suma+
Secciones
Julio 2019
91
pp. 1-9

Proporcionalidad y reparto electoral

Adela María Villegas Escobar
Rafael Ramírez Uclés

Presentamos el diseño e implementación de una sesión de enriquecimiento curricular sobre proporcionalidad para un grupo de estudiantes con talento matemático. Se basa en los procedimientos seguidos para repartir los escaños de unas elecciones en un sistema de representación proporcional, más conocidos como métodos de reparto proporcional.

Diseño de la sesión

Entre las distintas funciones que debe desempeñar un docente, se encuentran proporcionar una educación individualizada y adaptada a las necesidades de cada uno de los alumnos y fomentar el desarrollo intelectual de los estudiantes. Por este motivo, el profesor ha de intervenir, utilizando estrategias y metodologías para estimular a aquellos alumnos con talento matemático, para que puedan desarrollar sus altas capacidades.

La sesión de enriquecimiento que se propone se diseñó e implementó con estudiantes veteranos del programa Estalmat (Bachillerato), pero puede adaptarse para la ESO. Gira en torno al contenido de proporcionalidad. Concretamente, se centrará en el reparto de escaños, un tema que va cobrando más importancia para ellos,

El rincón de ESTALMAT

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2019 y aceptado en abril de 2019

dada su edad, y es de actualidad por las elecciones generales, municipales y europeas.

Se llevarán las proporciones al terreno de las matemáticas electorales y al reparto de escaños dentro de un sistema de representación proporcional. Por lo tanto, no se va a avanzar en el temario de cursos superiores, sino que se van a tratar temas nuevos. En este artículo describimos sólo algunos de los aspectos del análisis didáctico más detallado en el trabajo de Villegas (2017).

Los contenidos de proporcionalidad se pueden agrupar en tres focos, dentro de los cuales se pueden desglosar las ideas prioritarias e incluir las ideas nuevas necesarias para el enriquecimiento según se puede leer en la tabla 1.

En cuanto al análisis fenomenológico se muestran las conexiones entre los conceptos y estructuras del tema con la naturaleza, sociedad, ciencia y cultura. Ejemplos de fenómenos en los que interviene la proporcionalidad, pueden ser: elaborar una receta de cocina, cálculo del precio de una excursión, ofertas comerciales…

Como lo que se desea es conducir estas situaciones y contextos al tema que abordará el enriquecimiento, se resalta el campo social sobre el resto y se introducen algunas situaciones relacionadas con las matemáticas electorales:

— Porcentaje de la población total de un país en una determinada región.
— Porcentaje de votos que ha conseguido un partido tras unas elecciones.
— Reparto de escaños a un determinado partido político en proporción (directa) a los votos obtenidos.

Para proponer las actividades que el alumnado realizará, es importante tanto el diseño como los criterios de selección de las tareas para optimizar al aprendizaje del alumnado.

El objetivo principal de la sesión es estudiar las proporciones desde una perspectiva diferente, enmarcada dentro de un contexto relativamente nuevo para los estudiantes, fomentando el pensamiento crítico, el trabajo en grupo y la creatividad, sobre otros aspectos.

A continuación, se exponen una serie de tareas para desarrollar al máximo las competencias y habilidades de los alumnos con talento matemático. Sin embargo, previo a la realización de las tareas se ha de proporcionar al alumno algún tipo de información sobre el tema a tratar para poder realizarlas adecuadamente, pues son necesarios diversos conceptos sobre los sistemas electorales en general, y sobre los sistemas de representación proporcional, en particular.

Antes de comenzar con las matemáticas electorales, se les planteará a los alumnos una tarea introductoria relacionada con la proporcionalidad, que posteriormente se podría trasladar al tema de reparto proporcional.

La proporcionalidad es un tema que está presente en el día a día de las personas, aunque no seamos conscientes de ello.

Puesto que se desea fomentar la participación activa, se iniciará la sesión con una lluvia de ideas sobre las diferentes maneras de hacer repartos. Primero sobre repartos de beneficios en función acciones y luego sobre repartos de concejales en función de los votos obtenidos.

Proporción	*Relación de proporcionalidad directa*	*Porcentaje*
Noción de razón y proporción Noción de constante de proporcionalidad Propiedad fundamental de proporcionalidad	Noción de magnitudes con relación de proporcionalidad directa Algoritmo del método: regla de tres directa Formas de expresión de la relación de proporcionalidad directa	Noción de porcentaje Cálculo de porcentajes mediante regla de tres Porcentajes en la vida cotidiana
Sistemas electorales Métodos de reparto proporcional. Métodos de divisores Casos particulares: D'Hondt, Adams, Sainte-Laguë		

Tabla 1. Contenidos (López, 2014)

Tarea 1
Una empresa quiere repartir los beneficios que ha obtenido a lo largo del año entre sus 8 accionistas, según el número de acciones que cada uno posea. ¿Cómo se podrían repartir los beneficios

Tras esta lluvia de ideas inicial, se traslada la situación a un contexto electoral para que vean que se trata de la misma situación y se le plantea la siguiente tarea con datos concretos.

Tarea 2
En un pueblo de Granada que tiene 100 habitantes, se han convocado elecciones municipales con el fin de repartir 14 concejales. El Partido A consigue 42 votos, el Partido B, 31 votos, el Partido C, 18, y el Partido D, 9. ¿Cómo harías el reparto de los concejales?

Esta tarea guarda cierta similitud con la anterior. Deben repartir una serie de concejales, que en la tarea anterior serían los beneficios de la empresa, entre una serie de partidos políticos, anteriormente, los accionistas. El número de acciones se corresponde ahora con los votantes, y los votos que consigue cada partido serían las acciones que posee cada accionista. Sin embargo, hay una pequeña diferencia. En esta ocasión, el reparto ha de ser entero, es decir, no se pueden asignar dos concejales y medio a un partido, pero sí se puede dar céntimos a los accionistas, si fuera necesario. Esto es posible, ya que la unidad de medida usual del dinero es el euro, pero si la unidad más utilizada fuese el céntimo, se produciría una situación equivalente a la de la tarea previa, pues no se podría repartir un céntimo y medio a los accionistas. Es importante recalcar que continúa siendo un reparto entero.

Al igual que antes, se realiza una breve discusión sobre cómo sería la forma ideal de repartir los concejales, así como analizar las ventajas e inconvenientes de las distintas propuestas de los alumnos, de forma grupal. El objetivo de esta tarea no es obtener una solución al problema, sino tratar reunir las posibles formas de hacer el reparto.

Tras realizar estas dos tareas introductorias, comienza el cuerpo de la sesión. Para introducir a los alumnos en las matemáticas electorales, es necesario que tengan ciertos conocimientos acerca de sistemas electorales, como los más comunes y, dentro de los sistemas electorales de representación proporcional, algunos de los métodos de reparto proporcional más conocidos.

Así, se les proporciona unas fichas (tabla 2 y tabla 3) con la información necesaria, mientras que el docente va exponiendo el contenido de la misma. Esta ficha se puede confeccionar a partir del trabajo de Moreno y Villegas (2018) en el que aparecen los contenidos más extendidos, ejemplos diferentes y propuesta de actividades.

Tras esta ligera introducción al mundo de las matemáticas electorales, el docente explica a los alumnos en pizarra como son algunos de los métodos más usados en los sistemas de reparto proporcional, a saber, el método D'Hondt, Sainte-Laguë y Adams.

De forma conjunta, y puesto que estos tres métodos forman parte de los métodos divisores,

¿Qué es un sistema electoral?
Es una estructura compuesta por las normativas y los procesos que, fijados por la ley, permiten que los ciudadanos intervengan en las decisiones políticas a través del voto. En el diseño de un sistema electoral para un parlamento, hay que establecer cinco partes, de las cuales, en al menos dos de ellas, las matemáticas son esenciales. Estas cinco partes de las que se habla son: • El tamaño del parlamento • Las circunscripciones y el método que se utiliza para calcular su tamaño • Las barreras electorales • La fórmula electoral que se utiliza para repartir los escaños • El método de votación y el escrutinio La más importante desde el punto de vista matemático es la fórmula electoral. Hay diversos métodos de reparto siendo los más conocidos y usados el de Hamilton, D'Hondt, Sainte-Laguë y Adams.

Tabla 2. ¿Qué es un sistema electoral?

se muestra en la pizarra, el procedimiento que se sigue al hacer un reparto determinado. Una vez explicados algunos conceptos básicos, se vuelve a la Tarea 2 y se resuelve utilizando el método D'Hondt.

de las características que definen a esta clase de alumnos. Con ella, se pretende que los alumnos puedan dar el máximo de sus capacidades, mostrar sus habilidades de razonamiento, desarrollar estrategias…

Tipos de sistemas electorales
Entre los más destacados, se encuentran la mayoría simple y el reparto proporcional.
El sistema de mayoría simple se aplica normalmente en pequeñas circunscripciones en las que se elige al candidato más votado en cada una de ellas. Gran Bretaña es el caso típico de un sistema de mayoría simple.
El sistema de representación proporcional, ha sido el principal adversario de los sistemas de mayoría simple. Este sistema intenta resolver los problemas con la sobrerrepresentación y la subrepresentación que provoca la mayoría simple, asignando a cada partido un número de escaños próximo a la proporción de votos recibidos.
• Método D'Hondt
El redondeo por defecto equivale a que el punto de redondeo en el intervalo limitado por dos enteros consecutivos sea el entero más grande, y por tanto, las fracciones del interior del intervalo se redondean al entero por defecto que es la parte entera de la fracción. En este caso, el método se identifica por la sucesión: d = {1, 2, 3, 4,…}.
• Método Sainte-Laguë
Si se fija como punto de redondeo el centro del intervalo, las fracciones con parte decimal inferior a 0'5 redondearán a la baja, mientras que las fracciones con parte superior al 0'5 redondearán al entero superior. En este caso, el método se identifica por la sucesión: d = {0'5, 1'5, 2'5, 3'5,…}.
• Método Adams
Si se establece como punto de redondeo el extremo inferior del intervalo, las fracciones del interior del intervalo se redondean al entero superior. En este caso, el método se identifica por la sucesión: d = {0, 1, 2, 3, 4,…}.

Tabla 3. Tipos de sistemas electorales

Tarea 3
Utilizando los métodos de reparto vistos, D'Hondt, Adams y Sainte-Laguë haz el reparto de concejales de la tarea anterior y compara el resultado con el que obtuviste en dicha tarea.

Hallados los tres resultados y tras observar que cada método proporciona un reparto diferente, es interesante que los alumnos expresen su opinión acerca de qué método de reparto es mejor y por qué, argumentando en qué criterios se basan para afirmarlo…

Tarea 4
Una vez obtenidos los repartos que proporcionan el método D'Hondt, Adams y Sainte-Laguë, ¿cuál de estos métodos consideras mejor? ¿Por qué? Haz una breve exposición sobre los criterios en los que te has basado para afirmarlo.

Para finalizar esta parte, se propone una tarea con el objetivo de poner de manifiesto la mayoría

Tarea 5
Propón un nuevo método de reparto proporcional y describe sus características.

Por último, se facilita al alumno una serie de contenidos relacionados con el tema, sobre los que puede desarrollar técnicas de búsqueda de información y valorar el uso de las matemáticas en la vida cotidiana. Esta lista pretende incentivar su curiosidad por las matemáticas electorales y fomentar la autonomía de aprendizaje (tabla 4).

Implementación de la sesión de enriquecimiento

La sesión de enriquecimiento anteriormente diseñada, fue puesta en práctica para los alumnos veteranos de Estalmat en Andalucía Oriental.

Para saber más
Si eres curios@ y quieres saber más cosas sobre matemáticas electorales, puedes informarte sobre otros temas como: • Método de Hamilton. • Otros métodos de restos mayores: Método de Droop y el método Imperialli. • Los métodos de Huntington. • Índices de poder. • Teorema de imposibilidad de Balinski y Young. • Métodos de elección social. • Índices de desproporcionalidad.

Tabla 4. Para saber más

Estos alumnos suelen estar cursando 1º o 2º de Bachillerato,

Nada más comenzar la sesión surge una pregunta en las diapositivas cuyo fin es introducir a los alumnos en el tema que se va a trabajar a lo largo de la sesión. Se les cuestiona cómo repartir una cantidad de dinero entre los accionistas de una empresa, de acuerdo a las acciones que cada uno tenga.

Los alumnos comienzan a responder aportando diferentes ideas y llegan a la conclusión de que la mejor opción es repartir el dinero de forma proporcional, utilizando porcentajes y proporciones, puesto que es lo más «justo» para todos los accionistas. Tras esta breve lluvia de ideas, se les propone dar todos los beneficios al accionista mayoritario, pero rechazan esta alternativa de inmediato.

Seguidamente se lleva esta tarea al terreno electoral, mostrando las similitudes entre ambas preguntas. Se propone en esta ocasión la misma pegunta, pero en lugar de repartir beneficios, se van a repartir concejales. En esta ocasión, la tarea se reparte en una ficha, donde deben explicar de forma individual cómo realizarían el reparto en esta nueva situación, utilizando todos los conocimientos que tengan, realizando operaciones, o simplemente, de forma escrita, para después comentar sus decisiones de forma grupal.

Esta vez el reparto es más variado. Hay alumnos que consideran que el partido que ha conseguido el mayor número de votos es el que debe llevarse todos los escaños. Otros en cambio, realizan un reparto próximo (puesto que redondean, de una forma u otra) al que es proporcional al número de votos. Con esta tarea comienzan a salir términos como proporción, circunscripción, método de reparto, sentido de justicia… Además, hay un pequeño grupo de alumnos, preocupados por la estabilidad política que proponen otra forma de repartir los concejales. Algunos alumnos son más drásticos, y deciden no repartir todos los concejales.

Después de esta pequeña puesta en común, comienza el núcleo principal de la sesión. Se les proporciona unas fichas con algunas definiciones y conceptos básicos en este campo de las matemáticas. En ellas aparece la definición y partes que componen un sistema electoral, los dos tipos de sistemas electorales predominantes y algunos métodos de reparto proporcional como son: el método D'Hondt, el método Adams y el método Sainte-Laguë.

Aunque en la ficha aparece como son los tres métodos, se muestra en la pizarra cómo es el algoritmo hasta llegar a la solución, utilizando uno de ellos, por ejemplo, D'Hondt.

Tras observar cómo es el algoritmo, los estudiantes realizan varias preguntas sobre el método, por ejemplo, si es necesario ordenar los partidos según el número de votos que haya conseguido, lo cual no es necesario, pero facilita el último paso del algoritmo (señalar los cocientes mayores), o qué habría sucedido si en lugar de ser 14 concejales se hubiesen tenido que repartir 15, pues habría un dilema respecto a qué partido debería quedarse con ese último escaño (hay empate).

Aclaradas estas dudas, los alumnos comienzan a realizar la tarea 3. Durante la realización de la misma, surge una pregunta general, al repartir los escaños utilizando el método Adams. Con este método, los divisores son: $\{0, 1, 2, 3, 4,\ldots\}$. Al efectuar la primera columna de cocientes, el alumno debería dividir los votos de cada partido entre el primer divisor, es decir, entre 0. Este hecho choca bastante, puesto que «no se puede dividir por 0» este caso, bastaría con dividir los votos entre un número lo suficientemente pequeño, por ejemplo: 10-20. Una vez hecha esta aclaración, llegan rápidamente a la conclusión de que el método Adams siempre asigna mínimo un escaño a cada partido.

Después de verificar que los tres métodos hacen un reparto distinto, se les plantea otra cuestión: ¿qué método es mejor? Llegados a este punto, cada uno tiene sus propias ideas y van más allá de lo tratado en la sesión, puesto que dada su curiosidad por el mundo que les rodea se han informado sobre temas políticos.

Algunos defienden que el método D'Hondt es el mejor ya que es «más proporcional y más justo», otros optan por Sainte-Laguë ya que la solución coincide con la que ellos habían hecho en un principio, y la mayoría está de acuerdo en que no es apropiado que el método Adams reparta un escaño a todos los partidos «gratis» aunque «tiene en cuenta a los partidos pequeños».

Transcurridos algunos minutos debatiendo qué método es mejor, y sin llegar a ninguna conclusión razonable, se les propone una última tarea, inventar un nuevo método en pequeños grupos de trabajo, que tenga todas las cualidades que ellos mismos han ido mencionando para que posteriormente, un representante del grupo, lo exponga al resto de compañeros.

En esta última parte de la sesión, los alumnos ponen de manifiesto y es visible su interés, y al mismo tiempo preocupación, por el tema del reparto de escaños. Puesto que el tiempo del que se dispone antes de que acabe la sesión es limitado, sólo algunos alumnos llegan a exponer su propuesta. Algunas de ellas son bastante interesantes, y con un poco más de tiempo, podrían haber propuesto un buen método de reparto. Otros alumnos, proponen métodos más sencillos, que ya han sido propuestos por matemáticos reconocidos, aunque ellos no tenían conocimiento de ello. Otro de los alumnos, proponía un método más radical, y aunque en un principio los compañeros no lo veían como un método adecuado, después de exponer sus razonamientos, algunos de los estudiantes cambiaron de opinión a su favor.

Uno de los grupos de trabajo no tuvo tiempo de exponer su propuesta. Sin embargo, al finalizar la sesión decidieron quedarse unos minutos más para explicarnos sus ideas, lo cual demuestra que la sesión fue motivadora para ellos y que poseen un entusiasmo inusual por las matemáticas.

Antes de dar por finalizada la sesión, aparece una diapositiva en pantalla con algunos temas de interés dentro de este campo de las matemáticas para que aquellos que sean curiosos puedan satisfacer esta curiosidad, en casa.

Algunas respuestas de los estudiantes

Tarea 2

Como ya se ha comentado lo que se valoraba en esta tarea no era el resultado del reparto, sino que los alumnos tuviesen en cuenta que están repartiendo una cantidad que no es divisible. También es necesario tener en cuenta que aún no se había instruido al alumnado sobre ninguno de los contenidos que se trataron a lo largo de la sesión al realizar esta tarea.

Al observar las tareas de los integrantes del grupo, se puede afirmar que todos han tenido en cuenta este hecho, puesto que todos han dado un reparto entero de concejales. Sin embargo, no todos han considerado necesario explicar el por qué, sino que simplemente han redondeado la cifra que obtenían al realizar la regla de tres, al entero más próximo o a otro entero, atendiendo a sus propios criterios. En solo dos de las tareas de los estudiantes aparece de forma explícita que los resultados han de ser números enteros (figura 1y 3).

A pesar de hacer el reparto con proporciones, justifica que el reparto no le parece «justo», puesto que «un partido con el doble de votos que otro, no puede conseguir el triple de escaños.».

El estudiante 3 especifica la necesidad de que el reparto sea entero, y también muestra cierta

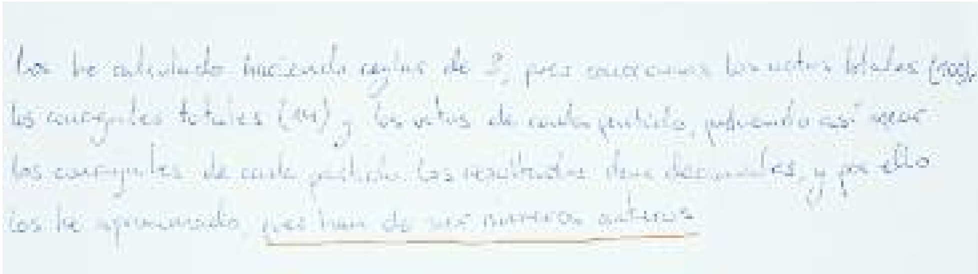
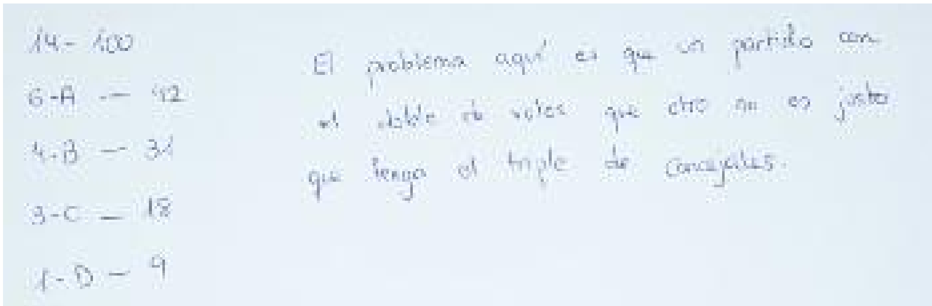
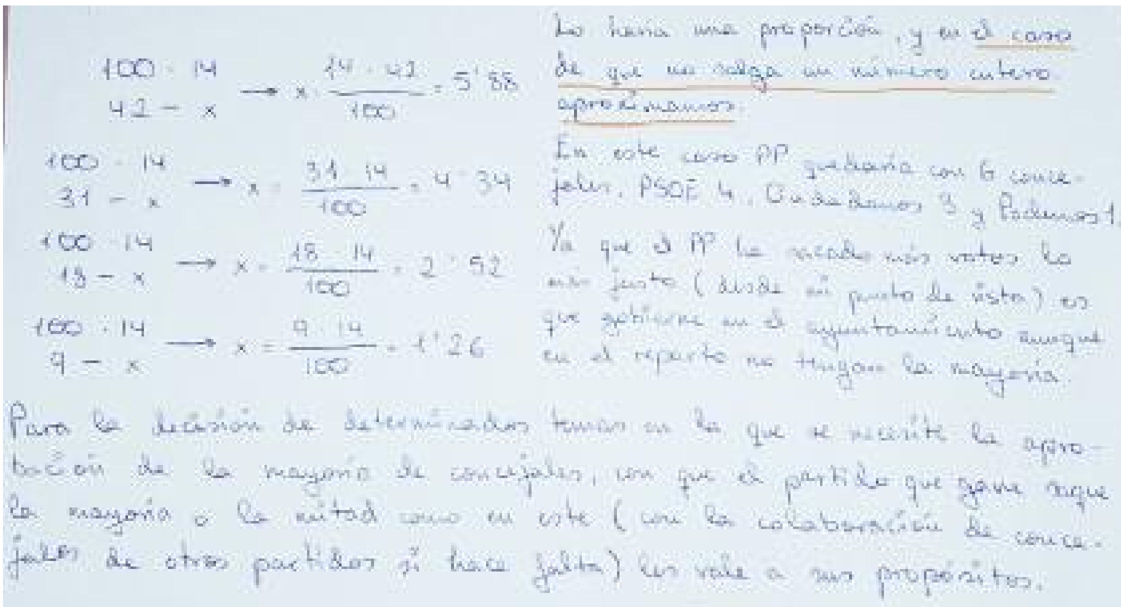

Los he calculado haciendo reglas de 3, pues conocemos los votos totales (100), los concejales totales (14), y los votos de cada partido, pudiendo así sacar los concejales de cada partido. Los resultados daban decimales, y por ello los he aproximado, pues han de ser números enteros.

Figura 1. Respuesta de estudiante 1


14 - 100
6-A — 42
4-B — 31
3-C — 18
1-D — 9

El problema aquí es que un partido con el doble de votos que otro no es justo que tenga el triple de concejales.

Figura 2. Respuesta de estudiante 2


100 - 14
42 - x → $x = \frac{14 \cdot 42}{100} = 5'88$

100 - 14
31 - x → $x = \frac{31 \cdot 14}{100} = 4'34$

100 - 14
18 - x → $x = \frac{18 \cdot 14}{100} = 2'52$

100 - 14
9 - x → $x = \frac{9 \cdot 14}{100} = 1'26$

Lo hacemos una proporción, y en el caso de que no salga un número entero aproximamos.
En este caso PP quedaría con 6 concejales, PSOE 4, Ciudadanos 3 y Podemos 1.
Ya que el PP ha sacado más votos lo más justo (desde mi punto de vista) es que gobierne en el ayuntamiento aunque en el reparto no tengan la mayoría.

Para la decisión de determinados temas en los que se necesite la aprobación de la mayoría de concejales, con que el partido que gane saque la mayoría o la mitad como en este (con la colaboración de concejales de otros partidos si hace falta) les vale a sus propósitos.

Figura 3. Respuesta de estudiante 3

preocupación en cuanto a «determinados temas, en los que se necesite mayoría absoluta». Del mismo modo, el siguiente alumno (Estudiante 1) también realiza el reparto usando reglas de tres, y precisa que es necesario aproximar a números enteros.

Este alumno utiliza el método D'Hondt para hacer el reparto, a pesar de no haber sido explicado aún. Esto revela la curiosidad de este tipo de alumnos y autonomía para la búsqueda de información. Además, utiliza términos como «circunscripción» y da a entender que hay diferencias entre repartir escaños «en una sola circunscripción y en varias».

Otros alumnos, aparte de realizar el reparto, han propuesto coaliciones entre los partidos para solventar la toma de aquellas decisiones políticas en las que sea necesaria la mayoría.

número de votos y repartir la otra mitad, de forma proporcional. Además, señala que el número de escaños a repartir ha de ser un número par y añade un ejemplo.

Son varios los alumnos que han propuesto este método, sin ser conscientes de que este método ya tiene nombre y apellidos. Es conocido como método de restos mayores. En concreto, este fue propuesto por Alexander Hamilton en el siglo XVIII. Es el método que propondría cualquiera que se adentre un poco en el tema de las matemáticas electorales, por su simpleza y facilidad de cálculo.

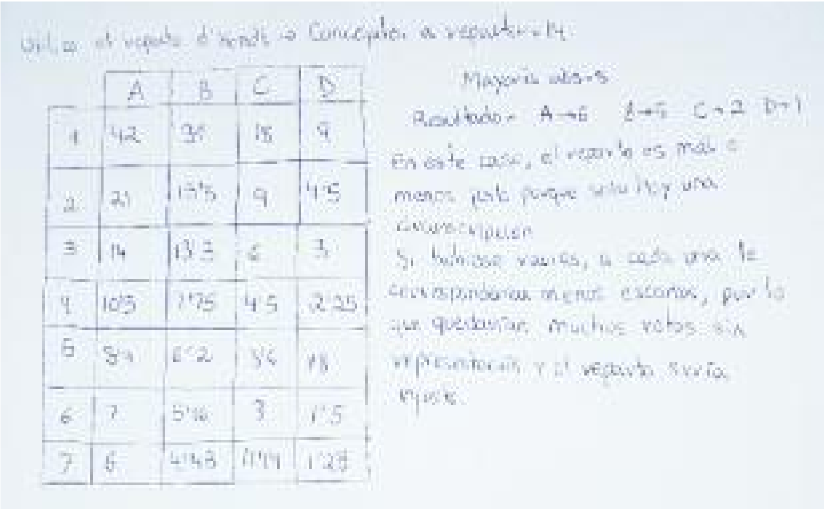


Figura 4. Respuesta de estudiante 4

Tarea 5

Para esta tarea, sólo se hará referencia a las notas del alumno en la ficha, sobre su propuesta de método de reparto.

El siguiente grupo de estudiantes propone repartir la mitad de los votos al partido con mayor

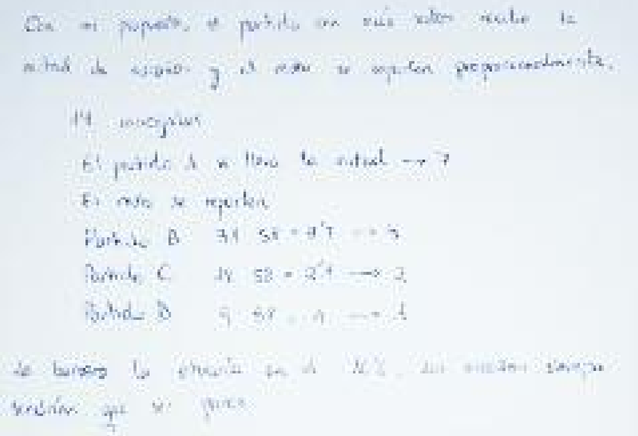


Figura 5. Propuesta de grupo 1

Figura 6. Propuesta del grupo 2

Referencias bibliográficas

López, A. (2014), «Proporcionalidad», Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada, Granada.

Moreno, A. y Villegas, A.M. (2017), *Matemáticas electorales. Claves para interpretar sondeos y elecciones*, Colección Miradas matemáticas, Los Libros de la Catarata, Madrid.

Villegas, A. (2017), «Enriquecimiento curricular para alumnos con talento matemático del proyecto Estalmat», Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, Granada.

Adela Villegas Barranco
IES Fuente Nueva, El Egido (Almería)
<ade4_18@hotmail.es>

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada
<rramirez@ugr.es>