

Tema 13. Variables y funciones de las tareas matemáticas escolares

Antonio Moreno Verdejo y Rafael Ramírez Uclés

Introducción

Un día cualquiera en un centro cualquiera de cualquier ciudad. La profesora comienza su clase mostrando un periódico en que se puede leer como titular: “La OCU afirma que poner el lavavajillas ahorra agua frente a lavar los platos a mano”. Tras comentar la noticia con los estudiantes, los distribuye en grupos de tres y les pregunta: ¿Qué pensáis? ¿Qué manera de lavar los platos requiere más agua?

La tarea no ha sido escogida al azar, ni buscada sin criterio entre las que ofrecen los libros de texto. La profesora ha realizado una reflexión previa sobre cómo sus estudiantes aprenden matemáticas, qué finalidad persigue con la tarea y cómo va a presentarla a sus estudiantes.

El aprendizaje de las matemáticas escolares en nuestro planteamiento tiene lugar desde la actividad, elabora significados y atribuye sentidos, en un entorno de negociación y comunicación con otros individuos y en contextos particulares. La profesora opta por fomentar la actividad de los estudiantes a través de la tarea planteada, como alternativa a una recepción pasiva de información transmitida por ella.

Una vez que se ha decidido por plantear una tarea escoge cuál, de entre las muchas posibles, sirve para satisfacer algunas de las expectativas de aprendizaje planteadas con anterioridad. En ese momento de la planificación, el análisis cognitivo realizado previamente muestra su utilidad y orienta la actividad.

Finalmente, la profesora de nuestro ejemplo decide cómo gestionar la tarea. ¿Trabjará en pequeños grupos o realizará el trabajo individualmente? ¿Incentivará intervenciones de los estudiantes en el grupo clase? ¿En qué momento del desarrollo de la tarea?

La planificación en este momento se lleva a cabo desde el Análisis de Instrucción. Ese análisis dispone de los componentes necesarios para que el profesor tome las decisiones prácticas indispensables con que seleccionar, diseñar y proponer tareas matemáticas escolares. Tareas que guían el aprendizaje matemático de los estudiantes, promueven su comprensión de conceptos matemáticos, favorecen el desarrollo de su pensamiento matemático, motivan su interés y optimizan sus capacidades matemáticas.

En los siguientes capítulos se desarrollan los distintos organizadores y componentes del Análisis de Instrucción, que constituyen contenidos didácticos en esta dimensión del currículo. Dichos contenidos se distribuyen como sigue:

- El estudio de las variables y análisis de las funciones de las tareas matemáticas escolares, los distintos tipos de tareas y la secuenciación de las tareas seleccionadas (capítulos 13 y 14).
- Los materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas (capítulo 15).
- La organización y gestión del trabajo en el aula (capítulo 16).

1. Tarea matemática escolar

Una *tarea matemática escolar* es una propuesta para el alumno, que solicita su actividad en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje.

La definición distingue entre tarea matemática y actividad matemática. La actividad está relacionada con el individuo, con el alumno y la acción que realiza, mientras que la tarea está asociada con los objetivos para los que se solicita la actividad. Puede decirse que la actividad es la participación de un alumno que acepta un reto y completa la tarea.

El interés de diferenciar entre tarea y actividad reside en que el profesor no participa en la actividad del alumno pero si dispone de medios y se ocupa en la formulación de la tarea, del modo en que se propone su realización y la dirige en el aula.

El proceso de instrucción implica por parte del profesor la invención, diseño, selección y secuenciación de tareas escolares que permitan el aprendizaje de nuevos conceptos por parte del alumno. Estas tareas de aprendizaje han de tener su foco en la construcción de nuevas nociones matemáticas; no basta con aplicar las nociones ya conocidas por el estudiante, ya que han de ampliar sus conceptos matemáticos.

1.1. Tareas significativas

El significado de un contenido matemático escolar es una idea central de este libro, como vemos en los capítulos 4 y 8, noción que fundamos en tres componentes –signo, sentido y referencia –principalmente. Las tareas escolares que se propongan tienen que ser significativas, es decir, en su diseño han de destacar los contenidos –conceptuales y procedimentales –que utilizan los estudiantes y sus significados. Las tareas planteadas tienen que utilizar uno o varios de los componentes de significado, para profundizar sobre éste y completarlo. Los conceptos y procedimientos que se comprenden e interpretan por los estudiantes a través de una tarea, contribuyen a que ésta sea significativa para el contenido en cuestión. Hablamos entonces de *tareas significativas* para referirnos a aquellas que ayudan a los estudiantes a que expresen y mejoren sus concepciones o significados parciales sobre determinados contenidos matemáticos.

La tarea propuesta será significativa en la medida en que:

- Se inicia desde contenidos y sentidos ya conocidos. La tarea parte de conceptos y procedimientos que los estudiantes ya poseen. De este modo aporta una estructura y una representación a la experiencia propuesta en la tarea, revisa aquellos sentidos que la contradicen y acomoda otros componentes a su conocimiento.
- Permite que los estudiantes activen aquellos otros contenidos que se requieran para ello. Es decir, el profesor seleccionará tareas en las que se interconecten los conceptos sobre los que queremos que se reflexione y no otros.
- Constituye un reto para los alumnos. Los estudiantes aprenderán en la medida en la que aborden con interés las tareas propuestas; por tanto, la actividad que realicen en ella, constituirá un desafío de interés para ellos.
- Los estudiantes reconocerán en qué medida se ha resuelto. Alcanzarán la responsabilidad de determinar si la respuesta a la tarea es correcta. Establecerán justificaciones para ello y decidirán cuando esa respuesta finaliza la tarea.

Tarea 1. Localiza en un libro de texto de primer ciclo de secundaria una tarea significativa, sobre el concepto de número negativo. Analiza y argumenta cuáles apartados de los anteriores satisface la tarea para considerarse como significativa. Modifica el enunciado de la tarea para mejorar su significatividad.

1.2. Tareas en una situación auténtica

Usaremos el término *auténtico* para calificar aquellas situaciones extraescolares de la vida real con las que se introduce una tarea matemática escolar, que ya vimos en el apartado 5 del capítulo 7, al estudiar las situaciones como parte del sentido de un contenido matemático escolar. Para que califiquemos de auténtica una situación es importante que ésta pueda reproducirse o simularse de forma razonablemente realista.

Naturalmente, las situaciones reales no siempre pueden ser completamente simuladas en el medio escolar. Sin embargo, las tareas matemáticas escolares han de formularse de manera que las situaciones reales se puedan simular bastante bien. Se trata de que el proceso de solución emprendido por el estudiante suceda en condiciones parecidas al modo en que se enfrentaría a la situación real.

Para valorar y mejorar la autenticidad con que planteamos la tarea, nos fijamos en los siguientes criterios:

Evento: cuando presentamos una tarea matemática escolar, es esencial que el evento descrito haya tenido lugar o tenga una posibilidad real de tener lugar.

Pregunta: este descriptor hace referencia a si el planteamiento de la pregunta de la tarea escolar es acorde con la formulación de la pregunta en la vida real.

Propósito: en el contexto de la tarea la posibilidad de abordar su solución y las consideraciones a tener en cuenta para ello dependen del propósito con el que se aborda. Este propósito debe ser tan claro en el contexto de la tarea como lo sería en su correspondiente situación de la vida real.

Lenguaje utilizado: para valorar si planteamos una tarea en contexto auténtico debemos tener en cuenta la terminología, la estructura de las oraciones y la extensión del texto utilizado en la presentación de la tarea. Una simulación de una situación real con un grado razonable de fidelidad, no debería incluir términos que dificulten su resolución a los estudiantes si esa dificultad no está presente en la situación extraescolar simulada.

Datos: este aspecto se refiere a la información en la que se basa la solución de la tarea. Es decir, en qué medida los datos facilitados por la tarea son realistas.

Tarea 2. Localiza en un libro de texto de primer ciclo de secundaria una tarea auténtica, sobre el Teorema de Pitágoras. Analiza y argumenta cuáles criterios de los anteriores satisface la tarea para considerarse como auténtica. Modifica el enunciado de la tarea para mejorar su autenticidad.

1.3. Datos que describen una tarea

El análisis de una tarea permite identificar varios datos, que la describen:

- La meta o finalidad, se refiere a la expectativa de aprendizaje que trabaja la tarea.
- La formulación de la tarea es el modo en que esa tarea se presenta. Puede ser un texto escrito, un material, un vídeo, etc.
- Los materiales y recursos que se necesitan para la ejecución de la tarea.

- El tipo de agrupamiento. Este elemento hace referencia al modo en el que dispondremos a los estudiantes para la realización de la tarea. La elección de un tipo de agrupamiento u otro dependerá de las intenciones educativas del profesor.
- La situación de aprendizaje o contexto en el que se propone la acción.
- La temporalización nos indica la duración estimada de la tarea.

Proponemos la siguiente tarea a los estudiantes: “Dibujar una cancha de tenis en el patio del instituto”. Los datos que describen la tarea se pueden ver en la siguiente tabla:

Datos de la tarea	Descripción
Meta	Utilizar el Teorema de Pitágoras para el dibujo que debe realizar el alumno
Formulación	“Dibujar una cancha de tenis en el patio del instituto”
Materiales y recursos	Cuerdas, piqueta, metro, calculadora.
Tipo de agrupamiento	Grupo
Situación de aprendizaje	El patio del colegio
Temporalización	Una hora

Tabla 1. Elementos de la tarea

Tarea 3. Localiza en un libro de texto de primer ciclo de secundaria una tarea sobre la ecuación de segundo grado. Analiza y describe los datos de la tarea. Valora si puede considerarse como tarea significativa y como tarea auténtica. Modifica el enunciado de la tarea para mejorar su significatividad y autenticidad.

2. Variables de las tareas matemáticas escolares

Un estudio metódico de las tareas, por medio del análisis de algunas de sus variables, permite comprenderlas mejor y decidir sobre su ajuste a las expectativas de aprendizaje planificadas y a las características de nuestro alumnado.

Hemos elegido tres variables que trabajan con una perspectiva funcional de las matemáticas como la que venimos considerando en el libro y que coinciden con las que se emplean en el marco PISA. La tabla 2 resume las principales variables de tarea.

Variables de tarea		
Contenido	Situaciones	Dificultad
Cantidad	Personales	Reproducción
Espacio y Forma	Educativas o laborales	Conexión
Incertidumbre y datos	Públicas	Reflexión
Cambio y relaciones	Científicas	

Tabla 2. Variables de tarea

2.1. Contenido matemático

Hay diversas posibilidades de clasificar los contenidos por distintos criterios, como vimos en el apartado 5 del capítulo 4. Escogemos como opción para la organización de

los contenidos la clasificación fenomenológica del apartado 5.3 del capítulo 4, coherente con la funcionalidad de las matemáticas escolares.

Los distintos *contenidos matemáticos* involucrados en una tarea se agrupan en las categorías siguientes: cantidad, espacio y forma, incertidumbre y datos, y cambio y relaciones. Esta clasificación de contenidos la adaptamos del marco de evaluación PISA, donde se tiene en cuenta el desarrollo histórico de las matemáticas; engloba la mayor parte de las matemáticas subyacentes a la modelización de fenómenos, e incluye las matemáticas escolares de los últimos currículos.

Contenido matemático	Descripción
Cantidad	Contenidos que permiten juzgar interpretaciones y argumentos basados en la cantidad. Se incluyen en esta categoría las medidas, los conteos, las magnitudes, las unidades, los indicadores, el tamaño relativo, las tendencias numéricas y los patrones.
Espacio y Forma	Patrones, propiedades de los objetos, posiciones y orientaciones, decodificación y codificación de información visual, navegación, interacción dinámica con las formas reales y con las representaciones.
Incertidumbre y datos	Esta categoría incluye reconocimiento, interpretación y evaluación de situaciones de incertidumbre y conclusiones derivadas de ellas. Así incluye también los procesos de variación y el error en la medición del cambio.
Cambio y relaciones	Esta categoría se refiere a la comprensión de los fenómenos del mundo natural donde el cambio es su característica fundamental. La comprensión de estos cambios y su predicción por medio de modelos matemáticos forman parte de esta categoría de contenido.

Tabla 3: Descripción de los contenidos matemáticos

Tarea 4. Enuncia una tarea matemática escolar para cada uno de los contenidos anteriores. Localiza tareas en un libro de texto para cada uno de esos contenidos

Tarea 5. Entra en la dirección www.mecd.gob.es/inee/Preguntas-liberadas.htm donde aparecen ítems liberados de las pruebas PISA de matemáticas. Identifica 5 tareas de las allí enunciadas por cada uno de los contenidos considerados.

2.2. Situaciones

Como hemos visto al hablar de tareas auténticas y en el apartado 5 del capítulo 7, la *situación* es uno de los componentes que establecen el sentido de un concepto o noción matemática. En las tareas matemáticas escolares las situaciones contribuyen a dotarlas de sentido, muestran modos de uso, son indicadores de sentido y ayudan a profundizar sobre el mismo.

De acuerdo con el marco del estudio PISA, compartimos que *la situación* es la “parte del mundo del estudiante en la que se localizan las tareas que se le plantean y de este modo las dota de significado”. Como se ha dicho, son cuatro las situaciones que aquí se consideran: personales, educativas o laborales, públicas y científicas. Las tareas en contexto puramente matemático se consideran en una situación científica.

La importancia del estudio de esta variable reside en el hecho de que las representaciones y estrategias matemáticas elegidas para resolver una tarea dependen de su sentido, que se vincula con la situación de la que surge.

Tarea 6. Entra en la dirección www.mecd.gob.es/inee/Preguntas-liberadas.htm donde aparecen ítems liberados de las pruebas PISA de matemáticas. Identifica 4 tareas de las allí enunciadas por cada una de las situaciones consideradas.

Las diferentes situaciones en que se presentan las tareas permiten el uso auténtico de la matemáticas para resolver el problema. Sin embargo, hay que tener en cuenta que las situaciones pueden no ser percibidas de la misma manera por estudiantes de diferentes culturas. El trabajo de transformaciones en el plano empleando rosetones de catedrales no resultará cercano ni familiar a estudiantes de muchas culturas. Otras culturas construyen algunas viviendas situando dos largas varas unidas perpendicularmente por el centro. Las paredes se construyen en torno a ellas. Esta situación aporta un significado de cuadrado como polígono con las dos diagonales iguales y perpendiculares. Sin embargo la situación no es familiar en nuestra cultura. Esta diversidad para la gestión de las situaciones en que se sitúan las tareas puede interpretarse como enriquecimiento para los estudiantes de las aulas multiculturales.

Situación	Descripción
¿En qué situación se ubica el problema?	
Personal	Relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. El problema afecta de manera inmediata al alumno.
Educativas, ocupacionales o Laborales	Situaciones que el alumno encontraría en un centro escolar o puesto de trabajo
Públicas	Las situaciones propias de la comunidad en la que el alumno se encuentra inmerso y la información que aparece en los medios de comunicación.
Científica	Interpretación de problemas científicos. Estas situaciones son más abstractas

Tabla 4: Descripción de los contextos

Vemos un ejemplo de tarea para cada una de ellas, describiendo no sólo su enunciado sino su gestión. En apartados posteriores profundizaremos en algunas de ellas, añadiendo las funciones, acciones que promueve y el propósito.

Situaciones Personales

Las situaciones personales están relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Por ejemplo, podemos utilizar la manera en la que realizan sus sorteos, como el del amigo invisible o el reparto de equipos en el deporte, para plantear problemas relacionadas sobre su percepción del azar, la equiprobabilidad y la estrategia de analizar todos los casos posibles. El problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que éste percibe el contexto del problema.

Ejemplo: Los amigos no son invisibles

Enunciado: *Cuatro amigos deciden jugar al amigo invisible para celebrar el fin de curso. Cada uno escribe su nombre en un papel y lo echan en una bolsa. Por turnos, cogen un papel cada uno y ése será su amigo invisible (tendrá que hacerle un regalo de menor valor de un precio fijo). Si a alguno le toca su propio nombre, repetirán el*

sorteo. Se ponen manos a la obra y tienen que repetir el sorteo tres veces. Vamos a examinar en clase si es “extraño” lo que ha ocurrido.

Los alumnos forman grupos de cuatro y van a realizar sorteos hasta que ninguno extraiga su propio nombre. En un debate general se contabilizarán el número de sorteos necesarios en cada grupo y se compartirán ideas de cuales han sido los casos “extraños”. A continuación, se les motiva para que analicen todos los resultados posibles en sorteos de dos, tres y cuatro jugadores, contabilizando cuáles de ellos son sorteos válidos para el juego. Finalmente, se les sugiere que busquen maneras de realizar el sorteo para que salga a la primera independientemente del número de jugadores.

Tarea 7. Resuelve la tarea matemática escolar anterior y busca en libros de texto ejemplos de otras tareas personales.

Situaciones Educativas, ocupacionales o laborales

Son tareas centradas en el mundo del trabajo, desde los no especializados hasta los de alto nivel de cualificación. Como vimos, aquí se incluyen las referidas también al entorno educativo.

Ejemplo: Suspendemos demasiado

Enunciado: *Las notas de los tres trimestres de los alumnos de 4º de ESO son números comprendidos entre 0 y 10 con un solo decimal. Al iniciar el curso, el profesor propone tres formas para calcular la nota final:*

- *Opción A. Se redondea la nota trimestral, se calcula la media aritmética de los tres trimestres y se vuelve a redondear la nota final*
- *Opción B: Se calcula la media aritmética de los tres trimestres y se redondea la nota final.*
- *Opción C: Se calcula la media ponderada (con pesos 20, 30 y 50 respectivamente) de los tres trimestres y luego se redondea.*

¿Qué opción crees que prefieren los alumnos?

Los alumnos trabajan en grupos de tres. Cada uno de ellos debe adoptar el rol que defienda una de las opciones. Para ello tiene que buscar argumentos que apoyen que su opción beneficia a su compañeros y casos en las que las otras opciones los perjudican.

Posteriormente, se recoge en debate de gran grupo, las situaciones particulares en las que una de las opciones es claramente más ventajosa para ellos. Se intenta generalizar a cualquier rango de notas posibles en los tres trimestres y consensuar una decisión final. Incluso se les puede motivar a que planteen su propia opción y valorar “la justicia” de cada una de ellas en un informe final.

Tarea 8. Resuelve la tarea anterior y busca en los libros de texto ejemplos de otras tareas laborales.

Situaciones Públicas

Se presentan situaciones de la comunidad en la que el alumno está inmerso. Por ejemplo, se pueden plantear tareas en las que analice la información que aparece en los medios de comunicación, como pueden ser las campañas publicitarias.

Ejemplo: Que no te lioen...

Enunciado: *Dos empresas compiten por ofrecer los precios más baratos del mercado. La empresa A acaba de realizar una campaña en la que ofrece 3x2 (pague 2 y*

llévese 3) en muchos de sus productos. Los responsables de la empresa B quieren contraatacar lanzando una campaña del 50% de descuento en la segunda unidad. ¿Cuál de las dos está ofreciendo los precios más baratos?

Los alumnos trabajan inicialmente en parejas, adoptando cada uno de ellos el rol de cada empresa. Se les sugiere que analicen primero casos concretos de productos como el pan con un precio determinado, y posteriormente estudiar las generalizaciones. En un debate en gran grupo, se comparten las propuestas y se les motiva a elaborar un tabla en la que, dado un precio inicial, se calculen los precios cuando aumentan progresivamente el número de productos en cada una de las dos ofertas.

Se les insta a analizar situaciones reales que conozcan de esas campañas y que valoren si las decisiones que han adoptado son válidas para la compra de productos perecederos, ropa, difícil almacenaje, precios elevados, etc.

Tarea 9. Resuelve la tarea escolar anterior y busca en los libros de texto al menos tres ejemplos de otras tantas tareas públicas.

Situaciones Científicas

Se refieren a problemas que se relacionan con la aplicación de las matemáticas con el mundo natural y con temas relacionados con la ciencia y la tecnología. Se interpretan problemas científicos y suelen abordar situaciones más abstractas.

Ejemplo: Medida de objetos inaccesibles.

Enunciado: *Con un metro, nuestro teodolito y lo que sabemos de trigonometría, desde el patio del colegio medid la altura a la que se encuentra la chimenea del edificio cercano al que no podemos acceder.*

Los alumnos previamente han construido su propio teodolito con un transportador de ángulos, una regla y un trozo de cuerda. Los alumnos bajan al patio para hacer las mediciones. Trabajan en grupos pequeños y anotan los resultados. Se les motiva a que tomen varias medias desde puntos distintos, que analicen las diferencias encontradas y que relacionen la precisión de los instrumentos utilizados con los resultados obtenidos. Si el método utilizado se basa en cálculos de tangentes, se discute el número de decimales utilizado, así como las unidades de medida. Se pueden contrastar las mediciones de los grupos y determinar un procedimiento para “consensuar” la medida más aproximada a la real.

Tarea 10. Resuelve la tarea escolar anterior (si quieres utiliza mediciones ficticias) y busca en los libros de texto ejemplos de otras tareas científicas

Tarea 11. Elige una unidad didáctica de un libro de texto y analiza qué tipo de situaciones son las que más se utilizan para las tareas de esta unidad.

2.3. La complejidad de la tarea

La *complejidad* de una tarea matemática es una de sus variables más importantes, porque proporciona fundamento para ordenar y secuenciar las tareas ya que contribuye a que éstas se adapten a diferentes ritmos de aprendizaje de los estudiantes. También es difícil de precisar porque, junto con una valoración teórica, son las respuestas del alumnado las que, en definitiva, establecen empíricamente la mayor o menor complejidad de una tarea. Los términos “fácil” y “difícil” resultan imprecisos para

clasificar según esta variable, ya que pueden provenir de una valoración subjetiva. Por ello, resulta necesario proponer categorías según criterios objetivos.

Teóricamente, se distinguen los siguientes grados de dificultad (Tabla 4):

Grados de dificultad	Descripción
Reproducción	Se engloban aquellos ejercicios que son relativamente familiares y que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados.
Conexión	Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos para alcanzar una solución
Reflexión	Las tareas del nivel de reflexión requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen generalización y explicación o justificación de los resultados.

Tabla 5: Descripción de los grados de dificultad.

Vamos a ejemplificar mediante tareas escolares esos grados, utilizando el Teorema de Pitágoras como contenido matemático.

Tarea de reproducción:

Ejemplo. *Dibuja una órbita circular y sobre ella los 3 satélites. Llama B y C a los que están diametralmente opuestos, y al satélite intermedio A. Une A, B y C. ¿Qué polígono obtienes? ¿Es un triángulo rectángulo? Compruébalo con la escuadra.*

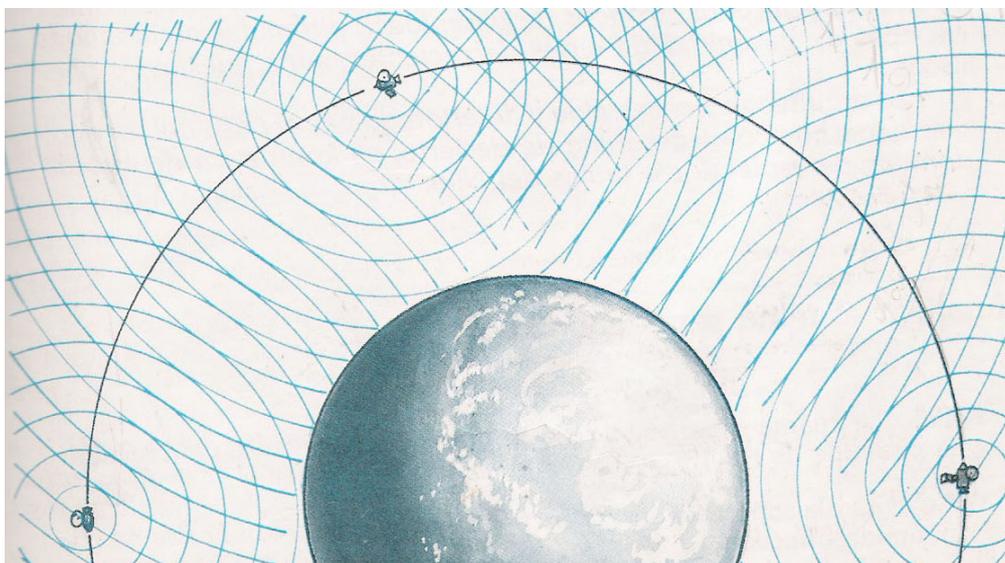


Figura 1: La Tierra y los satélites

Posteriormente al aprendizaje de la fórmula, se presenta al alumno un caso de triángulo en que deba aplicarla para justificar si es rectángulo. Tiene que sustituir correctamente la hipotenusa y los catetos en su lugar correspondiente.

Tarea de conexión:

Siguiendo con el contenido Teorema de Pitágoras vemos como, manteniendo la situación del ejemplo anterior, la tarea se transforma en otra de conexión.

Ejemplo. Si el satélite *A* está a 15 *U* del satélite *B* y a 36 *U* del satélite *C*, ¿qué distancia hay entre los satélites *B* y *C*? ¿A qué distancia están de la Tierra *B* y *C*, sabiendo que el radio de la Tierra es aproximadamente de 6.400 Km.?

En un determinado momento la distancia entre los satélites *B* y *C* es de 25 *U* y la distancia entre *A* y *B* es de 20 *U*. ¿Qué distancia hay entre el *A* y el *C*?

Tras una exploración inicial, pueden recogerse ideas del grupo acerca de estrategias que se les ocurran. Se trata de una tarea de conexión porque la resolución de la tarea no se realiza sólo con la aplicación directa del Teorema de Pitágoras sino que el estudiante deberá realizar interpretaciones para ello.

Tarea de reflexión:

Ejemplo. Debido a fallos técnicos, *B* y *C* dejan de estar en la misma órbita. El *B* está situado en una órbita a 8 *U* del centro de la Tierra, y el *C* en una a 18 *U*. Para que las comunicaciones fueran eficaces, se decidió situar *A* de forma que el centro de la Tierra y el satélite estuviesen en una recta perpendicular a la formada por los satélites *B* y *C*, y que las señales enviadas por los otros satélites, se reflejaran en *A* perpendicularmente. Para ello, los tres satélites deben estar en una circunferencia. Dibuja la situación en un papel. ¿Qué triángulo forman *A*, *B* y *C*? ¿Cuál es su altura? ¿A qué distancia está el satélite *A* de la Tierra? ¿A qué distancia está *A* de *B*? ¿Y *A* de *C*?

Esta tarea requiere creatividad por parte de los alumnos así como recurrir a otros conceptos matemáticos que interrelacionaran con el Teorema de Pitágoras. Puede motivarse su estudio utilizando programas como Geogebra para visualizar la situación y la solución.

Tarea 12. Busca o diseña tareas matemáticas escolares de los tres tipos descritos para las ecuaciones de segundo grado.

Tarea 13. Entra en la dirección www.mecd.gob.es/inee/Preguntas-liberadas.htm donde aparecen ítems liberados de las pruebas PISA de matemáticas. Identifica 4 tareas de las allí enunciadas por cada una de los niveles de complejidad descritos.

3. Funciones y secuenciación de las tareas matemáticas

Una vez seleccionadas, analizadas y modificadas las tareas atendiendo a las variables anteriores, se organizan en secuencias de acuerdo a las sesiones de clase.

La selección de las tareas y su organización en secuencias requieren de acciones y decisiones que no son evidentes.

Tarea 14. Reflexiona: ¿qué criterios puedes utilizar para seleccionar tareas? ¿Qué elementos consideras en una tarea para que esté debidamente formulada y desarrolle la competencia matemática?

El diseño y selección tendrá en cuenta que las tareas seleccionadas...

- ... estén vinculadas al análisis y selección de los contenidos
- ... planteen demandas cognitivas de distinto grado de complejidad
- ... pretendan lograr uno o más objetivos de aprendizaje
- ... promuevan el desarrollo de alguna competencia matemática específica

- ... posibiliten la superación de posibles dificultades o errores
- ... permitan incorporar recursos y materiales
- ... constituyan un conjunto coherente en la planificación de secuencias de aprendizaje

3.1. Funciones de las tareas

Cada tarea matemática escolar desempeña una o varias funciones. El papel de la tarea dependerá de:

- Las condiciones en que se realiza
- Tareas y aprendizajes anteriores
- Vinculación con otras tareas

Una tarea puede atender las siguientes funciones:

- Motiva para el aprendizaje y relaciona el contenido con la realidad
- Nos permite conocer los aprendizajes previos realizados por los alumnos
- Favorece y fomenta la posibilidad en los alumnos de plantearse cuestiones acerca de un contenido
- Permite elaborar y construir significados
- Ayuda al estudiante a ejercitarse en destrezas y procedimientos
- Favorece la capacidad para descontextualizar y aplicar conceptos y procedimientos
- Las tareas ayudan a sintetizar e integrar el conocimiento sobre un contenido matemático

La función de una tarea según la fase de la secuencia en que se implemente aparece reflejada en el esquema (Figura 2):

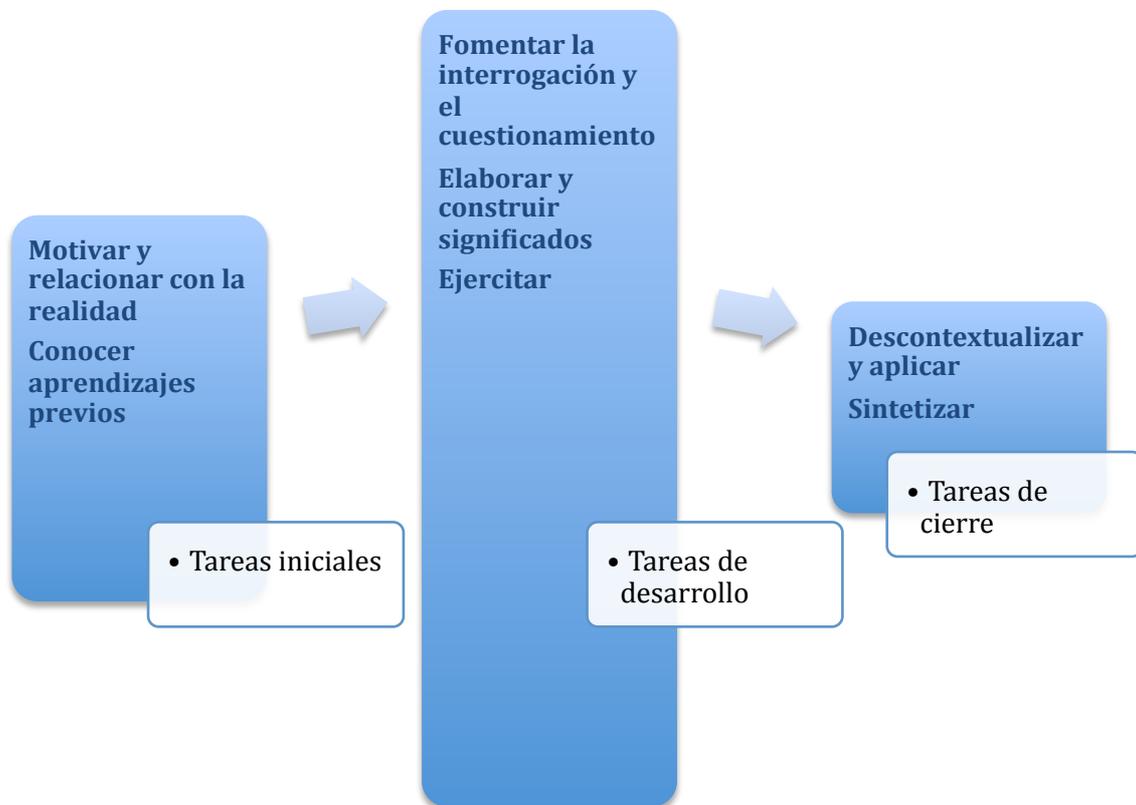


Figura 2: Función de la tarea según la fase

Como se ve, esas funciones podemos resumirlas en tres momentos de secuenciación:

Tareas iniciales: Con ellas se exploran los conocimientos previos y se recuerdan conceptos, que permiten motivar los contenidos y ayudan a introducir algunos procedimientos y adiestrarse en ellos.

Tareas de desarrollo: Estas tareas pretenden conceptualizar nuevas nociones, resumir procedimientos, introducir el trabajo con nuevas representaciones y aplicar heurísticas de resolución de problemas.

Tareas de cierre: Permiten ajustar ritmos de aprendizaje distintos consolidando conocimientos avanzados e insistiendo en conceptos y procedimientos básicos.

Tarea 15. Localiza una lección en un libro de texto de Cuarto de ESO o Primero de Bachiller que desarrolle el tema *Números irracionales y reales*. Identifica tareas en cada una de las fases de la secuencia. Reconoce las restantes variables de esas mismas tareas

3.2. Fases de la secuencia de tareas

La secuencia muestra las decisiones y el plan de trabajo elaborado por el profesor para el aprendizaje del alumno, aquello que se espera que él aprenda. A continuación se muestran las fases de una secuencia de tareas y su propósito (Tabla 5)

Fases de la secuencia de tareas	Función	Acciones que promueve	Propósito
Inicial	Detección de ideas previas	Anticipar, actualizar, adecuar, motivar	Diagnóstico, Pronóstico
	Presentación de la unidad	Representación del tema objetivo	Motivación, explicitación, comunicación
Desarrollo	Regulación	Gestión de errores, refuerzo de éxitos	Diagnóstico de obstáculos y dificultades, trabajo de estrategias de éxito
	Autorregulación	Apropiación de criterios, construcción de aprendizaje	Autonomía de alumnos
Cierre	Síntesis y estructuración	Recapitular, relacionar, orientar nuevos aprendizajes	Representación grupal e individual

Tabla 5: Fases en la secuencia de tareas.

Comentamos algunos ejemplos de tareas, analizando las acciones que promueve y su propósito.

Ejemplo de tarea inicial: Comentario de texto

Esta tarea se propone en la presentación de las unidades relacionadas con las relaciones multiplicativas y de divisibilidad entre números naturales, especialmente para alumnos de E.S.O. Está diseñada para detectar las ideas iniciales de los estudiantes sobre el tema.

La tarea comienza cuando el profesor escribe en la pizarra $19:0 = x$ y pide a los alumnos que expresen conjeturas sobre el valor desconocido x . El objetivo del profesor

es provocar en el estudiante un conflicto entre lo que sabe sobre la división y la divisibilidad y la relación escrita en la pizarra. La función del profesor en este momento de la gestión de clase es promover y organizar un debate, sin influir en las ideas planteadas por los alumnos y tratando de dirigirlos hacia argumentaciones que reflexionen más allá de respuestas del tipo “no se puede dividir por cero”.

Posteriormente el profesor proporciona este fragmento del libro “El diablo de los números” de Enzensberger, junto con unas preguntas para enriquecer el debate y relacionarlo con la comprensión lectora de los argumentos que aparecen:

- Diecinueve - murmuró-. Prueba con el 19. Intenta dividirlo en partes iguales de forma que no quede nada.

Robert reflexionó.

- Eso sólo se puede hacer de una manera - dijo al fin -. Lo dividiré en diecinueve partes iguales.

- Eso no vale - respondió el diablo de los números.

- O lo dividiré entre cero.

- Eso no vale en ningún caso.

- ¿ y por qué no vale ?

- Porque está prohibido. Dividir por cero está estrictamente prohibido.

- ¡ Entonces las Matemáticas saltarían en pedazos !- el diablo de los números empezaba a enfadarse otra vez. Pero por suerte, se controló y dijo : - Reflexiona. ¿Qué debería salir si divides 19 entre cero ?

- No lo sé. Quizá cien o cero o cualquier número intermedio.

- Antes has dicho que no había más que hacerlo al revés, entonces era con el tres :

$$3 \times 5 = 15$$

así que

$$15 : 3 = 5$$

Ahora prueba con el 19 y con el cero.

Robert calculó.

- 19 entre cero... digamos, 190

- ¿ Y viceversa ?

- 190 por cero... 190 por cero... es cero.

- ¿Lo ves ? Da igual el número que escojas, siempre saldrá cero y nunca 19. ¿Qué se deduce de ello ? Que no puedes dividir entre cero ningún número, porque sólo saldría una idiotez.

Robert se inclinó hacia él, tan cerca que el bigote del anciano le hizo cosquillas en el oído, y el diablo de los números, le susurró un secreto :

- Tienes que saber que existen números, absolutamente normales, que se pueden dividir ; y luego están los otros, aquellos con los que eso no funciona. Yo los prefiero. ¿Y sabes por qué ? Porque son números de primera. Los matemáticos llevan mil años rompiéndose la cabeza con ellos. Son unos números maravillosos. Por ejemplo el once, el trece o el diecisiete.

Preguntas de comprensión:

- 1.- ¿Podrías describir los dos personajes que intervienen en el texto?*
- 2.- ¿Cómo se llaman en matemáticas los números que el anciano llama normales? ¿Y los números de primera? ¿Qué otros números conoces?*
- 3.- ¿Podrías explicar resumidamente por qué no se puede dividir 19 entre cero?*
- 4.- Haz una definición de “número de primera”.*

Tras la lectura del documento, los alumnos trabajan individualmente y a continuación en pequeños grupos para consensuar una única respuesta por grupo. En el debate en gran grupo posterior el profesor detecta las ideas previas que los alumnos manifiesten en relación al concepto de división, las propiedades de la división, la divisibilidad y los números primos.

Dos son las acciones prioritarias de la tarea. Por un lado diagnosticar la comprensión del alumno en relación a la argumentación expuesta en el texto sobre la imposibilidad de dividir entre cero, aludiendo a la propiedad de que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto. Por otro lado, anticipar la definición y propiedades de los números primos.

Además del propósito relativo al diagnóstico, se pretende que la lectura de un texto narrativo sea un elemento motivador, que presente una situación problemática de un reparto con un cero en el divisor y que facilite la interacción del alumnado para comunicar sus ideas relativas a la división entre cero y la importancia de la definición en matemáticas. En la pregunta 4b) se pretende que explícitamente el alumno identifique que el valor de la x no se puede determinar, relacionando lo respondido en la pregunta 3 y diferenciándolo de los procedimientos sistemáticos que puede seguir para despejar x en el apartado a).

Tarea 16. Busca o diseña una tarea matemática escolar cuya función principal sea la presentación para una unidad didáctica. Analiza las acciones y propósito que promueve. Valora en qué grado esa tarea es significativa, según criterios iniciales del apartado 1.1

Ejemplo de tarea de desarrollo:

La Tarea “Los amigos no son invisibles” se sitúa en la fase de Desarrollo de la Unidad Didáctica de Probabilidad. En la función de regulación, por una parte persigue el propósito de encontrar estrategias de éxito para contabilizar todos los casos posibles y discriminar los favorables. En los debates, se gestionarán los errores que pueden derivarse de dificultades para ser sistemáticos en la distinción de casos o en el concepto de equiprobabilidad de todos ellos. En relación a la autorregulación, se pretende favorecer su autonomía para que analicen los resultados obtenidos empíricamente, seleccionando criterios para diseñar el sorteo y tomar decisiones.

Utilizando una terna pitagórica podemos plantear también una tarea en la que el alumno se apropia de criterios para trazar perpendiculares. Los estudiantes tratarán de hacer lo siguiente: trazar por un punto A de una recta otra recta perpendicular a la dada.

Para ello trazarán un segmento de longitud 3, y arcos de circunferencia de 4 y 5 desde los extremos de ese segmento. El punto de intersección definirá el triángulo

El profesor explicará que el trazado de rectas perpendiculares es una aplicación muy importante de las ternas. También comentará su importancia, desde la antigüedad, para el trazado de direcciones perpendiculares sobre el terreno, en distintos campos de la vida laboral, por ejemplo en la construcción, agricultura, etc..

Tarea 17. Busca o diseña una tarea de desarrollo con la que se realice la construcción del concepto de área. Valora en qué grado esa tarea es significativa, según los criterios iniciales del apartado 1.1.

Ejemplo de tarea de cierre

La tarea “Suspendemos demasiado” se plantea como una actividad de cierre del tema de Estadística. Tiene una función principal de síntesis de las propiedades de las medidas estadísticas estudiadas, analizando su comportamiento frente a los redondeos y comparando su valor final. Con el planteamiento de nuevas opciones se promueve que interpreten las propiedades de otras medidas de centralización e incluso compararlas con nuevas propuestas y adoptar criterios en función de sus cualidades. La discusión en grupos, la comunicación de ideas y la presentación de un informe final favorece aspectos relativos a la representación de los temas tratados.

Tarea 18. Busca o diseña una tarea de cierre para recapitular el aprendizaje de la unidad didáctica de Combinatoria. Valora en qué grado esa tarea es significativa, según los criterios iniciales del apartado 1.1.

A lo largo del capítulo hemos recogido diversos análisis de las tareas con el fin de obtener el mayor aprovechamiento de ellas así como mayor eficiencia en el aprendizaje. En los próximos capítulos se tratarán dos aspectos de las tareas. En el capítulo 14 se abordarán la resolución de problemas y su relación con la modelización. En el capítulo 15 se abordará el empleo de materiales por parte del profesor para la instrucción.

