Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

MODULARIDAD Y PATRONES EN TABLAS NUMÉRICAS. CALENDARIOS

Modularity and patterns on numerical tables. Calendars

Francisco Ruiz López y Rafael Ramírez Uclés

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Resumen

El presente artículo recoge la importancia que tiene en las Matemáticas las regularidades y patrones numéricos, especialmente cuando éstos son generados en tablas de números, dando lugar a patrones visuales. El estudio de estas regularidades visuales puede arrojar información sobre propiedades numéricas o algebraicas, como ocurre cuando se introduce la relación de congruencia en tablas numéricas como el triángulo de Pascal o la tabla de los 100 primeros números naturales. Estos ejemplos mencionados proporcionan modelos de patrones que extendemos al caso de las regularidades visuales que se producen en los calendarios al señalar los días en los que hay luna llena.

Palabras clave: didáctica, matemáticas, patrones numéricos, calendarios, fases lunares.

Abstract

The present work describes the importance of regularity and numerical patterns in Mathematics, especially when they are generated inside numerical tables thus giving rise to visual patterns. The study of these visual regularities can shed light on their numerical or algebraic properties, as happens when the congruence relation is introduced in numerical tables like the Pascal triangle or the set of first 100 natural numbers. These examples provide pattern models that we extend to the visual regularities observed in calendars highlighting the days with full moon.

Keywords: didactics, mathematics, numerical patterns, calendars, moon phase.

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

INTRODUCTION

Una de las actividades fundamentales de las Matemáticas es el estudio y creación de regularidades y patrones, tanto numéricos como referidos a la forma, y afortunadamente esta idea está cada vez más presente en las aulas donde se imparte la enseñanza de esta ciencia. Así por ejemplo, Devlin (1994) y Steen (1988) conciben la Matemática como la ciencia que se encarga del estudio de los patrones, admitiendo que pueden ser estos patrones reales o imaginarios, visuales o mentales, estáticos o dinámicos, cualitativos o cuantitativos.

El reconocimiento y estudio de patrones en la enseñanza de las Matemáticas es importante, ya que patrones y regularidades aparecen tanto en el mundo físico en el que vivimos, como en el mundo de las Matemáticas, y así como la labor del físico es tratar de comprender el mundo natural, la del matemático es estructurar ese proceso buscando la regla, la norma, la estructura, es decir, el patrón.

Como soporte básico para generar y estudiar patrones podemos considerar diversas tablas de números, tales como las de sumar, de restar o de multiplicar, así como tablas del tipo Triángulo de Pascal. Pero sin duda alguna la tabla más simple es aquella en la que aparecen los 100 primeros números naturales dispuestos en filas y columnas, conocida como tabla-100. Un ejemplo reducido de ella es el calendario, donde el número de columnas es 7 y el máximo número a tomar en cuenta es 31.

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

1. NÚMEROS PRIMOS Y PATRONES

Una de las partes más misteriosas y curiosas de la teoría de números es la que hace referencia a los números primos y sus posibles regularidades. La configuración en la que aparecen estos números en la recta numérica no es aleatoria pero no se puede precisar un patrón de aparición, ya que la forma de obtener estos números es confeccionar una lista en la tabla numérica que resulta después de de tachar los múltiplos de 2, 3, etc., conocida como Criba de Eratóstenes.

Para familiarizarse con los números primos Swallow (1955) sugiere disponer los 100 primeros números naturales en una tabla de 6 columnas y tachar los números compuestos. Los múltiplos de los números del 2 al 10 se disponen siguiendo ciertos patrones rectilíneos, bien en columnas verticales o en diagonales, pudiéndose identificar de esta forma los números que son múltiplos de dos o más números, y detectando los números primos que son los que no están tachados (en negrita y con fondo gris en la figura 1).

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

Fig. 1. Criba de Eratóstenes en tabla de 6 columnas.

Una vez detectados estas regularidades visuales, las podemos utilizar para la identificación y estudio de los números primos. Así por ejemplo observamos que los números primos mayores que 3 están en la primera y quinta columna, lo que nos lleva a afirmar que se pueden expresar como un múltiplo de 6 más 1 o menos 1. Distinguimos también cuando dos números tienen factores primos comunes, si ambos están conectados por las líneas respectivas. Así 26 y 65 están conectados por la línea del 13 (que une los múltiplos de 13); mientras que 70 y 105 están conectadas por dos líneas, las del 5 y la del 7.

Estos patrones también proporcionan una forma sencilla de obtener una descomposición de los números compuestos en factores primos, sin más que dividir el número

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint
compuesto por el número primo de la línea que pasa por él, y repetir la operación con el cociente obtenido.

Si cambiamos la tabla numérica, los números primos conforman patrones distintos. Así si disponemos los 100 primeros números naturales en forma de espiral, comenzando en el centro con el 1, se observa cómo los números primos se sitúan de manera alineada (Fig. 2).

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

Fig. 2: Números primos en espiral

Aprovechando estas configuraciones el artista alemán Rune Mields realizó en (1977) la obra titulada "La criba de Eratóstenes III", que muestra las disposiciones lineales (diagonales y verticales) que adoptan los números primos resaltados en tablas de 89, 90 y 91 columnas, de entre los primeros 1.000.000 de números naturales. Como se observa en la figura 3, para el número de columnas 89 (primo) la estructura es doblemente diagonal, para el número 90 (par) la estructura es vertical, y para el número 91 (impar compuesto) la estructura es vertical y doblemente diagonal (Grevsmühl, 1988).

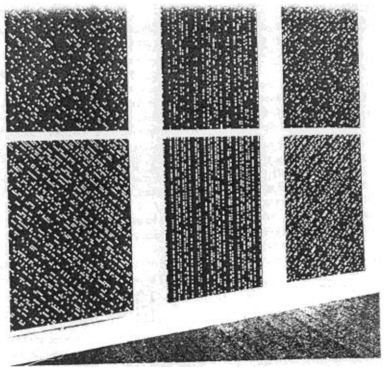

Fig. 3: Patrones de números primos cuando los primeros 1.000.000 de números naturales se disponen en 89, 90 y 91 columnas

2. LA CONGRUENCIA, FUENTE DE PATRONES EN TABLAS NUMÉRICAS

El concepto matemático de congruencia de números es un recurso útil para detectar e identificar patrones numéricos. Si ahora nos situamos en una tabla numérica como el Triángulo de Pascal y nos planteamos en qué lugares de la tabla se colocan los números pares y los impares, podemos sustituir cada elemento por el resto al dividirlo por 2. Los números pares darán resto 0 y los impares resto 1, y de esta forma vemos como se forman patrones triangulares, como muestra la tabla de la figura 4 realizada con una hoja de cálculo, utilizando la función "residuo".

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

En el caso de considerar un módulo mayor que 2, se obtienen otras familias de triángulos correspondientes a más clases residuales.

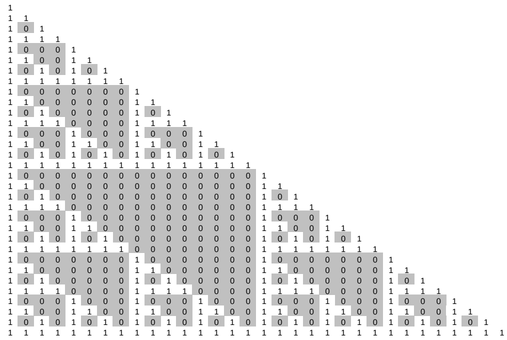

Figura 4: Patrones triangulares que adoptan las clases residuales módulo 2 en el Triángulo de Pascal.

2.1 La congruencia en la Tabla-100 y patrones rectilíneos

Diversos patrones rectilíneos se obtienen cuando en la tabla-100 introducimos la congruencia y a su vez cambiamos el número de columnas de la tabla. Así por ejemplo si en la tabla de dos columnas sustituimos cada número por el resto que resulta de dividirlo por 2, los números de dicha tabla quedan clasificados en dos clases residuales: la clase de los números pares y la clase de los impares (figura 5). Los elementos de estas clases están alineados, si bien esta alineación cambia cuando varían tanto el módulo m como el número de columnas k de la tabla. Ruiz (2000).

1	**2**
3	**4**
5	**6**
7	**8**
9	**10**
11	**12**
13	**14**
15	**16**
17	**18**
19	**20**
21	**22**

Fig. 5. Clases residuales módulo 2

La figura 5 muestra tres patrones rectilíneos distintos que se producen en la Tabla-100 de 8 columnas con una de las clases residuales módulo 5.

En general, consideremos la Tabla-100 organizada en **k** columnas y sea **m** el módulo respecto al cual vamos a clasificar los números de la tabla. La clasificación que se obtiene al considerar las clases residuales módulo **m** en dicha tabla de k columnas la denominamos tabla **(m, k),** y en ella obtendremos m clases residuales, que notamos $\underline{1}$, $\underline{2}$, ..., $\underline{m-1}$, $\underline{m}$. Dos elementos cualquiera, a y b, de una misma clase cumplen la condición de que su diferencia es siempre un múltiplo del módulo m, es decir $a - b = \dot{m}$

Si usamos el mismo color para resaltar los números que son congruentes entre sí, módulo **m**, visualizamos mediante colores distintos las **m** clases de equivalencia resultantes:

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

$\underline{m} = \{\dot{m}\}$; $\underline{1} = \{\dot{m}+1\}$; $\underline{2} = \{\dot{m}+2\}$; ... , $\underline{m-1} = \{\dot{m}+m-1\}$

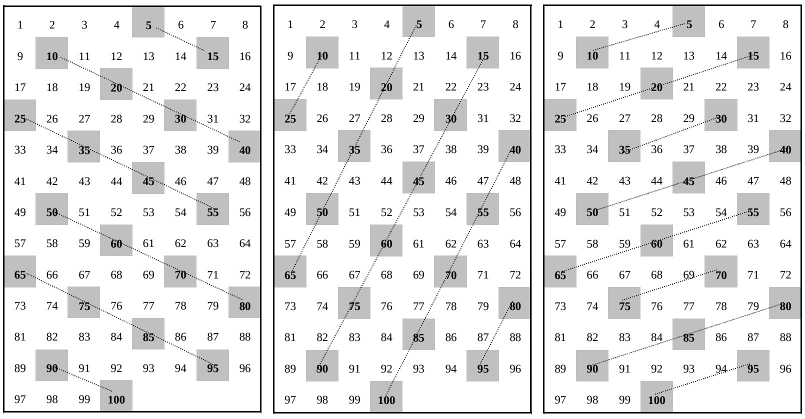

Figura 6: Patrones rectilíneos distintos formados por una de las clases residuales módulo 5 en la Tabla-100 de 8 columnas.

La figura 7 recoge las tablas **(m, k)** cuando **m** y **k** varían entre 2 y 10. Para su mejor observación se han destacado solamente los elementos de una sola clase de congruencia, ya que las demás clases se disponen de forma "*paralela*" a ella.

A partir de esta tabla de tablas que recoge los patrones rectilíneos que forman las clases residuales, se estudian las regularidades que se visualizan en las tablas (m, k), tanto desde un punto de vista visual-geométrico como con un enfoque algebraico. Para expresar dichas propiedades en términos algebraicos, así como para su demostración, se utiliza el concepto de cadena, que recoge el significado de operador aditivo de los diversos recorridos que se pueden efectuar en la tabla-100 (Ruiz, 2000). De esta forma, introduciendo la modularidad en la tabla numérica, se obtienen unos patrones visuales que a su vez son descritos en términos algebraicos para obtener y demostrar propiedades de dichos patrones.

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

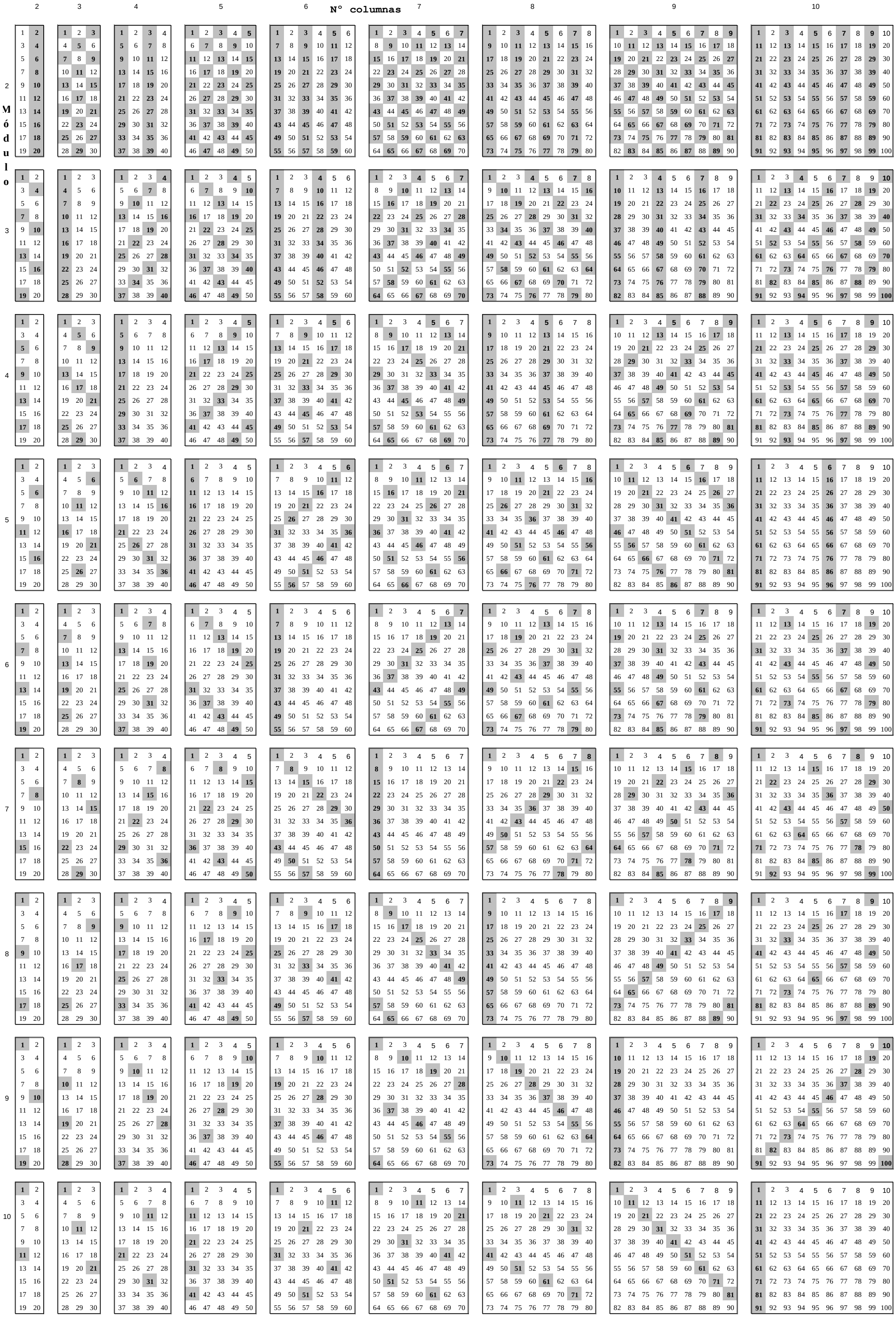

Figura 7: Patrones rectilíneos en las tablas (m, k)

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

3. PATRONES EN LOS CALENDARIOS

Como hemos visto, los patrones configurados por los números primos han sido objeto de algunas obras de arte, pero la fenomenología de estas configuraciones también se presenta en situaciones más familiares. Por ejemplo, en los calendarios habituales, la distribución de los meses en tablas de siete columnas facilita visualmente la localización de los días de la semana. Otra información habitual en los calendarios es mostrar la fase lunar de cada día ya que la luna tradicionalmente ha sido un referente en la medición del tiempo, como por ejemplo en la determinación de la Semana Santa y festivos relacionados, puesto que el Domingo de Pascua se determina a partir de la luna llena posterior al equinoccio de primavera.

Nos planteamos si es posible localizar en los calendarios patrones en las posiciones de los días que hay luna llena. Una primera dificultad que encontramos es relacionar las fases lunares con la "modularidad", como hemos descrito en los apartados anteriores, ya que en término medio, el número de días entre dos lunas llenas es de 29,531 días aproximadamente.

Este hecho obliga a que el módulo **m** a considerar no es entero, por lo que los conceptos de múltiplo y clases residuales adquieren un matiz continuo en el que habría que profundizar, pero esto se aleja de las pretensiones de este artículo. Para simplificar y facilitar la búsqueda de patrones, vamos a considerar el calendario de 2018 que es el próximo año en el que el 1 de Enero es Lunes y además tiene curiosas propiedades relativas a las lunas llenas, como el hecho de que Enero y Marzo tienen dos lunas llenas y Febrero ninguna, y que habrá además dos eclipses lunares, uno parcial y otro total. Sustituyamos los "múltiplos de lunas llenas" por la siguiente Tabla 1 en la que aparecen las lunas llenas de 2018 (Werner y Werner, 2015).

Tabla 1: Hora y día de la semana de las lunas llenas de 2018

Fecha	Día de la semana	Hora (central europea)
2 de Enero	Martes	03:24:06
31 de Enero	Miércoles	14:26:48
2 de Marzo	Viernes	01:51:24
31 de Marzo	Sábado	14:36:54
30 de Abril	Lunes	02:58:12
29 de Mayo	Martes	16:19:36
28 de Junio	Jueves	06:53:00

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

27 de Julio	Viernes	22:20:24
26 de Agosto	Domingo	13:56:12
25 de Septiembre	Martes	04:52:30
24 de Octubre	Miércoles	18:45:12
23 de Noviembre	Viernes	06:39:18
22 de Diciembre	Sábado	18:48:36

Ubicando estas lunas llenas en el calendario, localizamos algunos patrones (Figura 8)

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Enero	1	2 LLENA	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
Febrero	29	30	31 LLENA	1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25
Marzo	26	27	28	1	2 LLENA	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30	31 LLENA	1
Abril	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
Mayo	30 LLENA	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27
	28	29 LLENA	30	31	1	2	3
Junio	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28 LLENA	29	30	1
Julio	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27 LLENA	28	29
Agosto	30	31	1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26 LLENA
	27	28	29	30	31	1	2
Septiem	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25 LLENA	26	27	28	29	30
Octubre	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24 LLENA	25	26	27	28
Noviembre	29	30	31	1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23 LLENA	24	25
	26	27	28	29	30	1	2
Diciembre	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22 LLENA	23
	24	25	26	27	28	29	30
	31						

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

Figura 8: Lunas llenas en el calendario de siete columnas

Podemos observar que, de manera discreta, las lunas llenas se localizan cada 29 o 30 días, dependiendo de la hora. En la distribución de la tabla con siete columnas se observa una especie de regularidad en escalón, mayoritariamente descendiendo cuatro casillas y desplazando una o dos hacia la derecha. Este patrón se visualiza mejor al convertir el calendario en un cilindro uniendo los domingos con los lunes siguientes.

Presentamos a continuación un calendario en el que se prioriza la localización de lunas llenas frente a la visualización de los días de la semana. Hemos marcado los domingos para ejemplificar la distribución de cualquier día de la semana, pudiéndose encontrar cierta regularidad diagonalmente. Si observamos la columna de lunas llenas y se interpreta la singularidad por el número de días del mes de febrero, a partir de marzo se observa que el día del mes en el que hay luna llena desciende uno respecto al mes anterior.

Observamos que el mes de Abril hay que desplazarlo porque la luna llena anterior es el 31 de Marzo y la del 30 de Abril es casi el 29. Este “escalón” hace que en 2018 el Domingo de Pascua sea el 1 de Abril, que no se corresponde exactamente con luna llena (figura 9).

Este hecho permite una aproximación al caso continuo al que hacíamos referencia. Si en la columna correspondiente a las lunas llenas consideramos el intervalo de 24 horas, podemos situar alineadas en vertical las horas exactas en las que hay luna llena. Esto supone unos desplazamientos “continuos” en las tiras correspondientes a los mes. Esta ruptura de la tabla aporta un mayor efecto visual para localizar los meses con dos lunas llenas. La segunda luna llena de un mes se llama luna azul y son escasos los años en los que hay dos lunas azules (el anterior fue 1999 y el siguiente será 2037).

Como en el caso de la búsqueda de primos, la redistribución de los días de los calendarios en distintas filas, columnas, tiras o incluso cilindros puede facilitar la localización de patrones en los eventos que se desee estudiar, como el caso presentado de lunas llenas que influyen en la determinación de festivos o en otras curiosidades astronómicas (eclipses, lunas azules, etc.).

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en ed cación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp 297-309). Granada: Editorial Comares. Colección Didáctica de la matemática.

preprint

		LL																													LL									
e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31									
f			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28										
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31									
a		*	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30									
m			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31							
j				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30							
j					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31					
a						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31				
s							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30				
o								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
n									1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		
d										1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Figura 9: Domingos en el calendario de meses representados en filas

(*) Abril hay que desplazarlo porque la luna llena es el 31 de Marzo

Referencias

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. Scientific American Library. New York.

Grevsmühl, U. (1988). Mathematics and modern art: number investigation. *Mathematics Teaching*, 124, pp. 34-39

Ruiz, F. (2000). *La Tabla-100. Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación*. Tesis doctoral sin publicar. . Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Steen, L.A. (1988). The Science of Patterns. *Science*, v. 240, nº 29, pp. 611-616.

Swallow, K. P. (1955). The factorgram. *Mathematics Teacher*, v. 48, nº1, pp. 13-17

Werner, P. E. & Werner, J. (2015). *Proyecto luna-llena.info*. Recuperado el 30 de Septiembre de 2015 desde http://www.luna-llena.info/