# Problemas de modelización para todos los públicos

# Modelling problems for everybody

Carmen Gámez Valero<sup>1</sup>, Rafael Ramírez Uclés<sup>1</sup> 1 Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Granada, España

cgamezv@correo.ugr.es, rramirez@ugr.es

#### Resumen

La resolución de problemas de modelización requiere traducir la realidad al lenguaje matemático. Este proceso resulta complejo para los estudiantes de secundaria y bachillerato, siendo necesario encontrar estrategias docentes que faciliten a los futuros profesores enseñar estrategias de modelización a su alumnado. En este trabajo presentamos una propuesta formativa para estudiantes del Máster Universitario de Educación Secundaria, en la especialidad de Matemáticas. Mediante la construcción de maquetas y con una intención divulgativa, se presentan los problemas en un formato atractivo que favorece la comprensión del proceso de modelización a través de la manipulación.

## **Palabras Clave**

Modelización, maquetas, divulgación, formación de profesores

#### Abstract

The Resolution of problems about modelling requires to translate reality into mathematical language. This process happens to be complex for Secondary Education students, therefore it is necessary to find teaching strategies to help future teachers to teach their pupils modelling strategies. Along this essay, we are presenting a formative proposal for Secondary Education University Master (Maths specialization) students. Through the building of mockups and with an informative intention, problems are set out in an attractive layout, which favours the understanding of the process of modelling through handling.

# **KeyWords**

Modelling, mock-ups, information, teachers' training.

## 1. Introducción

Este trabajo parte de una reflexión de los estudiantes del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas surgida en el contexto de las asignaturas de Aprendizaje y Enseñanza e Innovación. Manifestaron mayoritariamente la creencia de la falta de interés de los

estudiantes de secundaria y de la sociedad en general hacia los contenidos complejos matemáticos:

¿Cómo hacer que las matemáticas no sean aburridas y puedan llegar a todos los públicos? Es habitual escuchar frases de alumnos, y público en general, asegurando que las matemáticas son pesadas y tediosas, del mismo modo, que es frecuente la queja de los docentes sobre la escasa motivación del alumnado y la dispersa atención mostrada.

Su propuesta para acabar con este malestar es que hay que estar dispuesto a innovar y a adaptar la enseñanza al variado público. Éste es el punto de partida de nuestra experiencia: intentar **divulgar** las matemáticas, incluso las más complejas, al público en general a través de la **innovación**.

La intención de divulgación la concebimos con la finalidad de acercar los conocimientos matemáticos a la sociedad, siendo la educación una empresa para adaptar una cultura a las necesidades de sus miembros y sus formas de conocer (Bruner, 1997). La divulgación científica se puede entender como el medio que lleva el conocimiento científico a la sociedad. Cada vez más la divulgación es vista por científicos y educadores como una necesidad, considerando importante que ciertos hallazgos, experimentos, investigaciones y preocupaciones científicas se presenten al público para que se constituyan como una parte fundamental de su cultura (Calvo, 2000).

Innovar, haciendo alusión a su etimología, significa realizar algún cambio en el estado actual introduciendo alguna novedad, normalmente buscando una mejora. En el campo de la educación, Escudero (1988) comparaba la innovación educativa como una batalla a la realidad tal cual es, a lo mecánico, rutinario y al peso de la inercia. Lo que caracteriza una innovación educativa es la introducción de formas de actuación no usuales que buscan aumentar la calidad del proceso Enseñanza-Aprendizaje. Este cambio suele buscar solución a problemas detectados en las aulas, problemas que pueden estar referidos a contenidos, tareas, distribución temporal; profesores, alumnos, atención a la diversidad; medios y metodología; y evaluación.

En la enseñanza de los problemas de modelización se han detectado estas dificultades, no solo para los estudiantes, sino para el propio profesorado (Biembengut y Hein, 2004). En la enseñanza tradicional pocas veces se presentan a los alumnos situaciones-problema que requieran una formulación o explicación del contexto. Para que el profesor pueda orientar a sus alumnos en estas tareas es necesario que tomen conciencia del proceso de modelización como un método de investigación, en el que previamente a la formulación del problema, hay que delimitarlo si fuera posible, profundizando sobre el asunto que lo origina. Biembengut y Hein (2004) aconsejan que el profesor adquiera confianza para poner en práctica el método de modelización, siendo necesario en un primer momento que realicen actividades supervisadas por especialistas para dirimir dificultades.

En este contexto, presentamos nuestra experiencia. En este trabajo se describe el proyecto llevado a cabo con nueve estudiantes del Máster Universitario de Educación Secundaria, en la especialidad de Matemáticas, para que planifiquen tareas de modelización y las presenten de un modo innovador para divulgarlas al público en general.

#### 2. Modelización

Normalmente, a los escolares se le presentan tareas ya formuladas en lenguaje matemático, con los datos concretos que necesitan utilizar y la pregunta a la que deben responder. La modelización requiere unos pasos previos en los que el alumno debe buscar la pregunta y los datos para resolverla. Los problemas que provienen de la vida real no parecen estar formulados en lenguaje matemático, sin embargo la posibilidad de traducirlos al lenguaje de las matemáticas ofrece la posibilidad de encontrar modelos que ayuden para su resolución. El proceso por el cual se crea un modelo matemático de un problema o situación problemática se llama modelización, es decir, se crea un conjunto de relaciones matemáticas que representan el problema a estudiar y que permite obtener además de una solución particular, una base que sirva de utilidad para otras aplicaciones relacionadas.

Cada vez más, se habla de la modelización matemática como método de enseñanza siendo *Modelizar o Matematizar* una competencia Matemática en el contexto Pisa (MECD, 2013), establecida en el Real Decreto 1105/2014 (MECD, 2014) como competencia necesaria para el desarrollo intelectual y social de los escolares. Esta competencia les permitirá ser capaces de expresar un problema de la vida real en forma matemática, estructurar un modelo de resolución e interpretar y evaluar un resultado o un modelo matemático en términos del problema original.

Algunas de las ventajas de la utilización de la modelización como un método de enseñanza es que se incentiva, en el alumno: la relación de las matemáticas y otras áreas de conocimiento; un mayor interés por las matemáticas al conocer su utilidad; una mayor capacidad para leer, formular, interpretar y resolver problemas a la vez que con una mayor creatividad; mejor comprensión de los conceptos matemáticos y el trabajo y la colaboración entre iguales (Biembengut y Hein, 2004).

En nuestro proyecto, los problemas de modelización planteados fueron seleccionados atendiendo a una estrategia común de resolución que no es conocida entre los estudiantes. En el currículo de secundaria, la optimización está estrechamente relacionada con el estudio analítico de funciones y la programación lineal. En el contexto geométrico no son numerosos los problemas en los que se tratan propiedades relativas a maximizar o minimizar una determinada cualidad. Sin embargo, existen interesantes situaciones reales cuya solución requiere la utilización de estrategias para maximizar lo mínimo o minimizar lo máximo: ubicación de edificios en un conjunto acotado, la colocación de antenas con distribución óptima y problemas de física aplicada relacionados con la distribución de partículas. Muchos de estos problemas han resultado muy complejos y siguen estando abiertos, como la distribución de puntos en un conjunto acotado atendiendo a una determinada función a optimizar (Schlömer, Heck y Deussen, 2011).

# 3. Puesta en marcha: trabajo con los futuros maestros

El primer paso es que los futuros profesores tomen conciencia del proceso de modelización. Este proceso, complejo y laborioso, consta de tres fases principales formular, aplicar y responder e interpretar y evaluar. Estas fases se ejemplificaron a partir de varias tareas:

Tarea 1: Problema real: Los ayuntamientos de tres pueblos cercanos quieren construir un parque de bomberos que cubra las necesidades de los tres pueblos, ¿dónde lo situarías? ¿Qué criterio has utilizado para tomar la decisión?

Tarea 2: Un criterio posible es que el camión tarde lo menos posible en llegar a cualquiera de los pueblos. ¿Cómo formularías matemáticamente esta condición?

Tarea 3: ¿Qué herramientas matemáticas necesitas para resolver el problema planteado en la tarea 2?

Tarea 4: Resuelve el problema y propón de manera justificada una solución.

Del desarrollo de la sesión, se observaron dos hechos importantes: En la tarea 1, mayoritariamente aludían a puntos notables del triángulo, pero no justificaban el uso atendiendo a las propiedades que satisfacían. En la tarea 2 manifestaron dificultades para formular la estrategia de minimizar la máxima distancia y, finalmente en las dos últimas tareas reconocieron desconocer estrategias de resolución para este problema.

Sin facilitarles ningún tipo de información, se les plantea a un grupo de nueve estudiantes que preparen maquetas para que comprendan mejor el problema planteado y, una vez entendido el procedimiento, plantear una secuencia de problemas similares que facilitarán la comprensión de la estrategia utilizada. A través del trabajo con las maquetas, se pretende que profundicen en cada uno de los pasos del siguiente esquema para modelizar el problema planteado (Figura 1):

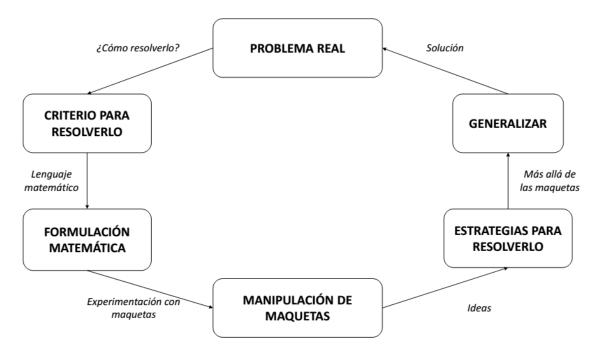


Figura 1: Esquema de la modelización del proyecto

Debido a la complejidad de este problema, para este proyecto se decidió comenzar por los casos más sencillos e ir aumentando la complejidad en función de propiedades menos restrictivas. El grupo trabaja de manera autónoma, siendo supervisados por el profesor únicamente para solventar dudas puntuales. Como una de las dificultades en el proceso de modelización es la investigación del problema, se consultan varios artículos que ponen de manifiesto la complejidad del problema general para minimizar la máxima distancia y maximizar la mínima (Díaz-Báñez, Ramos y Sabariego, 2007; Schlömer, Heck y Deussen, 2011). Tras investigar y recapitular información sobre el estudio matemático riguroso que hay detrás de este problema, se

decide construir maquetas para hacerlo accesible al público en general y difundirlo en distintos ambientes.

# 4. Maquetas para la divulgación

Para la presentación de los problemas, se optó por construir maquetas de tamaño factible para ser manipuladas incluso por alumnos de primaria. El objetivo principal de esta fase del proyecto es divulgar la modelización matemática, presentando a ciudadanos de diferentes edades la posibilidad de resolver un problema de la vida cotidiana mediante el empleo de las matemáticas de una forma divertida y visual, a la vez que educativa.

Para evitar el lenguaje matemático que podría implicar el rechazo por parte del público o dificultar el proceso de modelización, la intención era redactar los problemas de forma cercana y con un lenguaje cotidiano, quedando redactados del siguiente modo:

Problemas para minimizar la máxima distancia: El ayuntamiento de tres pueblos cercanos quiere construir un parque de bomberos que cubra las necesidades de los tres pueblos, ¿dónde lo situarías para que en caso de incendio en alguno de los pueblos el camión de bomberos tardase lo menos posible en llegar?

Se plantean cuatro situaciones diferentes en las cuales varíe la posición de los pueblos y la posibilidad o no de construir carreteras si fuera necesario. En el caso de existir ya una carretera que comunique todos los pueblos, es necesario que el parque se sitúe en una de las carreteras ya existentes, mientras que si no existe ninguna carretera, se podrá construir una en caso de que la solución propuesta sea la óptima.

- 1. Tres pueblos, no equidistantes, situados en línea recta comunicados por una carretera.
- 2. Tres pueblos situados en los vértices de un triángulo escaleno comunicados por carretera.
- 3. Tres pueblos situados en los vértices de un triángulo acutángulo que no están comunicados por carretera, siendo posible la construcción de la misma una vez decidida la posición óptima.
- 4. Tres pueblos situados en los vértices de un triángulo obtusángulo, igualmente con la posibilidad de construir una carretera en caso de que fuera necesario.

Problemas para maximizar la mínima distancia: una comunidad de vecinos de una ciudad andaluza tiene un grandísimo problema, todos los vecinos se odian, no se llevan nada bien. Quieren construir pequeñas casas en un terreno circular que poseen, ¿dónde situarías a estos vecinos para que estuvieran lo más lejos posible unos de otros y así no tengan enfrentamientos?

Se plantean diferentes versiones aumentando progresivamente el número de vecinos, siendo intuitivas las soluciones a los casos inferiores a siete vecinos, pero complejas a partir de ocho.

Se decidió innovar en cuánto a la forma de presentar el problema. Se quiere que el público visualice, manipule, resuelva y tome decisiones relativas a estos problemas, por lo que se decidió que el mejor modo de visualizar un problema de este tipo era con la elaboración de maquetas que representase a pequeña escala la situación a resolver.

Una vez tomada la decisión de cómo acercar el problema a la sociedad, se procede a la búsqueda y construcción de los materiales y medios necesarios para ello.



Figura 2 Ejemplo de maqueta

Los materiales necesarios para la construcción de las 5 maquetas son:

- Cartón.
- Láminas de corcho tamaño A4 de 5 mm de grosor.
- Láminas de papel de acetato transparente cuadriculado.
- Goma EVA.
- Plastilina.
- Fichas de parchís.
- Cola blanca, regla, pegamento de barra, tijeras.

La construcción de las maquetas es un proceso largo pero sencillo, ya que no tiene mucha complejidad. En primer lugar, se ha de crear la base de la maqueta. Ésta estará formada por una lámina de corcho tamaño A4 pegada sobre una lámina de cartón para darle consistencia. Sobre el corcho se adhiere de igual modo una lámina de papel cuadriculado para hacer más sencilla la ubicación y facilitar la medida de longitudes. Las carreteras se construirán con goma EVA, una posibilidad de hacerlas más reales es añadir la división de los carriles de las mismas. En el caso de la recreación de los pueblos, basta con la construcción de un par o tres casa por pueblo. Para construir las casas se emplea plastilina de colores la cual se endurecerá con la aplicación de una fina capa de cola blanca, la cual tras secarse perderá su color.

A la hora de presentar los problemas al público se presentarán por orden creciente de dificultad y se proporcionará una regla para que sea más exacto y sencillo decidir cuál es el punto buscado en cada caso. Una vez que el usuario haya hecho sus

suposiciones y decida cuál es la solución, se anotará en un cuadrante para tener registro de todas las respuestas recibidas y se le explicará al usuario si está bien o no la respuesta, dándole una breve explicación matemática de la resolución.

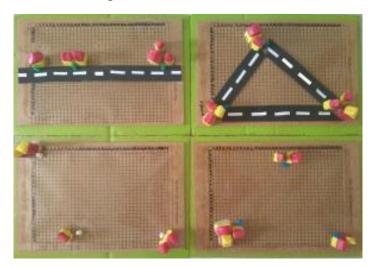


Figura 3 Maquetas problema "Minimizar la máxima distancia"



Figura 4 Maqueta problema "Maximizar la mínima distancia"

# 5. Presentación en diferentes medios de divulgación

Los problemas de modelización planteados pueden llevarse a cabo en una situación escolar, si bien el objetivo del proyecto era divulgarlos en entornos más generales para no restringirlos a unos determinados conocimientos matemáticos. Además, la posibilidad de participar en varios encuentros de divulgación científica permite que los estudiantes para futuros profesores enriquezcan su experiencia más allá de la práctica docente habitual. Este proyecto ha sido y será presentado a diferentes eventos como la Feria de la ciencia, Ciencia en Acción y la Noche de los investigadores, los cuales son iniciativas que promueven la divulgación científica a todos los públicos.

### 5.1. XIX Feria de la Ciencia

La Feria de la Ciencia llevada a cabo cada año en el Parque de las Ciencias de Granada, es una jornada en la cual el parque abre sus puertas a todas las personas interesadas, con la finalidad de acercar el conocimiento científico y tecnológico y fomentar las vocaciones científicas. Este año, ha tenido lugar la decimonovena edición de esta feria, en la cual más de 1.000 estudiantes y 300 docentes han divulgado sus conocimientos sobre salud, óptica, matemáticas, química, nuevas tecnologías, cuerpo humano, física, logopedia, robótica, desastres naturales, entre otros, a los más de 10.000 visitantes que acudieron.

Este es el único acto que ya ha tenido lugar de los tres en los que participará este proyecto. La experiencia durante la jornada fue muy gratificante para los alumnos del máster quienes por primera vez se enfrentaron a públicos de diferentes edades y niveles (desde niños pequeños de 4 años hasta personas adultas) para explicar un mismo problema. Esto supuso en ellos la necesidad de conocer el problema con todas sus características y estar preparados ante posibles dudas que plantearan los asistentes.

Es de destacar que los niños más pequeños llegaban a deducir las soluciones echando un vistazo a las maquetas en escasos minutos, mientras que los más mayores intentaban buscar un fundamento matemático al asunto complicando bastante la respuesta.

Javier y ALBERO	9 recinos	* * * 7 circunf * * * * 2 inherior * *	d(min) = 7
	10 vecivos	* x 7 3 x x x x x x x x x x x x x x x x x	d(min) ~ 6
	11 recivos	× × × 8 y 3	d(min) ≈ 55
Victo, Juan Automio Auc	10 veciuos	* * * * 8 Y Z	d (min) = 8
	11 vecius	× × × × 8 y 3	d(min) 26
	12 veaines	xxxx is concert	d (min) 26
Rable 7 Rafe_	9 vecines	XXX Sy9	d(min) 29
	10 vecinas	XXXX 8y2	duin) = 7
	11 veines	x x x x 8 y 3	dlmin & 7

Figura 5 Algunas respuestas del público al problema Maximizar la mínima

Si bien, no justificaban la respuesta con el rigor matemático, se percibe que muchos se aproximan a la solución con ideas intuitivas, ubicando los edificios en lugares muy próximos a la solución teórica.

Algunas apreciaciones generales es que las tareas despertaban el interés cuando se les presentan como un reto y sin ningún tipo de obligación ni pasos a seguir. Comprendían el problema con pocas instrucciones y la manipulación les facilitaba la formulación de conjeturas y la comprobación de sus propuestas. Los asistentes manifestaron satisfacción cuando comprobaban que su respuesta era próxima a la mejor respuesta hasta ese momento. Creemos que para ellos, fue muy gratificante mostrar

cómo las matemáticas ayudan a resolver problemas cada día, problemas que nadie se imagina que necesitan matemáticas, como una simple discusión entre vecinos.

# 5.2. Ciencia en Acción

El programa "Ciencia en Acción" es una iniciativa del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, la Fundación Lilly, el Instituto de Ciencias Matemáticas, la Real Sociedad Española de Física, la Real Sociedad Española de Química, la Sociedad Española de Astronomía, la Sociedad Española de Bioquímica y Biología Molecular, la Sociedad Geológica de España y la Universidad Nacional de Educación. Está dirigido a estudiantes, profesores, investigadores y divulgadores de la comunidad científica de habla hispana o portuguesa, en cualquiera de sus disciplinas. Su objetivo es motivar a todos los participantes, a través del concurso internacional y sus premios, para divulgar el conocimiento científico de una forma innovadora y amena, a la vez que educativa, mostrando a todos los públicos que la ciencia puede ser divertida y fácil de aprender. Por este motivo, se premia la originalidad y la puesta en escena, de forma que se busca el empleo de materiales pedagógicos útiles y como imágenes, vídeos, maquetas, etc. que sirvan de ayuda para complementar el proceso de enseñanza en los diversos niveles educativos.

La decimoséptima edición de "Ciencia en Acción" tendrá lugar del 7 al 9 de octubre en Algeciras. La presentación el proyecto es similar a la descrita anteriormente, si bien, para participar en el concurso es necesario realizar un montaje de presentación. Hemos realizado un video titulado "Maquetas para resolver problemas como la vida misma" en el que se enfatiza el esquema seguido en el proceso de modelización. Se presentan los problemas de un modo atractivo y es un elemento que complementa la divulgación del proyecto.

# 5.3. Noche de los investigadores.

La Noche (Europea) de los investigadores es un proyecto europeo de divulgación científica promovido por la Comisión Europea que tiene lugar simultáneamente en más de 300 ciudades europeas desde 2005. En esta velada, cualquier medio es válido para acercar la investigación a la población de una forma rigurosa pero divertida con la finalidad de dar a conocer los trabajos que se estudian cada día y los beneficios que aportan a la sociedad.

Igualmente, este proyecto se utilizará para demostrar de forma práctica y lúdica la relación entre investigación y vida cotidiana, divulgando los resultados entre los asistentes. Se situará en el llamado Kid Corner, de forma que se llevará adaptado para que los niños que asistan a esta fiesta de la ciencia puedan manipular a la vez que aprender.

Desde otra perspectiva, además del trabajo con maquetas, se enfatiza el proceso investigador para la búsqueda de soluciones en los problemas de modelización. Desde este punto de vista, se completa el proyecto con las soluciones justificadas para el problema de los bomberos y la intención de aportar información sobre los primeros casos del problema de los vecinos, incluyendo incluso un experimento con imanes que simula las condiciones del problema (Tabla 1).

Minimizar la máxima distancia		
Problema	Solución	
Tres puntos no equidistantes en	Punto medio de los dos más alejados	
línea recta		
Tres puntos con carreteras	La mitad de la suma de los dos lados más pequeños	
Tres puntos (acutángulo)	Circuncentro	
Tres puntos (obtusángulo)	Punto medio del lado mayor	
Maximizar la mínima distancia en un círculo		
Número de vecinos	Solución intuitiva (Conjetura)	
2	Puntos separados diametralmente	
De 3 a 6	Polígono regular inscrito en la circunferencia	
7	Hexágono regular y centro de la circunferencia	
Mayor o igual que ocho	₹?	

Tabla 1: Soluciones y conjeturas para resolver los problemas

#### 6. Conclusiones

De un modo general, destacamos dos aportes principales en este trabajo:

Por un lado, enfrentarse a los problemas que posteriormente han de enseñar, hace que el futuro profesor sea más consciente de las dificultades del alumno y de las metodologías más efectivas. Explicar y aprender matemáticas de manera funcional y estudiando sus aplicaciones en la vida cotidiana, hace que aumente la motivación y atención del estudiante. Interesar al alumno en algún aspecto de la ciencia, para que piense como un científico es mejor que tratar de enseñarle rudimentos superficiales (Smith, 1994). Emplear la modelización como un método educativo produce en los alumnos efectos muy positivos como la mejora de la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar problemas, entre otros muchos (Biembengut y Hein, 2004).

Por otro lado, sin pretensión de obtener conclusiones generales, mostramos algunas de las apreciaciones que los propios participantes de este proyecto han resaltado en su proceso de formación relativo a la modelización y la divulgación:

- trabajar de manera autónoma sin excesiva supervisión del profesor, crear un proyecto con solamente un par de consejos del docente les ha aportado confianza en ellos mismos;
- trabajar en equipo colaborando entre todos, valorando las aportaciones de cada compañero y tomando decisiones conjuntas;
- indagar e investigar sobre el tema a exponer, los alumnos partieron de cero en este tema y tuvieron que trabajar para conocer a fondo todas las aplicaciones y los modos de resolución de sendos problemas;
- crear tareas lúdicas y manipulativas de forma gradual para motivar a los visitantes y evitar que la primera reacción fuera de rechazo al tratarse de problemas matemáticos;

- atender a diferentes edades y ser conscientes de su capacidad como docentes, de aprender a enseñar a distintas edades adaptando su lenguaje y sus explicaciones a las necesidades del alumnado;
- conocer el ambiente de divulgación en el cual nunca habían participado en primera persona, solamente como visitantes, creciendo en ellos un sentimiento de necesidad de dar a conocer todos sus saberes científicos.

#### 7. Referencias

- Biembengut, M. S. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, 16(2), 105-125.
- Bruner, J. (1997). La educación puerta de la cultura. Madrid: Visor de Aprendizaje.
- Calvo, M. (2000). Líneas generales de un programa de difusión de la ciencia al público. *Actas del I Congreso sobre Comunicación Social de la Ciencia*. Granada, 25-27 de marzo, Libro I, pp. 293-311.
- Díaz-Báñez, J. M., Ramos, P. A. y Sabariego, P. (2007). The maximin line problem with regional demand. *European journal of operational research*, 181(1), 20-29.
- Escudero, J.M. (1988), La Innovación y la organización escolar. En Pascual, R. (Coord.). *La gestión educativa ante a innovación y el cambio* (pp. 84-99). Madrid, España: Narcea.
- MECD (2013). PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE. Informe español. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- MECD (2014). Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Schlömer, T., Heck, D. y Deussen, O. (2011, August). Farthest-point optimized point sets with maximized minimum distance. In *Proceedings of the ACM SIGGRAPH Symposium on High Performance Graphics* (pp. 135-142). ACM.
- Smith, F. (1994) De cómo la educación apostó al caballo equivocado. Buenos Aires: Aiqué.