará como teoría de partida la presentada por Gutiérrez (1996), quien unifica desarrollos teóricos elaborados por diferentes autores y los integra para definir la visualización espacial en entornos geométricos, el que se complementará para conceptualizar el sentido espacial.

Para la fase 2, a partir de la revisión de la literatura, se pretende establecer un sistema de categorías para analizar y diseñar tareas que permitan a los estudiantes con talento matemático facilitar la conexión entre el sentido espacial y el pensamiento funcional en los procesos de generalización, argumentación y modelización

Para el diseño de actividades, nos basaremos en la propia experiencia profesional de los miembros del equipo investigador, los resultados de dos talleres virtuales de resolución de problemas y demostración y una prueba piloto sobre generalización, así como la de otros centros de referencia en este tema, como Nrich (Piggot y Pumfrey, 2005, 2006, 2007). Uno de los tipos de problemas que van estrechamente relacionados con la puesta en juego del talento matemático son aquellos que demandan justificaciones (Sriraman, 2004), puesto que suponen una oportunidad para desarrollar intuición acerca de la forma de demostrar matemáticamente y plantear cuestiones desafiantes y valiosas. En este sentido, tanto para la investigación como para la atención de estos estudiantes es necesario planificar tareas ricas que requieran una demanda cognitiva apropiada (Gutiérrez, 2017) y que faciliten que los estudiantes hagan generalizaciones y justifiquen sus soluciones. Stein et al. (2000) definen una tarea rica como aquella que es compleja, no algorítmica y no rutinaria, lo que permite múltiples estrategias y representaciones y no marca una ruta única hacia una solución. Cualquier solución a una tarea rica, por tanto, no es una respuesta que se debe marcar, ni siquiera una descripción de la estrategia o el razonamiento utilizado para llegar a esa respuesta. Las tareas ricas deben ir más allá, aportando oportunidades para que los estudiantes justifiquen su razonamiento o estrategia, expliquen por qué su enfoque es válido y busquen generalizaciones de forma autónoma. Estas orientaciones han sido consideradas en varios trabajos que han establecido pautas para trabajar en el diseño de este tipo de tareas para atender a los estudiantes de alta capacidad matemática (Ramírez y Flores, 2016; Ramírez et al., 2017). En el caso de tareas estimulantes para la alta capacidad matemática, los razonamientos exigidos vienen condicionados por la riqueza de la tarea, que varios autores han asociado con la complejidad de la actividad matemática que envuelve (por ejemplo, Becker y Shimada, 1997; Flewelling y William, 2001). Burkhardt y Swan (2013) enfatizaron la importancia de tener en cuenta la dificultad de la tarea a la hora de diseñarla, y señalaron que esta dificultad depende de varios factores: (i) complejidad, que está referida a la cantidad de variables, la variedad y cantidad de datos, y la cantidad de modos en que se presenta la información; (ii) desconocimiento: las tareas no rutinarias (aquellas que no son similares a tareas ya practicadas previamente) son más difíciles que los ejercicios de rutina; (iii) demanda técnica: las tareas que requieren una matemática más sofisticada para su solución son más difíciles que las que se pueden resolver con una matemática más elemental; y (iv) autonomía del alumno: la orientación de un experto (generalmente el maestro) o de la tarea en sí (por ejemplo, al estructurarla o "andamiarla" en partes sucesivas) hace que la tarea sea más fácil que si se presenta sin dicha orientación. A partir de estas consideraciones teóricas y metodológicas, presentamos el análisis previo de la tarea diseñada atendiendo especialmente a las estrategias de resolución y los elementos de razonamiento matemático.

Para las fases 3 y 4, se esperan llevar a cabo varios experimentos de enseñanza basados en una investigación de diseño (Confrey, 2006; Molina 2006) tanto con estudiantes de Primaria y Secundaria participantes en programas de estímulo del talento matemático (ESTALMAT) y programas de enriquecimiento en centros escolares. Se espera contrastar los resultados utilizando grupos control.

También se continúa con análisis de datos de experimentos ya realizados:

(A y B) Toma de datos sobre uso del lenguaje algebraico y del sentido espacial en talleres de resolución de problemas y de demostración para estudiantes de primer curso de enseñanza secundaria en un entorno online. Se han implementado las sesiones y se están determinando las categorías de análisis a priori. Está previsto trasladar la conexión entre ambos constructos a los primeros cursos de Primaria en tareas de argumentación. Se pretenden continuar los aportes de los proyectos "Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas: análisis multidimensional" y "Modelos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas: análisis racional y empírico".

(C) En una nueva toma de datos en tareas geométricas con variables continuas, se está avanzando en el establecimiento de categorías de análisis para conectar el proceso de generalización y el sentido espacial. Estas categorías servirán de referencia para las de los primeros años de Educación Primaria. Este trabajo forma parte del primer experimento de tesis de Alba Mª Damián codirigido por Rafael Ramírez y María Cañadas dentro del Proyecto "Pensamiento funcional en educación primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización".

La investigación que se llevará a cabo es de carácter cualitativo, se enmarca dentro de una metodología observacional y descriptiva de tipo confirmatorio. En cuanto a la metodología de realización de experimentaciones y análisis de éstas, nos proponemos aplicar la metodología originaria de los grupos de investigación e innovación japoneses denominada "grupo de estudio" (Krainer, 2014). El grupo de estudio está formado por los profesores participantes en la experimentación, que actúan como un grupo de trabajo colaborativo. Mientras uno de los profesores implementa las actividades experimentales en sus clases, uno o más miembros del equipo actúan como observadores de esas clases recogiendo información audiovisual y escrita. Esta información es analizada por todos los miembros del grupo y les lleva a elaboración de conclusiones sobre la validez de las actividades y del método de enseñanza y las posibles mejoras, que se implementarán en una nueva experimentación (Asami-Johansson, 2011).

En relación al razonamiento matemático, en relación con la elaboración, verificación y demostración de conjeturas, esta parte de la investigación se apoyará en las herramientas metodológicas proporcionadas por la categorización de demostraciones matemáticas (Balacheff, 2000; Harel y Sowder, 1998; Marrades y Gutiérrez, 2000).

Se realizarán dos nuevos experimentos de enseñanza: (D) con estudiantes de secundaria ESTALMAT y grupo control y (E) con estudiantes de Primaria y secundaria programa de enriquecimiento. En relación a la modelización, se utilizarán las fases del proceso de modelización a partir del esquema de modelización propuesto por Blum y Niss (1991): (a) análisis del problema real, (b) simplificar el problema real, (c) matematizar, (d) resolver el problema matemático, (e) interpretar las soluciones obtenidas, f) reflexión de los resultados y validación del proceso, y (g) presentación de las conclusiones. Para "matematizar", el sujeto debe traducir el modelo real en términos matemáticos para llegar a un modelo útil en la resolución del problema (Gómez y Flores, 2013). Según Blum y Niss (1991), el modelo real es matematizado, es decir, sus datos, conceptos, relaciones, condiciones y supuestos son trasladados a la matemática; así resulta un modelo matemático de la situación original. El modelo matemático, como fase del proceso de modelización establece relaciones o formalismos matemáticos que representan las propiedades e hipótesis del modelo. Dentro de esta fase, se incluye la escritura, en lenguaje matemático, de las relaciones establecidas entre las variables dadas por el problema. Se pretende indagar en la determinación de variables y sus relaciones en la construcción del modelo matemático a partir del modelo real en un problema de modelización y en la caracterización de tareas que permitan "armonizar" el sentido espacial y el *early algebra* en edades tempranas, especialmente en tareas de modelización abordadas desde una perspectiva STEM. En este sentido, se espera caracterizar las componentes del sentido espacial de un modo operativo en los trabajos de Andrea Cruz y de las fases de modelización en los trabajos de Jessenia Chavarría.

Para la fase 5, se espera un enfoque más cuantitativo y la utilización de herramientas psicométricas como el test de Raven y los factores espaciales de los test PMA y DAT. Se espera contrastar las puntuaciones en los test con el rendimiento en las tareas propuestas y analizar los aspectos específicos que pudieran manifestar diferencias de género.

El plan de trabajo y cronograma aparece en la Tabla 5

Tabla 5. Cronograma

Fase 1
2020 y anteriores: Revisión de la literatura sobre sentido espacial 2021: Establecimiento de categorías
Fase 2
2020 y anteriores: Prueba piloto sobre sesión de enriquecimiento sobre generalización 2021: Diseño de sesiones de enriquecimiento sobre argumentación y modelización
Fase 3
2020 y anteriores: Toma de datos de Talleres Virtuales de resolución de problemas (A) y demostración (B) 2021: Experimento de enseñanza con estudiantes de secundaria ESTALMAT y grupo control (D) 2022: Experimento de enseñanza con estudiantes de Primaria y secundaria programa de enriquecimiento (E)
Fase 4
2020 y anteriores: Toma de datos de estudiantes de Primero y Sexto de Primaria de un programa de enriquecimiento (C) Análisis de datos del taller de demostración (B) 2021: Análisis de datos del taller de resolución de problemas (A) 2022: Análisis de datos de los experimentos de enseñanza (D y E)
Fase 5
2022: Análisis de las diferencias de género (D y E) 2023: Transferencia de resultados

CONTRIBUCIONES

Los resultados de este proyecto se describen desde tres enfoques: teórico, metodológico y práctico.

Teóricamente, la caracterización de los aspectos cognitivos puestos en juego en procesos de generalización, demostración y modelización asociados al sentido espacial y el pensamiento funcional supondrá un avance en los estudios internacionales actuales.

Metodológicamente, en el proyecto se hace necesario diseñar y validar instrumentos de recogida y establecimiento de categorías para analizar la información que permitan explorar el sentido espacial y pensamiento funcional de los estudiantes. Estos instrumentos contribuyen metodológicamente a futuras investigaciones.

De manera práctica, los resultados de este proyecto serán de utilidad para la investigación en el área, la docencia en secundaria y la formación del profesorado. Favorecerán la consolidación de una línea de investigación novedosa en España (pensamiento funcional) y contribuirán a nivel internacional a la atención de la alta capacidad matemática. Conocer cómo generalizan, argumentan y modelizan los estudiantes con talento matemático permite informar del diseño de propuestas de enseñanza en línea con las nuevas directrices curriculares a nivel nacional e internacional. En la formación del profesorado, un mejor conocimiento de los procesos cognitivos es útil para el desarrollo de una enseñanza guiada cognitivamente. Los conocimientos prácticos contribuirán al diseño y desarrollo de planes de formación de profesores de matemáticas en España, pudiéndose aplicar en futuros proyectos e investigaciones, así como en el programa de doctorado de Educación y al máster Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Principalmente consideramos que los resultados del trabajo pueden aportar información relevante sobre las características diferenciadoras de los procesos cognitivos y los patrones de aprendizaje de los estudiantes de altas capacidades matemáticas. Esto puede facilitar la elaboración de materiales de enseñanza que ayuden a los profesores a atender las necesidades de este tipo de estudiantes. Además de la difusión de resultados en ámbitos de investigación (revistas de impacto, participación en congresos) consideramos relevante la transferencia directa al profesorado.

"Aterrizar" la investigación en prácticas de enseñanza para la atención del talento

La contextualización de investigaciones en el ámbito del talento matemático va estrechamente relacionada con los proyectos en los que participan estos estudiantes (ESTALMAT, Campus Científicos, Programas PIIISA, etc.) y la posibilidad de diseñar y analizar tareas y procesos de enseñanza en estos proyectos.

Como resultado de las investigaciones del talento matemático, se está diseñando una metodología para la atención del talento matemático denominada "reposo curricular" (Ramírez y Flores, 2016) que se están utilizando en la formación de profesores en primaria y secundaria. Las tareas diseñadas se implementan en los diferentes proyectos y se están difundiendo entre el profesorado en diferentes entregas de la sección de SUMA y cursos de formación. En los proyectos de FECYT que colaboran con el proyecto ESTALMAT se han incluido algunas propuestas relacionadas con la investigación, tanto para la toma de datos como para puesta en marcha de los resultados obtenidos de las investigaciones. En otros proyectos en los que suelen realizarse actividades de enriquecimiento (Campus Científicos, Proyecto PIIISA…) también se están realizando sesiones que resultan de investigación para los estudiantes de primaria y secundaria.

Aportes de la educación matemática al diagnóstico de las altas capacidades matemáticas

La capacidad visual y la atención a los estudiantes con alta capacidad matemática son temas de interés desde el ámbito de la psicología. Gutiérrez (1996) señalaba que las búsquedas de trabajos en visualización, habilidad espacial, imagen mental daban resultados en revistas psicológicas y en Educación Matemática. Ante la idea consolidada de diagnóstico del talento matemático basándose únicamente en herramientas psicométricas, esperamos que los resultados den información para la nominación del talento matemático directamente por el profesorado de matemáticas. Determinar las características asociadas a lo observable en el aula, permitirá una mejor detección y, por lo tanto, la toma de decisiones del docente para atender al talento matemático.

Desde el talento hasta la clase ordinaria

La investigación con estudiantes con talento permite eliminar potenciales dificultades para observar el rendimiento en las tareas que podrían derivarse de un deficiente conocimiento de las matemáticas o falta de interés. Pero todo lo expuesto en el proyecto justifica el interés, la necesidad y la pertinencia de diseñar y experimentar actividades matemáticas ricas que puedan ser planteadas a todos los estudiantes de un grupo ordinario de Educación Primaria o ESO con diferentes graduaciones de dificultad o profundidad.

Una idea que subyace en las investigaciones con los estudiantes con talento matemático es la necesidad de diseñar tareas ricas, que luego pueden adaptarse al resto de los estudiantes. Esa dinámica podría establecer un interesante un ciclo interesante:

diseño por investigadores de tareas para estudiantes de alta capacidad matemática, análisis de los resultados, propuesta de diseño de sesiones para clase ordinaria, puesta en común con profesorado e implementación en la clase ordinaria con diversidad.

REFERENCIAS

Alba, J. (2012). *Habilidades visuales de los alumnos del Grado de Educación Primaria al detectar regularidades geométricas en un tejido* [Trabajo fin de máster en Didáctica de la Matemática]. Universidad de Granada.

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented prealgebra students. *ZDM, 40*, 111–129.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215–241.

Asami-Johansson, Y. (2011). A study of a problem solving oriented lesson structure in mathematics in Japan. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2549-2558). University of Rzeszów.

Aznarte, M. (2018). *Análisis del sentido espacial en una prueba de acceso a un programa de estimulación del talento matemático*. [Trabajo fin de Máster en Didáctica de las Matemáticas]. Universidad de Granada.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente.

Barbosa, A. y Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network, 10*, 57–70.

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for research in mathematics education*, *21*(1), 47-60.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (Vol. 2, pp. 843-908). NCTM/Information Age Publishing.

Becker, J. P. y Shimada, S. (Eds.). (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. NCTM.

Becker, J. R. y Rivera, F. D. (2007). Factors affecting seventh graders' cognitive perceptions of patterns involving constructive and deconstructive generalization. En J. Woo, K. Park, H. Sew y D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the International Group for the PME* (Vol. 4, pp. 129 136). The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra: Accounting for the reasonings and notations developed by students. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 69-78). The University of Melbourne.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. (1989). The Role of Visualization in the Middle School Mathematics Curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1-2), 49-60.

Benedicto, C. (2018). *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas* [Tesis doctoral]. Universidad de Valencia.

Bennie, K. y Smit, S. (1999). "Spatial Sense": Translating Curriculum Innovation in to Classroom Practice. Proceedings of the Fifth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (Vol. 1, pp. 22-29). Port Elizabeth Technikon.

Bishop, A. J. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education: A Review. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 257–269.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). Academic Press.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann Educational Books.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early-Algebraization* (pp. 5-23). Springer-Verlag.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds'thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511–558.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 37-68.

Brizuela, B. y Schliemann, A. (2003). Fourth-graders solving equations. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA* (Vol. 2, pp. 137-143). College of Education.

Burkhardt, H. y Swan, M. (2013). Task design for systemic improvement: Principles and frameworks. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education (The 22st ICME study conference)* (pp. 433- 432). ICME.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*(1), 3-22.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Information Age Publishing.

Cheah, U. H., Herbst, P. G., Ludwig, M., Richard, P. R. y Scaglia, S. (2017). Topic study group no. 13: Teaching and learning of Geometry—secondary Level. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th ICME* (pp. 435-438). Springer.

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992) Geometry and spatial reasoning. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). Macmillan Publishing Company.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). Cambridge University Press.

Cruz, A. y Ramírez, R. (2018). Caracterización geométrica del test PMA a partir de las componentes del sentido espacial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII*, pp. 211-220. SEIEM.

Damián, A. (2020). *Pensamiento funcional con variables continuas en alumnos de Educación Primaria en un programa de enriquecimiento curricular* [Trabajo fin de Máster en Didáctica de la Matemática]. Universidad de Granada.

Davis, G. A., Rimm, S. B. y Siegle, D. (2011). *Education of the gifted and talented* (6ta ed.). Pearson.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher, 37*(6), 14-20.

Douady, R. y Parzysz, B. (1998). Geometry in the classroom. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study* (pp. 159-192). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 century. An ICMI Study* (pp. 37-52). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group of PME* (pp. 3– 26). PMENA.

Espinoza, J. (2018). *Caracterización de estudiantes con talento matemático mediante tareas de invención de problemas* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Fishbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162.

Flewelling, G. y William, H. (2001). *A handbook on rich learning tasks*. Centre for Mathematics, Science, and Technology Education, Queen´s University.

Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Pirámide.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3*(1), 51-75.

Gámez, C. (2019). *Introducción al lenguaje algebraico empleando el pensamiento funcional en 1º de ESO* [Trabajo fin de Máster en Didáctica de la Matemática]. Universidad de Granada.

Ganley, C. M. y Vasilyeva, M. (2011). Sex differences in the relation between math performance, spatial skills, and attitudes. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *32*(4), 235-242.

Goldstein, D., Haldane, D. y Mitchell, C. (1990). Sex differences in visual-spatial ability: The role of performance factors. *Memory & Cognition*, *18*(5), 546-550.

Gómez, A. y Flores, A.H. (2013). Modelación en el bachillerato. Trabajo presentado en el *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Montevideo, Uruguay.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 28(8), 14-17.

Gruessing, M. (2011). Spatial abilities and mathematics achievement among elementary school children. En B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, p. 306). PME.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). SEIEM.

Gutiérrez, A. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial. En A. Gutiérrez (Ed.). *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. *Geometría* (pp. 44-59). CINVESTAV-PNFAPM.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference* (Vol 1, pp. 3-19). Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A. (2017). *Enseñanza de la geometría a estudiantes con talento matemático: Teoría y práctica*. Conferencia Plenaria en el Encuentro de investigación en Educación Matemática (EIEM, 17), Lisboa, Portugal.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática*, *3*(2), 49-65.

Gutiérrez, A., Leder, G. y Boero, P. (Eds.) (2016). *The second handbook of research on the Psychology of Mathematics Education.* Sense Publishers.

Gutiérrez, A., Ramírez, R., Benedicto, C., Beltrán-Meneu, M. J y Jaime, A. (2018). Visualization abilities and complexity of reasoning in mathematically gifted students' collaborative solutions to a visualization task. A networked analysis. En K.S. Mix y

M.T. Battista (Eds.), *Visualizing mathematics. The role of spatial reasoning in mathematical thought* (309-337). Springer.

Gutiérrez. A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruíz, y M. De la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp.13-58). Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.

Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Espasa-Calpe Argentina, S.A.

Halpern, D. F., Benbow, C. G., Geary, R. C. Gur, Shibley, J. S. y Gernsbacher, M. A. (2007). The Science of Sex Differences in Science and Mathematics. *Psychological Science in the Public Interest, 8*(1), 1–51.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234-283). American Mathematical Society.

Hedges, L.V. y Nowell, A. (1995). Sex differences in mental test scores, variability, and numbers of high-scoring individuals. *Science, 269*(5220), 41-45.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P (2010). *Metodología de la investigación* (5ta ed.). McGraw-Hill.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry – Two sides of the coin*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 61-76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge U. P.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and Shape. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 161-204). Kluwer Academic Publishers.

Hitt, F. (Ed.) (2002). *Representations and Mathematics Visualization.* North American Chapter of IGPME.

Hitt, F. y González-Martín, A. S. (2016). Generalization, covariation, functions, and calculus. En Gutiérrez, A., Leder, G. y Boero, P. (Eds.), *The second handbook of research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-38). Sense Publishers.

Hitt, F., González-Martín, A. y Morasse, C. (2008). Visualization and students´ functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of co-variation as a prelude to the concept of function. Paper presented in the 11th ICME, Monterrey, México.

Hyde, J. S. (2014). *Gender similarities and differences. Annual review of psychology, 65*(1*)*, 373-398.

Hyde, J. S., Fennema, E. y Lamon, S. (1990). Gender differences in mathematics performance: a meta-analysis. *Psychological Bulletin*. *107*(2), 139–155.

INECSE. (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de solución de problemas*. INECSE, MEC.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). SEIEM.

Johnsen, S. K. (2004). Definitions, models, and characteristics of gifted students. *Identifying gifted students: A practical guide*. Prufrock Press.

Jones, K. y Tzekak, M. (2016). Research on the Teaching and Learning of Geometry. En Gutiérrez, A., Leder, G. y Boero, P. (Eds.). *The second handbook of research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-152). Sense Publishers.

Junta de Andalucía (2015). Orden de 17 de marzo, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. *BOJA, 60*, (pp. 9-696). Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Junta de Andalucía (2016). Orden de 14 de julio, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. *BOJA*, *144*, (pp. 108-396). Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Kalbfleisch, M. L. (2013). Introduction to the special issue. *Roeper Review*, *35*, 217–218.

Kaput, J. J. (1989). Supporting Concrete Visual Thinking in Multiplicative Reasoning: Difficulties and Opportunities. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 35-47.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). NCTM.

Kaufman, S. B. y Sternberg, R. J. (2010). Conceptions of giftedness. En S. Pfeiffer (Ed.), *Handbook of giftedness in children: Psycho-educational theory*, *research and best practices* (pp. 71-91). Springer.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the pscyhology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11– 49). Sense Publishers.

Kieran, K., Pang, J., Schifter, D. y Fong, S. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Springer.

Krainer, K. (2014). Teachers as stakeholders in mathematics education research. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(1), 49-60.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press.

Lea, H. (1990). Spatial concepts in the Kalahari. En O. George Booker, P. Cobb y T. Mendicuti. (Eds.), *Proceedings of 14th PME conference* (pp. 259-266). PME.

Lean, G. y Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 267-299.

Lee, K., Ko, E. y Song, S. (2007). The analysis of activity that gifted students construct definition of regular polyhedra. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 3, pp. 153-160). PME.

Lee, K., Ng, S. F. y Bull, R. (2018). Learning and solving algebra word problems: The roles of relational skills, arithmetic, and executive functioning. *Developmental psychology*, *54*(9), 1758-1772.

Lee, L. y Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(9), 428–433.

Lee, S. y Pang, J. (2007). A survey on the understanding of spatial sense of elementary school students. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the PME* (Vol. 1, p. 255). PME.

Linn, M. C. y Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development*, *56*(6), 1479-1498.

Lohman, D. F. (1979). *Spatial ability: A review and re-analysis of the correlational literature*. *Technical Report, nº 8*. Stanford University Aptitude Research Project (School of Education).

Lohman, D. F., Pellegrino, J. W., Alderton, D. L. y Regian, J. W. (1987). Dimensions and components of individual differences in spatial abilities. En S. H. Irvine y S. N. Newstead (Eds.), *Intelligence and cognition: Contemporary frames of reference* (pp. 253-312). Martinus Nijhoff.

Lupiáñez, J. L. y Flores, P. (2011). Sentido espacial. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 329-350). Pirámide.

Maccoby E. E. y Jacklin C. N. (1974). *The Psychology of Sex Differences*. Stanford University Press.

Mammana, C. y Villani, V. (Eds.). (1998*). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: An ICMI study*. Kluwer Academic Publishers.

Marland, S. P. (1972). *Report to the Congress of the United States by the U.S. Commissioner of education*. United States Government Printing Office.

Marrades, R. y Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, *44*(1-2), 87-125.

Mason, J. (2018). Structuring structural awareness: A commentary on Chap. 13. En M. G. B. Bussi y X. H. Sun (Eds.), *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades* (pp. 325–340). New ICMI Study Series, SpringerOpen.

McKim, R. H. (1972). *Experiences in Visual Thinking*. PWS Engineering.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent* (*ERIC Digest E482)*. Office of Educational Research and Improvement.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Mönks, F. y Mason, E. (2002). Development psychology and giftedness: Theories and research. En K. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg y R. F. Subotnik (Eds.), *International handbook of giftedness and talent* (pp. 141-155). Elsevier.

Morales, R. (2018). *Resolución de tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos por estudiantes de 6-7 años* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares para la educación matemática.* SAEM THALES.

Neria, D. y Amit, M. (2010). Talented middle school students´ strategies and reasoning in solving analytic reasoning problems. En M. M. Pinto, F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the PME* (Vol. 3, pp. 321-328). PME.

New Jersey Mathematics Coalition. (1996). Geometry and spatial sense, Standard 7. En J. G. Rosenstein, J. H. Caldwell y W. D. Crown (Eds.), *New Jersey Mathematics Curriculum Framework* (pp. 209-249). Autores.

Noss, R., Healy, L. y Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational studies in mathematics*, *33*(2), 203-233.

Passow, A. (1993). National/State policies regarding education of the gifted. En K. Séller, F. Mönks y A. Passow (Eds.), *Internacional Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Pergamon Press.

Pfeiffer, S. y Blei, S. (2010). Gifted identification beyond the IQ test: Rating scales and other procedures. En S. Pfeiffer (Ed.), *Handbook of giftedness in children: Psycho-educational theory, research and best practices* (pp. 177–198). Springer

Piggot, J. y Pumfrey, L. (2005). *Math trails: Generalising*. Cambridge University Press.

Piggot, J. y Pumfrey, L. (2006). *Math trails: Working systematically*. Cambridge University Press.

Piggot, J. y Pumfrey, L. (2007). *Math trails: Visualising*. Cambridge University Press.

Pinto, E. (2019). *Generalización de estudiantes de 3º a 6º de educación primaria en un contexto funcional del álgebra escolar* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2009). Psychological aspect: identification of giftedness in earlier ages. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol 1, pp. 191-194). PME.

Pólya, G. (1945). *How to solve it?* University Press.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftened. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297-311.

Presmeg, N. (2006a). A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. En J. Navotna, H. Moraova, M. Kratna, y N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 19–34). PME.

Presmeg, N. (2006b). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205–235). Sense Publishers.

Presmeg, N. (2008). Spatial abilities research as a foundation for visualization in teaching and learning mathematics. En N. C. Presmeg y P. C. Clarkson (Eds.), *Critical issues in mathematics education: Major contributions of Alan Bishop* (pp. 83-95). Springer.

Rabab'h, B. y Veloo, A. (2015). Spatial visualization as mediating between mathematics learning strategy and mathematics achievement among 8th grade students. *International Education Studies*, *8*(5), 1-11.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs* (pp. 3-25). Springer.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Ramírez, R., Brizuela, B. y Ayala-Altamirano, C. (2020a). Word problems favoring the use of functional strategies by grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal*. doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Ramírez, R., Brizuela, B. y Blanton, M. (2020b). Kindergarten and first-grade students´ understandings and representations of arithmetic properties. *Early Childhood Education* Journal. doi.org/10.1007/s10643-020-01123-8

Ramírez, R. y Cañadas, M. C. (2018). Nominación y atención del talento matemático por parte del docente. *UNO, 79*, 23-30.

Ramírez, R. y Flores, P. (2016). Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular. *Suma*, *83*, 33-41.

Ramírez, R., y Flores, P. (2017). Habilidades de visualización de alumnos con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(2), 179-196.

Ramírez, R., Ribera, J. M., Beltrán, M. J., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2017). Design of problems for research purposes with mathematically talented students. En D. Pitta-Pantazzi (Ed.), *Proceedings of the 10th International Mathematical Creativity and Giftedness* (pp. 165-166). Universidad de Chipre.

Ramírez-Uclés, I. y Ramírez, R. (2020). Gender differences in visuospatial abilities and complex mathematical problem solving. *Frontiers Psychology, 11*(191), 1-10

Richardson, K. y Stein, C. (2008). Developing spatial sense and communication skills. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 101-107.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina., M. (Eds.) (2013). *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Comares.

Rivera, F. D. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher, 101*(1), 69–75.

Rivera, F. D. (2011). *Towards a visually-oriented school mathematics curriculum*. Springer.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Springer.

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2008). Middle school children´s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM, 40*(1), 65–82.

Roura, R. (2020). *Análisis de la capacidad visual y de la resolución de una tarea de sentido espacial en futuros maestros* [Trabajo fin de Máster en Didáctica de la Matemática]. Universidad de Granada.

Ruiz, F. (2010). *La tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas: un estudio con profesores de primaria en formación* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Ryu, H. Chong, Y. y Song, S. (2007). Mathematically gifted students´ spatial visualization ability of solid figures. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol 4, pp. 137-144). PME.

Salto, C. (2013). *Análisis de las componentes del sentido espacial en un juego de espejos*. [Trabajo fin de Máster en Didáctica de la Matemática]. Universidad de Granada.

Serrano, A. (2015). *El sentido espacial en la enseñanza de la geometría: análisis de un libro de texto* [Trabajo fin de máster de Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas]. Universidad de Granada.

Sheckels, M. P. y Eliot, J. (1983). Preference and solution patterns in mathematics performance. *Perceptual and motor skills*, *57*(3), 811-816.

Singer, F. A., Sheffield, L. J., Freiman, V. y Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students. ICME-13 topical surveys*. Springer.

Sriraman, B. (2004). Gifted Ninth Graders' Notions of Proof: Investigating Parallels in Approaches of Mathematically Gifted Students and Professional Mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted*, *27*(4), 267–292.

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M. y Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teacher College.

Steinmayr, R. y Spinath, B. (2008). Sex differences in school achievement: What are the roles of personality and achievement motivation? *European Journal of Personality*, *22*(3), 185–209.

Strand, S., Deary, I. J. y Smith, P. (2006). Sex differences in cognitive abilities test scores: A UK national picture. *British Journal of Educational Psychology*, *76*(3), 463–480.

Stylianou, D. y Pitta-Pantazi, D. (2002). Visualization and high achievement in mathematics: A critical look at successful visualization strategies. En F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 31-46). Cinvestav-IPN.

Tannenbaum, A. J. (2003). Nature and nurture of giftedness. En N. Colangelo y G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (pp. 45-59). Allyn and Bacon.

Ureña, J. (2017). *Manifestación de niveles de generalización en estudiantes de primaria durante el proceso de resolución de tareas que involucran relaciones funcionales* [Trabajo fin de Máster en Didáctica de la Matemática]. Universidad de Granada.

Ureña, J., Ramírez, R., Cañadas, M. y Molina, M. (en prensa). *Estrategias y expresiones de generalización de estudiantes de último curso de primaria y primeros cursos de secundaria en un contexto funcional*

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 570-614.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. En M. M. Lindquist y A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry K-12* (pp. 17-31). Reston, VA: NCTM.

Uttal, D. H., Miller, D. I. y Newcombe, N. S. (2013). Exploring and enhancing spatial thinking: Links to achievement in science, technology, engineering, and mathematics? *Current Directions in Psychological Science*, *22*(5), 367-373.

Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., Barbosa, A. y Fonseca, L. (2012). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. En T.Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the PME* (Vol. 4, pp. 171–178). PME.

Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, *39*(6), 496-506.

Van Garderen, D. y Montague, M. (2003). Visual-Spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *18*(4), 246–254.

Voyer, D. y Saunders, K. A. (2004). Gender differences on the mental rotations test: A factor analysis. *Acta Psychologica*, *117*(1), 79-94.

Voyer, D. y Voyer, S. D. (2014). Gender differences in scholastic achievement: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *140*(4), 1174-1204.

Wach, F. S., Spengler, M., Gottschling, J. y Spinath, F. M. (2015). Sex differences in secondary school achievement -The contribution of self-perceived abilities and fear of failure. *Learning and Instruction, 36*, 104–112.

Wai, J., Lubinski, D., y Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of educational Psychology*, *101*(4), 817.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2). 150-162.

Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73-108). Sense Publishers

Werdelin, I. (1961). *Geometrical ability and the space factors in boys and girls*. Gleerup.

Yakimanskaya, I. S. (1991). *The development of spatial thinking in schoolchildren. Soviet Studies in Mathematics Education, vol. 3*. NCTM.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for research in Mathematics Education, 27*(4), 435-457.

Zimmermann, W. Y y Cunningham, S. (1991). "Editor´s introduction: What is mathematical visualization". En W. Zimmermann y S. Cunninghan (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). Mathematical Association of America.