Facultad de Ciencias

Departamento de Análisis Matemático

INTEGRACION FINITAMENTE ADITIVA:

EXTENSION INTEGRAL CON CONVERGENCIA I-LOCAL

Pilar Muñoz Rivas

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Granada.

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$ del Director:

Fdo: Manuel Díaz Carrillo

Fdo: Pilar Muñoz Rivas

Universidad de Granada

1990

Facultad de Ciencias

En Granada a 12 de Junio de mil novecientos noventa reunido el Tribunal constituido por D. PEDRO JIMÉNEZ GUERRA, D. [illegible] BODILLO GUERRERO, Dª Mª MERCEDES SE[illegible] SOLER, HERR HANS KÜNZLER y D. [illegible] JIMÉNEZ GARIJO

para juzgar la Tesis doctoral de Dª María del Pilar Muñoz Rivas

sobre el tema Integración Finitamente Aditiva: Extensión Integral con Convergencia I-Local

procedió el doctorando a hacer la exposición de la labor preparatoria realizada, fases de investigación y análisis de fuentes bibliograficas con toda clase de medios instrumentales de que se ha servido, desarrollando esta exposición en el plazo reglamentario.

Terminado el acto anterior pasó a desarrollar el contenido de la Tesis y conclusiones obtenidas en la misma.

Hechas por el Tribunal las objecciones que estimaron oportunas, y aclaradas éstas por el doctorando, se dió por terminado el acto.

Reunido a continuación el Tribunal examinador, y expuesto el parecer de cada uno de sus miembros, se acordó por Unanimidad otorgar la calificación de Apto "CUM LAUDE"

Para que conste, se extiende la presente firmada por todos los componentes del Tribunal, en la fecha ut supra.

EL PRESIDENTE,

EL SECRETARIO DEL TRIBUNAL,

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

El Doctorando,

La presente Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas ha sido realizada en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Doctor Manuel Díaz Carrillo.

A mis padres y a Pedro.

INDICE

INTRODUCCION

RESUMEN DE LA MEMORIA

Cuando se considera un anillo Ω de subconjuntos de un conjunto arbitrario X, y una medida finitamente aditiva μ en Ω, en Loomis [26], Dunford - -Schwartz [12], y más recientemente en Günzler [17] o [18], se estudia el espacio $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ de las funciones Riemann - μ - - integrables; tal espacio es el análogo para el caso σ-aditivo al espacio $L^1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ de las funciones Lebesgue - μ- - integrables y su integral de Lebesgue. Se constata así la existencia de .una analogía entre la teoría de la integral abstracta de Riemann respecto de una medida sólo finitamente aditiva, y la teoría de la integral respecto de una medida σ-aditiva (o numerablemente aditiva).

Por otro lado, Daniell, en su conocido trabajo [8], se ocupa de la prolongación de un funcional I lineal y no negativo cuyo dominio es un retículo vectorial L de funciones acotadas en un conjunto X, a un funcional como la integral de Lebesgue. En este contexto, el axioma de convergencia (o de continuidad) que impone Daniell: " $0 \leq f_n \in L,\ f_n \searrow 0 \Rightarrow I(f_n) \searrow 0$ ", permite obtener los teoremas de convergencia de Lebesgue, y lleva, junto al axioma de Stone: " $f \wedge 1 \in L$, si $f \in L$ ", a probar la existencia de una única medida numerablemente aditiva en X respecto de la cual I es la integral.

El paralelismo que señalábamos más arriba, permite plantearse la existencia de un proceso análogo al de extensión de Daniell, pero sin condiciones (o con condiciones débiles) de convergencia sobre la integral elemental I. Esta cuestión fue tratada inicialmente por Aumann [3] y Loomis [26]. También Bichteler [4] y Schäfke [31] al estudiar completaciones respecto de "seminormas integrales" abstractas, obtienen, en la misma línea de Aumann, ciertas extensiones integrales con la introducción previa de una seminorma integral adecuada.

Los resultados de Gould en [15], en donde se asume desde el principio el axioma de Stone, están contenidos en la integración abstracta de Riemann de [19].

Con todo ello, recientemente en [5] se presenta la prolongación de un funcional lineal y no negativo I definido sobre un retículo vectorial B de funciones reales en un conjunto arbitrario X. Se consigue así la generalización del proceso de prolongación de la integral de Daniell-Bourbaki. Aquí la extensión $\bar{B}$ de las funciones sumables lleva a la clase L^1 en dos situaciones especiales: la integral de Riemann sobre $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (espacio de las funciones reales continuas y de soporte compacto), y sobre el espacio $S(\Omega,\mathbb{R})$ de las funciones escalonadas correspondientes al anillo Ω generado por los intervalos $[a,b[\subset\mathbb{R}$.

Los resultados de [5] son sustancialmente completados por Günzler en [21], en donde se dan teoremas de convergencia para la integral $\bar{I}$ allí definida. Un dato importante que se extrae de la presentación de la integral abstracta de Riemann, así como de los resultados de [21], es que en el caso finitamente aditivo la convergencia casi en todo punto no es útil para obtener teoremas de convergencia del tipo de Lebesgue. Se advierte entonces la necesidad de usar una adecuada convergencia en medida localizada: la convergencia I-local. Este concepto, que ha sido introducido en [21], supone la generalización de la convergencia μ-local de [18], y en consecuencia, contiene para el caso de una medida finitamente aditiva y finita sobre un álgebra, la convergencia en μ-medida de Dunford-Schwartz [12].

Mediante el uso de la convergencia I-local, la extensión integral que se desarrolla en esta memoria, considera la situación abstracta siguiente: el funcional lineal no negativo I sobre B se prolonga al $\bar{\mathbb{R}}$-retículo vectorial $R_1(B,I)$ de las funciones I-integrables, conservando tal extensión las propiedades de la integración abstracta de Riemann respecto de una medida finitamente aditiva.

En este proceso no se exige ninguna condición de continuidad del funcional I, tampoco X tiene ninguna propiedad topológica, y el axioma de Stone no es necesitado. Claramente, cuando alguna condición de éstas es añadida se prueban propiedades adicionales de las funciones I-integrables. En particular, esta extensión contiene la clase $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$, y con ello, la μ-integrabilidad en el sentido de Dunford-Schwartz. Para medidas σ-aditivas sobre un σ-anillo se tiene $\overline{B} = R_1 = L^1$ módulo funciones nulas.

En situaciones similares, la comparación de nuestros resultados con algunas referencias bibliográficas antes citadas, nos lleva a los siguientes comentarios resumidos:

En los trabajos de Aumann [3], Loomis [26] y Bichteler [4], se presenta la integración propia de Riemann (clase $R_{prop}(B,I)$), que está contenida estrictamente en $R_1(B,I)$, y que en nuestro contexto sería la clausura de B en $\mathbb{R}^X$ respecto de la seminorma integral $I^-(f) := \{I(g);\ f \leq g \in \in B\}$.

Loomis define también una tercera extensión ("one-side--completation U"), que se corresponde con la clase $R_1(B,I) \cap \mathbb{R}^X$. Esta misma extensión puede obtenerse con las técnicas que usa Schäfke en [31] si previamente se introduce otra seminorma integral adecuada: la "localización" de I^-.

Por otra parte, dado que sólo existe una relación general posible entre la clase $\bar{B}$ de las funciones sumables y $R_1(B,I)$: $R_1(B,I) \subset \bar{B}$ módulo funciones nulas (situación que generaliza los resultados de [6]), se analiza con detalle bajo qué condiciones se pueden establecer otras relaciones entre ellas, dándose algunos ejemplos de interés.

Finalmente, cabe señalar que la generalización así lograda de la Riemann-μ-integrabilidad, sugiere, entre otros, el estudio posterior de una teoría de funciones medibles, y la consideración de ciertas estructuras (algebráicas o topológicas) sobre el conjunto X o el retículo vectorial inicial B.

Pasamos a indicar brevemente los resultados fundamentales de la memoria:

CAPITULO I: Desarrollamos en este Capítulo el proceso de extensión integral con la convergencia I-local. Así, en la definición 2.1, se generaliza la convergencia μ-local de [20]: la sucesión de funciones $(f_n)_n \subset \bar{\mathbb{R}}^X$ se dice que converge I-localmente a $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, si para cada $0 \leq h \in B$ se verifica que $I^-(|f_n - f| \wedge h) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, siendo $I^-(f) := \inf \{I(g);\ f \leq g \in B\}$, con $\sup \emptyset := -\infty$, y $\infty - \infty := 0$. Esta definición tiene un buen comportamiento respecto de las operaciones algebráicas definidas en $\bar{\mathbb{R}}^X$.

Con ello, la clase $R_1(B,I)$ de las funciones I-integrables la constituye todas las funciones $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ para las que existe una sucesión I-Cauchy $(h_n)_n \subset B$ tal que $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$; y se define su integral por $I(f) = \lim I(h_n)$, $n\to\infty$. $R_1(B,I)$ es un $\overline{\mathbb{R}}$-retículo vectorial e I es lineal y monótono en él.

En el caso especial de considerar espacios (X,Ω,μ) de medida finitamente aditiva, si I_μ es la integral usual de una función escalonada correspondiente al anillo Ω, las convergencias I_μ-local y μ-local son equivalentes. Además, si Ω es un álgebra y $\mu(X) < \infty$, ambas coinciden con la convergencia en medida de [12]. En resumen, la integración abstracta de Riemann está comprendida en el proceso de extensión que hemos desarrollado aquí.

En el mismo contexto, la clase $R_{prop}(B,I)$ de las funciones Riemann-integrables (clausura de B respecto de la seminorma integral I^-), está contenida estrictamente en $R_1(B,I)$, (proposición 3.25); y pueden describirse las funciones Riemann-integrables como las funciones I-integrables que están acotadas por una función elemental.

Estos resultados permiten probar en el teorema 3.30 que las funciones I-integrables no negativas son aquellas funciones tales que $I^+(f) := -I^-(-f) < \infty$ y $f \wedge h$ es Riemann-integrable para toda $h \in B$, $h \geq 0$.

Las propiedades que acabamos de enunciar nos llevan a concluir que los trabajos clásicos de extensión de funcionales lineales de [3] y [26], están subsumidos en nuestro estudio.

CAPITULO II: En el apartado 4 de este Capítulo se presenta un bloque importante de propiedades relativas a la convergencia I-local de sucesiones de funciones I-integrables.

En primer lugar, como consecuencia de que el ínfimo de cada función f I-integrable con cualquier función g sumable no negativa es una función sumable, y además, $\overline{I}(f \wedge g) \leq$ $\leq I(f)$, se obtienen dos resultados importantes:

a) La condición suficiente para que una función I-integrable sea sumable es que esté acotada por una función sumable.

b) Si $(f_n)_n \subset R_1(B,I)$ con $I(|f_n|) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, entonces $(f_n)_n \longrightarrow 0(I^-)$.

A continuación, usando la densidad de B en $R_1(B,I)$ respecto de la seminorma $\|f\| = I(|f|)$, y la propiedad b) anterior, se prueba que la clase $R_1(B,I)$ es cerrada respecto de la convergencia en I^- (teorema 4.5).

Los resultados anteriores nos permiten probar en el apartado 5, con cierta sencillez, los teoremas de convergencia de Lebesgue: teorema 5.1 (de la convergencia monótona) y teorema 5.7 (de la convergencia dominada). Sus enunciados están dados en la forma clásica, y claro está, en términos de la convergencia en I^- que aquí hemos utilizado. Por otra parte, ambos teoremas pueden generalizarse mediante la relación "$\leq (I^-)$" de la definición 3.16: $f \leq g(I^-)$ si y sólo si $(f - g)^+ = O(I^-)$.

Por último, cabe señalar que para cualquier función f de $R_1(B,I)$, la relación que existe entre las diferentes "prolongaciones" de I que hemos usado es la siguiente: $I^+(f) \leq \underline{I}(f) \leq I(f) \leq \overline{I}(f) \leq I^-(f)$. Probándose que si f es no negativa, entonces $I^+(f) = \underline{I}(f) = I(f)$, con lo que encontramos la definición usual, como una integral inferior, de la integral de una función Riemann-μ-integrable.

CAPITULO III: Ya hemos insistido en el hecho de que la extensión integral $I|B \longrightarrow I|R_1(B,I)$ que desarrolla esta memoria, generaliza la integración abstracta de Riemann $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ respecto de una medida finitamente aditiva, y en particular, contiene la integración en el sentido de Dunford-Schwartz. Esta situación nos proporciona numerosos ejemplos dados en [20] y [21], para el caso más estudiado, de que se parta de un sistema de medida (X,Ω,μ) en la construcción de la integral.

En el contexto de sistemas integrales arbitrarios (X,B,I), y en relación con las prolongaciones I, $\overline{I}$ e I^{-}, en el apartado 6 del presente Capítulo se completan algunas de las relaciones que hemos encontrado con otras extensiones integrales.

En concreto, se establecen condiciones necesarias y suficientes para afirmar relaciones de inclusión entre las clases de funciones I-integrables y sumables; probándose que la única relación general que existe entre ambas clases es que $R_1(B,I) \subsetneq \overline{B}$ módulo funciones I^{-}-nulas (teorema 6.4). Este resultado generaliza el correspondiente teorema de [6] para el caso finitamente aditivo.

A partir de aquí, la proposición 6.5 demuestra que para sistemas (X,B,I) en los que cualquier subconjunto de X que sea I^{-}-nulo es sumable, se tiene $R_1(B,I)$ contenido en $\overline{B}$.

En el apartado 7 se prueban nuevas caracterizaciones de la I-integrabilidad. En especial, el teorema 7.4 reproduce el correspondiente resultado para las funciones sumables, estableciendo que para sistemas stonianos y continuos superiormente (C_∞ : $I(f \wedge n) \longrightarrow I(f)$, si $n\to\infty$, $f \in B$, $f \geq 0$), la clase de las funciones I-integrables es cerrada respecto de la integración impropia.

Finalmente, completamos este Capítulo con un resultado obligado, como es el teorema 7.9 que establece que el proceso de extensión $I|B \longrightarrow I|R_1(B,I)$ es "iteradamente cerrado", esto es, la extensión $\tilde{I}|R_1(\tilde{B},\tilde{I})$ coincide con $I|R_1(B,I)$, siendo $\tilde{B} := R_1(B,I) \cap \mathbb{R}^X$ e $\tilde{I} := I/\tilde{B}$.

Hemos añadido a la redacción de esta memoria en el apartado 7.b. un breve resumen de la construcción de las funciones sumables de [5]; este estudio, junto a la parte de su desarrollo de [21], son el punto de partida de nuestros resultados.

También hemos incluido en el Apéndice otro punto de referencia importante: la μ-integración abstracta de Riemann, dada en [17] y [18], con algunas notas comunicadas por H. Günzler. Su relación con la integración de Dunford-Schwartz, aunque ya viene referida en [19] y [20], entre otros trabajos, la hemos desarrollado expresamente en este resumen.

, sólo me queda expresar mi más sincero
:

anuel Díaz Carrillo por su abnegado trabajo. cción y ayuda habría sido imposible la e esta memoria.

Pablo Bobillo Guerrero por haberme introducido de la Medida e iniciado en esta línea de , con resultados que se encuentran en la base jo.

Hans Günzler de la Universidad de Kiel por su us amables sugerencias.

os demás miembros de este Departamento por su tímulo y apoyo.

Granada, Mayo de 1990.

Pilar Muñoz Rivas

1. PRELIMINARES: $\overline{\mathbb{R}}$-RETICULOS VECTORIALES. PRIMERAS EXTENSIONES DE UN SISTEMA DE LOOMIS.

a. $\overline{\mathbb{R}}$-RETICULOS VECTORIALES.

En esta primera parte fijamos alguna notación y terminología preliminar básica para el desarrollo posterior.

Se considera el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ y la recta real ampliada $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{ -\infty, \infty \}$. En $\overline{\mathbb{R}}$ es conocido el problema que se plantea al escribir $\infty - \infty$; para evitar confusiones aquí se adoptan los siguientes conceptos o definiciones.

Para a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, se definen

$$a \dotplus b := \begin{cases} a + b \ , & \text{definida usualmente en } \overline{\mathbb{R}} \\ 0 \ , & \text{si } a = -b \in \{ -\infty, \infty \} \end{cases}$$

$$a \dot- b := a \dotplus (-b).$$

$$a \dot{+} b := \begin{cases} a + b \ , & \text{definida usualmente en } \overline{\mathbb{R}} \\ \infty \ , & \text{si } a = -b \in \{ -\infty, \infty \} \end{cases}$$

$$a \dot{-} b := a \dot{+} (-b).$$

Ambas operaciones son conmutativas, pero, mientras la operación $+$ es claramente no asociativa, la suma $\dot{+}$ sí lo es.

El siguiente lema resume las propiedades elementales de la nueva adición $\dot{+}$.

LEMA. 1.1.

Para la operación $\dot{+}: \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dados a, b, c, d $\in \overline{\mathbb{R}}$ se tiene:

i) $\dot{+}$ *es asociativa:* $a \dot{+} (b \dot{+} c) = (a \dot{+} b) \dot{+} c$;

ii) *Si* $a \le b$, *entonces* $a \dot{+} c \le b \dot{+} c$;

iii) *Si* $a \dot{+} b \le c$, *entonces* $a \le c \dot{+} (-b) = c \dot{-} b$;

iv) *Si* $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ *se tiene:* $\alpha (a \dot{+} b) = \alpha a \dot{+} \alpha b$ *(tambien es cierto para* $+, -, \dot{-}$*)* ;

v) $|a \dot{+} b| \le |a \dot{+} c| + |c \dot{+} b|$ *(tambien se verifica para* $+, -, \dot{-}$*)* ;

vi) $|(a \dot{+} b) - (c \dot{+} d)| \le |a - c| \dot{+} |b - d| \le$
$\le |a \dot{-} c| + |b \dot{-} d|$;

vii) *Si* $a \le b$ *y* $c \le d$ *antonces,* $a \dot{+} c \le b \dot{+} d$.

Para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \vee b := máx\ (a,b)$, $a \wedge b := min\ (a,b)$ $a^+ := a \vee 0$, $a^- := -(a \wedge 0)$.

Claramente, $a = a^+ - a^-$ y $|a| = a^+ + a^-$, para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

viii) Si $0 \le b$, $0 \le c$, $0 \le d$ y $a \le b + c$, entonces

$$a \wedge d \le b \wedge d + c \wedge d \ ;$$

Así mismo, se define una nueva operación: para a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $b \ge 0$,

$$a \cap b := (\ a \wedge b) \vee (-b).$$

Obsérvese que con la notación de M. H. Stone, se tiene $a \cap b =$ "mid $(-b,a,b)$" $:= máx\{min(-b,a), min(a,b), min(-b,b)\}$.

Se comprueba fácilmente la validez de las siguientes propiedades

ix) Si $c \ge 0$ se tiene:

$$|a \cap c - b \cap c| \le 2\ (|a - b| \wedge c)$$

x) Si $a, b, c \in [0,\infty]$, entonces

$$(a + b) \wedge c = (a \wedge c + b \wedge c) \wedge c$$

xi) Si $a, b, c \in]-\infty,\infty]$, entonces

$$(a - b) \wedge c = a \wedge (b + c) - b,$$

siempre que el segundo miembro tenga sentido.

xii) Si $a \le b$, entonces

$$b \wedge c - a \wedge c \le b - a$$

xiii) Si $a \le c$, $b \le c$, entonces

$$a \le a \wedge b + c - b$$

(Véase [29], ejercicios 1-6, p.17, [20], p. 339).

Las operaciones definidas en $\overline{\mathbb{R}}$ inducen las correspondientes operaciones puntuales en el conjunto $\overline{\mathbb{R}}^X$ de las funciones numéricas definidas sobre el conjunto arbitrario X no vacío.

Recordemos que la clase $B \subset \mathbb{R}^X$ se dice un $\mathbb{R}$-**retículo vectorial** si para f, $g \in B$, $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que: αf, $f + g$, $f \wedge g$, $f \vee g \in B$. Para clases de funciones numéricas se da la siguiente definición.

DEFINICION 1.2.

La clase $M \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ *se dirá un* $\overline{\mathbb{R}}$-**retículo vectorial** *si para* f, $g \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\alpha f,\ f \vee g,\ f \wedge g,\ |f| \in M,$$

y además si $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *con* $h(x) = f(x) + g(x)$, *para todo* x *con* $f(x)$ *y* $g(x) \in \mathbb{R}$, *entonces* $h \in M$.

En particular, con esta definición podemos asegurar que los $\overline{\mathbb{R}}$-retículos vectoriales conservan las dos sumas definidas en $\overline{\mathbb{R}}$, es decir:

Dado un $\overline{\mathbb{R}}$-*retículo vectorial* M, *se verifica que si* f, $g \in M$, *entonces* $f + g$ *y* $f \dotplus g \in M$.

La definición dada es la usual en textos clásicos como [30], [7], [29], etc...

El lema 1.1 trasladado a $\overline{\mathbb{R}}^X$ establece algunas de las propiedades de la suma $\dot{+}$ en $\overline{\mathbb{R}}^X$. Además de éstas, debemos señalar las siguientes relaciones que jugarán un papel importante en la prueba de algunos resultados:

Para f, g, $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $h \geq 0$ se verifican

xiv) $|f \wedge h - g \wedge h| \leq |f - g|$ *(Desigualdad de Birkhoff)*

xv) $|f \vee h - g \vee h| \leq |f - g|$;

siendo estas dos desigualdades también ciertas para la operación $\dot{-}$.

Notaremos $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$. Algunas propiedades adicionales, aparte de las ya citadas, pueden encontrarse en [3] p. 442 y [20] pp. 340, 354.

b. PRIMERAS EXTENSIONES DE UN SISTEMA DE LOOMIS.

Consideramos un $\mathbb{R}$-retículo vectorial B de funciones reales definidas en un conjunto arbitrario X no vacío, con las operaciones y relaciones $+$, $\alpha.$, $=$, $\le$, $\wedge$, $\vee$, $|\ |$, definidas puntualmente en X, y un funcional lineal $I:B\longrightarrow\mathbb{R}$ no negativo, esto es, $I(f)\ge 0$ si $0\le f\in B$. A la terna (X,B,I) se le llama un **sistema de Loomis**.

En todo lo que sigue asumimos la terminología y resultados obtenidos en la extensión integral $\overline{I}:\overline{B}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ dada en [5].

Resumimos aquí estos conceptos en la forma en que van a ser utilizados por nosotros.

La primera extensión de la clase B es definida por

$$B^+ := \{\ f\in\overline{\mathbb{R}}^X;\ f=\sup g,\ g\in B,\ g\le f\ \} - \{-\infty\} =$$

$$= \{\ f\in\ ]-\infty,\infty]^X;\ para\ cada\ x\in X\ existe\ h_n\in B\ con\ h_n\le f,\ y\ (h_n(x))\longrightarrow f(x)\ \}.$$

Para cualquier $f\in\overline{\mathbb{R}}^X$, se define

$$I^+(f) := \sup\{\ I(g);\ g\in B,\ g\le f\ \},\ \text{con}\ \sup\emptyset := -\infty.$$

Dualmente se definen $B^- := -B^+$ y $I^-(f) := -I^+(-f)$.

B^+ es estable para la suma y el producto por escalares no negativos, y es un retículo cerrado por supremos. I^+ es monótono y no negativo, y es positivamente homogéneo y superaditivo, esto es,

$$I^+(\alpha f) = \alpha\, I^+(f), \text{ para } f \in \overline{\mathbb{R}}^X,\ \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

$$I^+(f) + I^+(g) \le I^+(f + g), \text{ para } f,\ g \in \overline{\mathbb{R}}^X.$$

Para obtener la prolongación aditiva del sistema de Loomis, se define

$$B_+ := \{\ f \in B^+ ; I^+(f + g\ ) = I^+(f) + I^+(g), \text{ para toda } g \in B^+\}$$

y $B_- := -B_+$.

Con ello se tiene $B \subset B_+ \subset B^+$, I^+ es aditivo en B^+, y I^+ e I^- coinciden en $B_+ \cap B_-$.

Ahora, a partir de las extensiones B_+ y B_- se definen, de la forma usual, para cualquier $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, las integrales superior e inferior.

$\overline{I}(f) := \inf \{\ I^+(g);\ g \in B_+,\ f \le g\ \}$, con $\inf \emptyset := \infty$,

y $\underline{I}(f) := -\overline{I}(-f)$.

$\overline{I}$ es monótona y positivamente homogénea, y subaditiva, esto es,

$$\overline{I}(f + g) \le \overline{I}(f) + \overline{I}(g), \text{ para toda } f,\ g \in \overline{\mathbb{R}}^X.$$

Para cualquier $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ se tienenlas relaciones

$$I^+(f) \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le I^-(f).$$

Finalmente, la clase de las funciones I-sumables es definida por

$$\overline{B} := \{ f \in \overline{\mathbb{R}}^X;\ \underline{I}(f) = \overline{I}(f) \in \mathbb{R} \}$$

Si $f \in \overline{B}$, se define $I(f) = \overline{I}(f)$.

Obviamente $B \subset \overline{B}$ y si $f \in B_+ \cup B_-$ y $I(f) \in \mathbb{R}$, entonces $f \in \overline{B}$.

$\overline{B}$ es un retículo, cerrado por las operaciones $+$, $-$, $+$, $-$. Además, si f, $g \in \overline{B}$ y $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ tal que $h(x) = f(x) + g(x)$ en los puntos $x \in X$ para los cuales $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{R}$, entonces $I(h) = I(f) + I(g)$ (Teorema 5-2 en [5]).

E es denso en $\overline{B}$: $f \in \overline{B}$, si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $h \in B$ verificando $\overline{I}(|f - h|) < \varepsilon$ (teorema 5-6 en [5]).

$\overline{B}$ es cerrado respecto de la $\overline{I}$-convergencia: Si $(f_n)_n \subset \overline{B}$, $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $\overline{I}(|f_n - f|) \longrightarrow 0 \Rightarrow f \in \overline{B}$, $(\overline{I}(f_n)) \longrightarrow \overline{I}(f)$. (Corolario III, [21]).

Además si $f \in \overline{B}$ entonces $|f| \in \overline{B}$.

Una descripción detallada de los conceptos y propiedades que acabamos de resumir puede verse en [5]. Más recientemente, en [21], se han obtenido nuevos resultados, entre los que destacan los teoremas de convergencia para las primeras extensiones de un sistema de Loomis y la clase de funciones sumables.

Finalmente, señalaremos que para el proceso de extensión integral estudiado en esta memoria, no se requieren condiciones adicionales sobre el retículo vectorial incial o sobre el funcional lineal definido en él. No obstante, para obtener determinadas propiedades que abstraigan las ya conocidas en el caso finitamente aditivo, es preciso añadir ciertos postulados o axiomas al sistema de Loomis general. Véanse, por ejemplo, [32], [26], [2], [20], [15],.., que hacen uso de los siguientes:

El retículo vectorial B se dice **stoniano** si $f \wedge 1 \in B$, para toda $f \in B$.

Un sistema de Loomis (X,B,I) se dice **continuo superiormente** o C_∞, si $\lim \underline{I}(f \wedge r) = I(f)$, cuando $r \to \infty$, para toda $f \in B$, $f \geq 0$; y se dice **continuo inferiormente** o C_0, si $\lim \overline{I}(f \wedge r) = 0$, cuando $r \to 0$, para toda $f \in B$, $f \geq 0$.

2. CONVERGENCIA I-LOCAL.

En [5] se presenta un proceso de extensión integral que generaliza la integral de Daniell-Bourbaki. Dicho proceso, que queda resumido en el apartado anterior, asume una situación general: un $\mathbb{R}$-retículo vectorial de funciones arbitrario B, y un funcional lineal no negativo I en B.

Cuando se considera un semianillo Ω de subconjuntos de un conjunto arbitrario X no vacío, y una medida finitamente aditiva μ en Ω, (brevemente, hablaremos del espacio de medida finitamente aditiva (X,Ω,μ)), en [20], [18], se introduce con generalidad la clase $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ de las funciones Riemann-μ-integrables (véase Apéndice), que resulta ser la análoga al espacio $L^1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ de las funciones Lebesgue-μ-integrables. Para la construcción y estudio de la clase $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ es esencial introducir un tipo de convergencia localizada: la convergencia μ-local. Así, en la situación general de un sistema de Loomis arbitrario, para obtener resultados satisfactorios en la extensión integral, es preciso establecer el nuevo concepto de convergencia localizada.

En este apartado introducimos la **convergencia I-local** y sus propiedades básicas.

Se considera el sistema de Loomis arbitrario (X,B,I). Sea $T:\overline{\mathbb{R}}_+^X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ cualquier función monótona, es decir, $T(f) \leq T(g)$, si $f \leq g$, $f, g \in \overline{\mathbb{R}}_+^X$. Nótese que los funcionales I, I^- e $\bar{I}$ descritos en el apartado 1.b son ejemplos de este tipo de funciones monótonas T.

DEFINICION 2.1.

Sea una sucesión $(f_n)_n$ *de funciones de* $\overline{\mathbb{R}}^X$ *y sea* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$. *Entonces,* $(f_n)_n \longrightarrow f(T)$ *significa que para cada función* $h \in B$, $h \geq 0$, *se verifica que:*

$$T(|f_n - f| \wedge h) \longrightarrow 0, \text{ cuando } n\to\infty.$$

Con nuestra notación, $\infty - \infty := 0$.

Recordemos que para cualquier $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, se define $I^-(f) = \inf \{I(g);\ g \in B,\ f \leq g\}$, con $\inf \emptyset = \infty$. Con ello, si tomamos en la definición dada $T = I^-$ se tiene que $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, si y sólo si, *para cada* $\varepsilon > 0$ *y* $h \in B$, $h \geq 0$, *existen* $n_0(\varepsilon,h) \in \mathbb{N}$ *y* $k_n \in B$, *tales que*

$$|f_n - f| \wedge h \leq k_n \quad y \quad I(k_n) < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Nótese que la definición 2.1, tal y como se presenta en &1 [20], puede darse para cualquier red $(f_\iota)_{\iota\in J}$ con f_ι, $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$

y J un conjunto dirigido.

En relación con las operaciones algebráicas definidas en $\overline{\mathbb{R}}^X$, la convergencia anterior tiene las propiedades siguientes.

PROPOSICION 2.2.

Sean $(f_n)_n$, $(g_n)_n \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *tales que* $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ *y* $(g_n)_n \longrightarrow g(I^-)$; *entonces se verifican:*

i) $(f_n + g_n)_n \longrightarrow f + g(I^-)$;

ii) $(f_n \dot{+} g_n)_n \longrightarrow f \dot{+} g(I^-)$;

iii) $(\alpha f_n)_n \longrightarrow \alpha f(I^-)$;

iv) $(|f_n|)_n \longrightarrow |f|(I^-)$;

v) $(f_n \wedge g_n)_n \longrightarrow f \wedge g(I^-)$ *y* $(f_n \vee g_n)_n \longrightarrow f \vee g(I^-)$.

Demostración:

i) Nótese que se verifica

$|(f + g) - (f_n + g_n)| \leq |(f - f_n) + (g - g_n)|$ en todo X.

En virtud de la desigualdad triangular del valor absoluto se tiene que

$$|(f + g) - (f_n + g_n)| \leq |(f - f_n) + (g - g_n)|$$
$$\leq |f - f_n| + |g - g_n|,$$

y por el apartado *(viii)* del lema 1.1 se consigue

$$|(f+g)-(f_n+g_n)| \wedge h \le |f-f_n| \wedge h + |g-g_n| \wedge h$$

Por hipótesis, dados $\varepsilon > 0$ y $0 \le h \in B$, existen n_0, $n_1 \in \mathbb{N}$ y k_n, $l_n \in B$ tales que

$$|f_n - f| \wedge h \le k_n \ \text{ y } \ I(k_n) < \varepsilon/2, \text{ para todo } n \ge n_0 \ ;$$

$$|g_n - g| \wedge h \le l_n \ \text{ y } \ I(l_n) < \varepsilon/2, \text{ para todo } n \ge n_1 \ .$$

Sea $n' := \text{máx}\ (n_0, n_1)$ y $h_n := k_n + l_n \in B$.

Con ello, $|(f+g)-(f_n+g_n)| \wedge h \le k_n + l_n = h_n$ y $I(h_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, para todo $n \ge n'$.

ii) Análogamente al apartado anterior se tiene

$$|(f \dot{+} g) - (f_n \dot{+} g_n)| \wedge h \le |f - f_n| \wedge h + |g - g_n| \wedge h.$$

iii) Si $\alpha = 0$ es trivial. Se considera entonces $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$. Por definición, dados $\varepsilon > 0$ y $0 \le h \in B$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$, $k_n \in B$ verificando que:

$$|f - f_n| \wedge h \le k_n \ \text{ y } \ I(k_n) < \varepsilon, \text{ para todo } n \ge n_0.$$

Se considera $|\alpha f - \alpha f_n| \wedge h = |\alpha|\ |f - f_n| \wedge h =$

$$= |\alpha| \left[|f - f_n| \wedge \frac{h}{|\alpha|} \right] \le |\alpha|\ k_n =: l_n \in B,$$

y además $I(l_n) = |\alpha|\ I(k_n) < |\alpha|\ \varepsilon.$

Luego se tiene que $(\alpha f_n)_n \longrightarrow \alpha f(I^-)$.

iv) Es inmediato sin más que considerar la desigualdad

$$\big|\, |f| - |f_n| \,\big| \le |f - f_n|$$

v) Como consecuencia de las desigualdades siguientes

$$|f_n \wedge g_n - f \wedge g| \le |f_n \wedge g_n - f_n \wedge g| + |f_n \wedge g - f \wedge g| \le$$
$$\le |g_n - g| + |f_n - f|,$$

$$|f_n \vee g_n - f \vee g| \le |g_n - g| + |f_n - f|,$$ se obtiene el resultado.

Para el funcional monótono $T:\overline{\mathbb{R}}^X_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ se da el siguiente concepto de **sucesión *T*-Cauchy**.

DEFINICION 2.3.

Sea T en las condiciones de la definición 2.1 . Una sucesión $(f_n)_n \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ se dice que es una **sucesión *T*-Cauchy** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq n_0$ se verifica que:*

$$T(|f_n - f_{n+k}|) < \varepsilon, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

LEMA 2.4.

Sean $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ y dos sucesiones $(f_n)_n$, $(g_n)_n \subset B$ verificando $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ y $(g_n)_n \longrightarrow f(I^-)$.
En estas condiciones se tiene que: $(f_n - g_n)_n \longrightarrow 0(I^-)$.

Demostración:

Es inmediato aplicando la proposición 2.2.

LEMA 2.5.

Si $(f_n)_n \subset B$ es una sucesión I-Cauchy, entonces existe el límite de $\left(I(f_n)\right)_n$ cuando $n \to \infty$.

Demostración:

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I(|f_n - f_{n+k}|) < \varepsilon, \text{ para todos } k \in \mathbb{N}, \text{ y } n \geq n_0.$$

Con ello se tiene que:

$$|I(f_n) - I(f_{n+k})| = |I(f_n - f_{n+k})| \leq I(|f_n - f_{n+k}|) < \varepsilon,$$

luego $\left(I(f_n)\right)_n$ es una sucesión de Cauchy de números reales, y, por tanto, convergente.

LEMA 2.6.

Sea $(f_n)_n \subset \overline{B}$, *una sucesión de funciones sumables,* $\overline{I}$*-Cauchy y tal que* $(f_n)_n \longrightarrow 0(I^-)$. *Entonces*

$$\overline{I}(|f_n|) \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Demostración:

Dado que para toda $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ es $\overline{I}(f) \leq I^-(f)$, se tiene que

$$(f_n)_n \longrightarrow 0(I^-) \text{ implica } (f_n)_n \longrightarrow 0(\overline{I})$$

Por tanto, obtenemos que $(|f_n|) \longrightarrow 0(\overline{I})$, donde $(|f_n|)$ es también una sucesión $\overline{I}$-Cauchy. En consecuencia se puede suponer $f_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$, por ser (f_n) una sucesión $\overline{I}$-Cauchy, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que si $n, m \geq n_0$ se verifica que:

$$\overline{I}(|f_n - f_m|) < \varepsilon.$$

Se considera $f_{n_0} \in \overline{B}$. En virtud del teorema 5.6 de [5], de densidad de B en $\overline{B}$, existe $h(\varepsilon) \in B$ tal que $\overline{I}(|f_{n_0} - h|) \leq \varepsilon$, y dado que

$$\left|f_{n_0} - |h|\right| = \left||f_{n_0}| - |h|\right| \leq |f_{n_0} - h|,$$

se puede suponer $h \geq 0$.

Por otro lado, es claro que

$$|f_n| \leq |f_n \wedge h| + |f_n \wedge h - f_n \wedge f_{n_0}| +$$
$$+ |f_n \wedge f_{n_0} - f_{n_0} \wedge f_{n_0}| + |f_{n_0} - f_n|,$$

que por aplicación de la desigualdad de Birkhoff nos lleva a la desigualdad

$$|f_n| \leq |f_n \wedge h| + |h - f_{n_0}| + |f_n - f_{n_0}| + |f_{n_0} - f_n|,$$

de donde se concluye que

$$\overline{I}(|f_n|) \leq \overline{I}(|f_n \wedge h|) + 3\,\varepsilon, \text{ para } n \geq n_0.$$

Por último, ya que $(f_n)_n \longrightarrow O(I^-)$ por hipótesis, se tiene que $(f_n)_n \longrightarrow O(\overline{I})$, de aquí, para $\varepsilon > 0$ y $h(\varepsilon) = h \in B$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\overline{I}(|f_n| \wedge h) = \overline{I}(f_n \wedge h) < \varepsilon, \text{ para } n \geq n_1.$$

En resumen, para $n \geq máx\,(n_0, n_1)$ se tiene que

$$\overline{I}(|f_n|) \leq \overline{I}(|f_n \wedge h| + 3\,\varepsilon < 4\,\varepsilon.$$

Luego $\left(\overline{I}(|f_n|)\right) \longrightarrow O(I^-)$, cuando $n \to \infty$, como queríamos demostrar.

COROLARIO 2.7.

Sean $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ y dos sucesiones I-Cauchy $(f_n)_n$, $(g_n)_n \subset B$. Si $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ y $(g_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, entonces:

$$\lim I(f_n) = \lim I(g_n).$$

Demostración:

En virtud de los lemas 2.4 y 2.6 se tiene que

$$\overline{I}(|f_n - g_n|) = I(|f_n - g_n|) \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Ahora bien, como $|I(f_n) - I(g_n)| \leq I(|f_n - g_n|) =$

$$= \overline{I}(|f_n - g_n|) \longrightarrow 0,$$

entonces, tanto el $\lim I(f_n)$, como el $\lim I(g_n)$ (que existen por el lema 2.5) coinciden.

Obsérvese que, en general, la I^--convergencia implica la $\overline{I}$-convergencia, ya que $\overline{I}(f) \leq I^-(f)$ para cualquier $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$. El recíproco es falso, como prueba el ejemplo 2 de [21].

Finalmente, en relación con la $\overline{I}$-convergencia, se tiene la siguiente

PROPOSICION 2.8.

Sean $(f_n)_n$, $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ *y* $g \in \bar{B}$ *tal que* $|f - f_n| \leq g$, $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$(h_n)_n \longrightarrow f(\bar{I}) \quad \textit{si y sólo si} \quad \bar{I}(|f_n - f|) \longrightarrow 0.$$

Demostración:

Si $(f_n)_n \longrightarrow f(\bar{I})$, por definición, dado $\varepsilon > 0$ y $h \in B$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$, $k_n \in B_+$, tales que $|h_n - f| \wedge h \leq k_n$ y $I^+(k_n) < \varepsilon$, para $n \geq n_0$.

Por otra parte, por definición de $\bar{B}$, para $g \in \bar{B}$ y $\varepsilon > 0$ existe $t \in B_+$ tal que $0 \leq g \leq t$ y $I^+(t) \leq \bar{I}(g) + \varepsilon < \infty$. Además para $\varepsilon > 0$ y $0 \leq t \in B_+$, se tiene $h \in B$ verificando que $h \leq t$ y $I^+(t) \leq I(h) + \varepsilon$.

Ahora, en virtud de la desigualdad siguiente

$$|f - f_n| \leq |f - f_n| \wedge h + (t - h), \text{ se tiene que}$$

$$\bar{I}(|f - f_n|) \leq \bar{I}(|f - f_n| \wedge h) + I^+(t - h) \leq$$

$$\leq I^+(k_n) + I^+(t) - I(h) < 2\,\varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Por tanto, $\bar{I}(|f - f_n|) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

En el otro sentido es trivial ya que $\bar{I}(|f - f_n| \wedge h) \leq \bar{I}(|f - f_n|)$, para toda $h \in B$, $h \geq 0$.

Más adelante se dan condiciones suficientes para que la $\bar{I}$-convergencia implique la I^--convergencia, véase por ejemplo el lema 3.26 y la nota 5 de éste Capítulo.

COROLARIO 2.9.

Sean $(f_n)_n$, $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $g \in \overline{B}$ *tal que* $|f - f_n| \leq g$, $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$(f_n)_n \longrightarrow f(I^-) \quad \textit{implica} \quad \overline{I}(|f_n - f|) \longrightarrow 0.$$

Demostración:

Es evidente sin más que recordar que $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ implica $(f_n)_n \longrightarrow f(\overline{I})$ y aplicar la proposición 2.8.

3. LA CLASE DE LAS FUNCIONES I-INTEGRABLES.

a. LA CLASE $R_1(B,I)$ DE LAS FUNCIONES I-INTEGRABLES. PROPIEDADES ELEMENTALES.

Una vez generalizada la convergencia μ-local (definición 2.1), se introduce ahora la correspondiente clase de funciones integrables, que contiene como caso particular la clase de funciones Riemann-μ-integrables $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$. El proceso de extensión integral que se sigue es paralelo al caso aditivo y subsume todos los resultados conocidos.

DEFINICION 3.1.

Una función $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ se dirá **I-integrable** *si existe una sucesión $(h_n)_n \subset B$, I-Cauchy, y tal que $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$.*

Se nota por $R_1(B,I)$ la clase de todas las funciones I-integrables.

Las propiedades de la I^{-}-convergencia estudiada en el apartado 2, nos permiten extender de forma natural el funcional lineal I a la clase $R_1(B,I)$.

Sea $f \in R_1(B,I)$ y sea $(h_n)_n$ una sucesión I-Cauchy que define a f, entonces se define

$$I(f) := \lim I(h_n).$$

El corolario 2.7 asegura la consistencia de la definción anterior, es decir, el valor $I(f)$ es independiente de la sucesión $(h_n)_n$ asociada a f. Por tanto, se tiene un nuevo funcional real $I: R_1(B,I) \longrightarrow \mathbb{R}$. Brevemente, hablaremos del proceso de extensión de $I|B$ a $I|R_1(B,I)$.

Nota 1.

a) En [21] se usa la convergencia local en medida para redes, con la definción 2.1 particularizada para $T = \overline{I}$ (integral superior). Así, se prueban los siguientes teoremas de convergencia para la clase de funciones sumables.

Corolario II, & 1: $(f_n)_n,\ g \in \overline{B},\ f \in \overline{\mathbb{R}}^X,\ (f_n)_n \longrightarrow f(\overline{I}),$

$$|f_n - f| \le g \Rightarrow f \in \overline{B} \text{ y } \overline{I}(f_n) \longrightarrow \overline{I}(f).$$

Corolario VI, & 2: $(f_n)_n \subset \overline{B},\ f \in \overline{\mathbb{R}}^X,\ (f_n)_n \searrow,\ (f_n)_n \longrightarrow f(\overline{I}),$

$$\overline{I}(|f|) < \infty \Rightarrow f \in \overline{B} \text{ y } \overline{I}(f_n) \longrightarrow \overline{I}(f).$$

También son ciertos los correspondientes teoremas de convergencia para B^+ y B_+.

b) Aunque nos detendremos más adelante en esta cuestión, cabe hacer notar aquí que, a partir de un espacio de medida finitamente aditiva (X,Ω,μ), en [20] p. 69 se localiza la convergencia en μ-medida de Dunford-Schwartz [12] p. 104, introduciendo el concepto de convergencia μ-local, que equivale a la convergencia de la definición 2.1 con $T = I_\mu^-$, para el sistema de Loomis (X,B_Ω,I_μ) inducido por (X,Ω,μ). Se tiene así generalizada en la definición 2.1 la convergencia en medida localizada.

En los resultados siguientes se describen las propiedades básicas de $R_1(B,I)$ así como de la integral extendida I.

TEOREMA 3.2.

Sean $f \in R_1(B,I)$ y $g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ verificando $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$ tal que $f(x) \in \mathbb{R}$.

Entonces, $g \in R_1(B,I)$ y $I(f) = I(g)$.

Demostración:

Por definición de la clase $R_1(B,I)$, para f existe una sucesión I-Cauchy $(h_n)_n \subset B$ tal que $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$.

Obsérvese que para $h \in B$, $h \geq 0$ se tiene que

$|h_n - g| \wedge h \leq |h_n - f| \wedge h$ en todo X y para todo $n \in \mathbb{N}$,

por tanto $I^-(|h_n - g| \wedge h) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

Es decir, $(h_n)_n \longrightarrow g(I^-)$ con lo que $g \in R_1(B,I)$. Además $I(g) = \lim I(h_n) = I(f)$.

El siguiente resultado establece la aditividad de las funciones I-integrables.

TEOREMA 3.3.

Sean f, $g \in R_1(B,I)$ y $l \in \overline{\mathbb{R}}^X$ tal que $l(x) = f(x) + g(x)$ para cada $x \in X$ para el cual $f(x)$ y $g(x)$ son finitos.

Entonces, $l \in R_1(B,I)$ y $I(l) = I(f) + I(g)$.

Demostración:

Sean $(h_n)_n$, $(k_n)_n \subset B$ las sucesiones que definen a f y g, respectivamente. Para $h \in B$, $h \geq 0$ la desigualdad siguiente es cierta

$$|l - (h_n + k_n)| \wedge h \leq |f - h_n| \wedge h + |g - k_n| \wedge h$$

en todo X, $n \in \mathbb{N}$. Con ello, es inmediato que

$(h_n + k_n) \longrightarrow l(I^-)$, siendo $(h_n + k_n)_n \subset B$ una sucesión I-Cauchy. Por tanto $l \in R_1(B,I)$, y además

$I(l) = lim\ I(h_n + k_n) = lim\ I(h_n) + lim\ I(k_n) = I(f) + I(g)$, como queríamos demostrar.

PROPOSICION 3.4.

Si $f,\ g \in R_1(B,I)$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se tiene que:* $\alpha f,\ -f,\ f \wedge g,\ f \vee g \in R_1(B,I)$, *y* $I(\alpha f) = \alpha\ I(f)$, $I(-f) = -I(f)$, $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Demostración:

Se sigue directamente de las propiedades de la I^--convergencia dadas en la proposición 2.2, y de la linealidad de I.

COROLARIO 3.5.

Si $f \in R_1(B,I)$ *y* $h \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *tal que* $h(x) = 0$, *para todo* $x \in X$ *en el que* $f(x) \in \mathbb{R}$, *entonces* h, $|h| \in R_1(B,I)$ *y además*

$$I(h) = 0 = I(|h|).$$

Demostración:

Nótese que $h(x) = |h|(x)$ coincide con $f + (-f)$, para todo $x \in X$ para el cual f y $-f$ son finitos. Con ello, aplicando el teorema 3.3 se sigue el resultado.

Del teorema 3.2 se obtiene el siguiente resultado, por el que se establece el carácter cerrado de $R_1(B,I)$ para las operaciones de adición $+$ y $\dot{+}$ definidas en $\overline{\mathbb{R}}^X$ (definición 1.1).

COROLARIO 3.6.

Si $f,\ g \in R_1(B,I)$, entonces $f + g$ y $f \dot{+} g \in R_1(B,I)$, y además:

$$I(f + g) = I(f) + I(g) = I(f \dot{+} g).$$

Consecuencia inmediata del anterior resultado es el siguiente

COROLARIO 3.7.

Si $f \in R_1(B,I)$ y $g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ tal que $f(x) = g(x)$ en los puntos en que $f(x) \in \mathbb{R}$, entonces se verifica que:

$$f - g,\ f \dot{-} g \in R_1(B,I) \ \text{ y } \ I(f - g) = 0 = I(f \dot{-} g).$$

En lo anterior se han establecido las propiedades algebráicas de $R_1(B,I)$ y además se ha probado la linealidad del funcional I. Completamos ahora estos resultados probando la monotonía de I.

PROPOSICION 3.8.

Sean f, $g \in R_1(B,I)$ tales que $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in X$.

Entonces $I(f) \leq I(g)$.

Demostración:

Se considera la función $l := g - f$. Es claro que $l \in R_1(B,I)$, $l \geq 0$ y $I(l) = I(g) - I(f)$.

Por definición, para tal l existe una sucesión I-Cauchy, $(h_n)_n \in B$, tal que $(h_n)_n \longrightarrow l(I^-)$. Ahora, ya que $(|h_n|)_n \longrightarrow l = |l|(I^-)$, se puede tomar $h_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $I(l) := \lim I(h_n)$, pues $I(h_n) \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se concluye que $I(f) \leq I(g)$.

En resumen, en virtud de la proposición 3.4 y del corolario 3.6 podemos establecer el siguiente

COROLARIO 3.9.

La clase $R_1(B,I)$ *es un* $\overline{\mathbb{R}}$*-retículo vectorial e* I *es un funcional lineal y monótono sobre ella.*

Nos hemos referido anteriormente al proceso de extensión $I|B \longrightarrow I|R_1(B,I)$. Tenemos por tanto que

$$B \subset R_1(B,I) \quad \text{y} \quad I(f) = I(f) \text{ para toda } f \in B.$$

En efecto, si se toma $h_n := f$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene la sucesión $(h_n)_n \subset B$, I-Cauchy con $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, luego $f \in R_1(B,I)$. También, $I(f) = \lim I(h_n) = \lim I(f) = = I(f)$.

Por otra parte, el funcional lineal y monótono I extendido a la clase $R_1(B,I)$ permite definir una seminorma en dicha clase.

En efecto, la aplicación $\| \ \|: R_1(B,I) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $\|f\| = I(|f|)$, para toda $f \in R_1(B,I)$, es una seminorma en $R_1(B,I)$.

En general, $\|f\| = 0$ no implica $f = 0$, como prueba el siguiente contraejemplo:

Sea $X = \mathbb{N}$ y $B = \{ (x_n)_n \subset \mathbb{R};\ \exists \lim \frac{x_n}{n} \in \mathbb{R} \}$. Para cada $f \in B$ se define $I(f) = \lim \frac{f(n)}{n}$. Tomemos $f(n) = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $f \neq 0$, y sin embargo

$$\|f\| = I(|f|) = \lim \frac{1}{n^2} = 0.$$

La proposición siguiente prueba que el retículo vectorial inicial B es denso en la extensión $R_1(B,I)$, respecto de la seminorma $\| \ \|$.

PROPOSICION 3.10.

Para cada $f \in R_1(B,I)$ existe $(h_n)_n \subset B$ verificando que

$$\|h_n - f\| = I(|h_n - f|) \longrightarrow 0, \text{ cuando } n\to\infty.$$

Demostración:

Sea $f \in R_1(B,I)$ y $(h_n)_n \subset B$ una sucesión I-Cauchy que defina a f. Dado $\varepsilon > 0$ existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I(|h_n - h_m|) < \varepsilon, \text{ para todos } n,\ m \geq n_0.$$

Sea m un natural fijo, $m \geq n_0$ y se define $k_n := |h_n - h_m| \in B$. Es claro que $(k_n)_n \longrightarrow |f - h_m| (I^-)$ y es una sucesión I-Cauchy. Por tanto, $I(|f - h_m|) = \lim I(k_n) = \lim I(|h_n - h_m|) \leq \varepsilon$.

Luego $I(|f - h_m|) \leq \varepsilon$, para todo $m \geq n_0$.

Así, $\|f - h_m\| = I(|f - h_m|) \longrightarrow 0$, cuando $n\to\infty$, como queríamos demostrar.

Recordemos que un retículo vectorial B se dice **stoniano** si $f \wedge 1 \in B$ para toda $f \in B$.

Si B es stoniano, también lo son las clases B^+ y $\bar{B}$, aunque B_+ no tiene por qué serlo, en general.

En nuestro caso, la extensión $R_1(B,I)$ también conserva el carácter stoniano del retículo vectorial inicial B.

PROPOSICION 3.11.

Si B es stoniano, entonces $R_1(B,I)$ también lo es.

Demostración:

Por la proposición 2.2, apartado *(v)*, se tiene que si $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, entonces $(h_n \wedge 1)_n \longrightarrow f \wedge 1(I^-)$. Si, además, $(h_n)_n$ es I-Cauchy, es inmediato probar que $(h_n \wedge 1)_n$ también lo es, basándose en la desigualdad siguiente

$$|h_n \wedge 1 - h_m \wedge 1| \leq |h_n - h_m|, \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}.$$

Así se tiene que $f \wedge 1 \in R_1(B,I)$ siempre que $f \in R_1(B,I)$.

b. SISTEMA DE LOOMIS INDUCIDO POR UNA MEDIDA FINITAMENTE ADITIVA: RIEMANN-μ-INTEGRABILIDAD.

Se considera el espacio de medida finitamente aditiva (X,Ω,μ), donde Ω es un anillo (o semianillo) de partes de X y μ una medida finitamente aditiva en Ω.

Por $B_\Omega := S(X,\Omega,\mu)$ notamos la clase de las funciones **escalonadas** (o **μ-simples**). Si $f \in B_\Omega$ puede escribirse como $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, donde $a_i \in \mathbb{R}$, χ_{A_i} son funciones características de conjuntos disjuntos $A_i \in \Omega$, y si $a_i \neq 0$ entonces $\mu(A_i) < \infty$, para i = 1, 2,..., n.

Como es usual, para cada $f \in B_\Omega$, se define su **μ-integral** por

$$\int f\, d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i\ \mu(A_i) \in \mathbb{R}.$$

Con ello, B_Ω es un retículo vectorial stoniano de funciones acotadas, y el funcional $I_\mu(f) := \int f\, d\mu$ para toda $f \in B_\Omega$, es lineal, no negativo en B_Ω y satisface el axioma débil de continuidad C_∞:

$I_\mu(f \wedge r) \longrightarrow I_\mu(f)$, cuando $r \to \infty$, para toda $f \in B_\Omega$, $f \geq 0$.

En resumen la terna (X,B_Ω,I_μ) es un sistema de Loomis, que llamaremos "inducido" por el espacio de medida finitamente aditiva (X,Ω,μ). Así, a partir de $I_\mu|B_\Omega$ podemos obtener la correspondiente extensión integral $I_\mu|R_1(B_\Omega,I_\mu)$, usando la I_μ^--convergencia de la definición 2.1, donde

$$I_\mu^-(f) := \inf \{ I_\mu(g);\ g \in B_\Omega,\ f \le g \}.$$

Por otra parte, a partir de (X,Ω,μ) y tal y como hace Günzler en [20] p. 69 y [18] (véase el resumen presentado en el Apéndice), se puede introducir la convergencia μ-local (localización de la convergencia de Dunford-Schwartz [12] p. 104), y definir la clase $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ de las funciones abstracta-Riemann-μ-integrables.

La equivalencia entre la convergencia μ-local y la I_μ^--convergencia es probada por Günzler en [21].

LEMA 3.12. (véase Lemma 9 en [21])

Sea (X,B_Ω,I_μ) el sistema de Loomis inducido por el espacio de medida finitamente aditiva (X,Ω,μ). Sean $(f_n)_n$, $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$.

Entonces,

$$(f_n)_n \longrightarrow f(I_\mu^-), \quad \text{si y sólo si}\ , (f_n)_n \longrightarrow f(\mu).$$

En efecto, si $(f_n)_n \longrightarrow f(I_\mu^-)$, para $\varepsilon > 0$ y $h \in B_\Omega$, $h \ge 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $h_n \in B_\Omega$ tales que

$$|f_n - f| \wedge h \le h_n\ ,\ \text{y}\ I_\mu(h_n) \le \varepsilon^2,\ \text{para}\ n \ge n_0.$$

Como $h_n \in B_\Omega = S(X,\Omega,\mu)$, se nota

$$S_{n,\varepsilon} := \{ x \in X;\ h_n(x) \ge \varepsilon \} \in \mathcal{R}(\Omega),$$

siendo $\mathcal{R}(\Omega)$ el anillo generado por Ω, y además

$$\varepsilon\ \mu(S_{n,\varepsilon}) \le I_{\mu}(h_n) \le \varepsilon^2,\ \text{siempre que } n \ge n_0(\varepsilon,h),$$

es decir, $\mu(S_{n,\varepsilon}) \le \varepsilon,\ \forall\ n \ge n_0(\varepsilon,h)$.

Para $A \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, se elige $h := 2\,\varepsilon\,\chi_A \in B_{\Omega}$, entonces

$$|f - f_n| < \varepsilon \quad \text{sobre } A - S_{n,\varepsilon} \text{ y } \mu(S_{n,\varepsilon}) \le \varepsilon, \text{ para } n \ge n_0.$$

Con ello, se tiene que $(f_n)_n \longrightarrow f(\mu)$.

En el otro sentido, si $(f_n)_n \longrightarrow f(\mu)$, se considera $h = \sum_{i=1}^{r} a_i\ A_i \in B_{\Omega}$, con $a_i > 0$, A_i disjuntos, $A_i \in \Omega$ y se define $a := \text{máx}\ \{\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r\ \} + \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i)$.

Para $\varepsilon > 0$, y h dado anteriormente ($h \ge 0$), existen unos conjuntos $M_n \in \mathcal{R}(\Omega)$, y un natural $n_0(\varepsilon,h)$, tales que $|f - f_n| \le \dfrac{\varepsilon}{2\ a}$ sobre $\bigcup_{i=1}^{r} A_i - M_n$, $\mu(M_n) \le \dfrac{\varepsilon}{2\ a}$, para todo $n \ge n_0(\varepsilon,h)$.

Entonces:

$$|f - f_n| \wedge h \le \frac{\varepsilon}{2\ a}\left(\chi_{\left[\bigcup_{i=1}^{r} A_i - M_n\right]}\right) + \bigvee_{i=1}^{r} a_i\ \chi_{M_n} =: k_n \in B_{\Omega},$$

además $I(k_n) \le \dfrac{\varepsilon}{2\ a} \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i) + \bigvee_{i=1}^{r} a_i\ \dfrac{\varepsilon}{2\ a} \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, para $n \ge n_0$. Luego $(f_n)_n \longrightarrow f(I_{\mu}^{-})$, como se quería demostrar.

Obviamente, $(f_n)_n \longrightarrow f(\mu)$ implica que $(f_n)_n \longrightarrow f(\overline{I}_{\mu})$, ya que $\overline{I}_{\mu}(f) \le I_{\mu}^{-}(f)$, para toda $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$. El recíproco en general es falso como prueba el ejemplo de [21] p. 9:

Sea $X = [0,1[$, $\Omega = \{ [a,b[;\ 0 \leq a \leq b \leq 1 \}$, y sea μ = medida de Lebesgue en Ω.

Con Q = números racionales contenidos en X, se tiene que $f_n := 0 \longrightarrow \chi_Q(\overline{I}_\mu)$, pero $f_n \not\longrightarrow \chi_Q(\mu)$.

El lema 10 de [21] prueba que para funciones Riemann-μ-integrables las anteriores convergencias son equivalentes, esto es,

Si $(f_n)_n$, $f \in R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$, *entonces:*

$$(f_n)_n \longrightarrow f(\mu) \quad \text{si y sólo si} \quad (f_n)_n \longrightarrow f(\overline{I}_\mu)$$

Se puede generalizar este resultado para funciones I-integrables; su demostración es una mera traslación del correspondiente caso particular de $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$, y esto es posible dado que en el ambiente más general es cierto que $f \in R_{prop}(B,I)$, si y sólo si, $f \in R_1(B,I)$ y es B-acotada, (véase lema 3.29).

(a) *Sean* f, $(f_n)_n \in R_1(B,I)$, *entonces*

$$(f_n)_n \longrightarrow f(\overline{I}) \quad \text{si y sólo si} \quad (f_n)_n \longrightarrow f(I^{-}).$$

La pertenencia de las funciones f, f_n a $R_1(B,I)$ en (a) es necesaria, puesto que sin esta condición el resultado es falso incluso para la medida de Lebesgue μ_L, $\Omega = \{$ *intervalos* $[a,b[\subset \mathbb{R} \}$. También es falso tomando $f_n \in B_\Omega$, $f \in B_+ \cap \overline{B}$, $f_n \le f_{n+1}$, $(f_n)_n \longrightarrow f$ puntualmente en $X = [0,1[$. Por tanto, no se puede reemplazar en este resultado $R_1(B,I)$ por $\overline{B}$, (véase (38) en [21]).

Brevemente, en virtud de los lemas 3.12 y (a), y para funciones f, $f_n \in R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$, se puede establecer la relación

$$(f_n)_n \longrightarrow f(\mu) \Leftrightarrow (f_n)_n \longrightarrow f(I_\mu^-) \Leftrightarrow (f_n)_n \longrightarrow f(\overline{I}_\mu).$$

De la primera equivalencia se sigue que la clase $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ de las funciones abstracta-Riemann-μ-intagrables, es un caso particular de la clase $R_1(B,I)$, estudiada aquí, de las funciones I-integrables, tal y como expresa el siguiente

COROLARIO 3.13.

Sea (X,B_Ω,I_μ) el sistema de Loomis inducido por el espacio de medida finitamente aditiva (X,Ω,μ),; entonces,

$$R_1(B_\Omega,I_\mu) = R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}}) \quad y \quad \int f\, d\mu = I_\mu(f),\ \forall\, f \in R_1(B_\Omega,I_\mu).$$

Nota 2.

a) En el apéndice de esta memoria se presenta con detalle la siguiente situación particular:

Si se parte de un espacio de medida finitamente aditiva (X,Ω,μ), se pueden considerar las clases $R_{prop}(\mu,\mathbb{R})$ (o $R_e^1(\mu,\mathbb{R})$), y $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ (véanse [20], p.p. 23, 31, [18], p.

172). Por otra parte, en Dunford-Schwartz [12], cap.III, se define la integración solamente para un álgebra Ω (= anillo y $X \in \Omega$), y en esta situación especial $R_1(\mu,E)$ coincide con la clase L de Dunford-Schwartz, para cualquier espacio de Banach E, cualquier álgebra Ω de X, y cualquier medida finitamente aditiva $\mu:\Omega \longrightarrow [0,\infty[$. La convergencia en medida de Dunford-Schwartz es la convergencia μ-local si $X \in \Omega$.

Si Ω es un álgebra, pero $\mu:\Omega \longrightarrow [0,\infty]$, o Ω es sólo un anillo, en general la clase L de funciones integrables en el sentido de Dunford-Schwartz está contenida estrictamente en $R_1(\mu,\mathbb{R})$. Existen incluso funciones $f \in R_1(\mu,\mathbb{R})$ para las cuales no existe $g \in L$ con $\int|f - g|\, d\mu = 0$. Por tanto, en general no es cierto que L difiera de $R_1(\mu,\mathbb{R})$ sólo por funciones nulas (véase [12], III, 2.17, p. 112, [20], p.p. 70, 199).

b) Siguiendo la terminología de [25], dado un sistema de Loomis (X,B,I), para f, $(f_n)_n \subset \mathbb{R}^X$, se dice que $(f_n)_n$ *converge σ-uniformemente* a f, y se nota $(f_n)_n \overset{\sigma}{\Rightarrow} f$, si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existen $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $(g_n)_n \in B$, $g_n \geq 0$, tal que $|f_n - f| \leq \sum_{m\in\mathbb{N}} g_m$ y $\sum_{m\in\mathbb{N}} I(g_m) \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$.

Asumimos para el sistema de Loomis (X,B,I) las siguientes condiciones:

i) I es un funcional de Daniell:

$$(f_n)_n \subset B,\ (f_n)_n \searrow 0 \ \Rightarrow\ I(f_n) \longrightarrow 0.$$

o equivalentemente

$$0 \leq f_n \in B,\ f \in B;\ f \leq \sum f_n \ \Rightarrow\ I(f) \leq \sum I(f_n).$$

ii) $0 \le f_n \in B$, $f_n \le g \in B$; $(f_n)_n \nearrow f \Rightarrow f \in B$.

Entonces, $(f_n)_n \subset B$, $(f_n)_n \rightrightarrows f \Rightarrow (f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$.

En efecto, si $(f_n)_n \rightrightarrows f$, con la condición de arriba, $(f_n)_n$ es una sucesión I-Cauchy, y para cada $0 \le h \in B$, se tiene

$$|f - f_n| \wedge h \le \left(\sum g_n\right) \wedge h,$$

con $0 \le g_m \wedge h \in B$, $g_m \wedge h \le h \in B$ y $\sum_{m=1}^{n} (g_m \wedge h) \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} (g_n \wedge h)$, luego, por ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (g_n \wedge h) \in B$.

Además, $I(\sum_{n=1}^{\infty} (g_n \wedge h) \le \sum_{n=1}^{\infty} I(g_n) \le \varepsilon$, por i).

Con ello, dados $\varepsilon > 0$, $0 \le h \in B$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y una función $g := \sum_{n=1}^{\infty} (g_n \wedge h) \in B$, tal que

$$|f - f_n| \wedge h \le g \quad \text{y} \quad I(g) \le \varepsilon, \text{ para todo } n \ge n_0,$$

esto es, $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$.

Si se parte de un espacio de medida (X,Ω,μ) con Ω un σ-anillo y μ una medida σ-aditiva, $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}}) = L_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ (= funciones Lebesgue-μ-integrables).

Por otra parte, si el sistema de Loomis (X,B,I) es red-continuo (axioma de Daniell-Bourbaki), dado que $B_+ = B^+$, es inmediato que

$$(f_n)_n,\ f \in \mathbb{R}^X,\ (f_n)_n \rightrightarrows f \Rightarrow (f_n)_n \longrightarrow f(\bar{I}).$$

c. FUNCIONES Y CONJUNTOS NULOS.

Dedicamos este apartado al estudio de las funciones nulas y sus propiedades respecto de la I^{-}-convergencia.

DEFINICION 3.14.

Una función $f \in \overline{\mathbb{R}}^{X}$ *se dirá* I^{-}-**nula** *y se escribirá* $f = 0(I^{-})$, *si* $(f)_n \longrightarrow 0(I^{-})$, *es decir, para toda* $h \in B$, $h \geq 0$, *se tiene*

$$I^{-}(|f| \wedge h) = 0.$$

Se nota por $N_1(B,I)$ la clase de todas las funciones I^{-}-nulas. Para abreviar, hablaremos a veces simplemente de funciones nulas.

Las primeras propiedades de esta clase se establecen en la proposición siguiente.

PROPOSICION 3.15.

Sean $f,\ g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$; entonces se verifica:

i) Si $f,\ g \in N_1(B,I)$, entonces $\alpha f,\ f + g,\ f \dot{+} g,\ |f| \in N_1(B,I)$.

ii) Si $|f| \le g$ en X con $g \in N_1(B,I)$, entonces $f \in N_1(B,I)$.

Demostración:

Se sigue fácilmente de la definición 3.14, corolarios 3.7 y 3.8 y de la monotonía de I^-.

Con esta nueva clase de funciones se puede establecer una relación entre funciones de la siguiente forma.

DEFINICION 3.16.

Dadas $f,\ g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ se define:

$$f \le g(I^-) :\Leftrightarrow (f - g)^+ := (f - g) \vee 0 \in N_1(B,I).$$

Haciendo uso de la suma $\dot{+}$ se da la siguiente caracterización de la relación "$\le(I^-)$".

PROPOSICION 3.17.

Sean $f,\ g \in \overline{\mathbb{R}}^X$; entonces:

$f \leq g(I^-)$, si y sólo si, existe una función $h \in \overline{\mathbb{R}}^X_+$, $h \in N_1(B,I)$, tal que $f \leq g \dotplus h$ en X.

Demostración:

Si $f \leq g \dotplus h$, con $0 \leq h \in N_1(B,I)$, entonces

$$0 \leq (f - g)^+ \leq h,$$

y por el apartado *(ii)* de la proposición 3.15 se tiene $(f - g)^+ \in N_1(B,I)$, luego $f \leq g(I^-)$.

En el otro sentido, dado que para $f,\ g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ se verifica que

$$f \leq g \dotplus (f - g)^+,$$

basta tomar $h := (f - g)^+$ y se obtiene el resultado.

COROLARIO 3.18.

Sean $f,\ g,\ h,\ k \in \overline{\mathbb{R}}^X$ y $\alpha \in \mathbb{R}_+$; entonces se verifica:

i) Si $f \leq g(I^-)$ y $g \leq h(I^-)$, entonces $f \leq h(I^-)$.

ii) Si $f \leq g(I^-)$, entonces

$$\alpha f \leq \alpha g(I^-) \quad y \quad f \dotplus k \leq g \dotplus k(I^-).$$

Demostración:

i) Sean $0 \le \psi,\ \varphi \in N_1(B,I)$ verificando:

$$f \le g \dot{+} \psi \quad \text{y} \quad g \le h \dot{+} \varphi.$$

Como se tiene: $g \dot{+} \psi \le (h \dot{+} \varphi) \dot{+} \psi = h \dot{+} (\varphi \dot{+} \psi)$, entonces $f \le h \dot{+} (\varphi \dot{+} \psi)$, donde $\varphi \dot{+} \psi \in N_1(B,I)$ en virtud de la proposición 3.15, (i). Por tanto, se tiene $f \le h(I^-)$.

ii) Si $f \le g(I^-)$, sea $0 \le h \in N_1(B,I)$ tal que $f \le g \dot{+} h$. Multiplicando por $\alpha \in \mathbb{R}_+$ se tiene

$$\alpha f \le \alpha g \dot{+} \alpha h, \text{ donde } \alpha h \in N_1(B,I),$$

y de esto, $\alpha f \le \alpha g(I^-)$.

Por último, $f \dot{+} k \le g \dot{+} k(I^-)$ sin más que utilizar la caracterización de la proposición 3.17 y la asociatividad y conmutatividad de la operación $\dot{+}$.

Para finalizar las propiedades de la clase $N_1(B,I)$ se establece la relación entre esta clase y $R_1(B,I)$.

PROPOSICION 3.19.

Sea $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, entonces:

f es I^--nula, si y sólo si, $f \in R_1(B,I)$ y $\|f\| := I(|f|) = 0$.

Demostración:

Si f es I^--nula, es decir, si para toda $0 \le h \in B$, $I^-(|f| \wedge h) = 0$, entonces la sucesión $h_n := 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, define a la función f. Luego $f \in R_1(B,I)$ y además $I(|f|) = \lim I(|h_n|) = 0$.

Por otra parte, dada una sucesión I-Cauchy $(h_n)_n$ de funciones elementales que define a f, con $I(|f|) = \lim I(|h_n|) = 0$, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ y $0 \le h \in B$ existen $n_0(\varepsilon,h)$, $k_n \in B$ tales que

$$|h_n - f| \wedge h \le k_n \ , \ I(k_n) < \varepsilon/2, \text{ para todo } n \ge n_0,$$

y existe también $n_1(\varepsilon)$ tal que $I(|h_n|) < \varepsilon/2$, para todo $n \ge n_1$.

Ahora, la siguiente relación es cierta,

$$|f| \wedge h \le |(f - h_n) + h_n| \wedge h \le |f - h_n| \wedge h + |h_n| \wedge h \le$$
$$\le k_n + |h_n| \in B.$$

Además, $I(k_n + |h_n|) = I(k_n) + I(|h_n|) < \varepsilon$, para todo $n \ge máx \ \{n_0,n_1\}$. Por tanto $f \in N_1(B,I)$, como se quería demostrar.

Como consecuencia de esta proposición la clase de las funciones I^--nulas se puede escribir así:

$$N_1(B,I) = \{ \ f \in R_1(B,I); \ I(|f|) = 0 \ \}.$$

La subclase $N_1(B,I)$ permite definir una clasificación en $R_1(B,I)$ de la forma siguiente:

Dadas $f,\ g \in \overline{\mathbb{R}}^X$, se nota $f = g(I^-)$ si $f - g \in N_1(B,I)$.

En particular, si f es nula se puede leer así: $f = 0(I^-)$.

Con esta notación se establecen ahora algunas propiedades en relación con $R_1(B,I)$ y $N_1(B,I)$.

PROPOSICION 3.20.

i) *Si* $f \in N_1(B,I)$, *entonces* $I(f) = 0$.

ii) *Si* $f \in R_1(B,I)$ *y* $g \in \overline{\mathbb{R}}^X$, *con* $g = f(I^-)$, *entonces* $g \in R_1(B,I)$, $I(|f - g|) = 0$ *y* $I(f) = I(g)$.

iii) *Si* $f,\ g \in R_1(B,I)$ *tales que* $f \leq g(I^-)$, *entonces* $I(f) \leq I(g)$.

Demostración:

i) Como $0 \leq |I(f)| \leq I(|f|)$ y $I(|f|) = 0$ por la proposición 3.19, se tiene que $I(f) = 0$.

ii) Basta aplicar la proposición 3.19 a la función $f - g$ para obtener el resultado.

iii) En virtud de la proposición 3.17 si $f \leq g(I^-)$ entonces existe $h \in N_1(B,I)$ tal que $f \leq g \dotplus h$ en X. El funcional I se anula sobre $N_1(B,I)$, y dada su monotonía se consigue $I(f) \leq I(g)$.

Asociada al estudio de funciones nulas se presentan los conjuntos nulos de la forma siguiente.

DEFINICION 3.21.

El subconjunto $N \subset X$ *se dirá* I^{-}**-nulo** *si* χ_N, *función característica de* N, *es una función nula.*

En virtud de la proposición 3.19, N es I^{-}-nulo, si y sólo si, $\chi_N \in R_1(B,I)$ y $I(\chi_N) = 0$.

Los conjuntos I^{-}-nulos permiten definir un concepto de "casi por doquier" en el siguiente sentido.

Dadas $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$, *se dirá que* $f = g$ I^{-}*-c.p.d. si el conjunto* $\{ x \in X; f(x) \neq g(x) \}$ *es* I^{-}*-nulo.*

En la situación de un sistema de Loomis inducido (X, B_Ω, I_μ) es fácil probar que:

$$f = 0 \ I_\mu^{-}\text{-c.p.d.} \quad \text{implica} \quad f = 0(I_\mu^{-}).$$

Sin embargo, en un sistema de Loomis general, esta implicación no es cierta, como lo prueba el ejemplo siguiente:

Existe un sistema de Loomis (X,B,I) y una función $f_0 \in \overline{\mathbb{R}}^X_+$, $f_0 \neq 0(I^-)$ con $I(\chi_X) = 0$. De esta forma $f_0 = 0$ I^--c.p.d., pero no es I^--nula.

En efecto, sea $X = \mathbb{N}$, $B = \{ (x_n)_n \subset \mathbb{R};\ \exists \lim \frac{x_n}{n} \in \mathbb{R} \}$ y $I(x_n) := \lim \frac{x_n}{n}$. Se tiene entonces $I(\chi_{\mathbb{N}}) = \lim 1/n = 0$. Sea $f_0(n) = n^2$ y $h(n) = n$. Luego $h \in B$ y $f_0 \wedge h = h \in B$; además se tiene $I^-(f_0 \wedge h) = I(f_0 \wedge h) = 1 \neq 0$, lo que implica que $f_0 \neq 0(I^-)$.

Obsérvese que el sistema (X,B_Ω,I_μ) es stoniano y continuo superiormente (o C_∞: $I(f \wedge r) \longrightarrow I(f)$, si $r \to \infty$, para toda $f \in B_\Omega$, $f \geq 0$). Pues bien, con estas condiciones se podrá demostrar la validez del resultado enunciado más arriba. Para ello, se prueba el siguiente lema.

LEMA 3.22.

Sea (X,B,I) un sistema de Loomis stoniano y C_∞. Entonces, para cada $P \subset X$, I^--nulo, se tiene que la función $\infty\, \chi_P$ es nula.

Demostración:

Sea $P \subset X$ con $\chi_P = 0(I^-)$. Dada $h \in B$, $h \geq 0$ y $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\infty\, \chi_P \wedge (h \wedge m) = m\, \chi_P \wedge h,$$

luego, $I^-[\infty\, \chi_P \wedge (h \wedge m)] = I^-(m\, \chi_P \wedge h) = 0$, puesto que $m\, \chi_P = 0(I^-)$. Entonces se obtiene

$$[\infty\, \chi_P \wedge h - \infty\, \chi_P \wedge (h \wedge m)] \leq |h - h \wedge m|,$$

donde $h - h \wedge m \in B$, por ser B stoniano, y además

$$I^-\Big(|\infty\, \chi_P \wedge h - \infty\, \chi_P \wedge (h \wedge m)|\Big) \leq I^-(|h - h \wedge m|) =$$

$$= I(|h - h \wedge m|) \to 0,$$

por aplicación del axioma C_∞. Entonces,

$$|I^-(\infty\, \chi_P \wedge h) - I^-[\infty\, \chi_P \wedge (h \wedge m)]| = |I^-(\infty\, \chi_P \wedge h)| \to 0.$$

En conclusión, $I^-(\infty\, \chi_P \wedge h) = 0$, para toda $h \geq 0$, $h \in B$, luego $\infty\, \chi_P$ es una función nula.

PROPOSICION 3.23.

Sea (X,B,I) un sistema de Loomis stoniano y C_∞. Sea $f \in \overline{\mathbb{R}}_+^X$, entonces,

$$f = 0\ I^-\text{-c.p.d. implica } f = 0(I^-).$$

Demostración:

Sea $0 \leq f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ y sea $P = \{\, x \in X;\ f(x) > 0 \,\}$. Por definición de I^--c.p.d., el conjunto P es I^--nulo, y en virtud del lema 3.22 la función $\infty\, \chi_P$ es nula. Ahora, como $0 \leq f \leq \infty\, \chi_P$, y de acuerdo con el apartado (ii) de la proposición 3.15 se tiene que f es nula, es decir, $f = 0(I^-)$.

En relación con el resultado que estudiamos, la proposición siguiente da una condición suficiente para un sistema general.

PROPOSICION 3.24.

Sea $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *y* $f = 0$ I^-*-c.p.d. con* $|f(x)| \leq M \in \mathbb{R}$*, para todo* $x \in X$*. Entonces,* $f = 0(I^-)$.

Demostración:

Nótese que $|f| = |f|\ \chi_P$, siendo $P = \{\ x \in X;\ f(x) \neq 0\ \}$. Entonces $|f| = |f|\ \chi_P \leq m\ \chi_P$; ahora bien, χ_P es I^--nulo por la definición 3.20, y en virtud del apartado (ii) de la proposición 3.15 se tiene que f es nula, como se quería probar.

d. INTEGRACION PROPIA DE RIEMANN.

En la teoría de la integración el término integral de Riemann es usado frecuentemente de la siguiente forma.

Dado un sistema de Loomis arbitrario (X,B,I), una función $f \in \mathbb{R}^X$ se dice **Riemann-integrable** (o **propiamente integrable Riemann**), si y sólo si, una de las siguientes condiciones equivalentes es satisfecha:

i) Para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existen h, $g \in B$ tales que $h \leq f \leq g$ y $I(g - h) < \varepsilon$.

ii) $I^-(f) := \inf \{ I(g);\ g \in B,\ f \leq g \} =$
$= \sup \{ I(h);\ h \in B,\ h \leq f \} =: I^+(f)$.

Y se define la integral de Riemann de la función f por

$$I(f) := I^+(f) = I^-(f) \in \mathbb{R}.$$

El conjunto de las funciones propiamente integrables Riemann, relativas al sistema (X,B,I), se notará por $R_{prop}(B,I)$, que tiene estructura de $\mathbb{R}$-retículo vectorial con las operaciones usuales de funciones. Véanse, por ejemplo, las referencias [23], [26], [27], [13] y [20], entre otras.

Dado que toda función $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ verifica

$$I^-(f) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq I^+(f),$$

se tiene que $R_{prop}(B,I) \subset \overline{B}$ (funciones sumables).

La proposición siguiente prueba que, para cualquier sistema de Loomis, toda función propiamente integrable es también I-integrable.

PROPOSICION 3.25.

$R_{prop}(B,I) \subsetneq R_1(B,I)$ y las integrales coinciden.

Demostración:

Sea $f \in R_{prop}(B,I)$ y $n \in \mathbb{N}$; por definición existen h_n, $g_n \in B$, tales que $h_n \leq f \leq g_n$ y $I(g_n - h_n) < 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se tiene $|f - h_n| \wedge h \leq f - h_n \in R_{prop}(B,I)$, luego

$$I^-(f - h_n) = I^+(f - h_n) \leq I^+(g_n - h_n) = I(g_n - h_n) < 1/n.$$

Por tanto, $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$. Además $(h_n)_n$ es I-Cauchy puesto que

$$|h_n - h_m| \leq |h_n - f| + |f - h_m| = (f - h_n) + (f - h_m) \leq$$
$$\leq (g_n - h_n) + (g_m - h_m),$$

y tomando $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, se obtiene

$$I(|h_n - h_m|) \leq I(g_n - h_n) + I(g_m - h_m) < 1/n + 1/m \leq 2/n.$$

Con todo ello, $f \in R_1(B,I)$ y su integral $I(f) = lim\ I(h_n) =$ $= I^+(f) = I^-(f) \in \mathbb{R}$.

Como veremos más adelante, hay ejemplos que prueban que, en general, la inclusión anterior es estricta; basta tener en cuenta que $R_{\text{prop}}(B,I) \subsetneq \bar{B}$. De hecho, existen incluso funciones $f \in R_1(\mu,\bar{\mathbb{R}})$ con $\int f\ d\mu = 0$, que no pertenecen a $\bar{B}_\Omega$, y por tanto, no pertenecen a $R_{\text{prop}}(B_\Omega, I_\mu)$.

Ejemplo 2, p. 262 de [6]:

Sea (X,Ω,μ) un espacio de medida finitamente aditiva tal que

$$X \neq X_0 := \cup \{ A;\ A \in \Omega,\ \mu(A) < \infty \},$$

Con $f \in \mathbb{R}^X$ definida por $f(X_0) = \{0\}$ y $f(X - X_0) = \{1\}$, se tiene que $f \in R_1(\mu,\mathbb{R})$, $\int f\ d\mu = 0$, pero $f \notin \bar{B}_\Omega$, ya que $\bar{I}_\mu(f) = \infty$.

Es fácil comprobar que en las condiciones anteriores, $i)$ ó $ii)$ que definen la clase $R_{\text{prop}}(B,I)$, son equivalentes a

$iii)$ Para cada $\varepsilon > 0$, existen h, $k \in B$ tales que
$|f - h| \leq k$ y $I(k) < \varepsilon$.

Por otra parte, en nuestro contexto, y siguiendo la terminología de [3] p. 448, podemos afirmar que $R_{\text{prop}}(B,I)$

es la "clausura" de B respecto de la seminorma integral I^-, esto es,

iv) $f \in R_{prop}(B,I) \Leftrightarrow$ Para cada $\varepsilon > 0$, existe $h \in B$, tal que $I^-(|f - h|) < \varepsilon$.

En efecto, si $f \in R_{prop}(B,I)$, dado $\varepsilon > 0$, existen h, $k \in B$ tales que $h \leq f \leq k$ y $I(k - h) < \varepsilon$.

Se considera $|f - h| = f - h \leq k - h$ y por definición de I^- se tiene que $I^-(|f - h|) \leq I(k - h) < \varepsilon$.

Por otra parte, si $I^-(|f - h|) < \varepsilon/2$, para $\varepsilon > 0$ y $h = h(\varepsilon) \in B$, se tiene, también por defición de I^-, que existe $k \in B$, tal que

$$h - k \leq f \leq h + k \quad , \text{con } h + k,\ h - k \in B,$$

y además, $I[(h + k) - (h - k)] = 2\,I(k) < 2\,\varepsilon/2 = \varepsilon$. Luego $f \in R_{prop}(B,I)$.

Nota 3.

a) Obsérvese que la proposición iv) es la análoga al teorema 5.6 de [5]:

$f \in \overline{B}$, si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $h \in B$ tal que $\overline{I}(|f - h|) < \varepsilon$.

Es decir, la clase $\overline{B}$ de las funciones sumables es la clausura de B respecto de la seminorma integral $\overline{I}$.

Un resultado análogo para la clase $R_1(B,I)$ se obtendrá más adelante mediante la oportuna localización de la seminorma integral I^-, en el sentido de [31].

b) La convergencia en I^- supone una generalización natural del concepto de convergencia uniforme, en el siguiente sentido:

Si X es un compacto de la recta real $\mathbb{R}$, B el espacio de las funciones continuas en X e I la integral de Cauchy; dadas f, $(f_n)_n \subset \mathbb{R}^X$ se dice que $(f_n)_n$ **converge uniformemente** a f ($f_n \longrightarrow f$ c.u.), si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n - f| \leq \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_\varepsilon.$$

Si $K^+ := \{ g \in B;\ g \geq 0 \text{ y constante} \}$, $f_n \longrightarrow f$ c.u. si y sólo si, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $g \in K^+$ tales que

$$|f_n - f| \leq g \ \text{ y } \ I(g) \leq \varepsilon, \text{ para } n \geq n_\varepsilon.$$

Así, con $K^+ := \{ g \in B;\ g \geq 0 \}$ se tiene la generalización que indicábamos, (definción de I^--convergencia, o convergencia B-uniforme, véase [25], def. 5.1.)

En general sabemos que la I^--convergencia implica siempre la $\overline{I}$-convergencia. Ahora, el siguiente lema presenta una nueva condición para poder afirmar el recíproco de la implicación anterior.

LEMA 3.26.

Sea un sistema de Loomis con $B_{(+)} \subset R_{prop}(B,I)$. Entonces si f, $(f_n)_n \subset \overline{\mathbb{R}}^X$, se verifica:

$$(f_n)_n \longrightarrow f(\overline{I}) \Rightarrow (f_n)_n \longrightarrow f(I^-).$$

(*donde* $B_{(+)} := \{ f \quad B \; ; \; I^+(f) < \infty \}$)

Demostración:

Por definición se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ y $h \in B$, $h \geq 0$, existen $n_0(\varepsilon, h) \in \mathbb{N}$ y $k_n \in B_+$, tal que

$$|f - f_n| \wedge h \leq k_n \text{ y } I^+(k_n) < \varepsilon, \text{ para } n \geq n_0.$$

Como $B_{(+)} \subset R_{prop}(B,I)$, cada $k_n \in R_{prop}(B,I)$, luego

$$I^+(k_n) = I^-(k_n) < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $l_n \in B$, con $k_n \leq l_n$ y $I(l_n) < \varepsilon$. Con todo ello se concluye que

$$|f_n - f| \wedge h \leq k_n \leq l_n, \quad I(l_n) < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Luego $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$.

Los resultados que siguen, que concluyen con el teorema 3.31, permiten dar una caracterización de la I-integrabilidad mediante la integrabilidad propia de Riemann. Para ello se nota

$$R_1(B,I,\mathbb{R}) := R_1(B,I) \cap \mathbb{R}^X = \{ f \in \mathbb{R}^X ; \; f \in R_1(B,I) \}.$$

PROPOSICION 3.27.

$$R_1(B,I,\mathbb{R}) = \{\ f \in \mathbb{R}^X;\ I^+(|f|) < \infty \text{ y } f^{\mp} \wedge g \in R_{prop}(B,I)$$
$$\text{para toda } g \in B\ \}.$$

Demostración:

a) Sea $f \in R_1(B,I,\mathbb{R})$, $f \geq 0$. Entonces existe $(h_n)_n \subset B$ una sucesión I-Cauchy tal que $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, esto es: para cada $\varepsilon > 0$ y $h \in B$ $h \geq 0$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $l_n \in B$ tales que

$$|h_n - f| \wedge h \leq l_n \quad \text{y} \quad I(l_n) < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Con la desigualdad (ix) del lema 1.1 se consigue

$$|f \wedge h - h_n \wedge h| \leq 2\ [|f - h_n| \wedge h] \leq 2\ l_n.$$

Por tanto

$$h_n \wedge h - 2\ l_n \leq f \wedge h \leq h_n \wedge h + 2\ l_n,$$

con $h_n \wedge h + 2\ l_n$, $h_n \wedge h - 2\ l_n \in B$.

Además, se tiene que

$$I\Big((h_n \wedge h + 2\ l_n) - (h_n \wedge h - 2\ l_n)\Big) = 4\ I(l_n) < 4\ \varepsilon,$$

luego $f \wedge h \in R_{prop}(B,I)$, para cualquier $h \in B$, $h \geq 0$.

También, $I^+(f) \leq I(f) < \infty$, ya que $I(g) \leq I(f)$, para toda $g \in B$, $g \leq f$.

Para $f \in R_1(B,I,\mathbb{R})$ de cualquier signo, se toma $f = f^+ - f^-$, con $f^{\mp} \geq 0$ y $f^{\mp} \in R_1(B,I,\mathbb{R})$. Sea $g \in B$, $g \geq 0$ y por el caso anterior se tiene que $f^{\mp} \wedge g \in R_{prop}(B,I)$ y

$$I^+(|f|) = I^+(f^+ + f^-) \leq I(f^+ + f^-) = I(|f|) < \infty.$$

b) Sea $f \in \mathbb{R}^X$, $f \geq 0$ tal que $f \wedge h \in R_{prop}(B,I)$, para toda $h \in B$, $h \geq 0$ y $I^+(f) < \infty$.

Si $I^+(f) < \infty$ entonces existe una sucesión $(h_n)_n \subset B$ verificando $0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$ y $I(h_n) \longrightarrow I^+(f)$.

Además se tiene que si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$

$I(|h_n - h_m|) = I(h_n - h_m) \leq |I(h_n) - I^+(f)| + |I^+(f) - I(h_m)|$

por lo que $(h_n)_n$ es una sucesión I-Cauchy.

Probamos a continuación que $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$.

En efecto, la desigualdad (xi) del lema 1.1 permite asegurar que $|h_n - f| \wedge h = f \wedge (h_n + h) - h_n$.

Como $f \wedge (h_n + h) \in R_{prop}(B,I)$ por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existirán k_ε, $l_\varepsilon \in B$ tales que

$$k_\varepsilon \leq f \wedge (h_n + h) \leq l_\varepsilon \quad \text{y} \quad I(l_\varepsilon - k_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ahora bien, $k_\varepsilon \leq f \wedge (h_n + h) \leq f$, así $k_\varepsilon \leq f$ con $I(k_\varepsilon) \leq I^+(f) < \infty$, luego

$$I(l_\varepsilon) = I(k_\varepsilon) + I(l_\varepsilon - k_\varepsilon) \leq I^+(f) + \varepsilon.$$

En resumen, $|h_n - f| \wedge h = f \wedge (h_n + h) - h_n \leq l_\varepsilon - h_n \in B$, con $I(l_\varepsilon - h_n) = I(l_\varepsilon) - I(h_n) \leq I^+(f) + \varepsilon - I(h_n) \longrightarrow 0$.

Con ello, $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ y por tanto $f \in R_1(B,I,\mathbb{R})$.

Por último, para una función $f \in \mathbb{R}^X$ arbitraria con $I^+(|f|) < \infty$ y $f^\mp \wedge h \in R_{prop}(B,I)$, dada $h \in B$, $h \geq 0$, se tiene $I^+(f^\mp) \leq I^+(|f|) < \infty$, y entonces f^+, $f^- \in R_1(B,I,\mathbb{R})$, luego $f = f^+ - f^- \in R_1(B,I,\mathbb{R})$, como se quería probar.

Existe una caracterización similar a la dada en la proposición 3.27 cuando se considera un espacio de medida finitamente aditiva (X,Ω,μ):

Si $f \geq 0$, entonces $f \in R_1(\mu,\mathbb{R})$, si y sólo si, $f \wedge t\,\chi_A \in R_{prop}(\mu,\mathbb{R})$ para cada $A \in \Omega$ y $t \in \mathbb{R}^+$, y

$$I_\mu^+ := \sup \{ \int h\, d\mu;\ h \leq f,\ h \in b_\Omega \} < \infty.$$

Tal caracterización es cierta para funciones evaluadas en un espacio de Banach, con "$f \cap t\,\chi_A$" en lugar de $\wedge$, donde $f \cap g := (f \vee g) \wedge (-g)$.

En esta situación $I_\mu^+(f) = \int f\, d\mu$. Véase [20] ex. 114, 124, p. 163, también & 2 [2], donde se utiliza esta caracterización como definición de integral-abstracta de Riemann.

Cuando se trabaja con funciones numéricas el resultado siguiente es clásico en integración.

PROPOSICION 3.28.

$$R_1(B,I) = \{ f \in \overline{\mathbb{R}}^X;\ \textit{existe } g \in R_1(B,I,\mathbb{R}),\ f = g(I^-) \}$$

Demostración:

Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ y $g \in R_1(B,I,\mathbb{R})$ tales que $f = g(I^-)$, de acuerdo con la proposición 3.20-(ii) se tiene que $f \in R_1(B,I)$ y además $I(f) = I(g)$.

Por otro lado, si $f \in R_1(B,I)$, $f \geq 0$, por definición existe $(h_n)_n \subset B$ una sucesión I-Cauchy tal que $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$; esto es, para cada $\varepsilon > 0$ y $h \in B$, $h \geq 0$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $l_n \in B$ de forma que

$$|h_n - f| \wedge h \leq l_n \quad \text{y} \quad I(l_n) < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Se define ahora la función $g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) := f(x)$, si $f(x) \in \mathbb{R}$ y $g(x) := 1$, si $f(x) = \infty$. De esta forma el teorema 3.2 asegura que $g \in R_1(B,I,\mathbb{R})$ y $I(f) = I(g)$.

Además, se tiene que $(f - g)(x) = 0$ si $f(x) \in \mathbb{R}$ y $(f - g)(x) = \infty$ si $f(x) = \infty$. En virtud del corolario 3.5 se llega a que $f - g \in R_1(B,I)$ y $I(|f - g|) = 0$. Finalmente, la proposición 3.19 asegura que $f - g \in N_1(B,I)$, es decir $f = g(I^-)$, como se quería demostrar.

Consecuencias de las proposiciones anteriores son los resultados siguientes, que establecen un criterio para asegurar cuándo una función I-integrable es propiamente integrable Riemann, así como la caracterización de la clase $R_1(B,I)$ que anunciábamos más arriba.

LEMA 3.29.

Sea $f \in R_1(B,I)$ y $h \in B$ tal que $|f| \leq h$. Entonces,

$$f \in R_{prop}(B,I).$$

Demostración:

Si $f \in R_1(B,I)$ y $|f| \le h \in B$, entonces $f \in R_1(B,I,\mathbb{R})$, y además $0 \le f^{\mp} \le h \in B$. Por tanto $f^{\mp} = f^{\mp} \wedge h \in R_{prop}(B,I)$ en virtud de la proposición 3.27. Luego, si f^{+}, $f^{-} \in R_{prop}(B,I)$, se tiene que $f \in R_{prop}(B,I)$.

TEOREMA 3.30.

$$R_1(B,I) = \{\, f \in \overline{\mathbb{R}}^X;\ I^{+}(|f|) < \infty,\ f^{\mp} \wedge h \in R_{prop}(B,I),$$
$$\text{para toda } h \in B,\ h \ge 0 \,\}$$

Demostración:

Si $f \in R_1(B,I)$, $f \ge 0$, entonces

$$I^{+}(|f|) = I^{+}(f) \le I(f) < \infty.$$

Por otra parte, dada $h \in B$, $h \ge 0$, se tiene que $f \wedge h \in R_1(B,I)$ y $|f \wedge h| = f \wedge h \le h \in B$. Por el lema 3.29 se concluye que $f \wedge h \in R_{prop}(B,I)$.

El otro sentido es inmediato sin más que rehacer el apartado (b) de la demostración de la proposición 3.27.

Nota 4.

Siguiendo el apartado (b) de la demostración de las proposicicnes 3.27 y 3.30 se puede asegurar que

Si $f \in R_1(B,I)$ *y* $f \geq 0$ *con* $I^+(f) < \infty$, *entonces* $I(f) = I^+(f)$;

o lo que es lo mismo:

Si $f \in R_1(B,I)$, $f \geq 0$ *y* $I^+(f) < \infty$, *entonces existe una sucesión* $(h_n)_n \subset B$ *con* $0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$, $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ *y*

$$I(f) = \sup \{ I(h_n);\ n \in \mathbb{N} \} = I^+(f).$$

Con los resultados anteriores se establece que $R_1(B,I)$ es R-propiamente cerrado.

PROPOSICION 3.31.

Sea $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *tal que existen sucesiones* $(h_n)_n$, $(k_n)_n \subset R_1(B,I)$, *verificando,* $|f - k_n| \leq h_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $I(h_n) \longrightarrow 0$, *cuando* $n\to\infty$.

Entonces, $f \in R_1(B,I)$.

Demostración:

Es equivalente demostrar que si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ y existen $(h_n)_n$, $(k_n)_n \subset R_1(B,I)$ con $k_n \leq f \leq h_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $I(h_n - k_n) \longrightarrow 0$, entonces $f \in R_1(B,I)$.

Para ello, en virtud del teorema 3.30, basta probar que, siendo $f \geq 0$, se verifica

$$f \wedge h \in R_{prop}(B,I), \text{ para toda } h \in B,\ h \geq 0 \text{ y } I^{+}(f) < \infty.$$

En primer lugar, como $h_n \in R_1(B,I)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y como se tiene $I^{+}(f) \leq I^{+}(h_n) \leq I(h_n) < \infty$, entonces $I^{+}(f) < \infty$.

Sea, ahora, $h \in B$, $h \geq 0$, entonces,

$$k_n \wedge h \leq f \wedge h \leq h_n \wedge h, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se considera $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$I(h_n \wedge h - k_n \wedge h) \leq 2\ I[(h_n - k_n) \wedge h] \leq$$
$$\leq 2\ I(h_n - k_n) < \varepsilon/3 \qquad (1)$$

Como $k_n \wedge h$, $h_n \wedge h \in R_{prop}(B,I)$, entonces, para $\varepsilon > 0$ existen funciones φ, φ', ψ, $\psi' \in B$ verificando

$$\varphi \leq k_n \wedge h \leq \varphi' \ , \quad I(\varphi' - \varphi) < \varepsilon/3$$
$$\psi \leq h_n \wedge h \leq \psi' \ , \quad I(\psi' - \psi) < \varepsilon/3$$

Con todo ello se tiene

$$\varphi \leq k_n \wedge h \leq f \wedge h \leq h_n \wedge h \leq \psi' \ ,$$

además,

$$I(\psi' - \varphi) = I(\psi' - \psi) + I(\psi - \varphi') + I(\varphi' - \varphi) <$$
$$< 2\ \varepsilon/3 + I(\psi - \varphi').$$

Ahora bien, por (1), se obtiene,

$$I(\psi - \varphi') \leq I(h_n \wedge h - k_n \wedge h) < \varepsilon/3,$$

luego, $I(\psi' - \varphi) < \varepsilon$, y por tanto, $f \wedge h \in R_{prop}(B,I)$, para toda $h \in B$, $h \geq 0$, es decir, $f \in R_1(B,I)$.

Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ de cualquier signo, se toma $f = f^{+} - f^{-}$, con

$f^{\mp} \geq 0$, y se razona análogamente.

Después del lema 3.29, estamos en condiciones de probar formalmente la propiedad **(a)** que enunciábamos en la página 34.

PROPOSICION 3.32.

Sean f, $(f_n)_n \subset R_1(B,I)$; entonces

$$(f_n)_n \longrightarrow f(\bar{I}) \text{ , si y sólo si, } (f_n)_n \longrightarrow f(I^-).$$

Demostración:

Si $(f_n)_n \longrightarrow f(\bar{I})$, dados $h \in B$, $h \geq 0$ y $\varepsilon > 0$, existen $n_0(\varepsilon,h) \in \mathbb{N}$, y $k_n \in B_+$ tales que

$$g_n := |f_n - f| \wedge h \leq k_n \quad \text{y} \quad I^+(k_n) < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Se tiene que $g_n \in R_1(B,I)$, con $|g_n| \leq h \in B$, luego por el lema 3.29, $g_n \in R_{prop}(B,I)$.

Con ello, $I(g_n) = I^-(g_n) = I^+(g_n) \leq I^+(k_n) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$; por lo tanto, $I^-(|f_n - f| \wedge h) \longrightarrow 0$, de donde se sigue que $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, como queríamos probar.

Nota 5.

a) Enlazando la proposición 3.20 y el teorema 3.30 podemos afirmar que:

Si $f \in R_1(B,I)$, $g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ con $f = g(I^-)$, entonces

$$g^{\mp} \wedge h \in R_{prop}(B,I), \text{ para toda } h \in B,\ h \geq 0.$$

b) El lema 3.29 y la proposición 3.25 establecen una caracterización clásica para funciones integrables B-acotadas, es decir, acotadas por funciones elementales, ya que se tiene:

$$f \in R_1(B,I) \Rightarrow [\ f \in R_{prop}(B,I) \Leftrightarrow \exists\ h \in B,\ |f| \leq h\ ]$$

c) Obsérvese que el lema 3.26 establece una condición suficiente para que la convergencia en I^- equivalga a la convergencia en $\overline{I}$. Pues bien, dada la nueva información que se tiene con el resultado del lema 3.29, se puede asegurar que ambas convergencias son equivalentes en sistemas de Loomis para los que $B_{(+)} \subset R_1(B,I)$.

En efecto, en la demostración del lema 3.26 las funciones $k'_n := k_n \wedge h \in B_{(+)} \subset R_1(B,I)$ y por ser $0 \leq k'_n \leq h \in B$, se puede afirmar, por el lema 3.29, que $k'_n \in R_{prop}(B,I)$. La demostración sigue como la del citado lema 3.26.

CAPITULO II

4. CONVERGENCIA DE SUCESIONES DE FUNCIONES I-INTEGRABLES. PROPIEDADES.

5. TEOREMAS DE CONVERGENCIA MONOTONA Y DE CONVERGENCIA ACOTADA DE LEBESGUE. CONSECUENCIAS.

4. CONVERGENCIA DE SUCESIONES DE FUNCIONES I-INTEGRABLES. PROPIEDADES.

En este apartado se presentan algunas propiedades previas a los teoremas de convergencia, relativos a la convergencia de sucesiones de funciones pertenecientes a la clase $R_1(B,I)$. Estos resultados permitirán también, en el Capítulo III, establecer la relación general entre las funciones I-integrables y las sumables.

Recordemos que $\overline{B} := \{ f \in \overline{\mathbb{R}}^X;\ \overline{I}(f) = \underline{I}(f) \in \mathbb{R} \}$ es la clase de las funciones sumables dada en & 5 [5].

PROPOSICION 4.1.

Sean $f \in R_1(B,I)$, $f \geq 0$ *y* $g \in \overline{B}$, $g \geq 0$. *Entonces,*

$$f \wedge g \in \overline{B} \quad y \quad \overline{I}(f \wedge g) \leq I(f).$$

Demostración:

Sea $(h_n)_n \subset B$ una sucesión I-Cauchy que define a f. Se puede considerar $h_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, puesto que $f \geq 0$ y $(|h_n|)_n \longrightarrow |f|(I^-)$.

Además, $h_n \wedge g \in \overline{B}$, $f \wedge g \leq g$, y $|h_n \wedge g| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

En virtud de la propiedad v) de la proposición 2.2 se tiene

$$(h_n \wedge g)_n \longrightarrow (f \wedge g)(I^-).$$

Entonces, aplicando la proposición 2.8 y dado que $\overline{B}$ es "$\overline{I}$-cerrado" (Corolario III de [21]) se obtiene que

$$f \wedge g \in \overline{B} \quad \text{y} \quad \overline{I}(h_n \wedge g) \longrightarrow \overline{I}(f \wedge g), \text{ cuando } n \to \infty.$$

Finalmente, $\overline{I}(h_n \wedge g) \leq I(h_n) \longrightarrow I(f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\overline{I}(f \wedge g) \leq I(f)$, como se quería demostrar.

COROLARIO 4.2.

Sea $(f_n) \subset R_1(B,I)$ tal que $I(|f_n|) \longrightarrow 0$,; entonces

$$(f_n)_n \longrightarrow 0(\overline{I}).$$

Demostración:

Si $f_n \in R_1(B,I)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, dada $g \in B \subset \overline{B}$, con $g \geq 0$, por la proposición 4.1 se tiene que

$$|f_n| \wedge g \in \overline{B} \quad \text{y} \quad \overline{I}(|f_n| \wedge g) \leq I(|f_n|), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como, por hipótesis, $I(|f_n|) \longrightarrow 0$, entonces $\overline{I}(|f_n| \wedge g) \longrightarrow 0$, para toda $g \in B$, $g \geq 0$, es decir $(f_n)_n \longrightarrow 0(\overline{I})$.

Nota 1.

En analogía con la extensión final de Pfeffer, & 6 [29], se extiende $\overline{B}$ añadiéndole una familia de funciones con integrales infinitas. Se considera así la clase (notada por B_+^* en [5]) de todas las funciones $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ tales que $f \wedge g \in \overline{B}$, para toda $g \in B$.

Obviamente, ya que $B \subset \overline{B}$, la proposición 4.1 establece que tal clase contiene a todas las funciones I-integrables no negativas.

En consecuencia, aplicando el corolario 6.4 [5] y, dado que $f \in \overline{B}$, si y sólo si $|f| \in \overline{B}$, se obtiene una importante condición suficiente para que las funciones I-integrables sean sumables.

COROLARIO 4.3.

Si $f \in R_1(B,I)$ y $|f| \le g \in \overline{B}$, entonces $f \in \overline{B}$.

Por otra parte, nótese que si $f \in R_1(B,I)$, entonces

$$I^+(f) \le I(f).$$

En efecto, como $I^+(f) := \sup \{ I(h);\ h \in B,\ h \le f \}$, dada $h \in B$, con $h \le f$, se obtiene, por la monotonía de I en $R_1(B,I)$, $I(h) \le I(f)$, por tanto, $I^+(f) \le I(f)$.

Se prueba ahora un resultado más fuerte que el corolario 4.2, del que éste sería un caso particular, ya que $\overline{I} \leq I^{-}$.

LEMA 4.4.

Sea $(f_n)_n \subset R_1(B,I)$ *tal que* $I(|f_n|) \longrightarrow 0$, *cuando* $n \to \infty$; *entonces*

$$(f_n)_n \longrightarrow 0(I^{-}).$$

Demostración:

Sea $h \in B$, $h \geq 0$, por la proposición 4.1 se tiene que $|f_n| \wedge h \in \overline{B}$, y además, $\overline{I}(|f_n| \wedge h) \leq I(|f_n|)$.

Como $|f_n| \wedge h \in R_1(B,I)$ y $0 \leq |f_n| \wedge h \leq h \in B$, el lema 3.29 asegura que

$$|f_n| \wedge h \in R_{prop}(B,I), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Con ello,

$$I^{-}(|f_n| \wedge h) = I^{+}(|f_n| \wedge h) \leq I(|f_n|) \longrightarrow 0.$$

Por tanto, $I^{-}(|f_n| \wedge h) \longrightarrow 0$, para toda $h \in B$, $h \geq 0$, de donde se concluye que $(f_n)_n \longrightarrow 0(I^{-})$.

El teorema siguiente establece que la clase $R_1(B,I)$ es cerrada respecto de la convergencia en I^{-}.

TEOREMA 4.5.

Sean $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *y* $(f_n)_n$ *una sucesión I-Cauchy de funciones de* $R_1(B,I)$, *tal que* $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$.

Entonces,

$$f \in R_1(B,I), \quad I(|f_n - f|) \longrightarrow 0 \quad y \quad I(f) = \lim I(f_n).$$

Demostración :

Como B es denso en $R_1(B,I)$ (proposición 3.10), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función $h_n \in B$, tal que $I(|f_n - h_n|) < 1/n$. El lema 4.4 implica que

$$(h_n - f_n)_n \longrightarrow 0(I^-).$$

Además, $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ ya que se tiene

$$|h_n - f| \le |h_n - f_n| + |f_n - f|,$$

luego, $|h_n - f| \wedge h \le |h_n - f_n| \wedge h + |f_n - f| \wedge h \le$

$$\le |h_n - f_n| + |f_n - f| \wedge h.$$

De todo esto, $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ y $(h_n)_n$ es una sucesión I-Cauchy de funciones de B. Por tanto, $f \in R_1(B,I)$ y

$$I(|f_n - f|) \le I(|h_n - f|) + I(|h_n - f_n|) \longrightarrow 0,$$

luego, $I(f) = \lim I(f_n)$.

La clase $\overline{B}$ es "cerrada" respecto de la $\overline{I}$-convergencia con condiciones adicionales:

Si $f_n \in \overline{B}$, $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $(f_n)_n \longrightarrow f(\overline{I})$, *entonces,*

$$f \in \overline{B}, \text{ si y sólo si, } \overline{I}(|f|) < \infty.$$

(o equivalentemente, existe $g \in \overline{B}$, *tal que* $|f| \le g$*)*

(Corolario III, [21]).

La condición "$\overline{I}(|f|) < \infty$" no puede ser sustituida por el carácter $\overline{I}$-Cauchy de la sucesión $(f_n)_n$ (Ejemplo 2 de [21] con $f = \chi_T$).

5. TEOREMAS DE CONVERGENCIA MONOTONA Y DE CONVERGENCIA ACOTADA DE LEBESGUE. CONSECUENCIAS.

El uso de la I-convergencia localizada permite probar, para sistemas integrales no monótonamente continuos, teoremas de convergencia para la clase de las funciones I-integrables.

TEOREMA 5.1. *(Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue)*

Sean $(f_n)_n \subset R_1(B,I)$ *y* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, *con* $f_n \le f_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y* $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$; *sea* $\beta := \sup\{I(f_n);\ n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Entonces, se verifican:

i) $f \in R_1(B,I)$,

ii) $I(|f_n - f|) \longrightarrow 0$, *cuando* $n \to \infty$,

iii) $I(f) = \beta$,

iv) $f_n \le f(I^-)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Por el teorema 4.5 es suficiente demostrar que $(f_n)_n$ es una sucesión I-Cauchy para obtener *i)* y *ii)*.

En efecto, si $f_n \leq f_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $f_n \leq f_m$, para todos n, $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq n$.

Por tanto,

$$I(|f_n - f_m|) = I(f_n) - I(f_m), \text{ para todo } m \geq n.$$

La sucesión $(I(f_n))_n$ es una sucesión de números reales monótona y acotada, luego $(I(f_n))_n$ es convergente, esto es, es de Cauchy. Con todo ello $(f_n)_n$ es I-Cauchy, y en virtud del teorema 4.5 se tiene que $f \in R_1(B,I)$ y $I(|f_n - f|) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

Además, por el carácter monótono y convergente de la sucesión $(I(f_n))_n$, es claro que:

$$I(f) = \lim I(f_n) = \sup \{ I(f_n);\ n \in \mathbb{N} \} = \beta.$$

Finalmente, para la prueba de *iv)*, sea $p \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq p$; entonces $f_n \geq f_p$.

Además, $0 \leq (f_p - f)^+ \leq (f_n - f)^+ \leq |f_n - f|$.

Ahora, como $(|f_n - f|)_n \longrightarrow 0(I^-)$ se tiene que

$$(f_p - f)^+ = 0(I^-),$$

y por la definición 3.16, será $f_p \leq f(I^-)$, para todo $p \in \mathbb{N}$.

En la clase $\overline{B}$ de las funciones sumables sólo es posible dar una versión débil del teorema de la convergencia monótona. De nuevo es necesario imponer la condición "$\overline{I}(|f|) < \infty$", que no puede sustituirse por "$\sup I(|f_n|) < \infty$", (véase Corolario VI, [21] y sus comentarios adicionales)

A continuación establecemos algunas propiedades de relación entre las distintas integrales I, I^{+}, $\underline{I}$, $\overline{I}$.

PROPOSICION 5.2.

i) Si $f \in R_1(B,I)$ *y* $g \in B^{+}$, *con* $f \leq g$; *entonces,* $I(f) \leq I^{+}(g)$.

ii) Si $f \in R_1(B,I)$ *y* $g \in B^{+}$, *con* $f \leq g(I^{-})$; *entonces,* $I(f) \leq I^{+}(g)$.

Demostración:

i) Sea $f \in R_1(B,I)$, $f \geq 0$ y sea $(h_n)_n \subset B$, con $h_n \geq 0$, la sucesión que define a f. La sucesión $(h_n \wedge f)_n \subset R_1(B,I)$ verifica $(h_n \wedge f)_n \longrightarrow f \wedge f = f(I^{-})$. Además

$$|h_n \wedge f| \leq h_n \in B, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

y en virtud del lema 3.29 puede asegurarse que $h_n \wedge f \leq f \leq g$, luego se tiene

$$I(h_n \wedge f) = I^{+}(h_n \wedge f) \leq I^{+}(f), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\lim I(h_n \wedge f) = I(f) \leq I^{+}(g)$.

Si $f \in R_1(B,I)$ es una función de cualquier signo, y $f \leq g \in B^{+}$, entonces, para $g \in B^{+}$, existe $h \in B$, con $h \leq g$.

Por tanto,

$$f - h \leq (f - h)^{+} = (f - h) \vee 0 \leq (g - h) \vee 0 = g - h.$$

Es decir,

$$I(f - h) = I(f) - I(h) \leq I((f - h)^{+}) \leq I^{+}(g) - I(h),$$

donde la última desigualdad es cierta ya que

$(f - h)^+ \in R_1(B,I)$, $(f - h)^+ \geq 0$ y $g - h \in B^+$ con $(f - h)^+ \leq g - h$.

Luego, $I(f) \leq I^+(g)$, y la demostración queda completada.

ii) Si $f \leq g(I^-)$, entonces, por la proposición 3.17, existe $\phi \in N_1(B,I)$, con $f \leq g \dot{+} \phi$, o bien, $f \dot{-} \phi \leq g$. Como la función $f \dot{-} \phi \in R_1(B,I)$ y $g \in B^+$, aplicando *i)* se tiene

$$I(f \dot{-} \phi) = I(f) - I(\phi) \leq I^+(g).$$

Dado que $I(\phi) = 0$, se concluye que $I(f) \leq I^+(g)$.

Obviamente, se puede probar un resultado dual al anterior, es decir:

i) *Si* $f \in R_1(B,I)$, $h \in B^-$, *con* $h \leq f$; *entonces* $I^-(h) \leq I(f)$.

ii) *Si* $f \in R_1(B,I)$, $h \in B^-$, *con* $h \leq f(I^-)$; *entonces,* $I^-(h) \leq I(f)$.

COROLARIO 5.3.

Sea $f \in R_1(B,I)$; *entonces,*

$$I^+(f) \leq \underline{I}(f) \leq I(f) \leq \overline{I}(f).$$

Demostración:

Sea $h \in B_-$, con $h \le f$; entonces, $I^-(h) \le I(f)$. Por definición de $\underline{I}$, se tiene que $\underline{I}(f) \le I(f)$.

Por otra parte, la proposición 5.2 y la defininción de $\overline{I}$ implican directamente que $I(f) \le \overline{I}(f)$.

Y, finalmente, $I^+(f) \le \underline{I}(f)$ se verifica siempre, sin más que considerar que $B \subset B_-$.

La definición usual de la integral de una función abstracta-Riemann-μ-integrable como una integral inferior aparece ahora en el siguiente

COROLARIO 5.4.

Sea $f \in +R_1(B,I)$; entonces,

$$I^+(f) = \underline{I}(f) = I(f),$$

donde $+R_1(B,I) := \{ f \in R_1(B,I);\ f \ge 0 \}$.

Demostración:

En virtud de la Nota 4 del Capítulo I, se tiene que $I^+(f) = I(f)$, siempre que $f \in +R_1(B,I)$. Por tanto, la igualdad anterior, junto con la desigualdad dada en el corolario 5.3 nos lleva a que

$$I^+(f) = \underline{I}(f) = I(f).$$

COROLARIO 5.5.

Sea $f \in \overline{B} \cap R_1(B,I)$; *entonces,* $I(f) = \overline{I}(f)$.

Demostración:

Si $f \in \overline{B} \cap R_1(B,I)$, se tiene por el corolario 5.3 que

$$\underline{I}(f) \leq I(f) \leq \overline{I}(f),$$

y como $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, por ser $f \in \overline{B}$, se da la igualdad de las tres integrales.

Nota 2.

Como complemento a la Nota 1, obsérvese que la proposición 2 de [6] es una consecuencia directa del corolario 5.4.

Por tanto, cualquier función no negativa y nula $(0 \leq f \in N_1(B,I))$, con $\overline{I}(f) = \infty$, no pertenece a $\overline{B}$; pero si $\overline{I}(f) < \infty$ (o equivalentemente, $f \leq g \in \overline{B}$), por el corolario 4.3, $f \in \overline{B}$, y además

$$I(f) = \overline{I}(f) = \underline{I}(f) = 0.$$

En resumen, cualquier función nula no-negativa tiene integral superior infinita o cero.

TEOREMA 5.6. *(Teorema de la convergencia acotada de Lebesgue)*

Sean $(f_n)_n \subset R_1(B,I)$ y $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, tales que $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ y existe $g \in R_1(B,I)$, con $|f_n| \le g$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces,

$f \in R_1(B,I)$, $I(|f - f_n|) \longrightarrow 0$ y $I(f) = \lim I(f_n)$, cuando $n \to \infty$.

Demostración:

Vamos a probar que $(f_n)_n$ es I-Cauchy, y en virtud del teorema 4.5 se obtendrá el resultado.

Si $(f_n)_n$ no es una sucesión I-Cauchy entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, dado $k \in \mathbb{N}$, existen n_k, $p_k \in \mathbb{N}$ verificando

$$I(|f_{n_k} - f_{p_k}|) \ge \varepsilon_0.$$

Se considera la función auxiliar siguiente

$g_k := |f_{n_k} - f_{p_k}|$, entonces $g_k \in R_1(B,I)$ y $|g_k| \le 2\, g =: \varphi$.

Además, para $h \in B$, $h \ge 0$ se tiene

$$|g_k| \wedge h = g_k \wedge h \le |f_{n_k} - f| \wedge h + |f - f_{p_k}| \wedge h,$$

para toda $h \in B$, $h \ge 0$; y como $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, entonces

$$(g_k)_k \longrightarrow 0(I^-).$$

Por otra parte, la función $\varphi := 2\, g \in R_1(B,I)$, luego, dada la densidad de B en $R_1(B,I)$ (proposición 3.10), para $\varepsilon_0/2$ existirá $h \in B$ tal que $I(|\varphi - h|) < \varepsilon_0/2$.

Pero como además se tiene que

$$\Big| |\varphi| - |h| \Big| \le |\varphi - h|, \text{ entonces}$$

$$I\left(\left||\varphi| - |h|\right|\right) = I\left(\left|\varphi - |h|\right|\right) < \varepsilon_0/2,$$

se puede considerar $h \geq 0$.

También se verifica $0 \leq \varphi - \varphi \wedge h \leq |\varphi - h|$, luego

$$I(\varphi - \varphi \wedge h) < \varepsilon_0/2.$$

La sucesión $(g_k)_k \longrightarrow 0(I^-)$, entonces se tiene que $(g_k \wedge h)_k \longrightarrow 0(I^-)$, y $\overline{I}(|g_k \wedge h|) \longrightarrow 0$, ya que $\overline{I} \leq I^-$, en general.

Además, $|g_k \wedge h| \in R_1(B,I) \cap \overline{B}$, luego por el corolario 5.5 se tiene que

$$I(|g_k \wedge h|) = \overline{I}(|g_k \wedge h|) \longrightarrow 0.$$

Ahora bien, se tiene la siguiente situación

$$0 \leq g_k \leq (g_k \wedge h) + (\varphi - \varphi \wedge h), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

En efecto, si $g_k \leq h$, entonces $g_k \leq g_k + (\varphi - \varphi \wedge h)$, ya que $\varphi - \varphi \wedge h \geq 0$. Por otra parte, si $g_k \geq h$, entonces $h \leq g_k \leq \varphi$, luego $g_k \wedge h = h$ y $\varphi - \varphi \wedge h = h$. De lo anterior se tiene $g_k = g_k + h - h \leq \varphi + (g_k \wedge h) - (\varphi \wedge h)$, y entonces $g_k \leq (g_k \wedge h) + (\varphi - \varphi \wedge h)$.

De la desigualdad (1) se concluye así:

$$\varepsilon_0 \leq I(g_k) \leq I(g_k \wedge h) + I(\varphi - \varphi \wedge h) \leq I(g_k \wedge h) + \varepsilon_0/2 =$$

$$= \overline{I}(g_k \wedge h) + \varepsilon_0/2 < \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0,$$

luego existe una contradicción.

Por tanto, $(f_n)_n$ es una sucesión I-Cauchy, como se quería demostrar.

Se establecen ahora los teoremas de convergencia generalizados, esto es, utilizando la relación "$\le (I^-)$" (definición 3.16).

TEOREMA 5.7. *(Teorema de la convergencia monótona generalizado)*

Sean $(f_n)_n \subset R_1(B,I)$ *y* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, *con* $f_n \le f_{n+1}(I^-)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, *y sea* $\beta := \sup\{I(f_n);\ n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Entonces, se verifican:

i) $f \in R_1(B,I)$,

ii) $I(|f_n - f|) \longrightarrow 0$, *cuando* $n \to \infty$,

iii) $I(f) = \beta$,

iv) $f_n \le f(I^-)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Basta demostrar que, en estas condiciones, $(f_n)_n$ es una sucesión I-Cauchy, para obtener, en virtud del teorema 4.5, las afirmaciones *i)*, *ii)* y *iii)*.

Como $f_n \le f_{n+1}(I^-)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. por la proposición 3.17, existe para cada $n \in \mathbb{N}$ una función nula u_n tal que

$$f_n \le f_{n+1} \dot{+} u_n.$$

Sean ahora m, $n \in \mathbb{N}$, con $m > n$; entonces, dado que la operación $\dot{+}$ es asociativa, se tiene que

$$f_n \le f_{n+1} \dot{+} u_n \le f_{n+2} \dot{+} (u_{n+1} \dot{+} u_n) \le \ldots \le$$

$$\le f_{n+(m-n)} \dot{+} (u_{n+(m-n)-1} \dot{+} \ldots \dot{+} u_{n+1} \dot{+} u_n) = f_m \dot{+} \sum_{k=0}^{(m-n)-1} u_{n+k}\,.$$

Sea $v_{nm} := \sum_{k=0}^{(m-n)-1} u_{n+k}$ (suma con $\dot{+}$ de funciones nulas, luego por la proposición 3.15, $v_{nm} \in N_1(B,I)$).

A continuación, obsérvese que la desigualdad siguiente es cierta:

$$|f_n - f_m| \leq |f_n - f_m \dot{+} v_{nm} \dot{-} v_{nm}| \leq$$

$$\leq |f_n - (f_m \dot{+} v_{nm})| + |v_{nm}| = f_m \dot{+} v_{nm} - f_n + |v_{nm}|.$$

Esto es, $|f_n - f_m| \leq f_m \dot{+} v_{nm} - f_n + |v_{nm}|$, para todos n, $m \in \mathbb{N}$, $m > n$.

Entonces, como I se anula sobre $N_1(B,I)$, y las funciones v_{nm}, $|v_{nm}| \in N_1(B,I)$, se consigue

$$I(|f_n - f_m|) \leq I(f_m) - I(f_n).$$

Ahora bien, $(I(f_n))_n$ es una sucesión monótona y acotada de números reales; por tanto, $I(|f_n - f_m|) \longrightarrow 0$, es decir, la sucesión $(f_n)_n$ es I-Cauchy. Con ello, y en virtud del teorema 4.5, se tiene que $f \in R_1(B,I)$ y $I(f) = \lim I(f_n) = \beta$.

Para probar *iv)* se sigue de forma análoga al correspondiente apartado del teorema 5.1 y sin más que tener en cuenta que, si n, $p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, entonces

$$(f_p - f)^+ \leq (f_n - f)^+ \dot{+} v \leq |f_n - f| \dot{+} v,$$

siendo $v \geq 0$ una función nula.

TEOREMA 5.8. *(Teorema de la convergencia dominada generalizado)*

Sean $(f_n)_n \subset R_1(B,I)$ *y* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *tal que* $(f_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ *y existe* $g \in R_1(B,I)$ *tal que* $|f_n| \leq g(I^-)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Entonces,

$$f \in R_1(B,I),\ I(|f_n - f|) \longrightarrow 0,\ y\ I(f) = \lim I(f_n).$$

Demostración:

Es análoga a la prueba del teorema 5.6 con las siguientes consideraciones:

a) La sucesión $(g_k)_k \longrightarrow 0(I^-)$, y $|g_k| \leq \varphi := 2\,g(I^-)$, es decir, existe $u_k \in N_1(B,I)$, $u_k \geq 0$ tal que

$$|g_k| \leq \varphi \dotplus u_k,\ \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

b) La desigualdad (1) se transforma en

$$g_k \leq (g_k \wedge h) + (\varphi - \varphi \wedge h) \dotplus u_k,\ \text{para todo } k \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta que $I(u_k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, se concluye con la misma contradicción que en el teorema 5.6.

Completamos esta parte con algunas propiedades adicionales de la clase $R_1(B,I)$, que se obtienen por aplicación de los teoremas de convergencia, asumiendo algunas condiciones débiles de continuidad. Tales condiciones se verifican para el caso finitamente aditivo (clase $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$), y por tanto, son también subsumidas en nuestros resultados más generales.

Recordemos que un sistema de Loomis arbitrario (X,B,I) se dice continuo superiormente (o C_∞) si, para toda $f \in B$, $f \geq 0$, se verifica

$$\lim \underline{I}(f \wedge r) = I(f), \text{ cuando } r\to\infty;$$

y continuo inferiormente (o C_0) si, para toda $f \in B$, $f \geq 0$, se tiene

$$\lim \overline{I}(f \wedge r) = 0, \text{ cuando } r\to 0.$$

Diremos que un sistema de Loomis es continuo si lo es superior e inferiormente (véase apartado 1.b del Capítulo I).

LEMA 5.9.

Sea (X,B,I) un sistema de Loomis stoniano y verificando el axioma C_0.

Si $(f_n)_n \longrightarrow 0$ (c.u.) entonces $(f_n)_n \longrightarrow 0(I^-)$.

(donde c.u. significa convergencia uniforme en X)

Demostración:

Si $(f_n)_n \longrightarrow 0$ (c.u.) en X se verifica que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in X, \text{ y } n \geq n_0.$$

Sea $h \in B$, $h \geq 0$, entonces $|f_n| \wedge h < h \wedge \varepsilon$, luego

$$I^-(|f_n| \wedge h) \leq I(h \wedge \varepsilon) \longrightarrow 0,$$

ya que (X,B,I) es continuo inferiormente. Entonces $(f_n)_n \longrightarrow 0(I^-)$ como se quería demostrar.

Recuérdese que el carácter stoniano de la clase B se hereda en la extensión $R_1(B,I)$ (proposición 3.11). Con el lema siguiente se prueba la conservación de los axiomas C_0 y C_∞ también en $R_1(B,I)$.

LEMA 5.10.

Sea (X,B,I) un sistema de Loomis stoniano y continuo. Entonces, para cada $f \in R_1(B,I)$, con $f \geq 0$, se verifica:

$$\lim_{r\to 0} I(f \wedge r) = 0 \quad y \quad \lim_{r\to\infty} I(f \wedge r) = I(f).$$

Demostración:

Sea $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0+1} < r \leq \frac{1}{n_0}$, por lo que

$$f \wedge r \leq f \wedge 1/n \text{, para todo } n \geq n_0.$$

Sea $f_n := f \wedge 1/n \in R_1(B,I)$. Claramente se tiene que $(f_n)_n \longrightarrow 0(c.u.)$ en X; por el lema 5.9 se sigue que $(f_n)_n \longrightarrow 0(I^-)$.

Dado que $|f_n| = f_n \leq f \in R_1(B,I)$, el teorema 4.5 nos asegura que

$$I(f_n) = I(f \wedge 1/n) \longrightarrow I(0) = 0.$$

Por tanto $I(f \wedge r) \leq I(f_n) \longrightarrow 0$, cuando $r \to 0$.

Por otra parte, si $f \in {}^+R_1(B,I)$, entonces por la proposición 3.11 se puede afirmar que $f \wedge r \in R_1(B,I)$, al ser B stoniano; y además

$$|I(f) - I(f \wedge r)| \leq I(|f - f \wedge r|).$$

Por la densidad de B en $R_1(B,I)$, para $f \in R_1(B,I)$ y $\varepsilon > 0$, existe $h \in B$ tal que $I(|f - h|) < \varepsilon$.

Ahora, la siguiente desigualdad se verifica:

$$|f - f \wedge r| \le |f - h| + |h - h \wedge r| + |h \wedge r - f \wedge r| \le$$

$$\le 2\,|f - h| + |h - h \wedge r|.$$

Obsérvese que

$I(|h - h \wedge r|) = I(h - h \wedge r) = I(h) - I(h \wedge r) \longrightarrow 0$, si $r \to \infty$,

ya que se verifica el axioma C_∞.

Con todo ello se tiene que

$$I(|f - f \wedge r|) \le 2\, I(|f - h|) + I(|h - h \wedge r|) < 2\varepsilon + \varepsilon,$$

siempre que $r \ge k(\varepsilon)$, es decir

$$\lim_{r\to\infty} I(f \wedge r) = I(f),$$ como se quería probar.

LEMA 5.11.

Sea $B \subset \mathbb{R}^X$ tal que si $f,\ g \in B$, entonces $fg \in B$ (brevemente, $BB \subset B$).

Entonces, si $f,\ g \in R_1(B,I)$ y $f,\ g$ están acotadas, se verifica que $fg \in R_1(B,I)$.

Demostración:

a) Sea $f \in R_1(B,I)$ y $0 \ne g \in B$, una función acotada; veamos que $fg \in R_1(B,I)$.

Sea $(h_n)_n$ la sucesión I-Cauchy de funciones de B que define a f. Entonces $(h_n g)_n$ es una sucesión de funciones de B ($BB \subset B$), y es I-Cauchy ya que se verifica:

$$|h_n g - h_m g| \le \sup\,\{|g(x)|;\ x \in X\}\ |h_n - h_m|,$$

para todos $n,\ m \in \mathbb{N}$. Sea $M := \sup\,\{|g(x)|;\ x \in X\}$ y al ser

$g \neq 0$ el número M es mayor estrictamente que cero.
Además para toda $h \in B$, $h \geq 0$, se tiene que

$$|h_n g - fg| \wedge h \leq M\,|h_n - f| \wedge h = M(|h_n - f| \wedge h/M).$$

Entonces $(h_n g)_n \longrightarrow fg(I^-)$, por lo que $fg \in R_1(B,I)$.
Si la función $g = 0$, entonces, trivialmente $fg \in R_1(B,I)$.

b) Ahora sea $f \in R_1(B,I)$, $f \geq 0$ y $g \in R_1(B,I)$, ambas acotadas. La Nota 4 del Capítulo I asegura la existencia de una sucesión $(h_n)_n \subset B$ con $0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$ y $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ tal que $\lim I(h_n) = I(f) = I^+(f)$; siendo cada $h_n \in B$ una función acotada.

Por el apartado (a) se tiene que $h_n g \in R_1(B,I)$, para todo $n \in \mathbb{N}$; por tanto, $(h_n g)_n \subset R_1(B,I)$, es trivialmente una sucesión I-Cauchy, tal que $(h_n g)_n \longrightarrow fg(I^-)$.

Finalmente, aplicando el teorema 4.5 se tiene que $fg \in R_1(B,I)$.

c) Si $f \in R_1(B,I)$ es una función de cualquier signo, se descompone $f = f^+ - f^-$, y se aplica (b) a cada sumando.

Nota 3.

Incluimos en este capítulo algunos comentarios sobre los trabajos conocidos por nosotros, en los que se realiza un estudio detallado de completaciones respecto de "seminormas integrales abstractas", para obtener extensiones similares, en parte, a las aquí dadas.

a) Una adaptación de la terminología de Schäfke [31], permite presentar la clase $R_1(B,I)$ con seminormas integrales localizadas. Si se considera $I^-:\overline{\mathbb{R}}^X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $I^-(f) := \inf \{ I(h); f \le h \in B \}$, con $\inf \emptyset = \infty$; I^- es una seminorma integral en $\overline{\mathbb{R}}^X$, esto es,

$$I^-(f + g) \le I^-(f) + I^-(g) \quad , \text{ para todas } f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X,$$

$$I^-(\alpha f) = \alpha I^-(f), \text{ para } 0 \le \alpha \in \mathbb{R},\ f \in \overline{\mathbb{R}}^X,$$

$$I^-(f) \le I^-(g), \text{ para } f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X, \text{ con } f \le g.$$

La correspodiente seminorma integral localizada vendría definida, para toda $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, por

$$(I^-)_l(f) := \sup \{ I^-(f \wedge h); 0 \le h \in B \},$$

que también es una seminorma integral.

Se tiene que $(I^-)_l(f) = I(|f|)$, si $f \in R_1(B,I)$ y $I(f) = (I^-)_l(f) = I^+(f)$, para toda $f \in R_1(B,I)$, $f \ge 0$. Con ello, $R_1(B,I)$ sería la clausura de B respecto de la distancia $d(f,g) := (I^-)_l(|f - g|)$.

Siguiendo este esquema en [31] se da solamente la clase $R_1(B,I,\mathbb{R}) = R_1(B,I) \cap \mathbb{R}^X$, y sus teoremas de convergencia son aplicables sólo si la condición restrictiva (2), p. 124 es cierta, por ejemplo, para $B = C([0,1],\mathbb{R})$ no se satisface.

También en [33] p. 16, el espacio aquí descrito coincide con $R_1(|\mu|,\mathbb{R})$, (véase [19], p. 161, apéndice D).

b) En Aumann [3], & 8, p. 447 se obtiene solamente la clase $R_{\text{prop}}(B,I)$. Con su notación,

$$N = N_{R} = I^{-}_{\mu_L} \quad , \quad T^{*} = \int_a^b dx \text{ (integral propia de Riemann)}$$

$$\text{y} \quad L^{*} = R_{\text{prop}}(\mu_L/[a,b],\mathbb{R}), \quad \mu_L(]a,b[) := b - a.$$

$R_{\text{prop}}(B,I)$ es la clausura de B respecto de la seminorma integral I^{-}, esto es, f es integrable Riemann si su I^{-}-distancia a B: $\inf \{I^{-}(|f - h|);\ h \in B\}$, es cero.

c) Bichteler [4] estudia la integral de Daniell para funciones evaluadas en espacios de Banach E, con normas integrales, de forma similar a como se hace en [31], pero sin usar normas integrales localizadas, sino normas integrales Daniell-continuas ("σ-subaditivas") y la condición de Stone; así, el caso finitamente aditivo no es estudiado.

Aquí, $L^{1}_{E}(\mathcal{R},m^{J}) :=$ {funciones Jordan-m-integrables} $=$ $= R_{\text{prop}}(\mathcal{R},m)$ en nuestra notación si $E = \mathbb{R}$, (p. 81, [4]). En ningún caso $R_{1}(\mathcal{R},m^{J})$ es estudiado.

d) En Loomis [26] con su tercera extensión (U, "one-side completation", & 5, p. 178), y en virtud de nuestra proposición 3.27, se da la clase $R_{1}(B,I) \cap \mathbb{R}^{X}$, que es iteradamente completa por el teorema 4, p. 178, [26].

Por otra parte, el teorema 5, p. 180, [26] permite afirmar que si $R_{\text{prop}}(B,I)$ satisface el axioma de Stone y C_0, entonces $R_{1}(B,I) \cap \mathbb{R}^{X} \subset U$ $(= R_{1}(\mu_{I},\mathbb{R}))$ con $\mu_{I}(M)$ = extensión de $I(\chi_M)$, con $\chi_M \in R_{prop}(B,I)$.

Para un resultado satisfactorio de representación integral, se precisa además el axioma C_∞, (véanse, teorema 1, p. 211 [1], teorema 2, p. 173 [18]).

CAPITULO III

6. RELACIONES CON OTRAS EXTENSIONES INTEGRALES

7. NUEVAS CARACTERIZACIONES
DE LA I-INTEGRABILIDAD.

6. RELACIONES CON OTRAS EXTENSIONES INTEGRALES.

Con el corolario 3.13 del Capítulo I, se establece que la clase $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ de las funciones Riemann-μ-integrables (y en particular, la integración de Dunford-Schwartz), es un caso particular de $R_1(B,I)$.

Por otra parte, la generalización de la integral de Daniell-Bourbaki (clase $\overline{B}$ de las funciones sumables de [5]), y su relación con $R_1(B,I)$, ha sido estudiada en [6] y [21]. En este apartado, se analiza dicha relación para el caso de un sistema de Loomis abstracto.

Son fáciles de probar las siguientes propiedades que se enuncian en [6], nota 2, p. 261:

a) $\overline{B} \cap B^+ = B_{(+)}$, donde $B_{(+)} := \{f \in B_+;\ I^+(f) < \infty\}$.

b) Si $f \in B^+$ con $f \wedge h \in B_+$, para toda $h \in B$, $h \geq 0$, entonces $f \in B_+$.

Una discusión de esta última puede encontrarse también en [21], lema 6.

Para la clase $R_1(B,I)$ se puede probar un resultado similar al *(a)*.

LEMA 6.1.

$$+R_1(B,I) \cap B^+ \subset B_{(+)} \subset \overline{B}.$$

(donde $+R_1(B,I) := \{ f \in R_1(B,I);\ f \geq 0 \}$.

Demostración:

Si $f \in R_1(B,I) \cap B^+$, por la proposición 4.1, y ya que $B^+ \wedge B^+ \subset B^+$, se tiene que $f \wedge h \in \overline{B} \cap B^+$, para toda $h \in B$, $h \geq 0$. Ahora, en virtud de la propiedad *(a)* anterior, $f \wedge h \in B_{(+)}$, para toda $h \in B$, $h \geq 0$, y por aplicación de *(b)* se concluye que $f \in B_{(+)}$.

Nótese que, en todo caso, si $f \in B_+ \cap B_-$ y $I(f) \in \mathbb{R}$, es $f \in \overline{B}$.

Es inmediato que $\mathbb{R}_+^X \cap R_1(B,I) \cap B^- \subset R_{prop}(B,I)$, ya que para $0 \leq f \in B^-$ siempre existe $g \in B$, $0 \leq f \leq g$; y por el lema 3.29, $f \in R_{prop}(B,I)$.

En la bibliografía conocida hay numerosos ejemplos que prueban la no existencia de una relación general de inclusión entre las clases $R_1(B,I)$ y $\overline{B}$. Citamos aquí algunos de ellos.

Ejemplos:

a) Sea $X = \mathbb{R}$, $\Omega = \{ \{x\};\ x \in X \} \cup \{\emptyset\}$, $\mu(\{x\}) = 1$, si $x \in X$ y $\mu: \Omega \longrightarrow \{0,1\}$, σ-aditiva.

Se tiene que

$$R_{prop}(\mu,\mathbb{R}) = B_{\Omega} = l^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = R_1(\mu,\mathbb{R}) = \overline{B}_{\Omega} =$$

$$= \{ f \in \mathbb{R}^X;\ tr(f) \text{ es sumable y } \sum_{x \in tr(f)} |f(x)| < \infty \},$$

donde $tr(f) = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$.

b) $X = [0,1[$, $E(X) := \{I;\ I = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i,b_i[,\ a_i,\ b_i \in \mathbb{Q},\ 0 \leq a_i \leq$

$\leq b_i \leq 1\}$,

$$\Omega := \{I \in E(X);\ I \cap [0,1/2[= \emptyset \text{ ó } [0,1/2[\subset I\},$$

y $\mu :=$ medida de Lebesgue en el álgebra Ω.

Se tiene que $\mu(X) < \infty$, $B^+_{\Omega} = (B_{\Omega})_+$ y la función $f = \chi_{[0,1/2[} \in \overline{B}_{\Omega}$, pero no pertenece a $R_{prop}(B_{\Omega}, I_{\mu})$. Dado que $f = f \wedge 1$, $1 \in B$ se tiene que $f \notin R_1(\mu,\mathbb{R})$.

c) $X = \mathbb{R}$, $\Omega :=$ anillo formado por todas las uniones finitas de intervalos disjuntos $[a,b[\subset \mathbb{R}$, $\mu :=$ medida de Lebesgue en Ω.

Sea $P := \{ r \in \mathbb{Q};\ 0 < r < 1 \}$. Se tiene que $\chi_P \in \overline{B}_{\Omega}$ $(= L^1(\mu) = \{$ funciones integrables Lebesgue en $\mathbb{R}$ $\})$, pero $\chi_P \notin R_1(\mu,\mathbb{R})$.

(Véase para (b) y (c), p. 262 de [6]).

d) El ejemplo 2, p. 10 de [21], prueba que existen conjuntos X, anillos Ω de subconjuntos de X y medidas finitamente aditivas $\mu: \Omega \longrightarrow [0,\infty[$, tales que existe $T \subset X$, con $\chi_T \in R_1(\mu,\mathbb{R})$, $\int \chi_T \, d\mu = 0$ (conjuntos "fuertemente μ-nulos), pero $\chi_T \notin \overline{B}_\Omega$.

Además, aquí se tiene que $\chi_T \wedge g \in \overline{B}_\Omega$, para toda $g \in B$, y $0 = \underline{I}_\mu(\chi_T) \leq \overline{I}_\mu(\chi_T) = \infty$.

e) Sea X un conjunto no numerable (p. e. $\mathbb{R}$), Ω un álgebra en X formada por todos los subconjuntos $A \subset X$ finitos, y todos los complementarios $X - A$ de conjuntos finitos, $A \subset X$.

Se define $\mu(A) = 0$ y $\mu(X - A) = 1$; μ es σ-aditiva en Ω. Aquí se tiene la siguiente relación:

$$S(\Omega,\mathbb{R}) \subsetneqq R_{prop}(\mu,\mathbb{R}) = R_1(\mu,\mathbb{R}) = \overline{B}_\Omega \cap \mathbb{R}^X.$$

Se establecen ahora algunas condiciones para afirmar inclusiones entre las clases $\overline{B}$ y $R_1(B,I)$.

LEMA 6.2.

Sea (X,B,I) un sistema de Loomis con $\overline{\mathbb{R}}_+^X \subset B^+$.

Entonces, $R_1(B,I) \subset \overline{B}$.

Demostración:

Sea $f \in R_1(B,I)$, entonces $f^{\mp} \in R_1(B,I) \cap \overline{\mathbb{R}}^X_+ \subset$ $\subset +R_1(B,I) \cap B^+$. En virtud del lema 6.1 se consigue que $f^{\mp} \in B_{(+)} \subset \overline{B}$; por tanto, $f \in \overline{B}$.

Por otra parte, las condiciones (19) y (20) dadas en [21], para el caso aditivo, pueden trasladarse sin dificultad para sistemas de Loomis arbitrarios.

PROPOSICION 6.3.

Dado un sistema de Loomis (X,B,I), las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\overline{B} \subset R_1(B,I)$,

ii) $B_{(+)} \subset R_1(B,I)$.

Demostración:

Como $B_{(+)} \subset \overline{B}$, se tiene que *(i)* implica *(ii)*.

Sea ahora $f \in \overline{B}$, entonces existe $(h_n)_n \subset B$, $\overline{I}(|h_n - f|) \longrightarrow 0$. Por tanto, $(h_n)_n \longrightarrow f(\overline{I})$, esto es, dado $\varepsilon > 0$ y $h \in B$, $h \geq 0$ se tiene

$$|h_n - f| \wedge h \leq k_n, \text{ con } k_n \in B_+ \text{ y } I(k_n) < \varepsilon.$$

Cada $k_n \in B_{(+)} \subset R_1(B,I)$ y como $|h_n - f| \wedge h \leq k_n \wedge h =: l_n$, con $l_n \in R_1(B,I)$, y por el lema 3.29, cada $l_n \in R_{prop}(B,I)$.

Ahora se sigue de forma análoga al lema 3.26, para concluir que $f \in R_1(B,I)$.

A su vez, la condición *(ii)* equivale a:

$iii)$ Si $0 \leq f \leq h \in B,\ f \in B_+ \Rightarrow f \in R_1(B,I)$.

Basta tener en cuenta que $B_{(+)} \wedge B_{(+)} \subset B_{(+)}$ y usar el lema 3.29.

O equivalentemente

$iv)$ $0 \geq g \in B_+ \;\Rightarrow\; g \in R_1(B,I)$.

También es cierta la condición siguiente:

$$\text{Si } 0 \leq f \leq h \in B,\ f \in B_+ \;\Rightarrow\; [f \in R_1(B,I) \Leftrightarrow I^+(f) = I^-(f) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow I^+(f) + I^-(-f) = 0]$$

Es inmediato por definición de $R_{prop}(B,I)$ y en virtud del lema 3.29.

Por otra parte, las anteriores condiciones nos permiten establecer las siguientes relaciones:

$$\overline{\mathbb{R}}_+^X \subset B^+ \;\Leftrightarrow\; \chi_{\{x\}} \in B^+,\ \forall\, x \in X \;\Rightarrow\; [0 \geq g \in B_+ \Rightarrow -g \in B^+] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (iii) \Rightarrow [f,\ f_n \in \overline{\mathbb{R}}^X;\ (f_n)_n \longrightarrow f(\overline{I}) \Rightarrow (f_n)_n \dashrightarrow f(I^-)].$$

Con ello, y con el lema 6.2, si $\overline{\mathbb{R}}_+^X \subset B^+$, entonces

$$\overline{B} = R_1(B,I).$$

Nota 1.

Con parte de los resultados obtenidos por Günzler, Díaz Carrillo en el estudio de la extensión integral con la $\overline{I}$-convergencia, (véase [22]), podemos hacer la siguiente observación:

Si Ω es un semianillo, $\mu:\Omega \longrightarrow [0,\infty[$ una medida τ-aditiva (= red-continua), $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $A_n \in \Omega$; la condición (36) de [21] es cierta, entonces

$$R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}}) \subset \overline{B}_\Omega = L^1(\mu,\overline{\mathbb{R}}) = \text{Bourbaki } L^\tau(\mu,\overline{\mathbb{R}}).$$

Si se añade la condición $\chi_{\{x\}} \in L^1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$, $x \in X$, entonces

$$L^1(\mu,\overline{\mathbb{R}}) = R_1(L_\mu,\tilde{I}_\mu),$$

donde $L_\mu := \{f \in \mathbb{R}^X;\ \exists\ (f_n)_n \subset B_\Omega,\ I_\mu\text{-Cauchy},\ (h_n)_n \longrightarrow f(\overline{I}_\mu)\}$

y $\tilde{I}_\mu := I_\mu / L_\mu$.

Un caso especial sería para $X = \mathbb{R}^n$, $\Omega = \Omega_\mu$, μ = medida de Lebesgue μ_L^n de $C(X)$ en [21]. Todas las condiciones son ciertas en la siguiente situación:

$$B = C_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}),\ I = \text{integral de Riemann en } C_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}).$$

Entonces, $L_\mu(B_\Omega, I_\mu) = \overline{B}_\Omega = L^1(\mu_L^n,\mathbb{R}) = R_1(L_\mu,\tilde{I}_\mu)$.

No obstante los resultados anteriores sobre relaciones entre $\overline{B}$ y $R_1(B,I)$, es posible encontrar una relación general entre ambas clases: $R_1(B,I) \subset \overline{B}$ módulo funciones nulas.

La relación que aquí probamos generaliza la análoga para el caso aditivo, dada en [6], teorema p. 262, o en el corolario X de [21]. Además, tal y como se establece en el ejemplo 2 de [21] sería la única relación general posible entre dichas clases.

TEOREMA 6.4.

Sea (X,B,I) un sistema de Loomis arbitrario. Entonces, se tiene

$$R_1(B,I) \subset \overline{B} + N_1(B,I).$$

Demostración:

Sea $f \in R_1(B,I,\mathbb{R})$, con $f \geq 0$; por la Nota 4 del Capítulo I se tiene que existe $(h_n)_n \subset B$, una sucesión I-Cauchy, con $0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$, $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ y tal que $(I(h_n))_n \longrightarrow I^+(f) = I(f)$.

Se define $g := \lim h_n \in \mathbb{R}^X$, luego $g \in B^+$, $g \leq f$ y $I^+(g) = \lim I(h_n) = I(f)$. Además $(h_n)_n \longrightarrow g(I^-)$ ya que:

$$|h_n - g| \wedge h = (g - h_n) \wedge h \leq (f - h_n) \wedge h, \ 0 \leq h \in B.$$

Por tanto, $g \in R_1(B,I) \cap B^+$ y $I(g) = I(f)$. También, en virtud del lema 6.1 se tiene que $g \in B_{(+)} \subset \overline{B}$.

En resumen, si $0 \leq f \in R_1(B,I,\mathbb{R})$, existe $g \in R_1(B,I) \cap \overline{B}$ tal que $I(f) = I(g)$.

Ahora bien, $k := f - g \geq 0$ y $k \in R_1(B,I)$ con $I(k) = 0$, por tanto $k \in N_1(B,I)$.

Es decir, la función f se puede escribir com $g + k$, luego $+R_1(B,I,\mathbb{R}) \subset \overline{B} + N_1(B,I)$.

Si $f \in R_1(B,I)$, $f \geq 0$, por la proposición 3.28, existe $f_1 \in R_1(B,I,\mathbb{R})$ y $k_1 \in N_1(B,I)$ tales que $f = f_1 + k_1$; a su vez $f_1 = g_1 + k \in \overline{B} + N_1(B,I)$, por tanto:

$$f = f_1 + k_1 = (g_1 + k) + k_1 = g_1 + (k + k_1) \in \overline{B} + N_1(B,I).$$

En el caso en que f sea de cualquier signo, se descompone en f^+ y f^-, y se aplica el razonamiento anterior a cada sumando.

Nota 2.

a) Se puede dar una demostración alternativa que generaliza la dada en [6] para el teorema p. 262:

$$"R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}}) \subset \overline{B} + \{ f \in \overline{\mathbb{R}}^X;\ \overline{I}_\mu(f) = o \}".$$

En efecto, si $f \in +R_1(B,I,\mathbb{R})$ la función auxiliar $f_s := sup\ \{g \in B;\ 0 \leq g \leq f\}$ también pertenece a $R_1(B,I,\mathbb{R}) \cap \overline{B}$, y además $I(f) = I(f_s) = \overline{I}(f_s) = \underline{I}(f_s)$.

El resto sigue igual, teniendo en cuenta el teorema de caracterización 3.30.

La misma función f_s permite probar que si $f \in R_1(B,I) \cap \overline{B}$, entonces $I(f) = \overline{I}(f) = I(f_s)$. Este resultado ya ha sido probado con anterioridad (corolario

5.5) en el Capítulo II.

b) Para cualquier función $f \in R_1(B,I)$ se tiene que

$$f \in \overline{B} \Leftrightarrow \exists\, g \in \overline{B},\ |f| \leq g.$$

Nótese que si $f \leq g \in \overline{B}$, por la proposición 4.1 es $f \wedge g = f \in \overline{B}$. Esta propiedad generaliza el corolario XI de [21].

c) Con la condición de continuidad de Daniell sobre el sistema de Loomis (X,B,I), el espacio $L^1 := L^1(B,I)$ de las funciones Daniell-I-integrables con extensión integral $J: L^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ está bien definida ([14]), p. 77); y se corresponde con las "funciones sumables" en [29] p. 60, o "integrables" en [34] p. 11, siendo la clausura de B en $\overline{\mathbb{R}}^X$ respecto de una conveniente seminorma integral en [3] p.p. 448-450.

Con estas condiciones, el teorema 4 de [21] da un resultado análogo al anterior teorema 6.4:

$$\overline{B} \subset L^1(B,I) \cap \overline{B} \cap \overline{\mathbb{R}}^X + N(\overline{I}) \quad \text{e } I = J \text{ en } L^1 \cap B,$$

donde $N(\overline{I}) := \{f \in \overline{B};\ \overline{I}(|f|) = 0\}$. Siendo ésta, en general, la única relación posible.

Con todas las propiedades obtenidas hasta ahora, se dispone de los instrumentos necesarios, en el ambiente más general posible, para poder generalizar otras propiedades ya conocidas en la clase $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$. En concreto, una vez establecido que en general $R_1(B,I) \not\subset \overline{B}$, también aquí se pueden caracterizar los conjuntos para los cuales $R_1(B,I) \subset \overline{B}$, siguiendo el mismo desarrollo formal del teorema 3 de [21]. Resumimos brevemente este estudio.

Dado un sistema de Loomis (X,B,I) se nota por

$$\mathcal{R} := \{M \subset X;\ si\ f \in R_1(B,I),\ f = 0\ en\ X - M \Rightarrow f \in \overline{B}\}.$$

$\mathcal{R}$ es completo, esto es, si $P \subset M \in \mathcal{R}$, entonces $P \in \mathcal{R}$.

PROPOSICION 6.5.

Sea (X,B,I) un sistema de Loomis stoniano y continuo superiormente (ó C_∞), tal que todas las funciones de B son acotadas. Sea $M \subset X$.

Entonces, $M \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$ Para cada $P \subset M$, I^--nulo, es $\chi_P \in \overline{B}$.

Demostración: (Véase teorema 3 en [21])

Si $M \in \mathcal{R}$ y $P \subset M$, P I^--nulo, por la complitud de $\mathcal{R}$ se tiene que $P \in \mathcal{R}$, es decir, $\chi_P \in \overline{B}$.

Por otra parte, supongamos por hipótesis que para cada $P \subset M$, P I^--nulo, se tiene $\chi_P \in \overline{B}$. Sea también $f \in R_1(B,I)$ con $f = 0$ sobre $X - M$. Se puede considerar $f \geq 0$, pues $f \in \overline{B}$ es equivalente a demostrar que $|f| \in \overline{B}$.

En virtud del teorema 6.4 se tiene que existen $f_s \in \overline{B}$, $f_s \geq 0$ y $g \in N_1(B,I)$, $g \geq 0$ tales que $f = f_s + g$.

Como consecuencia de esta descomposición, basta probar que si $f \in R_1(B,I)$, $f \geq 0$ y $I(f) = 0$, entonces $f \in \overline{B}$.

Por el teorema 2 de [21] es suficiente probar que $f \wedge 1 \in \overline{B}$ para que $f \in \overline{B}$. Por lo tanto, se supone $0 \leq f \leq 1$.

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se definen los conjuntos:

$P_n := \{x \in X;\ f(x) > 1/2^n\}$, que verifican

$P_n \subset M$ y P_n es I^--nulo, luego $P_n \in \overline{B}$, y por el corolario 5.5 se tiene $I(\chi_{P_n}) = \overline{I}(\chi_{P_n}) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Con todo ello, se considera

$$0 \leq f_n := (f \wedge 1/2^n) - (f \wedge 1/2^{n+1}) \leq 1/2^n\, \chi_{P_{n+1}}.$$

Y se define la serie, $\sum_n f_n$, que converge simplemente a f, es decir, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, para todo $x \in X$.

Por otra parte, para las funciones $\chi_{P_{n+1}} \in \overline{B}$ con $\overline{I}(\chi_{P_{n+1}}) = 0$, existen $g'_n \in B_{(+)}$ tales que

$$1/2^n\, \chi_{P_{n+1}} \leq g'_n \quad \text{y} \quad I^+(g'_n) < \varepsilon/2^n.$$

A continuación, se toma $g_n := g'_n \wedge 1/2^n$. Con ello, $1/2^n\, \chi_{P_{n+1}} \leq g_n$, $I(g_n) < \varepsilon/2^n$, siendo $g_n \in B_{(+)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se define entonces la serie $g := \sum_{n=1}^{\infty} g_n$, que converge uniformemente en X, ya que $|g_n(x)| \leq 1/2^n$, para todo $x \in X$.

Entonces, $g \in B_+$ y $I^+(g) \leq \varepsilon$, luego $g \in B_{(+)} \subset \overline{B}$.

Por último, ya que $f_n \leq g_n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene $0 \leq f \leq g \in \overline{B}$, y $f \in R_1(B,I)$. Así, en virtud del corolario 4.3 $f \in \overline{B}$, como se quería demostrar.

Como consecuencia de la proposición 6.5 y el corolario 4.3, para un sistema de Loomis en las condiciones de la proposición anterior se puede afirmar que

(i) $$\mathcal{R} \supset \{ M \subset X;\ \exists\, g \in \overline{B},\ \chi_M \leq g \}$$

Por otra parte, nótese que la proposición 6.5, con $M = X$, nos permite establecer que para sistemas de Loomis en los que cualquier subconjunto P de X que sea I^--nulo es sumable (esto es, $\chi_P \in \overline{B}$), se tiene que $X \in \mathcal{R}$, es decir, $R_1(B,I) \subset \overline{B}$.

Con ello, se dan algunas condiciones suficientes para obtener dicha inclusión:

Si $\chi_X \in B \Rightarrow \chi_P \wedge \chi_X = \chi_P \leq \chi_X$ y si P es I^--nulo, por el lema 3.29, $\chi_P \in R_{prop}(B,I) \subset \overline{B}$, y entonces:

$$\chi_P \in \overline{B}, \text{ para todo } P\ I^-\text{-nulo.}$$

Si $\chi_X \in \overline{B} \Rightarrow \chi_P \wedge \chi_X = \chi_P \leq \chi_X$ y $\chi_P \in R_1(B,I)$, por ser P I^--nulo; luego por el corolario 4.3, se tiene que $\chi_P \in \overline{B}$.

Si $\chi_X \in R_{prop}(B,I) \subset \overline{B}$, se concluye igual que arriba.

Si $\chi_X \in R_1(B,I)$, o lo que es lo mismo, $I^+(\chi_X) < \infty$, se tiene también $\chi_P \in \overline{B}$, para todo $P \subset X$, I^--nulo.

Véase en relación con estos resultados las condiciones (22)-(27) de [21].

Si se considera el espacio de medida finitamente aditiva (X,Ω,μ), y se nota para cualquier $M \subset X$, por

$$\mathcal{R}(M,\overline{\mathbb{R}}) := \{f \in R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}});\ f = o \text{ en } X - M\},$$

$B = B_\Omega :=$ funciones escalonadas, $\int .\ d\mu = I_\mu(\cdot)$, con la condición (i) se puede afirmar que

(ii) Si para $M \subset X$, existe $g \in \overline{B}$, con $\chi_M \le g$, entonces

$$\mathcal{R}(M,\overline{\mathbb{R}}) \subset \overline{B}_\Omega \text{ y } \int f\ d\mu = \overline{I}_\mu(f).$$

Y como consecuencia se tienen

(iii) Para cada $P \subset X$, $\chi_P \in R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$, $\int \chi_P\ d\mu = 0$, con $\chi_P \in \overline{B}_\Omega$ se tiene que $\infty\, \chi_P \in \overline{B}_\Omega$.

(iv) Si $P_n \subset X$, $\chi_{P_n} \in (B_\Omega)_+ \cap \overline{B}_\Omega$, P_n disjuntos y además

$\chi_{\cup P_n} \longrightarrow \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n} (\overline{I}_\mu)$. Entonces,

$$\mathcal{R}(\bigcup_1^\infty P_n,\overline{\mathbb{R}}) \subset \overline{B}_\Omega.$$

La condición (iii) puede generalizarse para sistemas de Loomis stonianos y C_∞.

Un **ejemplo** importante de la condición (iv) sería el siguiente:

(v) Si μ es σ-aditiva, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \Omega$ disjuntos, entonces

$$R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}}) \subset \overline{B}_\Omega.$$

Estas condiciones, comunicadas por H. Günzler, permiten localizar ejemplos en los que se de la inclusión citada. Señalemos que en [11] se prueba el siguiente resultado:

Si Ω es un semianillo de X, $\mu:\Omega\longrightarrow[0,\infty[$ una medida finitamente aditiva y $U \subset X$ con $U = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \in \Omega$ y $\chi_{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m} \longrightarrow \chi_U$ (μ-localmente) cuando $m\to\infty$, entonces $f \in R_1(\mu,\mathbb{R})$, con $f = 0$ en $X - U$, pertenece a $\overline{B}_\Omega$.

En particular, con μ σ-aditiva, $U = X$ con $X = \bigcup_{i\geq 1} A_i$, $A_i \in \Omega$, i = 1,2,...

Ejemplos de esta situación son los siguientes:

a) $X = \mathbb{R}^n$, $\Omega = \{ I_1 \times I_2 \times\ldots\times I_n;\ I_k$ de la forma $[a,b[\ \subset \mathbb{R}\}$

$\mu = \mu_L^n$ = medida de Lebesgue.

Se tiene que $R_1(\mu_L^n/\Omega,\mathbb{R}) \subset \overline{B}_\Omega$.

b) $X = \mathbb{R}^n$, Ω = {subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ medibles Lebesgue y de medida de Lebesgue finita}

Aquí, $R_1(\mu_L^n/\Omega,\mathbb{R}) = L^1(\mu_L^n,\mathbb{R})$ = {funciones evaluadas en $\mathbb{R}$ y Lebesgue-integrables}. Por tanto, $L^1 \subset \overline{B}_\Omega$.

c) El siguiente ejemplo de [21] da una situación usual donde $\overline{B}_\Omega = R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}}) \subset L^1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$:

$X = [0,1]$, Ω = anillo generado por todos los intervalos contenidos en X, μ = medida de Lebesgue μ_L^1/Ω. Nótese que $\{x\} \in \Omega$, $x \in X$.

7. NUEVAS CARACTERIZACIONES DE LA I-INTEGRABILIDAD.

a. Una generalización completa de integración-abstracta de Riemann, se consigue con la prueba de las caracterizaciones de la I-integrabilidad, que damos a continuación.

Para cualquier $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, se define

$$I_*(f) := \sup \{ I(g);\ g \in R_1(B,I),\ g \leq f \}.$$

Es claro que si $f \in R_1(B,I)$, entonces $I(f) = I_*(f)$. Además, si $f \in +R_1(B,I)$, $I_*(f) = I^+(f)$ (ver Nota 4, Capítulo I).

TEOREMA 7.1.

Para cada $f \in \overline{\mathbb{R}}_{+}^{X}$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $f \in R_1(B,I)$;

ii) $f \wedge h \in R_1(B,I)$, *para toda* $h \in B$, $h \geq 0$ *y* $I_*(f) < \infty$;

iii) $f \wedge g \in R_1(B,I)$, *para toda* $g \in R_1(B,I)$, $g \geq 0$ *y* $I_*(f) < \infty$.

iv) Existe una sucesión $(h_n)_n \subset R_1(B,I)$, *verificando* $0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$ *y* $\sup \{ I(h_n);\ n \in \mathbb{N} \} < \infty$.

Si una de las cuatro afirmaciones se verifica, entonces

$$I(f) = I_*(f) = \sup \{ I(h_n);\ n \in \mathbb{N} \} = I^+(f).$$

Demostración:

i)⇒ii): Sea $h \in B$, $h \geq 0$ y $(h_n)_n$ una sucesión de funciones de B que defina a f; entonces $(h_n \wedge h)_n \longrightarrow f \wedge h(I^-)$ con $(h_n \wedge h)_n \subset B$ una sucesión I-Cauchy, luego $f \wedge h \in R_1(B,I)$. Además $I(f) = I_*(f) < \infty$.

ii)⇒iii): Sea $g \in R_1(B,I)$, $g \geq 0$ y sea $(l_n)_n \subset B$ una sucesión que defina a g. Entonces $(l_n \wedge f)_n \longrightarrow g \wedge f(I^-)$, donde $(l_n \wedge f)_n \subset R_1(B,I)$ por hipótesis, y es una sucesión I-Cauchy. Por el lema 4.5 se tiene que $f \wedge g \in R_1(B,I)$.

$iii) \Rightarrow iv)$: Si $I_*(f) < \infty$, existe $(g_n)_n \subset R_1(B,I)$, con $0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq f$ y $I(g_n) \longrightarrow I_*(f) = \sup\{I(g_n);\ n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $h \in B$, $h \geq 0$, entonces

$$|g_n - f| \wedge h = (f - g_n) \wedge h = f \wedge (g_n + h) - g_n,$$

donde g_n y $f \wedge (g_n + h) \in R_1(B,I)$, por tanto $(f - g_n) \wedge h \in R_1(B,I)$, y como $(f - g_n) \wedge h \leq h \in B$, el lema 3.29 asegura que $(f - g_n) \wedge h \in R_{prop}(B,I)$.

Con todo ello se tiene que

$$I^-(|g_n - f| \wedge h) = I^+(|g_n - f| \wedge h) = I(|g_n - f| \wedge h) =$$

$$= I_*(|g_n - f| \wedge h) \leq I_*(f - g_n) \leq I_*(f) - I(g_n) \longrightarrow 0,$$

luego, $(g_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, como se quería probar.

$iv) \Rightarrow i)$: Se sigue del teorema de la convergencia monótona (teorema 5.1).

Nótese que por la proposición 4.1, si $f \in R_1(B,I)$, $f \geq 0$, entonces para cada $g \in B$, $g \geq 0$, es $f \wedge g \in \overline{B}$ y $\overline{I}(f \wedge g) \leq I(f)$.

Por tanto, $+R_1(B,I) \subset B_+^*$, donde

$$B_+^* := \{\ f \in \overline{\mathbb{R}}^X;\ f \wedge g \in \overline{B},\ \text{para toda } g \in B,\ g \geq 0\ \},$$

en la notación de [5].

Por otra parte, si $f \in B_+^*$, $f \geq 0$, se tiene que

$\sup\{I(f \wedge g);\ 0 \leq g \in B\} = \sup\{I(f \wedge g);\ 0 \leq g \in \overline{B}\} = \underline{I}(f)$

La primera igualdad es consecuencia de las propiedades de $\overline{B}$.

En cuanto a la segunda, si $g \in B$, $g \geq 0$, entonces $f \wedge g \leq f$; por ser $f \in B^{*}_{+}$, se tiene que $f \wedge g \in \overline{B}$, luego

$$I(f \wedge g) = \underline{I}(f \wedge g) \leq \underline{I}(f).$$

Por tanto, $sup\ \{I(f \wedge g);\ 0 \leq g \in B\} \leq \underline{I}(f)$.

Si $\underline{I}(f) < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe $g \in B_{-}$, $g \leq f$ verificando

$$\underline{I}(f) - \varepsilon < I(g) = I(f \wedge g) \leq sup\ \{I(f \wedge g);\ 0 \leq g \in \overline{B}\}.$$

Luego $\underline{I}(f) \leq sup\ \{I(f \wedge g);\ 0 \leq g \in \overline{B}\}$.

Ahora bien, si $\underline{I}(f) = \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in B_{-}$, $g_n \geq 0$ tal que $I(g_n) \geq n$, $g_n \leq f$. Con ello, $g_n \wedge f = g_n \leq f$ y $n \leq I(g_n \wedge f) \leq sup\ \{I(f \wedge g);\ 0 \leq g \in \overline{B}\}$. Por tanto, $sup\ \{I(f \wedge g);\ 0 \leq g \in \overline{B}\} = \infty$.

En resumen, y por aplicación del teorema 7.1, se tiene que para cada $f \in R_1(B,I)$, $f \geq 0$, se cumple que

$$I_{*}(f) = sup\ \{I(f \wedge g);\ 0 \leq g \in B\} = I(f) = \underline{I}(f).$$

Este hecho se expresa brevemente en el corolario siguiente.

COROLARIO 7.2.

$$R_1(B,I) \subset B_{+}^{(*)} - B_{+}^{(*)}$$

donde $B_{+}^{(*)} := \{\ f \in B^{*}_{+}\ ;\ f \geq 0,\ \underline{I}(f) < \infty\ \}$.

Obviamente, si $f = f^{+} - f^{-}$, $0 \leq f^{\mp} \in B_{+}^{(*)}$.

Nota 3.

a) El teorema 7.1 generaliza para sistemas de Loomis arbitrarios el teorema de caracterización análogo para la clase $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ de las funciones abstracta-Riemann μ-integrables.

b) Por el lema 3.29, la condición *(ii)*, $f \wedge h \in R_1(B,I)$, para toda $h \in B$, $h \geq 0$, equivale a que $f \wedge h \in R_{p.p}(B,I)$; por lo que volvemos a obtener la caracterización dada por el teorema 3.30, y utilizada como definción para el caso aditivo en [2]. En el teorema 1 de [2] se prueba que para sistemas de Loomis stoniano tales que $B \subset M(\Omega)$ (= funciones Ω-medibles), la condición necesaria y suficiente para que exista una medida aditiva $\mu:\Omega \longrightarrow [0,\infty]$ tal que $B \subset R_1(\mu,\mathbb{R})$ y $I(f) = \int f\, d\mu$, para toda $f \in B$, es que se satisfagan los axiomas débiles de continuidad C_0 y C_∞.

Véase también el teorema 2, p. 173 en [18], y los ejemplos 13, 14, p. 157 de [17].

A continuación, y manteniendo el paralelismo con la integración de Riemann o de Lebesgue, probamos que para sistemas de Loomis stonianos y C_∞, la clase $R_1(B,I)$ es cerrada respecto de las integrales impropias, o dicho de otro modo, las funciones "I-integrables impropias" son I-integrables.

Véase para el caso aditivo y σ-aditivo [20], pp. 259-261.

También para la clase $\overline{B}$ de las funciones sumables este resultado es cierto (teorema 2 en [21]).

En primer lugar, recordamos la siguiente notación de "truncamiento" de funciones.

Dadas $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $g \geq 0$, $f \cap g := (f \wedge g) \vee (-g)$. Claramente, para $f, g \geq 0$, $f \cap g = f \wedge g$.

LEMA 7.3.

Sea (X,B,I) un sistema de Loomis stoniano y verificando el axioma C_∞; entonces, si $f \in R_1(B,I)$, se verifican:

a) $f \cap t \in R_1(B,I)$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

b) $\lim I(f \cap t) = I(f)$ y $\lim I(|f - f \cap t|) = 0$, cuando $t \to \infty$.

Demostración:

a) Es inmediato sin más que considerar la igualdad

$$(f \cap t)^{\mp} = f^{\mp} \wedge t, \text{ para } f \in \overline{\mathbb{R}}^X \text{ y } 0 \leq t \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Así, el teorema 3.11 asegura que $f^{\mp} \wedge t \in R_1(B,I)$, luego $f \cap t \in R_1(B,I)$.

b) Como B es continuo superiormente, el teorema 5.10 establece que $R_1(B,I)$ verifica lo siguiente

$$\lim I(f^{\mp} \wedge t) = I(f^{\mp}), \text{ cuando } t\to\infty.$$

Con ello, haciendo uso de la igualdad (1) se consigue el primer límite de la tesis.

Además, $I(|f^{\mp} \wedge t - f^{\mp}|) \longrightarrow 0$, cuando $t\to\infty$, luego se tiene $I(|f - f \cap t|) \le I(|f^{+} - f^{+}\wedge t|) + I(|f^{-} - f^{-}\wedge t|) \longrightarrow 0$ cuando $t\to\infty$, como se quería demostrar.

TEOREMA 7.4.

Sea (X,B,I) un sistema de Loomis stoniano y C_∞ ; y sea $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$. Entonces,

$$f \in R_1(B,I) \Leftrightarrow f \cap n \in R_1(B,I), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y}$$
$$\beta := \sup \{I(|f \cap n|);\ n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Además $I(|f - f \cap n|) \longrightarrow 0$, *luego* $I(f) = \lim I(f \cap n)$.

Demostación:

Como $f^{\mp} \wedge n = (f \cap n)^{\mp}$, siendo $f = f^{+} - f^{-}$, y además $|f - f \cap n| = |f| - |f| \wedge n$, basta suponer $f \ge 0$.

Si $f \in +R_1(B,I)$, por el lema 7.3 se tiene que

$f \wedge n \in R_1(B,I)$ y $\beta := \sup \{I(f \wedge n);\ n \in \mathbb{N}\} = I(f) < \infty$.

Por otra parte, sea $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, $f \ge 0$, verificando que

$f \wedge n \in R_1(B,I)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\beta < \infty$.

Sea entonces, $h \in B$, $h \ge 0$. Si se prueba que $f \wedge h \in R_1(B,I)$ y $I_*(f) < \infty$, en virtud del teorema 7.1 se tendrá que

$f \in R_1(B,I)$. Para ello, se considera la siguiente desigualdad:

$$|f \wedge h - (f \wedge n) \wedge h| = |f \wedge h - f \wedge (h \wedge n)| \le h - h \wedge n.$$

Tomemos $f_n := (f \wedge n) \wedge h \in R_1(B,I)$, ya que $f \wedge n \in R_1(B,I)$ y $h \in B$. El axioma C_∞ asegura que $\lim I(h - h \wedge n) = 0$, luego, como $h - h \wedge n \in B$, por ser B stoniano, se tiene que

$$I^-(|f \wedge h - (f \wedge n) \wedge h|) \le I^-(h - h \wedge n) = I(h - h \wedge n) \longrightarrow 0$$

Por tanto, $I^-(|f \wedge h - f_n| \wedge l) \le I^-(|f \wedge h - f_n|) \longrightarrow 0$, para toda $l \in B$, $l \ge 0$, y en consecuencia, $(f_n)_n \longrightarrow f \wedge h(I^-)$.

Por otro lado, $|f_n| \le h \in B$, luego, por el teorema de la convergencia acotada de Lebesgue (teorema 5.6) se tiene que $f \wedge h \in R_1(B,I)$.

Finalmente, si $g \in R_1(B,I)$, $0 \le g \le f$, es $g \wedge n \le f \wedge n$, luego $I(g \wedge n) \le I(f \wedge n) \le \beta$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Con ello, $I(g) \le I(g - g \wedge n) + I(g \wedge n) \le \varepsilon + \beta$, para todo $n \ge n_0(\varepsilon)$, puesto que $\lim I(g - g \wedge n) = 0$, $n \to \infty$. Por tanto,

$$\sup \{I(g);\ g \in R_1(B,I),\ 0 \le g \le f\} \le \beta \text{ , y a su vez}$$

$$\beta \le \sup \{I(g);\ g \in R_1(B,I),\ 0 \le g \le f\}.$$

Es decir, $I_*(f) = \beta < \infty$.

De todo lo anterior se deduce que $f \in R_1(B,I)$ y $I(f)$ coincide con β y $I_*(f)$.

Señalemos que la demostración dada aquí del teorema anterior es mucho más directa y sencilla, que la prueba del resultado análogo para las funciones sumables (las condiciones de Stone y C_∞ son necesarias) (teorema 2, en [21]).

También se sigue fácilmente el siguiente corolario, que ya conocíamos por el lema 3.23.

COROLARIO 7.5.

Sea (X,B,I) un sistema de Loomis stoniano y C_∞. Si $P \subset X$ es I^--nulo, entonces:

$$\infty\, \chi_P \text{ es una función nula.}$$

Demostración:

Si P en I^--nulo, entonces $\chi_P \in N_1(B,I)$. En virtud del teorema 7.4 se tiene

$$\infty\, \chi_P \in R_1(B,I) \Leftrightarrow \infty\, \chi_P \wedge n \in R_1(B,I), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y}$$
$$\beta := \sup\, \{I(\infty\, \chi_P \wedge n);\ n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Sea, entonces, $n \in \mathbb{N}$: $\infty\, \chi_P \wedge n = n\, \chi_P \in N_1(B,I) \subset R_1(B,I)$ luego, $I(\infty\, \chi_P \wedge n) = n\, I(\chi_P) = 0$, es decir $\beta = 0$; por tanto

$$\infty\, \chi_P \in R_1(B,I) \text{ y } I(\infty\, \chi_P) = \beta = 0, \text{ luego}$$

$\infty\, \chi_P \in N_1(B,I)$, por la proposición 3.20.

Nota 4.

La caracterización dada por el teorema 7.4 es clásica en el estudio de la integración de medidas no numerablemente aditivas.

En particular, en [28], siguiendo los resultados de [10] y con la terminología de Yosida-Hewitt [35], dada una "distribución" σ (= una función de conjuntos, aditiva positiva y de masa unidad sobre el álgebra de partes Σ de un conjunto X), cualquier función numérica acotada f sobre X es integrable, si y sólo si, $I^+_\sigma(f) = I^-_\sigma(f)$. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X_+$, f es integrable, si y solamente si, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f \wedge n$ es integrable y $\lim\limits_{n\to\infty} I^-_\sigma(f \wedge n) < \infty$. Entonces, se tiene que $I_\sigma(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I_\sigma(f \wedge n)$, donde $I_\sigma(f) := \int f\, d\sigma$, para toda $f \in B_\Sigma$ (funciones σ-simples).

b. Completamos este capítulo de propiedades de la clase $R_1(B,I)$, con un resultado importante que trata sobre el carácter "iteradamente cerrado" del proceso de extensión $B|I \longrightarrow R_1(B,I)|I$.

La situación que se tiene en el caso finitamente aditivo es la siguiente:

Sean μ y ν dos medidas finitamente aditivas sobre los anillos Ω, α de X, respectivamente, y tales que

$$\Omega \subset \alpha \subset \{M \subset X;\ \chi_M \in R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})\} \quad \text{y}$$

$$\nu(M) = \int \chi_M \, d\mu, \text{ para todo } M \in \alpha.$$

Entonces, $R_1(\nu/\alpha,\overline{\mathbb{R}}) = R_1(\mu/\Omega,\overline{\mathbb{R}})$.

Esto es, el proceso

$$\mu/\Omega \longrightarrow R_1(\mu/\Omega,\overline{\mathbb{R}}) \longrightarrow J := \{M \subset X;\ \chi_M \in R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})\},$$

$$\text{con } \nu(M) = \int \chi_M \, d\mu \longrightarrow R_1(\nu/\alpha,\overline{\mathbb{R}}),$$

es iteradamente cerrado, es decir,

$$R_1(\nu/J,\overline{\mathbb{R}}) = R_1(\mu/\Omega,\overline{\mathbb{R}}).$$

Este resultado también es cierto si se reemplaza R_1 por L^1 con μ y ν dos medidas σ-aditivas (véase [20], p. 265).

Sin embargo, en general, $\overline{B}$ no es iteradamente cerrado. Sí lo es si I es Daniell-Bourbaki continuo (véase [14], p. 339).

Con los resultados que siguen se concluye que el proceso de extensión aquí estudiado, para sistemas de Loomis arbitrarios, también conserva el carácter iteradamente cerrado en el siguiente sentido:

Si $\widetilde{B} := R_1(B,I) \cap \mathbb{R}^X$ e $\widetilde{I} := I/\widetilde{B}$, entonces $R_1(B,I) = R_1(\widetilde{B},\widetilde{I})$ y $I(f) = \widetilde{I}(f)$, para toda $f \in R_1(B,I)$, es decir, la extensión $\tilde{I}|R_1(\tilde{B},\tilde{I})$ es igual a la extensión $I|R_1(B,I)$.

Es claro que para cada $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ podemos definir

$$I^-(f) := \inf \{ I(h);\ h \in B,\ f \le h \},$$

$$\text{y}\quad \tilde{I}^-(f) := \{ \tilde{I}(\varphi);\ \varphi \in \tilde{B},\ f \le \varphi \}.$$

LEMA 7.5.

Sea $(f_n)_n \in R_1(B,I)$; entonces

$$(f_n)_n \longrightarrow 0(I^-) \quad \text{implica} \quad (f_n)_n \longrightarrow 0(\tilde{I}^-).$$

Demostración:

Sea $h \in \tilde{B}$, $h \ge 0$ y $\varepsilon > 0$; como B es denso en $\tilde{B}$ (teorema 3.10), existe $t \in B$ verificando $I(|f - t|) < \varepsilon$.

Para t y ε, y por hipótesis, como $(f_n)_n \longrightarrow 0(I^-)$ se tiene que existen $n_0(\varepsilon,t)$ y $k_n \in B$, tales que

$$|f_n| \wedge t \le k_n \text{ y } I(k_n) < \varepsilon, \text{ para todo } n \ge n_0.$$

La siguiente relación es cierta,

$$|f_n| \wedge h = |f_n| \wedge h - |f_n| \wedge t + |f_n| \wedge t \le |h - t| + k_n.$$

Tomemos $g_n := |h - t| + k_n \in R_1(B,I) \cap \mathbb{R}^X =: \tilde{B}$. Con ello,

$$\tilde{I}(g_n) = I(g_n) \le I(|h - t|) + I(k_n) < 2\ \varepsilon.$$

Por tanto, para cada $h \in \tilde{B}$, $h \geq 0$ y $\varepsilon > 0$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $g_n \in \tilde{B}$ tales que $|f_n| \wedge h \leq g_n$ y $\tilde{I}(g_n) < \varepsilon$.

Luego, $(f_n)_n \longrightarrow 0(\tilde{I}^-)$.

LEMA 7.7

Si $k \in \overline{\mathbb{R}}^X$ y $f \in \tilde{B}$, con $0 \leq k \leq f$; entonces

$$\sup \{ I^-(k \wedge h);\ 0 \leq h \in B \} \leq \tilde{I}(f).$$

Demostración:

Dado $0 \leq k \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $f \in \tilde{B}$ y $k \leq f$, se tiene que

$\sup \{ I^-(k \wedge h);\ 0 \leq h \in B \} \leq \sup \{ I^-(f \wedge h);\ 0 \leq h \in B \}$.

Ahora, como $f \in \tilde{B} \subset R_1(B,I)$, por el teorema 3.30 se tiene que $f \wedge h \in R_{prop}(B,I)$. Luego, $I^-(f \wedge h) = I(f \wedge h)$.

Con ello, se cumple que

$$\sup \{ I^-(f \wedge h);\ 0 \leq h \in B \} = \sup \{ I(f \wedge h);\ 0 \leq h \in B \} \leq$$
$$\leq I(f) = \tilde{I}(f).$$

En resumen, $\sup \{ I^-(k \wedge h);\ 0 \leq h \in B \} \leq \tilde{I}(f)$.

LEMA 7.8.

Sea $(f_n)_n \subset \overline{\mathbb{R}}^X$; entonces

$$(f_n)_n \longrightarrow 0(\tilde{I}^-) \text{ implica } (f_n)_n \longrightarrow 0(I^-).$$

Demostración:

Dada $0 \le h \in \tilde{B}$, $\tilde{I}^-(|f_n| \wedge h) \longrightarrow 0$, por hipótesis. En particular, como $B \subset \tilde{B}$, para $h \in B$, $h \ge 0$, se tiene $\tilde{I}^-(|f_n| \wedge h) \longrightarrow 0$.

Consideremos ahora la función $\phi \in \tilde{B}$, con $|f_n| \wedge h \le \phi$. Así, se tiene

$$I^-(|f_n| \wedge h) = I^-((|f_n| \wedge h) \wedge h) \le$$

$$\le sup \{ I^-((|f_n) \wedge h) \wedge h);\ 0 \le h \in B \} \le \tilde{I}(\phi),$$

donde la última desigualdad se verifica en virtud del lema 7.7. Por tanto, para toda $\phi \in \tilde{B}$, con $|f_n| \wedge h \le \phi$ se tiene que $I^-(|f_n| \wedge h) \le \tilde{I}(\phi)$. Entonces

$$I^-(|f_n| \wedge h) \le sup \{ I^-((f_n| \wedge h) \wedge h);\ 0 \le h \in B \} \le$$

$$\le inf \{ \tilde{I}(\phi);\ \phi \in \tilde{B},\ |f_n| \wedge h \le \phi \} =: \tilde{I}^-(|f_n| \wedge h) \longrightarrow 0.$$

Luego, $I^-(|f_n| \wedge h) \longrightarrow 0$, para toda $h \in B$, $h \ge 0$, es decir, $(f_n)_n \longrightarrow 0(I^-)$.

TEOREMA 7.9.

$$R_1(B,I) = R_1(\tilde{B},\tilde{I}) \text{ , y las integrales coinciden.}$$

Demostración:

Dada $f \in R_1(B,I)$, sea $(h_n)_n \subset B$, una sucesión I-Cauchy que defina a f. Entonces $(|h_n - f|)_n \longrightarrow 0(I^-)$, con $|h_n - f| \in R_1(B,I)$. En virtud del lema 7.6 se tiene que

$(|h_n - f|)_n \longrightarrow 0(\tilde{I}^-)$, es decir, $(h_n)_n \longrightarrow f(\tilde{I}^-)$, con $(h_n)_n \in \tilde{B}$, una sucesión $\tilde{I}$-Cauchy. Por tanto, $f \in R_1(\tilde{B}, \tilde{I})$.

Por otro lado, si $f \in R_1(\tilde{B}, \tilde{I})$, sea $(h_n)_n \subset \tilde{B}$, una sucesión $\tilde{I}$-Cauchy, tal que $(h_n)_n \longrightarrow f(\tilde{I}^-)$. Por el lema 7.8 se tiene que $(|h_n - f|)_n \longrightarrow 0(I^-)$, es decir, $(h_n)_n \longrightarrow f(I^-)$, con $(h_n)_n \subset R_1(B,I)$, una sucesión I-Cauchy. Con ello, por el teorema 4.5 se concluye que $f \in R_1(B,I)$.

Finalmente, por definición de I y $\tilde{I}$, se tiene $I = \tilde{I}$ en $R_1(B,I)$, y la demostración es completa.

Notas finales.

Finalizamos el desarrollo de este Capítulo con algunos apuntes sobre otras vías posibles de extensión del proceso de construcción integral que hemos estudiado.

a) En primer lugar, la posible extensión de nuestro proceso a funciones evaluadas en un espacio de Banach E. Esto es posible para la integral abstracta de Riemann $R_1(\mu,E)$, de Dunford-Schwartz y de Günzler, así como para el proceso de extensión de Daniell (ex. 64, & 2 [20]), y también con normas integrales ([4], [31] y [24]).

Un planteamiento incial sería el siguiente:

Dados los espacios de Banach reales E_1 y E_2, sean $B \subset E_1^X$, $I: B \longrightarrow E_2$ lineal, $B_0 \subset \mathbb{R}^X$ retículo vectorial y $I_0: B_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y no negativo, con $f \in B \Rightarrow |f| \in B_0$, $\|I(f)\| \le I_0(|f|)$.

Se define entonces

$$R_1(B,I_0) := \{ f \in E_1^X \;;\; \text{existe } (h_n)_n \subset B, \text{ tal que } I_0(h_n - h_m|) \longrightarrow 0,\ n,\ m\to\infty \text{ y } |h_n - f| \longrightarrow 0(I_0^-) \}$$

con $I(f) := \lim\limits_{n\to\infty} I(h_n)$ bien definido.

b) Otro tema usual en la bibliografía conocida es la extensión del método de Daniell considerando un retículo vectorial B de funciones $f:X\longrightarrow E_1$ con E_1 un espacio de Riesz, e $I:B\longrightarrow E_2$ un funcional lineal, no negativo y monótonamente continuo, con E_2 otro espacio de Riesz. Véase, por ejemplo, [1].

Para la integral abstracta de Riemann se puede definir un proceso análogo, este es el proceso de construcción de la clase $D^1(\mu,E)$ de las funciones **Darboux-μ-integrables**, con $f:X\longrightarrow E$, E un espacio de Riesz; y a partir de un semianillo Ω y una medida finitamente aditiva $\mu:\Omega\longrightarrow[0,\infty[$. Véase [19], apéndice B, pp. 160-166.

La cuestión sería extender la teoría de $R_1(B,I)$ a esta situación, pero sin la condición de continuidad monótona de I, y cuándo una teoría de este tipo contiene los resultados de [1].

APENDICE

Se ofrece en este apéndice un resumen de los conceptos y propiedades básicos de la "Riemann-μ integrabilidad" tal y como la presenta H. Günzler en [20], [18], y su relación con la μ-integrabilidad de Dunford-Schwartz, [12], vol I, pp. 96-118.

Sean X un conjunto arbitrario no vacío, Ω un semianillo de subconjuntos de X (esto es, $\emptyset \in \Omega$, y si A, $B \in \Omega$ entonces $A \cap B \in \Omega$, y existen $A_1, \dots, A_n \in \Omega$ tales que $A - B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donde $A - B := \{ x \in A;\ x \notin B \}$), y $\mu:\Omega \longrightarrow [0,\infty[$ una medida finitamente aditiva en Ω (por tanto, el valor ∞ no es admitido).

$S(\Omega,V)$ denota el espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) de todas las funciones escalonadas, es decir, todas las funciones $h:X\longrightarrow V$ que admiten una reprentación (no necesariamente única) de la forma: $h = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, con $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \Omega$ (no disjuntos), χ_{A_i} la función característica de A_i y $a_i \in V$ = espacio seminormado con cuerpo de escalares $\mathbb{K}$.

Para $h \in S(\Omega,\mathbb{R})$, el funcional $\int h\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\ \mu(A_i) \in V$ está bien definido y es lineal.

Para cualesquiera $f_n: X \longrightarrow V$, $f: X \longrightarrow V$ se define $(f_n)_n \longrightarrow f$ **μ-localmente**, o brevemente, $(f_n)_n \longrightarrow f(\mu)$ como sigue: Para cada $A \in \Omega$, y $\varepsilon > 0$ existen $p \in \mathbb{N}$ y $M_n \in \mathcal{R}(\Omega)$ (dependiendo de A, ε, $(f_n)_n$, f) tales que

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \text{ , para } n \geq p, \text{ y } x \in A - M_n,$$

y además $\mu(M_n) \leq \varepsilon$, para $n \geq p$.

Aquí $\mathcal{R}(\Omega)$:= anillo generado por Ω en $X = \{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i;\ A_i \in \Omega, n \in \mathbb{N} \} = \{M \subset X;\ \chi_M \in S(\Omega, \mathbb{R})\}$ y $\mu(M) := \int \chi_M$ para $M \in \mathcal{R}(\Omega)$.

Obsérvese que ésta es una especie de "convergencia local" en medida, en tanto que la "convergencia en medida" de Dunford-Schwartz es un concepto global.

Para Ω, μ y V como antes, se define el espacio $R_1(\mu, V)$ de las funciones **Riemann-μ-integrables** como el conjunto de todas las funciones $f: X \longrightarrow V$ para las cuales existe una sucesión $(h_n)_n$, tal que $h_n \in S(\Omega, V)$, $(h_n)_n \longrightarrow f(\mu)$ y $(h_n)_n$ es una sucesión de Cauchy repecto de la seminorma $\| \ \|_\mu := \int | \ | \, d\mu$, esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\int |h_n - h_m| \, d\mu < \varepsilon$, si $m, n > p$. (Nótese que si $h \in S(\Omega, V)$, entonces $|h| \in S(\Omega, \mathbb{R})$, donde para cualquier $g: X \longrightarrow V$ la función $|g|$ está definida por $|g|(x) := \|g(x)\|$ para $x \in X$).

El conjunto $R_1(\mu, V)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, si $f \in R_1(\mu, V)$ entonces $|f| \in R_1(\mu, \mathbb{R})$, $\int f \, d\mu := \lim \int h_n \, d\mu$, para $(h_n)_n$ una sucesión que defina a f. El funcional $\int \, d\mu$

está bien definido y es lineal, con

$$\|\int f\, d\mu\| \leq \int |f|\, d\mu = \|f\|_{\mu}.$$

Un papel importante en esta teoría de integración lo juegan las funciones **nulas**, éstas son las funciones $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ tales que $(f) \longrightarrow 0(\mu)$. Se verifica que f es nula, si y sólo si, $f \in R_1(\mu, \overline{\mathbb{R}})$ y $\int |f|\, d\mu = 0$.

Por otra parte, se construye la clase $R_{prop}(\mu, \mathbb{R})$ con las funciones $f \in \mathbb{R}^X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existen h, $g \in S(\Omega, \mathbb{R})$, $h \leq f \leq g$ en X y tal que $\int (g - h)\, d\mu < \varepsilon$. Se define $\int f\, d\mu := \sup \{ \int g\, d\mu;\ g \in S(\Omega, \mathbb{R}),\ g \leq f \}$. En general, $R_{prop}(\mu, \mathbb{R}) \subsetneq R_1(\mu, \mathbb{R})$.

Por lo que se refiere a la integración de Dunford-Schwartz [12], éste considera un álgebra $\mathcal{L}$ de partes de X ($X \in \mathcal{L}$ = anillo de subconjuntos de X), y μ una medida finitamente aditiva no negativa definida en $\mathcal{L}$. Asociada a μ se define una nueva aplicación de $\mathcal{P}(X)$ en $\mathbb{R}_+$ como sigue

$$\mu^*(A) := \inf \{ \mu(B);\ A \subset B,\ B \in \mathcal{L} \},$$

aplicación que se denomina "medida exterior asociada a μ".

Los dos conceptos siguientes son fundamentales en la construcción de la integral

(1) Sean $(f_n)_n$, $f \in V^X$; se tiene que $(f_n)_n \longrightarrow f$ μ-medida, si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(\{x;\ \|f(x) - f_n(x)\| > \varepsilon\}) = 0.$$

(2) Una función $f \in V^X$ se dice **μ-nula** si para cada $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\mu^*(\{x;\ \|f(x)\| > \varepsilon\}) = 0.$$

Con ello, se cumple que

f es μ-nula, si y sólo si, $(f) \longrightarrow 0$ μ-medida.

A partir de $(X,\mathcal{L},\mu)$ una función $f \in V^X$ se dice **μ-simple** si existe g μ-nula y existen $A_i \in \mathcal{L}$, disjuntos dos a dos, y $a_i \in V$ (con $i \in \{1,2,\dots,n\}$) tales que

$$f = g + \sum_{i=1}^{n} a_i\, \chi_{A_i},$$

y se define $\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i)$.

La clase de las funciones μ-simples $\mathcal{F}(X,\mathcal{L},\mu)$ es un espacio vectorial real.

Se llama $L_{DS} = L(X,\mathcal{L},\mu,V)$ el conjunto de las funciones **μ-integrables** en el sentido de Dunford-Schwartz. Esto es, $f \in L_{DS}$ si existe una sucesión $(h_n)_n$ de Cauchy de funciones μ-simples, es decir,

$$lim \int \|h_n - h_m\| \, d\mu = 0, \text{ cuando } n, m \to \infty,$$

y que además converge en μ-medida a f.

Si $f \in L_{DS}$ se define: $\int f \, d\mu = lim \int h_n \, d\mu$. Se prueba que esta aplicación es independiente de la sucesión empleada, y que la integral es lineal.

Se tiene que

(3) $L_{DS} = \{ f \in R_1(\mu/\mathcal{L}_\mu, V);\ \mathcal{L}_\mu\text{-}lim\ f = 0 \}$,

donde $\mathcal{L}_\mu := \{A \in \mathcal{L};\ \mu(A) < \infty\}$ es un anillo, y para cualquier sistema $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X, y cualquier $g: X \longrightarrow V$, $\mathcal{M}$-lim $g = 0$ significa que: para cada $\varepsilon > 0$ existe $M = M_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tal que $\|g(x)\| < \varepsilon$, si $x \in X - M$.

En particular, para $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{L}$ = álgebra generada por $J := \{ [a,b[;\ -\infty < a \le b < \infty \}$ (semianillo de intervalos semiabiertos acotados) y $\mu = \mu_L$ (restricción de la medida de Lebesgue), el espacio $R_1(\mu/\mathcal{L}_\mu, \mathbb{R})$ contiene estrictamente a L_{DS}.

En efecto, la función $f_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[n,n+2^{-n}[} \in R_1(\mu_{L/J}, \mathbb{R}) = R_1(\mu/\mathcal{R}(J), \mathbb{R})$, pero $f_0 \notin L_{DS}$; aquí $\mathcal{L}_\mu$ = anillo $\mathcal{R}(J)$ generado por los intervalos de J, $\mu_L = \infty$ en $\mathcal{L} - \mathcal{L}_\mu$.

Para anillos arbitrarios $\mathcal{L}$, $\mu: \mathcal{L} \longrightarrow [0,\infty]$, $L_{DS} = R_1(\mu, \overline{\mathbb{R}})$, si y sólo si, todos los conjuntos $P \subset X$ tales que χ_P es nula, son $\mathcal{L}_\mu$-acotados ($:= \exists\ F_P \in \mathcal{L}_\mu$, $P \subset F_P$).

Si $\mathcal{L}$ es un σ-álgebra y μ es σ-aditiva en $\mathcal{L}$, entonces $L_{DS} = R_1(\mu/\mathcal{L}_\mu, V)$. También, para σ-anillos Ω y $\mu:\Omega \longrightarrow [0,\infty[$ σ-aditiva se tiene que $R_1(\mu,V) = L^1(\mu,V)$.

En el caso en que $\mathcal{L}$ sea un álgebra y $\mu(X) < \infty$ entonces se obtiene $L_{DS} = R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$. La justificación de esta igualdad está fundamentada en las siguientes propiedades.

(4) Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de partes de X y $\mu(X) < \infty$, entonces si $(f_n)_n$, $f \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ se verifica:

$$(f_n)_n \longrightarrow f \ \mu\text{-medida} \ \Leftrightarrow \ (f_n)_n \longrightarrow f(\mu).$$

En efecto, se tiene por hipótesis, que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\mu^*(\{x \in X;\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

La definición de la medida exterior μ^* implica que para cada $n \geq n_0$ existan $M_n \in \mathcal{L}$ tales que

$$M_n \supset \{x \in X;\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} \ \text{ y } \ \mu(M_n) < \varepsilon.$$

Por tanto, dados $A \in \mathcal{L}$, $\varepsilon > 0$ existen $n_0 \in \mathbb{N}$, $M_n \in \mathcal{L}$ tales que $\mu(M_n) < \varepsilon$ y $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, para todo $x \in A - M_n$, y para todo $n \geq n_0$. Luego, $(f_n)_n \longrightarrow f(\mu)$.

En el otro sentido, sean $\varepsilon > 0$ y $A = X \in \mathcal{L}$; por defínción de convergencia μ-local, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M_n \in \mathcal{L}$, para $n \geq n_0$ verificando:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,\ \forall\, x \in X - M_n,\ \text{y}\ \mu(M_n) < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a que: $M_n \supset \{x \in X;\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$, luego

$$\mu^*(\{x \in X;\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon$$

Es fácil comprobar que: para todo $\alpha > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq n_1$ se verifica

$$\mu^*(\{x \in X;\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}) < \alpha.$$

Con ello, $\lim \mu^*(\{x \in X;\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$.

Una consecuencia inmediata del anterior resultado es la siguiente propiedad.

(5) Sea $\mathcal{L}$ un álgebra y $\mu(X) < \infty$. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, entonces

f es μ-nula, si y sólo si, f es nula.

La demostración sigue directamente de **(4)**, sin más que considerar que $(f)\longrightarrow 0$ μ-medida, si y sólo si, $(f)\longrightarrow$ [illegible] $\mu)$.

Los anteriores resultados permiten establecer la relación entre las clases L_{DS} y $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$.

(6) Sea $\mathcal{L}$ un álgebra y $\mu(X) < \infty$. Entonces

$L_{DS} = R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ y las integrales coinciden.

En efecto, sea $f \in R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$, luego existe $(h_n)_n \longrightarrow f(\mu)$, $h_n \in S(\mathcal{L},\mathbb{R})$, una sucesión $\|\ \|$-Cauchy. Ahora bien, cada h_n es una función μ-simple, y por **(4)** se tiene:

$$(h_n)_n \longrightarrow f \ \mu\text{-medida}, \ (h_n)_n \text{ de Cauchy},$$

por lo que $f \in L_{DS}$.

Además $\int f\, d\mu = \lim \int h_n\, d\mu$, por tanto las integrales coinciden.

Si $f \in L_{DS}$, sea $(h_n)_n \longrightarrow f$ μ-medida, una sucesión de funciones μ-simples, que es de Cauchy. Por tanto, cada h_n se puede escribir como $g_n + h'_n$, con g_n μ-nula y $h'_n \in S(\mathcal{L},\mathbb{R})$. Por la propiedad (5) g_n es nula, es decir, $g_n \in R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ y $\int g_n\, d\mu = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, se tiene: $(h_n)_n \longrightarrow f(\mu)$ por **(4)**, $(h_n)_n \subset R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$, una sucesión $\|\ \|$-Cauchy. Entonces, en virtud del carácter cerrado de la clase $R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}})$ respecto de la convergencia μ-local, se obtiene que

$$f \in R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}}) \ \text{ y } \ \int f\, d\mu = \lim \int h_n\, d\mu.$$

En el caso en que $\mathcal{L}$ sea un anillo y $\mu:\mathcal{L} \longrightarrow [0,\infty]$ una medida finitamente aditiva, tan sólo se tiene una inclusión en general; esta es

$$L_{DS} \subset R_1(\mu,\overline{\mathbb{R}}).$$

La razón de esta inclusión se encuentra en **(4)**. En esta situación únicamente hay una implicación general.

Si $(f_n)_n$, $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, entonces

$$(f_n)_n \longrightarrow f \ \mu\text{-medida} \ \Rightarrow \ (f_n)_n \longrightarrow f(\mu).$$

- - - - - - - -

BIBLIOGRAFIA

[1] **AN DER HEIDEN, W.U.:** *Integration in vektorerbänden nach Daniell.* Diplomarbeit Univ. Göttingen, 1970.

[2] **AN DER HEIDEN, W.U.:** *On the representation of linear functionals by finitely additive set functions.* Archiv der Math., 30, pp. 210-214 (1978).

[3] **AUMANN, G.:** *Integralerweirterungen mittels Normen.* Archiv der MathematiK, 3, pp. 441-450 (1952).

[4] **BICHTELER, K.:** *Integration Theory.* Lectures Notes in Math. 315. Berlin-Heidelberg-New York. Springer, 1973.

[5] **BOBILLO G., P., and DIAZ CARRILLO, M.:** *Summable and integrable functions with respect to any Loomis system.* Archiv der Math., 49, pp. 245-256, (1987).

[6] **BOBILLO G., P., and DIAZ CARRILLO, M.:** *On the summability of certain μ-integrable functions.* Archiv der Math., 52, pp. 258-264, (1989).

[7] **CONSTANTINESCU, C., and WEBER, K.:** *Integration theory. Vol. 1: Measure and integral.* Wiley Interscience, 1985.

[8] **DANIELL, P. J.:** *A general form of integral.* Ann. of. Math., 19, pp. 279-294, (1917).

[9] **DAY, M. M.:** *Normed linear spaces.* Ergebnisbericht, Springer, 1958.

[10] **DE FINETTI, B.:** *Sulla teoria astratta della misura et dell'integrazione.* Annali di Mat. pura ed applicata. Serie IV, 40, pp. 307-319, (1955).

[11] **DIAZ CARRILLO, M., and BOBILLO GUERRERO, P.:** *Resolución de una conjetura sobre sistemas de Loomis asociados a una medida finitamente aditiva.* G.M.E.L., Actas, vol II, pp. 87-91, Coimbra, (1986).

[12] **DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.T.:** *Linear Operators, part I, General theory.* Interscience, New-York, 1957.

[13] **ELSNER, J.:** *Zum "Satz von Fubini" für ein abstracktes Riemann Integral.* Math. Z., 141, pp. 265-278, (1975).

[14] **FLORET, K.:** *Maβ-und Integration theorie.* Teubnes Stuttgart, 1981.

[15] **GOULD, G.G.:** *The Daniell-Bourbaki integral for finitely additive measures.* Proc. Londodn Math. Soc., 16, pp. 297-320 (1966).

[16] **GRECO, G.H.:** *Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padora, vol. 66, pp. 21-42, (1982).

[17] **GÜNZLER, H.:** *Integration.* Lectures Notes, Mathematisches Seminar der Universität Kiel, (1971). (Vorlesungsmitschrift U. Kiel, 1971).

[18] **GÜNZLER, H.:** *Linear functionals which are integrals.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, XLIII, pp. 167-176, (1974)

[19] **GÜNZLER, H.:** *Integral representations with prescribed lattices.* Rend. Sem. Math. Fis. Milano, XLV, pp. 107-168, (1975).

[20] **GÜNZLER, H.:** *Integration.* Bibliograph. Institut Mannheim, 1985.

[21] **GÜNZLER, H.:** *Convergence theorems for a Daniell-Loomis integral.* Kiel preprint 1989. To appear.

[22] **GÜNZLER, H., and DIAZ CARRILLO, M.:** *Finitely additive integration II.* Extracta Mathematicae, n° 2, pp. 81-83, (1989).

[23] **HEWITT, E. and STROMBERG, K.:** *Real and abstract analysis.* Berlin-Heidelberg-New-York, 1969.

[24] **JUCKEL, B.:** *Riemann-integrierbare Funktionen obere Normen.* Diplomarbeit, Math. Sem. Univ. Kiel, 1975.

[25] **LIUBICICH, P.:** *Sul prolungamento delé integrale.* Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste, 8, n° 1, pp. 108-121, (1976).

[26] **LOOMIS, L.H.:** *Linear functionals and content.* Amer. J. Math., 76, pp. 168-182, (1954).

[27] **LUXEMBURG, W.A.J.:** *The abstract Riemann integral and a theorem of G. Fichtenholz...IA, IB.* Indagationes Math., 23, pp. 516-545, (1961).

[28] **MERTENS, J.F.:** *Intégration des mesures non dénombrablement additives: une généralisation du lemme de Fatou et du théorème de convergence de Lebesgue.* Annuales Soc. Sci. de Bruxelles, T. 84, II, pp. 231-239 (1970).

[29] **PFEFFER, W.F.:** *Integrals and Measures.* Dekker, New York, 1977.

[30] **ROYDEN, H.L.:** *Real Analysis.* Macmillan, New York 1963.

[31] **SCHÄFKE, F.W.:** *Lokale integral normen und verall - gemeimerte uneigantliche Riemann-Stieltjes-Integrale.* Journal für die veine und angewand Mathematik, 289, pp. 118-134, (1977).

[32] **STONE, M.H.:** *Notes on integration, II.* Proccedings of the National Acad. of Sci. USA, vol. 34, pp. 447-455, (1948).

[33] **TOPSOE, F.:** *Topology and Measure.* Lecture Notes in Mathemathics, n^{0} 133, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1970.

[34] **WEIR, A.:** *General integration and measure.* Cambridge University Press, 1974.

[35] **YOSIDA, K. and HEWITT, E.:** *Finitely additive measure.* Trans. Amer. Math. Soc.,72, pp. 46-66, (1952).

- - - - - - - -