GENERALIZACIÓN CON ESTUDIANTES DE CUARTO CURSO DE PRIMARIA BAJO EL ENFOQUE FUNCIONAL

Conference Paper · September 2018

3 authors:

Jason Ureña
University of Granada

Marta Molina
Universidad de Salamanca

Rafael Ramirez Uclés
University of Granada

GENERALIZACIÓN CON ESTUDIANTES DE CUARTO CURSO DE PRIMARIA BAJO EL ENFOQUE FUNCIONAL

Generalization with fourth grade students under the functional approach

Ureña, J.[a], Molina, M.[b] y Ramírez, R.[c]

[a]Universidad de Costa Rica, [b]Universidad de Salamanca, [c]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia centrada en la capacidad de generalización de estudiantes de primaria en contextos funcionales. En este estudio descriptivo se analizan los niveles de generalización que manifiestan ocho estudiantes de cuarto de primaria durante una entrevista en la que se les propone una tarea que involucra una relación funcional. De los resultados se aprecia la capacidad de los alumnos de primaria para expresar la relación funcional y manifestar generalización en diferentes grados, incluso a un nivel simbólico.

Palabras clave: *niveles de generalización, early algebra, relaciones funcionales.*

Abstract

This piece of work is part of a larger research focused in primary students' generalization skills in functional contexts. In this descriptive study we analyze the generalization levels manifested by eight fourth graders during an interview in which they solve a task involving a functional relationship. From the results it is clear the students' ability to express the functional relationship and to manifest various levels of generalization, even a symbolic level.

Keywords: *levels of generalization, early algebra, functional relationships.*

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años en diversas investigaciones (ej. Blanton, Brizuela, Murphy, Sawrey y Newman-Owens, 2015; Blanton y Kaput, 2011; Molina, Ambrose y Rio, 2018) se han mostrado las capacidades algebraicas que poseen los estudiantes de primaria y, en consecuencia, se propone aprovecharlas. Al igual que estos trabajos, nuestra comunicación se enmarca en la propuesta curricular *early algebra*, orientada a una mejor comprensión de la matemática y del álgebra desde los primeros años escolares (Molina, 2009). El énfasis del *early algebra* está en la comprensión de la generalidad de la matemática, de modo que se fomente la construcción, expresión y justificación de generalizaciones desde el inicio de la escolarización de los niños (Blanton y Kaput, 2011). De lo anterior se extrae que parte importante del pensamiento algebraico reside en la generalización y en las formas en que esta es representada por los estudiantes. Las funciones son vistas como una vía de introducción al álgebra (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). Se estudian las capacidades algebraicas de los niños por medio de la propuesta de tareas que involucran relaciones funcionales, demostrándose al mismo tiempo que las funciones pueden ser abordadas desde la primaria (Blanton y Kaput, 2011).

En este marco, describimos los niveles de generalización que manifiestan estudiantes españoles de cuarto curso de primaria. En particular analizamos cómo reconocen y expresan la relación funcional presente en una tarea propuesta durante una entrevista semiestructurada. Además de complementar resultados de estudios previos, pretendemos contribuir con información que facilite la implementación en el aula de la propuesta del *early algebra* que ya aparece reflejada en los programas curriculares de diversos países (Merino, Cañadas y Molina, 2013). En el caso de España, mediante el Real Decreto 126/2014 se establece que al finalizar la primaria se espera que el

Ureña, J., Molina, M. y Ramírez, R. (2018). Generalización con estudiantes de cuarto curso de primaria bajo el enfoque funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 584-593). Gijón: SEIEM.

estudiante "sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p.19387), de modo que también se aprecia la presencia del pensamiento funcional y la generalización en el currículo escolar.

MARCO TEÓRICO: GENERALIZACIÓN

La generalización es una habilidad matemática importante y juega un papel trascendental en el álgebra. Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985) llegan incluso a referirse a ella como "el latido de la matemática" considerando el álgebra como "el lenguaje en el cual es expresada" (p.8). Radford (2010) refiere a la generalización algebraica como la habilidad de reconocer lo común en los elementos de una secuencia de modo que se puede brindar una expresión que represente a todos los términos de la sucesión. Para caracterizar este tipo de generalización define tres niveles. La generalización factual es aquella en la cual se utilizan acciones numéricas en forma de esquemas de operaciones, siempre dentro del nivel numérico, expresado en acciones concretas. En la generalización contextual se percibe un patrón y se explica para cualquier término de la secuencia; el lenguaje incluye en este caso expresiones de indeterminación. Por último, en la generalización simbólica hay una representación para todos los elementos de la sucesión o patrón, se habla en general. Radford (2018) enfatiza que existen formas de pensar algebraicamente en las que no se requiere del uso estricto de simbolismo algebraico. El pensamiento algebraico se puede dar también por medio del uso de otros sistemas semióticos como el lenguaje natural y las señas. Para este autor la esencia del pensamiento algebraico radica en el trabajo con cantidades indeterminadas que van más allá de los números, así como en las representaciones de estas.

En relación con la expresión de la generalización, Mason y Pimm (1984) hacen una diferenciación de las concepciones de específico, genérico y general. Lo específico refiere a los casos en los que siempre se trabaja y alude a números concretos. El caso genérico refiere al uso de casos concretos para representar una generalidad a modo de representantes de una clase. El caso general brinda una respuesta que representa a todos los elementos de los que se está hablando, hay una representación de lo indeterminado.

Antecedentes

En las investigaciones relativas a la propuesta *early algebra* es claro un foco centrado en la capacidad de generalización de los niños y la forma en que expresan la generalización. En el contexto del pensamiento funcional se considera la generalización de relaciones entre cantidades que covarían, la forma en que son representadas en palabras, tablas, gráficos o símbolos así como el razonamiento con las representaciones para analizar el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011). A continuación, destacamos algunos estudios asociados al *early algebra* en los que se identifican como objetos de estudio el pensamiento funcional y la generalización.

Radford (2018) realiza un estudio longitudinal desde segundo a sexto curso de primaria en el cual indaga sobre la emergencia del pensamiento algebraico simbólico en un contexto de generalización basado en una secuencia. La generalización aquí se da al deducir una fórmula según una secuencia, reconociendo que la forma en que se expresa no es relevante. De los resultados de la investigación se identifican generalizaciones no simbólicas y simbólicas desde edades tempranas y un progreso en estas conforme al curso. Al mismo tiempo se observa una evolución en el uso de las variables involucradas en la situación propuesta y las relaciones entre estas.

Blanton et al. (2015) describen una trayectoria de aprendizaje con estudiantes de primer curso en la que caracterizan su pensamiento funcional en relación con la generalización de diferentes relaciones funcionales. Las autoras identifican que los niños de educación primaria pueden aprender a pensar sobre funciones y progresar en sofisticación. Para ello definen niveles en el reconocimiento de las relaciones, desde una posición preestructural hasta el reconocimiento de la función como objeto.

Otros antecedentes de relevancia, ubicados en el mismo proyecto de investigación que el trabajo que aquí se reporta, son los siguientes. Molina et al. (2018) indagan en los significados que estudiantes de primer y tercer curso le atribuyen a las letras cuando son introducidas como representación de cantidades indeterminadas, en tareas que involucran relaciones funcionales. Las investigadoras encuentran que hay estudiantes que dan un significado apropiado a las letras y establecen relaciones entre las cantidades asociadas. Por otro lado, también se presentan alumnos que rechazan su uso o les asignan valores fijos arbitrarios o de acuerdo a su posición en el alfabeto. Al mismo tiempo, sugieren introducir desde la primaria las letras como representación de cantidades indeterminadas. Por su parte Pinto y Cañadas (2017) realizan un estudio comparativo con estudiantes de tercero y quinto de primaria centrado en las estructuras y generalizaciones que muestran durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional lineal. Los investigadores observan variedad en las estructuras identificadas por los estudiantes y, aunque en tercero se presentan más estructuras, la mayoría de estas es incorrecta, a diferencia de lo que ocurre en quinto. También se aprecia cómo muchos más estudiantes de quinto llegan a generalizar para la cuestión general de la tarea e, incluso en algunos casos, emerge el uso de simbolismo algebraico. Los de tercero, en cambio, tienden a trabajar más con los casos particulares.

Hidalgo (2018) describe el proceso de generalización evidenciado por estudiantes de sexto de primaria cuando trabajan en una tarea que involucra un patrón dado por configuraciones puntuales. Entre los elementos que analiza están los tipos de generalización que alcanzan los estudiantes. En este sentido evidencia que los estudiantes muestran diversos niveles de generalización desde el factual (principalmente) al simbólico, en términos de las categorías de Radford (2010), influenciados al mismo tiempo por las intervenciones efectuadas por el entrevistador.

Los resultados de todos estos trabajos sustentan la afirmación de que estudiantes de primaria pueden trabajar y describir situaciones sobre relaciones lineales de covariación entre dos cantidades.

En el Simposio XXI de la SEIEM se presentó una comunicación ligada al pensamiento funcional y generalización con estudiantes de primaria (Pinto y Cañadas, 2017). Al mismo tiempo se expusieron otros trabajos con relación a la misma temática durante la sesión del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico ligados a niveles de generalización que evidencian estudiantes de primaria y la influencia de las ayudas efectuadas por entrevistadores (ej. Hidalgo y Cañadas, 2017; Ureña, Molina y Ramírez, 2017). En anteriores ediciones del simposio han sido expuestas otras investigaciones centradas en el pensamiento funcional y con la generalización presente de forma implícita. Dichos trabajos abarcan perspectivas diferentes a la nuestra como es el caso de sistemas de representación, tipos de relaciones funcionales, estrategias que los alumnos usan cuando trabajan con relaciones funcionales, entre otras. Por ejemplo, Cañadas y Fuentes (2015) muestran los sistemas de representación y estrategias que utilizan estudiantes de primer curso al trabajar con una tarea que involucra una relación funcional lineal.

METODOLOGÍA

Esta investigación es descriptiva y forma parte de un proyecto más amplio, ya mencionado, que persigue indagar sobre las capacidades algebraicas que estudiantes de primaria exhiben en situaciones en las que se involucran relaciones funcionales. El objetivo asociado a la parte de la investigación que presentamos en esta comunicación es describir los niveles de generalización que manifiestan estudiantes de cuarto de primaria durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional.

Técnica de recolección de información

Para dar respuesta al objetivo planteado se realizan entrevistas individuales semiestructuradas de tipo clínico a un grupo de estudiantes de cuarto curso de primaria. La entrevista fue conducida por una investigadora del proyecto en que se enmarca este estudio. La duración de cada entrevista fue entre 15 y 25 minutos aproximadamente, según el tiempo necesario por cada estudiante para resolver la tarea planteada. En el curso previo dichos estudiantes, como parte de un grupo de 27 alumnos de tercero de primaria, habían participado en un experimento de enseñanza orientado a explorar su pensamiento funcional, siendo esta su única experiencia previa relativa al trabajo con funciones. Dicha muestra previa fue intencional con motivo de la disponibilidad del centro. En cuarto curso los ocho participantes fueron seleccionados a juicio de su profesora de modo que se cubrieran en la asignatura de matemáticas los niveles de rendimiento académico bajo, medio y alto.

Diseño de la entrevista

En la entrevista se propone a los alumnos resolver una tarea que involucra la relación funcional X+2. La organización de la entrevista es inductiva, va de los casos particulares hacia el más general. La situación a la que refiere la tarea es la siguiente: A mi familia y a mí nos gusta mucho ir a esquiar a la sierra. Mientras esquiamos dejamos el coche en el parking. Entrar en el parking cuesta 2€ y cada hora completa que pasa el coche en el parking cuesta 1€.

La entrevista está compuesta de las siguientes cuestiones:

P1. Si hace mal tiempo y solo dejamos el coche una hora en el parking ¿cuántos euros nos cuesta?

P2. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking si dejamos el coche 3 horas?

P3. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking si dejamos el coche 5 horas?

P4. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking si dejamos el coche 10 horas?

P5. Como lo estamos pasando muy bien, decidimos quedarnos allí una noche y esquiar al día siguiente. Entre los dos días, el coche ha estado en el parking 20 horas, ¿cuántos euros nos cuesta el parking?

P6. Si pasamos un puente entero de cinco días (120 horas), ¿cuántos euros nos cuesta el parking?

P7. Decidimos pasar tres semanas (500 horas aproximadamente), ¿cuántos euros nos cuesta el parking?

P8. Lo estamos pasando tan bien que hemos perdido la noción del tiempo y no sabemos cuántas horas hemos pasado ¿Cómo podemos saber cuántos euros nos cuesta el parking?

P9. Imagina que llamamos N al número de horas que hemos dejado el coche en el parking mientras esquiábamos. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking?

Las primeras siete preguntas involucran cantidades concretas y se espera que a partir del trabajo con números específicos (casos particulares) el estudiante identifique y exprese la relación funcional. Las dos últimas preguntas involucran los casos generales orientados a que el alumno represente de forma general la relación funcional, finalizando con el uso de simbología algebraica propuesta.

Análisis de los datos

Una vez que se realizaron las entrevistas, la información recabada por medio de grabaciones de video y producciones escritas, fue transcrita y codificada por los autores de esta comunicación de acuerdo a las categorías que a continuación describimos. En las transcripciones de las respuestas que da cada estudiante, se analizan las manifestaciones de generalización.

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes a la tarea descrita elaboramos unas categorías que distinguen las formas en que cada alumno muestra indicios de reconocer la relación funcional. Al mismo tiempo se tiene en consideración que un mismo estudiante puede manifestar diferentes niveles durante la entrevista sin estar estos condicionados por las preguntas planteadas. Para definir los niveles de generalización se parte de los aportes teóricos de Mason y Pimm (1984) y Radford (2001, 2010, 2018), y de un análisis preliminar de los datos. Distinguimos cuatro niveles:

Generalización numérica (N): el estudiante reconoce la relación funcional en el trabajo con cantidades específicas dadas y lo expresa refiriendo específicamente a dichas cantidades particulares. La categoría se separa según si en su respuesta el estudiante reconoce la relación funcional con números menores a 100 (N1) o con números mayores o iguales a 100 (N2).

Generalización genérica (G): el estudiante reconoce la relación funcional y en su explicación recurre a una ejemplificación que involucra números específicos a modo de ejemplo genérico.

Generalización verbal (V): el estudiante reconoce la relación funcional y la expresa usando expresiones verbales generales que aluden a lo indeterminado.

Generalización simbólica (S): el estudiante reconoce la relación funcional y la expresa usando simbolismo algebraico. Se incluyen en este nivel los casos en que los estudiantes no generan por su cuenta la expresión simbólica pero la utilizan al serle propuesta y muestran comprenderla.

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados en términos de los niveles de generalización que manifiestan los estudiantes. Para referirnos a cada estudiante se usa la letra E y un número que la acompaña. En la Tabla 1 se resume la manifestación de los niveles de generalización para cada uno de los alumnos cuando les son planteadas las preguntas de la entrevista.

Tabla 1. Niveles de generalización manifestados por los estudiantes

	Nivel de generalización				
Estudiantes	N1	N2	G	V	S
E1	X	X	X		
E2	X	X	X		
E3		X			
E4				X	
E5	X	X			
E6	X	X	X		
E7	X	X		X	X
E8		X		X	

Nota. E1 = estudiante 1, E2 = estudiante 2…, E8 = estudiante 8.

En la Tabla 1 se aprecia que la mayoría de los estudiantes llega a generalizar a nivel numérico. Sin embargo, no ocurre lo mismo con los niveles superiores en los cuales hay una disminución de los estudiantes que los exhiben conforme se avanza en la entrevista hacia el caso general.

Generalización numérica (N)

Este nivel de generalización es manifestado casi por todos los estudiantes al enfrentarse a las primeras preguntas de la entrevista que involucran números específicos. Sólo el estudiante E4 muestra dificultades recurrentes. El resto de los estudiantes determina sin mayores dificultades la cantidad de euros que se paga según el número de horas dado. Al aumentar el número de horas, la manifestación se va consolidando, esto se percibe mediante las explicaciones de la relación funcional conforme se avanza (más estudiantes son los que manifiestan N2 que N1). En el siguiente extracto se aprecia en la argumentación de E2, la relación que establece entre el número de horas específico que ha transcurrido y la de euros que se paga. El estudiante reconoce que la justificación de los resultados es la misma que ha brindado antes para otros números específicos de horas:

E (Entrevistadora): Ah. Ahora imagínate que vas pero vas a estar un rato más, vas a estar 5 horas, ¿cuánto tendrías que pagar?

E2: 7

E: ¿7?, ¿Por qué?

E2: Pues lo mismo, las 5 horas, porque las 5 horas un euro, entonces serían un euro cada una y me da 5, más las 2 al entrar, 7.

Respecto al estudiante E4, si bien explica la relación funcional en momentos muy específicos con números como mil o un millón, no muestra una identificación clara de la relación funcional. Exhibe una tendencia a contar, realizar sumas repetidas o recurre a un proceso recursivo en que retoma resultados previos para determinar nuevos. Muestra mayor énfasis en obtener respuestas que en determinar un patrón que le facilite los cálculos.

Este nivel de generalización también es manifestado por un estudiante cuando se le plantea la última pregunta de la entrevista orientada a la generalización simbólica. Esto ocurre cuando el estudiante E2 asigna el número 13 a la letra N por su posición en el abecedario para calcular los euros a pagar.

Generalización genérica (G)

Tres estudiantes manifiestan este nivel al usar casos concretos con carácter de ejemplo genérico, eligiendo ejemplos no considerados previamente en la entrevista. La manifestación ocurre en las últimas preguntas que involucran indeterminación en la cantidad de horas por medio de la expresión "un número cualquiera de horas" o una letra que las representa.

Los estudiantes E2 y E6 manifiestan este nivel en la pregunta ocho. E2 reconoce la relación funcional en la que el dinero a pagar depende de la cantidad de horas que han trascurrido, para tal efecto ejemplifica su razonamiento con el caso particular de 50 horas. El estudiante E6 explica la relación funcional recurriendo a un ejemplo específico como recurso que engloba la generalidad de la situación, advirtiendo usar un caso concreto:

E: Ah. Entonces siempre si tenemos, vamos a poner "un número de horas en parking" [lo escribe], ¿Cómo explicaríais tú aquí los euros que pagas?, ¿cómo lo podríais calcular? Si tú sabes el número de horas que está el coche en el parking ¿cómo podríais calcular los euros que pagas?, ¿cómo lo haces?

E6: ¿Puedo usar un número?

E: Como tú quieras, puedes usar operaciones explicando, te puedes salir de la caja esta y puedes explicar aquí o donde quieras.

E6: Vale, vale, si fuera por ejemplo 183 entonces…

E: ¿horas no?

E6: Sí, 183 horas, entonces yo le añado 2, 185.

Este nivel de generalización también se presenta en la última pregunta que contiene simbología algebraica sugerida.

E: Si yo quiero poner ahí algo. Imagínate que no sabemos las horas que vamos a dejar el coche en el parking. Son muchas y vamos a poner N, le vamos a llamar N el número de horas, ¿cómo calcularías los euros que tienes que pagar para N horas?

E1: ¿N qué número es?

Pues no sé, si son 30 horas tienes que pagar lo que te diga el parking.

E: Y si por ejemplo ponemos aquí así "son N horas", ¿cómo sabrías lo que tienes que pagar?

E1: Igual, las horas que te quedas.

E: Igual… Le vamos a llamar a esto número de horas, ¿cómo calcularías el número de euros?

E1: Pues una hora un euro entonces sumando, sumando, sumando y luego 2 de entrada y si estaba 30 horas, pues 32.

En el fragmento anterior, a pesar de que la pregunta busca que el estudiante haga uso de simbolismo algebraico, E1 manifiesta generalización genérica. Muestra comprensión de la relación funcional entre las cantidades involucradas, así como de la indeterminación presente.

Generalización verbal (V)

Este nivel es evidenciado también por tres estudiantes y, al igual que el nivel descrito antes, se da en la pregunta ocho. Por un lado, el estudiante E4, a pesar de las dificultades que ha presentado al trabajar con números específicos en las cuestiones previas, al calcular los euros a pagar para un "número cualquiera de horas" expone la dependencia entre las cantidades asociadas de forma explícita, aludiendo a la propia indeterminación del número de horas, sin embargo, se reconoce que su razonamiento es aislado y no es extendido a otros casos de la entrevista. Por otra parte, los estudiantes E7 y E8 exponen la forma de la relación funcional como "horas+2":

E: Y ahora imagínate que no sabes cuántas horas exactamente has tenido el coche en el parking pero tú le quieres contar a alguien cómo saber lo que tienes que pagar ¿cómo se lo explicarías?

E8: Pues que al entrar tienes que pagar 2 euros y luego contando las horas que estés pues cada hora vale un euro.

E: Y entonces en total ¿cuánto?

E8: Entonces luego le sumo las horas que has estado más 2.

Ante la propuesta de "un número cualquiera de horas" y la pregunta de cómo calcular siempre lo que se paga E7 afirma "pues a ese número le pones dos euros de la entrada y esos serían los euros".

Los estudiantes que no manifiestan los niveles de generalización verbal o genérico exhiben alguna dificultad inicial para comprender la indeterminación en las horas que han transcurrido o para operar con estas. Por ejemplo, E3 ante la cuestión de cómo calcular los euros a pagar para "un número cualquiera de horas" inmediatamente responde que no sabe. E5 afirma que se deben comprobar las horas que han transcurrido ya sea preguntando al maquinista o viendo las cámaras de seguridad, esto para determinar con precisión los euros que se pagan y evitar cualquier trampa en el cobro.

Generalización simbólica (S)

Una estudiante evidencia una generalización simbólica en la última pregunta. La estudiante E7 extiende el razonamiento que había utilizado en los casos anteriores que implicaban números específicos o la indeterminación de las horas, ahora a la letra X. E7 expresa una vez más la relación funcional entre las cantidades covariantes en la cuestión nueve independientemente de la nueva representación que se le da a las horas trascurridas. La alumna utiliza la letra en la expresión de la relación:

E: ¿Entonces cómo calcularías tú si tienes el coche X horas pero no sabemos exactamente qué es ese número? ¿Cómo calcularías lo que tienes que pagar?

E7: Pues, serían esas X horas, igual que aquí [señala los resultados anteriores], sólo que en vez de "un número" sería una X.

E: ¿Y cómo pongo eso?, ¿se te ocurre una forma de cómo ponerlo?, ¿cómo lo escribo aquí?

E7: Que a X horas le sumas 2.

Se constata una aceptación del lenguaje algebraico a pesar de que la estudiante por cuenta propia no representa simbólicamente la relación funcional. Dados los resultados, la entrevistadora propone a la alumna la representación X+2 y es aceptada como equivalente a lo que expresaba:

E: Ah, muy bien, ahora yo te voy a escribir una cosa a ver qué te parece si esto estaría bien "X+2" [lo escribe]. ¿Eso qué te parece?

¿Es lo mismo que pones ahí?

E7: Es lo mismo.

E: Es lo mismo ¿por qué?

E7: Porque aquí esto, aquí lo hemos resumido en números y cruces.

Los estudiantes que no manifiestan este nivel no atribuyen un significado a la letra o rechazan involucrarla con operaciones. El alumno E1 no acepta la forma “número de horas+2” ya que piensa que la forma correcta debería ser “2+número de horas” por la forma en que ocurren los eventos en la situación planteada. Al no ser considerada la conmutatividad de la suma no llega a concretar la generalización, tampoco cuando es introducida la letra N. El estudiante E5 rechaza el uso de la letra evidenciando dificultad para concebir una cantidad indeterminada de horas y trabajar con esta. E2 asigna el valor concreto 13 a la letra N. Por último, el estudiante E4 manifiesta dificultades para expresar la operación cuando es introducida la letra N, inicialmente afirma que el resultado sería “ene 2” aludiendo a las cifras del número. Posteriormente extraemos que se refiere a la posible apariencia del resultado, dependiendo del valor que tuviera en las unidades, entre 0 y 7, cuando se le suma el 2, para el alumno el resultado que se obtendría con las letras sería N1, N2, N3, N4… y N9.

DICUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta comunicación se evidencian habilidades matemáticas de estudiantes de primaria para pensar algebraicamente, específicamente para expresar una relación funcional en términos de generalizaciones. Hemos descrito cuatro niveles de generalización que manifiestan estudiantes de entre aproximadamente 9 y 10 años durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional. Estas manifestaciones se producen como respuesta a las cuestiones de la entrevista descrita, sin ayudas por parte de la investigadora. En Ureña (2017) se recogen otros resultados complementarios relativos a una fase posterior, considerando diferentes tipos de estímulos efectuados por la entrevistadora para solventar algunas dificultades de los alumnos.

De los resultados presentados se concluye que todos los alumnos evidencian un reconocimiento de la relación funcional. Esto se manifiesta en niveles según la forma en que generalizan la relación entre las cantidades covariantes. Se percibe facilidad en los estudiantes para establecer la relación funcional entre números específicos o casos concretos, al igual que observa Hidalgo (2018) con estudiantes de sexto curso y Pinto y Cañadas (2017) con alumnos de tercero. No se aprecia una dificultad conforme se aumenta el tamaño de los números.

Los niveles genérico y verbal son evidenciados por menos alumnos (3 estudiantes en cada nivel) y solo cuando se enfrentan a cuestiones que involucran cantidades indeterminadas. Asociado a dificultades en estos niveles, al igual que señala Radford (2018), se perciben limitaciones en la capacidad de los estudiantes para articular y expresar verbalmente las variables y la relación funcional a pesar de reconocerla. Los estudiantes recurren a otros medios que también revelan su pensamiento algebraico, mediante los cuales expresan la relación funcional sin hacer uso del simbolismo algebraico.

Con respecto al último nivel de generalización, solo una estudiante generaliza simbólicamente cuando es planteada la pregunta final. En esta cuestión, única que involucra simbolismo algebraico, algunos estudiantes rechazan el uso de las letras o no le atribuyen un significado específico, con lo que no se concreta una comprensión de la representación simbólica. Al igual que señalan Molina et al. (2018), se detecta la asignación de valores fijos a las letras, según variados criterios tales como su posición en el alfabeto.

Las dificultades de los estudiantes son esperables dada su poca experiencia con situaciones que involucran relaciones funcionales, generalización y simbología algebraica. Se aprecia una dificultad para expresar o justificar ideas debida al lenguaje, como detecta también Warren, Miller y Cooper (2013). La propuesta de una tarea con organización inductiva que involucra una relación funcional ha permitido explorar la habilidad de los estudiantes para generalizar en diferentes grados. Las últimas preguntas fueron las más exigentes de modo que los estudiantes usaron otros medios (ejemplos genéricos y expresiones verbales de indeterminación) para dar respuesta a la situación y, en consecuencia, evidenciar un reconocimiento de la relación funcional. Reforzamos algunos de resultados de Blanton (2008) al mostrar que los niños pueden trabajar y describir situaciones de pensamiento funcional, la relación entre cantidades que varían y hacer uso del lenguaje matemático y las representaciones (en nuestro estudio, verbal, simbólica-algebraica y numérica) para expresar dichas relaciones. En nuestro caso, en una sola entrevista se observa una gama de formas para expresar la relación funcional, como se aprecia en los niveles de generalización.

Se hace patente, en consonancia con otros estudios (ej. Blanton y Kaput, 2011; Molina, et al., 2018) el interés del trabajo con relaciones funcionales como una vía para acercar al estudiante al pensamiento algebraico y promover el desarrollo de sus capacidades desde los primeros cursos escolares. Apoyamos el principio de introducir tareas con patrones y que están descritas por medio de relaciones funcionales desde los primeros cursos. Esto además de contribuir al fortalecimiento de la capacidad de generalizar matemáticamente, brinda herramientas al estudiante para articular u organizar sus ideas y le familiariza con contenido algebraico y de funciones respecto a notación, representación y la naturaleza variable de las cantidades asociadas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al financiamiento de los estudios de posgrado del primer autor por parte de la Universidad de Costa Rica y como parte del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking to practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M., Brizuela, B., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-old's thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5-23). Nueva York, NY: Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Hidalgo, D. (2018). *Proceso de generalización de estudiantes de 6° de educación primaria: respuestas inadecuadas, intervenciones y efectos* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Hidalgo, D. y Cañadas, M. C. (2017). El proceso de generalización de estudiantes de 6° de Educación Primaria: dificultades, ayudas y efectos. Trabajo presentado en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM, en el *XXI Simposio de Investigación en Educación Matemática SEIEM*, Zaragoza, España.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. Milton Keynes, Reino Unido: The Open University Press.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15(3)*, 277-287.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria (Vol. BOE N°52, pp. 19349-194420). Madrid, España: Autor.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M., Ambrose, R. y del Rio, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 261-280). Hamburgo, Alemania: Springer.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

Ureña, J. (2017). *Manifestación de niveles de generalización en estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que involucra relaciones funcionales* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Ureña, J., Molina, M. y Ramírez, R. (2017). Manifestación del pensamiento funcional según niveles de generalización y a través de estímulos del profesor. Trabajo presentado en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM, en *XXI Simposio de Investigación en Educación Matemática SEIEM,* Zaragoza, España.

Radford, L. (2001). Factual, contextual and symbolic generalization in algebra. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Utrecht, Holanda: PME.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37–62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 3-25). Hamburgo, Alemania: Springer.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84.