Ramírez, R. y Moreno, A. (2016)
Complejidad y estructura de las tareas escolares
En L. Rico y A. Moreno (Coords.), Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria (pp. 259-274). Madrid: Editorial Pi
Preprint

Capítulo 14. Complejidad y estructura de las tareas matemáticas escolares

Rafael Ramírez Uclés y Antonio Moreno Verdejo

"*El libro de matemáticas se suicidó porque tenía muchos problemas*". En el lenguaje coloquial, la palabra problema va asociada a una situación conflictiva acompañada incluso de matices negativos. Sin embargo, para un estudiante de matemáticas, enfrentarse a un problema debe ser un reto atractivo del que salir victorioso al encontrar su propia solución. De hecho, una de las características de los alumnos con talento matemático es ese interés por resolver retos y encontrar respuesta a los enigmas. Para otros alumnos, enfrentarse a un problema genera un estado de frustración ante la imposibilidad de hallar respuestas. En la primera parte de este capítulo analizaremos algunos aspectos a tener en cuenta para que la estructura de la tarea y su complejidad puedan adaptarse al nivel de competencia matemática deseado y satisfacer las expectativas de enseñanza del profesor en la profundización de los contenidos del tema.

Según el marco conceptual del estudio PISA, la modelización se reconoce como una competencia básica y se considera clave para establecer los descriptores de los niveles de rendimiento más altos. Los alumnos cuyo rendimiento corresponde al nivel empírico superior establecido por el estudio PISA, el sexto, son aquellos que cumplen los siguientes criterios: en sus respuestas formulan conceptos, los generalizan y utilizan información basada en investigaciones y *modelos de situaciones* de problemas complejos. Los estudiantes de este nivel pueden relacionar diferentes fuentes de información y *representaciones y* las *traducen de una manera flexible*. Estos alumnos pueden aplicar su razonamiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales, para desarrollar nuevos enfoques y estrategias con los que abordar situaciones desconocidas. Los alumnos que alcanzan este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones así como las reflexiones relativas a sus descubrimientos, expresan sus argumentos y su adecuación a las situaciones originales. Se dice, por ello, que disponen de un conocimiento significativo y un razonamiento matemático avanzado, que se identifica por un *alto dominio de los componentes del significado de los contenidos matemáticos escolares*.

En la segunda parte de este capítulo se analizan las tareas de modelización como fundamentales para que el alumno comprenda el papel funcional que las matemáticas aportan cuando se emplean para comprender el mundo. Inicialmente, los problemas genuinos que provienen de la vida real no parecen estar formulados en lenguaje matemático. Sin embargo, la posibilidad de traducirlos al lenguaje de las matemáticas ofrece la posibilidad de encontrar modelos que ayuden en su resolución. Modelizar es una competencia básica para traducir la realidad a la estructura matemática y, en el camino de vuelta, para interpretar los modelos matemáticos en términos reales.

Ciertamente ¿ayudan las matemáticas a comprender mejor el mundo real? Reunimos algunos fragmentos de una noticia publicada en un diario local, que servirá para ejemplificar algunos aspectos que se abordan en este capítulo.

> *El equipo de Gobierno ha invertido ya más de un millón de euros en camiones y otros vehículos de limpieza, papeleras y diverso mobiliario urbano para mejorar el servicio de limpieza de la ciudad, cumpliendo así el compromiso adquirido con los sanluqueños (...)*
> *La mayoría de los camiones con los que se lleva a cabo tienen más de 15 años, y retiran aproximadamente más de 2.000.000 Kg/mes de residuos, lo que supone que*

a causa de la antigüedad de los vehículos se produjesen numerosas averías y el servicio que se prestase no fuese el deseado. (...)
Además, la Delegación de Infraestructuras ha adquirido papeleras y mobiliario por importe de 335.372 €, que se desglosan de la siguiente forma:
- Papeleras por importe de 52.000 €, que ya han sido colocadas en diversos puntos de la ciudad
.- Contenedores por importe de 90.000 €
- Papeleras de fundición para el centro de la ciudad por importe de 3.000 €, que ya han sido colocadas.
- Mobiliario urbano moderno por importe de 75.000 €, subvencionados en un 90 % por la Consejería de Presidencia, y que incluyen 200 papeleras, 20 papeleras para perros, 15 bancos y 10 gusibancos (...)
- Se van a adquirir contenedores por importe total de 135.372 € (100 contenedores de carga lateral de 3.200 litros con un importe de 104.400 €, y 150 nuevos contenedores de carga trasera de 800 litros, por importe de 30.972 €, para este año 2010).

A partir de esta lectura con los estudiantes se les pueden proponer tareas de diferente estructura y grados de complejidad. Desde cuestiones relacionadas con la interpretación de los datos hasta investigaciones más complejas basadas en problemas de modelización. Para ello, es preciso caracterizar aspectos relacionados con la complejidad y la estructura de la tarea, la matematización y la modelización.

1.- Complejidad de las tareas matemáticas escolares

En el capítulo anterior hablamos de cómo la demanda cognitiva que se exige al estudiante al resolver una tarea contribuye a su complejidad. Pero la complejidad de una tarea también está condicionada por la manera en que se presenta y formula, así como por las capacidades que se requieren y activan al realizarla. El análisis previo de estos factores ayuda a modificar y variar la tarea, para su ajuste a las necesidades del alumnado a quienes se dirige.

1.1 Complejidad según criterios teóricos

Como vimos en el capítulo anterior, la distinción entre tareas de reproducción, conexión y reflexión es un primer indicador de su complejidad teórica. En la tabla siguiente se muestran otros indicadores que describen esos grados de complejidad para cada una de las competencias básicas que establece el marco PISA de 2003 descritas en el capítulo 9.

Indicadores de complejidad teóricos para las competencias básicas		
Reproducción	**Conexión**	**Reflexión**
	Pensar y razonar (PR)	
Formular preguntas simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y entender los consiguientes tipos de respuesta («tantos», «tanto»); distinguir entre definiciones y afirmaciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en que se introdujeron o en que se han practicado posteriormente.	Formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento damos...?) y comprender los tipos de respuesta (mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.); distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre sus distintos tipos; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren de	Formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento damos...?, ¿cuáles aspectos son esenciales del problema...? y comprender los tipos de respuesta (mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, puntos clave); distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones sobre casos

	aquellos en que se introdujeron o en que se han practicado después.	especiales y reflexionar sobre esas distinciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos; comprender la amplitud y límites de conceptos matemáticos y generalizar resultados.
	Argumentar y justificar (AJ)	
Seguir y justificar procesos cuantitativos estándar: procesos de cálculo, enunciados y resultados	Razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener sentido de la heurística (p. ej., ¿qué puede o no puede pasar y por qué?, ¿qué sabemos y qué queremos obtener?).	Razonar de manera sencilla, distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; evaluar y elaborar encadenamientos de argumentos de diferentes tipos; emplear la heurística (¿qué puede o no puede pasar y por qué?, ¿qué sabemos y qué queremos obtener?, ¿cuáles propiedades son esenciales?, ¿cómo se relacionan diferentes objetos?)
	Modelar (M)	
Reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo.	Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos no demasiado complejos pero diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también interpretar alternando los modelos y la realidad), y sabiendo también comunicar los resultados del modelo.	Estructurar la situación la que hay que modelar, traducir la realidad a estructuras matemáticas en contextos complejos, pasar de los modelos a la «realidad», incluyendo comunicar resultados: recopilar información y datos, supervisar el proceso de construcción y validar el modelo resultante. Lleva a reflexionar analizar, realizar críticas y una comunicación más compleja.
	Resolver problemas (RP)	
Exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada;	Plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los ya practicados de forma cerrada; resolverlos por uso de procedimientos y aplicaciones estándar pero también otros más independientes que establezcan conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).	Exponer y formular problemas más allá de la reproducción de los ya practicados de forma cerrada; resolverlos mediante utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos que impliquen establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas, formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones). También lleva reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.
	Representar (R)	
Descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la	Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y	Descodificar, codificar e interpretar formas de representación de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de objetos y situaciones matemáticos, traducir y diferenciar entre ellas.

representación.	diferenciar entre diferentes formas de representación.	También combinar representaciones de manera creativa e inventar nuevas.
Uso del lenguaje simbólico y de las operaciones (LS)		
Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios.	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares.	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico ya practicado en situaciones y contextos desconocidos y manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones, y realizar cálculos. También conlleva la habilidad para tratar con expresiones y afirmaciones complejas y con lenguaje simbólico o formal inusual, y realizar traducciones entre este lenguaje y el natural

Tabla 1: Niveles teóricos de complejidad para las competencias básicas de PISA

Los indicadores que se muestran en la tabla 1 corresponden a distintos componentes de significado por cada competencia y con distinto nivel de profundidad; las capacidades no varían significativamente, pero sí lo hace el alcance y amplitud con que se lleva a cabo y se muestra.

Tarea 1. Elige una de las capacidades descrita en la tabla 1. Ejemplifica la actividad de un escolar con el contenido *Límite finito de una función en un punto,* para los tres niveles de complejidad descritos en relación con la competencia elegida

Podemos utilizar esta tabla 1 para diseñar tareas que incentiven y evalúen una o varias competencias específicas, según distintos niveles. Por ejemplo, el profesor propone tareas relativas a la competencia de comunicar y argumentar, cuando pide por escrito a sus alumnos que respondan a las siguientes cuestiones, que se han diseñado considerando los indicadores de la tabla anterior.

1.-Explica la diferencia entre cuadrado y rombo

2.-Describe a un compañero, en una conversación telefónica, el procedimiento que muestra la figura para hallar el área de un rombo en relación al área del rectángulo formado por sus diagonales.

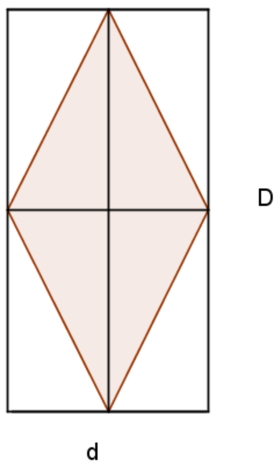

Figura 1: Rombo inscrito en un rectángulo

3.-Explica los argumentos utilizados en esta conversación:

- *He inventado una nueva fórmula para calcular el área del cuadrado. Un cuadrado es un rombo con todos sus ángulos iguales. Por lo tanto, se puede aplicar la fórmula del área del rombo como la mitad del producto de sus diagonales. Como en el cuadrado las dos diagonales son iguales, obtenemos que el área de un cuadrado es la mitad del cuadrado de su diagonal.*
- *Claro. No es nada nuevo. Estás diciendo que el área del cuadrado es la mitad del área del cuadrado que tiene por lado su diagonal. Y yo eso lo veo claramente con un dibujo…*

Tarea 2. Utiliza la tabla anterior y diseña tres tareas distintas según los tres grados de dificultad para una o varias competencias, sobre un contenido de geometría de secundaria.

1.2 Complejidad según criterios empíricos

Los resultados del estudio PISA permiten ampliar con datos empíricos la consideración teórica inicial sobre complejidad de las tareas. La dificultad que han manifestado los estudiantes para cada una de las competencias básicas consideradas, ha permitido caracterizar nuevos indicadores, que delimitan y definen niveles de complejidad más precisos los cuales, al mismo tiempo, se caracterizan de manera más directa, como se resume en la siguiente tabla 2.

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
Pensar y razonar (PR)					
Responder a cuestiones en contextos muy conocidos		Responder a cuestiones en contextos poco familiares		Responder a cuestiones complejas en multitud de contextos	Formar y relacionar conceptos
Argumentar y justificar (AJ)					
			Elaborar argumentos basados en sus acciones	Formular los razonamientos desarrollados	Elaborar argumentos desde su reflexión
Comunicar (C)					
	Describir resultados obtenidos	Realizar explicaciones sencillas		Comunicar conclusiones con precisión	
Modelizar (M)					
				Usar modelos explícitos en situaciones concretas	Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones
Resolver problemas (RP)					
Resolver problemas con datos sencillos		Seleccionar y aplicar estrategias sencillas		Seleccionar, comparar y evaluar estrategias	Generalizar resultados de problemas
Representar (R)					
Leer datos	Usar un único	Conocer y usar	Vincular		Relacionar

directamente de tablas o figuras	tipo de representación	diferentes sistemas de representación	diferentes sistemas de representación, incluyendo el simbólico		y traducir con fluidez diferentes SR
Uso del lenguaje simbólico y de las operaciones (LS)					
Realizar operaciones básicas	Usar algoritmos y fórmulas elementales	Aplicar procedimientos descritos con claridad	Representar situaciones reales mediante símbolos		Dominar con rigor el lenguaje simbólico

Tabla 2: Niveles empíricos de complejidad para las competencias básicas de PISA

Por ejemplo, se observa en la tabla 2 que para la competencia de comunicar, utilizada en el tercer ejemplo anterior, la dificultad mostrada por los alumnos aumenta conforme se solicita que comuniquen sus conclusiones con mayor precisión y den explicaciones sobre relaciones más complejas. Tiene interés que el profesor utilice los indicadores que describen la complejidad en un nivel y no se centre en la simple acumulación de tareas por competencia.

Tarea 3. Redacta ejemplos de tareas que correspondan a los indicadores del nivel de dificultad para una o varias competencias según indica la tabla 2.

1.3 Complejidad según formato de presentación

Otro factor práctico que influye en la complejidad de la tarea, es su presentación o formulación, ya que el profesor puede modificar uno o varios de sus términos para que su redacción se adapte a diferentes niveles:

- La forma de redacción de la tarea: tipo de oraciones, vocabulario empleado, tiempos verbales para indicar la actividad demandada.
- El formato de las preguntas: de elección múltiple, de respuesta cerrada, de respuesta abierta.
- El encuadre de la tarea en situaciones más o menos motivadoras y auténticas
- Las representaciones que se utilizan como apoyo, representaciones que requieren decodificar la información para extraerla.

Por ejemplo, pedir a los alumnos que midan "*la altura de un triángulo rectángulo apoyado en uno de sus catetos conocido uno de sus ángulos agudos*" puede resultar menos motivador y comprensible que calcular la "*altura del árbol más alto del patio utilizando un metro y un teodolito casero*", aunque los datos sean conocidos y no influya el proceso de medida. El hecho de completar el enunciado con un dibujo concreto en que aparece la incógnita y los datos, puede ser un elemento que disminuya la dificultad. De igual modo, el enunciado "*halla x en el siguiente dibujo*" no entraña la misma dificultad que "*calcula la altura del siguiente triángulo*" que requiere conocer el concepto de altura.

Tarea 4. Identifica distintas tareas de un mismo libro de texto que se diferencien según las consideraciones anteriores. Propón su modificación utilizando los criterios indicados para aumentar o disminuir la complejidad.

En el análisis de contenido del capítulo 4, se han establecido unos criterios relacionados con la complejidad. La distinción entre hechos y conceptos, entre destrezas y razonamientos o entre distintos sistemas de representación, aportan al profesor orientaciones para analizar la complejidad de una tarea. La consideración de las limitaciones en el análisis cognitivo también aporta criterios para diseñar tareas que se correspondan con la dificultad prevista. Por tanto, los distintos tipos de análisis didáctico previos proporcionan diferentes criterios para establecer la complejidad de una tarea, según las capacidades que se activan en su resolución. Así:

- El tipo y grado de interpretación y reflexión requeridos para comprender la tarea
- El contexto a que responde y la situación en que se presenta. A diferencia de las situaciones, como se indicó en el capítulo 7, los contextos subrayan los conceptos y estructuras que atienden a distintas necesidades y cumplen determinadas funciones cognitivas.
- Los tipos de contenidos necesarios para interpretar el problema.
- La complejidad del razonamiento requerido para detectar un planteamiento o una "idea feliz".
- El tipo y nivel de destrezas matemáticas requeridas en la solución: problemas de uno o varios pasos; procedimientos simples/estrategias complejas; fases de la modelización.

Por ejemplo, los "problemas de ingenio, adivinanzas, enigmas, de lógica" suelen ser atractivos para los alumnos a pesar de su dificultad y del desconocimiento de la explicación. Permiten diferentes grados de complejidad al analizar los contenidos matemáticos a los que se refieren y las destrezas requeridas en su solución para ir más allá de la anécdota presentada (Figura 2)

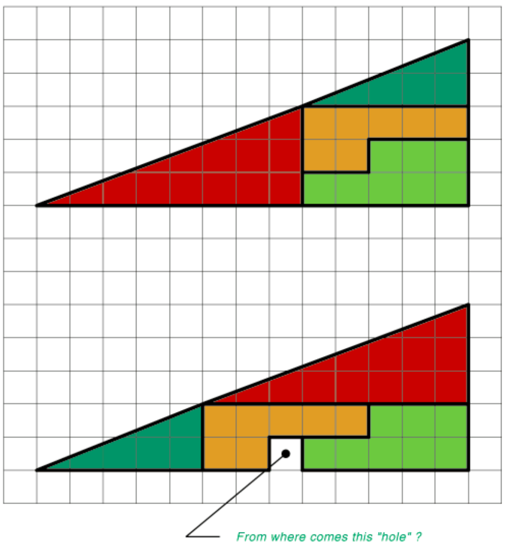

Figura 2: Paradoja del triángulo de Curry.

La explicación de la paradoja puede presentarse secuenciando tareas de dificultad creciente. El alumno debe percibir la situación problemática planteada. Inicialmente puede proponerse un debate sobre esta afirmación: "dos figuras construidas con las mismas piezas no tienen igual área". Si es verdadera, el truco mostrado sería un contraejemplo. ¿Es falsa o esto no es un contraejemplo?

1.- La construcción de las piezas y la clasificación de los triángulos obtenidos pueden sugerir al alumno una primera idea de la explicación de la paradoja.

2.-En el estudio de las tangentes de los ángulos o las pendientes de las hipotenusas, tanto del triángulo completo como de los pequeños obtenidos en la disección, se perciben datos importantes para la argumentación

3.- Asociar la longitud de los lados de los triángulos con la sucesión de Fibonacci exige una mayor comprensión de las propiedades de esta serie y su relación con las áreas.

4.- Investigar paradojas similares o inventar su propia construcción requiere para el alumno un mayor grado de complejidad.

Tarea 5. Selecciona algún problema de ingenio de un libro de matemática recreativa. Analiza si existe alguna “idea feliz” y los contenidos matemáticos necesarios para su resolución.

En el análisis de instrucción, la selección de las tareas adecuadas es un aspecto fundamental del trabajo del profesor dirigido a la creación de oportunidades efectivas de aprendizaje para los alumnos. Esta riqueza de componentes y elementos que determinan la complejidad, hacen que el papel del profesor sea clave en la selección de tareas teniendo en cuenta las características de cada uno de sus alumnos, sus capacidades e intereses y sus propias experiencias en trabajos anteriores del aula.

Encontrar el grado de complejidad adecuado para cada alumno no es fácil. Por un lado, como dijo Pólya, es necesario proponer problemas a los alumnos para que éstos puedan sentirse retados en sus capacidades matemáticas, y así experimentar el gusto por el descubrimiento. Pero, por otro lado, si las tareas propuestas resultan demasiado difíciles pueden desistir. Para encontrar una posición de equilibrio vamos a analizar la estructura de la tarea, distinguiendo entre ejercicios, problemas, proyectos e investigaciones.

2.- Dimensiones de una tarea. Ejercicios y Problemas

El término problema se ha utilizado en la clase de matemáticas con un sentido muy general, considerándolo incluso sinónimo de otros términos como ejercicio o tarea. Pensemos en el siguiente “problema”:

En mi bolsillo tengo monedas de 50 céntimos, 20 céntimos y 10 céntimos. Si saco tres monedas, ¿cuánto dinero tengo?

Algunos estudiantes encontrarán esta tarea compleja y, al resolverla, no la completarán. Para otros la tarea resulta enormemente sencilla. Lo que para unos estudiantes consiste en un problema otros lo tomarán como un sencillo ejercicio. Vamos a precisar estos términos. Hablamos de *problema* cuando la tarea supone un reto, ya que su método de resolución no se conoce de antemano. Cuando se conoce se trata de un *ejercicio*.

La resolución de un problema siempre comporta un determinado grado de dificultad. El profesor debe ajustar el grado de dificultad de su propuesta a los estudiantes con los que trabaja porque si resulta demasiado difícil, puede hacer que el alumno desista rápidamente. Por el contrario, si se trata de una cuestión que se puede resolver fácilmente, entonces, no será un problema sino un ejercicio y no proporcionará un estímulo.

La estructura de una tarea varía entre las opciones de pregunta abierta o pregunta cerrada. Una tarea cerrada es aquella en la que se expresa con claridad lo que se da y lo que se pide y una tarea abierta es aquella que comporta un grado de indeterminación significativo en lo que se da, lo que se pide, o en ambos términos. La siguiente tarea no incluye todos los datos, por lo que el alumno se ve obligado a pensar los datos que necesita, buscarlos o plantear hipótesis. En ese sentido decimos que la tarea es abierta.
En un día, los coches que circulan por carriles sin pavimentar levantan hasta 81.000 toneladas de polvo. Verifica la siguiente afirmación: Con todo ese polvo habría bastante para cubrir un campo de futbol con una capa de unos 15 metros.

Si cruzamos las dos dimensiones que acabamos de exponer, la dificultad y la estructura, se obtiene el siguiente gráfico con cuatro cuadrantes (Figura 3)

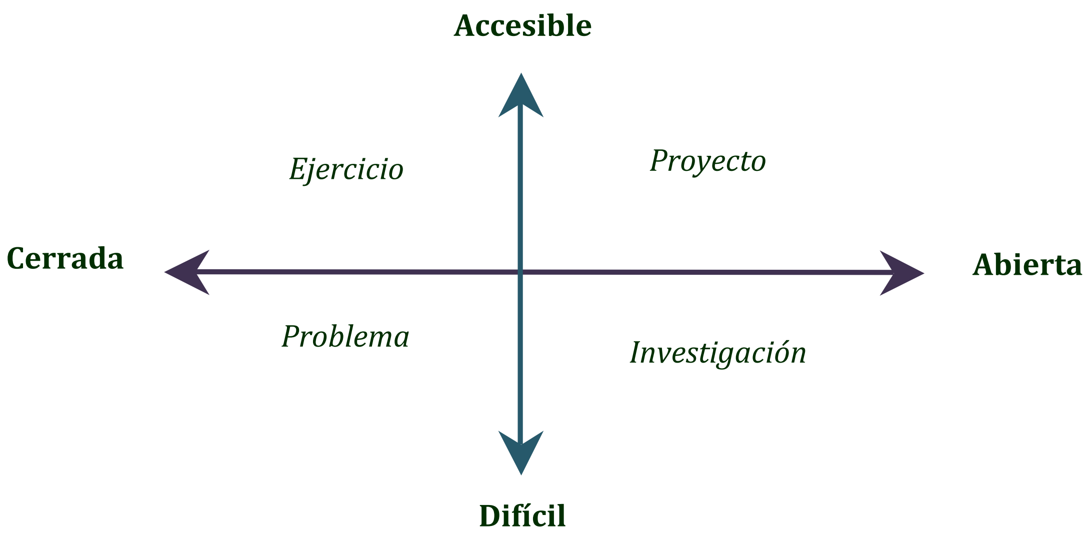

Figura 3: Clasificación de Ponte

El diagrama permite clasificar las tareas en cuatro modalidades:

- Ejercicio, que propone una tarea cerrada y accesible.
- Problema, que es una tarea también cerrada, pero que entraña una dificultad elevada.
- Proyecto, que enuncia una tarea abierta y accesible para el alumno.
- Investigación, tarea que entraña un grado de dificultad elevado pero que es abierta.

El primer cuadrante corresponde a las tareas relativamente abiertas y accesibles al estudiante, que llamaremos tareas de exploración (proyectos). En realidad, no todas las tareas abiertas comportan un grado de dificultad elevado. Así, la diferencia entre las tareas de exploración y de investigación está en su grado de dificultad. La siguiente tarea puede servirnos de ejemplo:
Las sumas 243 + 675 = 918; 318 + 654 = 972 y 154 + 782 = 936 contienen todos los dígitos del 1 al 9. Descubre nuevas sumas con esta propiedad.

Vamos a ejemplificar cada uno de los casos anteriores utilizando como referencia la noticia señalada en la introducción de este capítulo. Utilizaremos el contenido de Programación Lineal para ilustrar como una misma tarea puede enriquecerse desde un ejercicio hasta una investigación.

El profesor, tras la lectura individual de la noticia, propone a los estudiantes estas cuestiones:

1.- (Ejercicio) ¿Pertenece el punto (100,150) a la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones?

$$3200x + 800y \geq 440000$$

$$x + y \geq 250$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

2.- (Problema): Un ayuntamiento se plantea comprar contenedores para la recogida de basura. Hay dos tipos: Los de carga lateral que tienen una capacidad de 3200 litros y que valen 1044€ cada uno. Los de carga trasera, con capacidad para 800 litros y cuyo precio es 206,48€. Para la recogida de la basura se necesitan al menos 250 contenedores. Hay que recoger cada noche 440000 litros de basura. ¿Cuántos compramos de cada uno para que el gasto sea mínimo?

3.- (Proyecto). Relaciona el problema anterior con los datos extraídos de la noticia. ¿Se ajusta al presupuesto? Plantea y resuelve diferentes problemas de programación lineal utilizando los datos que aparecen en la noticia. ¿Cómo afecta en la resolución de estos problemas que cambien los datos iniciales?

4.- (Investigación). A partir de los datos de la noticia, ¿cuál puede ser el criterio para comprar un número concreto de contenedores? ¿Qué variables consideras que hay que tener en cuenta para la compra de un nuevo camión de basura en un ayuntamiento? Realiza un informe en el que analices si los protagonistas de la noticia han hecho una buena compra.

Para abordar esta última tarea, el alumno debe organizar mucha información y puede que maneje demasiadas variables que pueden estar relacionadas. Además, tendrá que tomar decisiones para abordar el tratamiento matemático del problema real: ¿Qué variables son las principales y cuáles podemos descartar? ¿Cuándo podemos sustituir un valor exacto por un aproximado? ¿Cuál es realmente nuestra función objetivo?

Tarea 6. Ubica de manera justificada las cuatro cuestiones anteriores en los cuadrantes de la Figura 3. Plantea ejercicios, problemas, proyectos e investigaciones relativos a un mismo contenido matemático, distinto del ejemplificado.

A continuación vamos a profundizar en las tareas de modelización que, además de presentar contextos funcionales, admiten distintos niveles de complejidad y permiten diseñar tareas que van desde las investigaciones hasta los ejercicios.

3.- Modelización

Tras la lectura de la noticia que introduce este capítulo, el profesor plantea a sus alumnos el reto de gestionar la recogida de residuos de una ciudad:

En una primera lluvia de ideas, surgen muchas preguntas: ¿Cuántos camiones y cuántos empleados necesito? ¿Cuántos contenedores hay que recoger cada día? ¿A qué distancia está el vertedero? ¿Se recogen todos los días la misma basura?

El profesor organiza las respuestas de los alumnos y profundiza en detalle en cada una de las cuestiones, planteando a los alumnos determinar qué relaciones existen entre ellas y qué datos podemos utilizar para encontrar las respuestas:

Por ejemplo, una manera aproximada de contestar a la pregunta de cuánta basura tengo que recoger es contabilizar el número de contenedores de basura que hay, relacionada con la pregunta de cuántos camiones necesito.

Vuelven a surgir nuevas preguntas. ¿Cuántos contenedores caben en un camión? ¿Cuántas veces puede ir y volver un camión al vertedero en el periodo de recogida?

¿Cuántos empleados necesitamos? ¿Es posible optimizar el proceso de colocación de los contenedores? ¿Fijamos un punto intermedio de recogida?

El profesor redirige el debate para ubicarlo en la unidad didáctica de programación en la que está trabajando, planteándoles que tengan en cuenta lo más importante de un problema de optimización ¿qué criterio es el que quiero optimizar? ¿El tiempo de recogida, el gasto de compra, la distancia entre contenedores?

Se recogen nuevas variables que afectan al problema: el sentido de conducción de las calles, los días de descanso del servicio de recogida, el precio de la gasolina, la ubicación de un contenedor en un sitio específico de la calle, etc.

Para abordar el problema, es necesario buscar un proceso de matematización que traduzca el problema a lenguaje matemático y permita su modelización para encontrar las respuestas a las múltiples preguntas y, finalmente, resuelva el problema planteado. Veamos en qué consiste ese proceso.

3.1.- Modelizar y matematizar

Comencemos con una concisa definición de los términos básicos que envuelve el concepto "modelización". Aplicamos las matemáticas cada vez que se utilizan con algún propósito en un dominio del mundo extra-matemático, por ejemplo para comprenderlo mejor, para investigar cuestiones, para explicar fenómenos, para resolver problemas, etc.

El mundo extra-matemático puede ser otra materia o disciplina, un área de prácticas, una esfera de la vida privada o pública, etc. En cualquier aplicación de las matemáticas se utiliza un modelo matemático de manera explícita o implícita. Un modelo matemático consta del dominio de interés extra-matemático, D, de algún dominio matemático M, y una aplicación desde el mundo extra-matemático al dominio matemático.

Se identifican y seleccionan los objetos, relaciones, fenómenos, conjeturas, cuestiones, etc., más relevantes en D para el propósito y la situación. Luego son traducidos a conceptos, relaciones, fenómenos, conjeturas, cuestiones, etc. pertenecientes a M. Este proceso lo llamamos *formular*.

Dentro de M, se realizan deliberaciones matemáticas, manipulaciones e inferencias. Proceso que denominaremos *aplicar*.

Los resultados se vuelven a D y se *interpretan* y *evalúan* como conclusiones concernientes a ese dominio. Esto es lo que se llama ciclo de modelización y puede ser iterado varias veces basándose en la validación y evaluación del modelo en relación con el dominio, hasta que las conclusiones resultantes concernientes a D sean satisfactorias en relación con el propósito de la construcción del modelo. El término modelización se refiere al proceso completo y a todo lo que le envuelve (Figura 4)

Tarea 7. Identifica cada una de las fases de modelización en la situación antes descrita sobre gestión de residuos

El esquema de la figura 4 muestra, como caso particular, el modo de hacer matemáticas en situaciones cotidianas, por lo que se le conoce también como matematizar. Las actuaciones que se llevan a cabo en las acciones del proceso de matematización se reflejan en el cuadro 3 siguiente

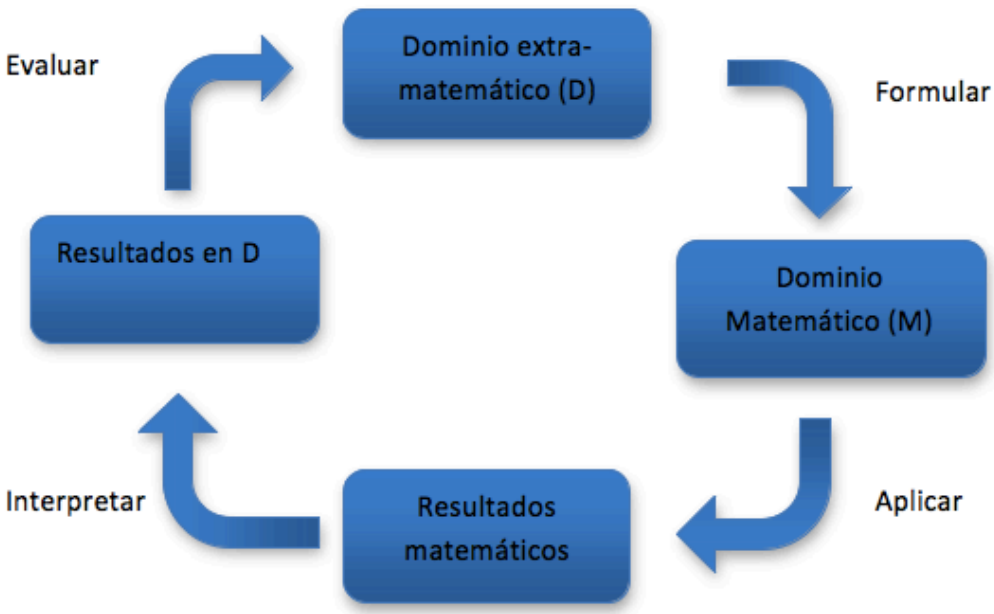

Figura 4: Fases en la modelización

FASES	ACCIONES
Formular	Identificar las matemáticas relevantes respecto al problema Representar el problema de modo diferente Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal Encontrar regularidades, relaciones y patrones Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos Traducir el problema a un modelo matemático Utilizar herramientas y recursos adecuados
Aplicar y responder	Utilizar diferentes representaciones Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos Argumentar Generalizar
Interpretar y evaluar	Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados Comunicar el proceso y la solución Criticar el modelo y sus límites

Tabla 3: Acciones de modelización según fases

> Tarea 8. Identifica las acciones anteriores en la situación planteada en la matematización del problema sobre gestión de la recogida de residuos.

3.2.- Modelización y resolución de problemas

La resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas escolares se ha venido trabajando, fundamentalmente, desde las siguientes perspectivas:

- Enseñar para la resolución de problemas. La finalidad del aprendizaje matemático escolar es aplicar el conocimiento en la resolución de problemas. La enseñanza se planifica de manera que se seleccione una secuencia de problemas de diferente nivel de complejidad para que el estudiante aplique el conocimiento que va adquiriendo.

- Enseñar sobre la resolución de problemas. El profesor instruye en un modelo determinado de resolución de problemas.
- Enseñar a través de la resolución de problemas. La resolución de problemas es un método de enseñanza. La instrucción se organiza seleccionando problemas que permiten a los estudiantes reorganizar sus conocimientos y promover nuevos aprendizajes desde los conceptos y los procedimientos.

En cualquiera de esas perspectivas, la modelización aporta un nivel de complejidad elevado para que el estudiante aplique su conocimiento y surjan nuevos aprendizajes. Las acciones del proceso de matematización aportan estrategias para la resolución de problemas. El enfoque funcional, que presenta al alumno situaciones problemáticas auténticas, atribuye a los problemas de modelización un papel relevante frente a otros tipos más usuales en las propuestas curriculares:

- *Problemas verbales*: Los problemas verbales han estado presentes en los libros de texto desde los documentos mas antiguos que se conservan. Este hecho, unido a que están expresados verbalmente, ha propiciado que se interpreten como aplicaciones de las matemáticas. Los problemas verbales son, realmente, problemas matemáticos expresados mediante palabras, que toman sentido en una parte del mundo real. Matematizar significa, en este tipo de tareas, "desvelar" el problema. En el mejor de los casos, estas tareas permiten focalizar la actividad dentro de los estados de solución e interpretación del ciclo de modelización.
- *Aplicaciones estándar*: Estas tareas son *problemas de encontrar*, como en el caso de localizar la finca de mayor área de acuerdo a ciertas condiciones. Las aplicaciones estándar se caracterizan porque el modelo apropiado es conocido, está a mano. Estos problemas pueden resolverse sin estar condicionados por la situación en que se plantea el problema.
- *Problemas de modelización*: Un problema típico de modelización sería: "Decide la mejor localización para badenes de manera que disminuya la velocidad del tráfico en las calles que rodean el instituto". En este ejemplo hay que especificar primero la cuestión, luego formular un modelo matemático, resolverlo e interpretarlo. Finalmente, la solución tiene que ser evaluada, tanto matemáticamente como en su contexto, seguido de recomendaciones argumentadas en términos de la modelización realizada. Es decir, este tipo de problemas completan el ciclo de modelización.

Tarea 9. Busca en los libros de texto enunciados de problemas según cada uno de los tipos anteriores.

La siguiente cuestión es un ejemplo de tarea de modelización:

Un coche que circula a 60 km/h se dispone adelantar a otro coche que circula a 50 km/h. Cuando los coches están a la misma altura uno de otro, una chica aparece unos metros más adelante. Los conductores reaccionan de la misma manera y los coches tienen frenos de igual calidad. El coche que circulaba a 50 km/h para justo a la altura de la chica. Mientras el coche que circulaba a 60 km/h golpea a la chica a una velocidad de 44 km/h. Siete de cada diez peatones mueren en un accidente como este. ¿Puede ser cierta esta descripción?

Tarea 10. Resuelve la tarea anterior e identifica cada una de las fases del proceso de modelización

Tarea 11. Plantea un problema de modelización relacionado con la recogida de residuos

El profesor puede detenerse en cada una de las fases del proceso de matematizar y, de este modo, formular indicadores que ayuden a describir hasta qué punto un estudiante alcanza aspectos parciales de la modelización.

A continuación se enuncian, a modo de ejemplo, expectativas que el profesor puede considerar cuando un alumno trabaja un problema de matematización en la fase de formular para comprender la situación y obtener un modelo que estructure la información:

- Hacer suposiciones sobre el problema y simplificar la situación.
- Reconocer las cantidades que influyen en la situación. Obtener sus valores e identificar las variables clave.
- Construir relaciones entre las variables
- Buscar la información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante

Tarea 12. Identifica las expectativas anteriores en el problema de la recogida de residuos

Tarea 13. Determina expectativas para las fases de aplicar, interpretar y evaluar en el problema de la recogida de residuos

Esta subdivisión en indicadores más precisos ayuda a clasificar las tareas que se presenten a los alumnos según la capacidad cognitiva que intervenga en cada fase. De otro modo, elaborar un problema redactado de forma cerrada y en el que todos los datos estén formulados con precisión no ayuda a "hacer suposiciones sobre el problema y simplificar la situación". De la misma manera, enunciar solamente problemas en los que todos sus datos son necesarios no favorece el "descartar datos irrelevantes".

Asimismo la elaboración de estos indicadores nos permitirá tener una visión más global de las lagunas previsibles que pudieran quedar en los estudiantes por la ausencia de actividades que estimulen capacidades olvidadas.