CB-1.020

TALLER VIRTUAL DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Juan Miguel Ribera Puchades(1), Rafael Ramírez Uclés(2), María José Beltrán Meneu(3), Adela Jaime(3), Ángel Gutiérrez(3)
juan-miguel.ribera@unirioja.es – rramirez@ugr.es – maria.jose.beltran@uv.es – adela.jaime@uv.es – angel.gutierrez@uv.es
Universidad de La Rioja(1), Universidad de Granada(2), Universidad de Valencia(3)

Núcleo temático: II. La Resolución de Problemas en Matemáticas.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Seleccionar uno de los siete niveles considerados
Palabras clave: Alta capacidad, Aprendizaje on line, Argumentación, Aprendizaje cooperativo

Resumen
En esta comunicación presentamos una experiencia diseñada e implementada para analizar la resolución de problemas de un grupo de cinco estudiantes con altas capacidades matemáticas a través de videoconferencia. Se describen varias sesiones en la que se conectaron tres estudiantes de Granada con dos de Valencia de 1º y 2º de E.S.O. en un taller virtual de enriquecimiento matemático basado en la resolución de problemas en grupo para iniciar a los estudiantes en la demostración matemática. En las investigaciones se ha reconocido el trabajo en grupo como una forma de atención recomendada para este colectivo de estudiantes. El uso de plataformas como Google Hangout *o* Skype*, que permiten hacer videollamadas colectivas, hace que este tipo de trabajo cooperativo no se limite al entorno escolar cercano al alumno, dado el reducido número de alumnos con talento matemático y las dificultades de agrupamientos homogéneos en las dinámicas de clase habituales.*
Con la intención de dotar al profesor de recursos para gestionar estas sesiones, presentamos el proceso de selección de problemas de matemáticas adaptados a las características de un taller online, basado en la revisión bibliográfica, la consulta de bases de datos y la modificación de problemas atendiendo a las características del talento.

Introducción

En las investigaciones actuales relacionadas con la atención a la diversidad se han resaltado aspectos positivos del trabajo cooperativo entre los estudiantes que presentan altas capacidades (Davis, Rimm & Siegle, 2013). Particularmente en el ámbito matemático, uno de los criterios para que este tipo de interacción resulte más eficaz que el trabajo individual,

ISBN 978-84-945722-3-4

es que los estudiantes intercambien estrategias en grupos reducidos al resolver problemas de cierta complejidad (Winebrenner & Brulles, 2012).

Para la organización de estas tareas cooperativas, una dificultad inicial es encontrar en el entorno escolar del estudiante otros compañeros que compartan, además de alta capacidad o talento matemático, la misma motivación e interés en la resolución de problemas. Otra dificultad añadida es la de encontrar momentos y espacios para realizar este tipo de agrupamientos dentro del horario escolar (Ramírez, Beltrán-Meneu, Jaime y Gutiérrez, 2016).

Una posible solución viene dada por el uso de nuevos canales de comunicación, en los que el uso de nuevas tecnologías permite impartir sesiones virtuales a estudiantes de diferentes lugares y en momentos compatibles con los horarios escolares. Concretamente, en este trabajo utilizamos la plataforma *Google Hangout*, que permite realizar la conexión de hasta diez personas por videoconferencia de una manera sencilla y eficaz para gestionar una sesión virtual.

En relación al contenido de las sesiones, la resolución de problemas es un contexto ideal para la atención de las características del talento matemático, siendo la riqueza de estrategias uno de los principales descriptores utilizados en investigaciones de alumnos con talento matemático (Neider e Irwin, 2001; Gutiérrez y Jaime, 2013). El proceso de resolución de problemas de un modo cooperativo, debatir las ideas y las argumentaciones, favorece que el estudiante ponga en juego descriptores utilizados en la caracterización del talento matemático como la organización de los datos, la localización de la clave de los problemas, la flexibilidad de pensamiento, la utilización de estrategias eficientes y la transferencia de conocimientos adquiridos a nuevas situaciones.

Consideramos, por tanto, que el planteamiento de problemas que motiven la comunicación de información y de estrategias puede convertirse en un reto adecuado para favorecer la construcción de aprendizaje y enriquecer la alta capacidad matemática. De la literatura de investigación también recogemos algunas de las recomendaciones metodológicas sobre la gestión de la sesión de resolución de problemas:

- Las tareas han de ser suficientemente complejas, favoreciendo el discurso para compartir ideas e intereses. Deben suponer un reto y requerir un nivel intelectual elevado.

ISBN 978-84-945722-3-4

- El trabajo en grupo debe favorecer la participación, cooperación, la calidad de la comunicación y el éxito de la tarea. El grupo no debe ser muy numeroso para evitar que los miembros el equipo adopten roles que les haga reducir sus esfuerzos. Todos deben tener oportunidad de explicar oralmente sus razonamientos.
- La participación ha de ser equitativa, las interacciones auténticas y se debe favorecer una síntesis unificada del trabajo.

En relación al entorno, Internet se ha convertido en un valor añadido para la atención al talento, ya que los estudiantes están especialmente motivados al resolver problemas on line. Aporta un entorno social que facilita el soporte comunicativo para este tipo de talleres virtuales.

En este contexto, presentamos una experiencia realizada con un grupo de cinco estudiantes de 1º y 2º de E.S.O nominados por sus profesores como estudiantes de alta capacidad matemática. Conectados por *Google Hangout* desde Granada y Valencia, participaron en un taller virtual de resolución de problemas enfocado a iniciar a los estudiantes en la demostración matemática.

Diseño de problemas

La selección de tareas se enmarca dentro de una investigación sobre el papel de la argumentación en la resolución de problemas en estudiantes con talento. Son muchas las publicaciones que desde diferentes enfoques abordan la resolución de problemas en matemáticas. Entre otras, recomendamos las lecturas de Lehoczky & Rusczyk (1994), Rusczyk & Lehoczky (1994), Engel (1998), Andreescu & Gelca (2008), Larson (2012) y Schoenfeld (2014), en las que podemos encontrar una buena colección de problemas para trabajar con nuestros alumnos.

Por otro lado, existen numerosas plataformas como la de NRich (University of Cambridge), en las que los estudiantes pueden resolver problemas matemáticos e interactuar con otros usuarios. En la Tabla 1 hemos añadido información acerca de estas plataformas, así como el nivel del alumnado al que va dirigido.

Plataforma	Nivel	Características

ISBN 978-84-945722-3-4

NRICH http://nrich.maths.org/	Bajo-Medio	Problemas clasificados por área. Problemas con extensiones.
Art of Problem Solving. https://artofproblemsolving.com/	Todos los niveles	Problemas clasificados por área en algunos foros. Se presentan soluciones variadas.
Brilliant https://brilliant.org/	Medio	Problemas: - clasificados por área. - con respuestas con múltiple opción. - de matemáticas y de otras áreas.
Crux Mathematicorum. https://cms.math.ca/crux/	Medio-Alto	Foros que fomentan el trabajo cooperativo.
IMO, International Mathematical Olympiad. https://www.imo-official.org/	(Muy) alto	Problemas de Olimpiadas matemáticas regionales.

Tabla 1

La bibliografía o las plataformas virtuales anteriormente mencionadas pueden servirnos como base de datos para generar una colección de problemas para usar con nuestro alumnado. No obstante, los problemas pueden ser modificados teniendo en cuenta diferentes objetivos, tanto de aprendizaje como de investigación, para los que se deba tener en cuenta diversos elementos como pueden ser:

- Tipo de interacción profesor-alumno.
- Tipo de interacción entre los alumnos.
- Formulación, contexto y objetivo de la tarea.
- Características del talento que se pretenden desarrollar.
- Complejidad y diversidad de estrategias de resolución.
- Contenido matemático y elementos de razonamiento.

En la Figura 1 presentamos un esquema del proceso de selección y modificación de un problema.

ISBN 978-84-945722-3-4

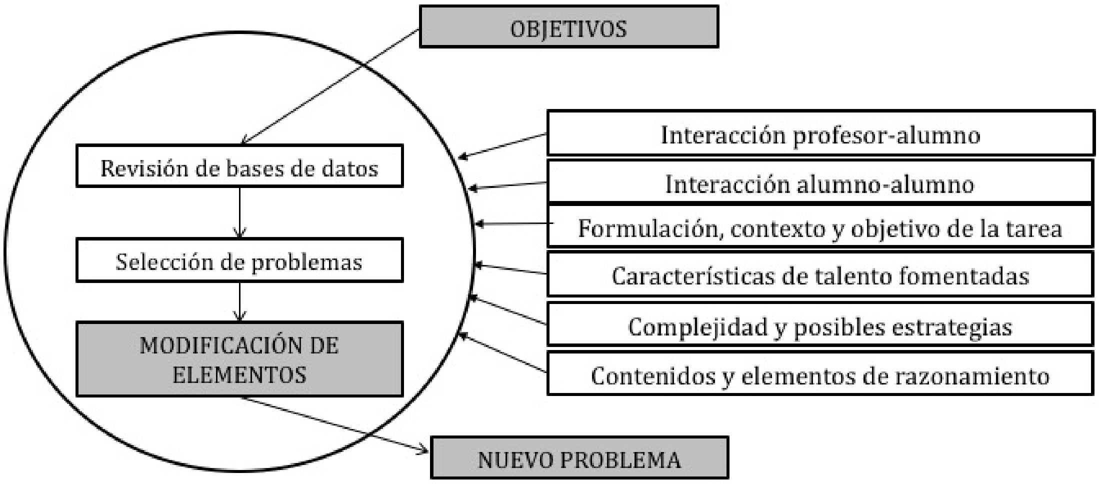


Figura 1

Esta variabilidad de elementos genera múltiples posibilidades para el diseño de tareas. En la presente comunicación mostraremos a modo de ejemplo cómo hemos modificado un problema para adecuarlo a los objetivos de investigación de nuestro taller virtual.

Descripción del Taller Virtual

El Taller Virtual que estamos desarrollando se realiza a través de videoconferencia con la plataforma *Hangout* de *Google*, que permite realizar sesiones grupales de hasta 10 personas. Es una plataforma muy sencilla de usar y sólo requiere que los estudiantes tengan una cuenta de correo y acceso a internet.

Previamente a cada sesión, se proporciona a los alumnos un sobre cerrado con los problemas que se van a trabajar. Al inicio de la sesión, los alumnos abren el sobre y se les proporciona un tiempo limitado (10-15 minutos) de trabajo individual para pensar en posibles soluciones. A continuación, cada estudiante comparte sus razonamientos e ideas para la resolución, actuando el profesor como moderador del debate en grupo y facilitador del turno de palabra a todos y cada uno de los estudiantes. Los razonamientos se comparten tanto oralmente como por escrito, mostrando los alumnos sus soluciones por pantalla en caso de ser necesaria una aclaración.

Una vez los alumnos han terminado de compartir sus razonamientos, el profesor presenta soluciones alternativas, especialmente basadas en estrategias que complementan las

ISBN 978-84-945722-3-4

presentadas por los estudiantes, compartiendo con ellos por pantalla una presentación en *Power Point*. Para ello es conveniente hacer un análisis detallado de las tareas propuestas, basadas más en el enriquecimiento de los elementos de razonamiento, que en avanzar contenidos curriculares. Un aporte importante del trabajo en grupo es que el estudiante contraste su solución con la del compañero, analizando la validez de las argumentaciones y enriqueciéndose de la diversidad de estrategias.

Los problemas de la sesión del taller que presentamos a modo de ejemplo se realizaron en dos sesiones de aproximadamente dos horas de duración, en las que cada uno de los estudiantes se conectó online desde su domicilio.

El objetivo de la sesión era iniciar a los estudiantes en la demostración matemática, y los objetivos de investigación fueron los siguientes:

- Diseñar una secuencia didáctica que permita iniciar a los alumnos en la demostración deductiva
- Conocer qué entienden los alumnos por demostración matemática.
- Conocer la necesidad de los alumnos de probar sus resultados.
- Conocer los diferentes procesos que siguen los estudiantes a la hora de elaborar una demostración y comunicarla a sus compañeros.
- Identificar las demostraciones visuales de los alumnos y conocer sus preferencias.
- Analizar el trabajo cooperativo de los estudiantes.

Previamente a la sesión, se realizó una prueba inicial en la que se evaluó el nivel de argumentación de los alumnos, que resultó ser básico, con preferencia del uso de justificaciones empíricas e inductivas, y se comprobó la eficacia de la plataforma.

El problema elegido para trabajar con los alumnos fue la demostración del teorema de Pitágoras (Figura 3, Anexo I), ya que permite una prueba de tipo geométrico que, aunque hecha sobre una configuración particular, sirve para cualquier triángulo rectángulo. También se eligió para ver si los alumnos tienen preferencias por demostraciones de tipo geométrico o algebraico. Un ejemplo de sesión del Taller Virtual se puede ver en el Anexo I.

Conclusiones

Tras el análisis de la sesión del Taller Virtual, resaltamos los siguientes aspectos:

ISBN 978-84-945722-3-4

- La valoración de la experiencia por parte de los estudiantes ha sido muy positiva. Todos han manifestado su interés por participar en futuras sesiones.
- Los estudiantes han mostrado mucho compromiso con la tarea, participando activamente en las sesiones y trabajando intensamente en los problemas durante las dos horas de la sesión.
- El entorno online ha cubierto las expectativas técnicas esperadas relativas a la comunicación. Sin problemas técnicos destacados, la plataforma ha favorecido que el profesor comparta su presentación en la pantalla, se utilicen programas como GeoGebra y se pueda establecer una vía de comunicación fluida.
- La complejidad de las tareas ha sido adecuada, pues ha favorecido que los estudiantes resuelvan los planteamientos iniciales, pero de modo gradual han ido encontrando dificultades que han requerido debates entre ellos y el papel del profesor como guía de aprendizaje.
- Los estudiantes se han enriquecido con las estrategias presentadas por los compañeros, mostrando una actitud muy receptiva al debate y a la confrontación con las ideas propias.
- Durante el desarrollo de las sesiones se ha observado que los alumnos han mejorado su competencia comunicativa matemática.
- Se han detectado dificultades en los estudiantes relativas al uso del lenguaje algebraico y al uso de argumentaciones visuales, lo que ha permitido rediseñar nuevas actuaciones que les aporten una mejora en su competencia matemática.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143 (Generalitat Valenciana).

Referencias bibliográficas

Andreescu, T., & Gelca, R. (2008) *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhäuser Basel Springer Science & Business Media.

Beltrán-Meneu, M. J., Ramírez, R., Jaime, A. & Gutiérrez, A. (2016). Gifted students verbally communicating visual information in a virtual environment. In C. Csíkos, A. Rausch, and J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th PME Conference* (vol. 1, p. 281). Szeged, Hungary: PME Intl. Group.

Davis, G. A., Rimm, S. B., & Siegle, D. (2013). *Education of the Gifted and Talented*: Pearson New International Edition. Pearson Higher Ed.

Engel, A (1998). *Problem-Solving Strategies*. Springer.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVII*, 319-326. Bilbao: SEIEM.

Larson, L. (2012) *Problem-Solving Through Problems*. Springer Science & Business Media.

Lehoczky, S., & Rusczyk, R. (1994) *The Art of Problem Solving, Vol. 1: The Basics*. AoPS Incorporated. Alpine (California), Estados Unidos.

Neider, K. & Irwin, K. (2001). Using problems solving to identify mathematically gifted students. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceeding of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3, pp. 431-438. Utrech, The Netherlands.

Winebrenner, S., & Brulles, D. (2012). *Teaching Gifted Kids in Today's Classroom: Strategies and Techniques Every Teacher Can Use (Revised & Updated Third Edition)*. Free Spirit Publishing.

Ramírez, R.; Beltrán-Meneu, M.J.; Jaime, A.; Gutiérrez, A. (2016): Resolución por Skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes de talento. En J.A.

ISBN 978-84-945722-3-4

Macías y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 447-457). Málaga: SEIEM.

Rusczyk, R., & Lehoczky, S. (1994) *The Art of Problem Solving, Vol. 2: And Beyond.* AoPS Incorporated. Alpine (California), Estados Unidos.

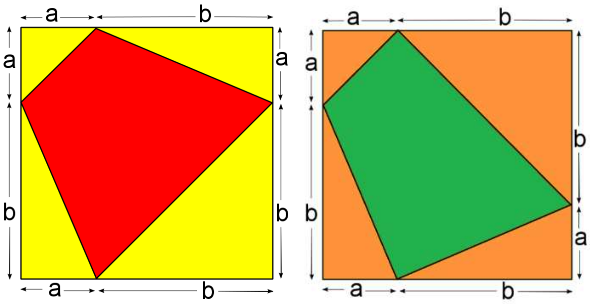
Schoenfeld, A. (2014) *Mathematical Problem Solving*. Elsevier.

Anexo I

A continuación mostramos la secuencia de problemas de la sesión, basada en la demostración del teorema de Pitágoras, modificando los elementos del problema de acuerdo al esquema de la Figura 1, para que estuviera en consonancia con los objetivos de investigación anteriormente citados.

En primer lugar, se añadió un problema previo (Figura 2), también de identificación de áreas, pero de menor dificultad, para que los alumnos se familiarizaran con los problemas de tipo geométrico que pueden ser resueltos mediante identificaciones visuales o mediante fórmulas algebraicas.

1. Dados dos cuadrados de lado $a + b$, dibujamos en su interior los siguientes cuadriláteros (en rojo y verde), de forma que cada lado del cuadrado lo cortamos en dos segmentos, uno de longitud a y otro de longitud b, como sigue:



Considera las siguientes afirmaciones:
El área amarilla es igual al área roja.
El área naranja es igual al área verde.
¿Son ciertas? ¿Por qué? Explica tu razonamiento.

Figura 2

Más tarde se presentaron dos configuraciones geométricas (Figura 3) con el fin de que los alumnos demostraran por sí mismos el teorema de Pitágoras. Nos interesaba ver las diferentes

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

estrategias que empleaban los alumnos, tanto geométricas como algebraicas, y sus preferencias a la hora de decidir la validez general de las mismas.

2. Dados dos cuadrados de lado $a + b$, los subdividimos en las siguientes regiones. ¿Es el área azul igual a la suma de las áreas rojas? Explícanos tu razonamiento.

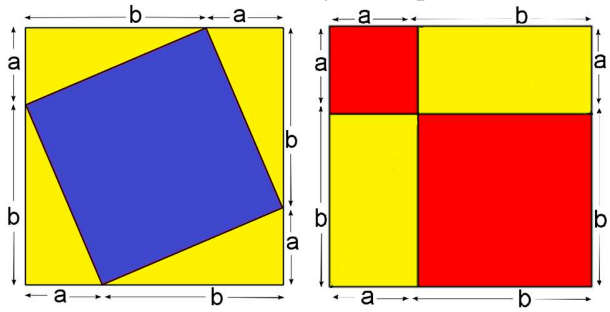


Figura 3

Al finalizar el problema se presentó el siguiente vídeo (Figura 4), con una demostración empírica del teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo particular, para ver si los estudiantes lo consideraban una demostración general del teorema, y debatir sobre el concepto de demostración.

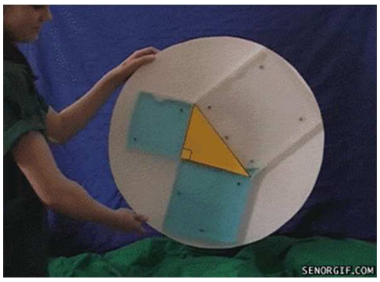


Figura 4
https://www.youtube.com/watch?v=1er3cHAWwIM

A continuación se planteó un problema con una variación de la configuración de la Figura 3 (Figura 5), para ver si los alumnos habían interiorizado el teorema de Pitágoras y eran capaces de aplicarlo directamente en su resolución, o en cambio, se basaban en las transformaciones geométricas y procedimientos algebraicos realizados anteriormente.

3. Dados estos dos cuadrados de lado $a + b$, ¿podéis comprobar que la suma de las áreas de los dos cuadriláteros rojos es exactamente el área de un cuadrado de lado $a + b$?

ISBN 978-84-945722-3-4

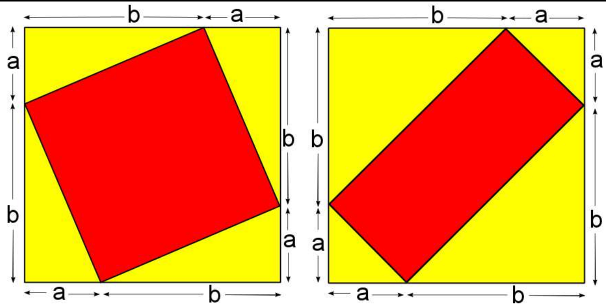
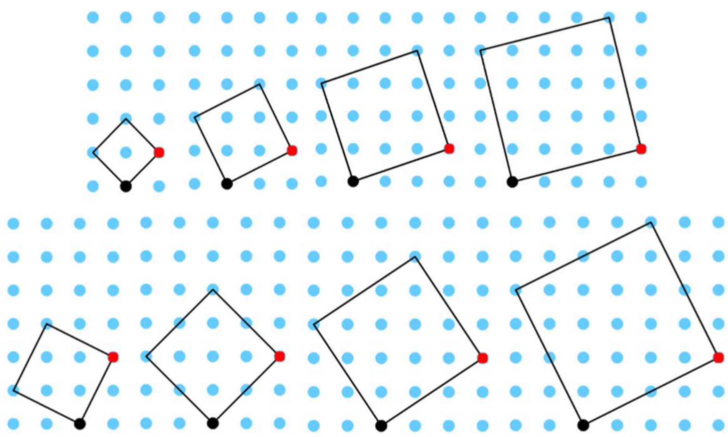


Figura 5

Mediante este problema de aplicación se observó que los alumnos no habían interiorizado el teorema, ya que no lo usaron para la justificación. Para la resolución utilizaron procedimientos algebraicos (cálculo de áreas) o una transformación de la configuración para convertirla en la de la Figura 3, con la que ya habían trabajado.

Para finalizar, se planteó a los estudiantes otro problema de aplicación del teorema de Pitágoras (Figura 6) en el que se pedía encontrar una fórmula general para el área de una serie de cuadrados, que dependían de dos parámetros (altura del punto rojo y distancia del mismo al punto negro). Por un lado, nos interesaba ver si ahora los alumnos ya eran capaces de aplicar directamente el teorema, y por otro, si eran capaces de generalizar atendiendo a los dos parámetros y plantear la correspondiente fórmula algebraica.

4. La distancia entre cada par de puntos consecutivos, en horizontal y vertical, de la trama cuadrada que mostramos es 1. ¿Puedes encontrar un método para calcular las áreas de los cuadrados siguientes?



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

¿Podrías encontrar una fórmula que sirviera para cualquier altura del punto rojo?
Razona por qué crees que tu fórmula es correcta.

Figura 6

Se observó que los alumnos continuaron sin aplicar directamente el teorema para el cálculo del área, y siguieron basándose en transformaciones geométricas y procedimientos algebraicos, como en los problemas anteriores.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4