

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

METODO DE VORTEX CON  
ELEMENTOS

JUAN SOLER

Tesis doctoral dirigida por el profesor P. A. Raviart de la Universidad Pierre et Marie Curie, París. Fue defendida el 25 de Junio de 1986 ante el tribunal formado por los profesores: A. Bermúdez de Castro, E. Fernández Cara, P. Martínez Amores, V. Ramírez Gonzalez y J. Sanz Serna; siendo considerada apta para la obtención del grado de doctor.

# INDICE

<u>INTRODUCCION</u> .....	8
Capítulo I: <u>CUBATURA CON LINEAS</u> .	
I.1 Introducción.....	14
I.2 Fórmulas Gaussianas con un número mínimo de líneas.....	17
I.3 Teorema General de Representación.....	20
I.4 Apéndice.....	23
I.4 Aplicaciones.....	24
Capítulo II: <u>UN ANALISIS DE LOS METODOS DE ELEMENTOS PARA EQUACIONES LINEALES HIPERBOLICAS Y SISTEMAS HIPERBOLICOS DE PRIMER ORDEN</u> .	
II.1 Introducción.....	28
II.2 La característica de un elemento. Solución medida de la ecuación lineal hiperbólica.....	30
II.3 Aproximación de funciones mediante medidas de Dirac localizadas sobre elementos. Convergencia y estimación de error para las fórmulas de cubatura con elementos.....	36
II.4 Convergencia del Método de Elementos I.....	46
II.5 Método de Elementos para un sistema lineal hiperbólico.....	48
II.6 Convergencia del Método de Elementos II.....	59
Capítulo III: <u>APROXIMACION DE SISTEMAS PARABOLICOS POR EL METODO DE ELEMENTOS</u> .	
III.1 Planteamiento del problema.....	72
III.2 Convergencia del Método de Elementos para sistemas parabólicos...	75
Capítulo IV: <u>METODO DE VORTEX CON FILAMENTOS</u> .	
IV.1 Introducción.....	81
IV.2 Presentación del Método de Vortex con Filamentos.....	82
IV.3 Algunos resultados técnicos.....	98
IV.4 Convergencia del Método de Vortex con Filamentos.....	101
IV.5 Propiedades de Consistencia.....	103
IV.6 Propiedades de estabilidad.....	109
IV.7 Demostración del Teorema de Convergencia.....	121
<u>ALGUNOS COMENTARIOS Y PROBLEMAS ABIERTOS</u> .....	125
<u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	129

## Agradecimientos.

La tradición requiere -y la cortesía exige- que en la introducción de una tesis, principalmente si es científica, se agradezca a los que, de una forma o de otra, nos han ayudado, animado o guiado. Hay alguna vanidad en repetir las evidencias cuando va de sí a los que nos han sostenido en todas circunstancias mereciendo las más profundas gratitudes.

No es fácil saludar la gentileza o el estímulo de estos, las observaciones inteligentes de aquellos, ya que supone menospreciar la inteligencia de estos y la amabilidad de aquellos. Es difícil recoger, en un reducido grupo y en breve espacio, a todos los que han hecho posible, de alguna forma, que esta memoria sea realizada.

Cómo agradecer a P. A. Raviart el honor de haberme acogido en su grupo de trabajo en el Laboratoire d'Analyse Numérique de la Université P. et M. Curie, donde la mayor parte de esta tesis ha sido realizada. Su generosidad al hacerme partícipe de los problemas que le son queridos, así como su continua guía, didactismo e interés en la evolución y estudio de estos temas.

Cómo agradecer la amistad y paciencia de G. H. Cottet en las numerosas discusiones que han hecho posible la concreción y mejora de una parte de las ideas aquí desarrolladas.

Cómo agradecer a S. Huberson, R. Ortega, V. Ramírez y a todos aquellos que han tenido la amabilidad de prestar su atención a algunos de los trabajos de esta tesis.

Cómo agradecer a P. Martínez Amores y a todo el Dpto. de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Granada la ayuda y el continuo estímulo prestados.

Cómo agradecer a los miembros del Laboratoire d'Analyse Numérique, en particular al bureau 15, su amable y gentil acogida.

A cuantos familiares, amigos y compañeros me han animado, ayudado o guiado, mi más sincero agradecimiento.

# INTRODUCCION

## INTRODUCCION

En este trabajo introducimos el análisis de - dos métodos de resolución de problemas provenientes de - la Física (Métodos de Elementos), y de la Mecánica de - Fluidos (Métodos de Vortex con Elementos). En Física el concepto de elemento está íntimamente relacionado con la ecuación que se considera; por ejemplo en el caso de la Mecánica de Fluidos un elemento es una sección de un tubo que es tangente en cada uno de sus puntos al vector - vorticidad, es decir, al rotacional de la velocidad.

El fundamento de ambos métodos es común y consiste en aproximar la condición inicial del problema mediante una combinación lineal de medidas localizadas sobre elementos. Esta aproximación permite sustituir el estudio del sistema de Ecuaciones en Derivadas Parciales - (E.D.P.) por el de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.), cuya resolución proporciona la trayectoria aproximada de los elementos considerados, pudiendo con ellas construir, en cada tiempo  $t$ , la solución de las E.D.P.

Los Métodos de Vortex con Elementos están contenidos dentro del esquema general de los Métodos de Vortex, y pueden ser considerados como un caso particular del esquema general de los Métodos de Elementos cuando nos restringimos a problemas que surgen en Mecánica de Fluidos.

En numerosos problemas de interés en Mecánica de Fluidos la parte del fluido en la que el vector vorticidad es no nulo ocupa solamente una pequeña fracción del volumen total del fluido y, para fluidos incompresibles, es suficiente seguir sólo la evolución de la vorticidad en estas regiones. El vector velocidad es calculado entonces - mediante la aplicación de la ley de Biot-Savart a partir

de la vorticidad. De esta forma, fluidos complejos no lineales pueden ser representados por un número relativamente pequeño de elementos de vortex. La configuración de estos elementos, en un tiempo dado, determina, por tanto, la velocidad del fluido en dicho tiempo. Este es el modelo de aplicación de los Métodos de Vortex.

En el caso bidimensional la aplicación de un Método de Vortex Puntual se presenta de forma natural, ya que un análisis de las ecuaciones de Euler en 2-D muestra que la vorticidad es transportada mediante la velocidad a través de las características que tienen por base vórtices infinitesimales, es decir, puntos o partículas. El movimiento de estas partículas es regido por un sistema Hamiltoniano de E.D.O. Utilizando la solución en cada tiempo de este sistema Hamiltoniano construiremos la solución de las ecuaciones de Euler. El análisis matemático de los Métodos de Vortex Puntuales ha sido desarrollado de forma considerable en los últimos años. Cabe destacar las aportaciones de Hald, Beale, Majda, Raviart, Cottet,...

En el caso tridimensional la aplicación de los Métodos de Vortex Puntuales presenta una serie de dificultades con respecto al caso bidimensional. Esto es debido a la inclusión en las ecuaciones de Euler en 3-D del llamado término de deformación que hace que la vorticidad no sea conservada a lo largo de las trayectorias de las partículas. De esta forma, la aplicación de los Métodos de Vortex Puntuales en tres dimensiones con lleva la resolución de un segundo sistema diferencial que nos determina el peso de cada partícula en un momento concreto.

En dimensión 3 la vorticidad es transportada a lo largo de filamentos. Esta propiedad hace introducir de forma natural un método que tiene por base el estudio de la evolución de un número finito de filamentos en lugar de seguir la trayectoria de partículas. Este tipo de ideas es el fundamento del Método de Vortex con Filamentos.

En este trabajo se presenta un primer análisis matemático sobre la convergencia del Método de Vortex con Filamentos mediante un estudio intrínseco de los filamentos y no una discretización a priori de estos. Este análisis intrínseco no tiene sólo un interés teórico. En las aplicaciones se necesita una discretización de los filamentos. Al plantear esta discretización a posteriori en el esquema, el término de deformación queda implicítamente evaluado, lo cual no ocurre si partimos en nuestro análisis de una discretización a priori.

Los Métodos de Partículas pueden ser vistos como una extensión de los Métodos de Vortex Puntuales al estudio de un gran número de fenómenos físicos (recientemente en la interacción plasma fisico-laser), y a la construcción numérica de la solución de ecuaciones tales como Boltzman, Vlasov, Folker-Planck,.. Aquí planteamos un nuevo método para el estudio de estos problemas: el Método de Elementos. Este método puede ser considerado como una generalización del Método de Partículas, y, en ciertos problemas, puede presentar ventajas con respecto a este último, en el mismo sentido que las que el Método de Vortex con Filamentos presenta con respecto a los Métodos de Vortex Puntuales.

Analizamos matemáticamente la convergencia y estimación del error del Método de Elementos para el caso de ecuaciones y sistemas hiperbólicos de primer orden,

planteado, al igual que en el Método de Vortex con Filamentos, un estudio intrínseco de los elementos en lugar de una discretización a priori.

Un instrumento fundamental que nos permite analizar estos Métodos es la fórmula de cubatura sobre variedades contenidas en la región de integración, cuyo estudio introducimos aquí y que se presenta como una alternativa y/o un complemento a las fórmulas de cuadratura con nodos en varias variables.

El plan de este trabajo es el siguiente:  
En el Capítulo I se introduce el estudio de las fórmulas de cubatura sobre variedades, definiéndose el concepto de fórmulas Gaussianas para esta clase de aproximación. Finalmente damos un teorema de representación sobre la existencia de este tipo de fórmulas de cubatura. Por simplicidad en la exposición nos restringimos al caso bidimensional y consideramos como variedades en nuestra fórmula de cubatura únicamente las rectas.

En el Capítulo II se presenta el Método de Elementos mediante el estudio de ecuaciones y sistemas hiperbólicos de primer orden. Se estudia la aproximación de funciones mediante combinaciones de medidas localizadas sobre elementos. Esta aproximación aparece relacionada de forma natural con las fórmulas de cubatura mediante variedades cuyo estudio retomamos en el caso general. Las propiedades de este tipo de aproximación permite un análisis de la convergencia (consistencia y estabilidad) del Método de Elementos. Los resultados generales obtenidos sobre la aproximación de funciones por combinaciones de medidas sobre elementos y sobre la convergencia del Método de Elementos pueden ser aplicados a otro tipo de problemas como se muestra en los Capítulos III y IV.



En el Capítulo III se extienden los resultados del Capítulo II a sistemas de Convección-Difusión, obteniéndose estimaciones de error y convergencia del mismo orden que para los sistemas hiperbólicos estudiados en el Capítulo II.

Finalmente, en el Capítulo IV se analiza el Método de Vortex con Filamentos. En primer lugar se plantea el esquema que define el método, discutiendo algunos aspectos de la elección de filamentos. Las propiedades de consistencia se basan en las propiedades de las fórmulas de cubatura con filamentos y en la definición de ciertas medidas vectoriales que hacen conservar la estructura en filamentos de la solución del problema.

Las técnicas expuestas en este trabajo han sido aplicadas recientemente al estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensionales y al de los Métodos de Contornos Dinámicos. Podría ser planteado, mediante las ideas aquí desarrolladas, el tratamiento de otros problemas; por ejemplo, en Mecánica de Fluidos, la simulación de turbulencia, la descomposición o ruptura de un elemento de Vortex, los llamados métodos de "Vortex in cell", ...

**CAPITULO I:**

**CUBATURA CON LINEAS**

## CUBATURA CON LINEAS

En este capítulo introducimos el estudio de la aproximación de integrales sobre regiones contenidas en espacios de dimensión superior a uno mediante combinaciones lineales de integrales definidas sobre variedades de dimensión inferior e incluidas en la región de integración. Esta aproximación se presenta como una alternativa y/o complemento a las fórmulas, desarrolladas a partir de las ideas de Misovskikh, que tienen nodos como datos. Definimos la noción de fórmulas Gaussianas y caracterizamos la mínima representación de esta aproximación.

### 1.1. Introducción

La teoría de aproximación de integrales en lo que se refiere a funciones de una variable, que puede encontrarse, por ejemplo, en los libros de Krylov [29],... está en su fundamento bastante desarrollada, aunque en algunos aspectos aún sigue siendo objeto de análisis y aportaciones. El correspondiente estudio para funciones de varias variables está lejos de estar completo, esto es debido, principalmente, a la complejidad de  $\mathbb{R}^n$  comparado con  $\mathbb{R}$ . En primer lugar, existen un número indeterminado de regiones acotadas y conexas en  $\mathbb{R}^n$  que no son equivalentes -via una transformación afín- y, por tanto, la integración sobre cada región plantea diferentes problemas. En segundo lugar, la teoría de polinomios ortogonales es mucho más complicada que en el caso de una variable y es actualmente motivo de estudio.

La generalización de los resultados conocidos en una variable o son triviales o muy complicados. En una variable las fórmulas Gaussianas tienen la importante propiedad de minimizar el número de nodos entre las fórmulas de cuadratura de un grado fijo de exactitud.

En orden a construir fórmulas de cubatura es interesante encontrar la caracterización de las fórmulas para las que con un número mínimo de nodos se alcance un grado de exactitud fijado: las fórmulas Gaussianas. Resultados en este sentido fueron obtenidos por Misovskikh [49] y posteriormente extendidos por Schmid [49]. Sin embargo, la caracterización dada por Misovskikh es aplicable a algunos funcionales particulares. Caracterizaciones de fórmulas de cubatura Gaussianas a una clase más amplia de funcionales pueden encontrarse en los trabajos de Möller [43][44] y Schmid [50], donde el grado de exactitud debe ser disminuido o el número de nodos aumentado.

Para construir fórmulas de cubatura parece razonable hacer el salto de una a varias variables tan suave como sea posible. En este sentido, la aproximación de una integral mediante combinaciones lineales de integrales de la función definidas a lo largo de variedades contenidas en la región de integración se ajusta a este orden de ideas.

Esta clase de fórmulas, además del interés de reducir el dominio de integración en un número finito de subdominios, pueden ser consideradas como un paso intermedio hacia la búsqueda de fórmulas con nodos como datos.

El propósito de este capítulo es dar una introducción a este tipo de análisis para fórmulas de cubatura. Mediante este análisis fórmulas de cuadratura y cubatura quedan conectadas, así como los polinomios ortogonales en una y varias variables.

Los resultados de este capítulo pueden ser extendidos al caso más general de dimensiones arbitrarias. En la Sección 3 del Capítulo II enunciaremos un resultado general en  $\mathbb{R}^n$ . Por simplicidad en este capítulo con

sideraremos el caso dos dimensional y tomaremos como subregiones rectas.

Sea  $\Omega$  una región de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x, y)$  un punto de  $\Omega$  y sea  $C(\Omega)$  el espacio de las funciones continuas definidas sobre  $\Omega$  y con valores reales. Definimos el funcional lineal

$$(1.1.1) \quad \hat{I} : C(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} ; f \longrightarrow \hat{I}(f)$$

Nuestro objetivo es aproximar  $\hat{I}(f)$  por sumas del tipo

$$(1.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{I}(f) \approx \sum_{i=0}^{\mu} \alpha_i \int_{\gamma_i} f(x, y) dx dy, \quad \alpha_i > 0, \\ \gamma_i \equiv x \sin \psi_i - y \cos \psi_i + a_i = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad \psi_i \in [0, \pi], \end{array} \right.$$

de forma que la aproximación sea exacta para todo polinomio del espacio  $P_m(\Omega)$ , donde  $P_m(\Omega)$  es el espacio de todos los polinomios de grado inferior o igual a  $m$  restringidos a  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Denotaremos  $\gamma_i = \gamma(\psi_i, a_i)$ .

De ahora en adelante, supondremos que todos los polinomios y las líneas que estudiaremos están considerados solamente en su restricción a  $\Omega$ .

Por tanto, podemos plantear el problema en el siguiente camino:

$$\text{Sea } l : P_m(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} ; p \longrightarrow l(p),$$

un funcional no trivial y estrictamente positivo. Buscamos una representación de  $l$  de la forma

$$(1.1.3) \quad l(p) = \sum_{i=0}^{\mu} \alpha_i \int_{\gamma_i} p(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^{\mu} \alpha_i \int_{\gamma_i} p(\gamma_i) d\sigma(\gamma_i),$$

donde

$$\alpha_i > 0, \quad p \in P_m(\Omega),$$

$\sigma(\gamma_i)$  es la medida de arco de  $\gamma_i$ , línea definida por  $\gamma_i \equiv x \sin \psi_i - y \cos \psi_i + a_i = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad \psi_i \in [0, \pi]$ .

Vamos a estudiar en la sección 2 este problema de aproximación desde un punto de vista algebraico exclu

sivamente. En la sección 3 lo caracterizaremos desde un punto de vista analítico.

### 1.2. Fórmulas Gaussianas con un número mínimo de líneas

Estamos interesados en obtener fórmulas de cubatura del tipo (1.1.3) que requieran una mínima representación.

Teorema 1.2.1. Sea  $\theta$  el mínimo número de líneas  $\gamma_i$  requeridas para hacer la fórmula de cubatura exacta en  $\mathbb{P}_m$ . Entonces se verifica que

$$(1.2.1) \quad \theta \geq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$$

Dem. Es siempre posible construir un polinomio  $p$  de grado  $K$  que se anule sobre  $K$  líneas.

Además, no existe un polinomio  $p \in \mathbb{P}_{\lfloor m/2 \rfloor}$  que se anule sobre todas las líneas de (1.1.3). Si existiera

$$l(p^2) = 0,$$

lo que supone una contradicción con la estricta positividad del funcional  $l$ . Por tanto,

$$\theta \geq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \quad \square$$

Así, dadas  $n+1$  líneas,  $2n+1$  es el grado máximo de exactitud que es posible alcanzar con una fórmula del tipo (1.1.3).

Caracterizaremos esta mínima representación, es decir, las fórmulas Gaussianas, en el teorema 1.2.4.

Denotamos por  $l_i(x, y)$  los polinomios de grado uno de la forma

$$l_i(x, y) \equiv x \sin \psi_i - y \cos \psi_i + a_i, \quad \psi_i \in [0, \pi], \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Definimos el polinomio  $w$  por

$$(1.2.2) \quad w = \prod_{i=0}^{\mu} l_i(x, y).$$

De ahora en adelante notaremos

$$\mu = n, \quad m = 2n + 1,$$

y consideraremos las relaciones de ortogonalidad con respecto al producto escalar asociado a  $\hat{l}$ .

Teorema 1.2.2. Si la fórmula de cubatura con líneas (1.1.3) es exacta en  $\mathbb{P}_{2n+1}(\Omega)$ , entonces  $w$  es ortogonal al espacio  $\mathbb{P}_n(\Omega)$ .

Dem.  $w$  es un polinomio de grado  $n+1$ . Para todo polinomio  $p \in \mathbb{P}_n(\Omega)$ ,  $w \cdot p \in \mathbb{P}_{2n+1}(\Omega)$ . Por tanto, (1.1.3) es exacta para  $w \cdot p$ , es decir

$$\int_{\Omega} w \cdot p = \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_{\gamma_i} (w \cdot p)(\gamma_i) d\sigma(\gamma_i).$$

Pero el segundo término de esta igualdad es cero y, por tanto, obtenemos el deseado resultado.  $\square$

Teorema 1.2.3.[31]. Sea  $\Omega$  una región dada contenida en  $\mathbb{R}^N$ . Existe un sistema de  $\binom{N+n}{n+1}$  polinomios linealmente independientes en  $\mathbb{P}_{n+1}(\Omega)$  que son ortogonales a  $\mathbb{P}_n(\Omega)$ .  $\square$

En nuestro caso particular,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , existe un sistema de  $n+2$  polinomios de  $\mathbb{P}_{n+1}(\Omega)$  que son ortogonales a  $\mathbb{P}_n(\Omega)$ .

Estos polinomios son del tipo (para  $0 \leq h \leq n+1$ )

$$(1.2.3) \quad p_h(x, y) = x^i y^j + p_n^h(x, y), \quad i+j=n+1, \quad p_n^h \in \mathbb{P}_n(\Omega).$$

Si  $w$  es ortogonal a  $\mathbb{P}_n(\Omega)$  y  $w \in \mathbb{P}_{n+1}(\Omega)$ , entonces  $w$  pertenece a la variedad engendrada por los anteriores polinomios  $p_h$ . Por tanto,  $w$  debe ser de la forma

$$(1.2.4) \quad w = \sum_{h=0}^{n+1} a_h p_h$$

Además,  $w$  es exactamente de grado  $n+1$ . Como consecuencia al menos uno de los  $a_h$  de los de la expresión (1.2.4) de  $w$  es no nulo. Supongamos que para  $h=t$ ,  $a_t = 1$ . Fijar a priori  $a_t = 1$  es elegir una de las  $n+2$  posibilidades del polinomio  $w$  y, por tanto, uno entre -

los posibles diferentes sistemas de  $n+1$  líneas  $\gamma_i$  que intersectan a  $\Omega$  y verifican las condiciones requeridas.

Sea  $M$  la variedad engendrada por los polinomios  
 $T_k = x^c y^d p_h$ ,  $h=0, \dots, n+1$ ,  $h \neq t$ ,  
 $\delta$   
 $T_k = x^c y^d w$ , con  $c+d=0, \dots, n$ ,  $k=1, \dots, \dim \mathbb{P}_{2n+1} - \dim \mathbb{P}_n$ .

Teorema I.2.4. La fórmula de cubatura (I.1.3) es exacta para todo polinomio de grado inferior o igual a  $2n+1$  si y solo si las dos siguientes condiciones son satisfechas:

- (i) La fórmula es exacta en  $\mathbb{P}_n(\Omega)$ ,
- (ii)  $l(T)=0$ ,  $\forall T \in M$ .

Además, si la fórmula de cubatura (I.1.3) es exacta en  $\mathbb{P}_{2n+1}$  o si se verifica (i) y (ii), los coeficientes  $\alpha_i$  son todos positivos.

Dem.- La condición suficiente se sigue del hecho que, aplicando (i),  $n$  es una cota inferior de exactitud; y gracias al Teorema I.2.1,  $2n+1$  es una cota superior.

Si  $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ , lo podemos escribir en la forma

$$p = T + p_n, \text{ con } T \in M \text{ y } p_n \in \mathbb{P}_n.$$

Integrando estos polinomios y aplicando las condiciones (i) y (ii), deducimos fácilmente la exactitud en  $\mathbb{P}_{2n+1}$ .

En cuanto a la condición necesaria, (i) se deduce trivialmente y (ii) es una consecuencia de las propiedades de los polinomios  $p_h$  y  $w$ ,  $h=0, \dots, n+1$ .

La positividad de los coeficientes  $\alpha_i$  se sigue integrando los polinomios

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n l_j^2(x) \in \mathbb{P}_{2n}(\Omega).$$

□

### 1.3. Teorema General de Representación.

Pretendemos encontrar un polinomio que pertenezca al espacio  $\mathbb{P}_{n+1}(\Omega)$ , sea ortogonal a  $\mathbb{P}_n(\Omega)$  y pueda ser descompuesto como producto de líneas polinómicas cuyos polinomios asociados sean de grado 1. Esto es, buscamos un polinomio que pertenezca a la intersección de los conjuntos

$$(1.3.1) C_{1t} = \{w \in \mathbb{P}_{n+1}(\Omega) : w = \sum_{h=0}^{n+1} a_h p_h \quad ; \quad a_t = 1\},$$

$$(1.3.2) C_2 = \{w \in \mathbb{P}_{n+1}(\Omega) : w = \prod_{i=0}^n l_i\}.$$

Dependiendo de la geometría de la región  $\Omega$ , estos dos conjuntos pueden ser disjuntos.

Sea  $\Omega$  una región cerrada y acotada de  $\mathbb{R}^2$  con interior conexo. Supongamos que la intersección de  $C_{1t}$  y  $C_2$  es no vacía y denotemos por  $I$  dicha intersección.

$C_2$  es compacto. Para  $\psi \in [0, \pi]$  fijado, el conjunto de los  $a$  tales que  $\gamma(\psi, a) \cap \Omega \neq \emptyset$  (debido a la propiedad de conexión de  $\Omega$ ) es un intervalo real que denotaremos por  $R(\psi)$ . Gracias a la compacidad de  $\Omega$ ,  $R(\psi)$  es cerrado.

Sea  $H$  el conjunto definido por

$$H = \{(\psi, a) \in \mathbb{R}^2 : \psi \in [0, \pi], a \in R(\psi)\}.$$

Consideramos la sucesión  $\{(\psi_k, a_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $H$  y la sucesión  $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \in \gamma(\psi_k, a_k) \cap \Omega$ , tales que

$$\psi_k \rightarrow \psi, \quad a_k \rightarrow a \quad \text{y} \quad (x_k, y_k) \rightarrow (x, y) \quad \text{cuando} \quad k \rightarrow \infty.$$

Gracias a la acotación de los  $\psi_k$  deducimos que  $\psi \in [0, \pi]$ . Además, es claro que  $(x, y) \in \gamma(\psi, a) \cap \Omega$ . De esta forma  $a \in R(\psi)$ . Por tanto,  $(\psi, a) \in H$  y en consecuencia  $H$  es cerrado.

Como  $\Omega$  es compacto los intervalos  $R(\psi_k)$  están acotados y las líneas  $\gamma_k$  que generan los pares de



$H$  están uniformemente acotadas.

Por tanto  $H$  es compacto. Esto implica que  $H^{n+1} = H \times \dots \times H$  y  $C_2$  son también compactos.

$C_{1t}$  es una variedad lineal.

De esta forma deducimos que  $I = C_{1t} \cap C_2$  es compacto.

Definimos sobre  $I$  el funcional

$$(1.3.3) \quad F(a_0, \dots, a_n, \psi_0, \dots, \psi_n) = \int_{\Omega} \prod_{i=0}^n l_i^2(x, y) dx dy.$$

El funcional  $F$  es continuo y está definido sobre  $I$  que es compacto, por tanto, alcanza su mínimo.

Lo deducido hasta ahora, junto con el siguiente teorema, nos permite establecer el Teorema General de Representación, (teorema 1.3.2).

Teorema 1.3.1. [31] Supongamos que tenemos dada

la factorización de  $p_{n+1}(z) \in P_{n+1}(\Omega)$

$$p_{n+1}(z) = p_{n+1,1}(z) \cdot p_{n+1,2}(z) \dots p_{n+1,k}(z)$$

siendo además  $p_{n+1}(z)$  ortogonal a  $P_n(\Omega)$ . Supongamos que todos los factores son reales e irreducibles en el campo real. Entonces todos los  $p_{n+1,i}(z)$  son distintos y las líneas asociadas a  $p_{n+1,i}(z)$  no están completamente fuera de  $\Omega$ , para  $i=1, \dots, k$ .  $\square$

Además, las líneas  $\gamma_i$  que minimizan el funcional (1.3.3) intersecan el interior de  $\Omega$ . En efecto, si  $\gamma_i \cap \Omega \neq \emptyset$  y  $\gamma_i \cap \text{interior}(\Omega) = \emptyset$ , definimos  $\bar{\gamma}_i = \gamma_i - \epsilon$  de forma que la intersección de  $\bar{\gamma}_i$  y el interior de  $\Omega$  sea no nulo. Entonces para  $|\epsilon|$  suficientemente pequeño

$$F(\psi_0, \dots, \psi_n, a_0, \dots, a_n) > F(\psi_0, \dots, \psi_n, a_0, \dots, a_{i-1}, a_i - \epsilon, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

lo que prueba por contradicción que las líneas  $\gamma_i$  intersecan el interior de  $\Omega$ .

Teorema 1.3.2. Sea  $\Omega$  una región de  $\mathbb{R}^2$  cerrada y acotada con interior conexo. Sean  $C_{1t}$  y  $C_2$  dos conjuntos definidos como en (1.3.1) y (1.3.2) respec-

tivamente. Si  $I = C_{1t} \cap C_2$  es no vacío, entonces -  
existen pares  $(\psi_i, a_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  que minimizan el  
funcional (1.3.3) con  $w = \prod_{i=0}^n l_i \in I$ .

Además, estos pares y sus correspondientes li-  
neas  $x \sin \psi_i - y \cos \psi_i + a_i = 0$  son todos dife-  
rentes e intersectan al interior de  $\Omega$ .  $\square$

La evaluación del mínimo tiene un adicional -  
 interés cuando nos interesa obtener una estimación del  
 error para fórmulas del tipo (1.1.2).

Una vez conocida la existencia del mínimo -  
 (cuando la intersección de  $C_{1t}$  y  $C_2$  es no vacía), vamos  
 a intentar encontrar condiciones necesarias para que -  
 $I \neq \emptyset$ , así como un método para obtener las rectas  $\gamma_i$ .

Buscamos los valores extremos del funcional

$$F(a_0, \dots, a_n, \psi_0, \dots, \psi_n) = \int_{\Omega} \prod_{i=0}^n l_i^2 dx dy$$

cuando las variables están relacionadas mediante las -  
 condiciones

$$\int_{\Omega} w \cdot p dx dy = 0, \quad p \in \mathbb{P}_n$$

Consideramos las funciones  $g_i$  definidas

$$g_i = \int_{\Omega} w \cdot p_i dx dy,$$

donde

$$p_i = x^c y^d, \quad c+d = 0, \dots, n, \quad i=0, \dots, \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

es decir,  $p_i$  forman una base de  $\mathbb{P}_n$ .

El método de Lagrange nos proporciona el si--  
 guiente sistema cuya resolución conlleva la obtención -  
 del mínimo deseado del funcional F

$$(1.3.4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial a_i} (a_0, \dots, a_n, \psi_0, \dots, \psi_n) = 0, \quad i=0, \dots, n, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \psi_i} (a_0, \dots, a_n, \psi_0, \dots, \psi_n) = 0, \quad i=0, \dots, n, \\ g_i = 0, \quad i=0, \dots, \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{array} \right.$$

donde  $\emptyset$  está definido como sigue

$$\emptyset(a_0, \dots, a_n, \psi_0, \dots, \psi_n) = \int_{\Omega} \prod_{i=0}^n l_i^2 dx dy + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \sum_{i=0}^n \lambda_i g_i .$$

#### 1.4 Apéndice

En este capítulo hemos estudiado la aproximación de integrales de funciones de varias variables mediante combinaciones lineales de integrales de línea (rectas).

En una forma muy similar podemos plantearnos el estudio de la aproximación de  $l$  usando expresiones de la forma

$$(1.4.1) \left\{ \begin{aligned} l(x, y) = & \sum_{i=0}^{s_1} a_{i1} \int_{C_{i1}} f(C_{i1}) d\sigma(C_{i1}) + \dots + \\ & + \sum_{i=0}^{s_j} a_{ij} \int_{C_{ij}} f(C_{ij}) d\sigma(C_{ij}) + \dots + \\ & + \sum_{i=0}^{s_r} a_{ir} \int_{C_{ir}} f(C_{ir}) d\sigma(C_{ir}) , \end{aligned} \right.$$

donde  $C_{ij}$  son curvas (superficies o volúmenes en varias variables) del tipo  $p_j(x, y) = 0$  con  $p_j \in \mathcal{P}_j(\Omega_j)$ ,  $\Omega_j \subseteq \Omega$ .

Fijadas el número de curvas  $C_{ij}$  podemos dar un método similar para determinar un sistema de  $C_{ij}$  que hagan (1.4.1) de máxima exactitud.

Puede enunciarse en este caso un similar Teorema de Representación (ver Sección 3, Capítulo II) con una demostración semejante.

En la expresión (1.4.1) es interesante escoger las curvas de forma que se adapten a los atributos de la región, en caso contrario el funcional (1.4.1) podría complicarse.

## I.5. Aplicaciones

Veamos algunos ejemplos concretos de fórmulas de cubatura con líneas, no todas rectas. En el capítulo siguiente estudiaremos estimaciones de error para este tipo de aproximación.

1.5.1 Veamos que verdaderamente existen regiones para las que  $I \neq \emptyset$  y calculemos un sistema de rectas que nos permitan construir fórmulas de cubatura en estas regiones con las propiedades descritas.

Sea  $\Omega$  una región de  $\mathbb{R}^2$  que viene definida por

$$(1.5.1) \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \in [-1,1]\}$$

Nuestro objetivo es calcular una mínima representación del tipo (1.1.3) que sea exacta para cada función del espacio de polinomios  $\mathbb{P}_{2n+1}(\Omega)$ .

Si suponemos que las rectas toman la forma

$$(x = \pi/2, a_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

el funcional definido por (1.3.3) puede escribirse como

$$F(a_0, \dots, a_n, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}) = \int_{\Omega} \prod_{i=0}^n (x+a_i)^2 dx dy = 2 \int_{-1}^1 \prod_{i=0}^n (x+a_i)^2 dx.$$

Teorema 1.5.1. [32] Consideramos el sistema de polinomios

$$w_{n+1}(x) \in \mathbb{P}_{n+1}(x), \quad w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x+a_i).$$

Entonces la condición necesaria y suficiente para que  $w_{n+1}(x)$  minimice  $\int_{-1}^1 w_{n+1}^2(x) dx$  es que  $w_{n+1}(x)$  sea ortogonal a  $\mathbb{P}_n(x)$ .  $\square$

Si  $w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x+a_i)$  es ortogonal a  $\mathbb{P}_n(x)$  con respecto al producto escalar

$$\int_{-1}^1 w_{n+1} \cdot p \, dx, \quad p \in \mathbb{P}_n(x)$$

entonces  $w_{n+1}(x)$  es ortogonal a  $\mathbb{P}_n(x,y)$  para el producto escalar

$$\int_{\Omega} w_{n+1} \cdot p \, dx dy, \quad p \in \mathbb{P}_n(x,y).$$

De esta forma las condiciones (1.3.4) se reducen a las equivalentes para la evaluación de los nodos de Gauss en dimensión uno.

Así, las líneas  $x = a_i$  (con  $a_i$  los nodos de Gauss en el intervalo  $(-1, 1)$ ) forman un sistema de líneas que proporcionan una fórmula del tipo (1.1.3) exacta en  $P_{2n+1}$  para  $\Omega$  dado por (1.5.1).

1.5.2.- Otras aplicaciones al cuadrado usando fórmulas de cubatura con líneas no todas paralelas son posibles.

Para  $n = 2$  las líneas  $x+y = 0$ ,  $x-y = 0$  hacen la fórmula de cubatura asociada exacta en  $P_3(\Omega)$ .

Para  $n = 3$  es fácil probar que existen tres rectas que interseccionan en cero, tales que la fórmula de cubatura asociada es exacta en  $P_5(\Omega)$ .

Para  $n = 4$  las líneas  $\gamma_1 \equiv x^2 + y^2 - \frac{6}{5} = 0$ ,  $\gamma_2 \equiv x-y=0$ ,  $\gamma_3 \equiv x+y=0$ , hacen la fórmula de cubatura

$$(1.5.2) \int_{\Omega} f(x,y) dx dy \approx \frac{8}{13} \left( \int_{-1}^1 f(x,x) dx + \int_{-1}^1 f(x,-x) dx \right) + \frac{2}{\pi r(3r^2-1)} \int_{\gamma_1} f(\gamma_1) d\sigma(\gamma_1)$$

donde  $r^2 = \frac{6}{5}$ , exacta en  $P_7(\Omega)$ .

Similarmente, otros ejemplos son posibles. Sin embargo, cuando  $n$  es grande los cálculos algebraicos se complican.

Cubatura con  $n$  líneas de grado  $2n-2$  pueden obtenerse de forma similar.

Las anteriores fórmulas de cubatura, usadas como paso intermedio en la búsqueda de fórmulas con nodos, nos conducen a nuevas y conocidas fórmulas de cubatura. En particular, la mencionada fórmula para  $n = 3$  nos permite deducir la fórmula de Radon de grado 5 con 7 nodos. Otras fórmulas bien conocidas pueden también ser obtenidas de forma simple.

1.5.3. Aplicación al disco unitario. Sea  $\Omega$  el disco cerrado unitario. Análogamente a la aplicación 1.5.1 puede ser probado que si  $c_i(x,y)$  están definidos por

$$c_i(x,y) = x^2 + y^2 - r_i^2, \quad i = 0, \dots, n,$$

la fórmula de cubatura asociada a las líneas  $c_i(x,y) = 0$  es exacta en  $P_{4n+3}(\Omega)$ , siendo  $r_i$  los valores que minimizan

$$\int_0^1 \prod_{i=0}^n (s^2 - r_i^2)^2 ds.$$

Consideramos una única circunferencia ( $r_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) que hace la fórmula cubatura asociada exacta en  $P_3(\Omega)$ . Discretizamos la circunferencia  $c_0$  y obtenemos la siguiente fórmula minimal para el disco

$$(1.5.3) \quad \int_{\Omega} f(x,y) dx dy \approx \frac{\pi}{4} \{ f(1/2, 1/2) + f(1/2, -1/2) + f(-1/2, 1/2) + f(-1/2, -1/2) \},$$

la cual es exacta para polinomios de grado menor o igual a tres.

Usando como datos las rectas asociadas con los pares  $(\pi/4, 0)$  y  $(3\pi/4, 0)$ , obtenemos una fórmula exacta en  $P_3(\Omega)$ . Discretizando estas nuevas integrales hallamos (1.5.3) de nuevo.

La fórmula (1.5.3) es obtenida en [35] de una forma diferente.

## **CAPITULO II:**

**UN ANALISIS DE LOS METODOS DE ELEMENTOS PARA  
ECUACIONES LINEALES HIPERBOLICAS Y  
SISTEMAS HIPERBOLICOS DE PRIMER ORDEN**

# UN ANALISIS DE LOS METODOS DE ELEMENTOS PARA ECUACIONES LINEALES HIPERBOLICAS Y SISTEMAS HIPERBOLICOS DE PRIMER ORDEN

En este capítulo damos una introducción matemática al estudio de los Métodos de Elementos. Este estudio es aplicado a las ecuaciones hiperbólicas lineales y a los sistemas hiperbólicos de primer orden. Se analiza la aproximación de funciones mediante combinaciones lineales de medidas de Dirac sobre elementos (puntos, filamentos, superficies, volúmenes), la cual está relacionada con las fórmulas de cubatura sobre variedades. Resultados previos concernientes a la convergencia de los Métodos de Partículas son generalizados y adaptados a los Métodos de Elementos, siendo obtenida una misma estimación de error.

## 11.1. Introducción

Recientemente algunos métodos numéricos de aproximación de Ecuaciones en Derivadas Parciales (E.D.P.), especialmente de aquellas que proceden de la Mecánica de Fluidos y de la Física, han sido importantemente desarrollados: los Métodos de Vortex y los métodos de Partículas.

Los Métodos de Vortex han sido estudiados para la simulación de fluidos en movimiento. En Mecánica de Fluidos un elemento (punto, filamento, superficie, volumen,...) es una sección de un tubo de vortex (es decir, un tubo tangente en cada uno de sus puntos al vector vorticidad).

Los Métodos de Vortex con Elementos se basan en una aproximación de la solución de un problema, en cada tiempo  $t$ , mediante una combinación lineal de medidas localizadas sobre elementos. Un estudio de estos Métodos, y referencias acerca de su estudio tanto físico como matemático, será dado en el Capítulo IV.



Las ideas básicas que llevan a los Métodos de Partículas son similares a la de los Métodos de Vortex Puntuales. En Física los Métodos de Partículas han sido utilizados para construir la solución numérica de ecuaciones, como las de Boltzman, Folker-Planck, Vlasov-Poisson (ver [ 25 ], [ 26]). Una extensión a problemas de Convección -Difusión puede ser vista en [ 46] .

El propósito de este Capítulo es dar una introducción matemática al análisis de los Métodos de Elementos, los que podríamos incluir dentro del mismo orden de ideas que los Métodos de Vortex con Elementos. El estudio de los Métodos de Elementos es aquí aplicado a ecuaciones lineales hiperbólicas y sistemas hiperbólicos de primer orden.

La importancia de los Métodos de Elementos radica en que para construir la solución de un problema en tiempo  $t$  basta con conocer las posiciones de los elementos iniciales en dicho tiempo  $t$ .

Basándose en las propiedades de las fórmulas de cubatura con elementos vamos a dar un tratamiento intrínseco de estos, y no una discretización a priori como ocurre en trabajos precedentes (Física ó Mecánica de Fluidos).

La generalidad de los ejemplos empleados en este Capítulo para introducir este tipo de Métodos hace que se pierdan en parte sus propiedades. Algunas técnicas aquí desarrolladas serán empleadas en el Capítulo IV, en el análisis del Método de Vortex con Filamentos; y en el Capítulo III, en el caso de sistemas parabólicos de primer orden.

11.2. La característica de un elemento. Solución de medida de una ecuación lineal hiperbólica.

Consideramos el problema de Cauchy para una ecuación lineal de primer orden escrita en forma conservativa

$$(11.2.1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (a_l u) + a_0 u = f, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

El método de las características nos permite hallar  $u$  en forma implícita. Supongamos que

$$(11.2.2) \quad a_l \in L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\mathbb{R}^N)), \quad 1 \leq l \leq N.$$

Entonces podemos definir las características asociadas al operador diferencial de primer orden

$$(11.2.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^n a_l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

Sea  $I$  un dominio abierto de  $\mathbb{R}^s$  con  $s < N$  y sea  $\xi$  un parámetro que varía en  $I$ . Definimos la configuración espacial de un elemento (curva o filamento, superficie, volumen o hiperplano en general) mediante la aplicación

$$\gamma : \xi \in I \longrightarrow \gamma(\xi) \in \mathbb{R}^N.$$

Entonces el elemento  $H$  está definido por

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^N : \exists \xi \in I, \gamma(\xi) = x \}.$$

Es claro que la definición de  $H$  es independiente de la parametrización escogida. La noción física de los elementos consiste en considerarlos como secciones (puntos, líneas, superficies, ...) de un tubo de  $\mathbb{R}^N$  que es tangente en cada tiempo  $t$  a  $u(\cdot, t)$ .

Denotaremos por  $\gamma(\xi)$  la expresión de un punto genérico de  $H$ . Supongamos que  $\gamma : \xi \in L \rightarrow \gamma(\xi) \in \mathbb{R}^N$  es suficientemente regular.

Entonces podemos considerar el sistema

$$(11.2.4) \quad \frac{d r(t)}{d t} = a(r(t), t),$$

donde

$$a = (a_1, \dots, a_N) \text{ y } r = (r_1, \dots, r_N).$$

Como consecuencia de (11.2.2), existe una única solución de (11.2.4) que satisface la condición inicial

$$(11.2.5) \quad r(t_0) = \gamma(\xi),$$

y esta solución se encuentra en el espacio  $W^{1, \infty}(0, T)^N$ .

Escribiremos  $r(t; \gamma(\xi), t_0)$  para denotar la solución del problema (11.2.4) - (11.2.5).

Entonces por  $H(t)$  denotamos el conjunto definido por  $H(t) = \{r(t; \gamma(\xi), t_0) : \gamma(\xi) \in H\}$ .

Si suponemos que

$$(11.2.6) \quad a_1 \in L^\infty(0, T; W^{m+1, \infty}(\mathbb{R}^N)), \quad 1 \leq i \leq N,$$

para algún entero  $m \geq 1$ , entonces, para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  con  $1 \leq |\alpha| \leq m+1$ , se cumple

$$t \rightarrow \partial_y^\alpha r_1(t; \dots) \in C^0((0, T); L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, T))), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Denotamos por  $J(t; y, t_0)$  el determinante

$$(11.2.7) \quad J(t; y, t_0) = \det \left( \frac{\partial r_i}{\partial y_j}(t; y, t_0) \right).$$

Es un resultado clásico que

$$(11.2.8) \quad \frac{\partial J}{\partial t}(t; y, t_0) = J(t, y, t_0) (\operatorname{div} a)(r(t; y, t_0), t).$$

Además como  $J(t_0; y, t_0) = 1$ , tenemos  $J(t; y, t_0) > 0$   
 $y \in H$  y  $t \in [0, T]$ .

Lema 11.2.1. [47]. Supongamos que la hipótesis (11.2.2) se verifica. Entonces existe una constante  $C = C(T) > 0$  tal que

$$(11.2.9) \quad \exp(-C|t-t_0|) \leq J(t; y, t_0) \leq \exp(C|t-t_0|)$$

$$(11.2.10) \quad C^{-1} |y-\bar{y}| \leq |r(t; y, t_0) - r(t; \bar{y}, t_0)| \leq C |y-\bar{y}|$$

para todo  $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^N$  y todo  $t \in [0, T]$   $\square$

Si los datos  $a_1, 1 \leq l \leq N$ ,  $u_0$  y  $f$  son suficientemente regulares, entonces de (11.2.4), (11.2.5) y (11.2.8) podemos deducir que la única solución clásica del problema (11.2.1) es dada por

$$(11.2.11) \quad \begin{cases} u(y, t) = u_0(r(0; y, t)) J(0; y, t) \exp\left(-\int_0^t a_0(r(e; y, t), e) de\right) + \\ \quad + \int_0^t f(r(e; y, t), e) J(e; y, t) \exp\left(-\int_0^t a_0(r(\sigma; y, t), \sigma) d\sigma\right) de \end{cases}$$

Resultados acerca de la existencia y unicidad de soluciones débiles del problema (11.2.1) pueden verse en [47].

De ahora en adelante supondremos que los coeficientes  $a_1, 1 \leq l \leq N$ , y los datos  $u_0$  y  $f$  son suficientemente regulares, de forma que la solución  $u$  satisfaga las propiedades de regularidad que le serán requeridas.

En las secciones 2 y 4 vamos a describir el Método de Elementos cuando (como en el caso del Problema 11.2.1) la solución la conocemos en forma explícita. Con este propósito necesitamos considerar soluciones medida del problema. En la sección 5 estudiaremos una situación más general.

Denotamos por  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  el espacio de medidas definido sobre  $\mathbb{R}^N$ , y por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la dualidad entre  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  y  $C_0(\mathbb{R}^N)$ . Buscamos soluciones del problema (11.2.1) en el espacio  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ .

Supongamos que

$$(11.2.12) \quad a_1 \in C^0(\mathbb{R}^N \times [0, T]), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Una medida  $u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  es una medida solución de (11.2.1) si verifica

$$\langle u, L^* \vartheta \rangle = \langle f, \vartheta \rangle + \langle u_0, \vartheta(\cdot, 0) \rangle, \quad \vartheta \in C_0^1(\mathbb{R}^N \times [0, T])$$

donde

$$\begin{cases} L^*(\vartheta) = -\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + a_0 \vartheta, \\ u_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \text{ y } f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N \times [0, T]) \end{cases}$$

Teorema 11.2.1. [47]. Supongamos que las condiciones (11.2.2) y (11.2.12) se verifican. Entonces si  $u_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  y  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ , el problema (11.2.1) tiene una única solución medida  $u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  dada por

$$(11.2.13) \quad \begin{cases} \langle u, \vartheta \rangle = \langle u_0, \gamma \rightarrow \int_0^T \vartheta(r(t; y, 0), t) \exp(-\int_0^t a_0(r(\sigma; y, 0), \sigma) d\sigma) dt \rangle \\ \quad + \langle f, (\gamma, \tau) \rightarrow \int_\tau^T \vartheta(r(t; y, \tau) \exp(-\int_\tau^t a_0(r(\sigma; y, \tau), \sigma) d\sigma) dt \rangle \end{cases}$$

para todo  $\vartheta \in C_0^0(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ .

#### Medida de Dirac localizada sobre un elemento

Sea  $H$  un elemento diferenciable a trozos definido por:  $H = \{ x \in \mathbb{R}^N : \exists \xi \in I, \gamma(\xi) = x \}$ , donde  $I$  es un dominio abierto de  $\mathbb{R}^s$ ,  $s \leq N$ , y  $\gamma$  es la aplicación definida por

$$\gamma : \xi \in I \longrightarrow \gamma(\xi) \in \mathbb{R}^N.$$

Denotamos por  $H(t)$  la variedad definida por

$$H(t) = \{ r(t; \gamma(\xi), 0) : \gamma(\xi) \in H, \xi \in I \}.$$

En el caso general, consideramos una función continua definida sobre  $H(t)$ ,  $\mu \in C(H(t))^L$ ,  $L \geq 1$

Vamos a introducir la medida  $\mu \delta_{H(t)}$  definida para todo  $\phi \in C_0^0(\mathbb{R}^N)^L$ ,  $L \geq 1$ , por

$$\langle \mu \delta_{H(t)}^i, \phi_i \rangle = \int_I \mu_i(r(t; \gamma(\xi), 0)) \phi_i(r(t; \gamma(\xi), 0)) \left| \frac{\partial r(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} \right| d\xi$$

donde  $\left| \frac{\partial r(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} \right| d\xi$  denota la diferencial de la medida del elemento  $H(t)$  y donde  $r(t; \gamma(\xi), 0)$  es la solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{dr(t)}{dt} = u(r(t), t) \\ r(0) = H \end{cases}$$

con  $1 \leq i \leq L$ ,  $L \geq 1$ .

Cuando  $L=1$   $\mu \delta_{H(t)}$  es la medida de Dirac localizada sobre  $H(t)$ .

La medida  $\mu \delta_{H(t)}$  definida de esta forma es independiente de la representación paramétrica. Por tanto, (11.2.14) puede ser escrito en la forma

$$\langle \mu \delta_{H(t)}, \phi \rangle = \int_{H(t)} \mu(x) \phi(x, t) dH(t).$$

El siguiente corolario nos proporciona el instrumento preciso para definir el Método de Elementos. Por simplicidad suponemos que la densidad  $\mu$  es constantemente igual a uno.

Corolario 11.2.1.- Si  $u_0 = \delta_H$  y  $f = 0$ , la medida solución del problema (11.2.1) viene dada por

$$u(x, t) = \alpha(H, t) \delta_{H(t)}$$

donde la función  $\alpha(H, t)$  es definida por

$$\alpha(H, t) \left| \frac{\partial r(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} \right| = \exp\left(-\int_0^t a_0(r(s; \gamma(\xi), 0), s) ds\right) \left| \frac{\partial \gamma(\xi)}{\partial \xi} \right|$$

Dem.

Este corolario puede ser visto como una consecuencia del Teorema II.2.1.

Otra demostración posible se basa en el concepto de medida solución. Si suponemos que

$$u(x, t) = \alpha(H, t) \delta_H(t)$$

entonces tenemos

$$\langle u, L^* \vartheta \rangle = \int_0^T \int_1 \alpha(H, t) \left( -\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \sum_{l=1}^N a_l \frac{\partial \vartheta}{\partial x_l} + a_0 \vartheta \right) (r(t; \gamma(\xi), 0), t) \left| \frac{\partial r(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} \right| d\xi dt$$

Podemos escribir

$$\frac{d}{dt} (\vartheta(r(t; \gamma(\xi), 0), t)) = \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \sum_{l=1}^N a_l \frac{\partial \vartheta}{\partial x_l} \right) (r(t; \gamma(\xi), 0), t).$$

Además la siguiente relación se verifica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vartheta(r(t; \gamma(\xi), 0), t) \exp(-\int_0^t a_0(r(s; \gamma(\xi), 0), s) ds)) &= \\ &= \frac{d}{dt} (\vartheta(r; \gamma(\xi), 0), t) \exp(-\int_0^t a_0(r(s; \gamma(\xi), 0), s) ds) - \\ &- (\vartheta a_0)(r(t; \gamma(\xi), 0), t) \exp(-\int_0^t a_0(r(s; \gamma(\xi), 0), s) ds). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \langle u, L^* \vartheta \rangle &= \int_1 \int_0^T -\frac{d}{dt} (\vartheta(r(t; \gamma(\xi), 0), t) \exp(-\int_0^t a_0(r(s; \gamma(\xi), 0), s) ds)) \left| \frac{\partial \gamma(\xi)}{\partial \xi} \right| d\xi dt \\ &= \int_1 \vartheta(\gamma(\xi), 0) \left| \frac{\partial \gamma(\xi)}{\partial \xi} \right| d\xi = \langle u_0, \vartheta(\cdot, 0) \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Observemos que la función  $t \rightarrow \alpha(H, t)$  puede ser vista como la solución de la ecuación diferencial

$$(II.2.15) \begin{cases} \frac{d}{dt} \alpha(H, t) + \alpha(H, t) (a_0(r(t; \gamma(\xi), 0), t)) + \frac{d}{dt} \log \left( \left| \frac{\partial r(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} \right| \right) = 0 \\ \alpha(H, 0) = 1 \end{cases}$$

Similarmente a lo que ocurre con la aproximación mediante el Método de Partículas, la aplicación de nuestro método a las ecuaciones lineales hiperbólicas conlleva la inclusión de un coeficiente  $\alpha(H,t)$  en la solución del problema (11.2.1).

Para todo  $t \in [0, T]$ ,  $u(\cdot, t)$  es proporcional a la medida cuya trayectoria coincide con la de la característica que pasa por el elemento  $H$  en  $t = 0$ . Así, es proporcional a la medida de Dirac localizada sobre el elemento  $H(t)$ . Diremos que una tal medida solución es una solución por elementos del problema 11.2.1.

Nota 11.2.1 En la práctica las funciones  $r(t; y, 0)$  y  $t \rightarrow \alpha(H, t)$  pueden ser determinadas numéricamente mediante la solución aproximada de sus ecuaciones diferenciales asociadas.

### 11.3. Aproximación de funciones mediante medidas de Dirac localizadas sobre elementos

Sea  $g$  una función continua definida sobre  $\mathbb{R}^N$ . Vamos a aproximar  $g$  por una medida de la forma:

$$(11.3.1) \quad g_h = \sum_{j \in J} \alpha_j g^\delta H_j$$

donde, para todo  $j \in J$ ,  $\alpha_j > 0$ , los elementos  $H_j$  están definidos por

$$H_j = \{y \in \mathbb{R}^N : y = \gamma_j(\xi_j), \xi_j \in I_j\}$$

donde  $I_j$ ,  $j \in J$ , es un abierto de  $\mathbb{R}^{s_j}$ ,  $s_j \leq N$

y  $h$  es un parámetro de discretización a especificar.

Esta aproximación es equivalente a un problema de cubatura con elementos en el siguiente sentido:

Dada una función  $\phi \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ , comparamos

$$\langle g, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g \phi \, dx$$



$$\langle g_h, \emptyset \rangle = \sum_{j \in J} \alpha_j \int_{H_j} g \emptyset dH_j.$$

Por tanto el problema de aproximar  $g$  por  $g_h$  es equivalente a obtener el óptimo en  $s \geq 0$  para que la fórmula de cubatura siguiente sea exacta en el espacio de polinomios  $\mathcal{P}_s(\mathbb{R}^N)$ ,  $s \geq 0$ ,

$$(11.3.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} p dx = \sum_{j \in J} \alpha_j \int_{H_j} p dH_j, \quad p \in \mathcal{P}_s(\mathbb{R}^N).$$

Al igual que ocurre con las fórmulas de cubatura, parece interesante construir medidas de la forma (11.3.1) en lugar de aproximar  $g$  por medidas puntuales de Dirac con la intención de hacer tan suave como sea posible el salto de una a varias variables. Además, la aproximación (11.3.1) puede ser considerada como paso intermedio hacia aproximaciones puntuales. Esta clase de ideas han sido usadas con éxito para aproximar la solución de las ecuaciones de Euler en 3 dimensiones mediante el Método de Vortex con Filamentos (ver Capítulo IV).

Vamos ahora a extender los resultados del Capítulo I a dimensión  $N$  y obtener algunas estimaciones de error que serán usadas en todo lo que sigue.

### Convergencia y estimación de error para las fórmulas de cubatura con elementos.

Sea  $\Omega$  una región de  $\mathbb{R}^N$  y sea  $\mathcal{P}_m(\Omega)$  el espacio de polinomios definido sobre  $\Omega$  de grado inferior o igual a  $m$ .

Dado un conjunto de polinomios  $h_{i_m}$  contenidos en  $\mathcal{P}_m$  definimos los elementos polinomiales  $H_{i_m}$  contenidos en  $\Omega$ , como

$$H_{i_m} = \{x \in \Omega : h_{i_m}(x) = 0\}$$

Obviamente  $h_{i_m}$  puede representar uno o varios polinomios contenidos en  $\mathcal{P}_m(\Omega)$ . El grado del elemento polinomial  $H_{i_m}$  queda determinado por la suma de los grados de las funciones polinómicas definidas por  $h_{i_m}$ .

Sea  $p \in \mathbb{P}_s(\Omega)$ ,  $s \geq 0$ . Consideremos la aproximación de  $\int_{\Omega} p \, dx$  por sumas de la forma

$$(11.3.4) \quad \int_{\Omega} p \, dx = \sum_{i=1}^k \alpha_{im} \int_{H_{im}} p \, dH_{im}, \alpha_{im} > 0.$$

Notemos que (11.3.4) es una simplificación de la expresión

$$\int_{\Omega} p \, dx = \sum_{i=1}^{s_1} \alpha_{i1} \int_{H_{i1}} p \, dH_{i1} + \dots + \sum_{i=1}^{s_r} \alpha_{ir} \int_{H_{ir}} p \, dH_{ir} + \dots + \sum_{i=1}^{s_m} \alpha_{im} \int_{H_{im}} p \, dH_{im},$$

donde  $H_{ir}$  es un elemento polinomial de grado  $r$ .

$$\text{Definimos } k' = \sum_{r=1}^m s_r \cdot r \text{ y } k = \sum_{r=1}^m s_r$$

La aproximación (11.3.4) es exacta a lo más para  $s = 2k' - 1$ , es decir, sobre  $\mathbb{P}_{2k'-1}(\Omega)$ .

Buscamos una representación minimal de (11.3.4) en el sentido de, fijados  $k'$  y  $s_r$ , para cada  $r$ , encontrar polinomios  $h_{im}$  (elementos  $H_{im}$ ) y coeficientes  $\alpha_{im}$ , tal que (11.3.4) sea exacta en  $\mathbb{P}_{2k'-1}(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ .

Definimos el polinomio  $w \in \mathbb{P}_{k'}(\Omega)$  mediante

$$w = \prod_{i=1}^k h_{im}.$$

De forma similar a lo demostrado en el Capítulo 1, es fácil probar que si la fórmula de cubatura (11.3.4) es exacta en  $\mathbb{P}_{2k'-1}(\Omega)$ , entonces  $w$  es ortogonal al espacio  $\mathbb{P}_{k'-1}(\Omega)$ .

Dado  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ , existe un sistema de  $z = \binom{N+k'-1}{k'}$  polinomios linealmente independientes en  $\mathbb{P}_{k'}(\Omega)$  que son ortogonales a  $\mathbb{P}_{k'-1}(\Omega)$ . Denotemos por  $p_l$ ,  $l=1, \dots, z$ , los polinomios linealmente independientes de  $\mathbb{P}_{k'}(\Omega)$  que son ortogonales a  $\mathbb{P}_{k'-1}(\Omega)$ .

Por tanto,  $w$  pertenece a la variedad generada por los polinomios  $p_l$ , es decir,  $w$  puede ser escrito -

en la forma

$$w = \sum_{l=1}^z a_l p_l,$$

donde al menos uno de los coeficientes  $a_l$  es no nulo. Fijar a priori  $a_{l_0} = 1$  es elegir  $w$  entre  $z$  posibilidades.

Así, buscamos un polinomio  $w$  que pertenece a los conjuntos

$$C_{1_0} = \{ w \in \mathcal{P}_{k,1}(\Omega) : w = \sum_{l=1}^z a_l p_l, a_{l_0} = 1 \}$$

y

$$C_2 = \{ w \in \mathcal{P}_{k,1}(\Omega) : w = \prod_{i=1}^k h_{im} \}$$

El siguiente teorema nos proporciona una representación y caracterización de las fórmulas Gaussianas del tipo (11.3.4).

Teorema 11.3.1. Sea  $\Omega$  una región abierta, acotada y conexa de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\bar{\Omega}$  su clausura, y sea  $C_{1_0}$  y  $C_2$  definidos como anteriormente. Si  $I = C_{1_0} \cap C_2$  es no vacío, existen  $k$  polinomios  $h_{im}$  que minimizan el funcional

$$F = \int_{\Omega} \prod_{i=1}^k h_{im}^2 dx$$

donde  $w = \prod_{i=1}^k h_{im} \in I$ . Además, estos polinomios y sus correspondientes elementos son diferentes e intersecan a  $\Omega$ .

Además, cuando la fórmula de cubatura (11.3.4) es exacta en  $\mathcal{P}_{2k-1}(\Omega)$  los coeficientes  $\alpha_{im}$  son todos positivos.  $\square$

El Teorema 11.3.1 da una condición necesaria para la existencia de una representación minimal de (11.3.4). Una vez conocida la existencia del mínimo, para obtener los polinomios  $h_{im}$  y los coeficientes  $\alpha_{im}$  aplicamos el método de Lagrange a  $F$  con las condiciones de ortogonalidad de  $w$  con  $\mathcal{P}_{k,1}(\Omega)$ .

Dado un parámetro  $h > 0$ , recubrimos  $\mathbb{R}^N$  con una red uniforme de medida  $(2h)^N$ . Sea

$$\mathbb{Z}_*^N = \{ j = (j_1, \dots, j_N) : j_i = 2\theta_i, \theta_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, N \} = (2\mathbb{Z})^N$$

Para todo  $j \in \mathbb{Z}_*^N$  definimos la región

$$Q_j = \{ x \in \mathbb{R}^N : (j_1 - 1)h \leq x_1 \leq (j_1 + 1)h, 1 \leq i \leq N \}.$$

Consideramos también la región

$$Q = \{ x \in \mathbb{R}^N : x_i \in [-1, 1], 1 \leq i \leq N \} = [-1, 1]^N$$

En las regiones en las que nos interesa aplicar nuestro esquema de aproximación, es decir en  $Q_j$  y  $Q$ , es fácil demostrar (ver Capítulo 1), como una aplicación del Teorema 11.3.1. ( $\Omega = Q$ ), que existen sistemas de polinomios que minimizan el funcional  $F$ : las  $k$  variedades de grado  $m < N$  (rectas, planos, ...), ortogonales a uno de los ejes coordenados en cada nodo de Gauss (elementos Gaussianos), hacen la expresión (11.3.4) exacta en el espacio de polinomios  $\mathbb{P}_{2k-1}(Q)$ .

Consideremos cualquier representación mínima sobre cada  $Q_j$  de (11.3.4). Para simplificar la notación supongamos que consideraciones sobre el orden y el número de filamentos, superficies o volúmenes han sido implícitamente incluidas en el índice  $i$ . Por tanto, estudiaremos, para cada  $j \in \mathbb{Z}_*^N$ , la aproximación

$$(11.3.5) \quad \int_{Q_j} \beta dx = \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \int_{H_{ij}} \beta dH_{ij} + E_j(\beta), \quad \forall \beta \in C(Q_j)$$

donde  $H_{ij}$  está definido por

$$H_{ij} = \{ x \in Q_j : \exists \xi_{ij} \in I_{ij}, \text{ abierto de } Q_j, x = \gamma_{ij}(\xi_{ij}) \}.$$

y para toda función  $\beta \in C(Q_j)$  denotamos por  $E_j(\beta)$  el funcional

$$(11.3.6) \quad E_j(\beta) = \int_{Q_j} \beta dx - \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \int_{H_{ij}} \beta dH_{ij}.$$

Por tanto se verifica

$$(11.3.7) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \beta dx - \sum_{j \in \mathbb{Z}_*^N} \left[ \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \int_{H_{ij}} \beta dH_{ij} \right] = \sum_{j \in \mathbb{Z}_*^N} E_j(\beta)$$

El funcional (11.3.6) se anula para todo  $\beta$  para todo  $\beta \in \mathcal{P}_{2k'-1}(Q_j)$  y es lineal y continuo sobre  $C(Q_j)$

Presentamos ahora el Teorema debido a Bramble y Hilbert, que será importante en la búsqueda de estimaciones de error de nuestra fórmula de cubatura y cuya demostración puede verse en [20]. Por simplicidad en la notación suponemos  $k' = k$

Teorema 11.3.2. Sea  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^N$  abierto y acotado con una frontera Lipschitziana y sea  $L: P \rightarrow L(P)$  una forma lineal y continua definida sobre  $W^{k,p}(\Omega)$ ,  $k \geq 1$ ,  $p \in [1, \infty]$ , con norma  $\|L\|$  que satisface

$$L(P) = 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}_{k-1}(\Omega).$$

Entonces, existe una constante  $C > 0$  tal que

$$|L(P)| \leq C \|L\| |P|_{k,p,\Omega}, \quad \forall P \in W^{k,p}(\Omega). \quad \square$$

Como consecuencia del Teorema 11.3.2. obtenemos:

Lema 11.3.1.- Existe una constante  $C > 0$  independiente de  $h$  y de  $j$  tal que

$$E_j(\beta) \leq \begin{cases} C h^{2k + \frac{N}{p^*}} |\beta|_{2k,p,Q_j}, & \forall \beta \in W^{2k,p}(Q_j), \quad k \geq 1, \quad p > \frac{N}{2k} \\ C h^{2k-1 - \frac{N}{p^*}} |\beta|_{2k-1,p,Q_j}, & \forall \beta \in W^{2k-1,p}(Q_j), \quad k \geq 1, \quad p > \frac{N}{2k-1} \end{cases}$$

donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ .

Dem.-

Denotamos por  $\bar{E}(\bar{\beta})$  la siguiente expresión

$$\bar{E}(\bar{\beta}) = \int_Q \bar{\beta}(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \int_{\bar{H}_{ij}} \bar{\beta}(\bar{H}_{ij}) d(\bar{H}_{ij}).$$

Este operador se anula para todo  $\bar{\beta} \in \mathbb{P}_{2k-1}(Q)$  y es lineal y continuo sobre  $C^0(Q)$ . Como  $k \geq 1$  el teorema de embebimiento de Sobolev nos asegura que  $W^{2k,p}(Q) \subset C^0(Q)$  en tanto que  $p$  sea superior a  $\frac{N}{2k}$ . Se sigue del teorema 11.3.2. que

$$|\bar{E}(\bar{\beta})| \leq c |\bar{\beta}|_{2k,p,Q}, \quad \forall \bar{\beta} \in W^{2k,p}(Q), \quad p > \frac{N}{2k}.$$

Dada una función  $\beta$  definida sobre  $Q_j$ , podemos definir  $\bar{\beta}$  sobre  $Q$  como

$$\bar{\beta}(\xi) = \beta(x) = \beta(\dots, (j_1 + \xi_1)h, \dots).$$

Si  $\beta \in W^{m,p}(Q_j)$ , la función  $\bar{\beta} \in W^{m,p}(Q)$  y además  $|\bar{\beta}|_{m,p,Q} = h^{m - \frac{N}{p}} |\beta|_{m,p,Q_j}$ .

Por tanto vemos que

$$\begin{aligned} E_j(\beta) &= \int_{Q_j} \beta(x) dx - \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \int_{H_{ij}} \beta(H_{ij}) d(H_{ij}) = \\ &\text{usando el cambio de variable } x_i = (\xi_i, h+j_i, h) \longrightarrow \xi_i \\ &= h^N \int_Q \bar{\beta}(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} h^{N-i} \int_{\bar{H}_{ij}} \bar{\beta}(\bar{H}_{ij}) d(\bar{H}_{ij}) = \\ &= h^N \left( \int_Q \bar{\beta}(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} h^{-i} \int_{\bar{H}_{ij}} \bar{\beta}(\bar{H}_{ij}) d(\bar{H}_{ij}) \right) = \\ &\text{como } h \text{ es un parámetro destinado a tender a cero} \\ &\text{supongamos que } h \leq 1. \text{ Además, es claro que } \bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} h^{-i} \\ &= h^N \bar{E}(\bar{\beta}). \end{aligned}$$

En consecuencia obtenemos que

$$E_j(\beta) = h^N \bar{E}(\bar{\beta}) \leq c h^N |\bar{\beta}|_{2k,p,Q} = c h^{2k + \frac{N}{p^*}} |\beta|_{2k,p,Q_j}$$

De una forma muy similar obtenemos la otra acotación.  $\square$

Si hacemos  $k$  variable obtendremos una estimación parecida a la del Lema 11.3.1 para cada  $\beta \in W^{m,p}(Q_j)$ ,  $p > \frac{N}{m}$ . Hacer  $k$  variable es natural (ver nota 11.3.1) y dependerá de la regularidad de  $\beta$ .

El siguiente resultado, consecuencia del Lema 11.3.1, es muy importante en nuestro esquema de aproximación.

Teorema 11.3.3.- Sea  $m \geq 1$  un entero y sea  $p > \frac{N}{m}$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ . Entonces existe una constante  $C$

independiente de  $h$  tal que para toda función

$$\beta \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \cap W^{m-1,1}(\mathbb{R}^N)$$

se verifica la siguiente relación

$$(11.3.8) \left| \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) dx - \sum_{j \in \mathbb{Z}_*^N} \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \int_{H_{ij}} \beta(H_{ij}) dH_{ij} \right| \leq C h^{m + \frac{N}{p^*}} \sum_{j \in \mathbb{Z}_*^N} |\beta|_{m,p,Q_j} \quad \square$$

Nota 11.3.1 .- A priori, hacer  $k$  variable con respecto a la diferenciabilidad de  $\beta$  puede ser costoso. En la práctica, si suponemos que los elementos son periódicos de periodicidad  $Q_j$  y no dependientes de  $h$ , es usada la siguiente versión.

Para un número fijo  $k$  de elementos que hagan (11.3.5) exacta en  $\mathcal{P}_s(Q_j)$  puede ser provado (ver [47] para el caso de fórmulas de cuadratura) que existen constantes  $a_\alpha$  tales que

$$|E_j(Q_j) - \sum_{s+1 \leq |\alpha| \leq m-1} a_\alpha \int_{Q_j} \partial^\alpha \beta dx| \leq C h^{m + \frac{N}{p^*}} |\beta|_{m,p,Q_j}$$

Como  $\beta \in W^{m,1}(\mathbb{R}^N)$  se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha \beta dx = 0, \quad s+1 \leq |\alpha| \leq m-1,$$

por tanto, obtenemos un resultado análogo al del Teorema 11.3.3.  $\square$

Convergencia de la aproximación de funciones mediante medidas de Dirac sobre elementos.

Como consecuencia del Teorema 11.3.3. podemos establecer la convergencia de la aproximación de funciones de Dirac localizadas sobre superficies, volúmenes o filamentos en el siguiente sentido:

Sea  $g \in C^0(\mathbb{R}^N)$  y sea  $g_h$  una aproximación de  $g$  definida por la expresión

$$(11.3.9) \quad g_h(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_*^N} \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} g \delta_{H_{ij}}(x), \quad H_{ij} \subset Q_{ij},$$

$H_{ij}$  elegidos en las condiciones anteriores al igual que los  $\alpha_{ij}$  que verifican la condición

$$(11.3.10) \quad \alpha_{ij} > 0.$$

Corolario 11.3.1.- Sea  $g \in C^0(\mathbb{R}^N)$  y  $g_h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  definidas por (11.3.9) y (11.3.10). Entonces  $g_h$  converge debilmente en  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  hacia  $g$  cuando  $h$  tiende a cero, es decir, para toda función  $\phi \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$  se verifica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle g_h - g, \phi \rangle = 0 \quad \square$$

Corolario 11.3.2.- Bajo las mismas hipótesis que en el Teorema 11.3.3., existe una constante  $C > 0$ , tal que

$$\| |g_h - g| \|_{-m,p,\mathbb{R}^N} \leq C h^m \|g\|_{m,p,\mathbb{R}^N}, \quad \forall g \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$$

Dem.

Para todo  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\langle g_h - g, \phi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}_*^N} E_j(g \phi).$$

Es claro que  $g \phi \in W^{m,1}(\mathbb{R}^N)$ . Aplicando la desigualdad de Hölder



$$|\langle g_h - g, \vartheta \rangle| \leq c_1 h^m \|g \cdot \vartheta\|_{m,1,\mathbb{R}^N} \leq c_2 h^m \|g\|_{m,p,\mathbb{R}^N} \|\vartheta\|_{m,p^*,\mathbb{R}^N}$$

La anterior desigualdad se verifica para todo  $\vartheta \in W^{m,p^*}(\mathbb{R}^N)$

con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ . Por tanto tenemos

$$\|g_h - g\|_{-m,p,\mathbb{R}^N} = \sup_{\vartheta \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \frac{|\langle g - g_h, \vartheta \rangle|}{\|\vartheta\|_{m,p,\mathbb{R}^N}} \leq c_3 h^m \|g\|_{m,p,\mathbb{R}^N} \quad \square$$

Nota 11.3.2.- En nuestro desarrollo, la única condición sobre la elección de los elementos es que la fórmula de cubatura asociada a tal elección sea exacta al menos en  $P_0$ . Esto nos permite introducir en el esquema algunos elementos cuya evolución es interesante seguir (los elementos físicos), y añadir cuantos elementos sean necesarios con la anterior única condición. La noción física (mecánica) de los elementos consiste en considerarlos como secciones de un tubo generalizado en  $\mathbb{R}^N$  que es tangente en cada tiempo al vector  $u(\cdot, t)$ .

Fijado un arbitrario conjunto de  $K$  elementos  $H_{ij}$ , para cada  $j \in Z_*^N$ , si escogemos los coeficientes  $\alpha_{ij}$  de forma que se verifique

$$(11.3.11) \quad (2h)^N = \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \int_{I_{ij}} \left| \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d \xi_{ij},$$

entonces la fórmula de cubatura asociada es exacta al menos en  $P_0(Q_j)$ . Por tanto, podemos utilizar cualquier sistema de elementos y escoger los coeficientes  $\alpha_{ij}$  bajo la condición (11.3.11).

Otra posibilidad de introducir los elementos físicos en nuestro esquema es suponer que existe un difeomorfismo que los transforma en elementos Gaussianos (ver Capítulo IV) y podemos usar estos como base del esquema.

Observemos finalmente que si tomamos sobre cada  $Q_j$  un mismo y único elemento Gaussiano de orden  $s$ , entonces

podemos aplicar el resultado contenido en la Nota 11.3.1, deduciendo que  $\alpha_{ij} = (2h)^{N-s} \quad j \in Z_*^N$ , obteniendo así un resultado análogo al Teorema 11.3.3.  $\square$

En lo sucesivo supondremos que los elementos y coeficientes han sido elegidos por cualquiera de las vías descritas en la Nota 11.3.2., con la condición de obtener un resultado análogo al Teorema 11.3.3.

#### 11.4.- Convergencia del Método de Elementos I.-

Consideramos el problema (11.2.1) con  $f = 0$ . Supongamos que la condición inicial  $u_0 \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$  y que usando la malla introducida en la Sección 11.3. aproximamos la función  $u_0$  mediante  $u_h^0$  definida por

$$(11.4.1) \quad u_h^0(x) = \sum_{j \in Z_*^N} \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} u_0(\gamma_{ij}) \delta_{H_{ij}}(x),$$

donde

$$(11.4.2) \quad \alpha_{ij} > 0, \quad \forall i, \forall j.$$

y donde los  $H_{ij}$  son escogidos, para cada  $j \in Z_*^N$ , en las condiciones del Teorema 11.3.1. Aplicando el Corolario 11.2.1, la solución del problema 11.2.1 con condición inicial  $u_h^0$  queda definida por

$$(11.4.3) \quad u_h(x, t) = \sum_{j \in Z_*^N} \sum_{i=1}^k \alpha_{ij}(t) u_0(\gamma_{ij}) \delta_{H_{ij}}(t)(x),$$

donde  $\alpha_{ij}(t)$  viene definido por la condición (11.2.15) y

$$(11.4.4) \quad r_{ij}(t) = r(t; \gamma_{ij}(\xi), 0)$$

Es fácil demostrar que se verifica, para todo  $t \in [0, T]$ , una relación de la forma

$$(11.4.5) \quad \langle u(x, t) - u_h(x, t), \vartheta \rangle = \sum_{j \in Z_*^N} |E_j(p(x, t))|,$$

donde  $p$  está definida por

$$(11.4.6) \quad p(y,t) = u_0(y) \exp\left(-\int_0^t a_0(r(\sigma,y,0),\sigma) d\sigma\right) \vartheta(r(t;y,0)),$$

siendo resultado de comparar (11.4.3) con (11.2.11) habiendo sido utilizado el cambio de variable  $y \rightarrow r(0,y,t)$ , es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t) \vartheta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \exp\left(-\int_0^t a_0(r(\sigma;y,0),\sigma) d\sigma\right) \vartheta(r(t;y,0)) dy$$

Entonces una consecuencia del Corolario 11.3.1 es el siguiente Teorema.

Teorema 11.4.1.- Sean  $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^N)$  y  $u_h^0$  definidos por (11.4.1) y (11.4.2). Entonces si  $u$  es una solución débil del problema (11.2.1) con  $f = 0$  y  $u_h$  es la solución por elementos de (11.2.1) definida por (11.4.2), (11.4.3) y (11.4.4), se verifica para toda función  $\vartheta \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t \in [0,T]}} \langle u(\cdot,t) - u_h(\cdot,t), \vartheta \rangle = 0, \quad \text{uniformemente en } \square$$

La medida  $u_h$  es de interés cuando queremos calcular la aproximación numérica de la solución  $u$  en un punto, filamento, superficie o volumen. Para aproximar  $u$  en un sentido más clásico, asociamos a la medida  $u_h$  la función continua  $u_h^\varepsilon$ . En orden a construir  $u_h^\varepsilon$  introducimos la función cut-off  $k \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} k dx = 1.$$

Para todo  $\varepsilon > 0$  definimos

$$(11.4.7) \quad k_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Finalmente definimos  $u_h^\varepsilon$  como

$$u_h^\varepsilon(x,t) = (u_h(\cdot,t) * k_\varepsilon)(x)$$

Por tanto  $u_h$  puede ser escrita en la forma

$$(11.4.8) \quad u_h^E(x,t) = \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) u_0(\gamma_{ij}) k_e(x-r_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij}$$

Cuando consideramos un número no limitado de Elementos, (11.4.8) puede no tener sentido. Esta dificultad no se presenta en la práctica ya que normalmente existen condiciones sobre  $u_0$  ó sobre  $k$  de forma que  $u_h^E$  quede definida como una función continua. Por ejemplo, si suponemos que  $k$  tiene soporte compacto, entonces  $u_h^E \in C^0(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ , ver [47]). De ahora en adelante supondremos que esta condición se verifica.

#### 11.5. Descripción del Método de Elementos para un sistema lineal hiperbólico.

Cuando la solución de un problema puede ser dada de forma explícita, la aplicación del Método de Elementos, descrito en las anteriores Secciones, no presenta dificultad. El propósito de esta Sección es establecer una extensión del Método aplicable a situaciones más generales.

Dado  $T > 0$ , denotamos  $Q_T = \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  y por  $S(\mathbb{R}^L)$  el espacio de las  $L \times L$  matrices con coeficientes reales.

Introducimos  $N+1$  aplicaciones

$$A^l : (x,t) \in Q_T \longrightarrow A^l(x,t) \in S(\mathbb{R}^L), \quad 0 \leq l \leq N,$$

que verifican las siguientes propiedades:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad A^l \in L^\infty(Q_T; S(\mathbb{R}^L)), \quad 0 \leq l \leq N \\ (ii) \quad \frac{\partial A^l}{\partial x_m} \in L^\infty(Q_T; S(\mathbb{R}^L)), \quad 1 \leq l, m \leq N, \\ (iii) \quad A^l(x,t) = A^l(x,t)^T, \quad 1 \leq l \leq N. \end{array} \right.$$

La tercera condición puede ser generalizada a sistemas simetrizables.

Dadas dos funciones  $u_0: x \in \mathbb{R}^N \rightarrow u_0(x) \in \mathbb{R}^L$  y  $f: (x, t) \in Q_T \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}^L$  buscamos una función  $u: (x, t) \in Q_T \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}^L$  solución del sistema simétrico de primer orden, escrito en forma conservativa

$$(11.5.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (A^l u) + A^0 u = f, \quad \text{en } Q_T$$

unido a la condición inicial

$$(11.5.3) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Denotamos por  $L^2(\mathbb{R}^N)$  al espacio  $L^2(\mathbb{R}^N)^L$ . El problema (11.5.2) - (11.5.3) está bien planteado en  $L^2(\mathbb{R}^N)$  y  $f \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^N))$ . En este caso el problema (11.5.2) - (11.5.3) tiene una única solución débil  $u \in C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^N))$ . Supondremos, de ahora en adelante, que los coeficientes  $A^l$ ,  $0 \leq l \leq N$  y los datos  $u_0$  y  $f$  son suficientemente regulares de forma que  $u$  satisfaga las propiedades de regularidad que le serán requeridas. Por simplicidad omitiremos la referencia a cada componente.

Para facilitar el análisis de este problema, introducimos el sistema de coordenadas móviles.

$$(11.5.4) \quad A^l = a_l I + B^l, \quad 1 \leq l \leq N.$$

donde  $I$  es la matriz identidad de  $S(\mathbb{R}^L)$  y las funciones  $a_l$  están definidas sobre  $Q_T$ , con valores reales y satisfacen, además, la condición (11.2.2).

Similarmente a lo realizado en la Sección 2 de este Capítulo, podemos definir los elementos característicos asociados en el operador diferencial de primer orden

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^N a_l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

Nuestro objetivo es buscar una aproximación de la solución del problema (11.5.2) - (11.5.3) en la forma:

$$(11.5.5) \quad \bar{u}_h(x,t) = \sum_{j \in Z_*^N} \sum_{i=1}^N \alpha_{ij}(t) u_{ij}(t) \delta_{H_{ij}(t)}(x)$$

o equivalentemente en forma continua.

$$(11.5.6) \quad \bar{u}_h^\varepsilon(x,t) = \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) u_{ij}(t) k_\varepsilon(x-r_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}(t)}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij}$$

donde  $u_{ij}(t)$  es una aproximación de  $u(r_{ij}(t), t)$  (en un sentido a especificar más tarde) y  $\alpha_{ij}(t) = \alpha_{ij} J(t; \gamma_{ij}(\xi), 0)$

En el caso en que  $u_{ij}(t)$  coincida con  $u(r_{ij}(t), t)$ , denotaremos (11.5.5) y (11.5.6) por  $u_h$  y  $u_h^\varepsilon$  respectivamente.

Vamos a introducir una forma discretizada del problema (11.5.2) - (11.5.3) cuyas incógnitas son las funciones  $t \rightarrow u_{ij}(t)$ . Usando (11.5.4), la ecuación (11.5.2) puede ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (a_l u) + \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (B^l u) + A^0 u = f, \text{ en } Q_T.$$

Como consecuencia de (11.2.4) es fácil comprobar que si  $u_h$  está dada por (11.5.5), la siguiente igualdad se verifica en el sentido de las distribuciones sobre  $Q_T$ .

$$(11.5.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_h + \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (a_l \bar{u}_h) = \sum_{i,j} \frac{d}{dt} (\alpha_{ij}(t) u_{ij}(t)) \delta_{H_{ij}(t)}$$

Para completar la discretización de nuestro problema debemos encontrar aproximaciones de  $\frac{\partial}{\partial x_l} (B^l \bar{u}_h)$ ,  $A^0 \bar{u}_h$ ,  $f$ . En primer lugar aproximamos  $B^l$  y  $\frac{\partial B^l}{\partial x_l}$  por

$$(11.5.8) \quad B^l = \sum_{i,j} \alpha_{ij}(t) B_{ij}^l(t) \delta_{H_{ij}(t)}$$

$$(11.5.9) \quad \frac{\partial B^l}{\partial x_l} = \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) B_{ij}^l(t) \frac{\partial k_\varepsilon(x-r_{ij}(t))}{\partial x_l} \left| \frac{r_{ij}(t)}{\xi_{ij}} \right| d\xi_{ij},$$

donde  $B_{ij}^l = B^l(r_{ij}(t), t)$ . Así para aproximar  $\frac{\partial}{\partial x_l} (B^l \bar{u}_h)$

lo hacemos mediante la expresión

$$(11.5.10) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} (B^1 \bar{u}_h) = \frac{\partial B^1}{\partial x_1} \bar{u}_h + B^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{u}_h = \frac{\partial B^1}{\partial x_1} \bar{u}_h + B^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{u}_h^e,$$

Por tanto, usando (11.5.8) y (11.5.9) podemos escribir (11.5.10) en la forma

$$(11.5.11) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} (B^1 \bar{u}_h) = \sum_{i,j} \sum_{o,p} \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) \alpha_{op}(t) (B_{ij}^1(t) u_{ij}(t) + B_{op}^1(t) u_{ij}(t)) \cdot \frac{\partial k_\epsilon}{\partial x_1} (r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \delta_{H_{ij}}(t) (x) \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d \xi_{op}$$

En el mismo camino aproximamos  $A^0 \bar{u}_h$  y  $f$  mediante

$$(11.5.12) \quad \begin{cases} A^0 \bar{u}_h = \sum_{ij} \alpha_{ij}(t) A_{ij}^0(t) u_{ij}(t) \delta_{H_{ij}}(t) \\ f = \sum_{ij} \alpha_{ij}(t) f_{ij}(t) \delta_{H_{ij}}(t) \end{cases}$$

donde  $A_{ij}^0(t) = A^0(r_{ij}(t), t)$  y  $f_{ij}(t) = f(r_{ij}(t), t)$

Vamos ahora a analizar algunas posibles elecciones de  $u_{ij}(t)$ . Primeramente, consideramos  $u_{ij}(t)$  como una aproximación de  $u$  en cada punto de  $H_{ij}(t)$ . Entonces usando (11.5.7), (11.5.11), (11.5.12) obtenemos una formulación semidiscretizada del problema (11.5.2)-(11.5.3) dada por el siguiente sistema integral

$$(11.5.13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{I_{ij}} \frac{d}{dt} (\alpha_{ij}(t) u_{ij}(t) \delta(r_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}}(t) \right| d \xi_{ij} + \\ & + \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) \left\{ \sum_{op} \int_{I_{ij}} \alpha_{op}(t) \sum_{l=1}^N (B_{ij}^1(t) u_{op}(t) + B_{op}^1(t) u_{ij}(t)) \cdot \right. \\ & \cdot \frac{\partial k_\epsilon}{\partial x_1} (r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \left| \frac{\partial r_{op}(t)}{\partial \xi_{op}} \right| d \xi_{op} \left. \right\} \delta(r_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}(t)}{\partial \xi_{ij}} \right| d \xi_{ij} \\ & + \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) A_{ij}^0(t) u_{ij}(t) \delta(r_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}(t)}{\partial \xi_{ij}} \right| d \xi_{ij} = \\ & = \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) f_{ij}(t) \delta(r_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}(t)}{\partial \xi_{ij}} \right| d \xi_{ij}, \end{aligned} \right.$$

para toda función  $\varphi \in C_0^\infty(A)$ , donde  $A$  es un abierto contenido en el soporte de  $k_\varepsilon$  y de forma que el único elemento que está en  $A$  es  $H_{ij}(t)$ . Un conocido resultado general de teoría de distribuciones nos permite obtener la siguiente formulación de (11.5.13) que es muy similar a la equivalente para el Método de Partículas.

$$(11.5.14) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\alpha_{ij}(t) u_{ij}(t)) + \\ & + \alpha_{ij}(t) \left\{ \sum_{o,p} \int_{I_{op}} \alpha_{op}(t) \sum_{l=1}^N (B_{ij}^l(t) u_{op}(t) + B_{op}^l(t) u_{ij}(t)) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \frac{\partial k_\varepsilon(r_{ij}(t) - r_{op}(t))}{\partial x_1} \left| \frac{\partial r_{op}(t)}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} \right\} + \\ & + \alpha_{ij}(t) A_{ij}^0(t) u_{ij}(t) = \alpha_{ij}(t) f_{ij}(t), \end{aligned} \right.$$

$$(11.5.15) \quad u_{ij}(0) = u_o(\gamma_{ij}).$$

Otra posible elección de  $u_{ij}(t)$  es considerarla constante a lo largo de  $H_{ij}(t)$ , obteniéndose un sistema similar al (11.5.15). La condición inicial puede ser reemplazada, por ejemplo, por la media a lo largo de  $H_{ij}$  de  $u_o$ . El sistema resultante de esta elección puede ser estudiado de forma similar que (11.5.14)-(11.5.15).

Las funciones  $r_{ij}(t)$  y  $\alpha_{ij}(t)$  quedan caracterizadas como las soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$(11.5.16) \left\{ \begin{aligned} & \frac{dr_{ij}(t)}{dt} = a(r_{ij}(t), t) \\ & r_{ij}(0) = H_{ij} \end{aligned} \right.$$

$$(11.5.17) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\alpha_{ij}(t)}{dt} = \alpha_{ij}(t) (\operatorname{div} a)(r_{ij}(t), t) \\ & \alpha_{ij}(0) = \alpha_{ij} \end{aligned} \right.$$

donde  $H_{ij}$  y  $\alpha_{ij}$  están escogidos en las condiciones del Teorema 11.3.3.

Por otra parte, cada solución débil  $u \in C^0(0, T; L^1(\mathbb{R}^N))$  de (11.5.2) satisface la siguiente propiedad de conservación

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) dx + \int_{\mathbb{R}^N} A^0(x, t) u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, t) dx$$

Por tanto, sería deseable que en la práctica una propiedad similar fuese verificada para cualquier solución aproximada de (11.5.2). Diremos que el esquema numérico (11.5.14)-(11.5.15) satisface la propiedad de conservación si la siguiente condición se verifica

$$(11.5.18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \sum_{i,j} \alpha_{ij}(t) u_{ij}(t) \delta_{H_{ij}(t)}(x) - \sum_{i,j} \alpha_{ij}(t) A_{ij}^0(t) u_{ij}(t) \delta_{H_{ij}(t)}(x) \right) = \\ & = \sum_{i,j} \alpha_{ij}(t) f_{ij}(t) \delta_{H_{ij}(t)}(x) \end{aligned} \right.$$

Notemos que si la función  $k$  es par, es decir

$$(11.5.19) \quad k(x) = k(-x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

entonces el esquema numérico (11.5.14) satisface la propiedad de conservación (11.5.18).

Nota 11.5.1.- Pueden obtenerse otras aproximaciones de (11.5.11) cuyos correspondientes esquemas serán o no conservativos y pueden ser estudiados en el mismo camino que el esquema (11.5.14).  $\square$

Nota 11.5.2.- En el caso en que  $L = 1$  volvemos a la situación de ecuaciones lineales hiperbólicas ya descrita. Por tanto el estudio de las propiedades de convergencia para sistemas puede ser aplicable al caso de las ecuaciones.  $\square$



Nota 11.5.3. - Si escogemos  $k=1$  y por polinomios las constantes que sobre cada  $Q_j$  coinciden con un punto fijo de  $Q_j$ , en particular con el centro, el Método de Elementos se transforma en el Método de Partículas. Así, puede ser visto éste como un caso particular del esquema con Elementos.  $\square$

En orden a probar que el problema (11.5.14) - (11.5.15) tiene una única solución, introducimos el espacio  $\ell^p(1 \times Z_*^N)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , de sucesiones  $v = (v_{ij})_{ij \in 1 \times Z_*^N}$  donde  $1 \times Z_*^N = \{1, \dots, k\} \times Z_*^N$  con valores en  $\mathbb{R}^L$ . Dotamos a  $\ell^p$  con la siguiente norma con dependencia en tiempo

$$(11.5.20) \quad \|v\|_{p,h,t} = \left( \sum_{ij} \alpha_{ij} \int_{I_{ij}} \left| J(t; \gamma_{ij}, v_{ij}) \right|^p \left| \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right)^{1/p}$$

Denotamos por  $\bar{u}_0$  y  $\bar{f}$  las siguientes expresiones

$$\bar{u}_0 = (u_0(\gamma_{ij}))_{ij},$$

$$\bar{f}(t) = (f_{ij}(t))_{ij}.$$

Veamos ahora que nuestro esquema de aproximación conduce a la obtención de una única solución.

Teorema 11.5.1. - Supongamos que la condición (11.2.2) es satisfecha y que la función cut-off  $k$  pertenece al espacio  $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ . Bajo las condiciones

$$(11.5.21) \quad \frac{h}{\epsilon^\alpha} \leq c, \quad \alpha \geq 1$$

$$(11.5.22) \quad \|\bar{u}_0\|_{p,h,0} < +\infty$$

$$(11.5.23) \quad \int_0^T \|\bar{f}(t)\|_{p,h,t} dt < +\infty$$

el problema (11.5.14) - (11.5.15) tiene una única solución  $t \rightarrow u(t)$  que es continua de  $[0, T]$  en  $\ell^p$ .

Dem. -

La ecuación (11.5.14) puede ser equivalentemente escrita en la forma

$$\frac{d}{dt} u_{ij}(t) + \sum_{o,p} \int_{\Omega_{op}} \alpha_{op}(t) \sum_{l=1}^N (B_{ij}^l(t) u_{op}(t) + B_{op}^l(t) u_{ij}(t)) \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \left| \frac{\partial r_{op}(t)}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} +$$

$$+ u_{ij}(t) A^{o(t)}(\text{div} a)(r_{ij}(t), t) - r_{ij}(t)$$

Para todo  $t \in [0, T]$  introducimos el operador lineal  $\phi(t) : v \in \mathcal{L}^P \longrightarrow \phi(t) \cdot v \in \mathcal{L}^P$ , definido por

$$(\phi(t)v)_{ij} = \sum_{o,p} \int_{\Omega_{op}} \alpha_{op}(t) \sum_{l=1}^N (B_{ij}^l(t) v_{op} + B_{op}^l(t) v_{ij}) \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \left| \frac{\partial r_{op}(t)}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} +$$

$$+ v_{ij} A^{o(t)} + v_{ij}(\text{div} a)(r_{ij}(t), t).$$

Proveamos que  $\phi(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^P, \mathcal{L}^P)$ . Usando (11.5.1) (i) y (11.2.2), obtenemos la siguiente acotación

$$|(\phi(t)v)_{ij}| \leq c_1 \sum_{l=1}^N \left( \sum_{o,p} \int_{\Omega_{op}} \left| \alpha_{op}(t) v_{op} \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij} - r_{op}) \right| \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} + \right.$$

$$\left. + |v_{ij}| \sum_{o,p} \int_{\Omega_{op}} \left| \alpha_{op}(t) \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij} - r_{op}) \right| \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} \right) + c_2 |v_{ij}|$$

Por tanto, usando la desigualdad de Hölder, aplicando la  $p, h, t$ -norma y gracias a que  $\left| \frac{\partial r}{\partial \xi} \right| \leq |J(t; \gamma(\xi), 0)| \left| \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right|$  obtenemos

$$(11.5.24) \|\phi(t)v\|_{p,h,t} \leq c_3 \sum_{l=1}^N \left( \sum_{o,p} \frac{1}{\alpha_{ij}^{p-1}} \left( \int_{\Omega_{ij}} |\alpha_{ij}(t)| \|v\|_{p,h,t} \left| \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij} - r_{op}) \right|_{p,h,t} \left| \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right)^{1/p} \right.$$

$$\left. + \left( \sum_{o,p} \frac{1}{\alpha_{ij}^{p-1}} \left( \int_{\Omega_{ij}} |\alpha_{ij}(t) v_{ij}| \left| \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij} - r_{op}) \right|_{p,h,t} \left| \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right)^{1/p} \right) \right.$$

$$\left. + c_2 \|v\|_{p,h,t} \right.$$

donde  $\bar{op}$  denota que la correspondiente norma se ha efectuado en las variables  $op$  y se ha aplicado la acotación  $|J(t; \gamma(\xi), 0)| \leq C |\nabla a|$

$k$  tiene soporte compacto. Supongamos que el soporte de  $k$  ( $\text{supp}(k)$ ) está contenido en la esfera de centro 0 y radio 1 ( $S(0;1)$ ). Por tanto  $\text{supp}(k_\epsilon) \subset S(0; \epsilon)$ . Consideramos el conjunto de índices  $j$  tales que

$$Q_j(t) \cap \text{Supp}(x \rightarrow k(x-r_{op}(t))) \subset S(r_{op}(t), \epsilon)$$

donde

$$S(r_{op}(t), \epsilon) = \bigcup_{y \in r_{op}(t)} S(y, \epsilon)$$

y  $Q_j(t)$  es el trasladado de  $Q_j$  por (11.2.4)-(11.2.5). Como  $\text{diam}(Q_j(t)) \leq c_5 h$ , se sigue que estos índices  $j$  pertenecen al conjunto:

$$J = \{j \in \mathbb{Z}_*^N : Q_j(t) \subset S(r_{op}(t), \epsilon + h c_4)\}.$$

Usando el Lemma 11.2.1 y que la medida de  $Q_j(t) \geq c_5 h^N$  concluimos

$$(11.5.25) \quad \text{Card } J \leq c_6 \left(1 + \frac{\epsilon}{h}\right)^N.$$

Además, las siguientes desigualdades se verifican

$$(11.5.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j} \alpha_{ij} \left( \int_{I_{ij}} \left\| \frac{\partial k_\epsilon}{\partial x_1}(r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \right\|_{s,h,t} \left| \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right)^p \right)^{1/p} \leq \\ \leq c_7 \max_{ij} (\alpha_{ij}) \int_{I_{ij}} \left| \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right)^{1/p}. \end{array} \right.$$

$$\cdot (\text{Card } J)^{1/p} \left\| \frac{\partial k_\epsilon}{\partial x_1}(r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \right\|_{s,h,t}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{\partial k_\epsilon}{\partial x_1}(r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \right\|_{s,h,t} \leq \frac{c_7}{\epsilon^{1+\frac{N}{s}}} \left\| \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \right\|_{s,h,t} \\ \max_{ij} \alpha_{ij} \int_{I_{ij}} \left| \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \leq c_8 h^N \end{array} \right.$$

donde  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^*} = 1$ .

Sustituyendo en (11.5.24) y usando (11.5.21) obtenemos

$$\|\phi(t)v\|_{p,h,t} \leq c_9 \left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) \|v\|_{p,h,t}$$

El problema (11.5.14) - (11.5.15) es equivalente al problema

$$(11.5.27) \begin{cases} \frac{d\bar{u}(t)}{dt} + \phi(t)\bar{u}(t) = \bar{f}(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Gracias a las hipótesis (11.5.22) - (11.5.23) es claro - que  $(-\phi(t)\bar{u}(t) + \bar{f}(t)) \in \ell^p$ . Para cada  $\bar{w}(t)$  y  $\bar{v}(t) \in \ell^p$ ,  $t \in [0, T]$  obtenemos

$$\begin{aligned} \|\phi(t)\bar{w}(t) - \phi(t)\bar{v}(t)\|_{p,h,t} &= \|\phi(t)(\bar{w}(t) - \bar{v}(t))\|_{p,h,t} \leq \\ &\leq L \|\bar{w}(t) - \bar{v}(t)\|_{p,h,t} \end{aligned}$$

donde  $L = c\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right)$ .

Por tanto, utilizando el Teorema de Cauchy-Picard-Lipschitz, el problema diferencial lineal (11.5.27) tiene una única solución  $t \rightarrow \bar{u}(t)$  y, además,  $\bar{u}(t) \in C^1(0, T; \ell^p(I \times Z_*^N))$ .  $\square$

Nos interesa construir la función  $\bar{u}_h^\epsilon$  definida por (11.5.5) y que pertenezca a  $C(0, T; \mathbb{L}(\mathbb{R}^N))$ .

Proposición 11.5.2.- La aplicación

$$v = (v_{ij})_{ij \in I \times Z_*^N} \longrightarrow \bar{v}_h^\epsilon(x, t) =$$

$$= \sum_{ij} \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) v_{ij} k_\epsilon(x - r_{ij}) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij}$$

es continua de  $\ell^p(I \times Z_*^N)$  en  $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N)$  y existe una constan

te  $c = c(T) > 0$  tal que

$$(11.5.28) \quad \|\bar{v}_h^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c \|v\|_{p, h, t} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dem.

Aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{ij} \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) v_{ij} k_\varepsilon(x - r_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}(t)}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right| \leq \\ & \leq \sum_{ij} \int_{I_{ij}} |\alpha_{ij}(t) v_{ij}(t) k_\varepsilon(x - r_{ij}(t))| \left| \frac{\partial r_{ij}(t)}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \leq \\ & \leq \|v\|_{p, h, t} \|k_\varepsilon(x - r_{ij}(t))\|_{p, h, t} \end{aligned}$$

donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ .

Usando (11.5.25) y (11.5.26) obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{ij} \frac{1}{\alpha_{ij}^{p^*-1}} \left( \int_{I_{ij}} |\alpha_{ij} k_\varepsilon(x - r_{ij}(t))| \left| \frac{\partial r_{ij}(t)}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right)^{p^* 1/p^*} \leq \\ & \leq \sup_{ij} (\alpha_{ij} \int_{I_{ij}} \left| \frac{\partial r_{ij}(t)}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij})^{1/p^*} \|k_\varepsilon(x - r_{ij}(t))\|_{p, h, t} (1 + \frac{\varepsilon}{h})^{N/p^*} \leq \\ & \leq c_3 (1 + \frac{\varepsilon}{h})^{N/p^*} h^{N/p^*} \sup_{ij} |k_\varepsilon(x - r_{ij}(t))| \end{aligned}$$

Por tanto obtenemos

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_h^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} & \leq c_3 (h + \varepsilon)^{N/p^*} \|v\|_{p, h, t} \sup_{ij} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |k_\varepsilon(x - r_{ij}(t))|^p dx \right)^{1/p} \\ & \leq c_3 (h + \varepsilon)^{N/p^*} \frac{1}{\varepsilon^{N/p^*}} \sup_{ij} (\|k(x - r_{ij})\|_{L^p}) \|v\|_{p, h, t} \end{aligned}$$

Además, como  $\|k(\cdot, r_{ij})\|_{L^p} \leq c_4$ , hallamos el resultado deseado (11.5.28).  $\square$

### 11.6. Convergencia del Método de Elementos II.-

El siguiente Teorema de Comparación entre  $\bar{u}_h^\epsilon$  y  $u$  muestra que, en el límite, la solución del Problema (11.5.14)-(11.5.15) coincide con la solución del problema (11.5.2)-(11.5.3). Los argumentos usados en la demostración siguen la misma línea desarrollada en Secciones precedentes, usando al mismo tiempo ideas técnicas desarrolladas en [47]. Un Teorema de Convergencia similar al aquí expuesto, que está desarrollado para el estudio del Método de Partículas, puede ser visto en [46].

Teorema 11.6.1.- Supongamos que la función cut-off  $k$  satisface las siguientes hipótesis:

(i)  $k \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$  pertenece además al espacio  $W^{m+1,1}(\mathbb{R}^N)$  para algún entero  $m > N$ ,

(ii) Existe un entero  $r \geq 1$  tal que

$$(11.6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}^N} k \, dx = 1 \\ \int_{\mathbb{R}^N} x^\alpha k \, dx = 0, \alpha \in \mathbb{N}^N, \text{ con } 1 \leq |\alpha| \leq r-1 \end{array} \right.$$

(iii) La condición (11.5.19) se verifica.

Supongamos, además, que los parámetros  $h$  y  $\epsilon$  satisfacen la relación

$$(11.6.2) \quad \frac{h}{\epsilon^\alpha} \leq C, \alpha \geq 1.$$

Supongamos, finalmente, que la solución exacta  $u$  pertenece al espacio  $C^0(0, T; W^{\mu, \infty}(\mathbb{R}^N) L)$  donde  $\mu = \max(r+1, m)$  y satisface para algún  $\gamma > \frac{N}{2}$  y para todo  $\beta \in \mathbb{N}^N$  con  $|\beta| \leq \mu$  la condición

$$(11.6.3) \quad |\partial^\beta u(x, t)| \leq C(1 + |x|)^{-\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0, T].$$

Entonces existe una constante  $C = C(\mu, T) > 0$  tal que

$$\|u(\cdot, t) - \bar{u}_h^\epsilon(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C(\epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}}), \quad 0 \leq t \leq T.$$

En lo sucesivo supongamos que se verifica la condición

$$(11.2.6) \quad a_1 \in L^\infty(0, T; W^{m+1, \infty}(\mathbb{R}^N)); \quad 0 \leq 1 \leq N.$$

Para demostrar el Teorema 11.6.1 vamos a comenzar dando algunos resultados relacionados con la consistencia y estabilidad del método. Empezamos por exponer el siguiente resultado de consistencia.

Lema 11.6.1.-[47]. Supongamos que la función cut-off satisface la condición (11.6.1) para algún entero  $r \geq 1$ . Entonces, existe una constante  $C > 0$  tal que para toda función  $\beta \in W^{r, p}(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , se verifica

$$(11.6.4) \quad \|\beta - \beta * k_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \varepsilon^r \|\beta\|_{r, p, \mathbb{R}^N}. \quad \square$$

Como una consecuencia del Corolario (11.3.2) obtenemos

Lema 11.6.2.- En las condiciones del Teorema (11.3.4) supongamos además que la función cut-off  $k$  pertenece al espacio  $W^{m+s, 1}(\mathbb{R}^N)$  para algún entero  $s \geq 0$ . - Entonces, existe una constante  $C = C(T) > 0$  tal que para toda función  $v \in W^{m, p}(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , tenemos

$$\|v * k_\varepsilon - v_h^\varepsilon\|_{s, p, \mathbb{R}^N} \leq C \frac{h^m}{\varepsilon^{m+s}} \|v\|_{m, p, \mathbb{R}^N}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dem.-

Notemos que si  $f \in W^{-m, p}(\mathbb{R}^N)$  y  $g \in W^{m, 1}(\mathbb{R}^N)$ , obtenemos que  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  y se verifica

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|f\|_{-m, p, \mathbb{R}^N} \|g\|_{m, 1, \mathbb{R}^N}.$$

Así, como  $k \in W^{m+s, 1}(\mathbb{R}^N)$ , con  $m > N$  y  $s \geq 0$ , gracias al Corolario 11.3.2 obtenemos para  $|\alpha| \leq s$

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha (v * k_\varepsilon - v_h^\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|(v - v_h^\varepsilon) * \partial^\alpha k_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\
&\leq C_2 \|v - v_h^\varepsilon\|_{-m, p, \mathbb{R}^N} \|\partial^\alpha k_\varepsilon\|_{m, 1, \mathbb{R}^N} \\
&\leq C_3 h^m \|v\|_{m, p, \mathbb{R}^N} \|\partial^\alpha k_\varepsilon\|_{m, 1, \mathbb{R}^N} \\
&\leq C_4 \frac{h^m}{\varepsilon^{m+s}} \|v\|_{m, p, \mathbb{R}^N}. \quad \square
\end{aligned}$$

Establezcamos ahora el siguiente resultado general de aproximación que en el caso en que  $u_{ij}(t) = u(r_{ij}(t), t)$ , (la ecuación lineal hiperbólica antes expuesta, por ejemplo), es un Teorema de Convergencia y una estimación de error.

Teorema 11.6.2.- Sea  $m > N$  un entero. Supongamos que la hipótesis (11.2.6) se verifica. Supongamos, además, que la función cut-off  $k \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$  satisface la condición (11.6.1) para algún entero  $r \geq 1$  y pertenece al espacio  $W^{m+s, 1}(\mathbb{R}^N)$  para algún otro entero  $s \geq 0$ . Entonces existe una constante  $C = C(T) > 0$  tal que para toda función  $v \in W^{\mu, p}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\mu = \max(r + s, m)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , y  $t \in [0, T]$ , se cumple

$$(11.6.5) \quad \|v - v_h^\varepsilon\|_{s, p, \mathbb{R}^N} \leq C(\varepsilon^r \|v\|_{r+s, p, \mathbb{R}^N} + \frac{h^m}{\varepsilon^{m+s}} \|v\|_{m, p, \mathbb{R}^N}).$$

Dem.-

Para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  con  $|\alpha| = s$ , podemos escribir  $\partial^\alpha (v - v_h^\varepsilon) = \partial^\alpha v - \partial^\alpha (v * k_\varepsilon) + \partial^\alpha (v * k_\varepsilon - v_h^\varepsilon)$ .

Aplicando el Lema 11.6.1 es claro que

$$\|\partial^\alpha v - \partial^\alpha (v * k_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \varepsilon^r \|v\|_{r+s, p, \mathbb{R}^N}$$

y del Lema 11.6.2. obtenemos



$$\| \partial^\alpha (v * k_\epsilon - v_h^\epsilon) \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \frac{h^m}{\epsilon^{m+s}} \|v\|_{m,p,\mathbb{R}^N}$$

Por tanto la conclusión del Teorema se deduce fácilmente.  $\square$

Corolario 11.6.1. - Supongamos que se verifican - las hipótesis del Teorema 11.6.2. Sea  $v$  una función de  $W^{\mu,\infty}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\mu = \max(r+s, m)$ , que satisface para - algún  $\gamma > 0$  y para todo  $\beta \in \mathbb{N}^N, |\beta| \leq \mu$ ,

$$(11.6.6) \quad |\partial^\beta v(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Entonces existe una constante  $C = C(T) > 0$  tal que - para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = 1$ , tenemos

$$(11.6.7) \quad |\partial^\alpha (v - v_h^\epsilon)(x)| \leq C(\epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+s}})(1 + |x|)^{-\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Dem.-

Denotamos por  $O_\epsilon(x)$  el entorno de  $x$  definido por  $x + \text{supp } k_\epsilon$ . Notemos que  $(v - v_h^\epsilon)(x)$  depende sólo de la restricción de la función  $v$  a  $O_\epsilon(x)$ . Por tanto, bajo las hipótesis del Teorema 11.6.2, para todo  $v \in W^{\mu,\infty}(O_\epsilon(x))$ , tenemos

$$|\partial^\alpha (v - v_h^\epsilon)(x)| \leq C_1(\epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+s}}) \|v\|_{\mu,\infty,O_\epsilon(x)}$$

Si  $v \in W^{\mu,\infty}(\mathbb{R}^N)$  satisface (11.3.10) obtenemos

$$\|v\|_{\mu,\infty,O_\epsilon(x)} \leq C_2(1 + |x|)^{-\gamma}$$

y el resultado (11.6.7) queda deducido.  $\square$

Denotamos por  $e_{ij}(t)$  y  $e(t)$  las expresiones

$$(11.6.8) \quad e_{ij}(t) = u(r_{ij}(t), t) - u_{ij}(t), \quad e(t) = (e_{ij}(t))_{ij \in 1 \times \mathbb{Z}_*^N}$$

Así, obtenemos la relación

$$(11.6.9) \quad (u_h^\epsilon(t) - \bar{u}_h^\epsilon(t))(x) = \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) e_{ij}(t) k_\epsilon(x - r_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij}.$$

Destaquemos que la siguiente igualdad se verifica para todo  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(r(t; y, 0), t) J(t; y, 0)) &= \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) (r(t; y, 0), t) J(t; y, 0) + u(r(t; y, 0), t) \frac{\partial J}{\partial t}(t; y, 0) = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (a_l u) \right) (r(t; y, 0), t) J(t; y, 0). \end{aligned}$$

Por tanto, la solución  $u$  del problema (11.5.2)-(11.5.3) satisface

$$(11.6.10) \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}(a_{ij}(t) u(r_{ij}(t), t)) + \\ &+ a_{ij}(t) \left| \sum_{op} \int_{op} a_{op}(t) \sum_{l=1}^N (B_{ij}^l(t) u(r_{op}(t), t) + B_{op}^l(t) u(r_{ij}(t), t)) \frac{\partial k}{\partial x_l}(r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \right| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}}(t) | d\xi_{op} | \\ &+ a_{ij}(t) A_{ij}^0(t) u(r_{ij}(t), t) - a_{ij}(t) (f_{ij}(t) + \varphi_{ij}(t)), \end{aligned} \right.$$

donde  $\varphi(t) = (\varphi_{ij}(t))_{j \in I} \times \mathbb{Z}_*^N$  está definida mediante

$$(11.6.11) \left\{ \begin{aligned} \varphi_{ij}(t) &= - \sum_{l=1}^N \{ B_{ij}^l(t) \frac{\partial}{\partial x_l} (u(\cdot, t) - u_h^\varepsilon(\cdot, t))(r_{ij}(t)) + \\ &\frac{\partial}{\partial x_l} (B^l(\cdot, t) - (B_h^l)^\varepsilon(\cdot, t))(r_{ij}(t)) u(r_{ij}(t), t) \} \end{aligned} \right.$$

Si restamos (11.5.14) de (11.6.10) obtenemos

$$(11.6.12) \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}(a_{ij}(t) e_{ij}(t)) + \\ &+ a_{ij}(t) \left\{ \sum_{op} \int_{op} a_{op}(t) \sum_{l=1}^N (B_{ij}^l(t) e_{op}(t) + B_{op}^l(t) e_{ij}(t)) \frac{\partial k}{\partial x_l}(r_{ij} - r_{op}) \right| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} | d\xi_{op} \} \\ &+ a_{ij}(t) A_{ij}^0(t) e_{ij}(t) - a_{ij}(t) \varphi_{ij}(t), \end{aligned} \right.$$

y utilizando (11.5.15) obtenemos también la siguiente condición inicial

$$(11.6.13) \quad e_{ij}(0) = 0.$$

Para probar el Teorema 11.6.1 es necesario estimar  $\|e(t)\|_{2,h,t}$ . Vamos a exponer un Lema que nos será útil para establecer una desigualdad de estabilidad para  $e(t)$  que quedará manifiesta en el Teorema 11.6.3.

Lema 11.6.3.- Supongamos que la función cut-off  $k \in C^1_0(\mathbb{R}^N)$ , satisface la condición (11.5.19). Entonces existe una constante  $C = C(T) > 0$  tal que para todo  $v \in L^2(1 \times \mathbb{Z}^N_*)$  tenemos

$$(11.6.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{i,j} \sum_{o,p} \int_{I_{ij}} \int_{I_{op}} a_{ij}(t) a_{op}(t) (B^1_{ij}(t) v_{op}, v_{ij}) \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij}-r_{op}) \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{op} d\xi_{ij} \right| < \\ < C \|v\|_{2,h,t}^2, \quad 0 \leq t \leq T. \end{array} \right.$$

donde para cada  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$ ,  $(a_{ij}, b_{ij})$  está definido por

$$(a_{ij}, b_{ij}) = \int_{I_{ij}} |J(t; \gamma_{ij}, 0)| a_{ij} b_{ij} \left| \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij}.$$

Dem.-

Como resultado de la propiedad de simetría de la matriz  $B^1$  y gracias a (11.5.19) se sigue

$$\sum_{i,j} \sum_{o,p} \int_{I_{ij}} \int_{I_{op}} a_{ij}(t) a_{op}(t) (B^1_{ij}(t) + B^1_{op}(t)) v_{op}, v_{ij}) \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij}-r_{op}) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} d\xi_{ij} = 0$$

Por tanto, deducimos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \sum_{o,p} \int_{I_{ij}} a_{ij}(t) \int_{I_{op}} a_{op}(t) (B^1_{ij} v_{op}, v_{ij}) \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij}-r_{op}) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{ij} d\xi_{op} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_{o,p} \int_{I_{ij}} a_{ij}(t) \int_{I_{op}} a_{op}(t) ((B^1_{ij}(t) - B^1_{op}(t)) v_{op}, v_{ij}) \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij}-r_{op}) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} d\xi_{ij} \end{aligned}$$

Así, podemos escribir

$$\left| \sum_{i,j} \sum_{op} \int_{I_{ij}} \int_{I_{op}} a_{ij}^{ij}(t) a_{op}^{op}(t) (B_{ij}^1(t) v_{op}, v_{ij}) \frac{k_\epsilon(r_{ij} - r_{op})}{x_1} \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} d\xi_{ij} \right| < \sum_{ij} \sum_{op} a_{op}^{ij} m_{ij} m_{op},$$

donde

$$a_{op}^{ij} = \sqrt{\alpha_{ij} \alpha_{op}} |B_{ij}^1(t) - B_{op}^1(t)| \left| \frac{\partial k_\epsilon}{\partial x_1}(r_{ij} - r_{op}) \right|,$$

$$m_{ij} = \sqrt{\alpha_{ij}} \int_{I_{ij}} |v_{ij} J(t; \gamma_{ij}, 0)| \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij}$$

$$m_{op} = \sqrt{\alpha_{op}} \int_{I_{op}} |v_{op} J(t; \gamma_{op}, 0)| \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op}$$

y  $|B_{ij}^1(t) - B_{op}^1(t)|$  es la norma espectral de la matriz  $B_{ij}^1(t) - B_{op}^1(t)$ .

Fijado  $ij$ , conocemos que el número de índices  $op$  tales que  $r_{ij}(t) - r_{op}(t)$  pertenece al  $\text{supp}(k_\epsilon)$  están acotados por  $C_1 \left(\frac{\epsilon}{h}\right)^N$ . Además,  $B^1$  es una función matricial lipschitziana con derivadas acotadas sobre  $Q_T$ .

Por tanto, para  $r_{ij} - r_{op} \in \text{supp}(k_\epsilon)$  se verifica

$$|(B_{ij}^1(t) - B_{op}^1(t))| \leq \max_{ij, op} |r_{ij}(t) - r_{op}(t)| \leq C_3 \epsilon.$$

Además, las siguientes acotaciones son conocidas

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha_{ij}} \cdot \sqrt{\alpha_{op}} \leq C h^N - \frac{s_{ij}}{2} - \frac{s_{op}}{2} \\ \left| \frac{\partial k_\epsilon}{\partial x_1} \right| \leq C_5 \frac{1}{\epsilon^{N+1}}, \end{cases}$$

donde  $s_{ij}$  es el grado del elemento  $H_{ij}$ .

Estas relaciones llevan a

$$|a_{op}^{ij}| \leq C_7 \left(\frac{h}{\epsilon}\right)^N h^{-\frac{s_{ij} + s_{op}}{2}}$$

Por tanto, obtenemos que

$$\sum_{o,p} |a_{op}^{ij}| \leq \sum_{op} c_1 \left(\frac{\epsilon}{h}\right)^N c_7 \left(\frac{h}{\epsilon}\right)^N h^{-\frac{s_{ij}+s_{op}}{2}} \leq c_1 c_7 \sum_{op} h^{-\frac{s_{ij}+s_{op}}{2}}$$

Es un clásico resultado que si los números reales  $|a_{op}^{ij}|$  satisfacen la condición

$$\sup_{ij} \sum_{o,p} |a_{op}^{ij}| \leq c,$$

para alguna constante  $c > 0$ , entonces

$$(A m)_{ij} = \sum_{o,p} a_{op}^{ij} m_{ij}$$

define un operador lineal  $A \in \mathcal{L}(\ell^2(1 \times \mathbb{Z}_*^N))$  y, además,  $\|A\| \leq c$ . Aplicando este resultado hallamos que

$$\left| \sum_{i,j} \sum_{o,p} a_{op}^{ij} m_{ij} m_{op} \right| \leq c_1 c_7 \sum_{ij} \sum_{op} h^{-\frac{s_{ij}+s_{op}}{2}} m_{ij}^2 \leq c_8 \|v\|_{2,h,t}^2$$

lo que prueba (11.6.14).

Teorema 11.6.3.- Bajo idénticas condiciones que las del Teorema 11.6.1 la solución  $t \rightarrow e(t)$  del problema (11.6.12)-(11.6.13), satisface

$$(11.6.15) \quad \|e(t)\|_{2,h,t} \leq c \int_0^t \|v(s)\|_{2,h,s} ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

para alguna constante  $c > 0$ .

Dem.-

Como anteriormente por  $(v_{ij}, b_{ij})$  denotamos el producto escalar

$$(v_{ij}, b_{ij}) = \int_{I_{ij}} |J(t; \gamma_{ij}, 0)| v_{ij} b_{ij} \left| \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij}$$

Observemos que

$$\sum_{ij} \int_{I_{ij}} \left( \frac{d}{dt} (\alpha_{ij}(t) e_{ij}(t), e_{ij}(t)) \right) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \geq \frac{c}{2} \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{2,h,t}^2$$

Así, usando (11.6.12) la siguiente desigualdad se verifica

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{2,h,t}^2 \leq & \left| \sum_{i,j} \sum_{op} \int_{i,j} \int_{op} a_{ij}(t) a_{op}(t) \left( \sum_{l=1}^N (B_{ij}^l(t) e_{op}(t) + B_{op}^l(t) e_{ij}(t), e_{ij}(t)) \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij}-r_{op}) \right) \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{op} d\xi_{ij} \right| + \\ & \left| \sum_{i,j} \int_{i,j} a_{ij}(t) (A_{ij}^0(t) e_{ij}(t), e_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right| + \sum_{i,j} \int_{i,j} a_{ij}(t) (\varphi_{ij}(t), e_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \end{aligned}$$

Para deducir (11.6.15) vamos a estimar cada término de esta desigualdad.

Aplicando el Lema 11.6.3 obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j} \sum_{op} \int_{i,j} \int_{op} a_{ij}(t) a_{op}(t) \left( \sum_{l=1}^N (B_{ij}^l(t) e_{op}(t), e_{ij}(t)) \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij}-r_{op}) \right) \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{op} d\xi_{ij} \right| < \\ < c_1 \|e(t)\|_{2,h,t}^2 \end{aligned}$$

Establezcamos ahora una estimación del tercer término - de la izquierda de nuestra desigualdad. Usando (11.5.1) (i) obtenemos

$$\left| \sum_{i,j} \int_{i,j} a_{ij}(t) (A_{ij}^0(t) e_{ij}(t), e_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right| \leq c_2 \|e(t)\|_{2,h,t}$$

Para estimar la parte derecha de la desigualdad aplicamos - la desigualdad de Cauchy-Schwartz deduciendo

$$\left| \sum_{i,j} \int_{i,j} a_{ij}(t) (\varphi_{ij}(t), e_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right| \leq c_3 \|\varphi(t)\|_{2,h,t} \|e(t)\|_{2,h,t}$$

Resta por estimar

$$(11.6.16) \left| \sum_{i,j} \sum_{op} \int_{i,j} \int_{op} a_{ij}(t) a_{op}(t) \left( \sum_{l=1}^N (B_{op}^l(t) e_{ij}(t), e_{ij}(t)) \frac{\partial k}{\partial x_1}(r_{ij}-r_{op}) \right) \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{op} d\xi_{ij} \right|$$

Podemos escribir (11.6.16) en la forma

$$\sum_{i,j} \int_{I_{ij}} a_{ij}(t) \sum_{l=1}^N \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_l} (B^l(\cdot, t))_h^\varepsilon(r_{ij}(t)) \cdot e_{ij}(t) \right| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right) d\xi_{ij}.$$

Usando el Teorema 11.6.2. con  $r = 0$ ,  $s = 1$ ,  $p = \infty$ , obtenemos

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_l} (B^l(\cdot, t))_h^\varepsilon \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c_4 \left( 1 + \frac{h^m}{\varepsilon^{m+1}} \right).$$

Por tanto, (11.6.16) está acotado por

$$c_5 \left( 1 + \frac{h^m}{\varepsilon^{m+1}} \right) \|e(t)\|_{2,h,t}^2$$

Combinando las anteriores estimaciones y usando (11.6.2), concluimos

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\|_{2,h,t}^2 \leq c_6 (\|e(t)\|_{2,h,t}^2 + \|\varphi(t)\|_{2,h,t} \|e(t)\|_{2,h,t}).$$

Por tanto, aplicando la teoría de Ecuaciones Diferenciales obtenemos el deseado resultado (11.6.15).

#### Demostración del Teorema 11.6.1.-

En primer lugar, descomponemos  $u - \bar{u}_h^\varepsilon$  en los siguientes dos términos

$$u(x,t) - \bar{u}_h^\varepsilon(x,t) = u(x,t) - u_h^\varepsilon(x,t) + u_h^\varepsilon(x,t) - \bar{u}_h^\varepsilon(x,t),$$

Aplicando la Proposición 11.6.2 resulta

$$(11.6.17) \quad \|u(\cdot, t) - \bar{u}_h^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|u(\cdot, t) - u_h^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + c_1 \|e(t)\|_{2,h,t}$$

Vamos a estimar  $\|\varphi(s)\|_{2,h,t}$  para  $t \in [0, T]$ . Bajo la hipótesis

$$|\partial^\beta u(x,t)| \leq c(1 + |x|)^{-\gamma}, \quad \gamma > N/2,$$

aplicando el Corolario 11.6.1. obtenemos

$$(11.6.18) \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (u(\cdot, t) - u_h^E(\cdot, t))(r_{ij}) \right| \leq c_2 \left( \epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}} \right) (1 + |r_{ij}(t)|)^{-\gamma}$$

Usando la diferenciabilidad de las funciones  $B^1$  hallamos similarmente

$$(11.6.19) \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (B^1(\cdot, t) - (B^1(\cdot, t))^E_h)(r_{ij}(t)) u(r_{ij}(t), t) \right| \\ \leq c_3 \left( \epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}} \right) (1 + |r_{ij}(t)|)^{-\gamma} \end{array} \right.$$

Si sustituimos en (11.6.11) las recientes estimaciones (11.6.18) y (11.6.19) obtenemos

$$|\varphi_{ij}(t)| \leq c_4 \left( \epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}} \right) (1 + |r_{ij}(t)|)^{-\gamma},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} & \|\varphi(t)\|_{2, h, t} \leq \\ & \leq c_5 \left( \epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}} \right) \left( \sum_{i,j} \alpha_{ij} \left( \int_{I_{ij}} |J(t; \gamma_{ij}, 0)| (1 + |r_{ij}(t)|)^{-\gamma} \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Ahora, gracias a (11.2.4) tenemos

$$|r_{ij}(t)| \geq |\gamma_{ij}| - c_6 t.$$

Por tanto para  $|\gamma_{ij}| > R$  suficientemente grande conseguimos

$$(1 + |r_{ij}|)^{-2\gamma} \leq c_7(R) (1 + |\gamma_{ij}|)^{-2\gamma}, \quad t \in [0, T].$$

Argumentos similares a los hasta ahora dados muestran que

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i,j} \alpha_{ij} \left( \int_{I_{ij}} |J(t; \gamma_{ij}, 0)| (1 + |r_{ij}(t)|)^{-\gamma} \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq c_8 \left( \sum_{|\gamma_{ij}| > R} (1 + |\gamma_{ij}|)^{-2\gamma} \right)^{1/2} \leq c_9 \end{aligned}$$



De esta forma, obtenemos finalmente

$$(11.6.20) \quad ||\varphi(t)||_{2,h,t} \leq C_{10} \left( \varepsilon^r + \frac{h^m}{\varepsilon^{m+1}} \right)$$

De (11.6.3) se sigue que  $u \in C^0(0, T; W^{\mu, 2}(\mathbb{R}^N)^L)$

Combinando la desigualdad de estabilidad (11.6.2), el Teorema 11.6.2 y (11.6.20), obtenemos la deseada conclusión del Teorema 11.6.1.  $\square$

## CAPITULO III:

APROXIMACION DE SISTEMAS PARABOLICOS

POR EL METODO DE ELEMENTOS

## APROXIMACION DE SISTEMAS PARABOLICOS

### POR EL METODO DE ELEMENTOS

En este capítulo generalizamos el método numérico de aproximación que hemos desarrollado en el Capítulo II y lo extendemos a sistemas parabólicos. Aprovechando los resultados obtenidos en el capítulo anterior, llegamos a probar un teorema de convergencia y estimación de error obteniendo resultados similares a los expuestos en el Capítulo II.

#### III.1. Planteamiento del Problema

La importancia en los problemas de la Física de ciertos sistemas parabólicos hacen de gran interés el estudio de la construcción de sus soluciones. En este sentido, en este capítulo analizaremos la aproximación numérica mediante el Método de Elementos de algunos sistemas parabólicos. En particular nos restringiremos al importante caso de los problemas de Convección-Difusión. Resultados similares a los que aquí expondremos pueden verse en el caso del Método de Partículas en [46]. Un estudio de problemas de Convección-Difusión en Mecánica de Fluidos usando el "splitting" (ruptura) del operador junto con el Método de Vortex con Filamentos puede encontrarse en [54] para el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensionales.

Pasemos a la descripción del problema:

Sean  $A^l$ ,  $0 \leq l \leq N$ , las  $N+1$  aplicaciones

$$A^l : (x, t) \in Q_T \longrightarrow A^l(x, t) \in S(\mathbb{R}^L),$$

que verifican las propiedades (II.5.1). Consideramos, además, que están dadas  $N^2$  aplicaciones continuas  $A^{lm}$ ,

$$A^{lm}: (x, t) \in Q_T \longrightarrow A^{lm}(x, t) \in S(\mathbb{R}^L), \quad 1 \leq l, m \leq N,$$

con las siguientes propiedades

$$(III.1.1) \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad A^{lm} \in L^\infty(Q_T; S(\mathbb{R}^L)), \quad 1 \leq l, m \leq N, \\ (ii) \quad \text{Existe una constante } \beta > 0 \text{ tal que} \\ \sum_{l,m=1}^N (A^{lm}(x, t) \eta^{m, n^l}) \geq \beta \sum_{l=1}^N |\eta^l|^2, \quad \forall \eta^l \in \mathbb{R}^L, \\ 1 \leq l \leq N, (x, t) \in Q. \end{array} \right.$$

Así, podemos plantear el sistema parabólico

$$(III.1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (A^{l1} u) + A^0 u - \sum_{l,m=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (A^{lm} \frac{\partial u}{\partial x_m}) = f, \text{ en } Q_T$$

con la complementaria condición inicial

$$(III.1.3) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Es conocido que si  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$  y  $f \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^N))$ , entonces el Problema (III.1.2)-(III.1.3) tiene una única solución  $u \in C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(0, T; W^{1,2}(\mathbb{R}^N)^L)$ .

Vamos a escribir el sistema (III.1.2) en la forma de un sistema de primer orden. Para ello hacemos

$$P^1 = \sum_{m=1}^N A^{1m} \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

Usando además el sistema de coordenadas móviles introducido en (II.5.4), el sistema (III.1.2) toma la forma

$$(III.1.4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (a^l u + B^l u + P^1) + A^0 u = f \\ P^1 + \sum_{m=1}^N A^{1m} \frac{\partial u}{\partial x_m} = 0, \quad 1 \leq l \leq N \end{array} \right.$$

Vamos a aproximar la solución del problema (III.1.2)-(III.1.3) mediante la formulación dada en (II.1.4) utilizando el Método de Elementos. Es decir, buscamos soluciones del problema (III.1.3)-(III.1.4) de expresiones

$$(III.1.5) \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_h = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in Z_*^N} \alpha_{ij}(t) u_{ij}(t) \delta_{H_{ij}}(t), \\ \bar{P}_h^1 = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in Z_*^N} \alpha_{ij}(t) P_{ij}^1(t) \delta_{H_{ij}}(t), \end{array} \right.$$

donde  $P_{ij}^1(t)$  es una aproximación de  $P^1(r_{ij}(t), t)$ , de pendiente de  $\bar{u}_h$ .

Suponiendo que  $u_0$  y  $f$  son continuas, una forma semi-discretizada del Problema (III.1.2)-(III.1.3) consiste en hallar funciones  $t \rightarrow u_{ij}(t)$  y  $t \rightarrow P_{ij}^1(t)$ ,  $1 \leq l \leq N$ , de  $[0, T]$  en  $\mathbb{R}^L$ , soluciones de la ecuación

$$(III.1.6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (\alpha_{ij}(t) u_{ij}(t)) + \\ + \alpha_{ij}(t) \sum_{o,p} \int_{I_{op}} \alpha_{op}(t) \sum_{l=1}^N (B_{ij}^l u_{op}(t) + B_{op}^l(t) u_{ij}(t) + P_{op}^1(t) + P_{ij}^1(t)) \frac{\partial k}{\partial x_l} (r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \Big| \frac{\partial r_{op}(t)}{\partial \xi_{op}} \Big| d\xi_{op} \\ + \alpha_{ij}(t) A_{ij}^0(t) u_{ij}(t) = \alpha_{ij}(t) f_{ij}(t) \end{array} \right.$$

$$(III.1.7) \quad P_{ij}^1(t) + \sum_{m=1}^N A_{ij}^{1m}(t) \sum_{o,p} \int_{I_{op}} \alpha_{op}(t) (u_{op}(t) - u_{ij}(t)) \frac{\partial k}{\partial x_m} (r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \Big| \frac{\partial r_{op}(t)}{\partial \xi_{op}} \Big| d\xi_{op} = 0$$

donde  $A_{ij}^{lm}(t) = A^{lm}(r_{ij}(t), t)$  y se adjunta la condición inicial

$$(III.1.8) \quad u_{ij}(0) = u_0(\gamma_{ij}).$$

Una propiedad de conservación discretizada similar a (II.5.18) se verifica bajo la condición (II.5.19) sin que dependa de la discretización dada en (II.1.7). Esta discretización proporciona un análisis simple de la estabilidad.

Supongamos que los elementos  $H_{ij}$  y las constantes  $\alpha_{ij}$  están dadas en las condiciones del Teorema 11.3.3. Entonces podemos enunciar un teorema idéntico al Teorema 11.5.1 para el caso de sistemas parabólicos y cuya demostración se haría siguiendo los mismos pasos que la demostración del Teorema 11.5.1. Por tanto, podemos afirmar que el sistema discretizado (III.1.6), (III.1.7) y (III.1.8) tiene una única solución que es continua de  $[0, T]$  en  $\ell^2(1 \times \mathbb{Z}_*^N)$ .

### III.2. Convergencia del Método de Elementos para sistemas parabólicos

Vamos a estudiar la convergencia de la solución aproximada regularizada del Problema (III.1.2)-(III.1.3). Supongamos que tanto la solución del Problema (III.1.2)-(III.1.3) así como los datos son suficientemente diferenciables. Buscamos soluciones del tipo

$$(III.2.1) \quad \bar{u}_h^\varepsilon(\cdot, t) = \bar{u}_h(\cdot, t) * k_\varepsilon,$$

$$(III.2.2) \quad \bar{p}_h^\varepsilon(\cdot, t) = \bar{p}_h^l(\cdot, t) * k_\varepsilon, \quad 1 \leq l \leq N.$$

Al igual que en el Capítulo anterior denotamos

$$e_{ij}(t) = u(r_{ij}(t), t) - u_{ij}(t),$$

$$e_{ij}^l(t) = p^l(r_{ij}(t), t) - p_{ij}^l(t), \quad 1 \leq l \leq N,$$

$$\text{y por } (e_{ij}(t))_{ij} = e(t) \text{ y } (e_{ij}^l(t))_{ij} = e^l(t), \quad 1 \leq l \leq N.$$

los correspondientes vectores formados por  $e_{ij}(t)$  y  $e_{ij}^l(t)$ ,  $ij \in 1 \times \mathbb{Z}_*^N$ .

Restando la ecuación (III.1.6) de su equivalente en la que se sustituye  $u_{ij}(t)$  por  $u(r_{ij}(t), t)$  resulta

$$(III.2.3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(\alpha_{ij}(t) e_{ij}(t)) + \alpha_{ij} \sum_{o,p} a_{op}(t) \sum_{op} a_{op}(t) \sum_{l=1}^N (B_{ij}^l e_{op} + B_{op}^l e_{ij} + e_{ij}^l + e_{op}^l) \frac{\partial k_\varepsilon(r_{ij} - r_{op})}{\partial x_i} \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} - \\ = \alpha_{ij} \phi_{ij} \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(t) = & - \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} (B^l u + P^l)(r_{ij}(t), t) - \\ & - \sum_{o,p} \int_{l_{op}} \alpha_{op}(t) (B_{ij}^l(t) u(r_{op}(t), t) + B_{op}^l(t) u(r_{ij}(t), t)) + \\ & + P^l(r_{op}(t), t) + P^l(r_{ij}(t), t)) \left. \frac{\partial k_\epsilon(r_{ij}(t) - r_{op}(t))}{\partial x_l} \right|_{\frac{\partial r_{op}(t)}{\partial \xi_{op}}} d\xi_{op} \end{aligned}$$

Las funciones  $\phi_{ij}(t)$  pueden ser escritas equivalentemente como

$$(III.2.4) \left\{ \begin{aligned} \phi_{ij}(t) = & \sum_{l=1}^N \{ B_{ij}^l(t) \frac{\partial E}{\partial x_l}(r_{ij}(t), t) + \frac{\partial E^l}{\partial x_l}(r_{ij}(t), t) + \\ & + \frac{\partial \bar{B}^l(\cdot, t)}{\partial x_l}(r_{ij}(t), t) \cdot u(r_{ij}(t), t) - \\ & - \frac{\partial I_h^\epsilon}{\partial x_l}(r_{ij}(t), t) \cdot P^l(r_{ij}(t), t) \} , \end{aligned} \right.$$

donde

$$\begin{aligned} E(\cdot, t) &= u(\cdot, t) - \bar{u}_h^\epsilon(\cdot, t) , \\ E^l(\cdot, t) &= P^l(\cdot, t) - P_h^l(\cdot, t) , \\ \bar{B}^l(\cdot, t) &= B^l(\cdot, t) - B_h^l(\cdot, t) \end{aligned}$$

y

$$I_h^\epsilon(x, t) = \sum_{o,p} \int_{l_{op}} \alpha_{op}(t) k_\epsilon(x - r_{op}(t)) \left. \frac{\partial r_{op}(t)}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op}$$

Operando de la misma forma sobre (III.1.7) obtenemos

$$(III.2.5) \quad \phi_{ij}^l(t) + \sum_{m=1}^N A_{ij}^{lm}(t) \sum_{op} \int_{l_{op}} \alpha_{op}(t) (\alpha_{op}(t) - \alpha_{ij}(t)) \left. \frac{\partial k_\epsilon(r_{ij}(t) - r_{op}(t))}{\partial x_m} \right|_{\frac{\partial r_{op}(t)}{\partial \xi_{op}}} d\xi_{op} = A_{ij}^l(t)$$

al igual que (III.2.4),  $\Lambda_{ij}^1(t)$  puede ser escrita como

$$(III.2.6) \quad \Lambda_{ij}^1(t) = - \sum_{m=1}^N A_{op}^{1m}(t) \left\{ \frac{\partial E}{\partial x_m}(r_{ij}(t), t) + u(r_{ij}(t), t) \frac{\partial l_h^E}{\partial x_m}(r_{ij}(t), t) \right\}.$$

Vamos ahora a presentar un resultado de estabilidad de gran importancia en nuestro objetivo de probar la convergencia del método para sistemas lineales de Convección-Difusión.

Lema III.2.1.- Supongamos que nos encontramos bajo las mismas hipótesis que en el Teorema II.6.1. Entonces existen funciones  $t \rightarrow e(t)$  y  $t \rightarrow e^1(t)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , que satisfacen, para alguna constante  $C = C(T) > 0$ , la desigualdad de energía

$$(III.2.7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \|e(t)\|_{2,h,t}^2 + \sum_{l=1}^N \int_0^t \|e^l(s)\|_{2,h,s}^2 ds \leq \\ & \leq C \int_0^t \left\{ \|\phi(s)\|_{2,h,s}^2 + \sum_{l=1}^N \|\Lambda^l(s)\|_{2,h,s}^2 \right\} ds, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right.$$

Dem.- La demostración es muy similar a la del resultado - equivalente en sistemas hiperbólicos lineales. En primer lugar recordemos que

$$i, j \int_{I_{ij}} \left( \frac{d}{dt} (\alpha_{ij}(t) e_{ij}(t), e_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \right) \geq \frac{C}{2} \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{2,h,t}^2.$$

Aprovechando las estimaciones obtenidas en el Teorema - II.6.3 y operando en la misma forma que en la demostración del mencionado Teorema, concluimos

$$(III.2.8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{C}{2} \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{2,h,t}^2 + \sum_{ij} \sum_{op} \int_{I_{ij}} \int_{I_{op}} \alpha_{ij}(t) \alpha_{op}(t) \sum_{l=1}^N (e_{ij}^l + e_{op}^l \cdot e_{ij}) \frac{\partial k}{\partial x_l}(r_{ij} - r_{op}) \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{op} d\xi_{ij} \\ & < c_1 \|e(t)\|_{2,h,t}^2 + \sum_{ij} \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) (\phi_{ij}(t), e_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij}. \end{aligned} \right.$$

De las hipótesis (III.1.1) se puede deducir que la  $N \times N$  matriz  $(A^{lm}(x,t))_{1 \leq l,m \leq N}$  es inversible y la inversa  $(\bar{A}^{lm}(x,t))_{1 \leq l,m \leq N}$  satisface las desigualdades, para todo  $l, 1 \leq l \leq N$ ,

$$(III.2.9) \quad c_2 \sum_{l=1}^N |n^l|^2 \leq \sum_{l,m=1}^N (\bar{A}^{lm}(x,t) n^m, n^l) \leq c_3 \sum_{l=1}^N |n^l|^2, \quad \forall n^l \in \mathbb{R}^L.$$

Es claro que

$$\sum_{m=1}^N \bar{A}^{lm} A^{mq} = \delta^{lq} \quad l,$$

donde  $\delta^{lq}$  es el símbolo de Kronecker e  $l$  es la  $L \times L$  matriz identidad de  $S(\mathbb{R}^L)$ . Utilizando esta identidad, multiplicando por  $\bar{A}_{ij}^{lm}$  a la izquierda en (III.2.5) y sumando en  $l$  obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N \bar{A}_{ij}^{ml}(t) e_{ij}^l(t) + \\ & + \sum_{op} \int_{l_{op}} \alpha_{op}(t) (e_{op}(t) - e_{ij}(t)) \frac{\partial k}{\partial x_m} (r_{ij}(t) - r_{op}(t)) \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} = \\ & = \sum_{l=1}^N \bar{A}_{ij}^{ml} \Lambda_{ij}^l(t). \end{aligned}$$

La anterior igualdad nos permite fácilmente obtener

$$(III.2.10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{ij} \sum_{l,m=1}^N \int_{l_{ij}} \alpha_{ij}(t) (\bar{A}_{ij}^{ml}(t) e_{ij}^l(t) \cdot e_{ij}^m(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} + \\ & \sum_{ij} \sum_{op} \int_{l_{ij}} \int_{l_{op}} \alpha_{ij}(t) \alpha_{op}(t) \sum_{m=1}^N (e_{op}(t) - e_{ij}(t) \cdot e_{ij}^m(t)) \frac{\partial k}{\partial x_m} (r_{ij} - r_{op}) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| d\xi_{op} d\xi_{ij} = \\ & - \sum_{ij} \sum_{l,m=1}^N \int_{l_{ij}} \alpha_{ij}(t) (\bar{A}_{ij}^{ml}(t) \Lambda_{ij}^l(t) \cdot e_{ij}^m(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij}. \end{aligned} \right.$$

Gracias a la paridad de la función  $k$  se sigue que

$$\begin{aligned} & \sum_{ij} \sum_{op} \int_{l_{ij}} \int_{l_{op}} \alpha_{ij}(t) \alpha_{op}(t) ((e_{op}^1 + e_{ij}^1, e_{ij}^1) + (e_{op} - e_{ij}, e_{ij}^1)) \frac{\partial k}{\partial x_1} (r_{ij} - r_{op}) \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} d\xi_{op} \\ & \sum_{ij} \sum_{op} \int_{l_{ij}} \int_{l_{op}} \alpha_{ij}(t) \alpha_{op}(t) ((e_{op}^1, e_{ij}^1) + (e_{op}, e_{ij}^1)) \frac{\partial k}{\partial x_1} (r_{ij} - r_{op}) \left| \frac{\partial r_{op}}{\partial \xi_{op}} \right| \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} d\xi_{op} = 0 \end{aligned}$$



Combinando (III.2.3) y (III.2.10) resulta

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2} \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{2,h,t}^2 + \sum_{i,j} \int_{i,j} \sum_{m=1}^N a_{ij}(t) (\bar{\Lambda}_{ij}^m(t) e_{ij}^1(t) \cdot e_{ij}^m) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} < \\ & < c_1 \|e(t)\|_{2,h,t}^2 + \sum_{i,j} \int_{i,j} a_{ij}(t) (\phi_{ij}(t) \cdot e_{ij}(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} + \\ & + \sum_{i,j} \int_{i,j} \sum_{m=1}^N a_{ij}(t) (\bar{\Lambda}_{ij}^m(t) \Lambda_{ij}^1(t) \cdot e_{ij}^m(t)) \left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}} \right| d\xi_{ij} \end{aligned}$$

Aplicando ahora, las desigualdades (III.2.9), obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2} \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{2,h,t}^2 + \frac{c_2}{h^3} h^3 |\nabla a| \sum_{i=1}^N \|e_{ij}^1\|_{2,h,t}^2 < \\ & < c_1 \|e(t)\|_{2,h,t}^2 + \frac{c_3}{h^3} h^3 |\nabla a| \left( \sum_{i=1}^N \|\Lambda_{ij}^1\|_{2,h,t}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^N \|e_{ij}^1\|_{2,h,t}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

A partir de esta desigualdad, aplicando la teoría clásica de ecuaciones diferenciales, se sigue fácilmente el anunciado resultado (III.2.7).  $\square$

Establezcamos ahora el resultado de convergencia de nuestro esquema hacia la solución del Problema de Convección-Difusión (III.1.2)-(III.1.3). Este resultado es muy similar a su equivalente para el Método de Partículas pretendiendo con esto dar una formulación que globalice ambos métodos

Teorema III.2.1.- Bajo las hipótesis del Teorema II.6.1, supongamos, además, que  
 $u \in C^0(0, t; W^{\mu+1, \infty}(\mathbb{R}^N)^L)$ , con  $\mu = \max(r+1, m)$ , satisface para algún  $\gamma > N/2$  y todo  $\beta \in \mathbb{N}^N$ ,  $|\beta| \leq \mu + 1$

$$(III.2.11) \quad |\partial^\beta u(x, t)| \leq C(1+|x|)^{-\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^N, t \in [0, T]$$

Entonces, existe una constante  $C = C(\mu, T) > 0$  tal que

$$(III.1.12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t) - \bar{u}_h^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \\ & + \left( \int_0^T \sum_{l=1}^N \|P^l(\cdot, t) - \bar{P}_h^l(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 dt \right)^{1/2} \leq C \left( \varepsilon^r + \frac{h^m}{\varepsilon^{m+1}} \right) \end{aligned} \right.$$

Dem. - Tomando normas en (III.2.4) y usando los resultados del Teorema II.6.2 y de su Corolario II.6.1, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\phi(t)\|_{2,h,t} &\leq C_1 \left(\epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}}\right) \left(\sum_{ij} \int_{I_{ij}} \alpha_{ij}(t) (1+|r_{ij}(t)|)^{-2\gamma} \left|\frac{\partial r_{ij}}{\partial \xi_{ij}}\right| d\xi_{ij}\right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_2 \left(\epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}}\right) \end{aligned}$$

De la definición de las funciones  $P^l$ , utilizando la diferenciabilidad de las funciones  $A^{lm}$  y (III.2.11) podemos deducir las acotaciones

$$|\partial^\beta P^l(x,t)| \leq C_3 (1 + |x|)^{-\gamma}, \quad |\beta| \leq \nu, \quad 1 \leq l \leq N.$$

Utilizando estas relaciones, y de la misma forma que para las funciones  $\phi(t)$ , llegamos a estimar

$$\|\Lambda^l(t)\|_{2,h,t} \leq C_4 \left(\epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}}\right), \quad 1 \leq l \leq N.$$

Aplicando al Lema III.2.1 las estimaciones aquí obtenidas obtenemos

$$(III.2.13) \quad \|e(t)\|_{2,h,t}^2 + \sum_{l=1}^N \int_0^t \|e^l(t)\|_{2,h,t}^2 ds \leq C_5 \left(\epsilon^r + \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}}\right)^2.$$

La conclusión del Teorema se sigue a partir de la Proposición II.5.2 y de (III.2.13).  $\square$

**CAPITULO IV:**

**METODO DE VORTEX CON FILAMENTOS**

## METODO DE VORTEX CON FILAMENTOS

En este capítulo probamos la convergencia de - el Método de Vortex con Elementos para un fluido incompresible y no viscoso en el espacio tridimensional. - Las propiedades de consistencia y estabilidad del Método son analizadas. La consistencia se basa, fundamentalmente, en las propiedades de las fórmulas de cubatura con líneas. Usando el hecho que la vorticidad es conservada a lo largo de los filamentos, damos un tratamiento intrínseco de éstos en lugar de una discretización, lo que nos permite evaluar el término de deformación - implícitamente en nuestro esquema.

### IV.1. Introducción

Como indicamos en el Capítulo II, los Métodos de Vortex han sido estudiados para la simulación del flujo de un fluido incompresible dependiente del tiempo, - donde el flujo es representado por una colección de elementos de vorticidad. El propósito de este Capítulo es dar un análisis matemático a los Métodos de Vortex con Filamentos para un fluido no viscoso sin fronteras.

Desde un punto de vista físico, los Métodos de Vortex con Filamentos han sido desarrollados paralelamente a los Métodos de Vortex Puntuales, como una extensión y/o un complemento de estos (ver [33],[40]). En regiones tridimensionales los Métodos de Vortex con Filamentos tienen la importante propiedad de la conservación de los coeficientes cuando aproximamos la vorticidad inicial mediante una combinación lineal de medidas localizadas sobre filamentos.

Esta propiedad manifiesta la estrecha relación - de estos métodos con las propiedades físicas de los fluidos tridimensionales, ya que es una consecuencia directa del conocido Teorema de Circulación de Kelvin y de la conservación de los filamentos de vortex mediante el flujo.

El análisis matemático de los Métodos de Vortex Puntuales ha sido importantemente desarrollado en los últimos años en lo concerniente a fluidos ideales. La primera demostración de la convergencia de los Métodos de Vortex Puntuales en 2-D se debe a Hald [33] - [34]. -

Posteriormente Beale y Majda [5],[6], Raviart y Cottet [47],[21], y recientemente Beale [4], Cottet [22] y Anderson y Greengard [1] han completado el estudio de los Métodos de Vortex Puntuales para un fluido incompresible no viscoso y sin fronteras en dos y tres dimensiones.

En Mecánica de Fluidos los Métodos de Vortex con Filamentos son aplicados a la simulación de la interacción aeroplano salida de vórtices; en anillos de vortex; en la simulación tridimensional de la perturbación de una "mancha" en una frontera laminar,... (ver [39] para referencias).

Un filamento en Mecánica de Fluidos es una curva que es tangente al vector vorticidad en cada uno de sus puntos.

En el proceso dado en la literatura, los elementos, (filamentos, superficies, volúmenes,...), continuamente distribuidos, son modelados por un número finito de discretas líneas de vortex o por un sistema discreto de puntos vortices (ver por ejemplo [10] - [13]).

En este Capítulo damos un tratamiento intrínseco de los filamentos. El análisis de los Métodos de Vortex mediante un tratamiento intrínseco de los filamentos tiene la ventaja de que el término de deformación es evaluado en el esquema y por tanto no necesita una posterior evaluación. Esto nos permitirá una discretización a posteriori en nuestro esquema, necesaria en la práctica, en la que el término de deformación quedará evaluado.

Este análisis tiene su fundamento principal en la definición de ciertas medidas vectoriales que transportan el valor de la vorticidad mediante los filamentos y en las fórmulas de cubatura sobre líneas. Mediante estas técnicas se conserva la estructura en filamentos de la solución del problema.

#### IV.2. Presentación del Método de Vortex con Filamentos

En esta Sección comenzamos describiendo la formulación vorticidad-corriente de las ecuaciones que gobiernan el movimiento en  $\mathbb{R}^3$  del flujo de un fluido ideal e incompresible.

Sea  $u = (u_1, u_2, u_3)$  el campo de velocidad de un fluido y sea

$$w = \text{rot } u = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

su vorticidad. Entonces el movimiento de esta clase de fluidos está regido por el siguiente sistema de ecuaciones, clásicamente conocido como "ecuaciones de Euler":

$$(IV.2.1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + (u \cdot \nabla) w - (w \cdot \nabla) u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$(IV.2.2) \quad \begin{cases} \text{div } u = 0, \\ w = \text{rot } u, \end{cases}$$

que será considerado junto con la siguiente condición inicial y con la siguiente condición en el infinito:

$$(IV.2.3) \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$(IV.2.4) \quad u(x, t) \longrightarrow u_\infty(t) \quad \text{cuando } |x| \longrightarrow \infty.$$

Las cuales determinan completamente el movimiento del fluido (ver [18] para una deducción de estas fórmulas).

Vamos a introducir una formulación equivalente de estas ecuaciones, más apropiada para un tratamiento numérico.

Consideramos el núcleo matricial  $k(z)$  definido por

$$(IV.2.5) \quad k(z) = -\frac{1}{4\pi} \frac{z}{|z|^3} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & \frac{z_3}{|z|^3} & \frac{-z_2}{|z|^3} \\ \frac{-z_3}{|z|^3} & 0 & \frac{z_1}{|z|^3} \\ \frac{z_2}{|z|^3} & \frac{-z_1}{|z|^3} & 0 \end{pmatrix}$$

Es conocido (ver [47] o [39]) que la velocidad  $u(.,t)$  puede ser explícitamente hallada a partir del conocimiento de la vorticidad mediante la ley de Bio-Savart:

$$u(.,t) = u_{\infty}(t) + K * w(.,t).$$

Similarmente al caso 2-dimensional (ver [47]) - podemos afirmar que si  $w$  pertenece a  $L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$  - entonces la función  $u(.,t)$ , definida por la anterior relación, pertenece al espacio  $B^0(\mathbb{R}^3)^3$  (espacio de todas las funciones continuas y acotadas de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ ) y  $u(.,t)$  es la única función que verifica (IV.2.2) y (IV.2.4).

Por tanto, las ecuaciones de Euler pueden ser - equivalentemente escritas como

$$(IV.2.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j w_i) - w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0 \\ w_i(x,0) = w_{0i}, & 1 \leq i \leq 3 \end{cases}$$

$$(IV.2.7) \quad u(x,t) = u_{\infty}(t) + \int_{\mathbb{R}^3} K(x-y) w(y,t) dy,$$

donde hemos usado las convenciones de Einstein para la - sumación.

Para introducir el Método de Vortex con Filamentos supongamos, en primer lugar, que la velocidad  $u$  es suficientemente regular.

Introducimos algunas notaciones que serán de uso continuo de ahora en adelante. Sea  $\xi \in I$  un parámetro de finido sobre el intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Definimos la curva espacial  $\gamma$  mediante

$$\gamma : \xi \in I \longrightarrow \gamma(\xi) \in \mathbb{R}^3$$

Usualmente  $\gamma(\xi)$  describe el trazo de una partícula en el fluido. Denotamos mediante  $H$  el filamento

$$H = \{y \in \mathbb{R}^3 : \exists \xi \in I, y = \gamma(\xi)\}$$

Por tanto, podemos definir la aplicación flujo para cada  $y \in \mathbb{R}^3$  :  $t \longrightarrow r(t;y,0)$ , por

$$(IV.2.8) \quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} = u(r,t) \\ r(0) = y \end{cases}$$

Denotamos mediante  $H(t)$  el filamento

$$H(t) = \{r(t;y,0) : y \in H\}$$

Utilizaremos  $\gamma(\xi)$  para expresar un punto genérico de  $H$  y  $r(t;\gamma(\xi),0)$  para expresar un punto genérico de  $H(t)$ . Es claro que  $H$  y  $H(t)$  son independientes de la parametrización escogida.

El determinante Jacobiano de la transformación (IV.2.8) lo denotamos por

$$J(t;y,0) = \det \left( \frac{\partial r^i}{\partial y_j} (t;y,0) \right)$$

La vorticidad es propagada mediante el flujo. Este hecho es una consecuencia de la siguiente formulación Lagrangiana debida a Cauchy (ver [18]), que nos da otra interesante versión de (IV.2.1)

$$(IV.2.9) \quad w(r(t;y,0),t) = \nabla r (t;y,0) w(y,0)$$

donde  $\nabla r (t;y,0)$  es la matriz Jacobiana de la aplicación flujo

$$r: (y,0) \longrightarrow r(t;y,0)$$

Con respecto a la existencia y unicidad de la solución del problema (IV.2.1)-(IV.2.4) remitimos a los trabajos de Kato [36], Teman [57] y Bardos-Frisch [2]. La existencia de una solución clásica de las ecuaciones de Euler está demostrada para un intervalo de tiempo que depende de los datos iniciales.



Un filamento Vortex (tubo de vortex) es una colección de líneas de vortex, es decir, curvas tangentes por doquier al vector vorticidad a través de cada punto de una curva cerrada. El Método de Vortex con Filamentos se basa en la hipótesis que el vector vorticidad está representado por una colección de líneas de vorticidad, lo cual se traduce en una combinación lineal de ciertas medidas definidas sobre filamentos de vortex.

Definición IV.2.1. Sea  $w = (w_i)_{i=1,2,3}$ . Una medida  $w \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])^3$  es una medida solución de (IV.2.6) si verifica

$$(IV.2.10) \begin{cases} -\langle w_i, \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \rangle - \langle w_j, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \theta_i \rangle = \\ \langle w_{0i}, \theta_i(\cdot, 0) \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \forall \theta \in C_0(\mathbb{R}^3 \times [0, T])^3 \end{cases}$$

Vamos a considerar soluciones medidas del Problema (IV.2.1)-(IV.2.4),

Definición IV.2.2. Definimos la medida  $\mu_H$  de forma que transporta en cada una de las tres componentes de una función test el valor sobre el filamento, es decir, para toda  $\theta \in C_0^0(\mathbb{R}^3)^3$ ,  $\mu_H$  es definida mediante

$$\langle \mu_{H(t)}^i, \theta_i \rangle = \int_I \theta_i(r(t; \gamma(\xi), 0)) \frac{\partial r^i(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} d\xi, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

donde  $\frac{\partial r^i(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} d\xi$  denota la diferencial de la longitud de arco de la componente  $i$  de  $H(t)$ ,  $H^i(t)$ .

Uno de los principios básicos del Método de Vortex con Filamentos es la preservación de los filamentos de vortex por el flujo. Contrariamente esto no ocurre en el Método de Vortex Puntual en tres dimensiones (ver por ejemplo [4] [22], [47]). Establezcamos esta propiedad, bien conocida en Mecánica de Fluidos, en el siguiente Lema.

Lema IV.2.1.- Si suponemos que

$$(IV.2.11) \quad w_0 = \mu_H$$

entonces la única medida solución de (IV.2.6) está explícitamente dada por

$$(IV.2.12) \quad w(x, t) = \mu_H(t)(x)$$

Dem.

Si sustituimos en la expresión (IV.2.10)  $w_0$  por (IV.2.11), y  $w$  por (IV.2.12). Entonces la siguiente igualdad debe ser verificada

$$-\int_1 \int_0^T \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} = u_j \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} \right) (r(t; \gamma(\xi), 0), t) \frac{\partial r^i(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} d\xi dt -$$

$$-\int_1 \int_0^T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \vartheta_i \right) (r(t; \gamma(\xi), 0), t) \frac{\partial r^j(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} d\xi dt =$$

$$= \int_1 \vartheta_i(\gamma(\xi), 0) \frac{\partial \gamma^i(\xi)}{\partial \xi} d\xi$$

Veamos primeramente que

$$(IV.2.13) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\vartheta_i(r(t; \gamma(\xi), 0), t) \frac{\partial r^i(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi}) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} r^i(t; \gamma(\xi), 0) \frac{d}{dt} \vartheta_i(r(t; \gamma(\xi), 0), t) + \\ & + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \vartheta_i \right) (r(t; \gamma(\xi), 0), t) \frac{\partial r^j(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi}. \end{aligned} \right.$$

Es claro que se verifica

$$(IV.2.14) \left\{ \begin{aligned} & \emptyset_i(r(t; \gamma(\xi), 0), t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r^i(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} \right) = \\ & = \left( \emptyset_i \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right) (r(t; \gamma(\xi), 0), t) = \\ & = \left( \emptyset_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) (r(t; \gamma(\xi), 0), t) \frac{\partial r^j(t; \gamma(\xi), 0)}{\partial \xi} . \end{aligned} \right.$$

Por otra parte, tenemos

$$(IV.2.15) \frac{d}{dt} (\emptyset_i(r(t; \gamma(\xi), 0), t)) = \left( \frac{\partial \emptyset_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \emptyset_i}{\partial x_j} \right) (r(t; \gamma(\xi), 0), t).$$

Por tanto, combinando (IV.2.14) y (IV.2.15) obtenemos (IV.2.13). La conclusión del Lema se sigue aplicando la fórmula de Green a (IV.2.13).  $\square$

Así, el Método de Vortex con Filamentos se basará en los siguientes pasos:

Primero aproximamos  $w_0$  por una combinación lineal de medidas localizados sobre filamentos.

$$w_0 = w_0^h = \sum_{j \in \Lambda} \alpha_j \mu_{H_j}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Usando el Lema IV.2.1 la vorticidad  $w_h$  está explícitamente representada por

$$w_h(x, t) = \sum_{j \in \Lambda} \alpha_j \nu_{H_j}^h(t)(x)$$

donde  $H_j^h(t)$  son las soluciones del sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{dr^h}{dt} = u_h(r^h, t) \\ r^h(0) = \gamma, \quad h \in H_j \end{cases}$$

Finalmente, acoplamos  $u_h$  y  $w_h$  mediante

$$u_h = k_\epsilon * w_h$$

donde  $k_\epsilon$  es una regularización del núcleo  $k$ .

Para resolver numéricamente las ecuaciones de Euler vamos a describir cada paso de la estrategia del Método de Vortex con Filamentos de una forma más precisa.

Sea

$$\Lambda = \mathbb{Z}^3 = \{j = (j_1, j_2, j_3) : j_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3\}$$

Introducimos un recubrimiento de  $\mathbb{R}^3$  con una red uniforme de medida  $h^3$ . Para todo  $j \in \Lambda$  denotamos por  $Q_j$  la región definida por

$$(IV.2.16) \quad Q_j = \{x \in \mathbb{R}^3 : (j_i - \frac{1}{2})h \leq x_i \leq (j_i + \frac{1}{2})h, i = 1, 2, 3\}$$

y por  $Q_j(t)$  la variedad

$$(IV.1.17) \quad Q_j(t) = \{r(t; y, 0), y \in Q_j\}.$$

Consideremos un sistema auxiliar de líneas definido por

$$\bar{H}_j = \{x \in Q_j : x = \gamma_j(\xi) = (j_1 + \xi, j_2, j_3), \xi \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]\}$$

Suponemos que  $w_0$  tiene soporte compacto y es suficientemente regular. Sea  $\Omega$  el soporte de  $w_0$ .

Además, suponemos que existe un conjunto compacto  $\Omega_0$  y un difeomorfismo  $D: \Omega_0 \rightarrow \Omega$  tal que las imágenes mediante  $D$  de las líneas  $\bar{H}_j$  son filamentos de Vortex, es decir, curvas integrales de  $w_0$ , las cuales denotaremos por  $H_j$  (ver [18], Capítulo I y Nota IV.2.2 para una discusión sobre esta hipótesis).

Por  $\gamma_j = \gamma_j(\xi)$ ,  $\xi \in I = [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$  representaremos un punto genérico de  $H_j$  y por tanto  $\gamma_j(\xi) = D(\bar{\gamma}_j(\xi))$ .

La condición sobre el difeomorfismo  $D$ , tal que aplica las imágenes de las líneas  $\bar{H}_j$  en los filamentos de vortex  $H_j$ , implica la existencia de una función escalar

$v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  que verifica  $w_0(D(z)) = v(D(z)) \frac{\partial D(z)}{\partial z_1}$ ,  $z \in \Omega_0$

Por tanto, aproximamos la vorticidad inicial  $w_0$  mediante una combinación lineal de medidas definidas sobre los filamentos de vortex

$$(IV.2.18) \quad w_0^h(x) = \sum_{j \in \Lambda} \alpha_j(\gamma(\xi)) \mu_{H_j}(x)$$

donde  $\alpha_j(\gamma(\xi))$  es la circulación del filamento de vortex  $H_j$  definida por

$$\alpha_j(\gamma(\xi)) = h^2 |\nabla D(\bar{\gamma}_j)| v(D(\bar{\gamma}_j(\xi)))$$

y  $|\nabla D(\bar{\gamma}_j)|$  es el Jacobiano de la transformación  $D$  en la línea  $\bar{H}_j$ .

Veamos que  $w_0^h$  definido de esta forma es una buena aproximación de  $w_0$ .

En efecto, para todo  $\vartheta \in C_0(\mathbb{R}^3)^3$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle w_0, \vartheta \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} (w_0 \vartheta)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} (w_0 \vartheta)(D(z)) |\nabla D(z)| dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \vartheta(D(z)) v(D(z)) \frac{\partial D(z)}{\partial z_1} |\nabla D(z)| dz \end{aligned}$$

es aproximado por

$$\langle w_0^h, \vartheta \rangle = \sum_{j \in \Lambda} h^2 \int_1^l \vartheta(D(\bar{\gamma}_j(\xi))) v(D(\bar{\gamma}_j(\xi))) \frac{\partial D(\bar{\gamma}_j)}{\partial \xi} |\nabla D(\bar{\gamma}_j(\xi))| d\xi$$

Esta aproximación es equivalente a una fórmula de cubatura numérica sobre las líneas  $H_j$ . Para cada  $j \in \Lambda$ , las fórmulas de cubatura asociadas a esta aproximación son

$$(IV.2.19) \quad \int_{Q_j} \beta(x) dx = h^2 \int_1^l \beta(\bar{\gamma}_j(\xi)) d\xi + E_j(\beta), \forall \beta \in C(Q_j)^3$$

donde  $E_j(\beta)$  es la función error. Observemos que las fórmulas de cubatura (IV.2.19) son exactas en el espacio de polinomios  $P_1(Q_j)$ . Dado un entero  $m \geq 1$  podemos obtener

exactitud de (IV.2.19) en  $P_{m-1}(Q_j)$  en el siguiente camino:

Existen constantes  $a_\alpha$ , independientes de  $h$ , tales que las fórmulas de cubatura

$$(IV.2.20) \quad \int_{Q_j} \beta \, dx = h^2 \int_I \beta(\bar{\gamma}_j(\xi)) \, d\xi + \sum_{2 \leq |\alpha| \leq m-1} a_\alpha \int_{Q_j} \partial^\alpha \beta \, dx + E_j(\beta)$$

son exactas en  $P_{m-1}(Q_j)$  (ver [47]) para el caso de fórmulas de cuadratura con nodos).

Si  $\beta \in W^{m,1}(\mathbb{R}^3)$  se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial^\alpha \beta \, dx = 0, \quad 2 \leq |\alpha| \leq m-1.$$

De esta forma al igual que en el Capítulo II puede ser probado el siguiente resultado sobre la aproximación definida por las anteriores fórmulas de cubatura en  $\mathbb{R}^3$ .

Lema IV.2.2.- Sea  $m \geq 1$  y  $p$  enteros tales que  $m \cdot p > 3$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ . Entonces existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que, para toda función  $\beta \in W^{m,p}(\mathbb{R}^3) \cap W^{m,1}(\mathbb{R}^3)$  se tiene

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \beta \, dx - h^2 \sum_{j \in \Lambda} \int_I \beta(\bar{\gamma}_j(\xi)) \, d\xi \right| \leq Ch^{m+3/p^*} \sum_{j \in \Lambda} \|\beta\|_{m,p,Q_j} \quad \square$$

Como consecuencia del Lema IV.2.2 obtenemos el siguiente resultado de convergencia de  $w_o^h$ , de demostración similar al Corolario II.3.2.

Corolario IV.2.1. Bajo las hipótesis del Lema IV.2.2 y para  $w_o$  suficientemente regular, existe una constante  $C > 0$ , tal que

$$\|w_o - w_o^h\|_{-m,p,\mathbb{R}^3} \leq Ch^m \|w_o\|_{m,p,\mathbb{R}^3} \quad \square$$

De ahora en adelante denotaremos por  $E_j(\beta)$  la función:

$$(IV.2.21) \quad E_j(\beta) = \int_{Q_j} \beta dx - h^2 \int_1 \beta(\bar{\gamma}_j(\xi)) d\xi, \forall \beta \in C(Q_j)^3$$

El siguiente paso en la construcción de nuestro esquema es, para todo  $j \in \Lambda$ , resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$(IV.2.22) \quad \begin{cases} \frac{dr^h}{dt} = u_h(r^h, t) \\ r^h(0) = H_j \end{cases}$$

donde  $r^h: \gamma \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow r^h(t; \gamma, 0) \in \mathbb{R}^3$  es la aplicación - flujo aproximada.

Denotemos por  $r_j^h$  la solución de este sistema en tiempo  $t \in [0, T]$

Usando el Lema IV.2.1 obtenemos

$$w_h(x, t) = \sum_{j \in \Lambda} \alpha_j(\gamma(\xi)) u_{H_j^h}(t)(x)$$

donde  $H_j^h(t)$  es definido por

$$H_j^h(t) = \{ r^h(t; \gamma, 0), \gamma \in H_j \}$$

y donde  $u_h$  y  $w_h$  pueden estar relacionados por

$$\begin{aligned} u_h(x, t) &= u_\infty(t) + (k * w_h)(x, t) = \\ &= u_\infty(t) + \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) \frac{x - r_j^h}{|x - r_j^h|^\beta} \times \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} d\xi \end{aligned}$$

Esta expresión no tiene necesariamente sentido, ya que el núcleo  $k$  no es una función continua. Vamos a reemplazar en la anterior expresión el núcleo  $k$  por un núcleo regularizado  $k_\epsilon$ .

Sea  $\psi$  una función cut-off perteneciente a  $L^\infty(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$  y suponemos que verifica

$$(IV.2.23) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \int_{\mathbb{R}^3} \psi dx = 1 \\ \text{ii) Existe un entero positivo } n \text{ tal que} \\ \int_{\mathbb{R}^3} x^\alpha \psi(x) dx = 0, \alpha \in \mathbb{N}^3, 1 \leq |\alpha| \leq n-1 \end{array} \right.$$

El número  $n$  determinará el orden de aproximación del método.

Para todo  $\epsilon > 0$  sea

$$\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-3} \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

y

$$(IV.2.24) \quad k_\epsilon = k * \psi_\epsilon$$

Así definido  $k_\epsilon$  es una función continua.

Por tanto definimos la función continua  $u_h$  mediante

$$(IV.2.25) \quad \begin{aligned} u_h(x, t) &= u_\infty(t) + k_\epsilon * w_h(x, t) = u_\infty(t) + k * w_h^\epsilon(x, t) = \\ &= u_\infty(t) + \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\epsilon(x - r_j^h) \times \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} d\xi \end{aligned}$$

Para una discusión sobre algunas elecciones prácticas en 2-D de la función cut-off haremos referencia a los trabajos [9], [39] y [47]. Puede verse [4], [47], para un estudio similar en 3-D.

El Método de Vortex con Filamentos para la aproximación de las ecuaciones de Euler en 3-D queda completamente definido mediante las ecuaciones (IV.2.22), -



(IV.2.24) y (IV.2.25). Obtener una solución de estas ecuaciones es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en función de las localizaciones de los filamentos  $H_j^h(t)$ . Probemos ahora que este sistema tiene una única solución.

Introducimos el espacio  $L^p(\Lambda)^3$ ,  $1 \leq p < \infty$ , de las sucesiones  $v = (v_j(t))_{j \in \Lambda}$  con valores en  $\mathbb{R}^3$ . Dotamos a  $L^p(\Lambda)^3$  con la siguiente norma que depende del tiempo

$$\|v\|_{p,h,t} = \sum_{j \in \Lambda} \left( h^2 \int_I |v_j|^p \left| \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi} \right| d\xi \right)^{1/p}$$

Como usual podemos definir los espacios  $W^{m,p}(\Lambda)^3$  de sucesiones cuyas derivadas de orden  $m$  estén en  $L^p(\Lambda)^3$ .

Teorema IV.2.1 Supongamos que la función

$\psi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{2,1}(\mathbb{R}^3)$  y que la siguiente condición se verifica

$$(IV.2.26) \quad \sum_{j \in \Lambda} \int_I |\alpha_j(\gamma(\xi))| d\xi < +\infty$$

Entonces el problema aproximado (IV.2.22) (IV.2.24), (IV.2.25) tiene una única solución  $t \rightarrow (r_j^h(t))_{j \in \Lambda}$ ,  $t \in [0, T]$ , para  $T$  suficientemente pequeño.

Dem.-

Como  $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$  es fácil ver que  $k_\varepsilon \in B^0(\mathbb{R}^3)^3$ . Además  $\psi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$ , así

$\frac{\partial k_\varepsilon}{\partial x_i} = k * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \in B^0(\mathbb{R}^3)^3$ . Por tanto  $k_\varepsilon$  es una función del espacio de todas las funciones  $C^1(\mathbb{R}^3)$  que -

son acotadas junto con todas sus derivadas de orden uno, es decir, pertenece a  $B^1(\mathbb{R}^3)^3$ . Razonando de la misma forma, deducimos que pertenece también a  $B^2(\mathbb{R}^3)^3$ .

De (IV.2.22) y (IV.2.25) obtenemos el siguiente sistema diferencial no lineal

$$(IV.2.27) \begin{cases} \frac{d r_i^h}{dt} = u_\infty(t) + \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\epsilon(r_i^h - r_j^h) \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} d\xi \\ r_i^h(0) = H_i \end{cases}$$

Consideremos la aplicación  $\phi : [0, \bar{T}] \times W^{1,\infty}(\Lambda)^3 \rightarrow W^{1,\infty}(\Lambda)^3$  que, para  $v = (v_i(\xi, t))_{i \in \Lambda} = (v_i(\xi))_{i \in \Lambda}$ , es definida por

$$\begin{aligned} \phi(t, v(\xi'))_i &= u_\infty(t) + \\ &+ \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\epsilon(v_i(\xi') - v_j(\xi)) \frac{\partial v_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que  $\phi$  es una función Lipschitz continua. En primer lugar, veamos que está bien definida

$$(IV.2.28) \left| \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\epsilon(v_i(\xi') - v_j(\xi)) \frac{\partial v_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \right| \\ \leq C_1 \|k_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\nabla v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \sum_{j \in \Lambda} \int_1 |\alpha_j(\gamma(\xi))| d\xi$$

$$(IV.2.29) \left| \frac{\partial \phi(t, v(\xi'))}{\partial \xi} \right| \leq C_2 \|\nabla k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\nabla v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2 \sum_{j \in \Lambda} \int_1 |\alpha_j(\gamma(\xi))| d\xi$$

Además, aplicando la fórmula de Taylor con resto integral hallamos

$$(IV.2.30) \left| \phi(t, v)_i - \phi(t, s)_i \right| = \left| \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) (k_\epsilon(v_i - v_j) - k_\epsilon(s_i - s_j)) \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + k_\epsilon(s_i - s_j) \frac{\partial}{\partial \xi} (v_j - s_j) d\xi \right| \leq \\ \leq C_3 \|v - s\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} (\|\nabla k_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}) \sum_{j \in \Lambda} \int_1 |\alpha_j(\gamma(\xi))| d\xi$$

$$(IV.2.31) \left| \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(t, v)_i - \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(t, s)_i \right| \leq C_4 \|v - s\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla^2 k_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} \sum_{j \in \Lambda} \int_1 |\alpha_j(\gamma(\xi))| d\xi$$

Por otra parte, si  $v = (v_i)_{i \in \Lambda}$  es solución del sistema diferencial

$$\frac{d v_i}{dt} = \phi(t, v)_i,$$

entonces la siguiente desigualdad debe ser verificada

$$\frac{d}{dt} \|\nabla v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C_5 (1 + \|\nabla v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^2)$$

Es fácil probar que para un tiempo  $T$  suficientemente pequeño  $T \ll \bar{T}$ , se verifica

$$(IV.2.32) \quad \|\nabla v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C_6, \quad t \in [0, T]$$

Así, usando (I.V.2.26) y (IV.2.32) y el hecho que  $k \in B^2(\mathbb{R}^3)^3$ , de (IV.2.28) y (IV.2.29), deducimos que  $\phi(t, v) \in W^{1, \infty}(\Lambda)^3$ ,  $t \in [0, T]$

(IV.2.30) y (IV.2.31) muestran que para  $t \in [0, T]$ ,  $\phi$  es una función globalmente Lipschitz continua con respecto a la segunda variable. Además,  $u_\infty(t)$  es continua de  $[0, T]$  en  $\mathbb{R}^3$  y, por tanto, la aplicación  $\phi$  es continua de  $[0, T] \times W^{1, \infty}(\Lambda)^3$  en  $W^{1, \infty}(\Lambda)^3$ . Aplicando el teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard concluimos que el sistema diferencial no lineal (IV.2.27) tiene una única solución en  $[0, T]$ . Como consecuencia el problema aproximado (IV.2.22), (IV.2.24), (IV.2.25) tiene una única solución  $t \longrightarrow (r_j^h(t))_{j \in \Lambda}$ ,  $t \in [0, T]$   $\square$

Nota IV.2.1. En la demostración del Teorema IV.2.1. hemos supuesto que  $\psi \in W^{2, \infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{2, 1}(\mathbb{R}^3)$ ; sin embargo, basta con suponer  $\psi \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{1, 1}(\mathbb{R}^3)$ . La demostración en este caso es un poco más complicada y no aporta nada esencial en la comprensión del Método. Esta se basa en estimaciones más finas del núcleo  $k$ , en concreto en

$$\|K * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)}$$

$$|(K * f)(x+y) - (K * f)(x)| \leq C |y| (1 + \log |y|) \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

Utilizando estas estimaciones, la existencia de solución del problema aproximado (IV.2.22), (IV.2.24) y (IV.2.25) se demuestra fácilmente mediante la aplicación de un teorema de punto fijo. La unicidad se deduce de forma clásica pero con alguna complicación algebraica (ver [2]) para una demostración similar en el caso 2-D).  $\square$

Nota IV.2.2.- La condición (IV.2.26) es satisfecha en la práctica, por ejemplo cuando  $w_0$  tiene soporte compacto.

Para estudiar el caso en que  $w_0$  es rápidamente decreciente puede verse [21].

Todo lo dicho sobre los filamentos de Vortex puede ser extendido al caso de elementos de Vortex, es decir, secciones de un tubo de Vortex.

Las hipótesis hechas sobre el difeomorfismo  $D$  implican que las líneas  $H_j$  no tienen ceros comunes. Sin embargo, pueden tenerlos. En tal caso, habría que modificar el sistema de curvas auxiliares  $\bar{H}_j$  de acuerdo con la configuración de los filamentos de vortex  $H_j$ .  $\square$

Ahora, nuestro objetivo es demostrar la convergencia de la solución del problema aproximado (IV.2.22), (IV.2.24), (IV.2.25) hacia la solución del sistema de Euler (IV.2.1)-(IV.2.4). Primero analizaremos algunas propiedades y estimaciones concernientes al núcleo regularizado  $k_\epsilon$ .

#### IV. 3. Algunos resultados técnicos

Comenzamos por exponer el siguiente resultado clásico cuya demostración puede ser vista en [56].

Teorema IV.3.1.- Sean  $0 < \alpha < 3$ ,  $1 \leq q < p < \infty$ ,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{3},$$

a) si  $f \in L^q(\mathbb{R}^3)$ , entonces la integral

$$I_\alpha(f)(x) = \frac{1}{L(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^3} |x-y|^{-3+\alpha} f(y) dy,$$

donde  $L(\alpha) = \pi^{3/4} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2) / \Gamma(3/2 - \frac{\alpha}{2})$ ,  
converge absolutamente para casi todo x.

b) Si además  $1 < q$ , entonces

$$\|I_\alpha(f)\|_p \leq A_{pq} \|f\|_q$$

donde  $A_{pq} = A_{pq}(p, q)$  es una constante.  $\square$

El siguiente resultado debido a Calderon y Zygmund completa el anterior Teorema al caso  $\alpha = 0$ .

Teorema IV.3.1.- El operador de convolución

$f \longrightarrow \frac{\partial k}{\partial x_1} * f$  es una aplicación lineal acotada

de  $L^p(\mathbb{R}^3)$  en  $L^p(\mathbb{R}^3)$ , para  $1 < p < +\infty$ .  $\square$

Basándonos en estos resultados y en la propiedad de convolución  $\partial^\beta k_\epsilon = \partial k * \partial^{\beta-1} \psi_\epsilon$  podemos establecer el siguiente lema:

Lema IV.3.1.-

(i) Sea  $p \in ]3/2, \infty[$  y sea  $\psi \in L^q(\mathbb{R}^3)$  con

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3}. \text{ Entonces } k \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3) \text{ y para}$$

todo compacto S contenido en  $\mathbb{R}^3$  existe una constante  $C(S)$  tal que se verifica

$$(IV.3.1) \quad \|k_\epsilon\|_{L^p(S)} \leq \frac{C(S)}{\epsilon^{2-3/p}}$$

(ii) Sea  $p \in ]1, \infty[$  y  $\psi \in W^{\ell-1, p}(\mathbb{R}^3)$  para algún entero  $\ell \geq 1$ . Entonces para alguna constante C positiva tenemos

$$(IV.3.2) \quad \|\partial^\beta k_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{\epsilon^{\ell+2-3/p}}, \quad |\beta| = \ell \quad \square$$

Vamos, ahora, a exponer un lema que nos aporta algunas estimaciones de  $\partial^\beta k_\epsilon$  que serán de uso continuo en el resto del Capítulo.

Lema IV.3.2.- Sea  $\ell$  un entero no negativo. Entonces para todo  $\beta \in \mathbb{N}^3$  con  $|\beta| = \ell$ , se verifican las siguientes propiedades:

(i) Si  $\psi \in W^{\ell, \infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{\ell, 1}(\mathbb{R}^3)$ , entonces

$$(IV.3.3) \quad |\partial^\beta k_\epsilon(x)| \leq \frac{C}{\epsilon^{\ell+2}}, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

(ii) Si  $\psi \in W^{\ell, \infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{\ell, 1}(\mathbb{R}^3)$  satisface además

$$|x|^{\ell+3} |\partial^\beta \psi(x)| \leq C,$$

entonces

$$(IV.3.4) \quad |\partial^\beta k_\epsilon(x)| \leq \frac{C}{|x|^{\ell+2}}, \quad |x| \geq \epsilon.$$

(iii) Si  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^3)$  tiene soporte compacto contenido en la esfera  $S(0:r)$ , entonces (IV.3.4) se verifica para  $|x| \geq (r+1)\epsilon$ .  $\square$

Como consecuencia del epígrafe (iii) del anterior lema obtenemos el siguiente Corolario

Corolario IV.3.2.- Supongamos que  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^3)$  tiene soporte compacto contenido  $S(0:r)$ . Entonces para todo entero  $\ell \geq 2$  tenemos

$$(IV.3.5) \quad \int_{|x| \geq (r+1)\epsilon} |\partial^\beta k_\epsilon(x)| dx \leq \frac{C}{\epsilon^{\ell-1}} \quad \square$$

Las técnicas utilizadas en la demostración del lema IV.3.2. son similares a las usadas en un lema análogo para el caso 2-dimensional, donde el núcleo es  $K(x) = \frac{(-x_2, x_1)}{|x|^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ . Por brevedad y similitud remitimos al caso 2-D (ver [47]).

Enunciamos, ahora, un importante lema de utilidad para probar los resultados de convergencia, cuya demostración puede encontrarse en [47].

Lema IV.3.3.- Supongamos que existe un entero  $n \geq 1$  tal que (IV.2.24) se verifica. Entonces para alguna constante  $C > 0$  y para todas las funciones  $f \in W^{n,p}(\mathbb{R}^3)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , se cumple

$$\|f * \psi_\epsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \epsilon^n |f|_{n,p,\mathbb{R}^3} \quad \square$$

#### IV.4.- Convergencia del Método de Vortex con Filamentos

Para estudiar la convergencia de la solución aproximada  $u_h$  hacia la solución exacta  $u$  cuando  $h$  y  $\epsilon$  tienden hacia cero, vamos a considerar la relación existente entre  $\{r_j(t) - r_j^h(t)\} = \{e_j(t)\} = e(t)$  y la función  $u - u_h$ .

Para todo  $t > 0$  y todo  $j \in \Lambda$  tenemos

$$r_j(t) - r_j^h(t) = \int_0^t (u - u_h)(r_j(s), s) ds + \int_0^t (u_h(r_j(s), s) - u_h(r_j^h(s), s)) ds = N + M.$$

Vamos a evaluar  $N$  y  $M$  en términos de  $\{r_j - r_j^h\}_{j \in \Lambda}$

Primeramente, podemos descomponer  $u - u_h$  como sigue

$$\begin{aligned} u(x, t) - u_h(x, t) &= u_\infty(t) + \int_{\mathbb{R}^3} k(x-y) w(y, t) dy - \\ &- u_\infty(t) - \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\epsilon(x - r_j^h(t)) \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} d\xi \\ &= N_1 + N_2 + N_3, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} N_1(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} (K - k_\epsilon)(x-y) w(y, t) dy, \\ N_2(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} k_\epsilon(x-y) w(y, t) dy - \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\epsilon(x - r_j(t)) \frac{\partial r_j}{\partial \xi} d\xi, \\ N_3(x, t) &= \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\epsilon(x - r_j(t)) \frac{\partial r_j}{\partial \xi} d\xi - \\ &- \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma) k_\epsilon(x - r_j^h(t)) \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} d\xi. \end{aligned}$$

La expresión  $N_1$  recoge el error producido en la regularización del núcleo.  $N_2$  nos proporciona el error de la fórmula de cubatura. Las estimaciones de  $N_1$  y  $N_2$  son propiedades de consistencia del Método de Vortex con Filamentos.

$N_3$  es el error en la aproximación de la solución de (IV.2.8). Las estimaciones de  $N_3$  y de  $M$  dan las propiedades de estabilidad de nuestro esquema de aproximación.

Estimaremos estos errores en normas  $L^p$  continuas y discretas. Establezcamos mediante el siguiente teorema el resultado de Convergencia:

Teorema de Convergencia.- Supongamos que las siguientes hipótesis se verifican:

- (i) Existe un entero  $n \geq 2$  tal que (IV.2.23) se verifica,
- (ii) o bien la función cut-off  $\psi$  pertenece a  $W^{m-1, \infty}(\mathbb{R}^3)$  para algún entero  $m \geq 2$  y tiene soporte compacto, o la función  $\psi \in W^{m-1, \infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{m-1, 1}(\mathbb{R}^3)$  para algún entero  $m \geq 3$  y satisface para  $\gamma > 3$  la condición

$$(IV.4.1) \quad |\partial^\theta \psi(x)| \leq C_\gamma (1+|x|)^{-\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^3, |\theta| = 0, 1, 2$$

(iii) existen constantes  $\bar{C} > 0$  y  $\beta \geq \alpha > 1$  tales que

$$(IV.4.2) \quad \bar{C}^{-1} \epsilon^\beta \leq h \leq \bar{C} \epsilon^\alpha$$

Entonces existe, para todo  $s \in ]0, 1[$  y para  $T$  suficientemente pequeño, una constante  $C_s(T, w_0)$  tal que, para todo  $p \in ]3/2, \infty[$ , tenemos:

$$(IV.4.3) \quad \|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C_2}{\epsilon^s} \left( \epsilon^n + \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}} \right),$$

$$(IV.4.4) \quad \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C_3}{\epsilon^s} \left( \epsilon^n + \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}} \right),$$

$$(IV.4.5) \quad \|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_4 \left( \epsilon^n + \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}} \right),$$

$$(IV.4.6) \quad \|e(t)\|_{p, h, t} \leq C_5 \left( \epsilon^n + \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}} \right).$$

#### IV. 5. Propiedades de Consistencia.

Comenzamos el estudio que debe llevar a la demostración del Teorema de Convergencia estableciendo las estimaciones de  $N_1$ . Como suponemos que  $w_0$  tiene soporte compacto, es claro que  $w$  tendrá también soporte compacto.

Lema IV.5.1.- Supongamos que existe un entero  $n \geq 1$  tal que (IV.2.24) se verifica. Entonces para alguna constante  $C = C(p, T, w_0)$  y todo  $t \in [0, T]$  tendremos las estimaciones

$$(IV.5.1) \quad \|N_1(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \epsilon^n, \quad 3/2 < p \leq +\infty,$$

$$(IV.5.2) \quad \|N_1(\cdot, t)\|_{p, h, t} \leq C \epsilon^n, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Dem.-

Podemos escribir  $N_1$  como

$$\begin{aligned} N_1(\cdot, t) &= (k - k_\epsilon) * w(\cdot, t) = k * w(\cdot, t) - k * \psi_\epsilon * w(\cdot, t) = \\ &= k * (w(\cdot, t) - w(\cdot, t) * \psi_\epsilon). \end{aligned}$$



Aplicando el lema IV.3.3 a  $w(\cdot, t) - w(\cdot, t) * \psi_\epsilon$  obtenemos

$$\|w(\cdot, t) - w(\cdot, t) * \psi_\epsilon\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq C_1 \epsilon^n \|w\|_{n, q, \mathbb{R}^3} \leq C_2 \epsilon^n, \quad 1 \leq q \leq +\infty$$

Sea  $f(x) = w(x, t) - (w(\cdot, t) * \psi_\epsilon)(x)$ .

Usando el Teorema IV.3.1. deducimos que  $N_1(x, t) \in L^p(\mathbb{R}^3)$  con  $p \in ]3/2, \infty[$  y se verifica (IV.5.1).

Además  $N_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ ; esto es debido a las acotaciones

$$\int_{|x-y| > 1} \frac{|f(y)|}{|x-y|^2} dy \leq C_1 \int_{|x-y| > 1} |f(y)| dy \leq C_2 \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)},$$

$$\int_{|x-y| \leq 1} \frac{|f(y)|}{|x-y|^2} dy \leq C_3 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{r^2} \cos\theta \, dr \, d\theta \, d\tau$$

Por tanto  $N_1(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$  y  $\|N_1(\cdot, t)\|_{L^p} \leq C_5 \epsilon^n, \quad p \in ]3/2, \infty[$

$$\|N_1(t)\|_{p, h, t} \leq C_6 (h^3 (\text{Card} \{j \in \Lambda; Q_j(t) \in \text{supp } w\}))^{1/p} \|N_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)},$$

$$\leq C_7 (h^3 \frac{1}{h^3})^{1/p} \|N_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C_7 \|N_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \quad \square$$

Analicemos, ahora las propiedades de  $N_2(\cdot, t)$ .

Lema IV.5.2.- Bajo las hipótesis del Teorema de -  
Convergencia, existe una constante  $C_5 = C_5(T, w_0)$   
tal que para todo  $t \in [0, T]$  se verifican

$$(IV.5.3) \quad \|N_2(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_5 \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}}, \quad p \in ]3/2, \infty[ ,$$

$$(IV.5.4) \quad \|N_2(\cdot, t)\|_{p, h, t} \leq C_5 \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Dem. -

Observemos que podemos escribir

$$(IV.5.5) \quad \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\epsilon(x-r_j) \times \frac{\partial r_j}{\partial \xi} d\xi =$$

$$= \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\epsilon(x-r(t; D(\gamma_j), 0)) \frac{\partial r(t; D(\gamma_j), 0)}{\partial \xi} d\xi$$

Por otra parte, usando la formulación lagrangiana y el difeomorfismo  $D$  hallamos

$$(IV.5.6) \quad \int_{\mathbb{R}^3} k_\epsilon(x-y) w(y, t) dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} k_\epsilon(x-r(t; Dz, 0)) v(D(z)) |\nabla_{D(z)} r(t; Dz, 0) \frac{\partial Dz}{\partial z_1}| |\nabla D(z)| dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} k_\epsilon(x-r(t; D(z), 0)) v(D(z)) \frac{\partial r(t; D(z), 0)}{\partial z_1} |D(z)| dz$$

donde hemos usado el cambio de variable  $y-r(t; s, 0)$  - el cual, gracias a la condición de incompresibilidad, tiene Jacobiano igual a uno.

Así, usando (IV.5.5) y (IV.5.6) podemos escribir  $N_2(x, t)$  en la forma  $N_2(x, t) = \sum_{j \in \Lambda} E_j(g(x, z, t))$ ,

donde

$$g(x, z, t) = v(D(z)) |\nabla D(z)| k_\epsilon(x-r(t; Dz, 0)) \frac{\partial r(t; Dz, 0)}{\partial z_1}$$

En el caso en que  $\psi$  es suficientemente diferenciable, por ejemplo  $W^{m-1,1}(\mathbb{R}^3) \cap W^{m-1,2}(\mathbb{R}^3)$ ,  $m \geq 3$ , podemos estudiar directamente el término  $N_2(x, t)$  como una fórmula de cubatura con líneas. En este caso obtenemos

$\frac{h^m}{\epsilon^{m-1+s}}$  en lugar de (IV.5.3) y (IV.5.4).

Estudiemos ahora el caso en el que  $m$  es menor que tres, siendo válida la demostración para el caso general de un  $m$  cualquiera,  $m \geq 1$ .

Consideremos primero el caso en que  $\psi \in W^{m-1, \infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{m-1, 1}(\mathbb{R}^3)$  y satisface (IV.4.1).

Como  $w_0$  es regular y tiene soporte compacto, se sigue del Lema IV.3.1. y del lema IV.3.2 (i) que la función  $g(x, \dots, t) \in W^{m, q}(\mathbb{R}^3) \cap W^{m-1, 1}(\mathbb{R}^3)$   $q \in [1, \infty]$ . Escogemos  $m \cdot q > 3$ ,  $m \geq 1$ . Aplicando el Lema IV.2.2. obtenemos

$$(IV.5.7) \quad N_2(x, t) \leq C_1 h^{m + \frac{3}{q^*}} \sum_{j \in \Lambda} |g(x, \dots, t)|_{m, q, Q_j}, \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1.$$

Dado  $x \in \mathbb{R}^3$  y  $t \in [0, T]$  consideramos el conjunto

$$J = \{ j \in \Lambda : \text{dist}(x, Q_j(t)) \leq 2\varepsilon \}.$$

Es claro que

$$\text{Card } J \leq C_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{h}\right)^3.$$

Así, para cada  $j \in J$ , usando la desigualdad de Hölder, hallamos

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Lambda} |g(x, \dots, t)|_{m, q, Q_j} &\leq C_3 h^{m+3/q^*} (\text{Card } J)^{1/q^*} |g(x, \dots, t)|_{m, q, \mathbb{R}^3} \leq \\ &\leq C_4 h^m (h+\varepsilon)^{3/q^*} |g(x, \dots, t)|_{m, q, \mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

Como  $\psi \in L^r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$  y satisface (IV.4.1), del Lema IV.3.1 deducimos que  $k_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R}^3)$ ,  $q \in ]3/2, \infty[$  y para  $|\alpha| \geq 0$  tenemos

$$(IV.5.8) \quad \|\partial^\alpha k_\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C_5}{\varepsilon^{|\alpha| + 2 - 3/q}} \leq \frac{C_6}{\varepsilon^{m+2-3/p}}$$

Gracias a la regularidad de  $u$  las derivadas de  $r(t; \cdot, 0)$  están acotadas. Por tanto,

$$|g(x, \dots, t)|_{m, q, R^3} \leq C_7 \sum_{\substack{|\alpha| + |\beta| \leq m \\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^3}} \left( \int_{R^3} |\partial^\alpha k_\epsilon(x-r(t; Dz, 0))| \cdot \partial^\beta (v(D(z)) |\nabla D(z)| \left| \frac{\partial r(t; Dz, 0)}{\partial z_1} \right|^q dz) \right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{C_8}{\epsilon^{m+2-3/q}}$$

Concluimos finalmente

$$(IV.5.9) \quad \sum_{j \in J} |g(z, \dots, t)|_{m, q, Q_j} \leq C_q \left(1 + \frac{h}{\epsilon}\right)^{3/q^*} \frac{h^m}{\epsilon^{m+1}}$$

Resta estimar  $N_2$  en los índices  $j \in \bar{J} = \Lambda - J$ . Sea

$$G = \bigcup_{j \in \bar{J}} Q_j.$$

Así, si  $D(z) \in G$ ,  $|r(t; Dz, 0) - x| \geq z\epsilon$ , entonces  $y \rightarrow k_\epsilon(x-r(t; Dz, 0))$  es una función  $C^\infty$ : Por tanto, - usando la regularidad de  $w_0$  y el Lema IV.3.2 (ii) tenemos

$$\sum_{j \in \bar{J}} |g(x, \dots, t)|_{m, q, Q_j} \leq C_{10} h^m \sum_{\substack{|\alpha| + |\beta| \leq m \\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^3}} \left( \int_G |\partial^\alpha k_\epsilon(x-r(t; Dz, 0))| \cdot \partial^\beta (v(D(z)) |\nabla Dz| \left| \frac{\partial r(t; Dz, 0)}{\partial z_1} \right|^q dz) \right)^{1/q}$$

$$\leq C_{11} \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}}$$

Así, hemos deducido que (IV.5.3) se verifica para la norma  $L^\infty(R^3)$ .

Para obtener las estimaciones  $L^p(R^3)$ ,  $p \in ]3/2, \infty[$ , sea

$$\Pi = \sum_{\substack{|\alpha| + |\beta| \leq m \\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^3}} \left( \int_A |\partial^\alpha k(x-r(t; Dz, 0))| \partial^\beta (v(D(z)) |\nabla Dz| \left| \frac{\partial r(t; Dz, 0)}{\partial z_1} \right|^q dz) \right)^{1/q}$$

donde  $A = R^3$  o  $A = G$  a ser especificado.

Para  $j \in J$ ,  $A = R^3$ , tenemos

$$\|\Pi\|_{L^p(R^3)} \leq C_{12} \| |\partial^\alpha k_\epsilon| \|_{L^q(R^3)} \| |\partial^\beta (v(D(z))) |\nabla D(z)| \left| \frac{\partial r(t; Dz, 0)}{\partial z_1} \right|^q \|_{L^p(R^3)}$$

En el mismo camino que lo realizado en la estimación -  $L^\infty$ , hallamos

$$\left\| \sum_{j \in J} |g(\dots, t)|_{m, q, Q_j} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq c_{13} \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}}.$$

Por otra parte, para  $j \in \bar{J}$ , usando las desigualdades de Minkowski y Hölder para  $A = G$ , obtenemos

$$\|\Pi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq c_{14} \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq m} \left( \int_{|y| \geq 2\epsilon} |\partial^\alpha k_\epsilon(y)|^{pq} dy \right)^{1/pq}.$$

$$\left\| \partial^\beta (v(D(z)) |\nabla D(z)| \frac{\partial r(t; Dz, 0)}{\partial z_1}) \right\|_{L^{\frac{pq-1}{pq}}(G)}$$

y por tanto

$$\left\| \sum_{j \in J} |g(\dots, t)|_{m, q, Q_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq c_{15} \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}}$$

De esta forma, obtenemos las deseadas estimaciones (IV.5.3) para  $p \in ]3/2, \infty[$ .

En el caso en el que suponemos que  $\psi$  tiene soporte compacto, puede ser probado el mismo resultado de manera muy similar usando el Corolario IV.3.1.

Procediendo como en la demostración del Lema - IV.5.1 obtenemos las estimaciones (IV.5.4)  $\square$

Nota IV.5.1. En la demostración del Lema IV.5.2 las hipótesis mínimas sobre la regularidad de  $\psi$  son que pertenece al espacio  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$  y tenga soporte compacto.  $\square$

#### IV.6. Propiedades de estabilidad del método

Vamos a estimar  $N_3(\cdot, t)$ . Para ello podemos escribirlo como

$$\begin{aligned} N_3(x, t) &= \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\varepsilon(x-r(t; \gamma_j, 0)) \frac{\partial r_j}{\partial \xi} d\xi \\ &\quad - \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\varepsilon(x-r^h(t; \gamma_j, 0)) \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} d\xi \\ &= \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) (k_\varepsilon(x-r_j) - k_\varepsilon(x-r_j^h)) \frac{\partial r_j}{\partial \xi} d\xi + \\ &\quad + \sum_{j \in \Lambda} \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) k_\varepsilon(x-r_j) \left( \frac{\partial r_j}{\partial \xi} - \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} \right) d\xi \\ &= N_3^1(x, t) + N_3^2(x, t) \end{aligned}$$

#### Estimaciones de $N_3^1(x, t)$

Para  $j \in \Lambda$ , desarrollamos  $k_\varepsilon(x-r_j) - k_\varepsilon(x-r_j^h)$  en un entorno de  $r_j(t)$  usando la fórmula de Taylor con resto integral

$$\begin{aligned} k_\varepsilon(x-r_j(t)) - k_\varepsilon(x-r_j^h(t)) &= \\ &= \left( \int_0^1 \nabla k_\varepsilon(x-r_j(t) + \theta(r_j^h(t) - r_j(t))) d\theta \right) \cdot (r_j(t) - r_j^h(t)) \end{aligned}$$

Denotamos por  $f_j(x, t)$  la función

$$f_j(x, t) = \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) (r_j - r_j^h) \int_0^1 \nabla k_\varepsilon(x-r_j + \theta(r_j^h - r_j)) d\theta \frac{\partial r_j}{\partial \xi} d\xi$$

Así, aplicando el Teorema IV.3.2 a  $N_3^1 = \nabla K * \sum_j f_j$  tenemos

$$(IV.6.1) \quad \|N_3^1(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_1 \left\| \sum_j f_j(\cdot, t) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, \quad p \in ]1, \infty[.$$

Evaluemos, primeramente,  $N_3^1(x, t)$  en norma  $L^p(\mathbb{R}^3)$  y en norma  $W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  para  $p \in ]1, \infty[$ . La demostración realizada en el siguiente Lema es similar a la utili

zada para el Método Vortex Puntual en 2-dimensiones -  
(ver [47]).

Lema IV.6.1.- Bajo las mismas hipótesis que en el  
Teorema de Convergencia, existe, para todo  
 $s \in ]0, 1[$ , una constante  $C_3(T, w_0, p)$  tal que

$$(IV.6.2) \quad \left\| N_3^1(\cdot, t) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_3 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left\| e(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \right)^{3/p^*} \left\| e(t) \right\|_{p, h, t}$$

donde  $p \in ]1, \infty[$  y  $0 \leq t \leq T$ .

Dem.-

Denotamos por  $\bar{f}_j$  la aplicación definida por

$$\bar{f}_j(x, t) = \int_0^1 \left| \alpha_j(\gamma(\xi)) (r_j - r_j^h) \int_0^1 \psi_\varepsilon(x - r_j + \theta(r_j^h - r_j)) d\theta \frac{\partial r_j}{\partial \xi} \right| d\xi$$

De esta forma tenemos

$$(IV.6.3) \quad \left\| \sum_{j \in \Lambda} f_j(\cdot, t) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq \left\| \sum_{j \in \Lambda} \bar{f}_j(\cdot, t) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

Primero consideramos el caso en que  $\psi$  tiene soporte compacto contenido en la esfera  $S(x_0; 1)$ . En este caso cada función  $\bar{f}_j(x, t)$  tiene soporte compacto. Para cada  $x \in \mathbb{R}^3$ , definimos el conjunto

$$J_x = \{ j \in \Lambda : x \in \text{supp}(\bar{f}_j(\cdot, t)) \}.$$

Si  $i \in J_x$  entonces se verifica

$$r_i(t) \cap S(x - x_0; \varepsilon + \left\| e(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}) \neq \emptyset$$

y además

$$Q_i(t) \subset S(x - x_0; \varepsilon + C_2 h + \left\| e(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}).$$

Como la medida de  $Q_i(t)$  es superior o igual a  $C_3 h^3$ , obtenemos que

$$\text{Card } J_x \leq C_4 \left( \frac{\varepsilon + h + \left\| e(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{h} \right)^3$$

Por tanto, se verifica que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_j \bar{f}_j(\cdot, t) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_j \bar{f}_j(x, t) \cdot 1_{\text{supp } \bar{f}_j} |^p dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} (\sum_j |\bar{f}_j(x, t)|^p) (\sum_j 1_{\text{supp } \bar{f}_j})^{p/p^*} dx. \end{aligned}$$

Por tanto, hallamos que

$$\begin{aligned} \text{(IV.6.4)} \quad \left\| \sum_j \bar{f}_j(\cdot, t) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} &\leq \\ &\leq c_4 \left( 1 + \frac{1}{h} (\varepsilon + \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}) \right)^{3/p^*} \left( \sum_j \|\bar{f}_j(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Por otra parte, se cumple

$$\begin{aligned} \|\bar{f}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\psi_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \int_I |\alpha_j(\gamma(\xi)) (r_j - r_j^h) \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi}| d\xi \\ &\leq \frac{c_5}{\varepsilon^{3/p^*}} \int_I |\alpha_j(\gamma(\xi)) (r_j - r_j^h) \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi}| d\xi, \end{aligned}$$

y como  $w_0$  tiene soporte compacto, aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} \left( \sum_j \|\bar{f}_j(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right)^{1/p} &\leq c_6 \frac{1}{\varepsilon^{3/p^*}} \left( \sum_j \int_I |\alpha_j(\gamma(\xi)) (r_j - r_j^h) \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi}| d\xi \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{c_7}{\varepsilon^{3/p^*}} (h^2 \int_I \left| \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi} \right| d\xi)^{1/p^*} \left( \sum_j h^2 \int_I |r_j - r_j^h|^p \left| \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi} \right| d\xi \right)^{1/p} \\ &\leq c_8 \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^{3/p^*} \|e(t)\|_{p, h, t} \end{aligned}$$

Esta acotación, junto con (IV.4.2), (IV.6.1), (IV.6.3) y (IV.6.4), nos proporciona la deseada estimación (IV.6.2).

Consideremos ahora el caso de una función cut-off más general que satisfaga (IV.4.1). Para todo  $z \in \mathbb{Z}^3$ , - hacemos

$$G_z = \{x \in \mathbb{R}^3, z_l \leq x_l \leq z_l + 1, l = 1, 2, 3\}.$$



Se verifica

$$|\psi(x)| \leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^3} \|\psi\|_{L^\infty(G_z)} 1_{G_z}$$

Denotamos por  $\bar{f}_j^z$  la función definida por

$$\bar{f}_j^z = \int_0^1 |\alpha_j(\gamma(\xi)) (r_j - r_j^h)| \int_0^1 1_{G_{z_\epsilon}}(x - r_j + \theta(r_j^h - r_j)) d\theta \frac{\partial r_i}{\partial \xi} d\xi$$

Claramente se cumple la desigualdad

$$\|\sum_j \bar{f}_j(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^3} \|\psi\|_{L^\infty(G_z)} \|\sum_j \bar{f}_j^z(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

Ahora, podemos aplicar a  $\bar{f}_j^z(\cdot, t)$  las acotaciones (IV.6.4) obtenidas para  $1_G$  (siendo  $1_G$  en este caso) con soporte compacto. Usando (IV.4.1), obtenemos:

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^3} \|\psi\|_{L^\infty(G_z)} \leq C_\gamma \sum_{z \in \mathbb{Z}^3} (1 + |z|)^{-\gamma} \leq C_\gamma, \gamma > 3$$

Por tanto, (IV.6.2) se verifica en el caso general.  $\square$

Como se verifica la acotación

$$\|\partial^\alpha \psi_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{\epsilon^{|\alpha| + 3/p^*}}$$

podemos, con una demostración idéntica a la del Lema anterior, establecer el siguiente Lema

Lema IV.6.2.- Bajo las mismas condiciones que en el Teorema de Convergencia, para todo  $p \in ]1, \infty[$ , existe alguna constante  $C = C(p, T, \epsilon_0) > 0$  tal que

$$(IV.6.5) \quad \|N_3^1(\cdot, t)\|_{m,p,\mathbb{R}^3} \leq \frac{C}{\epsilon^m} \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^{3/p^*} \|e(t)\|_{p,t,t}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$   $\square$

Lema IV.6.3.- Supongamos que la función cut-off  $\psi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$  satisface (IV.4.1). Supongamos, además, que (IV.4.2) se verifica. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:

(i) para todo  $s \in ]0,1[$ ,  $s = \frac{3}{p}$  y para alguna - constante  $C_s = C_s(p, T, w_0)$ , tenemos en  $t \in [0, T]$

$$(IV.6.6) \quad \begin{aligned} \|N_3^1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\leq \\ &\leq \frac{C_s}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^{3/p^*} \|e(t)\|_{p,h,t}, \end{aligned}$$

(ii) para todo  $p \in ]3/2, \infty[$  y alguna constante  $C_s = C_s(p, T, w_0)$ , tenemos

$$(IV.6.7) \quad \begin{aligned} \|N_3^1(t)\|_{p,h,t} &\leq \\ &\leq C_s \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^{3/p^*} \|e(t)\|_{p,h,t}. \end{aligned}$$

Dem.

Si aplicamos la desigualdad de interpolación de - Gagliardo-Nirenberg, entonces para todo  $s \in ]0,1[$  obtenemos

$$\begin{aligned} \|N_3^1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\leq \\ &\leq C_1 \|N_3^1(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^{1-s} \|N_3^1(\cdot, t)\|_{1,p,\mathbb{R}^3}^s, \quad s = 3/p, p > 3 \end{aligned}$$

y (IV.6.6) se sigue.

Dada una función  $f \in W^{k'+1,p}(\mathbb{R}^3)$  tal que  $p > 3/k'+1$ , podemos construir una aplicación lineal continua  $\Pi$  de  $W^{k'+1}(\mathbb{R}^3)$  en  $L^p(\mathbb{R}^3)$ . Usando resultados bien conocidos de la teoría de Elementos Finitos (ver [20]), hallamos

$$\|\Pi f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_2 h^{k'+1} \|f\|_{k'+1,p,\mathbb{R}^3}, \quad (k'+1) \cdot p > 3.$$

Por tanto, tenemos

$$\|\Pi f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_3 (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + h^{k'+1} \|f\|_{k'+1,p,\mathbb{R}^3})$$

En particular escogemos  $\Pi f$  de forma que la desigualdad siguiente se verifique

$$\|\Pi f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \geq \|f\|_{p,h,t}$$

Observemos que la siguiente aplicación lineal satisface las condiciones requeridas,  $s > \frac{1}{4}$

$$\Pi f(x) = h^{-s} \int_I f(\gamma_j) d\xi, \quad \text{cuando } x \in Q_j, j \in \Lambda.$$

Por tanto, usando el Lema IV.6.2, resulta inmediata el resultado (IV.6.7). □

Nota IV.6.1. - Si  $\psi \in W^{1,1}(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$  entonces las estimaciones (IV.6.7) son verificadas para  $p > 3$ .

Estimaciones de  $N_3^2(\cdot, x, t)$ . -

Estudiemos ahora las estimaciones de  $N_3^2$ .

Lema IV.6.4. - Supongamos que la función cut-off  $\psi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$ , Además supongamos que (IV.4.2) se verifica. Entonces para

$$s \in ]0, 1[ , p \in ]3/2, \infty[ , \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1, \frac{1}{q^*} + \frac{1}{p} = \frac{2}{3} \text{ y}$$

$t \in [0, T]$ , tenemos

$$(IV.6.8) \quad \|N_3^2(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|e(t)\|_{p,h,t} E^h$$

$$(IV.6.9) \quad \|N_3^2(\cdot, t)\|_{p,h,t} \leq C \|e(t)\|_{p,h,t} E^h$$

$$(IV.6.10) \quad \|N_3^2(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{\varepsilon} \|e(t)\|_{p,h,t} E^h$$

$$\text{donde } E^h = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^{3/q^*} + \\ + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \|e(t)\|_{L^\infty}\right)^{3/p^*} \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

Dem. -

Aplicando la fórmula de Green podemos escribir  $N_3^2$  como

$$(IV.6.11) \quad N_3^2(x, t) = \sum_{j \in \Lambda} \left[ - \int_1 \frac{\partial \alpha_j(\gamma(\xi))}{\partial x} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi} k_\varepsilon(x-r_j^h)(r_j-r_j^h) d\xi + \right. \\ \left. - \int_1 \alpha_j(\gamma(\xi)) \frac{\partial k_\varepsilon}{\partial x}(x-r_j^h) \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi}(r_j-r_j^h) d\xi \right] = A+B$$

De forma similar a lo realizado en el Lema IV.6.1 estimamos el término A. Discutamos brevemente las modificaciones. Hacemos

$$m_j = \int_1 \frac{\partial \alpha_j(\gamma(\xi))}{\partial x} \psi_\varepsilon(x-r_j^h) \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi}(r_j-r_j^h) d\xi .$$

Consideremos también  $\bar{m}_j$  definido como  $\bar{f}_j$  en el Lema IV.6.1.

Aplicando el Teorema IV.3.1. obtenemos

$$\|A\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_1 \left\| \sum_j m_j(\cdot, t) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq C_2 \left\| \sum_j \bar{m}_j(\cdot, t) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}^3$$

donde  $p \in ]3/2, \infty[$  y  $1/q = 1/p + 1/3$

Para cada  $x \in \mathbb{R}^3$  hacemos

$$I_x = \{ j \in \Lambda : x \in \text{supp}(\bar{m}_j(\cdot, t)) \} .$$

Es claro que

$$(IV.6.12) \quad \text{Card } I_x \leq C_3 \left(1 + \frac{\varepsilon}{h} + \frac{1}{h} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)$$

Los mismos argumentos dados en la demostración del Lema IV.6.1. prueban que, para  $\frac{1}{q^*} = 1 - \frac{1}{q}$ ,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_j \bar{m}_j(\cdot, t) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} &\leq c_4 (\text{Card } I_x)^{3/q^*} \left( \sum_j \left\| \bar{m}_j(\cdot, t) \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^3)} \right)^{1/q} \\
&\leq c_5 (\text{Card } I_x)^{3/q^*} \frac{1}{\epsilon^{3/q^*}} \left( \sum_j \left\| \frac{\partial^{\alpha_j}(\gamma(\xi))}{\partial x} (r_j - r_j^h) \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi} \right\|_{d\xi}^q \right)^{1/q} \\
&\leq c_6 (\text{Card } I_x)^{3/q^*} \frac{1}{\epsilon^{3/q^*}} \left( \max_j h^2 \int \left| \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi} \right| d\xi \right)^{1/q^*} \\
&\quad \cdot \left( \sum_j (h^2 \int \left| (r_j - r_j^h) \right|^p \left| \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi} \right| d\xi) \right)^{1/p} \\
&\leq c_6 (\text{Card } I_x)^{3/q^*} \frac{1}{\epsilon^{3/q^*}} h^{3/q^*} \|e(t)\|_{p, h, t} \\
&\leq c_7 \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^{3/q^*} \|e(t)\|_{p, h, t}
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$(IV.6.13) \quad \|A\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq c_8 \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^{3/q^*} \|e(t)\|_{p, h, t}, p \in ]3/2, \infty[.$$

Para estimar B, aplicamos las mismas técnicas que en la demostración del Lema IV.6.1. El término  $\frac{\partial r_j^h}{\partial \xi}$  es escrito como

$$\frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} = \frac{\partial r_j^h}{\partial \gamma_j^1} \cdot \frac{\partial \gamma_j^1}{\partial \xi}$$

Usando (IV.6.12), encontramos finalmente que

$$(IV.6.14) \quad \|B\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq c_9 \|e(t)\|_{p, h, t} \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^{3/p^*}$$

Así, (IV.6.13) y (IV.6.14) nos permite estimar  $N_2^3$  en la norma  $L^p(\mathbb{R}^3)$  con  $p \in ]3/2, \infty[$ .

$$\begin{aligned}
\|N_2^3(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} &\leq \\
&\leq c_{10} \|e(t)\|_{p, h, t} \left( \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^{3/p^*} \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^{3/q^*} \right)
\end{aligned}$$

Para establecer (IV.6.9) y (IV.6.10) usamos los mismos argumentos que en la demostración de los Lemas IV.6.2 y IV.6.3.

□

Estimaciones de M.-

Para completar el estudio de la estabilidad de nuestro esquema resta por estimar  $M(.,t)$ .

Lema IV.6.5.- En las hipótesis del Teorema de - - Convergencia, para  $t \in [0, T]$ , existe una constante  $C > 0$  tal que

$$(IV.6.15) \quad \|\nabla u_h(.,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)$$

Dem.-

Dado  $x \in \mathbb{R}^3$  y  $t \in [0, T]$ , consideramos el conjunto de índices  $J_1$  definido por

$$J_1 = \{j \in \Lambda : d(x, B_j(t)) \leq \varepsilon + a\}$$

donde

$$(IV.6.16) \quad a = \sup_{j \in \Lambda} \sup_{y \in B_j} |r(t; y, 0) - r_j^h| \leq c_1 h + \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

Es fácil demostrar que

$$\text{Card } J_1 \leq C_1 \left( \frac{\varepsilon + h + \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{h} \right)^3$$

descomponemos  $\nabla u_h$  en la forma

$$\begin{aligned} \nabla u_h &= \int_{\mathbb{R}^3} w(y,t) \frac{\partial k_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) dy + \\ &+ \sum_{j \in \Lambda} \int_{Q_j} v(D(z) |\nabla D(z)| \frac{\partial k_\varepsilon}{\partial x_i}(x-r(t; Dz, 0)) \frac{\partial}{\partial z_1} (r_j^h - r(t; Dz, 0)) dz + \\ &+ \sum_{j \in \Lambda} \int_{Q_j} \left( \frac{1}{h} \int_0^1 v(D(\tilde{y}_j^\varepsilon)) v(D(\tilde{y}_j^\varepsilon) |\nabla D(\tilde{y}_j^\varepsilon)| \frac{\partial k_\varepsilon}{\partial x_i}(x-r_j^h)) \frac{\partial r_j^h}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \right. \\ &\quad \left. - v(Dz) |\nabla Dz| \frac{\partial k_\varepsilon}{\partial x_i}(x-r(t; Dz, 0)) \frac{\partial r_j^h}{\partial \varepsilon} \right) dz \\ &= M_1 + M_2 + M_3 \end{aligned}$$

Usando el hecho que  $k \in B^\epsilon(\mathbb{R}^3)$  deducimos que  $M_1$  está acotado.  $M_2$  puede ser escrito en la forma

$$M_2 = - \sum_{j \in \Lambda} \int_{Q_j} \frac{\partial}{\partial z_1} (v(Dz) |\nabla Dz|) \frac{\partial k}{\partial x_i}^\epsilon(x-r(t; Dz, 0) + \\ + v(Dz) |\nabla Dz| \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial k}{\partial x_i}^\epsilon(x-r(t; Dz, 0)) (r_j^h - r(t; Dz, 0)) dz = M_2^1 + M_2^2$$

$M_2^1$  puede ser estimado en el mismo camino que lo desarrollado en el Lema IV.6.1, y usando (IV.5.17) obtenemos para  $s \in ]0, 1[$

$$(IV.6.18) \quad |M_2^1| \leq \frac{C_2}{\epsilon^s} (h + \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}) \leq C_3 \left(1 + \frac{1}{\epsilon^s} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)$$

Estimamos la parte de  $M_2^2$  correspondiente a  $J_1$ .

$$(IV.6.19) \quad |M_{2|J_1}^2| \leq C_4 (\text{Card } J_1) h^3 \frac{1}{\epsilon} (h + \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}) \leq \\ \leq C_4 \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^4$$

Para analizar  $M_2^2$ , en su restricción a  $J_2 = \Lambda - J_1$  utilizamos el Lema IV.3.2. cuando  $\psi \in W^{2, \infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{2,1}(\mathbb{R}^3)$  y verifica (IV.4.1) o cuando  $\psi \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^3)$  y tiene soporte compacto

$$(IV.6.20) \quad |M_{2|J_2}^2| \leq C_5 a \sum_{j \in J_2} \int_{Q_j} \frac{dy}{|x-r(t; y, 0)|^4} \leq C_6$$

El tercer término en la descomposición de  $\nabla u_n$  puede ser estimado en la siguiente forma

$$(IV.6.21) \quad |M_{3|J_1}| \leq C_7 h^2 (\text{Card } J_1) \left\| \frac{\partial k}{\partial x_i}^\epsilon \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \\ \leq C_8 \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^3 \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

Para estimar  $M_3$  en lo que corresponde a los índices  $J_2$

lo descomponemos en

$$M_3|_{J_2} = \sum_{j \in J_2} \int_{Q_j} v(D\bar{\gamma}_j) |\nabla \alpha(\bar{\gamma}_j)| \left( \frac{\partial k}{\partial x_i}^\varepsilon(x-r_j^h) - \frac{\partial k}{\partial x_i}^\varepsilon(x-r(t; Dz, 0)) \right) \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} dz +$$

$$+ \sum_{j \in J_2} \int_{Q_j} \left( \frac{1}{h} \int_1 \right) v(D\bar{\gamma}_j) |\nabla \alpha(\bar{\gamma}_j)| \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} d\xi - v(Dz) |\nabla Dz| \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial k}{\partial x_i}^\varepsilon(x-r(t; Dz, 0)) dz = M_3^1 + M_3^2$$

$M_3^1$  puede ser escrito como

$$M_3^1 = \sum_{j \in J_2} \int_{Q_j} v(D(\bar{\gamma}_j)) |\nabla \alpha(\bar{\gamma}_j)| \int_0^1 \nabla \frac{\partial k}{\partial x_i}^\varepsilon(x-r(t; Dz, 0) +$$

$$+ \theta(r(t; Dz, 0) - r_j^h)) d\theta(r(t; Dz, 0) - r_j^h) \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} dz$$

Por tanto, razonando como en el caso de  $M_2^2$  obtenemos

$$|M_3^1| \leq c_9 a \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \sum_{j \in J_2} \int_{Q_j} \frac{dy}{\|x-r(t; y, 0) - a\|^4} \leq$$

$$\leq c_{10} \left( \frac{a}{\varepsilon} + \frac{a^2}{\varepsilon^2} + \frac{a^3}{\varepsilon^3} \right) \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

De esta forma, tenemos

$$(IV.6.22) \quad |M_3^1| \leq c_{11} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \right)^3 \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

Finalmente, para estimar  $M_3^2$  remitimos a la Teoría de Elementos Finitos para hallar para  $p > 3$  y  $j \in J_2$ .

$$\left\| \frac{1}{h} \int_1 v(D(\bar{\gamma}_j)) |\nabla \alpha(\bar{\gamma}_j)| \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} d\xi - v(Dz) |\nabla Dz| \frac{\partial r_j^h}{\partial \xi} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq c_{12} h \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |w_0|_{1,p,\mathbb{R}^3}$$

Así para  $p > 2$  obtenemos



$$(IV.6.23) \quad |M_3^2| \leq c_{13} h \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|w_o\|_{1,p,\mathbb{R}^3} \left\| \frac{\partial k_\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^3)} \leq \\ \leq c_{14} \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

Combinando (IV.6.18) concluimos el deseado resultado (IV.6.15) □

Lema IV.6.6.- Bajo las hipótesis del Teorema de -  
Convergencia para  $t \in [0, T]$ ,  $p \in [1, \infty[$  y alguna  
constante  $C > 0$ , tenemos

$$(IV.6.24) \quad \|u_h(r(t; \cdot, 0), t) - u_h(r^h(t; \cdot, 0), t)\|_{p,h,t} \leq \\ \leq C \|e(t)\|_{p,h,t} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla r^h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right).$$

Dem.-

Utilizando la fórmula de Taylor con resto integral podemos escribir

$$u_h(r_i, t) - u_h(r_i^h, t) = \int_0^1 \nabla u_h(r_i^h + \theta(r_i - r_i^h), t) d\theta (r_i - r_i^h)$$

Por tanto, el resultado (IV.6.24) resulta inmediato a partir del lema IV.6.5 □

Nota IV.6.2.- Para las estimaciones de estabilidad -  
las hipótesis minimales sobre  $\psi$  son  $\psi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap W^{2,1}(\mathbb{R}^3)$   
y verifica (IV.4.1) o  $\psi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$  y tiene soporte -  
compacto. □

### 7. Demostración del Teorema de Convergencia

Para probar el Teorema de Convergencia comenzamos por estimar  $||\nabla r^h||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ .

Sea  $R > 0$  una constante fija y

$$T_\epsilon = \sup \{ t \in [0, T] ; ||e(t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq R\epsilon \}.$$

Posteriormente demostraremos que bajo nuestras condiciones  $T_\epsilon = T$ .

De (IV.2.22) se sigue que

$$\frac{d}{dt} ||\nabla r^h||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq ||u_h(\cdot, t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} ||\nabla r^h||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)},$$

entonces, usando (IV.6.15) tenemos

$$\frac{d}{dt} ||\nabla r^h||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C_1 (1 + ||\nabla r^h||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}) ||\nabla r^h||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}, t \in [0, T_\epsilon].$$

Por tanto, es fácil deducir de la anterior desigualdad no lineal (Gronwall) que  $\nabla r^h$  está acotado en norma  $L^\infty$  para un cierto tiempo  $T_R$  independiente de  $h$  y de  $\epsilon$ .  $T_R \leq T_\epsilon$ , suficientemente pequeño. Eligiendo la constante  $R$  adecuadamente podemos suponer, por simplicidad, que  $T_R = T_\epsilon$ .

Estimemos en primer lugar  $||e(t)||_{p,h,t}$  para  $p \in ]3/2, \infty[$ . Usando (IV.5.2), (IV.5.4), (IV.6.7), (IV.6.9), (IV.6.21) y (IV.4.2) resulta

$$||e(t)||_{p,h,t} \leq C_1 \left( \epsilon^n + \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}} + \int_0^t ||e(s)||_{p,h,t} ds \right), 0 \leq t \leq T_\epsilon.$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall obtenemos

$$(IV.7.1) \quad ||e(t)||_{p,h,t} \leq C_2 \left( \epsilon^n + \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}} \right), 0 \leq t \leq T_\epsilon.$$

Vamos, ahora, a estimar  $\|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$ ; usando (IV.5.1), (IV.5.3), (IV.6.2), (IV.6.6) y (IV.6.8) hallamos

$$\|u - u_h\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_3 \left( \epsilon^n + \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}} + \|e(t)\|_{p, h, t} \right), \quad 0 \leq t \leq T_\epsilon.$$

Se sigue de (IV.7.1) y (IV.4.2) que

$$(IV.7.2) \quad \|u - u_h\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_4 \left( \epsilon^n + \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}} \right),$$

donde  $p \in ]3/2, \infty[$ .

De forma similar tenemos para  $s \in ]0, 1[$

$$(IV.7.3) \quad \|u - u_h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C_s}{\epsilon^s} \left( \epsilon^h + \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}} \right).$$

Como se verifica que

$$\|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{h^{3/p}} \|e(t)\|_{p, h, t}$$

aplicando (IV.4.2) y (IV.7.1) y para  $p$  suficientemente grande obtenemos

$$(IV.7.4) \quad \|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C_5}{\epsilon^{3/p}} \|e(t)\|_{p, h, t} \leq \\ \leq \frac{C_6}{\epsilon^s} \left( \epsilon^n + \frac{h^m}{\epsilon^{m-1}} \right), \quad 0 \leq t \leq T_\epsilon$$

Vamos a probar que  $T_\epsilon = T$ . Como las funciones  $u(\cdot, t)$  y  $u_h(\cdot, t)$  son continuas y acotadas sobre  $\mathbb{R}^3$  uniformemente para  $t \in [0, T]$ , se sigue de la definición de  $T_\epsilon$  que

$$\|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = R\epsilon, \quad \text{si } T_\epsilon < T.$$

Escogemos  $h_0$  y  $\epsilon_0$  suficientemente pequeños tal que  $h < h_0$  y  $\epsilon < \epsilon_0$ . Como  $n \geq 2$ , usando (IV.4.2) y

(IV.7.4) obtenemos

$$\|e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < R\varepsilon.$$

Por tanto,  $T_\varepsilon = T$  cuando  $h < h_0$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Esto prueba el Teorema de Convergencia.  $\square$

Nota IV.7.1. Durante la redacción de este manuscrito, hemos recibido el trabajo de Greengard [32] donde se da una demostración de la convergencia del Método de Vortex con Filamentos. El estudio del Método seguido en este artículo es bastante diferente al nuestro. En particular, el término de deformación es evaluado mediante técnicas en diferencias finitas que se apoyan en una discretización en partículas del filamento, la cual tiene en cuenta la estructura del fluido.

Notemos que basándonos en las fórmulas de cubatura con líneas y en el uso de medidas que transportan los filamentos mediante el flujo hemos podido tratar implícitamente el término de deformación (Lema IV.2.1). En la práctica, nuestro método requerirá también una discretización de los filamentos. Al plantearse ésta a posteriori, y no desde el inicio del análisis como en [32], el término de deformación queda implícitamente evaluado en el esquema gracias a la propiedad de conservación dada por el Lema IV.2.1.  $\square$

ALGUNOS COMENTARIOS Y  
PROBLEMAS ABIERTOS

## ALGUNOS COMENTARIOS Y PROBLEMAS ABIERTOS

1°.- La vía diferente de abordar problemas de cubatura introducida en el Capítulo I deja abierta la puerta a posteriores profundizaciones en el tema, así como plantea relaciones de interés con otras teorías. En particular, la utilización de las fórmulas de cubatura sobre variedades de forma reiterada relaciona las fórmulas de cuadratura y las fórmulas de cubatura en cualquier dimensión entre sí. Como consecuencia, la teoría de polinomios ortogonales en una y varias variables quedan conectadas, lo que abre la posibilidad de otro tipo de enfoque a estos problemas. Además, el plantear de forma reiterada mediante fórmulas de cubatura sobre variedades la obtención de fórmulas con nodos como datos, reduce notablemente el grado de los sistemas no lineales asociados a la obtención directa de fórmulas de cubatura con nodos, simplificando notablemente el cálculo algebraico.

Una caracterización de las fórmulas de cubatura Gaussianas que tienen como datos variedades contenidas en la región de integración, extendida a todo tipo de funcionales, puede ser planteada en el mismo camino que lo realizado por Möller [44]. Conexiones con la Teoría de Interpolación en varias variables son posibles.

2°.-Una gran variedad de fluidos tridimensionales pueden ser simulados numéricamente mediante elementos de vortex Lagrangianos. Para fluidos simples, la representación en filamentos aparece como la más indicada. Si el fluido es más complejo, o si se desea una información más detallada de alguna zona del fluido, un gran número de elementos deberá ser requerido. Sin embargo, los elementos de vortex son necesarios únicamente donde la vorticidad es no nula, lo cual ocurre normalmente en una pequeña fracción del volumen total del fluido, lo que representa una economía considerable con respecto a otros métodos.

Esquemas más elaborados pueden reducir significativamente el coste de la simulación numérica: "Vortex-in-cell Method". En este método la velocidad no es calculada directamente mediante la Ley de Biot-Savart a partir de la vorticidad, sino usando una malla fija en la que, gracias a la ecuación de continuidad ( $\nabla \cdot u = 0$ ), hallamos la velocidad cinemáticamente a partir de

$$\nabla^2 u = -\nabla \times w,$$

vía la transformada rápida de Fourier. La convergencia y el análisis detallado de este método está aún por estudiar (ver [28] y [39] para referencias).

3°.-En problemas de evolución no lineales, nuevos métodos que permitan de forma eficaz la construcción de soluciones son necesarios.

Los Métodos de Vortex han sido importantemente desarrollados en los últimos años. Una de sus importantes características es la de respetar la geometría particular de cada fluido, lo que nos permite estar muy próximos de la solución. Esta propiedad queda manifiesta al encontrar nos en el análisis de nuestro método con las mismas propiedades que en el análisis de otros métodos no constructivos [2], [36] y [57] de la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones de Euler; como, por ejemplo, la explosión en tiempo finito de la solución.

La geometría particular de ciertos fluidos regidos por Leyes de Conservación (curvas de choque, rarefacción o de contacto) hace que los métodos de Vortex puedan ser especialmente indicados para la simulación de sistemas no lineales de Leyes de Conservación. Algunas experiencias, realizadas en el caso escalar, muestran sus excelentes resultados (ver [46] para referencias). Por tanto, podría plantearse la extensión de los resultados aquí expuestos (Capítulos II y IV) a sistemas no lineales de Leyes de Conservación como alternativa, quizás más física y geomé-

trica, a los esquemas en diferencias que son actualmente los más estudiados para este tipo de problemas.

4°.-Condiciones en los límites. Cuando en el fluido hay fronteras, el efecto de viscosidad debe ser incorporado a la ecuación. Aunque existen algunos métodos para tratar este tipo de situaciones, en general su estudio - esta abierto.

Algunos métodos han sido propuestos para recoger el fenómeno de la creación de vorticidad que se produce cerca de la frontera. Chorin y otros [19] desarrollan un método general en el que superficies de vortex (vortex sheets) son generadas en la frontera satisfaciendo la condicción de no penetración

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0,$$

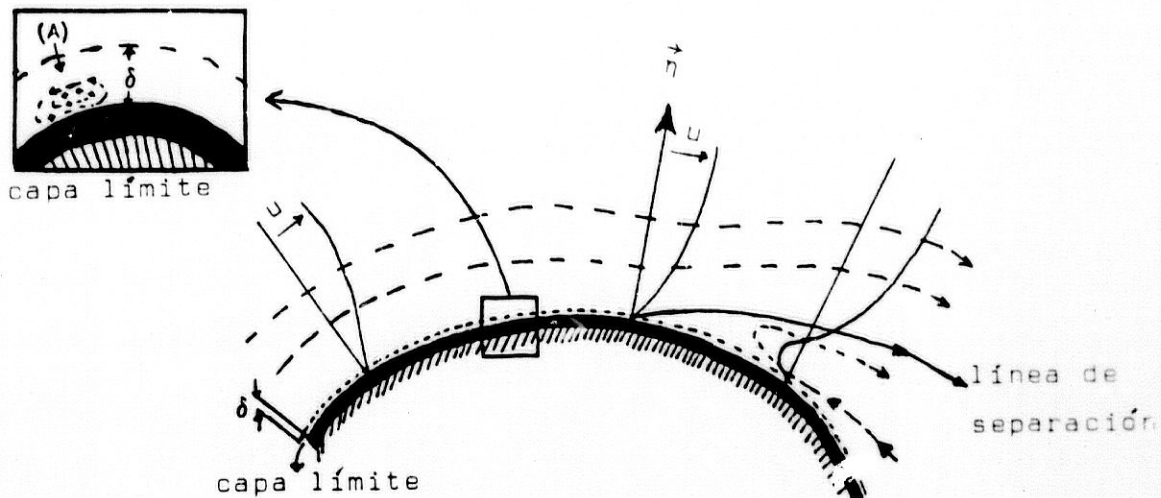
donde  $\vec{n}$  es la normal exterior a la frontera y donde una componente aleatoria es añadida a la velocidad de cada elemento para simular viscosidad (ver [16] y [18]).

En [14] Benfatto y Pulvirenti plantean la aproximación de la solución del problema de Stokes y Navier-Stokes, con condiciones frontera, mediante un algoritmo de creación de vorticidad, demostrando, mediante técnicas stocásticas y de análisis de Fourier, que la sucesión de vortex sheets, generada en la frontera converge a un límite, el cual describe el índice de producción de vorticidad cerca de la frontera.

Este proceso de generación de vorticidad está conectado con la transferencia de energía a pequeña escala [40]. Actualmente se está haciendo un esfuerzo para la comprensión de este tipo de fenómenos mediante técnicas analíticas.

5°.-Otros muchos problemas quedan abiertos en Mecánica de Fluidos. Los modelos conocidos no se ajustan a algunos fenómenos que son observados mediante la experiencia. Por ejemplo, la situación descrita por (A) en la figura





observable en las experiencias, no es admisible en la existencia de solución del problema de Navier-Stokes.

La existencia de la línea de separación- superficie de separación en tres dimensiones- (línea que delimita dos zonas de velocidad muy diferente en el fluido) no está aún demostrada.

Probablemente, la simulación de fluidos complejos - requerirá el estudio conjunto de diversos modelos acoplados, que se ajusten localmente a la fenomenología del fluido.

Situaciones tales como la descomposición de un elemento de vortex (vortex breakdown), (ver [15]); o la formación de singularidades cuando partimos de datos iniciales regulares, están siendo motivo de estudio actualmente.

Después de una dedicación casi exclusiva al estudio de fluidos dos-dimensionales se ha comenzado a hacer un esfuerzo de comprensión en el caso tridimensional, quedando abiertas aún muchas e importantes vías de estudio.

## BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

- [1] C. Anderson and C. Greengard, "On Vortex Methods", Siam J. Numer. Anal. Vol. 22, No. 3, 1985 pp. 413-440.
- [2] C. Bardos and U. Frisch, "Finite-time regularity - for bounded and unbounded ideal incompressible - fluids using Hölder estimates". Lecture Notes in Math. 565. Berlin 1976.
- [3] G.K. Batchelor, "An Introduction to Fluid Dynamics" Cambridge Univ. Press. 1967.
- [4] J.T. Beale "A convergent 3-D Vortex Methods with - grid-free stretching" (to appear)
- [5] J.T. Beale and A. Majda, "Vortex Methods I: Conver - gence in three dimensions", Math. Comp., v. 39, 1982 pp. 1-27 .
- [6] J.T. Beale and A. Majda, "Vortex Methods II: Higher order accuracy in two and three dimensions", Math. Comp., v. 39, 1982, pp. 29-52.
- [7] J.T. Beale and A. Majda, "Vortex Methods for fluid flow in two or three dimensions", Contemp. Math. v. 28. 1984 pp. 221-29.
- [8] J.T. Beale and A. Majda, "Rates of convergence for viscous splitting of the Navier-Stokes equations". Math. Comp., v. 37, 1981 pp. 243-59.
- [9] J.T. Beale and A. Majda. "High order accurate vortex methods with explicit velocity kernels". J. Compt. Phys. (To appear).

- [10] S.M. Belotserkovskiy and M.I. Nisht, "Nonlinear Aerodynamic characteristics of a Thin Airf of Arbitrary Plane Configuration". Fluid Mech. Soviet Research v.9 1980, pp. 1-13.
- [11] S.M. Belotserkovskiy and M.I. Nisht, "Calculation of Unsteady Flow Separation from a Thin Profile" Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. zhikh i gaza No 3. 1972
- [12] S.M. Belotserkovskiy and M.I. Nisht, "Unsteady non linear theory of Thin Wing of arbitrary plan configuration", Izv. Akad. Nauk SSSR mekh Zhikh i gaza, N. 4 1974.
- [13] S.M. Belotserkovskiy. "Study of the unsteady - aerodynamics of lifting surfaces using the computer", Ann. Rev. Fluid Mech. v.9, 1977, pp. 469-94.
- [14] G. Benfatto and M. Pulvirenti, "Generation of - Vorticity Near the Boundary in planar Navier-Stokes Flows", Comm. Math. Phys. 96, 1984, pp. 56-95.
- [15] A. Chorin, "The evolution of a turbulent vortex" Comm. Math. Phys, v. 83 pp. 517-35.
- [16] A. Chorin, "Vortex models and boundary layer - instability", SIAM J. Sci. Stat. Compt, v. 1, - 1980, pp. 1-21.
- [17] A. Chorin, "Numerical study of slightly viscous flow", J. Fluid Mech. 57. 1973, pp. 785-796.
- [18] A. Chorin and J. Marsden, A. Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1979

- [ 19 ] A. Chorin, T. Hughes, M. McCracken and J. Marsden, "Product formulas and numerical algorithms", *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 31, 1978, pp. 205-56.
- [ 20 ] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method For Elliptic Problems, Nort Holland, Amsterdam, 1978.
- [ 21 ] G.H. Cottet, Methodes particulaires pour l'equation d'Euler dans le plan, These du 3<sup>eme</sup> cycle, Université P. et M. Curie, Paris, 1982.
- [ 22 ] G.H. Cottet, "On the convergence of Vortex Methods in two and three dimensions" (to appear).
- [ 23 ] G.H. Cottet and S. Gallic, "A Particle Method to solve Transport-Diffusion equations Part I: The linear case", R.I. n° 115, 1984, C.M.A. Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.
- [ 24 ] G.H. Cottet and S. Gallic, "A Particle Method to solve Transport-Difusion equations Part II: The Navier-Stokes case" (In preparation).
- [ 25 ] G.H. Cottet and P.A. Raviart, "Particle Methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson equations" *SIAM J. Numer. Anal.* v. 21 1984, pp. 52-76.
- [ 26 ] G.H. Cottet and P.A. Raviart, "Partice-in-cell Methods for the Vlasov-Poisson equations" (to appear).
- [ 27 ] G.H. Cottet, "Convergence of a Vortex in cell Method for the two dimensional Euler equations" R.I. n° 108, 1984. C.M.A. Ecole Polytechnique. Palaiseau.

- [28] B. Couet, O. Buneman and A. Leonard, "Simulation of three-dimensional incompressible flows with a vortex-in-cell method", J. Comput. Phys. 39, - 1981, pp. 305-28.
- [29] P.J. Davis and P. Rabinowitz, Methods of Numerical Integration, Academic Press, 1975 and 1984.
- [30] D. Durr and M Pulvirentti, "On Vortex Flow in Bounded Domains". Commun. Math. Phys. v. 85, 1982, - pp. 265-73.
- [31] H. Engels, Numerical Quadrature and Cubature, Academic Press, London, 1980.
- [32] C. Greengard. "Convergence of the vortex filament method" (to appear).
- [33] O Hald and V. del Petre, "Convergence of Vortex - Method for Euler's equations". Math. Comp. v. 32 1978, pp. 791-809.
- [34] O. Hald, "The convergence of vortex methods II", SIAM J. Numer. Anal. v. 16, 1972, pp. 296-305.
- [35] K. Jetter, "Some Contributions to Bivariate - Interpolation and Cubature. (to appear).
- [36] T. Kato, "Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in  $\mathbb{R}^3$ " J. Funct. Anal. v. 9 1972, pp. 296 305.
- [37] V.I. Krylov, Approximate Calculation of Integrals. The Macmillan Company (1962).
- [38] A. Leonard, "Numerical simulation of interacting three-dimensional vortex filaments" Proc. 4th Internat. Conf. Numer. Methods Fluid Dynamic, Lecture Notes in Physics v. 35, Springer-Verlag, - New York, 1975, pp. 245-49.

- [39] A. Leonard, "Vortex methods for flow simulations", J. Comput. Phys, v. 37, 1980, pp. 289-335.
- [40] A. Leonard, "Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements" Ann. Rev. Fluid Mech, 1985 v. 17 pp. 523-59.
- [41] C. Marchioro and M. Pulvirenti, "Hydrodynamics in two dimensions and vortex theory", Comm. Math. - Phys., v. 84, 1982, pp. 483-503.
- [42] C. Marchioro and M. Pulvirenti, "Euler evolution for singular initial data and Vortex Theory", Comm. Math. Phys, v. 91, 1983, pp. 563-72.
- [43] H.M. Moller, "Kubatur-formeln mit minimaler Knotenzahl". Num. Math. v. 25, 1976, pp. 185-200.
- [44] H.M. Moller, "Lower Bounds for the number of nodes in cubature formulae". Birkhauser Verlag, ISNN - vol. 45 pp. 221-230. 1978.
- [45] V. Ramírez and J. Soler, "Algunos aspectos de las fórmulas de cubatura con rectas. Fórmulas Gaussianas. Actas VII CEDYA, Granada, 1984.
- [46] P.A. Raviart, "Particle approximation of first order systems", (to appear).
- [47] P.A. Raviart. "An analysis of particle methods". - CIME Course, Como, Italy, 1983.
- [48] L. Roshenhead, "The point vortex approximation of a vortex sheet". Proc. Roy. Soc. London, Ser A. v. 134, 1932, pp. 170-92.
- [49] H.J. Schmid, "On cubature formulae with a minimal number of knots", Numer. Math. v. 31, 1978, pp. 281-97. (Ver para otras referencias).

- [ 50] H.J. Schmid, "On Gaussian cubature formulae of degree  $2k-1$ ", Birkhauser Verlag, ISNM v. 45, 1978, pp. 252-63.
- [ 51] J. Soler "On cubature with a minimal number of lines" (to appear).
- [ 52] J. Soler, "An analysis of Element Methods for linear hyperbolic equations and first order systems" (to appear).
- [ 53] J. Soler, "Vortex filament method", (to appear)
- [ 54] J. Soler, "A Vortex filament method using splitting algorithm for solving the three-dimensional Navier Stokes equations" (to appear).
- [ 55] J. Soler, "Convergence of the Contour Dynamics Methods" (to appear).
- [ 56] E.M. Stein, "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions", Princeton University Press, Princeton N.J. 1970.
- [ 57] R. Teman, "Local existence of  $C^\infty$ -solutions of the Euler equations of incompressible perfect fluids" in Turbulence and the Navier-Stokes Equations, Springer-Verlag, New York, 1976, pp. 184-94.
- [ 58] R. Teman, The Navier-Stokes Equations, Nort-Holland Amsterdam, 1977.