Enriquecimiento curricular para el bloque de Números y Álgebra en ESO y Bachillerato.

Curricular enrichment for Numbers and Algebra in Secondary and High School

Alba González Parra[1], Rafael Ramírez Uclés[1]
1 Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Granada, España
albgonpar@correo.ugr.es, rramirez@ugr.es

Resumen

La atención a la diversidad dentro del aula supone una oportunidad para que el profesorado presente una respuesta adecuada a las necesidades educativas de cada estudiante. En el caso particular del alumnado con talento matemático, se pretende que desarrollen al máximo sus potencialidades y aumenten la motivación. Una medida para atender estas necesidades especiales es el enriquecimiento curricular, basado en una adaptación del currículo que profundice en contenidos sin avanzar en los de cursos superiores. En este trabajo se sintetizan las ideas desarrolladas en el trabajo fin de máster *Enriquecimiento curricular para el bloque de Números y Álgebra en ESO y Bachillerato* en el que se proponen algunas tareas de enriquecimiento diseñadas para alumnos con talento matemático desde Primero de ESO hasta Bachillerato encuadradas dentro del bloque de Números y Álgebra. Todas ellas parten de un análisis de los contenidos del currículo y se incluye una justificación teórica que garantice su adecuación a este tipo de alumnado.

Palabras Clave

Talento matemático, enriquecimiento curricular, números y álgebra

Abstract

The attention to diversity in the class means a chance for teachers to respond suitable to needs of each children. Particularly, for students with mathematical ability, we hope to develop their potential at the same time as they increase their motivation. The curricular enrichment program, which is based on adapting the curriculum, going into detail about the contents, but never skipping contents of a higher-education course, is a possible way to deal with these kinds of special educational needs. Throughout this essay we synthesize the ideas that have been developed in the final project of master *"Enriquecimiento curricular para el bloque de Números y Álgebra en ESO y Bachillerato*". In that project it is suggested some task of enrichment that have been designed for students with mathematical talent in secondary school. All of these tasks fit in the block of contents of Numbers and Algebra. Starting with a complex analysis of the curricular contents, we introduce the tasks, and finally, we also include a theoretical justification about why these tasks are appropriate for this sort of learners.

Key words

Mathematical talent, curricular enrichment, numbers and algebra

1. Introducción

La atención a la diversidad dentro del aula de matemáticas es un reto al que se enfrenta el profesor para adaptar las sesiones de clase a todo tipo de alumnado. Este trabajo surge para dar respuesta a las necesidades de los alumnos con talento matemático dentro del aula. De todas las medidas de actuación posible para que desarrollen sus potencialidades atendiendo a sus características, nos vamos a centrar en la del enriquecimiento curricular con propuestas que permitan atenderlos dentro del aula habitual y con tareas específicas.

El objetivo de este trabajo es diseñar tareas de enriquecimiento curricular para llevar a cabo con alumnos con talento matemático. Vamos a tener en cuenta en todo momento que el enriquecimiento curricular no consiste en adelantar contenidos, sino en profundizar en ellos. Por lo tanto, empezamos el estudio con un análisis en profundidad de los contenidos del currículo. Se trata de un estudio en vertical de todos los contenidos desde ESO hasta Bachillerato, en este caso particular del bloque de Números y Álgebra, que establece el currículo básico de matemáticas vigente por la actual *Ley Orgánica de Mejora de la Educación*, más concretamente recogido en el Real *Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre*.

Posteriormente, y en base a este análisis de contenidos, se diseña un mínimo de una tarea de enriquecimiento para cada curso de Secundaria Obligatoria y Bachillerato, teniendo siempre en cuenta las características del alumnado al que va dirigido. Se pretende que el trabajo sirva de guía a los docentes para facilitar la realización de adaptaciones curriculares tanto individualizadas como de grupos de enriquecimiento (González, 2016).

El diseño de tareas se fundamenta en un estudio teórico de las características generales de los estudiantes con talento matemático y se persigue que sean variadas, algunas más teóricas y otras más prácticas; unas basadas en la profundización de contenidos del currículo y otras en la ampliación de este currículo con contenidos nuevos, que permitan la conexión entre los mismos y que desarrollen las habilidades en la resolución de problemas. No están diseñadas para un caso real concreto. Son tareas pensadas para llevarlas a cabo en el aula y de manera que los alumnos con talento puedan trabajar de forma autodidacta, que mejoren sus habilidades de búsqueda de información y que requieran al profesor sólo para cosas puntuales y para resolver dudas, pero que sean ellos mismos los que desarrollen los ejercicios, ya que el profesor tendrá que estar a disposición del resto de la clase.

La respuesta que debemos dar a los alumnos con necesidades especiales siempre son respuestas individualizadas a cada alumno, por lo que lo ideal sería desarrollar las sesiones y las tareas de enriquecimiento para alumnos con talento matemático según las necesidades de cada alumno en concreto. Deben ser cosas que les motiven, que les hagan sentirse valorados y que fomenten sus intereses, y llevarlas a cabo de tal forma que puedan desarrollar al máximo sus potencialidades, así como sus puntos débiles.

2. Justificación teórica

En primer lugar, la vigente Ley Orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) recoge de forma específica la atención a la diversidad y a los alumnos con necesidades especiales, de forma que propone un cambio con respecto a leyes anteriores considerándose ahora una prioridad la atención a este tipo de necesidades.

Así, el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato hace referencia a la necesidad de dar una respuesta curricular para atender satisfactoriamente a la diversidad.

Más concretamente, en el artículo 7 se establece:

"Los centros docentes desarrollarán y complementarán, en su caso, el currículo y las medidas de atención a la diversidad establecidas por las Administraciones educativas, adaptándolas a las características del alumnado y a su realidad educativa con el fin de atender a todo el alumnado. Asimismo, arbitrarán métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos y promuevan el trabajo en equipo".

Y en el artículo 15:

"Asimismo, corresponde a las Administraciones educativas regular medidas adecuadas para la atención de aquellos alumnos y alumnas que manifiesten dificultades específicas de aprendizaje o de integración en la actividad ordinaria de los centros, del alumnado de alta capacidad intelectual y del alumnado con discapacidad".

Por tanto, se recomienda a los centros docentes y al profesorado dar respuesta a estas necesidades de la mejor forma posible.

2.1. Necesidades especiales: Altas Capacidades

Utilizaremos el concepto de *Altas Capacidades* para referirnos a aquellas personas *que poseen habilidades demostradas o potenciales que muestran evidencia de una gran capacidad de realización en áreas como la intelectual, creativa, académica, de liderazgo, artística... Se caracterizan igualmente por la "perseverancia" en la tarea, está muy presente en ellos el "afán de logro" y dedican, por ello, una gran cantidad de energía a resolver problemas concretos y a la realización de actividades específicas* *(preguntas, dibujos, juegos, ideas…) que suelen ser originales, ingeniosas, novedosas y poco corrientes* (Mota y Jiménez, 2011, p.2).

Una de las principales características que distingue a este tipo de alumnos es la habilidad para organizarse ellos mismos, son capaces de desarrollar sus propias tareas, llegando incluso a detectar los posibles errores y pensar en soluciones de los mismos. Esto nos da la oportunidad de trabajar con ellos en la clase sin desatender al resto de los alumnos.

2.2. Talento Matemático

Los alumnos talentosos son aquellos que presenta alta capacidad específicamente en una o varias ramas de conocimiento. Por tanto, este tipo de estudiantes, presentan facilidad de aprendizaje en ciertas materias, pero no en todas, pudiendo incluso tener dificultades de aprendizaje en algunas áreas concretas.

En este proyecto nos vamos a centrar en dar una respuesta educativa a alumnos con talento matemático. Vamos a analizar con mayor profundidad este grupo concreto basándonos en Miller (1990).

Cuando hablamos de alumnos con talento matemático no nos referimos a aquellos que cuentan con una gran destreza a la hora de realizar cálculos aritméticos o que tienen buena soltura para reproducir procedimientos y algoritmos matemáticos, sino a los estudiantes habilidosos cuando se trata de razonar matemáticamente.

No se trata de un colectivo homogéneo; pues podemos encontrar unas necesidades diferentes según el alumno. Aunque sí que existen rasgos comunes: llevan un ritmo de aprendizaje más rápido que otros compañeros y alcanzan el aprendizaje con mayor profundidad.

Además, podemos concretar ciertas características que predominan en los alumnos con talento matemático:

- Inusitado entusiasmo hacia las ideas matemáticas y curiosidad sobre la información numérica y sobre las posibles aplicaciones de los contenidos matemáticos.
- Suelen transferir conceptos nuevos a otras situaciones matemáticas que no se han estudiado o a otras que ya conocen.
- Facilidad para aplicar los conceptos e ideas matemáticas aprendidas en otros contextos.
- Notable habilidad para pensar, entender y aplicar conceptos abstractos, así como para identificar patrones y relaciones.
- No suelen trabajar de manera estereotípica, más bien son flexibles y creativos. Usan técnicas de resolución de problemas a menudo distintas de las explicadas en clase, o resuelven los problemas de varias formas diferentes.

Otra característica que ya hemos mencionado anteriormente, pero que volvemos a recalcar es la autonomía de estos alumnos. Esto es algo que vamos a tener muy en cuenta a la hora del diseño de tareas, ya que trabajarán de manera independiente, aunque podrán contar con ayuda siempre que sea necesario. Nos centraremos en estas características para diseñar nuestra propuesta docente, de manera que sea óptima para este tipo de alumnos.

Para Blanco, Ríos y Benavides (2004) hay que mejorar el proceso de identificación de este tipo de alumnos. A veces es fácil, pues se distinguen por sus buenos resultados académicos en matemáticas y otras asignaturas de ciencias, y su buena predisposición; pero no siempre es así. Puede darse el caso de estudiantes con problemas de aprendizaje o desmotivados, que perturben el clima de clase o que tengan una actitud de pasotismo hacia los estudios; como consecuencia de plantear las mismas exigencias para todos los alumnos por igual en cursos anteriores.

Asimismo, la inmensa mayoría de los programas educativos están diseñados de forma que no dan muchas posibilidades de demostrar habilidades de razonamiento complejas, que es la característica esencial de los alumnos con talento matemático.

Es por tanto imprescindible identificar a estos sujetos con el fin de reconocer su talento, hacerles visibles y atenderlos según sus capacidades y necesidades.

2.3. Enriquecimiento curricular

Unas buenas prácticas docentes deben fomentar que el desarrollo de manera óptima de las capacidades de cada uno de los alumnos. Luego, vamos a buscar medidas que reconozcan las habilidades de los alumnos con talento matemático y que ayuden a su desarrollo (Ramírez, 2012).

En nuestro caso, para atender las necesidades de los alumnos con talento matemático vamos a seguir una estrategia basada en el enriquecimiento.

El enriquecimiento curricular consiste en añadir nuevos contenidos o temas que no están cubiertos por el currículo oficial o trabajar en un nivel de mayor profundidad determinados contenidos de éste. El enriquecimiento no significa avanzar en el currículo de cursos superiores, sino ampliar la estructura de los temas y contenidos abordándolos con un nivel mayor de abstracción y de complejidad. No se trata solamente de ampliar la información sobre un tema en concreto, sino de promover el uso de la investigación o del pensamiento creativo en un determinado ámbito (cómo se genera el nuevo conocimiento) y de explorar la lógica interna de éste y sus relaciones con otras áreas de conocimiento. (Blanco, Ríos y Benavides, 2004, p.54).

Resumiendo, el enriquecimiento curricular se basa en tres principios fundamentales:

- Profundizar en los contenidos del currículo.
- Ampliar los contenidos del currículo.

- No avanzar a los contenidos de cursos superiores.

Según Castelló (1995), esta estrategia ha demostrado una gran efectividad; pues incentiva la motivación del alumno a la vez que favorece la integración y la inclusión, ya que los alumnos comparten espacios y actividades con sus compañeros de clase, pero en algunas ocasiones, trabajando contenidos adecuados a sus capacidades. El gran inconveniente de esta medida es su gran coste. El diseño del enriquecimiento requiere mucho trabajo, no solo por parte del profesor, sino también es necesaria a veces la colaboración de otros profesionales (orientador, pedagogos,...).

Existen dos tipos de enriquecimiento: el vertical y el horizontal. Atendiendo a Blanco, Ríos y Benavides (2004) caracterizamos el vertical por el aumento de contenidos, mientras que el horizontal nos lleva a establecer conexiones entre los conocimientos que ya tienen los alumnos.

Castelló (1995) diferencia entre adaptación del currículo y ampliación de éste. Basándonos en sus notas, elaboramos la siguiente tabla:

Ampliación del currículo	*Adaptación del currículo*
Amplia el número de objetivos del currículo.	Van más allá de la ampliación del currículo.
Se diseña de manera que se lleve a cabo un trabajo individualizado y autónomo.	Se lleva a cabo una reconfiguración del currículo donde lo más importante es establecer relaciones.
El aumento de contenidos y de información satisface la curiosidad y favorece la motivación.	Si se amplía, es necesario establecer las relaciones con los objetivos básicos.
Lo más importante en la elección de los contenidos nuevos es que motiven al alumno y que no se avance materia.	Requiere de un gran conocimiento del currículo en toda su profundidad.
	No siempre es eficaz para talentos específicos.

Tabla 1: Diferenciación entre ampliación y adaptación del currículo.

Es en este tipo de intervención en el que nos vamos a centrar posteriormente para nuestro diseño de tareas.

2.4. Tratamiento curricular

Como hemos comentado, no se pretende adelantar contenidos, sino profundizar o ampliar los que ya hay en el currículo. Por esta razón, lo primero es estudiar el currículo de matemáticas del bloque de Números y Álgebra. Se han analizado todos los contenidos de Números y Álgebra de cada una de las asignaturas, y destacamos en la siguiente tabla los que van a formar parte del enriquecimiento.

<table>
<tr><th colspan="2">CONTENIDOS PRIMERO Y SEGUNDO DE ESO</th></tr>
<tr><th colspan="2">Matemáticas</th></tr>
<tr><td colspan="2">Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad.
Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos.
Números negativos. Significado y utilización en contextos reales.
Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones.
Operaciones con calculadora.
Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural. Operaciones.
Potencias de base 10. Utilización de la notación científica para representar números grandes.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONTENIDOS TERCERO DE ESO</th></tr>
<tr><th>Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas</th><th>Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico).
Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONTENIDOS PRIMERO DE BACHILLERATO</th></tr>
<tr><th>Matemáticas I</th><th>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I</th></tr>
<tr><td>Números complejos. Forma binómica y polar. Representaciones gráficas. Operaciones elementales. Fórmula de Moivre.
Logaritmos decimales y neperianos. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.</td><td>Operaciones con capitales financieros. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tasas e intereses bancarios. Capitalización y amortización simple y compuesta.
Utilización de recursos tecnológicos para la realización de cálculos financieros y mercantiles.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONTENIDOS SEGUNDO DE BACHILLERATO</th></tr>
<tr><th>Matemáticas II</th><th>Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II</th></tr>
<tr><td>Clasificación de matrices. Operaciones.
Determinantes. Propiedades elementales.
Matriz inversa.</td><td>Clasificación de matrices.
Operaciones con matrices.
Matriz inversa. Determinantes hasta orden 3.</td></tr>
</table>

Tabla 2: Contenidos del bloque de Números y Álgebra.

No se incluyen contenidos en 4º de ESO porque, en este curso, vamos a hacer un enriquecimiento basado en la ampliación del currículo con contenidos nuevos que no muestran relación con ninguno de los contenidos del bloque de Números y Álgebra, pero si se trabajará contenidos transversales del primer bloque, en particular estrategias de resolución de problemas.

De cada uno de los contenidos seleccionados se ha hecho un estudio comparativo sobre contenidos relacionados de cursos superiores para que no se produzca un adelantamiento.

Para mayor información sobre el currículo basta acudir al *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre* que establece el currículo básico de matemáticas, donde se puede encontrar los contenidos en su totalidad, además de los correspondientes criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

En 3º de ESO se lleva a cabo una profundización. En este caso particular vamos a introducir la siguiente tabla para ver el progreso por cursos de los contenidos relacionados con ecuaciones; y constataremos que no se adelanta contenidos porque como veremos posteriormente nosotros llevaremos a cabo una tarea encaminada a demostraciones, y demostraciones algebraicas sobre ecuaciones no es un contenido que aparezca en el currículo.

PROFUNDIZACIÓN EN TERCERO DE ESO: ECUACIONES	
Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado y de sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Demostraciones.	
Cursos	*Contenidos*
1º y 2º de ESO	Ec. de primer grado. Ec. de segundo grado (método algebraico). Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
3º de ESO (académicas)	Ec. de segundo grado. Ec. sencillas de grado superior a dos. Sistemas de ecuaciones.
3º de ESO (aplicadas)	Ec. de segundo grado. Sistemas de ecuaciones.
4º de ESO (académicas)	Ec. de grado superior a dos.
4º de ESO (aplicadas)	Ec. y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
1º de BTO (ciencias)	Ec. logarítmicas y exponenciales. Ec. no algebraicas sencillas. Método de Gauss.
1º de BTO (sociales)	Ec. lineales, cuadráticas y reducibles a ellas, exponenciales y logarítmicas. Sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado con dos incógnitas. Método de Gauss.
2º de BTO (ciencias)	Método de Gauss. Regla de Cramer.
2º de BTO (sociales)	Método de Gauss.

Tabla 3: Profundización en 3º de ESO: Ecuaciones.

3. Diseño de tareas

Vamos a introducir en este apartado las tareas de enriquecimiento curricular seleccionadas para 3º de ESO, 4º de ESO y 1º BTO de Ciencias Sociales, así como su justificación de por qué es una tarea de enriquecimiento adecuada a un niño con talento matemático. Para ello hemos partido del estudio del currículo que hicimos anteriormente, y hemos elegido los contenidos que vamos a tratar. Vamos a diseñar por tanto cada tarea para cubrir un objetivo relacionado con esos contenidos, y lo haremos encuadrándola dentro de la unidad didáctica correspondiente.

He elegido estos tres cursos en particular porque podemos observar tres tareas muy diferentes entre sí, y a la vez interesantes para trabajar con el alumnado.

3.1. 3º de ESO: Demostraciones Algebraicas

En el caso del curso de 3º de ESO vamos a desarrollar una tarea que valdrá para profundizar en los contenidos del bloque de Números y Álgebra del currículo tanto de la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas como de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. En particular se va a profundizar sobre el método de resolución de ecuaciones de segundo grado completas y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Podemos usar las mismas actividades para las dos asignaturas, pues en lo relativo a estos contenidos los dos currículos son similares.

Se trata de que los alumnos con cierta habilidad matemática profundicen en esta resolución sin avanzar materia, para ello se les va a proponer que demuestren la fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado completa, y también las expresiones para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Esto es una actividad de profundización, pues en ningún momento del currículo de matemáticas de secundaria se exige que se les enseñe la demostración de la fórmula de resolución de una ecuación de segundo grado, a pesar de usar esta expresión con cierta frecuencia. En el caso de los Sistemas Lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, que se explican por primera vez en 3º de ESO, ni siquiera se ve la expresión de la solución en función de los coeficientes (caso de que el sistema sea compatible determinado), luego nosotros proponemos que los alumnos conozcan y sepan demostrar dicha expresión. Además se fomenta el uso del lenguaje matemático y la generalización.

Por lo tanto la tarea se desarrollará dentro de la unidad didáctica destinada a Ecuaciones. Caso de que la programación didáctica recoja dos unidades didácticas dentro del bloque de ecuaciones, una para ecuaciones (primer, segundo grado y sencillas de grado superior a dos) y otra para sistemas de ecuaciones lineales; la tarea se desarrollará en dos partes. La primera, dentro de la primera unidad didáctica, y la segunda parte dentro de la unidad didáctica dedicada a sistemas.

El primer ejercicio se le puede proponer al alumno o alumnos en cuestión (caso de ser varios pueden trabajar en grupo) para que lo realicen en clase después de explicar la fórmula de resolución de ecuación de segundo grado y ver algunos ejemplos; mientras que el resto de alumnos sigue el ritmo de la clase normal repasando los contenidos ya dados pero no adelantando temario. La segunda actividad se hará de forma análoga después de explicar los métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado analíticamente; es más, se puede proponer que demuestren la expresión de tres formas distintas, una por cada método de resolución: Sustitución, Igualación y Reducción.

Tarea 3º ESO: Demostraciones algebraicas	
Enriquecimiento	Profundización (demostración)
Característica del talento	Alcanzar el aprendizaje de los conceptos con mayor profundidad. Habilidades de razonamiento complejas.

Tabla 4: Justificación del enriquecimiento en 3º de ESO

Tarea

Ejercicio 1. Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con a no nulo, demostrar que la solución o las soluciones reales, caso de que existan, vienen dadas por la siguiente expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ejercicio 2. Dado el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \bar{a}x + \bar{b}y = \bar{c}, \end{cases}$$

demostrar que la solución, caso de que exista una única solución, viene dada por la siguiente expresión:

$$x = \frac{\bar{b}c - b\bar{c}}{a\bar{b} - \bar{a}b}, \qquad y = \frac{a\bar{c} - \bar{a}c}{a\bar{b} - \bar{a}b}.$$

3.2. 4º de ESO: El Principio del Palomar

Para los alumnos de cuarto de ESO vamos a desarrollar una actividad basada en *El Principio del Palomar*, enunciado por primera vez por el matemático alemán Dirichlet en 1834. En esta tarea se desarrollarán contenidos que no aparecen en el currículo de matemática en ninguna de las asignaturas de la Educación Secundaria, por lo cual no hay ningún problema en que usemos esta tarea de enriquecimiento para todos los alumnos de 4º de ESO, tanto de la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas como de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

He considerado esta tarea oportuna porque creo que se trata de un contenido muy fácil de comprender intuitivamente, pero que puede llevar a convertirse en una herramienta muy útil y potente para la resolución de ciertos tipos de problemas. Además, es algo atractivo de enseñar que da lugar a que los alumnos trabajen por si solos y resuelvan propiedades curiosas como las que plantearemos.

Esta tarea está diseñada con la idea de que el alumno o alumnos (caso de que sean varios lo ideal sería que trabajaran juntos) contarán con un ordenador con acceso a Internet en el aula. De modo que ellos mismos tendrían que buscar información sobre dicho principio, en sus múltiples formulaciones hasta entenderlo y crear su propia versión. Así, según la capacidad del alumno, el tiempo, y otros factores se puede sugerir que se informen sobre el *Principio del Palomar* en su versión más básica o llegar hasta el *Principio del Palomar generalizado* y usarlo para resolver algún problema.

De este modo, el profesor puede seguir con el ritmo normal de la clase. Se llevaría a cabo dicha actividad en días que el profesor proponga actividades de repaso o dudas que estos alumnos demuestren superadas, por lo que los alumnos con talento matemático sólo necesitarán la presencia del profesor puntualmente para aclarar dudas de esta tarea.

Tarea 4º ESO: El Principio del Palomar	
Enriquecimiento	Desarrollar estrategias complejas de resolución de problemas. Ampliación con contenidos no curriculares.
Característica del talento	Autonomía. Flexibilidad y creatividad. Entusiasmo y curiosidad por las matemáticas.

Tabla 5: Justificación del enriquecimiento en 4º de ESO

Tarea

Supongamos que vamos a hacer un viaje en tren, donde cada pasajero lleva, al menos, una maleta. Como ya sabemos, en los trenes hay preparados unos compartimentos situados en la parte superior de los asientos para que los pasajeros depositen su equipaje. Pero no todas las filas de asientos tienen arriba sitio para equipaje, pues a veces ese espacio ha sido ocupado por maquinaria. Si cada pasajero trae como mínimo una maleta, ¿qué ocurre entonces al colocar las maletas de los pasajeros en los compartimentos? ¿podríamos poner sólo una maleta en cada compartimento?

Ejercicio 1. Busca información sobre *El Principio del Palomar* en Internet. Una vez te hayas informado lo suficiente, pregunta las dudas que tengas a tu profesor o profesora y redacta tus propias notas teóricas sobre el tema.

Las siguientes situaciones pueden ser explicadas usando el Principio del Palomar.

En cualquier fiesta donde acudan más de dos personas, siempre hay dos invitados que tienen igual número de amigos dentro de la fiesta.

En cualquier grupo de seis personas siempre hay tres que se conocen entre sí o tres que no se conocen.

En la ciudad de Sevilla hay al menos dos personas que tienen el mismo número de pelos en la cabeza. ¿Ocurre lo mismo en Granada? ¿Y en Almería?

¿Puede contener un triángulo equilátero de 2cm de lado cinco puntos de forma que no hayan dos puntos a distancia menor o igual a 1cm?

Si tomamos seis números del 1 al 10, seguro que hay dos que sumen 11.

En la evaluación de 4º de ESO del instituto se ha dispuesto una mesa circular donde están dispuestas 15 tarjetas con los nombres de los 15 profesores que se tienen que reunir allí. Las tarjetas están colocadas de manera que el nombre del profesor queda oculto. Los profesores entran y se sientan sin tocar ninguna de las tarjetas. Una vez sentados, cada uno coge la tarjeta que tiene delante y lee el nombre que hay escrito. Sorprendentemente nadie lee su propio nombre. Pero si sueltan las tarjetas de manera que quede a la vista los nombres escritos, la mesa circular se puede girar de manera que al menos dos de los profesores estén a la vez sentados frente a la tarjeta que lleva su nombre.

Ejercicio 2. Elige una o varias de las propuestas anteriores y demuéstralas usando el *Principio del Palomar*. Si lo prefieres puedes buscar otras opciones similares en la red.

Como seguro ya has descubierto en tu investigación sobre este tema, hay generalizaciones de este resultado. La más común de ella es la conocida como *Principio del Palomar Generalizado*. Si lo deseas y te resulta interesante, puedes informarte más detalladamente y resolver algunos problemas que encuentres en la red usando el principio generalizado.

Ejercicio opcional. Haz un mural donde expongas tu propias formulación y explicación del *Principio del Palomar*. Y ejemplifícalo con alguna aplicación sencilla. Puedes diseñarlo de la forma más atractiva posible para exponer tu trabajo en alguno de los tablones del instituto.

3.3. 1º de BTO Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I: Amortización Francesa

En este caso hemos desarrollado una actividad menos teórica y más aplicada que nos da una buena ocasión para una aplicación real y actual de las matemáticas a las finanzas. La tarea se desarrollará al final de la unidad didáctica dedicada a Matemáticas Financieras, cuando los alumnos ya conozcan la capitalización y la amortización simple y compuesta.

El contenido de la tarea es ahondar sobre un tipo concreto de amortización compuesta, la Amortización Francesa. De este modo verán cómo se usan técnicas matemáticas sencillas diariamente en las entidades bancarias, y cómo dependiendo de qué técnicas se usan se busca el mayor beneficio de la empresa. Se fomenta por tanto el cuestionamiento del alumno. Además fomentaremos el uso de recursos informáticos que también viene recogido en el currículo de matemáticas, además de ser un contenido transversal.

Tarea 1º BTO Ciencias Sociales: Amortización Francesa	
Enriquecimiento	Profundización: significado de las fórmulas
Característica del talento	Autonomía. Entusiasmo y curiosidad por las matemáticas. Aplicación de las matemáticas a otros contextos.

Tabla 6: Justificación del enriquecimiento en 4º de BTO Ciencias Sociales

Tarea

Hasta ahora hemos visto qué es una amortización de un préstamo o de una deuda, y además sabemos calcular las anualidades correspondientes. Vamos a estudiar ahora, un caso particular de amortización: el Sistema Francés. Es uno de los sistemas más comunes en la actualidad. Veremos cómo funciona para indagar sobre sus ventajas y sus inconvenientes.

El Sistema de amortización Francés se caracteriza por el pago de anualidades constantes donde va cambiando la cantidad que se destina a pagar los intereses y la que se destina a pagar la deuda. Al principio se pagan muchos intereses, pero a medida que pasa el tiempo, disminuye la cantidad de interés y aumenta el pago de la deuda.

Recordemos el contexto de una amortización: Se trata de pagar una deuda D en n pagos iguales, o anualidades. A estas anualidades (que también pueden ser mensuales, cuatrimestrales,…) las identificaremos como una cantidad C. Si llamamos i al interés, se sigue el siguiente esquema:

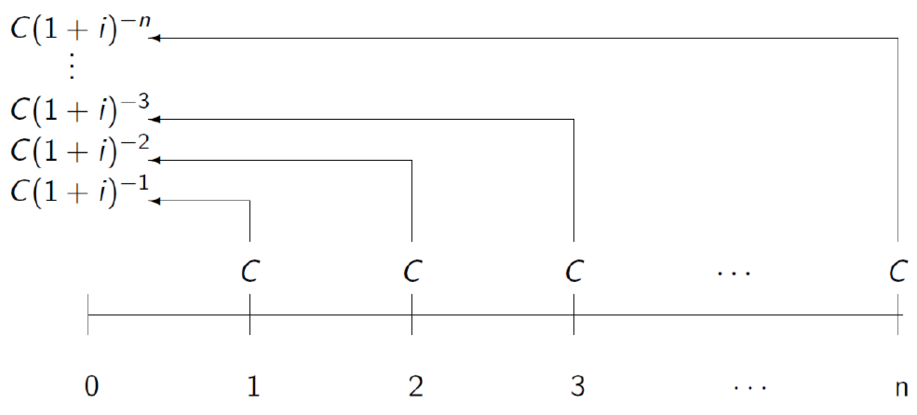


Figura 1: Esquema amortización

Luego la suma de todas las cantidades pagadas en cada periodo de tiempo y ponderadas por el interés i deben ser igual a la deuda original:

$$D = C(1+i)^{-1} + C(1+i)^{-2} + C(1+i)^{-3} + \cdots + C(1+i)^{-(n-1)} + C(1+i)^{-n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C(1+i)^{-k} = C \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k}.$$

Hemos llegado a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{1+i}$, luego tenemos:

$$D = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

De esta forma sabemos calcular las anualidades que vamos a pagar dependiendo del número de periodos, del interés y de la deuda:

$$C = \frac{D \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Ahora empecemos a estudiar el Sistema Francés en sí. Se trata de que de cada anualidad C habrá una parte destinada a interés, I_k, y otra destinada a pagar la deuda, A_k, que irán cambiando según el periodo $k = 1, \dots, n$. Por lo tanto se cumple:

$$C = I_k + A_k, \qquad D = \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

Veamos un poco más de notación. En cada periodo k distinguiremos también la cantidad total que llevamos amortizada, M_k, y lo que nos queda de deuda, D_k.

$$\begin{array}{cc}
M_0 = 0 & D_0 = D \\
M_1 = A_1 & D_1 = D - A_1 \\
M_2 = A_1 + A_2 & D_2 = D_1 - A_2 \\
\vdots & \vdots \\
M_k = \sum_{j=1}^{k} A_j & D_k = D - A_k \\
\vdots & \vdots \\
M_n = D & D_n = 0
\end{array}$$

Para saber qué parte se destina a los intereses y cuál a saldar la deuda sólo nos falta calcular I_k y A_k en cada periodo, lo cual es muy sencillo. Para saber I_k basta calcular el interés sobre la cantidad de deuda que queda por amortizar, y a partir de ahí, restamos para conseguir A_k. Es decir,

$$\begin{array}{ll} I_1 = D \cdot i & A_1 = C - I_1 \\ I_2 = D_1 \cdot i & A_2 = C - I_2 \\ \vdots & \vdots \\ I_k = D_{k-1} \cdot i & A_k = C - I_k. \end{array}$$

Ejemplo. Supongamos que queremos comprar un coche que cuesta 18000 €. Para ello nos conceden un préstamo a pagar anualmente mediante el Sistema Francés en 5 años con un interés del 12%.

Vamos a calcular cuál es la cuota fija que debemos pagar cada año y qué parte de la cuota se destina a pagar los intereses y cuál a amortizar la deuda en cada periodo. Para ellos construimos la siguiente tabla:

$$C = \frac{D \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{18000 \cdot 0{,}12}{1 - \frac{1}{1{,}12^5}} = 4993{,}38$$

Año k	*Pago* C	*Interés* I_k	*Amortización* A_k	*Total pagado* M_k	*Deuda pendiente* D_k
0	0	0	0	0	18000
1	4993,38	2160	2833,38	2833,38	15166,62
2	4993,38	1820	3173,38	6006,76	11993,24
3	4993,38	1439,19	3554,19	9560,95	8439,05
4	4993,38	1012,69	3980,69	13541,64	4458,36
5	4993,38	535	4458,38	18000	0

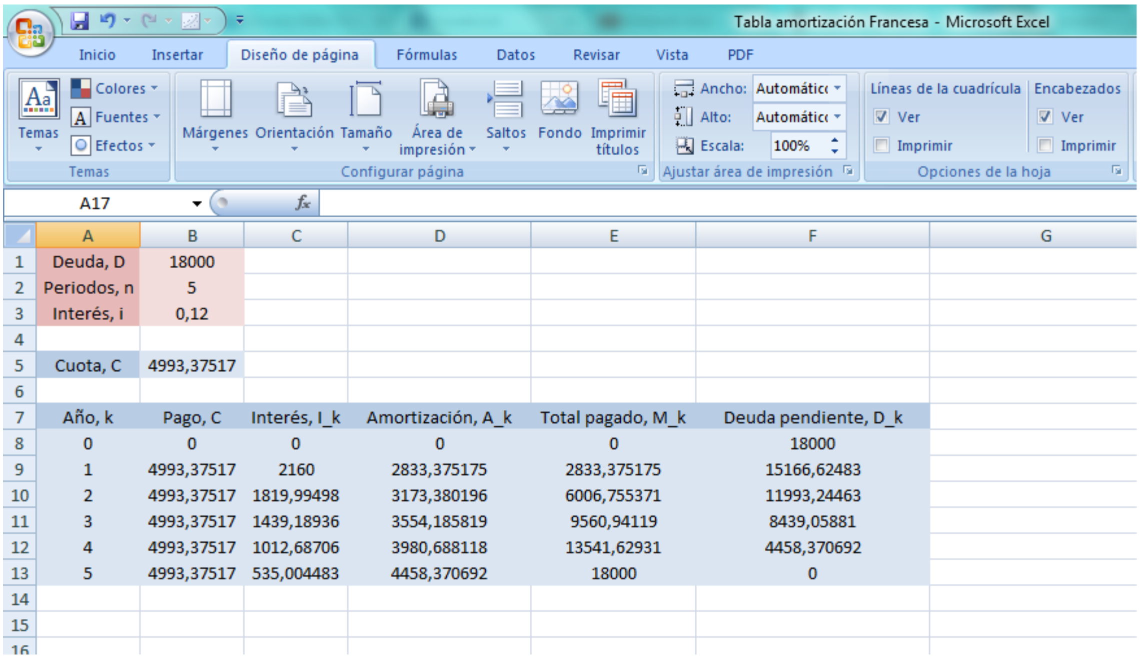
Tabla 7: Ejemplo Amortización Fracesa

Como podemos observar la parte que se destina a intereses va disminuyendo a medida que aumenta la parte que se destina a amortizar la deuda.

Vamos a ver las ventajas y los inconvenientes que tiene este sistema para las entidades bancarias. Es uno de los más contratados en la actualidad, y en parte esto se debe a que todas las cuotas son constantes. Pero tiene el gran inconveniente de que al pagar antes mucho más intereses que amortización, si tenemos un problema a la mitad del tiempo, no habremos pagado la mitad del préstamo, la mayor parte de lo pagado hasta ese momento serán intereses; y la deuda que le debemos al banco es aún muy extensa. De esta manera se beneficia a la entidad bancaria que se asegura el pago de los intereses de manera más rápida que si se utilizara otro sistema de amortización.

Ejercicio 1. Piensa qué ocurrirá si la persona que debe la deuda (con un Sistema Francés) decide pagar un gran pago en uno de los periodos para reducir drásticamente la deuda. ¿Qué es mejor, que ese pago extra se produzca al principio o al final de los periodos?

Ejercicio 2. Construye una tabla en Excell, como la de la imagen, que calcule la tabla anterior directamente con sólo cambiar los datos iniciales (deuda, periodos e interés).



	A	B	C	D	E	F
1	Deuda, D	18000				
2	Periodos, n	5				
3	Interés, i	0,12				
4						
5	Cuota, C	4993,37517				
6						
7	Año, k	Pago, C	Interés, I_k	Amortización, A_k	Total pagado, M_k	Deuda pendiente, D_k
8	0	0	0	0	0	18000
9	1	4993,37517	2160	2833,375175	2833,375175	15166,62483
10	2	4993,37517	1819,99498	3173,380196	6006,755371	11993,24463
11	3	4993,37517	1439,18936	3554,185819	9560,94119	8439,05881
12	4	4993,37517	1012,68706	3980,688118	13541,62931	4458,370692
13	5	4993,37517	535,004483	4458,370692	18000	0

Figura 2: Tabla Excell de ejemplo Amortización Francesa

4. Conclusiones

En el diseño de las tareas se han tenido en cuenta tanto las características del talento matemático como las orientaciones metodológicas para la atención de estos estudiantes y consideramos que pueden ser interesantes para motivarlos y ayudarlos a potenciar sus habilidades. Los alumnos con talento matemático forman un conjunto heterogéneo, de modo que podríamos mejorar su atención si diseñamos tareas particularizadas a cada alumno, especialmente encaminadas a que satisfagan su interés por las matemáticas.

A su vez, contar con tareas de este tipo, puede suponer un recurso interesante para que el profesorado atienda a la diversidad. Así, con una planificación previa de tareas incluidas en la unidad didáctica, se podría atender de manera eficiente a los alumnos con talento sin desatender el resto de la clase, aprovechando su autonomía a la hora de trabajar.

Por último, hacer notar que al hacer el estudio vertical de todos los contenidos del bloque de Números y Álgebra del currículo desde 1º de ESO hasta 2º de Bachillerato, favorece la visión que el profesor asume del enriquecimiento, ayudándolo a comprender mejor la profundización y no avanzar en contenidos de cursos superiores.

5. Referencias

Barrera, A., Durán, R., González, J. y Reina, C.L. (2008). *Manual de atención al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo por presentar altas capacidades intelectuales*. Junta de Andalucía, Consejería de Educación, Dirección General de Participación y Equidad en Educación.

Blanco, R., Ríos, C.G. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. *La educación de niños con talento en Iberoamérica*, 49-60.

Castelló, A. (1995). Estrategias de enriquecimiento del currículum para alumnos y alumnas superdotados. *Aula de Innovación Educativa*, 4(45), 19-26.

González, A. (2016). *Enriquecimiento curricular para el bloque de Números y Álgebra en ESO y Bachillerato*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.

Miller, R.C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. ERIC Digest\# E482.

Mota, M. E. F. y Jiménez, A. D. J. P. (2011). Las Altas Capacidades y el Desarrollo del Talento Matemático. El Proyecto Estalmat-Andalucía. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 27, 89-113.

Ramírez Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.