

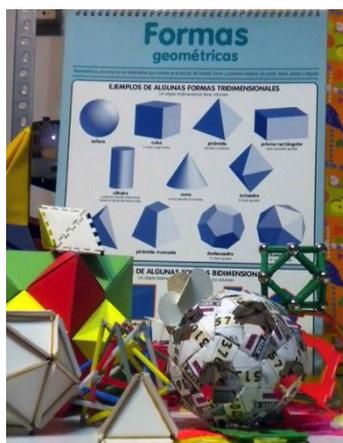
Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

## Tema 6

# SENTIDO ESPACIAL

Pablo Flores, Rafael Ramírez, Aurora del Río



*Figura 6.1: Coordinación de representaciones*

La enseñanza de la matemática actual persigue que los escolares, ciudadanos en formación, se desenvuelvan en su entorno personal, social, laboral, físico y técnico, de la manera más eficiente posible. Entre las necesidades del ciudadano está la de ubicarse y desplazarse en el medio, ecológico y social, en que se encuentra, en sus territorios y lugares. Para ello ha de situarse en el espacio, localizar los elementos que le rodean, establecer su posición relativa, estructurar referencias, medidas y relaciones, entender los cambios de posición y los desplazamientos. La geometría proporciona buenas herramientas que ayudan a lograr estos fines.

En términos generales, la geometría se considera como aquella disciplina que estudia las formas del plano y las figuras o cuerpos del espacio; es la ciencia de las formas y del espacio. La geometría es parte importante de la matemática; proporciona a los escolares una apreciación profunda del mundo que les rodea. Formas y figuras geométricas se encuentran en el mundo natural, así como en las diversas áreas creativas y del ingenio humano

La geometría estudia el espacio a partir de formas ideales, abstracciones que representan los objetos reales que nos rodean junto con sus movimientos y otras transformaciones. La enseñanza funcional de la geometría tiene que ayudar al aprendiz a ubicarse y desplazarse en el espacio, suministrándole herramientas y referentes para identificar formas y utilizarlas para resolver problemas. Dado que las personas recibimos la información a través de los sentidos, especialmente el auditivo y el visual, los medios utilizados con mayor frecuencia para elaborar, transmitir y recibir conocimiento

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

matemático son los enunciados verbales y las representaciones gráficas o simbólicas de conceptos y de propiedades. Aunque las formas y figuras se puedan transmitir por enunciados verbales, su captación es principalmente por la vista, y igualmente por el tacto.

Para construir conocimiento geométrico, para estudiar las figuras y las formas, la geometría requiere imágenes y representaciones gráficas. Cuando en una representación gráfica predominan las imágenes, hablamos de visualización. Este término se emplea, indistintamente, para hacer referencia a figuras o representaciones pictóricas externas (con soporte material) como internas (del pensamiento). Esta noción de visualización está ligada con la capacidad de elaborar imágenes y pensar mediante ellas.

Hay aspectos del conocimiento matemático que se pueden expresar por medio de imágenes y representaciones gráficas. La visualización en matemáticas consiste en formar imágenes de un concepto y usarlas de forma efectiva para descubrir y comprender, para pensar las matemáticas. Estas imágenes son representaciones dibujadas o con un soporte material, como los sólidos de madera, para representar los poliedros o las construcciones en el geoplano, para representar polígonos.

El sentido espacial es la capacidad de un sujeto para registrar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos. Por ello, el sentido espacial se refiere a la capacidad de un individuo para interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes visuales de formas y figuras, clasificarlas y trabajar con ellas. Sin esta capacidad, resultaría difícil desenvolverse en ese mundo.

El sentido espacial es el sentido intuitivo del propio entorno y de los objetos que allí se encuentran, la vía que da acceso a los objetos físicos y permite a los estudiantes confiar en su conocimiento visual. El desarrollo de las capacidades que caracterizan el sentido espacial proporciona a los alumnos nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas por medio de la visualización.

Se manifiesta sentido espacial en los sujetos que se orientan en el espacio, que identifican con precisión las formas de los objetos, apreciando semejanzas y diferencias, anticipan movimientos sin necesidad de hacerlos y generan esquemas gráficos de fenómenos no geométricos (el diagrama de un acontecimiento, por ejemplo). En este capítulo se describe el sentido espacial, y se proponen tareas de enseñanza para desarrollarlo, tras examinar cómo aparece el sentido espacial en los currículos escolares de educación primaria.

## **1. Sentido espacial**

Si se analiza el aprendizaje de la geometría que los futuros maestros han realizado durante su formación escolar, apreciamos que predominan los conocimientos sobre términos, relaciones, propiedades y clasificaciones de figuras. Parece que la enseñanza de la geometría ha estado orientada al estudio de definiciones y a su aplicación a la clasificación de cuerpos y figuras, con ayuda de las medidas de algunas de sus

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

dimensiones. La mayoría de las tareas, en estos casos, se limitan a la aplicación de fórmulas. Un ejemplo de tarea en esta dirección se muestra en la figura 6.2.

Sin embargo, tal como se ha dicho, la geometría va más allá de esta perspectiva, ya que es necesaria para situarse y orientarse en el espacio. Para ello, además de conocer y manejar los elementos geométricos, hay que desarrollar una serie de habilidades para resolver problemas espaciales. Esta idea es la que subyace en el concepto de sentido espacial que se presenta a continuación.

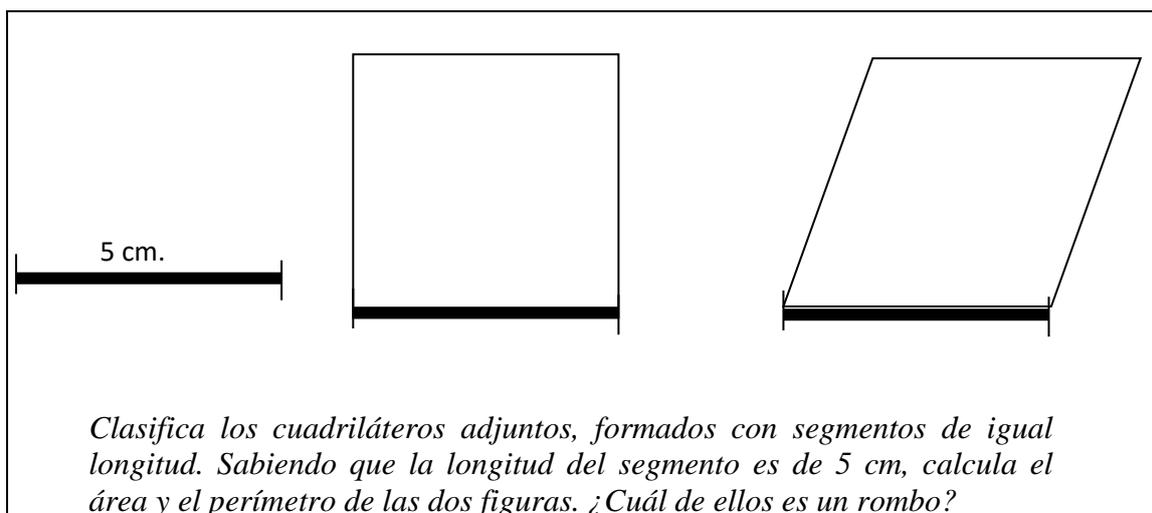


Figura 6.2: Tarea de enseñanza basada en aprendizaje de nombres y medidas

Describimos el **sentido espacial** como un *modo intuitivo de entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y relaciones entre ellos, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas.*

El sentido espacial requiere generar una amplia red de imágenes de los conceptos geométricos, empleando herramientas formales pero también actividades basadas en mirar y actuar sobre el espacio, como doblar papel o jugar con construcciones para obtener figuras, realizar movimientos y transformaciones, e identificar teselaciones y proyecciones. Si bien se podría estudiar a partir de una interpretación amplia de los propios elementos geométricos, a efectos de clarificarlo, vamos a distinguir los elementos geométricos de las habilidades para manejar sus representaciones e imágenes, a lo que llamaremos visualización.

Actividad 1: Identifica situaciones cotidianas que requieren emplear elementos geométricos.

Por tanto, el sentido espacial reconoce que el aprendizaje de elementos geométricos tiene que coordinarse con la creación de destrezas que permiten ubicarlos en el espacio, percibirlos y representarlos de diversas formas. Es por esto que vamos a distinguir dos

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

componentes del sentido espacial: a) el *manejo de conceptos geométricos* y b) las *destrezas para visualizar* estos conceptos.

### **a) Manejo de conceptos geométricos**

Cuando hablamos de *manejo de conceptos geométricos* estamos haciendo referencia al conocimiento de las características y propiedades de formas geométricas en el plano o en el espacio, como por ejemplo reconocer el *cuadrado*, identificar *propiedades*, como que los cuatro ángulos son rectos y sus lados son iguales, establecer *relaciones*, como las de paralelismo entre los lados, e identificar qué figura resulta al colocar el cuadrado frente a un espejo (*movimientos*), apreciando dónde se sitúa la imagen reflejada (*ubicación*) y que sería el mismo cuadrado si se coloca el espejo ocupando su diagonal (*regularidades*). Para examinarlo con más detalle, distinguimos tres apartados en esta componente: a.1, Propiedades de las formas y de las figuras, a.2, Relaciones geométricas y a.3. Ubicación y movimiento. Identificamos puntos claves de cada uno de los apartados, que se tratan en los cursos escolares.

a.1. Conocer *propiedades de formas y figuras*, incluye identificarlas a través del nombre, la definición y diversas representaciones, definir las, construirlas, caracterizarlas, etc. Por ejemplo, identificar diversas caracterizaciones del cuadrado (cuadrilátero regular, cuadrilátero con lados iguales y ángulos rectos, cuadrilátero de diagonales iguales perpendiculares, que se cortan en su punto medio, etc.)

a.2. Reconocer y establecer *relaciones geométricas* consiste en apreciar cualidades en las formas y cuerpos geométricos, como la congruencia, igualdad o equivalencia, características que permiten clasificarlas y diferenciarlas, etc.

a.3. La ubicación y los movimientos son elementos dinámicos de la geometría. Manejar estos conceptos consiste en disponer de referentes para situar los elementos en el plano y espacio, y conocer y saber llevar a cabo los movimientos así como detectar regularidades o elementos que resultarían invariantes al moverlos.

Un adecuado conocimiento de estas propiedades y relaciones geométricas permite realizar razonamientos matemáticos sobre la figura del cuadrado, como por ejemplo identificar que su centro es a la vez el punto de corte de sus diagonales, el punto de intersección de las mediatrices de sus lados, el centro de giro que lo deja invariante, etc. Ahora bien, para poder llegar a establecer estos razonamientos necesitamos que las imágenes que hemos creado del cuadrado sean dinámicas, versátiles, identificables aunque no dispongamos de toda la figura, sino algunos vértices u otros elementos gráficos, o bien algunas características que nos permitan identificar dónde se encuentran los demás y cómo están situados. Estos elementos están ligados a destrezas para relacionar las imágenes entre sí, aplicando habilidades y destrezas de visualización.

Actividad 2: Caracteriza el triángulo equilátero de diversas formas, tanto por sus propiedades geométricas como por sus regularidades (simetrías, giros, etc.).

### **b) Destrezas de visualización**

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

El sentido espacial requiere además *destrezas para visualizar los elementos geométricos en el espacio*, y abarca especialmente la orientación y la visualización. Los alumnos deben localizar y descubrir relaciones espaciales en los elementos que componen su entorno.

*b.1. Orientación:* La orientación espacial es la destreza para comprender cómo están dispuestos los elementos en el espacio y recordarlos sin confusión adoptando diferentes perspectivas.

Localizar los distintos elementos de un mapa o recordar el camino de vuelta al aparcamiento, están popularmente asociadas a tener “un buen sentido de la orientación”, y requieren haber creado una representación mental de los elementos que permita identificarlos cuando se cambien las condiciones, como al acceder al aparcamiento por diferentes lugares, o identificarlo tanto al ir como al volver.

*b.2. Visualización:* Aunque hay una gran diversidad de terminología e interpretaciones para la visualización, de un modo general podemos entender que tener capacidad visual en geometría es disponer de un amplio conjunto de imágenes, capacidades y habilidades necesarias para poder producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos.

Para visualizar hay que crear y disponer de un buen repertorio de representaciones e imágenes gráficas de las formas, cuerpos y figuras geométricas, ser diestro para generar información sobre ellos y para utilizarlos para resolver problemas prácticos.

Se requiere visualización para percibir una figura cuando se disponen de diferentes informaciones, como la descripción verbal (*cuadrilátero equilátero y rectángulo*), o alguna representación icónica, como la representación plana de objetos tridimensionales, sus proyecciones, desarrollos planos, etc. Por ejemplo se requiere capacidad de visualización para identificar diversos cuadrados en un geoplano, independientemente de que los lados sean paralelos a los bordes. También para poder imaginar un cubo a partir de su desarrollo en el plano y manipular mentalmente la imagen para localizar las caras contiguas figura 6.3.

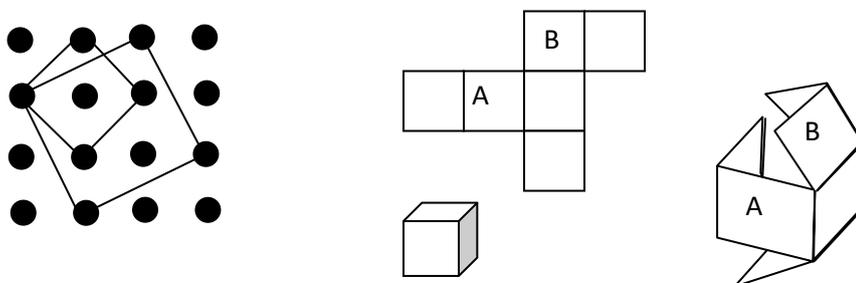


Figura 6.3: Identificar cuadrados en un geoplano. Imaginar que lados serán contiguos en cubo, a partir de desarrollo plano.

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

Para generar estas habilidades necesitamos realizar experiencias manipulativas con los elementos geométricos, como manejar el geoplano y el papel cuadriculado para formar diversos cuadrados con vértices en los puntos, o componer casas y objetos a partir de recortables. La enseñanza tiene que favorecer que los alumnos desarrollen estas habilidades para poder razonar con imágenes y resolver problemas.

Actividad 3: Plantea situaciones similares a las de la figura 6.3, para identificar un triángulo equilátero en diversas situaciones, tanto planas como en el espacio.
---

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

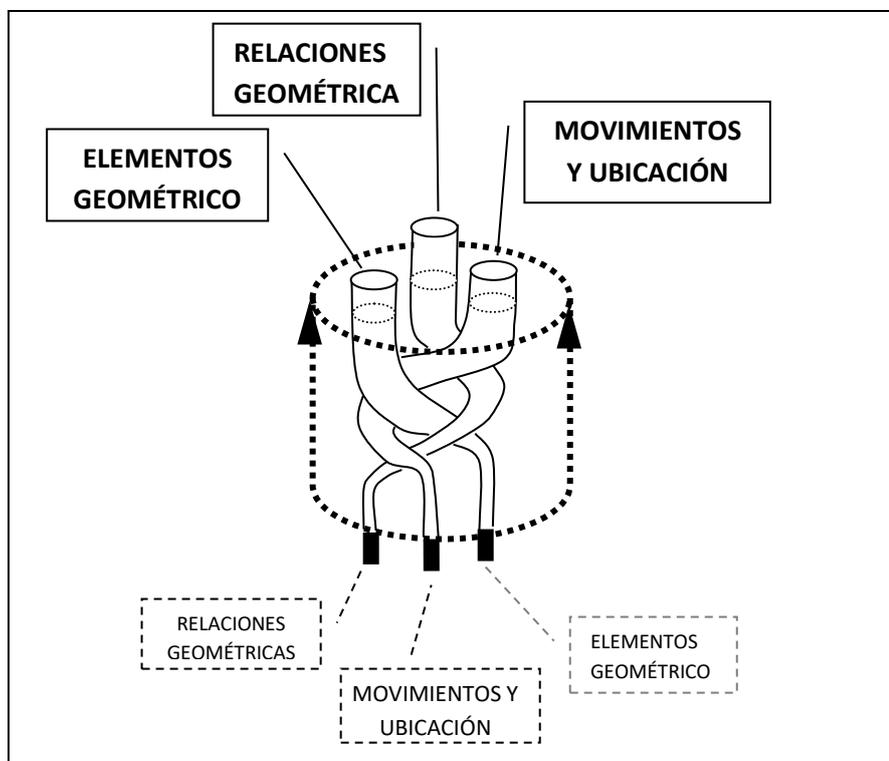


Figura 6.4: Esquema de las componentes del sentido espacial

El esquema de la figura 6.4 destaca como componentes del Sentido Espacial los elementos geométricos y la visualización. En el plano inferior aparecen los elementos geométricos formales. Conforme se incorpora la visualización, estos elementos se van fortaleciendo y relacionando. En la parte superior del esquema aparecen los elementos relacionados, enriquecidos con una gran carga de interpretación visual. En la tabla 6.1, mostramos ejemplos de puntos clave que se deben considerar en los elementos para desarrollar el sentido espacial en los escolares.

Tabla 6.1: Puntos clave a desarrollar el sentido espacial en clase, para cada elemento geométrico		
a.1: Propiedades de formas	a.2: Relaciones geométricas	a.3: Ubicación y movimientos
<ul style="list-style-type: none"> <li>Las formas bidimensionales y las figuras tridimensionales tienen propiedades que permiten su identificación, ordenación y clasificación.</li> <li>Los ángulos son medidas de un giro, y se pueden clasificar según su grado de rotación.</li> <li>La comprensión de los polígonos y sus propiedades permite a los estudiantes explorar e investigar</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Las formas planas y los cuerpos sólidos pueden estar compuestos, o descomponerse en otras formas de dos dimensiones o figuras tridimensionales.</li> <li>Existen relaciones entre la geometría plana y la sólida (por ejemplo, las caras del poliedro son polígonos; las vistas de un cuerpo geométrico se pueden</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El sistema de coordenadas es una forma sistemática para describir la posición en el plano, para ubicar formas planas u objetos sólidos.</li> <li>Las transformaciones permiten describir movimientos, como cuando se identifica un friso a partir de un giro y una traslación.</li> <li>Las figuras presentan regularidades que resultan</li> </ul>

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

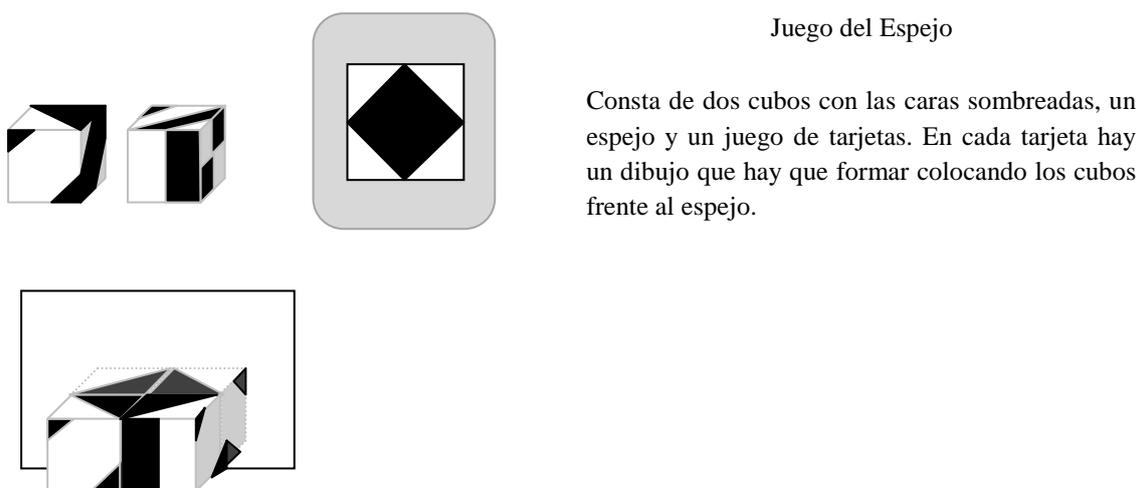
<p>conceptos de geometría y medida.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La comprensión de los poliedros y sus propiedades ayuda a desarrollar una comprensión del mundo sólido en que vivimos, y nos ayuda a establecer conexiones entre la geometría de dos y tres dimensiones.</li> </ul>	<p>representar en dos dimensiones).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La congruencia es una relación espacial entre dos formas o figuras geométricas que tienen exactamente el mismo tamaño y forma.</li> </ul>	<p>invariantes al realizar movimientos con ellas. Por ejemplo, identificar que el cuadrado es simétrico respecto a sus diagonales y ubicarlos vértices del cuadrado tras aplicarle un giro.</p>
--	--	---

A su vez, el manejo de elementos geométricos contribuye a mejorar la visualización, por lo que las dos componentes se complementan para lograr un dominio geométrico funcional, es decir, que facilite ubicarse en el espacio y reconocer las relaciones espaciales y geométricas.

### *Ejemplos del sentido espacial para tareas geométricas*

Vamos a ilustrar las componentes del sentido espacial y la conexión entre conceptos y capacidades, mostrando ejemplos de tareas geométricas en las que se pone de manifiesto.

En primer lugar examinaremos el Juego de Espejos. Este juego consta de dos cubos, un espejo y una serie de tarjetas, en las que aparecen dibujos. En las caras de los cubos hay formas geométricas rectilíneas y sombreadas de negro. Con los dos cubos hay que obtener el dibujo colocándolos frente al espejo, de manera que aparezca entre estas dos caras y sus reflejos en el espejo (Figura 6.5).



*Figura 6.5: Juego del espejo*

La estrategia inicial consiste en probar hasta que aparezca el dibujo pretendido. El jugador diestro antes de colocar las piezas examina las propiedades del dibujo de la

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

tarjeta y selecciona las caras adecuadas. Para ello comienza por reconocer los elementos geométricos del dibujo de la tarjeta y estudiar las figuras de las caras de los cubos. Será más eficaz si conoce conceptos geométricos como el de ángulo, longitud, giro y paralelismo. Identifica un eje de simetría en el dibujo para apreciar cómo se forma empleando un espejo. Aparte del manejo de conceptos geométricos, propiedades, relaciones, movimientos y regularidades, el proceso es más eficaz si identifica la parte del dibujo que se repite por simetría. En este caso descompone el dibujo pone en juego la habilidad para *percibir figuras* la parte del dibujo que se refleja en el espejo *en contexto* (el dibujo completo) (en la figura 6.6: A, identifica un triángulo rectángulo isósceles negro como medio cuadrado negro). Busca en los cubos; separa caras que pueden generar la mitad del dibujo (en la figura 9,6.B, busca triángulos rectángulos isósceles (figura 6.6, B); reconoce relaciones, como segmentos paralelos o perpendiculares; identifica algunas propiedades de los triángulos, los ángulos, etc.; para lo cual aplica la habilidad para *reconocer relaciones espaciales*.

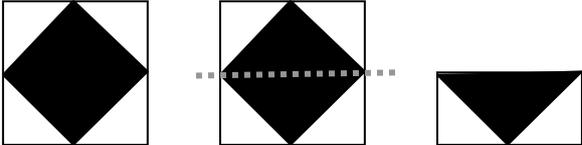
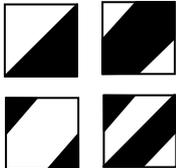
<p>A</p> 	<p>Habilidades</p> <p>Figura-Contexto</p>	<p>Conceptos geométricos y movimientos</p> <p>Ejes de simetría</p> <p>Triángulos rectángulos isósceles</p> <p>Cuadrados</p>
<p>B</p> 	<p>Relaciones espaciales</p>	<p>Segmentos paralelos o perpendiculares,</p> <p>Medidas de ángulos</p> <p>Figuras simétricas</p>

Figura 6.6: A y B: Sentido espacial al construir la figura en El Juego de Espejo

*Discrimina visualmente* las caras de los cubos que va a utilizar, empleando diferentes criterios: número y posición de las líneas, tipos de ángulos, regiones en las que queda dividida, etc. Para conseguir la mitad del dibujo con las caras de dos cubos, separa las caras que presentan el cuadrado dividido por su diagonal en un triángulo isósceles negro y otro blanco (figura 6.6, C). Reconoce la diagonal dividiendo al cuadrado en dos partes, iguales en forma pero de diferente color, y puede imaginar posiciones que puede obtener al colocar ese cubo junto al espejo. Anticipar la imagen que resultará supone *conservar la percepción*, lo que puede llevarlo a aceptar su solución o a girar la tarjeta, reconociendo propiedades de la aplicación del giro.

	<p>Habilidades</p>	<p>Conceptos geométricos y movimientos</p>
<p>C</p> 	<p>Discriminación Visual</p>	<p>Número y posición de las líneas</p> <p>Tipos de triángulos</p> <p>Número y forma de las</p>

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

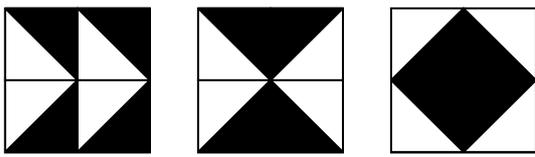
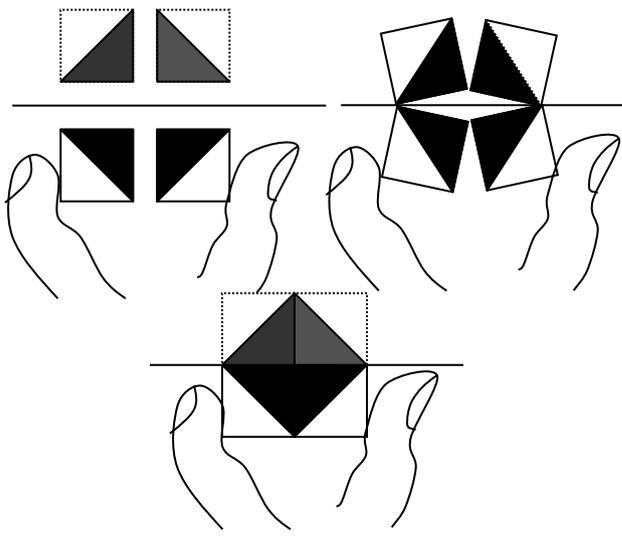
		regiones Diagonal de un cuadrado
D 	Conservación de la percepción	Áreas de las partes Giro respecto a un punto. Traslación

Figura 6.6 C y D: Sentido espacial al construir la figura en *El Juego de Espejo*

Para orientar la cara del cubo respecto al espejo, identifica referentes, para fijarse en la *posición en el espacio*, y al unir las dos piezas seleccionadas por la cara correspondiente (figura 6.6, E). También necesita reconocer relaciones espaciales y regularidades, así como movimientos cuando une los dos cubos, atendiendo a las propiedades de simetría de la figura obtenida. Al realizar este proceso está utilizando conocimientos geométricos para determinar los ejes de simetría, identificar las distancias entre un punto y su simétrico, averiguar qué ángulo debe girar las piezas, etc.

Para todo ello, será mejor resolutor si es hábil con las manos, siguiendo las indicaciones que le da su percepción visual (*coordinación ojo-motor*) para colocar los cubos frente al espejo en la posición que ha pensado (figura 6.6, F). El proceso de resolución resulta más rápido si tiene *memoria visual*, que le permite no mirar cada vez el dibujo que tiene que formar, sino contrastar con lo que recuerda.

	Habilidades	Conceptos geométricos y movimientos
E 	Ojo motor	Giro, simetría y traslación
Todo el proceso	Memoria visual	Propiedades geométricas del dibujo

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

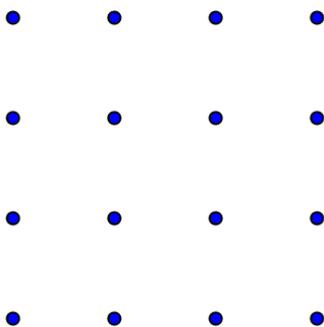
---

*Figura 6.6 E y F: Sentido espacial al construir la figura en El Juego de Espejo*

El juego de espejo da ocasión a los sujetos con tienen sentido espacial a plantearse nuevos retos: estudiar si son necesarias todas las figuras de las caras o se pueden obtener unas a partir de otras; buscar nuevos dibujos más complejos; determinar cuáles dibujos podrían formarse empleando una sola pieza cúbica y dos espejos, formando un libro de espejos ortogonal (composición de movimientos). Pueden llegar a buscar estrategias generales o buscar modelos geométricos más complejos.

Pero también ayuda a desarrollar el sentido espacial, jugar a juegos similares a este, que requieran emplear y poner en práctica el conocimiento de conceptos geométricos que se corresponden con objetos reales, empleando diversos sentidos (vista, tacto y oído) para reconocer, construir, posicionar, interpretar y expresar. Si además plantean retos que permiten apreciar si su solución es válida, facilitará que el jugador refuerce estrategias favorables, conectando diversas componentes del sentido espacial.

Actividad 4: Estudiar cómo se pone en juego el sentido espacial cuando se construyen todos los triángulos distintos en un geoplano de  $4 \times 4$  puntos.



En las siguientes situaciones se analizan las componentes del sentido espacial y su relación con las habilidades de visualización. Cuando el alumno presenta dificultades en algunas de ellas o las manifiesta en un nivel bajo, se pueden detectar errores habituales debidos a la falta de conexión entre las componentes o a un uso incompleto de las correspondientes habilidades de visualización que dan fortaleza al sentido espacial.

1.- ¿Es posible construir un cuadrado en un geoplano isométrico? Supongamos que un alumno responde afirmativamente a esta cuestión al observar la siguiente figura 6.7.

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

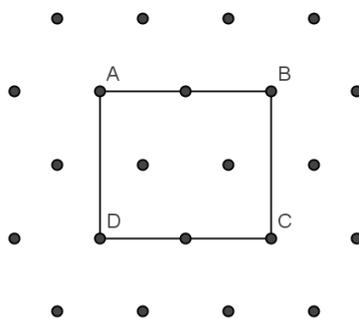


Figura 6.7: Cuadrilátero en Geoplano isométrico

Si argumenta su respuesta diciendo que “se ve” que los lados son iguales, está manifestando un uso muy pobre de la visualización, pues únicamente está argumentando según lo que percibe, que no le permite *discriminar visualmente* entre las longitudes 2 y raíz cuadrada de 3 (1.732...). La componente del sentido espacial que no está manifestando correctamente es **la relación geométrica** en la desigualdad de los lados. La conexión entre las habilidades de *percepción de la figura-contexto* y de la *percepción de las relaciones espaciales*, le hubiera permitido identificar el triángulo equilátero AOP (figura 6.8) y razonar que la altura de este triángulo es la mitad del lado del cuadrado y por lo tanto sería igual al lado OA, por ser una trama isométrica. Esto contradice el hecho de que en un triángulo equilátero la longitud de su altura es menor que la de uno de sus lados.

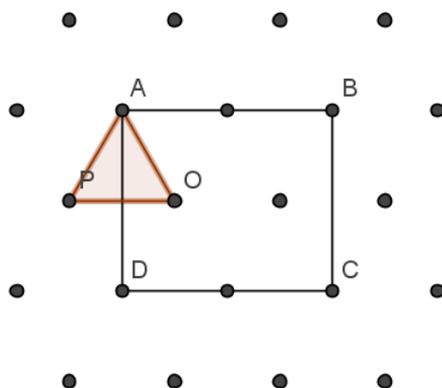
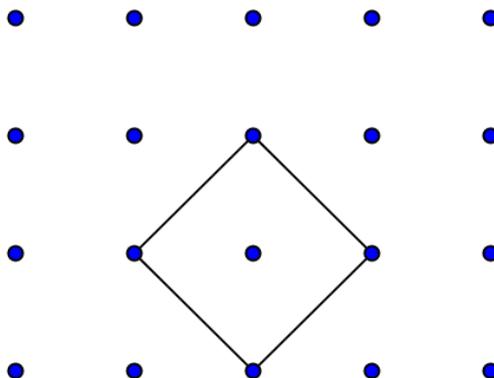


Figura 6.8: Justificación de que es un cuadrado

Práctica: Analiza las componentes del sentido espacial y las habilidades de visualización que se ponen en juego para razonar si es posible construir un triángulo equilátero en un geoplano de trama cuadrada.

2.- ¿Qué tipo de cuadrilátero es esta figura 6.9?

Preprint



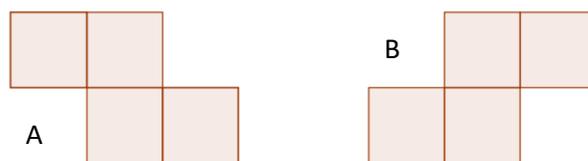
*Figura 6.9: Rombo/Cuadrado en geoplano ortogonal*

Si el alumno responde que es un rombo y no un cuadrado, está manifestando un bajo nivel en la componente de **conocer las propiedades y figuras**. La manifestación de las habilidades de *conservación de la percepción* y *percepción de la posición en el espacio* le hubiera permitido reconocer los ángulos rectos y la igualdad de los lados al observar que la figura es el resultado de girar 45 grados la imagen habitual del cuadrado apoyado sobre uno de sus lados. Si a pesar de reconocer los ángulos rectos y la igualdad de los lados, sigue sin identificar el cuadrado por la posición en la que está situado, demuestra que tiene un conocimiento insuficiente de la caracterización del cuadrado, al no identificarlo como un caso particular de rombo o al creer que la propiedad de ser un cuadrado depende la posición en la que se le presente el cuadrilátero.

Práctica: Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, analizando las componentes del sentido espacial y las habilidades que se manifiestan:

- a) Un rectángulo con tres de sus lados iguales es un cuadrado
- b) Un paralelogramo con un ángulo recto es un rectángulo
- c) Un paralelogramo con tres de sus lados iguales es un rombo
- d) Un trapecio con dos lados iguales es un paralelogramo

3.- ¿Pueden obtenerse la figura B a partir de un giro en el plano de la A en la figura 6.10?



*Figura 6.10: Figuras ejemplo 3*

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

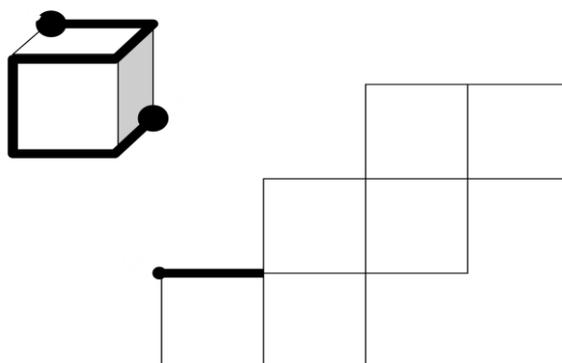
Preprint

Si la respuesta es afirmativa, el alumno manifiesta un nivel bajo en la componente de **ubicación y movimientos**. La discriminación visual le hubiera permitido reconocer las diferencias de las dos fichas independientemente de su posición y percibiría las relaciones espaciales entre los elementos que componen la pieza para ver que los cuadrados que la componen no están situados en la misma disposición, percibiendo la posición que ocupan en el espacio cuando una de ellas se gira. Una utilización inadecuada de los movimientos en el plano le puede inducir al error de considerar la simetría axial existente entre las dos piezas como un giro en el espacio tridimensional.

Práctica: Construye todas las piezas que pueden obtenerse al unir cuatro cuadrados de manera que dos de ellos coincidan en un lado (tetraminós). Identifica cuáles pueden obtenerse unos a partir de otros mediante movimientos en el plano. Analiza las componentes del sentido espacial y las habilidades de visualización puestas en juego.

En las actividades anteriores hemos resaltado una de las componentes del sentido espacial que intervienen en el proceso de resolución, pero, en general, es necesario poner en juego la conexión entre las tres componentes. Veamos un ejemplo:

4.- Señala en el desarrollo plano, el camino que hay representado en el cubo de la figura 6.11.



*Figura 6.11: Camino en un cubo*

En relación a *conocer las propiedades de formas y figuras*, el alumno debe identificar las dos representaciones del cubo presentadas, así como conocer sus propiedades. Por ejemplo reconocer los cuadrados como caras del cubo y detectar los ángulos rectos a pesar de la presentación en perspectiva.

En cuanto a las *relaciones geométricas*, debe identificar la igualdad en la longitud de los lados, así como la posición relativa entre las aristas. Por ejemplo, puede identificar qué partes del camino son lados paralelos, perpendiculares, contiguos, etc.

En relación a *la ubicación y los movimientos*, es necesario que utilice referentes para situar en el desarrollo plano los distintos elementos espaciales, además de identificar los movimientos para conseguir formar el cubo a partir del desarrollo plano o viceversa. Por

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

ejemplo, puede nombrar las caras con letras orientadas (arriba, derecha, izquierda...) e identificarlas en la posición correspondiente en el desarrollo plano. Imaginando que dobla aristas para formar el cubo, puede localizar todos los vértices de los cuadrados en el desarrollo que se corresponden con el mismo punto en el cubo.

Es claro que estas tres componentes están estrechamente relacionadas al ponerse en juego las habilidades de visualización. El alumno coordina su visión con el movimiento de la mano para trazar el camino. Percibe las figuras dentro del contexto, identificando las aristas de los cuadrados y los vértices correspondientes. Puede utilizar sistemas de referencia que le permitan ubicarse en el espacio en relación con el cubo, localizando la cara superior como el cuadrado de partida en el desarrollo plano y orientar el camino según las trayectorias se desvíen hacia la izquierda o la derecha. En cuanto a la conservación de la percepción, es capaz de razonar en las caras no visibles en la representación tridimensional, siendo consciente de que propiedades como el paralelismo o la perpendicularidad se mantienen al realizar movimientos en el cubo. Reconoce relaciones espaciales entre los segmentos del camino, así como las longitudes de los mismos y los ángulos que determinan. En las diferentes posibilidades de doblado del desarrollo plano o en los distintos giros del cubo es capaz de discriminar visualmente que los cubos obtenidos son los mismos. En todo este proceso es necesaria la memoria visual para manipular la información mental y trasladarla a la resolución de la tarea.

Actividad 5: Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, analizando las componentes del sentido espacial y las habilidades que se manifiestan:

- a) Un rectángulo con tres de sus lados iguales es un cuadrado
- b) Un paralelogramo con un ángulo recto es un rectángulo
- c) Un paralelogramo con tres de sus lados iguales es un rombo
- d) Un trapecio con dos lados iguales es un paralelogramo

Actividad 6: Construye todas las piezas que pueden obtenerse al unir cuatro cuadrados de manera que dos de ellos coincidan en un lado (tetraminós). Identifica cuáles pueden obtenerse unos a partir de otros mediante movimientos en el plano. Analiza las componentes del sentido espacial y las habilidades de visualización puestas en juego.

### **La importancia de las imágenes**

Para facilitar la conexión entre las componentes del sentido espacial, el proceso de enseñanza de la geometría debe proporcionar a los alumnos una comprensión de los conceptos, que no se limite a memorizar su definición. En la propuesta didáctica que se hace en esta serie de libros, una figura geométrica puede ser descrita mediante sus características, pero no puede reducirse a ellas. En los elementos geométricos, la representación visual tiene una importancia mayor que en otros conceptos matemáticos.

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

El razonamiento geométrico utiliza las imágenes de los conceptos, que reflejan propiedades espaciales como la forma, la posición y el tamaño, pero también las cualidades ligadas a su definición. Los conceptos geométricos se componen, pues, de imagen y definición.

Al contemplar diversos objetos de forma cuadrada, como el enlosado de una habitación, una reja, etc., creamos representaciones del cuadrado. También se generan imágenes del cuadrado al leer o escuchar una descripción de sus propiedades espaciales. Por tanto, en la creación de imágenes confluyen tanto la información percibida a través de los sentidos como la que se obtiene a través de la definición. La imagen visual del cuadrado al ver el enlosado, puede completarse con otras percepciones como las percibidas al tocar un cubo y apreciar la igualdad de los ángulos de cada cara. El sujeto puede completar con la imagen espacial que se había creado a través de la definición de cuadrado (*polígono regular con sus cuatro lados y ángulos iguales*) o el estudio de algunas de sus propiedades (lados paralelos dos a dos, diagonales iguales, perpendiculares y se cortan en punto medio, simétrico respecto a las diagonales y las mediatrices de sus lados, etc.).

Al construir un cuadrado con cuatro piezas de un mecano se relaciona la imagen del cuadrado con la figura construida (figura 6.12). Ajustando los lados se logra que los ángulos “parezcan” rectos. Pero el cuadrilátero de mecano se deforma, dando lugar a figuras que no son cuadradas, por lo que hay que recurrir a propiedades formales del cuadrado para evitar la deformación. Por ejemplo, podemos obligar a que las dos diagonales sean iguales, colocando cuerdas entre los vértices. Coordinar definiciones con las cualidades de las imágenes colabora a desarrollar el sentido espacial.



Figura 6.12: Imagen de un cuadrado construido en mecano

También al construir un cuadrado con Geogebra se parte de la imagen inicial, empleando la instrucción de construir un polígono de cuatro lados y cuidando, con el cursor, que los cuatro lados sean iguales y que los ángulos parezcan rectos (figura 6.13A). Cuando observamos que la figura se deforma al desplazar el cursor, se ve la necesidad de emplear alguna característica que obligue al polígono construido a ser un

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

cuadrado, como utilizar la instrucción de ser un polígono regular (fig. 6.13B); o partir de segmentos perpendiculares de igual longitud, y trazarles paralelas (fig. 6.13C).

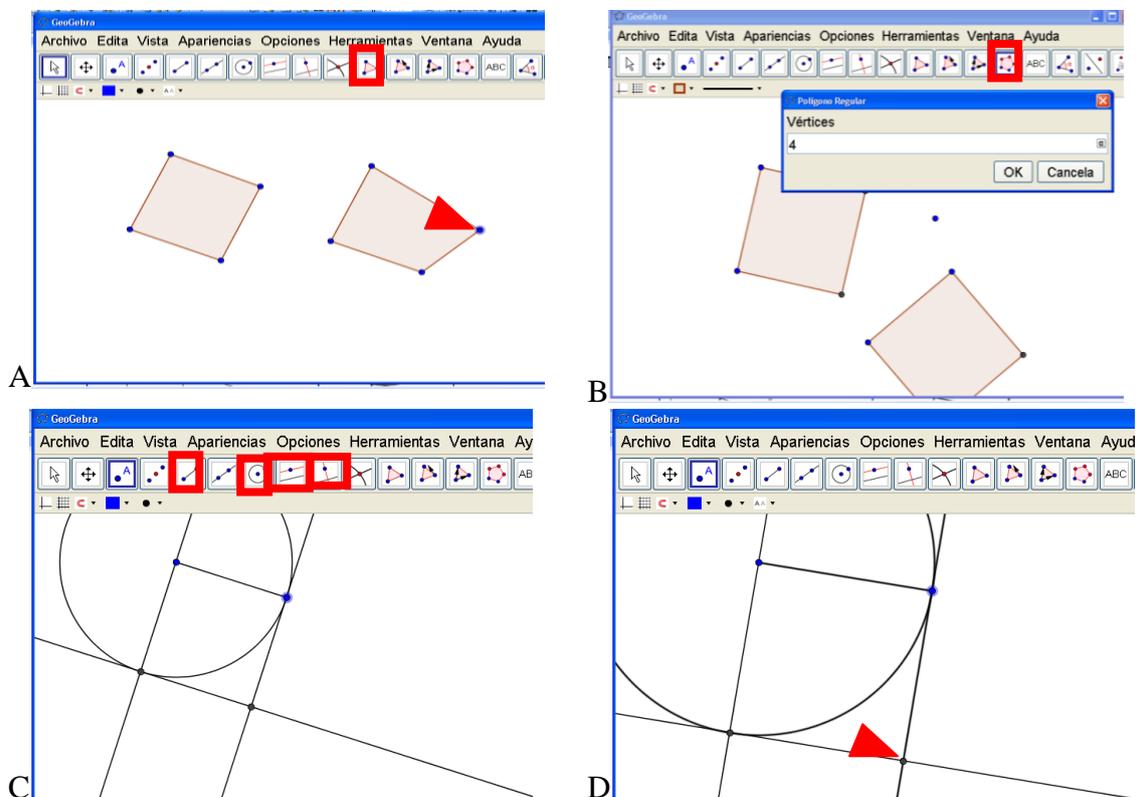


Figura 6.13. Cuadrado con Geogebra

Además de proporcionar conocimientos geométricos, imágenes, representaciones y destrezas para desarrollar y utilizar las habilidades de visualización, hay una dimensión añadida a las dos componentes del sentido espacial es la predisposición a utilizarlo. El desarrollo del sentido espacial debe ir acompañado de un proceso de enseñanza que motive su uso y favorezca el interés del alumno para ponerlo en juego al resolver problemas.

En el juego del espejo se ha mostrado la disposición del resolutor a utilizar su sentido espacial para resolver un reto, obtener la figura en el espejo. El sentido espacial le permitirá resolver problemas como forrar adecuadamente un libro, localizar el mejor lugar para colocar una lámpara en una habitación, montar una estantería, etc.

Actividad 8: Identificar situaciones que necesitan sentido espacial, como al colgar un cuadro en la pared con dos clavos, para que el cuadro esté paralelo al techo.

## 2. El sentido espacial en el currículo de matemáticas de Primaria

Se puede apreciar que al considerar que la enseñanza de la geometría pretende desarrollar el sentido espacial de los alumnos, se está dando prioridad a resolver problemas del entorno, especialmente situarse en el espacio, por lo que el contenido

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

geométrico es un medio para afrontar los problemas espaciales, más que un fin en sí mismo. Pero además realiza el crear imágenes mentales y hacerlas versátiles, relacionando estas imágenes con las características y propiedades de las formas geométricas a las que corresponden estas imágenes. La geometría pasa a ser así un medio, más que un fin, en el que sus conceptos interesan para resolver problemas y para crear hábitos utilizables en situaciones más amplias.

Ello lleva a examinar qué cualidades geométricas interesan estudiar, no dando tanta importancia al aprendizaje de clasificaciones ya dadas, sino a emplear los elementos geométricos para llevar a cabo clasificaciones diversas. Pero también a fijarse en qué características son más interesantes para resolver los problemas de la realidad, al estudiarlas en tareas con una intención determinada, tal como se ha expuesto en el apartado anterior.

Actividad 1: Busca una descripción más precisa de los enfoques del currículo (por ejemplo, en el capítulo 1 del libro <i>Matemáticas para maestros de Educación primaria</i> , de Segovia y Rico, 2011), y relaciónalos con estas tres tareas.
--

Los currículos actuales de enseñanza de la geometría provienen de un debate que tuvo lugar hace ya casi 20 años, en la Comisión Internacional para la Educación Matemática (ICME, 1995), del que derivó un documento en el que se estudió la geometría para el siglo XXI. Sus directrices se ven reflejadas en los currículos innovadores, como el elaborado para los Estados Unidos, por el NCTM (asociación nacional de profesores de matemáticas). Fue esta asociación, que reúne a profesores e investigadores, la que comenzó a emplear el término “sentido espacial” en diversas publicaciones, entendiéndolo como una sensación intuitiva del entorno y de los objetos que hay en él. Más adelante estableció que la enseñanza de la geometría tiene que desarrollar cuatro capacidades. Dos de ellas (analizar figuras y formas geométricas; aplicar transformaciones) están relacionadas con el aprendizaje de conceptos de geometría, mientras que las dos restantes (ubicar y orientar; visualizar) promueven destrezas para relacionarse con el medio.

El currículo español actual indica que un objetivo de la enseñanza de la matemática es lograr que los alumnos se orienten en el espacio, y que utilicen formas geométricas para describir la realidad. Además, los contenidos de geometría se organizan en tres apartados: situación en espacio (que corresponde a la orientación, según las componentes del sentido espacial), formas planas y espaciales y regularidades y movimientos (relacionados directamente con los conceptos geométricos y movimientos, componentes del sentido espacial).

En los currículos actuales apreciamos que se enfatiza la necesidad de que el aprendizaje geométrico se realice por medio de la resolución de problemas, tanto como una intención final de su aprendizaje (concepción funcional del currículo), como empleando los problemas como recursos metodológicos para su enseñanza y aprendizaje.

También se observa un reconocimiento explícito de la doble naturaleza de los conceptos geométricos, destacando la importancia de que los alumnos desarrollen las habilidades

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

visualizadoras empleando las formas geométricas como intermediarios, pero a su vez, percibiendo la importancia de que las formas se construyan atendiendo a esa doble naturaleza. A tal fin se cita explícitamente la visualización como una finalidad del aprendizaje matemático.

En los currículos se sugieren gran cantidad y variedad de acciones para lograr el aprendizaje geométrico, incluyendo la identificación de formas y cuerpos en el entorno, el dibujo y la construcción, su clasificación libre, la caracterización y la medida. Especialmente importante es el papel que se aprecia en la geometría para desarrollar capacidades comunicativas y de argumentación.

Actividad 2: Identifica apartados del currículo de matemáticas de primaria español de geometría, que aluden a alguna de las componentes del sentido espacial.

En resumen, los currículos de geometría actuales tienen una orientación funcional, centrada en desarrollar el sentido espacial de los alumnos. Estas intenciones se aprecian especialmente cuando se detalla la contribución de la enseñanza de la geometría al desarrollo de las competencias básicas. Por una parte se realiza la relación con la competencia centrada en el conocimiento y relación con el mundo físico, al hacer posible una mejor comprensión y descripción más ajustada del entorno, mediante la manipulación mental de figuras y formas, muy importante para el empleo de mapas, diseño de planos, dibujo, etc.. También destacan su contribución con la competencia en expresión cultural y artística, facilitando el análisis de determinadas producciones artísticas, mediante el reconocimiento de las relaciones y formas geométricas.

### **3. Enseñanza para desarrollar sentido espacial en Primaria**

Una vez conocidas las diferentes componentes del sentido espacial desarrolladas en el apartado anterior, en esta sección establecemos unas pautas generales para que el proceso de enseñanza favorezca el desarrollo del sentido espacial.

A continuación vamos a señalar una serie de pautas generales que permitan al maestro adaptarlas tanto al contenido geométrico que quiera enseñar, como a las necesidades del alumnado y del aula.

Sugerimos arrancar desde el juego libre, preferentemente con material manipulativo y en situaciones que afecten a lo más concreto, con lo que sería deseable que afectara a actividades motrices. Progresivamente iremos avanzando en tres direcciones que hacen más abstractas las tareas:

- a) Del juego libre al juego simbólico y el razonamiento, pasando por el juego con reglas, incluyendo la resolución de retos.
- b) Del uso del material manipulativo al razonamiento verbal, pasando por manipular, identificar, recortar, construir y dibujar y representar figuras y formas.
- c) Del juego motriz al razonamiento abstracto, usando representaciones cada vez más simbólicas, detectando y formulando relaciones y definiciones.

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

Esto nos permite enunciar algunas recomendaciones que se basan en cada uno de estos ejes, o en la combinación de varios, como las siguientes.

- Comenzar creando imágenes visuales, mediante *juego libre de creación* y *juego para resolver retos*. El juego de creación favorece que el niño perciba diversas imágenes de un mismo objeto, genere nuevas imágenes, coordine entre sí las partes de los objetos y perciba cómo se coordinan las partes que forman los cuerpos geométricos. El proceso gradual comienza con la creación para llegar a utilizarlas estrategias aprendidas para resolver retos. La *creación* puede abarcar *juegos de construcción*, (para apreciar qué figuras pueden sustentar a otras, cómo hacer “castillos” simétricos), *mosaicos libres* (figura 6.11 A, para apreciar qué figuras se complementan, qué efectos estéticos generan), o *recortado y pegado de papel* (para inventar formas, formar figuras más complejas), etc. La *resolución de retos* lleva a construir a partir de *modelos dados* (figura 6.11B), *completar siluetas con el Tangram*, o *mosaicos con puzzles*, o *cortar y pegar figuras recortables*, llegando a *crear figuras geométricas*, mediante materiales específicos (mecano, geoplano, regla y compás), tanto en proceso de creación como para copiar modelo.

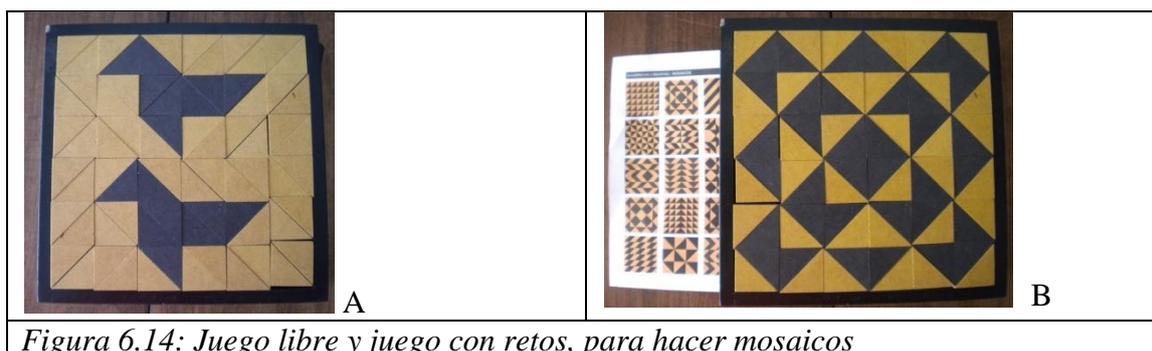


Figura 6.14: Juego libre y juego con retos, para hacer mosaicos

- Ir incorporando progresivamente nombres de las figuras y los cuerpos, buscando identificar imágenes y categorías del mismo cuerpo, siempre desde las figuras más simples (cuadrados, rectángulo), a las más generales (cuadrilátero, triángulo, polígono). Dar *funcionalidad* a esta nominación a través del *relato*, las descripciones, *dar instrucciones* a otro para construir o identificarlas; *juegos de definición* de conceptos sin utilizar palabras “*tabú*” (definir cuadrado sin utilizar las palabras *lado*, *cuatro*, *ángulo*, *iguales*), etc. En estas tareas se van creando imágenes espaciales y se relacionan con las visuales, generando imágenes mentales.

- Promover la *representación* de figuras por medio de tareas de *creación artística*, reflejando imágenes tridimensionales o planas, para coordinar la imagen con la representación plana, captando diferencias entre ellas. Estimular el *dibujo*, incorporando estrategias para ganar precisión y habilidad. Juegos tipo “*pictionary*”, contrasta la imagen que el niño representa con la que interpreta su compañero. *Describir verbalmente representaciones y dibujos*, obliga a identificar relaciones geométricas y emplearlas en el mensaje.

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

- La percepción de la *regularidad* por medio de espejos (comenzando con espejos en los que el niño se vea completo), y su representación por medio del *dibujo* (libre al principio), lleva a percibir situaciones de simetría. Retos como el “*juego del espejo*” descrito en este capítulo, contribuyen a desarrollar destrezas para familiarizarse con la simetría. Averiguar *dónde situar el espejo* para obtener imágenes, plantea retos divertidos a la vez que estimulantes para crear imágenes de regularidad basada en la simetría axial. Materiales manipulativos (modelos en cartón de polígonos, y luego geoplano, mecano, etc.), permiten estudiar regularidades de polígonos, mediante plegado, pudiendo comprobar con ayuda del espejo.

- Pasar de identificar regularidades de una figura a obtener la resultante de aplicarle un movimiento, iniciándose mediante juegos como el “*Mira*” o *el papel doblado* y su comprobación con el *espejo*. Al verbalizar y representar mediante dibujos se puede ganar formalización de los movimientos.

- Iniciar en los *mosaicos* mediante el juego libre, posteriormente *buscar baldosas* que permitan *enlosar* un suelo, identificar *teselas* en casos sencillos y buscar *propiedades* necesarias en las figuras que forman mosaicos.

- Se comienza la *orientación* a partir de *juegos psicomotrices*, como situar a los alumnos en *corro* para *pasar la pelota* a los compañeros señalando su posición (dos a la izquierda, tres a la derecha, etc.), hacen que perciban su posición en el espacio y la posición relativa respecto a los demás. Se complica dando órdenes sobre a qué compañero pasar la pelota, mediante mensajes verbales (aludiendo a posición, a horas del reloj, etc.). Posteriormente, utilizar figuras en juegos de orientación en el aula, como la *busca del tesoro*, que requiere interpretar planos sencillos, o de *juegos con planos*, para obtener el camino más corto para salir del *laberinto*, hasta elaborar sus propios planos. Juegos para *identificar la posición* de un objeto, *repetir un itinerario* dado de forma simbólica (verbal, direcciones por flechas). La *identificación de los puntos cardinales* en relación al colegio, a la clase y a la ciudad y sus grandes arterias urbanas, suministran un mayor conjunto de experiencias para desarrollar habilidades de orientación. Incluir experiencias de *expresar una dirección verbalmente*, obliga a emplear elementos geométricos (línea a seguir, ángulos de las trayectorias, o formas de las figuras que sirven de “hitos”).

En general, el proceso propuesto arranca del juego libre y luego planteando retos, con objeto de crear imágenes de los elementos geométricos. Posteriormente se promueve la identificación de elementos, su caracterización, representación mediante diversos elementos, desde los concretos (mecano, pajitas, etc.), icónicos (geoplano, dibujo a mano alzada, dibujo con regla y compás, geogebra con dibujo libre), hasta su simbolización parcial (geogebra con las instrucciones adecuadas, caracterización verbal, etc.). Buscar situaciones en las que la geometría sea funcional. Se puede enfocar la creación a la elaboración de un *mural* para algún acontecimiento, hacer una *exposición* sobre las actividades realizadas. Los juegos de reto encierran en sí su intención, que se puede reforzar si se afronta su estudio para *seleccionar juegos para unas jornadas matemáticas*, encontrar un tesoro, compartir con compañeros una descripción de las instalaciones del colegio, de su ubicación en la ciudad, por ejemplo. Estas situaciones

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

Preprint

favorecen el empleo de elementos geométricos, lo que obliga a fijar sus características, apreciar las relaciones espaciales en lo que se quiere representar o transmitir, y emplearlos de manera verbal, para poder compartirlos. A partir de estas funcionalidades se puede llegar a razonar sobre los elementos geométricos elementales formales, buscando consecuencias de sus definiciones, sus propiedades y formas de caracterizarlas. El esquema de la figura 6.12 resume las apreciaciones anteriores.

Actividad 3: Haz una lista de juegos que emplean elementos geométricos, identifica qué aspectos del sentido espacial se utilizan y con ello haz una base de datos de juegos que desarrollan el sentido espacial.

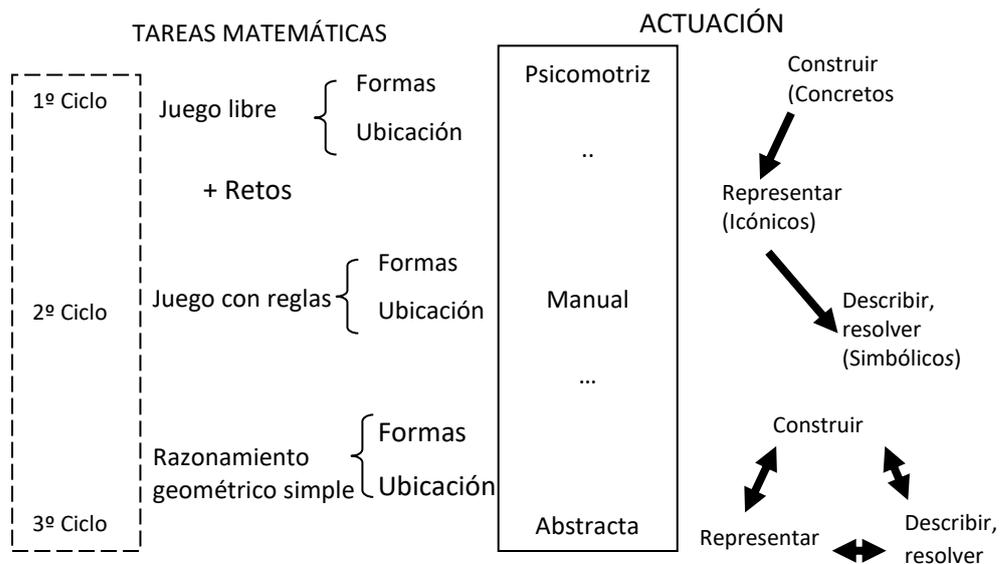


Figura 6.15: Esquema de tareas para desarrollar el sentido espacial