

TRABAJO CON FUNCIONES EN EDUCACIÓN PRIMARIA: UNA PROPUESTA EDUCATIVA Y UNA LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

María C. Cañadas – Marta Molina – Antonio Moreno – Aurora del Río –
Rodolfo Morales – Rafael Ramírez
mconsu@ugr.es – martamg@ugr.es – amorenoverdejo@gmail.com – adelrio@ugr.es –
alefut7@hotmail.com – rramirez@ugr.es
Universidad de Granada, España

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Educación Primaria

Palabras clave: pensamiento algebraico, pensamiento funcional, educación primaria, *early algebra*

Resumen

Presentamos una línea de investigación que se enmarca en la propuesta curricular early algebra, en la que venimos trabajando desde 2014, dentro de dos proyectos de investigación I+D del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno español (EDU2013-41632-P, EDU2016-75771P). El objetivo principal de esta línea es indagar en el pensamiento funcional de estudiantes de Educación Primaria en un contexto de resolución de problemas que involucra funciones lineales. El pensamiento funcional es un componente del pensamiento algebraico que implica construir, describir, representar y razonar con y sobre funciones y sus elementos. Implementamos varias sesiones en aulas de diferentes cursos de educación primaria en las que se trabaja en pequeños grupos y en gran grupo, en función de las características de los estudiantes. En este trabajo describimos problemas utilizados y su implementación. Seleccionamos problemas que han permitido evidenciar la capacidad de los estudiantes para trabajar con nociones implicadas en las funciones como contenido matemático, identificar relaciones entre variables y generalizar por medio de diferentes sistemas de representación.

Introducción

En la actualidad, en diferentes países (e.g., Australia, Canadá, China, Corea, Estados Unidos, Japón, Portugal) se está apostando por la inclusión de elementos algebraicos en el currículo de las matemáticas escolares desde la Educación Primaria (Merino, Cañadas y Molina, 2013). Esta propuesta curricular, que viene avalada desde la investigación, se denomina *early algebra*. Parte de una visión longitudinal de la enseñanza del álgebra escolar, comenzando desde la Educación Infantil. El interés de paliar las conocidas dificultades que los estudiantes

manifiestan en el aprendizaje del álgebra lleva a proponer la integración del pensamiento algebraico en niveles previos (Molina, 2009).

En este marco centramos nuestra atención en una componente del pensamiento algebraico: el pensamiento funcional. Estudios empíricos evidencian la capacidad de estudiantes de Educación Primaria para aprender y comprender nociones funcionales, y usar diferentes representaciones para resolver problemas que involucran variables (e.g., Brizuela y Schliemann, 2003). En España, la ley de Educación LOMCE ya hace mención a este tipo de pensamiento al señalar el objetivo de conseguir que, al acabar la Educación Primaria, todo el alumnado sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014).

Pensamiento funcional en Educación Primaria

El pensamiento funcional puede caracterizarse como el proceso de construcción, descripción y razonamiento con y acerca de las funciones; y está constituido por tópicos, procedimientos y relaciones que involucran a las funciones (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011; Cañadas y Castro, 2016). Por tanto, las funciones son el contenido matemático central del pensamiento funcional. Las cantidades variables, las relaciones funcionales, la generalización, la resolución de problemas, los sistemas de representación se consideran elementos clave para el desarrollo del pensamiento funcional desde los primeros cursos. Además, este tipo de pensamiento incluye realizar generalizaciones sobre relaciones entre cantidades que covarían y expresarlas mediante diferentes sistemas de representación (palabras, símbolos, tablas o gráficos; entre otros). También requiere razonar con distintas representaciones para analizar el comportamiento de las funciones (Blanton et al., 2011; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016).

En el enfoque del *early algebra* “no se trata de introducir las funciones en niveles educativos previos tal y como se trabajan en educación secundaria, sino de aprovechar el potencial de este contenido matemático para promover capacidades en los niños que les sean útiles para el razonamiento en general y el matemático en particular, tanto en el nivel educativo en el que se encuentran como en los sucesivos” (Cañadas y Molina, 2016, p. 210). Conocer las capacidades de los estudiantes de cursos inferiores a la educación secundaria relativas al

pensamiento funcional puede ayudar al desarrollo de conocimientos relacionados con otros contenidos en esos cursos y en cursos superiores (Blanton y Brizuela, 2011). La atención al desarrollo de pensamiento funcional en la Educación Primaria puede contribuir a enriquecer las matemáticas propias de esta etapa a la vez que permite a los estudiantes disponer de más tiempo para desarrollar este tipo de pensamiento y la comprensión de las representaciones asociadas.

Estudios previos

Estudios previos, desarrollados en su mayoría en Estados Unidos y Australia, ponen en entredicho las limitaciones que tradicionalmente se han supuesto a la capacidad de los estudiantes de Educación Primaria para el trabajo con elementos algebraicos. Evidencian las capacidades de dichos estudiantes para razonar sobre funciones, identificar relaciones, e incluso generalizar; y muestran que experiencias tempranas con tareas que involucran relaciones funcionales contribuyen al aprendizaje formal posterior de estas nociones (e.g., Brizuela y Martínez, 2012; Molina, Ambrose y del Rio, en prensa). Diversos estudios concluyen que los estudiantes de Educación Primaria pueden desarrollar una variedad de representaciones para razonar sobre funciones. Pueden describir verbalmente y con símbolos, la covariación y la correspondencia de datos, y utilizar diferentes sistemas de representación para modelizar (e.g., Brizuela y Schliemann 2003; Pinto, Cañadas, Moreno y Castro, 2016). Estudios como el de Mason, Stephens y Watson (2009) ponen de manifiesto la capacidad de estudiantes de Educación Primaria para identificar propiedades generales a partir de situaciones particulares en las que existe una relación entre dos cantidades cambiantes. Mediante un estudio longitudinal, Brizuela y Martínez (2012) confirman que experiencias tempranas con tareas que involucran relaciones funcionales son positivas a largo plazo. Las autoras concluyen que estos estudiantes manejan un lenguaje matemático caracterizado por el uso de letras, para representar variables y cantidades generalizadas con fluidez. La mayoría de los estudios citados destacan la necesidad de profundizar en los diferentes elementos del pensamiento funcional mencionados.

Los estudios citados tienen objetivos diversos de investigación en el contexto del pensamiento funcional, entre los que destacamos la generalización, los sistemas de representación, las relaciones funcionales o las estrategias. La mayoría de ellos se centran en lo que los estudiantes hacen o aprenden; y son pocos los que abordan el trabajo del profesor.

Desde el punto de vista matemático, todas las referencias consultadas se centran en la función directa; en cambio, pocos abordan la relación inversa, en la que los roles de las variables (dependiente e independiente se intercambian respecto a la relación directa).

Foco de nuestra investigación

En nuestra investigación, seguimos los dos focos de interés que plantean Cañadas y Molina (2016): el punto de vista investigador y el docente. Articulamos nuestros objetivos en torno a estos dos focos:

1. Describir el pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes españoles de Educación Primaria.
2. Desarrollar materiales, problemas y estrategias que favorezcan el desarrollo de pensamiento funcional y la superación de los obstáculos que identificamos como limitantes. En este trabajo abordamos parcialmente el segundo objetivo, centrándonos en describir problemas, materiales y cómo se llevaron al aula para evidenciar el pensamiento funcional con estudiantes de Educación Primaria.

Metodología de investigación y de trabajo en las aulas de Educación Primaria

Para abordar los objetivos de nuestra investigación, contactamos un colegio de Granada abierto a participar en esta investigación. Durante dos cursos académicos consecutivos trabajamos con tres grupos de entre 25-30 estudiantes, uno de cada ciclo. Estos estudiantes no tenían experiencia previa en problemas que involucren funciones ni de generalización.

El primer curso realizamos entre 4 y 5 sesiones de trabajo en el aula de entre hora y hora y media de duración cada una. Uno de los investigadores actuó como docente en dichas sesiones, estando presente en el aula el tutor del grupo y dos investigadores más que hicieron de apoyo para la docencia y la recogida de datos. Recogimos información del trabajo realizado en el aula por medio de videograbaciones del gran grupo y de pequeños grupos de estudiantes así como a través de las hojas de trabajo escritas de los estudiantes. En esta metodología, se hace un análisis después del desarrollo de cada sesión y, teniendo en cuenta los objetivos y un análisis de los datos, se toman decisiones para el diseño de la siguiente sesión. La metodología utilizada se conoce como experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). El siguiente curso llevamos a cabo entrevistas individuales semiestructuradas a algunos de esos estudiantes.

Planteamos problemas contextualizados en un contexto familiar para los estudiantes, que involucren funciones lineales entre dos variables con números naturales. Dichos problemas persiguen aportar un contexto en el cual los estudiantes puedan expresar su razonamiento y estrategias y usar representaciones múltiples en el contexto funcional. En la mayoría los problemas se sigue un proceso de razonamiento inductivo en las preguntas planteadas (Cañadas y Castro, 2007), comenzando con casos particulares para dirigir, posteriormente, su atención hacia la relación general que conecta las dos variables. Pedimos a los estudiantes que hicieran uso de diferentes representaciones (e.g., tablas, palabras, letras) que les permiten explorar y expresar la relación funcional implicada en la tarea.

En el trabajo en el aula con los problemas, se alterna el trabajo individual y grupal de los estudiantes con las puestas en común en el gran grupo.

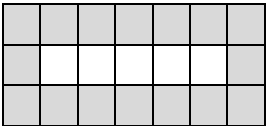
Ejemplos de problemas

En la tabla 1 presentamos ejemplos de problemas presentados a los estudiantes de primero y de tercero, con ejemplos de preguntas y de qué tipo son según el marco conceptual presentado.

Tabla 1. Ejemplos de problemas presentados a los estudiantes

| Curso | Contexto | Ejemplos de preguntas | Tipo de pregunta |
|-------|--|---|---|
| 1º | Una cuidadora de animales debe comprar platos de comida y agua para los perros, de modo que cada perrito debe tener su plato de comida, y cinco platos con agua que comparten entre todos, en un sitio donde los perros que tengan sed puedan ir y beber agua. | Si a la cuidadora llegan dos perros, ¿cuántos platos en total se necesitan? | Caso particular cercano-función directa |
| | | Si a la cuidadora llegan treinta perros, ¿cuántos platos en total se necesitan? | Caso particular lejano-función directa |
| | | ¿De qué manera tú puedes calcular la cantidad de platos totales? | Caso general-función directa |

Tabla 1. Ejemplos de problemas presentados a los estudiantes

| Curso | Contexto | Ejemplos de preguntas | Tipo de pregunta |
|-------|---|--|--|
| | | Si hay 6 platos, ¿cuántos platos hay? | Caso particular cercano-función inversa |
| 3º | Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos. Van a enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen. | ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas? | Caso particular cercano-función directa |
| |  | ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas? | Caso particular lejano-función directa |
| | ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas? | ¿Cómo explicarías el número de baldosas grises que necesitas según el número de baldosas blancas que haya? | Caso general- función directa |
| | | Si colocan primero las grises, ¿cuántas baldosas blancas habrá si hay 16 baldosas grises? | Caso particular cercano-función inversa |

Algunos de los problemas empleados son adaptaciones de los planteados en estudios previos, como es el caso de los presentados en la tabla 1. En algunos casos presentamos los mismos

contextos en diferentes cursos, haciendo una adaptación de los problemas según el curso. Por ejemplo, el segundo problema que se incluye en la tabla 1 se presentó en tercero y en quinto. La adaptación para quinto implicó hacer menos preguntas sobre casos particulares cercanos y facilitarles un material manipulativo que podían usar para representar las baldosas blancas y grises. Este material no lo empleamos en quinto.

Como se puede observar en los dos ejemplos de la tabla 1, en el planteamiento de los problemas se emplearon diferentes representaciones. En algunos problemas se utilizaron materiales manipulativos, ya sea para presentar la situación (así se hizo en el primer ejemplo recogido en la tabla 1) o para el posterior trabajo de los estudiantes. Como se observa en los ejemplos de preguntas a los problemas, en diferentes cursos abordamos tanto la función directa como la función inversa en el contexto de los problemas planteados.

Reflexiones finales

En este trabajo describimos una línea de trabajo novedosa a nivel nacional desde la perspectiva investigadora, que esperamos tenga repercusiones en la docencia, tal y como lo requiere el currículo. Aunque aquí no mostramos resultados, destacamos que los problemas presentados y la forma de abordarlos han dado resultados positivos y sorprendentes para el profesorado de los estudiantes, de primero a sexto de Educación Primaria, teniendo evidencia de la posibilidad de trabajar con nociones implicadas en las funciones como contenido matemático. En la mayoría de los casos, no supone cambiar los contenidos curriculares. Algunos de los problemas propuestos son similares a los propuestos en libros de texto en relación con patrones. Sin embargo, en este enfoque se trata de enfatizar las relaciones entre cantidades que covarían, empleando diferentes sistemas de representación que facilitan alcanzar la generalización.

La metodología de investigación empleada (experimento de enseñanza) enfatiza el diseño de la planificación de enseñanza, adaptando el diseño de tareas según resultados de tareas previas con objetivos específicos.

Con el trabajo que estamos desarrollando, pretendemos brindar herramientas e información a los profesores interesados en fomentar el pensamiento algebraico de los estudiantes desde un contexto funcional.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2011). *DKR-12 early algebra project description*. Documento no publicado.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B. M. y Schliemann, A. (2003). Fourth-graders solving equations. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA* (Vol. 2, pp. 137-143). Honolulu, HI: College of Education.

Brizuela, B. M. y Martínez, M. V. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero, J. A. Castorina, y A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo cognitivo y educación: procesos de conocimiento y contenidos específicos* (Vol. 2, pp. 263-286). Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87-103.

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE*, 52, 19349-19420. Madrid, España: Autor.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

Molina, M., Ambrose, R. y del Rio, A. (en prensa). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. Springer.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga, España: SEIEM.

ⁱ Como parte del contrato metodológico, el docente pidió al investigador que espontáneamente interviniera en la clase observada.