UNIVERSIDAD DE GRANADA

**Facultad de Ciencias de la Educación**

**Departamento de Didáctica de la Matemática**

**Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación**

**Tesis Doctoral**

# LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA DE 1º DE BACHILLERATO

**María Fernanda Vargas González**

**Granada, 2020**

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: María Fernanda Vargas González
ISBN: 978-84-1306-605-9
URI: http://hdl.handle.net/10481/63624

Este trabajo de tesis doctoral se realizó dentro del grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática. *Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada*, del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM193). Además, se realizó en el marco de dos proyectos financiados por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España: el Proyecto I+D+I EDU2015-70565-P, titulado "Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares", y el Proyecto I+D+I PCG2018-095765-B-100, titulado "Competencia profesional del profesor en formación inicial y educación STEM".

Finalmente, como parte de la financiación debe señalarse que, la Universidad de Costa Rica le adjudicó una beca a la doctoranda para que realizara los estudios de Maestría y Doctorado en la Universidad de Granada.

*A mi esposo, por darme su apoyo incondicional en cada meta que me propongo, sin su amor y paciencia no lo hubiese logrado, esto es de ambos.*

*A mis padres que son el motor de mi vida.*

# Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis directores Juan Francisco y José Antonio, sin su guía esto no hubiese sido posible. Gracias por toda su entrega y compromiso con el trabajo, por su comprensión y paciencia. Por todo el conocimiento que compartieron conmigo, lo que he aprendido va más allá de lo académico. Gracias por siempre tener las palabras correctas que me animaban a seguir trabajando, pero sobre todo por la cercanía y amabilidad que siempre me mostraron. Sin duda fui muy afortunada al vivir este proceso en compañía de ambos.

Agradezco también a la Universidad de Costa Rica, por confiar en mí y apoyar mi formación otorgándome la beca que hizo posible que realizara tanto la Maestría como el Doctorado.

Gracias a mi familia, por siempre estar para mí y apoyarme cada día en estos cuatro años. Porque a pesar de la distancia siempre los sentí cerca, vivieron este proceso a mi lado y no saben lo que eso significó.

A todas las personas lindas que tuve la dicha de conocer en este proceso y que siempre estuvieron pendiente de mi trabajo. Especialmente a Mariló, Carmen, mis ticos; gracias por estar siempre ahí dándome ánimo y orientación en cada una de las etapas del trabajo, pero sobre todo por estar a mi lado a lo largo de toda esta experiencia.

También, agradecer a todos y cada uno de los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática, por compartir su conocimiento y contribuir de una u otra forma en la realización de este trabajo. Además, a los estudiantes del Máster y a los docentes de matemática que se tomaron la molestia de responder a los cuestionarios, permitiendo así la realización de esta investigación. Sin su colaboración esta tesis no sería la misma.

# Índice de contenidos

# Índice de tablas

# Índice de figuras

# Presentación

La Didáctica de la Matemática, como práctica investigativa en Educación Matemática, "se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas" (Rico et al., 2002, p. 37)[1] y surge por la necesidad de entender, explicar y solucionar los distintos problemas que ocurren en dichos procesos. Investigar en Educación Matemática no sólo supone resolver problemas de aprendizaje, debe entenderse que el proceso va más allá, englobando la problemática desde una perspectiva más amplia en la que además del estudiante, se involucra el profesor, los recursos, el contexto y muchos otros aspectos sociales y psicológicos.

En este trabajo de tesis centramos nuestra atención en el docente de matemáticas y en los libros de texto. Particularmente en el significado que ambos agentes expresan sobre el concepto de derivada de una función en un punto. Como se detallará más adelante, las dificultades puestas de manifiesto entorno a este concepto hacen que resulte importante estudiar el significado que expresan al respecto y que, potencialmente discutirán y construirán con los estudiantes en el aula.

El primer acercamiento con la temática se tuvo durante el curso académico 2016/2017 con la realización del Trabajo Fin de Máster, para ese entonces se abordó un estudio con 37 futuros docentes, cuyos resultados pusieron de manifiesto la existencia de significados parciales de la derivada. Este primer contacto con el tema aumentó nuestro interés en él, pues se identificaron aspectos que requerían de una mayor profundización y análisis. Además, con la finalización de dicho trabajo se plantearon una serie de cuestiones abiertas que consideramos oportuno abordar.

Por lo tanto, en esta tesis se pretende analizar el significado que dan docentes de 1º de Bachillerato a la noción de derivada, para compararlo con el que ponen de manifiesto docentes en formación. Asimismo, y dado el extendido uso del libro de texto como herramienta de planificación docente, analizamos también el significado de derivada que

[1] Para citas y referencias hemos utilizado las normas APA en su séptima edición (American Psychological Association, 2020).

estos ponen de manifiesto, e intentamos identificar relaciones con lo que expresan los docentes. De esta forma, el trabajo planteado para esta tesis lo componen tres estudios que pueden entenderse por separado: uno con docentes en formación, otro con docentes que ya imparten lecciones y un tercero con libros de texto.

Con el objetivo de facilitar la lectura y presentación de esta memoria, decidimos separar los resultados de cada fase o estudio, organizando esta memoria en 8 capítulos. En el primer capítulo, se describen las tres áreas problemáticas en las que se enmarca esta tesis: (a) la derivada de una función en punto, con el foco en el docente; (b) el significado de un contenido matemático escolar y (c) las tareas escolares propuestas en los libros de texto. Además, se presentan algunos resultados que se han obtenido en otras investigaciones respecto a cada una de ellas. El capítulo finaliza con el planteamiento de los objetivos propuestos.

En el segundo capítulo se describen los fundamentos teóricos empleados para el análisis y la interpretación de los datos. Para ello describimos el Análisis Didáctico, como elemento que vertebra del marco teórico a utilizar. Posteriormente abordamos algunas ideas generales sobre el significado desde la filosofía y psicología, que ha tenido alguna influencia en la noción de significado de un contenido matemático escolar que adoptamos en esta tesis. Adicionalmente, incorporamos algunos aspectos necesarios para profundizar en el análisis de los razonamientos y las tareas escolares.

En el tercer capítulo, se presentan los aspectos metodológicos para el desarrollo del trabajo. En primer lugar, se plantea el diseño y alcance de la investigación y, posteriormente, se presentan las características metodológicas de las tres fases desarrolladas a lo largo del trabajo. Incluyendo en cada una: la muestra, la recogida de datos y el tipo de análisis desarrollado.

En el cuarto capítulo se exponen los resultados obtenidos tras la realización de la fase 1, un estudio realizado con docentes en formación. En el quinto, se detallan los resultados obtenidos tras el análisis de las tareas propuestas en 5 libros de texto de 1º de Bachillerato (fase 2). En el sexto capítulo se abordan los resultados de la fase 3, en el cual se trabajó con docentes de matemática de Andalucía. Y en el séptimo, se desarrolla una comparación de los resultados obtenidos en las tres fases.

Finalmente, el capítulo ocho recoge algunas conclusiones generales de cada fase, así como lo que constituiría el aporte del estudio en general. Asimismo, se plantean algunas limitaciones y lo que podrían ser futuras líneas de investigación.

# CAPÍTULO 1

# Planteamiento del problema

En este primer capítulo describimos el problema de investigación, para lo que presentamos primero el área de la Didáctica de la Matemática en la que se ubica el trabajo; seguidamente describimos la problemática y algunos de sus antecedentes; para finalmente, delimitar el problema de investigación presentando los objetivos propuestos para esta tesis.

## 1.1. Pensamiento Matemático Avanzado

En el año 1985, dentro del grupo *Psychology of Mathematics Education* (PME), se conformó un subgrupo de trabajo cuyo objetivo era profundizar en temáticas referentes al proceso cognitivo que ocurre durante los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo infinitesimal. Hasta ese momento las investigaciones en procesos cognitivos estaban enfocadas en los errores y dificultades que manifestaba el alumnado, y principalmente en temas de Educación Primaria; sin embargo, con la creación de este subgrupo, se inicia el estudio de lo que llamaron el Pensamiento Matemático Avanzado (Azcárate y Camacho-Machín, 2003).

Esta designación ha generado ciertas interrogantes, particularmente, acerca de si el término avanzado hace alusión a la matemática o al pensamiento (Azcárate y Camacho-Machín, 2003); además sobre lo que implica ser avanzado, pues suponer su existencia significa admitir que también hay un pensamiento matemático elemental, pero ¿qué es elemental en matemática? (Edwards et al., 2005). Por ello algunos autores se han preocupado por establecer algunos rasgos o características para aclarar estos aspectos.

Azcárate y Camacho-Machín (2003) señalan que hay una clara diferencia tanto en la complejidad de los contenidos como en los procesos involucrados en uno u otro pensamiento, destacando la abstracción, definición, demostración y formalización, como procesos que cobran mayor sentido en las matemáticas superiores. Además, comentan que, aunque estos procesos pueden no ser exclusivos del Pensamiento Matemático Avanzado, el papel que desempeñan es distinto; pues en las matemáticas elementales los objetos suelen describirse, mientras que en las matemáticas avanzadas las definiciones son necesarias para construir algunas propiedades.

Lo anterior coincide con lo expuesto por Tall (1992) quien afirma que el paso a un pensamiento matemático más avanzado es una transición difícil, pues se parte de una posición en la que los conceptos tienen una base intuitiva, fundada en la experiencia, a una donde estos se especifican mediante definiciones formales y sus propiedades son reconstruidas por medio de deducciones lógicas. Entonces, ¿cómo se define el Pensamiento Matemático Avanzado? Puede entenderse como aquel pensamiento que requiere de un razonamiento deductivo y riguroso, el cual se emplea con nociones matemáticas que no son totalmente accesibles para nosotros a través de nuestros cinco sentidos (Edwards et al., 2005).

También Harel y Sowder (2005) argumentan que un pensamiento matemático puede considerarse avanzado si implica al menos una de las siguientes tres condiciones, que lo caractericen como un obstáculo epistemológico:

- Tener rastros en la historia de las matemáticas
- Producir resultados adecuados en algunos contextos, pero que a su vez provoque conflicto en otros contextos diferentes.
- Y que al establecer un nuevo conocimiento esto no implique la ruptura del conocimiento anterior.

El término avanzado, ya se refiera a la matemática o al pensamiento, desde ambas perspectivas, la derivada forma parte del objeto de estudio de este campo de estudio, tanto por ser parte de las matemáticas superiores, como por los distintos obstáculos que su aprendizaje supone. En el siguiente apartado presentamos algunas dificultades que la investigación ha puesto de manifiesto entorno a esta noción, así como otros aspectos involucrados en su proceso de enseñanza y aprendizaje, que constituyen la base del problema de investigación de esta tesis.

## 1.2. Área problemática

La investigación relacionada con los contenidos matemáticos estudiados en cursos de cálculo ha evidenciado la gran dificultad que estos suponen para el estudiantado (p. e. Fuentealba, Badillo y Sánchez-Matamoros, 2019; Fuentealba, Badillo, Sánchez-Matamoros, et al., 2019; García-García y Dolores-Flores, 2019). Algunos investigadores consideran que parte de los problemas para entender estos contenidos tiene que ver con la forma en la que se enseñan. En términos generales, el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente cuando se trabajan conceptos de cálculo, suele basarse en una manipulación carente de sentido, transformando o reduciendo las matemáticas a reglas y algoritmos. Cabe preguntarse ¿qué implicación tiene esto para el significado que se le da a la matemática? (Kilpatrick et al., 2005). Es decir, ¿cómo se perciben y comprenden los contenidos matemáticos?

Precisamente, en este trabajo centramos nuestra atención en el significado que se le da a la derivada de una función en un punto. Nuestro interés en dicha noción se debe a que es un contenido fundamental para el estudio de matemáticas superiores y esta es considerada un desafío cognitivo debido a las múltiples dificultades puestas de manifiesto (Fuentealba et al., 2016).

Para entender y mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, es necesario analizar los elementos didácticos relacionados con estos procesos, así como los agentes relacionados con ellos. De todos los agentes que forman parte en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas –docente, estudiante, materiales utilizados, así como las interacciones entre ellos (Pepin y Haggarty, 2001) –, en este trabajo de tesis centramos la atención en dos de ellos: el docente y los libros de texto.

De este modo, las áreas en las que se enmarca nuestro problema de investigación son:

- La dificultad para comprender la noción de derivada, con foco en el docente.
- El significado de los contenidos matemáticos escolares.
- El papel de las tareas y libros de texto escolares.

A continuación, presentamos brevemente estos elementos y, posteriormente mostramos algunos antecedentes de cada uno de ellos, lo cual nos permite visualizar lo que se ha hecho al respecto, para de este modo ampliar el panorama en cuanto a la problemática.

### *1.2.1. Dificultad para comprender la noción de derivada*

La baja comprensión que tienen los estudiantes sobre los contenidos del cálculo diferencial preocupa a docentes e investigadores de distintas partes del mundo (Epstein, 2013). Los estudios han mostrado que incluso aquellos estudiantes con buenas calificaciones manifiestan una comprensión débil de los tópicos tratados en el curso. Esta dificultad ha generado desmotivación para seguir estudiando matemáticas o carreras afines (Bressoud et al., 2013). Loa anterior ha aumentado el interés en realizar investigaciones que abordan el conocimiento sobre el cálculo en el primer año universitario, respecto a sus conceptos fundamentales: límites, derivadas, series, integrales, entre otros (p. e. Bressoud et al., 2013; Jones, 2018; Oehrtman, 2009; Roh, 2008; Sofranas et al., 2015).

Particularmente, la derivada es un concepto básico y transversal en los currículos universitarios, ya que forma parte de la base de todos los cursos avanzados de matemáticas. Su relevancia está relacionada con la amplia gama de problemas en cuya solución se involucra (Zengin, 2018). Sin embargo, su compresión resulta compleja, debido a las diferentes perspectivas que puede adoptar dicho concepto (Sánchez-Matamoros, 2014). Aunque la problemática no es nueva, sigue siendo un reto en la educación matemática, y generando preocupación, dado el bajo rendimiento que se alcanza en los cursos de cálculo (Fuentealba et al., 2018).

La investigación ha mostrado que una de las principales causas de estas dificultades tiene que ver con una enseñanza algorítmica, en donde las reglas se conocen, pero no su significado (Fuentealba et al., 2018). De esta forma, el alumnado es capaz de resolver problemas que involucren algoritmos o reglas de derivación, pero presentan dificultades cuando tienen que manejar y comprender el significado de derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2008). Asimismo, la forma de enseñanza ha provocado que incluso estudiantes sobresalientes tengan una predilección por técnicas algebraicas, inclusive cuando estas son inapropiadas (García-García y Dolores-Flores, 2019).

La problemática descrita ha sido abordada de distintas maneras: por un lado, algunos autores se han enfocado específicamente en el proceso de enseñanza, tratando de validar metodologías que promuevan y faciliten una mejor comprensión de dicho concepto (p. e., Font, 2005; Maschietto, 2004). En otros casos, los investigadores han centrado su interés en el profesorado, mostrando como estas dificultades de comprensión sobre la derivada no son exclusivas del estudiante y que por el contrario se extienden a los docentes (p. e., Badillo et al., 2011; Noh y Kang, 2007). Algunos autores señalan que, por lo general, el profesorado conoce los hechos, conceptos y procedimientos que enseñan, pero la comprensión de la base conceptual suele ser débil, lo que les dificulta aclarar ideas o, al igual que el alumnado, manifiestan algunas dificultades para resolver problemas que involucran más que cálculos rutinarios (Tatto y Senk, 2011); es decir, parece haber una mayor dificultad con aquello que requiere de una verdadera comprensión o significado de los contenidos.

Esto merece especial atención, pues diversos estudios reconocen la relación existente entre la forma en la que los docentes conciben las matemáticas y su capacidad para enseñarlas adecuadamente (Hill et al., 2007; Rivkin et al., 2005) lo cual se ha vinculado con el desempeño de sus estudiantes (p. e., Byerley y Thompson, 2017; Hill et al., 2005; Rowan et al., 2002). De ahí la importancia de trabajos en los que se aborde la comprensión de las matemáticas por parte de docentes, pues nos permite, de alguna manera, explicar los logros de los estudiantes, y así tomar decisiones oportunas para promover un mejor aprendizaje (Hine, 2015).

### *1.2.2. Significado de contenidos matemáticos escolares*

Con la intención de abordar parte de la problemática dada entorno a la comprensión de la derivada, en esta tesis nos centramos en los significados. Desde sus inicios, uno de los intereses de la Didáctica de la Matemática ha sido identificar el significado que el alumnado le atribuye a los distintos términos, conceptos y símbolos matemáticos, así como en la construcción de dichos significados (Godino, 2018). De hecho, Balacheff (1990) afirma que el significado es un tema central de la Didáctica de la Matemática, manifestando que un problema es una problemática de investigación en la enseñanza de la matemática, si está específicamente relacionado con el significado matemático de los estudiantes.

Ahora bien, el desarrollo histórico de las matemáticas y su funcionalidad ha hecho que su utilidad se visualice en otras áreas como la física o la ingeniería, limitando muchas veces la enseñanza de la matemática a su "forma pura", centrándose en una manipulación de fórmulas y reglas. Esto ha dado a entender que la matemática es "teoría", considerando erróneamente que damos significado a un concepto cuando escribimos su definición (Kilpatrick et al., 2005), como si las aplicaciones de la matemática fueran cosa de otra disciplina. Con esto no queremos decir que se trate entonces de darle importancia únicamente a las aplicaciones, pues del mismo modo que la teoría no dota de significado un concepto, tampoco lo hacen solo sus aplicaciones. Por ello, tanto las aplicaciones como las definiciones deben involucrarse al construir el significado de las matemáticas (Kilpatrick et al., 2005).

Thompson (2016) fundamenta que el significado se puede entender como algo personal, tratándose de aquello que viene a la mente del individuo al pensar en una idea o contenido matemático; lo que interpreta y es capaz de hacer con ello. Tal como comentaremos más adelante, Thompson considera que el significado y la comprensión están estrechamente relacionados. De hecho, define significado como las implicaciones que movilizan la comprensión. De esta forma, centrarse en los significados permite entender la forma en la que un concepto matemático es comprendido. Aunque, lo mejor es decir que tendremos una idea del significado que ese concepto tiene para el individuo, pues el significado y sus conexiones con otros significados, hacen que este sea sensible al contexto y al momento en el que se utiliza (Thompson, 2016).

Byeler y Thompson (2017) señalan que los significados pueden ser más o menos productivos (correctos, en términos valorativos), pero que siguen siendo significados, por lo que centrar la atención en estos no consiste en estudiar si se dominan o no los hechos matemáticos, sino en cómo se entienden. Tal como destaca Thompson (2013), en educación matemática, atender a los significados no tiene relevancia si el fin último es enseñar procedimientos; pero si el objetivo es que se desarrollen conocimientos matemáticos útiles, los significados se vuelven primordiales. Además, Thompson (2013) considera que una de las razones del fracaso en matemática puede estar relacionada con la falta de atención sistemática y cultural al significado y su coherencia; pues como señalamos anteriormente existen significados "erróneos", que pueden generar un proceso de enseñanza y aprendizaje disfuncional de significados.

Biehler (2005) destaca que los docentes son uno de los agentes más importantes en la construcción de significados; menciona que, si el docente posee significados ricos, estará en mejores condiciones de ofrecer una educación de calidad, mientras que si sus significados son vagos esto lo conducirá posiblemente a una enseñanza tradicional. De forma similar, Thompson y Milner (2019) enfatizan en que los estudiantes se benefician cuando sus docentes tienen significados ricos y coherentes con el resto de las ideas que enseñan. De ahí la relevancia del significado que los contenidos matemáticos tienen para el profesorado. Además, existe evidencia empírica de que los significados matemáticos del docente se alinean con los de los estudiantes incluso en aquello que no se explicita (Thompson, 2013). Pues los significados matemáticos del profesorado constituyen las imágenes de las matemáticas que estos enseñan y que intentan que sus estudiantes tengan, por lo que de alguna manera guían su instrucción; de ahí la importancia de estudiarlos (Thompson, 2013).

Pese a su relevancia, la investigación sobre significados es poco usual; de hecho, hay escaso conocimiento sobre el significado que los docentes de secundaria dan a los contenidos que enseñan (Byeler y Thompson, 2017). Thompson (2016) indica que la mayoría de los estudios suelen centrarse en el conocimiento y rendimiento del docente en distintos tópicos; sin embargo, afirma que "el conocimiento matemático que más importa para los maestros reside en los significados matemáticos que estos tienen" (p. 437). De ahí que los estudios deberían centrarse en los significados, ya que entender los significados con los que operan los docentes, nos permite descubrir fuentes importantes de decisiones y acciones que el docente toma en la instrucción (Thompson, 2016). Asimismo, nos posiciona para poder ayudar a mejorar la práctica, pues ayuda a construir puentes entre lo que el docente sabe, lo que enseña y de esta forma cómo lo aprende el estudiante (Thompson, 2013).

### *1.2.3. El papel de las tareas y libros de texto*

Al igual que los docentes, otro agente que tiene gran relevancia en la construcción de los significados y la comprensión es el libro de texto. Este ha ocupado un lugar importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática debido a su uso como material de consulta, registro de actividades de los estudiantes, propuesta de ejercicios y problemas, así como por ser un organizador de los contenidos (González y Sierra, 2004). De hecho, se ha constatado que la mayoría de los docentes emplean los libros de texto como la principal herramienta para planear sus clases, convirtiéndose así en una fuente tanto de contenido como de estilo pedagógico (Pepin y Haggarty, 2001).

Aunque la mayoría de los libros son creados pensando en el estudiante, gran parte del uso suele dárselo el docente. Según el Estudio del 2007 *Trends in International Mathematics and Science Study* (*TIMSS)* solo un 6% de los docentes no utiliza libro de texto (Vicente et al., 2018). Por lo que resulta importante estudiar y analizar el tipo de oportunidades de aprendizaje que esta herramienta proporciona, así como el significado de los contenidos matemáticos que ponen de manifiesto. Tal como lo comenta Howson (2005) los libros dan un mensaje que suele ser escuchado en muchas aulas, por lo que su estudio es de gran valor.

Desde el punto de vista de la Educación Matemática, el análisis de libros de texto es una línea de investigación que ha ido cobrando fuerza en los últimos años. Se considera que analizar los libros de texto nos permite comprender la práctica docente, así como el proceso de aprendizaje (Pepin y Haggarty, 2001). Su notorio crecimiento generó que en el 10º *International Congress on Mathematical Education* (ICME-10) se dedicara por primera vez un grupo de discusión a los libros de texto y que posteriormente se contemplara también en otras actividades académicas (Fan, 2013). Sin embargo, es una línea de investigación incipiente si se compara con otras áreas de la Educación Matemática.

Pepin (1997) señala que, para los docentes, una de las características fundamentales de los libros de texto es la calidad y diferenciación de los ejercicios que en ellos se proponen, ya que es mediante las tareas planteadas como se le brindan al alumnado oportunidades de aprendizaje. De hecho, en Randahl (2012), tras analizar el uso que se le da a un libro de texto de cálculo, se concluye que este se percibe principalmente como fuente de tareas. Por lo tanto, un aspecto interesante para analizar en los libros de texto son precisamente las tareas que allí se proponen.

La relación entre el tipo de tarea que los estudiantes realizan cuando se les enseña matemática y la matemática que aprenden ha sido objeto de investigación durante muchos años (p. e. Breen y O'Shea, 2010). Diversos estudios afirman que lo que los estudiantes aprenden está determinado en buena medida por las tareas que los docentes asignan (Sullivan et al., 2013). Específicamente, las tareas transmiten mensajes sobre qué son las matemáticas y qué implica conocerlas; es decir, su significado. Además, se considera que es mediante las tareas que se brinda realmente oportunidades de aprendizaje al alumnado (Anthony y Walshaw, 2009), pues permiten desarrollar habilidades de razonamiento y pensamiento (Lee et al., 2016). Incluso algunos autores piensan que, sobre cualquier otra acción en el aula, plantear tareas que inviten al estudiante a pensar por sí mismo es el principal estímulo para el aprendizaje (Sullivan, Clarke y Clarke, 2013). De ahí que el diseño y selección de tareas resulte fundamental para una enseñanza efectiva (Margolinas, 2014).

Dado que estos ejercicios determinan no solo la esencia de lo que los estudiantes aprenden, sino la forma en la que piensan, desarrollan, usan y le dan sentido al contenido matemático – qué es importante aprender y cómo hacerlo (Kessler et al., 2015) –, es queel análisis de las tareas resulta de gran interés. Su importancia se evidencia también en otros aspectos, por ejemplo, en la reunión anual del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) de 2003 donde se identificó el diseño y uso de tareas como tema central de los informes de investigación. Además, en 2008, el *International Congress on Mathematical Education* (ICME) organizó un grupo (TSG), llamado Investigación y desarrollo en diseño y análisis de tareas; e incluso, en el 2007 la revista *Journal of Mathematics Teacher Education* (JMTE) le dedicó un número especial triple a esta temática (volumen 10, números 4-6).

## 1.3. Antecedentes

A continuación, presentamos una síntesis de algunos trabajos que se han realizado sobre los tres elementos mencionados. Dado que en algunos casos los trabajos sobre la temática eran numerosos, nos hemos centrado en las investigaciones más recientes. La revisión de la literatura permite visualizar las distintas formas en las que se ha abordado la problemática en los últimos años, dándonos luz sobre qué aspectos han sido menos abordados y cuáles merecen ser profundizados.

### *1.3.1. Estudios sobre derivadas*

Existen múltiples investigaciones desarrolladas entorno a la noción de derivada. Una revisión de los últimos trabajos realizados nos deja ver que existen al menos cuatro grandes líneas de investigación, como lo son:

- Trabajos centrados en *la práctica docente*. Incluye las investigaciones cuyo objetivo es analizar las oportunidades de aprendizaje que el docente brinda al alumnado, cómo enseña la noción de derivada e incluso sus capacidades docentes para identificar dificultades o el nivel de comprensión de los estudiantes.
- *Entornos de enseñanza y aprendizaje*. Algunos trabajos centran su interés en las potencialidades que los software y entornos dinámicos brindan en la comprensión del concepto de derivada, así como a sus relaciones y propiedades.
- El *conocimiento* que se tiene de la derivada. Una importante cantidad de trabajos se ha enfocado en qué y cómo entienden tanto estudiantes como docentes la noción de derivada, estudiando para ello: las expresiones que usan, las conexiones que establecen o los razonamientos que manifiestan.
- *Instrumentos para evaluar* el conocimiento que se tiene respecto a la derivada.

Entre los que se centran en explicar y describir la práctica docente, se encuentran García et al. (2012) quienes empleando la teoría de APOS (Action, Process, Object, and Schema) analizaron: (a) cómo genera el docente oportunidades de aprendizaje y (b) cómo modela la construcción del conocimiento mediante el discurso y uso de sistemas de representación al enseñar derivadas. De forma similar, Park (2015) analiza el discurso de 3 docentes al enseñar la derivada en un punto y la función derivada. Los resultados muestran que la noción se introduce gráficamente, mediante las rectas secantes, pero que no se hace conexión de esto con la representación simbólica. Destaca también la justificación de propiedades mediante ejemplos únicos.

Por otra parte, Sánchez-Matamoros et al. (2014, 2018) exploran las habilidades de los docentes para identificar signos de comprensión en las respuestas de los estudiantes a problemas sobre la derivada, además de proponer acciones para la mejora; concluyen que los docentes capaces de establecer vínculos entre los elementos matemáticos y la comprensión plantean mejores actividades de instrucción. En esta misma línea, Moru et al. (2014) estudiaron el conocimiento de dos docentes al analizar errores cometidos por el alumnado en cálculo diferencial, concluyendo que el análisis de errores es un proceso complejo que manifiesta dificultad, por lo que debe enriquecerse en la formación del profesorado.

Entre las investigaciones centradas en los entornos de enseñanza y aprendizaje están Borji et al. (2018) quienes utilizaron la teoría APOS-ACE (Action, Process, Object, and Schema - Activities, Classroom discussion, and Exercises) para explorar la enseñanza y aprendizaje de la derivada de estudiantes de primer año universitario a través de un software. Asimismo, Zengin (2018) exploró como 33 docentes en formación construyen la relación entre diferencial y derivada mediante GeoGebra[2]. Ambos trabajos concluyen que el entorno resulta apropiado.

Ahora bien, en cuanto a la comprensión que se tiene sobre la derivada, en Dolores-Flores y García-García (2017) y García-García y Dolores-Flores (2019) se estudiaron las conexiones que establecen estudiantes preuniversitarios al resolver problemas que relacionan una función con su derivada. Los resultados señalan el predominio de las conexiones de tipo procedimental o entre representaciones; se pone de manifiesto que, incluso los estudiantes sobresalientes tienen predilección por las técnicas algebraicas, aunque estas sean inapropiadas, lo cual les limita su comprensión.

Fuentealba et al. (2016) utilizan la teoría APOS para analizar las respuestas dadas por estudiantes a tareas que requieren un alto nivel de comprensión del concepto de derivada, concluyendo que la tematización de la derivada es difícil de lograr, considerándolo un verdadero desafío cognitivo. Las respuestas dadas muestran una tendencia a prácticas algorítmicas y procedimientos mecánicos, los cuales no funcionan ante tareas que requieren comprensión; además, identifican que los estudiantes que tuvieron éxitos presentan como aspecto común la capacidad de establecer relaciones entre las derivadas sucesivas. En

[2] Software de geometría dinámica. Página web: https://www.geogebra.org/

Fuentealba, Badillo y Sánchez-Matamoros (2019) se centraron en caracterizar el esquema de derivada, mediante el análisis a las respuestas dadas a una serie de tareas y por medio de un análisis clúster se identificaron 6 subniveles de desarrollo, donde los niveles más elevados requieren de un alto nivel de comprensión.

Bajo este enfoque cognitivo, Ariza et al. (2015) caracterizaron la comprensión de los estudiantes sobre la función derivada y su relación con los conceptos económicos, mediante la descomposición genética y los niveles de esquema intra, inter y trans. Su análisis permitió identificar algunas dificultades y el poco sentido que son capaces de darle a la segunda derivada.

Por otra parte, Park (2013) se centró en cómo hablan los estudiantes sobre la derivada. Para ello estudió las respuestas dadas en entrevista a una serie de tareas, analizó las palabras utilizadas y detectó que el alumnado no identifica la derivada en un punto como un número ni la función derivada como una función. Wille (2019) se enfoca en el pensamiento matemático de estudiantes preuniversitarios respecto a la derivada. Para ello analiza cómo utilizan los signos, las relaciones que establecen y lo que dicen sobre estos. El autor sostiene que los signos hacen el razonamiento observable y comunicable, y que de este modo se puede reconstruir la línea de argumentación del estudiante, obteniéndose información sobre cómo entienden la derivada.

Centrados en la comprensión y conocimiento, pero de los docentes, Pino-Fan et al. (2018) profundizaron en el conocimiento didáctico-matemático de los futuros docentes sobre derivada desde la perspectiva de la semiótica. Los trabajos resaltan las dificultades para resolver las tareas relacionadas con la derivada, incluso aquellas que solo involucraban el conocimiento común. Otros estudios, como Badillo et al. (2011), ampliaron las herramientas ofrecidas por el modelo cognitivo APOS con la teoría de los registros semióticos de Duval y el EOS (Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática) para analizar la comprensión de los maestros de los objetos macro y micro. Los autores señalan la relevancia del tema, enfatizando que, para tener un esquema coherente con el concepto de derivada, es necesario coordinar estos macro objetos.

Finalmente, y también interesados en la comprensión, pero ahora en su forma de evaluarla o medirla, Aydin y Ubuz (2014) diseñaron y validaron una prueba multidimensional para evaluar el pensamiento matemático de los estudiantes sobre las derivadas. Tras una búsqueda en libros, investigaciones y exámenes y tras considerar una colección de cerca de 200 preguntas (abiertas y cerradas) concretizaron una herramienta de 30 ítems de opción múltiple en los que se abarcan 6 tipos de pensamiento (enactivo, icónico, algorítmico, algebraico, formal y axiomatizo). De forma parecida, Pinto-Rojas y Parraguez (2017) diseñaron y validaron un instrumento para evaluar la comprensión de la derivada a nivel local. El diseño se creó a partir de un estudio histórico y epistemológico de la derivada. Los resultados muestran que es una herramienta viable para identificar la forma de pensar sobre la derivada, la cual puede ser: sintético-geométrico, analítico-operacional o analítico estructural.

### *1.3.2. Estudios sobre significado*

Pese a ser una temática abordada desde hace ya algunos años, la revisión de la literatura nos muestra que no hay muchos trabajos que aborden el significado que los contenidos matemáticos tienen para los estudiantes o docentes. De hecho, tal como dice Thompson (2013) muchas investigaciones no abordan el significado incluso cuando dicen hacerlo, pues ni siquiera plantean su postura ante el significado.

Lo que algunos trabajos abordan es el cómo hacer que las matemáticas tengan un mayor significado o sentido para el alumnado. Por ejemplo, Khalloufi-Mouha y Smida (2012) analizaron el impacto que tiene el uso de Cabri[3] al introducir la función trigonométrica de forma que se pueda articular geometría con funciones. Justificando que esta articulación ayuda a que las matemáticas cobren sentido. De forma similar, Jaworski (2015) indagó en el diseño de tareas como herramienta para promover la comprensión conceptual sobre funciones. Considerando el significado de las matemáticas desde un enfoque sociocultural, diseñaron e implementaron un módulo de enseñanza basada en tareas de indagación y trabajos en grupo.

Aunque pocos, existen algunos trabajos focalizados en los significados atribuidos a los contenidos matemáticos, es decir, como estos se entienden e interpretaran. Un ejemplo es

[3] Software de geometría dinámica. Página web: https://cabri.com/es/

Montiel et al. (2009) quienes utilizaron el Enfoque Ontosemiótico (EOS) para identificar el significado matemático que tiene para los estudiantes el transitar entre diferentes sistemas de coordenadas, esto analizando las situaciones y acciones que los estudiantes logran relacionar. Por su parte, Burns-Childers y Vidakovic (2017) realizaron un estudio con 30 estudiantes de cálculo en el que, mediante la teoría APOS analizan tanto el trabajo escrito como entrevistas grupales, para explorar los significados personales que tienen sobre el vértice de una función, así como la comprensión sobre la derivada de una función cuadrática. Concluyendo que existe una débil conexión entre ambas ideas.

Finalmente, es posible hallar algunas investigaciones más cercanas a la línea de trabajo desarrollada en esta tesis. Por ejemplo, Byerley y Thompson (2017) quienes aludiendo al hecho de que se sabe poco sobre el significado que el profesorado de secundaria da a los contenidos que enseñan, se enfocó en el significado que tiene para los docentes la idea de tangente, medición y tasa de cambio. Los resultados mostraron una débil comprensión de contenidos y algunas ideas limitadas o erróneas. De hecho, los autores sugieren que la tasa de cambio debería ser un tema de desarrollo profesional específico. Igualmente, en Thompson y Milner (2019) examinaron los significados y formas de pensar de los docentes sobre la noción de función y su notación.

También, Fernández-Plaza et al. (2013) analizaron el significado que dan estudiantes universitarios al concepto de límite de una función en un punto, mientras que Martín-Fernández et al. (2016, 2019) caracterizaron el significado que tienen la noción de seno y coseno para estudiantes de secundaria. Estos últimos tres trabajos emplearon la misma línea de trabajo que seguimos en esta tesis, considerando una terna semántica compuesta de distintos aspectos y elementos que caracterizan el significado. Los autores aseguran que este tipo de análisis permite valorar la comprensión, así como apreciar los distintos significados con los que operan el alumnado.

### 1.3.3. Estudios sobre tareas y libros de texto

Los trabajos sobre libros de texto analizan, entre otras cosas, alguno de los siguientes aspectos (Fan, 2013; Pepin y Haggarty, 2001):

- Presentación de los temas y de los contenidos matemáticos.
- La intención pedagógica de los libros.
- Comparación entre libros.
- Influencia social y política en la elaboración de los libros

En la primera categoría se hallan trabajos como el de Alkhateeb (2019) quien estudió de forma general el lenguaje que se emplea en los libros de texto de octavo grado. Su análisis muestra que los libros suelen exhibir una imagen absoluta y simbólica de las matemáticas, donde el estudiante se limita a ejecutar ordenes en lugar de tomar un papel de pensador o resolutor de problemas. El autor comenta que estas pueden resultar ser una limitación en el aprendizaje de las matemáticas.

Este tipo de análisis también se ha desarrollado para el tema de derivadas. Por ejemplo, Park (2016) consideró 3 libros de texto de Estados Unidos y analizó el discurso de estos al construir la noción derivada. Usó el enfoque de Sfard, el cual se centra en el uso de las palabras y mediadores visuales. El autor detecta ciertas inconsistencias entre los objetos y las relaciones, con los mediadores visuales que se presentan. Además, destaca el hecho de que la derivada en un punto y la función derivada son objetos que se presentan casi de manera idéntica, lo cual puede generar confusiones. Almeida y Silva (2018) concluyen algo similar al realizar un análisis semiótico del capítulo introductorio a las derivadas en un libro universitario. Su intención era estudiar cómo se presentan y conectan los signos en el libro de texto. En sus conclusiones recalcan el potencial del libro para conceptualizar la derivada, aunque señalan que en algunos casos podría resultar ser una dificultad, pues no ayuda a clarificar la diferencia entre la derivada en un punto y la función derivada.

También se hallan trabajos centrados en otros contenidos, como el de González-Martín et al. (2013) quienes analizan cómo se introduce el tema de los números reales en una muestra de libros brasileños, prestando especial atención a cómo se propone que el contenido debe ser enseñado. O bien, Wang et al. (2017) que analizaron y compararon el nivel de comprensión con el que se aborda la función lineal en libros de texto de Estados Unidos y Shangai.

Un aspecto bastante interesante que abordan numerosos trabajos sobre libros de texto tiene que ver con el tipo de tareas que se plantean y la demanda cognitiva que requieren. Algunos lo hacen en general, sin centrarse en un contenido específico, como es el caso de Hadar y

Ruby (2019) quienes se centraron en las oportunidades que brindan los libros de texto por medio del tipo de demanda y nivel de comprensión que se requiere en cada tarea. O bien enfocados en algún tópico particular, como es el caso de Tran y Tarr (2018) quienes analizaron la demanda cognitiva de las tareas de datos bivariados en una serie de libros. Para ello identificaron la componente de investigación involucrada en la tarea, el nivel de sofisticación y la demanda. Otro ejemplo es el de Ramos y Casas (2018) que estudiaron la coherencia entre la demanda cognitiva de los estándares escolares y las tareas de los libros de texto para el tema de álgebra, encontrando que realmente no están alineados.

Específicamente para temas relacionados con el cálculo, Bhaird et al. (2016), preocupados por el hecho de que el alumnado puede aprobar la asignatura de cálculo a través de la manipulación simbólica y manejo de procedimientos sin tener una verdadera comprensión conceptual, analizaron las oportunidades de razonamiento creativo que se brindan en las evaluaciones (tareas y exámenes) a estudiantes de primer año universitario. Los resultados muestran que las tareas analizadas requieren principalmente de un razonamiento algorítmico, aunque se distinguen diferencias entre las oportunidades que se brindan en cursos especializados y los que no lo son. De forma parecida, Bergwall y Hemmi (2017) se enfocaron en las oportunidades de aprendizaje sobre el razonamiento relacionado con la prueba en cálculo integral.

Existen otro tipo de estudios sobre libros de texto en cálculo; por ejemplo, Chang et al. (2016) analizaron la coordinación de representaciones múltiples en un libro de cálculo, mostrando que esta coordinación está presente antes y después del estudio de los distintos temas. Aunque se evidencia una tendencia a trabajar las funciones de forma más conceptual y algebraica y no tanto geométrica. Otro enfoque de trabajo puede ser el uso que le dan estudiantes de ingeniería a un libro de cálculo, detectando que su uso es bastante limitado, percibiéndose principalmente como fuente de tareas (Randahl, 2012).

Finalmente, se encuentran pocos, pero algunos, estudios centrados en el significado de contenidos matemáticos que transmiten los libros de texto; un caso es el de Balcaza et al. (2017) quienes analizan cómo se desarrolla la noción de optimización en tres libros de texto de bachillerato con el fin de detectar el significado que se pretende abordar en el aula, así como las dificultades que se pueden encontrar en torno a este concepto. Por otra parte, en

Contreras et al. (2012) se analizan los distintos significados que configuran la enseñanza del límite. Ambas investigaciones abordadas desde el Enfoque Ontosemiótico.

## 1.4. Delimitación del problema

La gran cantidad de trabajos desarrollados sobre la noción de derivada pone de manifiesto la relevancia que este tópico tiene para la comunidad científica. Asimismo, la dificultad que supone tanto para estudiantes, como para los docentes evidencia la necesidad de seguir profundizando en la temática. La revisión de la literatura nos permite observar que el trabajo centrado en el profesorado ha sido mucho menor, por lo que la investigación en esa línea parece acertada. En nuestro caso nos enfocaremos en el significado que la noción de derivada tiene para los docentes, pues como mencionamos, más importante que el conocimiento es el significado con el que operan los docentes, lo cual ayuda a entender mejor el proceso de enseñanza y aprendizaje (Thompson, 2013).

Ahora bien, el estudio del significado requiere de una teoría y modelo útil que permita su análisis (Thompson, 2016). En nuestro caso, utilizaremos el marco desarrollado por Rico (2012) y colaboradores en el que se considera que el significado de un contenido matemático escolar contempla tres componentes: la organización de su estructura conceptual, los sistemas de representación con los que se expresa, y los sentidos con los que se interpreta y sus modos de usarlo o aplicarlo. De esta forma, comprender el significado de un concepto implica "conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades, sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas" (Rico, 2016, p. 94). Esta perspectiva nos permitirá analizar cómo entienden y utilizan los docentes la derivada.

La revisión de la literatura nos mostraba que de alguna forma se han abordado aspectos de la estructura conceptual (conceptos, relaciones y razonamiento) y un poco sobre el manejo y uso de signos y la notación. Además, se pudo apreciar que algunas de las investigaciones que dicen abordar el significado en realidad se enfocan en el sentido que las matemáticas tienen para el alumnado; pero son pocos los trabajos que abordan de forma conjunta los tres componentes: el sentido, los sistemas de representación y los aspectos conceptuales.

De esta forma, damos continuidad a una línea de trabajo desarrollada por otros investigadores (p. e., Castro-Rodríguez et al., 2016; Fernández-Plaza et al., 2013; Martín-Fernández et al., 2016, 2019) los cuales han obtenido resultados importantes sobre las concepciones de estudiantes respecto a otros conceptos matemáticos escolares. En nuestro caso, consideramos de interés centrar el estudio en los docentes ya que, además de avanzar en los trabajos mencionados, existen pocas investigaciones en el campo de la Didáctica del Análisis Matemático, cuyo objeto de estudio sea el docente (Azcárate et al., 2015).

Además, dada la relevancia de las tareas escolares, creemos que los docentes deben ser capaces de plantear tareas que promuevan un aprendizaje oportuno de sus estudiantes (Lee et al., 2016). Además, tanto el diseño como la selección de tareas está influenciada por las metas del docente, así como por su conocimiento y creencias sobre las matemáticas (Sullivan et al., 2013). Por ello, creemos que analizar tareas sobre la derivada propuestas por los docentes puede sernos útil para aproximarnos a su forma de entender la derivada.

Finalmente, debido a la importancia y uso que los docentes dan a los libros de texto, resulta oportuno incluir el análisis de las tareas propuestas por los libros de texto, como agente importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los trabajos sobre libros de texto se han centrado fundamentalmente en la demanda cognitiva de las tareas, no hallamos ninguna investigación que pretendiera inferir el significado que se pone de manifiesto; pues aquellos que han abordado el significado no lo han hecho desde las tareas. Por lo que nos parece relevante analizar el significado que se manifiesta en los libros de texto a través de las tareas propuestas.

### *1.3.1. Objetivos de la investigación*

La problemática presentada y la revisión de la literatura, nos lleva a plantearnos una serie de preguntas, como, por ejemplo: ¿Cuál es el significado para los docentes en activo del concepto de derivada? ¿guarda semejanza con el significado que manifiestan los docentes en formación? ¿Cambia? ¿Evoluciona? ¿Es posible establecer uno o varios perfiles del significado de la derivada según la concepción que tienen los docentes respecto al tema? Asimismo, dado el extendido uso de los libros de texto en el proceso de enseñanza nos planteamos ¿Qué significado de derivada se pone de manifiesto en los libros de texto? ¿Existe alguna relación entre el significado de derivada que expresan los docentes con el que manifiestan los distintos libros de texto?

Para responder a estas preguntas, el trabajo a desarrollar en esta tesis tiene como objetivo general:

**OG.** Analizar el significado que tiene el concepto de derivada para los profesores de matemáticas de 1º de bachillerato.

Asimismo, nos planteamos como objetivos específicos los siguientes:

**OE1.** Describir el significado que atribuyen los futuros profesores al concepto de derivada de una función en un punto.

**OE2.** Estudiar el significado de derivada que transmiten los libros de texto de 1º de bachillerato.

**OE3.** Describir el significado que tiene el concepto de derivada para los profesores de 1º de bachillerato.

**OE4.** Determinar, si existe, la relación entre el significado de la derivada puesto de manifiesto por los profesores en formación y los profesores en activo.

**OE5.** Determinar la relación entre los significados puestos de manifiesto por los profesores y los libros de texto de 1º de bachillerato.

# CAPÍTULO 2

# Fundamentación teórica

En este capítulo describimos el marco conceptual en el cual se fundamenta la tesis doctoral. Como hemos manifestado en el planteamiento del problema y concretado en los objetivos, la tesis se centra en el significado dado a la derivada de una función en un punto. Por lo tanto, la noción de significado es el elemento base de este marco teórico, que, en Educación Matemática, ha sido abordada desde diversas perspectivas, lo cual ampliaremos más adelante.

Nuestro punto de vista se realiza desde un enfoque curricular, entendiendo por currículo cualquier actividad a planificar e implementar en un programa de formación. Esta actividad especifica principios ideológicos, pedagógicos y psicopedagógicos para canalizar a diferentes niveles de concreción, que van desde el sistema educativo general hasta las prácticas docentes en un aula (Rico y Ruiz-Hidalgo, 2018).

El currículo de matemáticas responde a las cuestiones: ¿qué es el conocimiento?, ¿qué es el aprendizaje?, ¿qué es la enseñanza? y ¿en qué consisten los logros de aprendizaje? Estas preguntas generan las dimensiones organizativas del currículo: cultural/conceptual, cognitiva, ética/normativa y social (ver figura 2.1).

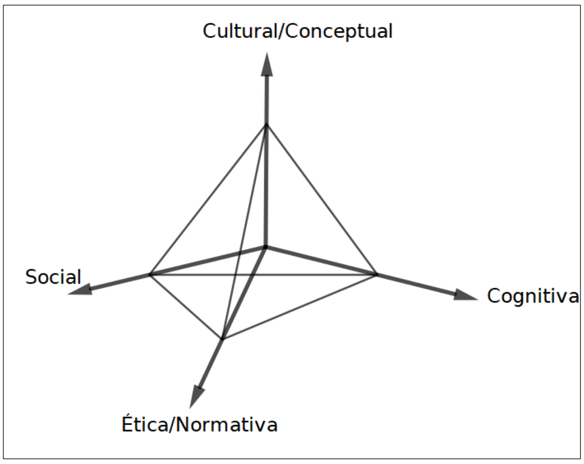



*Figura 2.1.* Dimensiones del currículo (fuente Rico, 1997, p. 28)

Estas dimensiones, a su vez, se pueden organizar en categorías (u organizadores) que, con sus respectivos componentes, proporcionan un sistema de clasificación para identificar los elementos que delimitan el contenido didáctico atendiendo a las dimensiones curriculares; permitiendo además analizar y sintetizar dicho contenido (Rico y Ruiz-Hidalgo 2018).

El instrumento elegido para el análisis del contenido didáctico, que contempla las dimensiones, organizadores y componentes dentro del marco curricular, es el *análisis didáctico*. Es, por tanto, el análisis didáctico el elemento vertebral de nuestro marco teórico. Así, organizamos este capítulo en 5 apartados, de lo más general a lo más particular: comenzamos con el análisis didáctico, como marco general, dentro del cual se sitúa la noción de significado de un contenido matemático escolar que utilizaremos. Posteriormente destacamos aspectos filosóficos, psicológicos y, por supuesto, curriculares, que tienen influencia en la idea de significado. En el tercer apartado nos centramos en el significado dentro de la de educación matemática y es ahí donde describimos lo que entendemos por *significado de un contenido matemático escolar*.

A uno de los elementos que conforman nuestra consideración de significado, los razonamientos y la argumentación matemática, le dedicamos un apartado adicional dada su relevancia para aproximarnos a la forma de entender un contenido matemático, la manera en la que este se percibe y comprende. Finalmente, aportamos una base teórica para las tareas escolares en los libros de texto, ya que han sido uno de los elementos que ha permitido analizar los significados.

## 2.1. Análisis didáctico

Tal como mencionamos, el marco general que utilizaremos para el análisis e interpretación de los datos será el desarrollado por Rico et al. (2013) y Rico y Moreno (2016) que se denomina *Análisis Didáctico*. Se trata de un método de investigación en educación matemática que se fundamenta en la historia, en la matemática, en la filosofía del conocimiento y en otras disciplinas científicas. El análisis didáctico se centra en analizar textos, relatos, normas, juicios, argumentos, entre otros; vinculados con la actividad educativa en matemáticas y tiene como propósito "establecer los significados de los conceptos y aprehender la intencionalidad educativa del discurso en matemáticas" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 16).

El análisis didáctico se estructura, atendiendo a las dimensiones curriculares mencionadas (figura 2.1) según cuatro fases con objeto de estudio distinto, tal como se aprecia en la figura 2.2. Estas fases no tienen por qué ejecutarse de manera ordenada ni completa, sino que atenderán a las componentes que consideremos y la dimensión a la que correspondan. Cada una de las fases se caracteriza por el objeto que tiene como foco, pero se sirve de las mismas herramientas metodológicas: el análisis de contenido y el análisis conceptual. En el caso de esta memoria, se ha utilizado como herramienta metodológica el análisis de contenido, el cual se describe en el capítulo 3 (apartado 3.3.4., página 62).

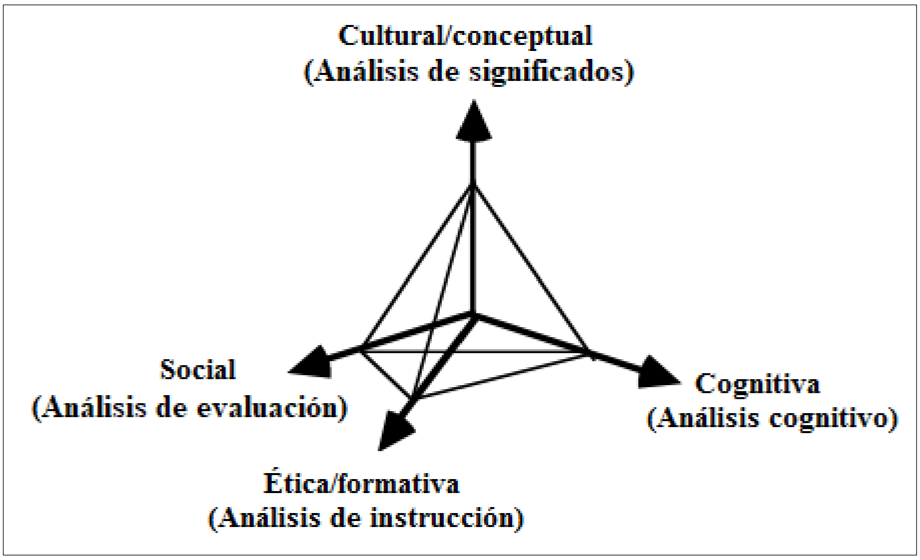



*Figura 2.2.* Relación del Análisis Didáctico con cada una de las dimensiones del currículo

La fase cuyo objeto son los elementos culturales/conceptuales se denomina análisis de significados (Rico y Moreno, 2016). Estos objetos se concretan en contenidos matemáticos escolares y, como el nombre indica, este análisis pretende describir las ideas esenciales que componen el significado de dichos contenidos. Se estructura alrededor de tres organizadores que son: la estructura conceptual, los sistemas de representación y, los sentidos y los modos de uso. Las componentes de cada uno de los organizadores se describen en el apartado 2.3.1. denominado *significado de un contenido matemático escolar* (página 37).

Cuando los objetos son de la dimensión cognitiva, es decir, son referidos a aspectos de aprendizaje de los estudiantes, hablamos de análisis cognitivo. Este se organiza en tres categorías: expectativas de aprendizaje, limitaciones para el aprendizaje y oportunidades para el aprendizaje.

La dimensión ética/formativa tiene prioridad en el análisis de instrucción, donde el foco se pone sobre la planificación e implementación de la enseñanza de las matemáticas. Sus organizadores son las tareas y secuencias de tareas, la organización del trabajo en el aula, y los materiales y recursos didácticos.

La última fase, el análisis de evaluación, tienen como objeto los elementos de la dimensión social, esto es, como los aprendizajes logrados y la toma de decisiones. Se organiza también en tres categorías: las modalidades y diseño de la evaluación, la intervención y la toma de decisiones y los indicadores de calidad en enseñanza (Rico y Moreno, 2016).

## 2.2. La noción de significado desde diversas perspectivas

La idea de significado no solo ha sido de interés para la Didáctica de la Matemática, por lo que esta ha sido abordada desde distintas disciplinas, entre ellas la filosofía y la psicología, ambas con alguna influencia en la educación matemática. Por ello, antes de centrarnos en la noción del significado que utilizaremos, presentamos algunas ideas del significado desde la filosofía, posteriormente ciertas aproximaciones desde la psicología, y finalmente algunos aspectos relevantes sobre la naturaleza de la matemática.

### 2.2.1. El significado desde la filosofía

Desde sus inicios, la filosofía se ha interesado en el lenguaje como portador de significados, considerándose que los rasgos del lenguaje arrojan luz sobre la estructura de la mente (Putnam, 1975). El interés puesto en el lenguaje, sus signos y expresiones ha motivado su estudio desde tres dimensiones:

- Sintáctica: estructura de las expresiones, normas y reglas mediante las cuales se formulan.
- Semántica: relación entre las expresiones, describiendo distintos significados dados.
- Pragmática: uso que los hablantes le dan a los signos y al lenguaje.

Nuestro interés está en la dimensión semántica, aunque como se detalla más adelante también se filtran algunas ideas de la pragmática. Dentro de la dimensión semántica se hallan distintos filósofos y teorías; entre ellos Frege, quien es considerado pionero en sentar las bases para una teoría del significado. Para él, más que las palabras en sí mismas, lo importante son los pensamientos que se expresan con ellas (Dummett, 1999). Su visión del significado se fundamentó en las inferencias matemáticas y sus valores de verdad.

Frege (1892), intentando clarificar la esta idea, introdujo la noción de sentido y referencia. Para él cada signo o símbolo tiene un sentido y puede a su vez denotar una referencia, entendiendo estos elementos de la siguiente manera:

- *Referencia:* objetos o conjuntos de ellos que determinan los valores de verdad de una expresión (lo denotado).
- *Sentido:* modo en que un signo designa la referencia, lo cual permite discriminar entre diferentes modos de uso de un signo.

Tal como afirma Putnam (1975), los sentidos provocan que un mismo término tenga distintos significados, el autor lo compara con colocar subíndices a un término convirtiéndolo prácticamente en otra palabra. Por ejemplo, el vocablo "rayo", según el sentido en el que se use, puede significar una descarga de electricidad, pero en un sentido matemático tendría un significado completamente distinto.

El autor subraya además que los significados deben ser entendidos más allá de su referencia y valores de verdad (Putnam, 1975); tomando como ejemplo las expresiones “criaturas con corazón” y “criaturas con riñones”, señala que dos o más expresiones pueden tener el mismo conjunto de referencia, pero no necesariamente el mismo significado. Enfatiza también en que, aunque dos términos pueden tener la misma referencia y diferir en su sentido; no es posible que ocurra lo contrario. Otro aspecto interesante, es que no toda palabra o expresión tiene referencia; por ejemplo, la expresión “el último número primo” tiene sentido, pero no referencia.

Del mismo modo, Frege admitió que los significados de las palabras del lenguaje natural frecuentemente contienen más que sus propios sentidos. Las palabras pueden diferir en significado, aunque coincidir en su sentido, por ejemplo, las expresiones “está muerto” y “ha pasado a mejor vida”, tienen el mismo sentido, pero difieren en su adecuación a diferentes contextos (Dummett, 1999). Por lo tanto, el significado no puede extraerse solo de su referencia o su sentido.

Otros autores que abordaron el significado mediante teorías referenciales (considerando la referencia) fueron Ogden y Richards (1923); ellos integraron tanto enfoques semánticos como psicológicos e introdujeron el famoso triángulo semántico (ver figura 2.3), en donde se contempla que toda expresión se compone de: un símbolo, una idea o pensamiento y un referente. Destacando que no tiene por qué haber una relación directa entre el símbolo y el referente, como se puede observar en la figura 2.3.

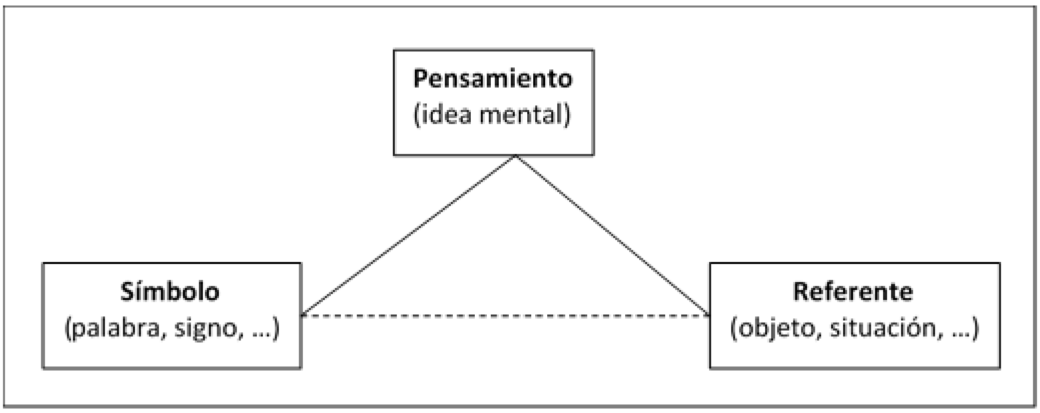



*Figura 2.3.* Triángulo semántico propuesto por Ogden y Richards (1923)

Por otra parte, desde la dimensión pragmática, Wittgenstein (1953), quien ha sido muy influyente en la teoría del significado, consideraba que una palabra tiene cierto significado porque se refiere a una determinada entidad; sin embargo, posteriormente critica esta postura referencial, planteando que el significado de una palabra debe explicarse mediante una descripción de su uso. Enfatiza que las palabras no pueden ser una "imagen" del mundo real, pues sirven también para describir situaciones ficticias.

### *2.2.2. El significado desde la psicología*

Tal como señala Bruner (1990) "el concepto fundamental de la psicología humana es el de significado, así como los procesos y transacciones que se dan en la construcción de los significados" (p. 47). Muchos psicólogos se han interesado particularmente en las matemáticas debido al pensamiento abstracto que se involucra. Pese al interés mostrado por distintos profesionales "lo que entendemos por 'comprensión' y 'significado' está lejos de ser obvio o claro, a pesar de ser dos términos centrales en toda discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel" (Pimm, 1995, p. 3).

Uno de los pilares en la psicología de las matemáticas es Piaget. Para él, los significados se derivan de la asimilación de los objetos a los esquemas del sujeto; como resultado, toda asimilación genera significado (Piaget y García, 1991). Asimismo, destaca que ningún significado está aislado, pues este se vincula a su vez con muchos otros. Piaget no solo se centró en los significados de las declaraciones, pues afirmaba que las acciones y objetos también tienen un significado; además, considera que conocer el significado de un objeto no es copiarlo, sino saber actual sobre él (Piaget, 1970).

Esta visión Piagetiana ha sido considerada por Thompson (2013, 2016), quien ha trabajado el significado en Educación Matemática. Su noción de significado contempla la idea de Dewey (1910, 1933) para quien el significado y la comprensión son sinónimos, y que el pensamiento es el mecanismo que permite construir y refinar esos significados. Además, considera que comprender es asimilar y asimilar un objeto es darle uno o varios significados (construir un esquema).

Thompson incluye también la idea de Grice (1957) en la que el significado es "eso que se quiere transmitir, lo que se quiere decir". Bajo esta perspectiva los significados son subjetivos y existen en las mentes de las personas, refiriéndose a lo que estas producen e interpretan sobre algo. Para Thompson (2016) el significado constituye el marco sobre el cual operan los individuos, así, el significado de una persona en una situación es lo que viene a la mente inmediatamente al enfrentarse a ella.

Pese a entender el significado y la comprensión como sinónimos, Thompson y Harel distinguen cuatro tipos o formas de comprensión (ver Thompson et al., 2014), en las que se diferencia entre:

- Comprensión (understanding): estado cognitivo resultado de una asimilación nueva, puede entenderse como lo que un individuo entiende en el momento que integra nuevo conocimiento a su esquema.
- Comprensión estable: estado cognitivo resultado de la asimilación de un objeto a un esquema (comprensión en el tiempo).
- Significado: implicaciones que ocurren en el momento de la comprensión.
- Significado estable: implicaciones existentes al haber asimilado un objeto a un esquema. Es la forma de entender. Son las implicaciones que movilizan la comprensión.

### *2.2.3. Naturaleza dual del conocimiento matemático*

Por otra parte, algunos didactas se han preocupado por entender y caracterizar la naturaleza de las matemáticas desde una perspectiva cognitiva, apoyados también en algunas teorías del aprendizaje (Castro et al., 2016). Esta visión amplía la perspectiva sobre los significados matemáticos, por lo cual creemos oportuno abordarla brevemente. Al igual que Sfard (1992), quien destacó la naturaleza dual de los conceptos matemáticos: objeto y proceso, otros autores distinguen también al menos dos campos: el conceptual y el procedimental, los cuales detallamos a continuación.

Algunos psicólogos han reconocido la naturaleza dual de las matemáticas; por ejemplo, Piaget (1978) distinguió entre comprensión conceptual y acción exitosa, mientras Anderson (1983) diferenció entre conocimiento declarativo y procedimental. Propiamente en educación matemática, se han utilizado términos como habilidad o comprensión conceptual y procedimental, siendo el foco de discusión a cuál de los dos aspectos debe otorgársele mayor énfasis o importancia en la enseñanza (Hiebert y Lefevre, 1986).

Distinguir lo conceptual de lo procedimental resulta apropiado y útil para comprender la adquisición del conocimiento matemático, además de facilitar una mejor interpretación del proceso de éxito o fracaso del alumnado; sin embargo, sus límites son complejos de determinar (Hiebert y Lefevre, 1986). Pese a que no hay un conceso sobre cómo definir estos conocimientos o campos, ni tampoco sobre cómo medirlos, una de las caracterizaciones más reconocidas y utilizadas en el área es la que proporcionan Hiebert y Lefevre (1986) (Castro et al., 2016). Para ellos la matemática se compone de:

- Conocimiento conceptual: incluye el saber qué y el porqué. Se caracteriza por ser rico en relaciones, una red de conocimientos, donde las relaciones unen hechos y proposiciones. No es aislado. Las conexiones que se establecen en esta red se pueden distinguir a dos niveles: (a) unas a nivel más primario, realizadas en contextos específicos; y (b) un segundo nivel más reflexivo, donde se libera la relación del contexto, siendo más abstracto.
- Conocimiento procedimental: es un conocimiento más automatizado, distinguen también dos componentes: (a) el manejo del lenguaje formal y la representación simbólica (sin necesariamente entender su significado); y (b) algoritmos y reglas.

En ese sentido, Star (2007) considera que el conocimiento procedimental no es tan superficial como lo suponen Hiebert y Lefevre (1986), planteando la existencia de un conocimiento procedimental más profundo. Algunos autores apoyan esta noción, destacando que la simplicidad de lo procedimental ha sido consecuencia de la enseñanza brindada; enfatizando además que el procedimental profundo solo puede alcanzarse a través de un conocimiento conceptual profundo (Baroody et al., 2007).

Otros autores que han abordado la naturaleza de la matemática desde una perspectiva psicológica son Onrubia et al. (1990), para quienes comprender las matemáticas debe incluir:

- Conocimiento declarativo: hechos conceptos, sistemas conceptuales y principios de carácter matemático. Reconociendo que en matemática los conceptos van más allá de su definición. A este conocimiento agregan el conocer el lenguaje y notaciones empleadas para expresar los conceptos.

- Conocimiento procedimental: entendido como la aplicación de secuencias de acciones y operaciones. El saber hacer. Destacan la existencia de dos tipos de procedimientos: algoritmos (repetición) y los heurísticos (toma de decisiones).
- Conocimiento condicional: numerosos estudios (p. e. Schoenfeld, 1987) demuestran que tener conocimiento conceptual y procedimental no garantiza saberlos usar en el momento oportuno. Por ello los autores consideran este un elemento fundamental: la aplicación intencional y consciente del conocimiento procedimental y declarativo.
- Aspectos afectivos, relacionales y motivacionales: aprender matemática supone el desarrollo de cierta disposición hacia las matemáticas

Al respecto, Kilpatrick et al. (2001), aunque no hacen alusión al conocimiento condicional, consideran que el aspecto procedimental va más allá de los algoritmos, incluyendo el conocimiento para resolver problemas; es decir, el saber cuándo y cómo usar el conocimiento.

Ya sea que se contemplen dos o más campos de la matemática, durante años se ha debatido sobre qué conocimiento tiene más relevancia o incluso el orden en el que estos deben presentarse al estudiantado.  Hoy se sabe que ambos son importantes y que no hay un orden específico para su enseñanza. Lo importante es entenderlos como un continuo que se complementa (Castro et al., 2016).

## 2.3. Significado en Educación Matemática

En Educación Matemática, la introducción del significado tuvo sus inicios en 1960 (Skovmose, 2005). Al principio la discusión sobre el significado se relacionaba con el hecho de si comprender las conexiones detrás de un algoritmo enriquecía el significado que dicho concepto tenía para el estudiante.

Desde entonces, para el estudio del significado en la educación matemática se han empleado distintas perspectivas, esto debido a la complejidad de los objetos matemáticos. Algunos autores han empleado, al igual que en la filosofía, ternas semánticas. Por ejemplo, Vergnaud

(2009, 2013) quien, siendo un estudiante de Piaget, se enfocó en la didáctica de la matemática y propuso que una definición matemática incluye no solo las propiedades invariantes que caracterizan a la noción (esquemas), sino también las situaciones y representaciones asociadas.

De forma similar Steinbring (1997, 2006) considera que la terna del significado se compone de la siguiente manera: símbolo, concepto y objeto o referencia. Para el autor las relaciones entre los elementos de esta terna son las que generan el significado, por lo que debe haber un balance y equilibrio entre ellas; destaca que un símbolo no tiene significado propio, sino que este es producido y construido por el individuo. Steinbring enfatiza además en la importancia de los símbolos y signos en la matemática, afirmando que los objetos matemáticos no existen independientemente de sus representaciones, pero que no deben confundirse con ninguna representación en particular.

Siguiendo esta misma idea, Biehler (2005), retoma el trabajo de Steinbring incide en que el significado de un concepto debe tomar en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos:

- El concepto dentro de la red teórica matemática
- Su desarrollo histórico.
- Su uso en la resolución de problemas
- Las herramientas y representaciones disponibles.

Biehler comenta también que el significado de un concepto difiere según el contexto y esferas de práctica, de ahí la importancia de considerar los diferentes fenómenos asociados. De esta forma, para él el significado de un concepto matemático está compuesto por: (a) dominios de aplicación, es decir sus usos dentro y fuera de la matemática; (b) estructura conceptual, entendida como la relación del concepto con otros; y (c) herramientas y representaciones.

Por otra parte, Kilpatrick et al. (2005), aunque no basados en una terna semántica, han abordado ampliamente la noción de significado. Para ellos el significado que tienen las matemáticas a nivel escolar lo define la sociedad y los docentes ya que estos se convierten en un factor determinante al elegir qué enseñar y cómo hacerlo; de esta forma el significado de las matemáticas cambia indudablemente de un país a otro. Así, en el aula los docentes reconstruyen esas matemáticas y le dan significado. La labor docente consiste entonces en comunicar, transformar y negociar el significado de las matemáticas con el alumnado.

Kilpatrick et al. (2005) consideran también que un contenido matemático puede definirse formal y simbólicamente, pero su significado es extraído de esa definición y depende del contexto y uso que se le dé. Señala además que el significado de un contenido matemático $X$ puede verse desde al menos cuatro perspectivas:

- El significado de $X$ como contenido a ser enseñado: entendido como el significado de ese contenido que se transmite en los libros de texto, por ejemplo, y que se concibe como procesos y habilidades que han de ser enseñadas.
- El significado de $X$ dentro de una esfera de prácticas: entendiéndolo como los distintos significados que $X$ puede tener en contextos externos a la matemática.
- El significado de $X$ en el salón de clase: es aquel que se forma por la interacción docente-estudiante, en donde influye el conocimiento previo de ambos.
- El significado de $X$ desde la perspectiva del docente: considera que este no puede ni debe reducirse al conocimiento matemático del contenido a enseñar, pues para el docente la noción de $X$ va más allá, contemplando otras esferas prácticas. Y es así como esta visión más amplia, que la que ha de ser enseñada, conforma el significado que un contenido tiene para el docente.

Un aspecto importante para Kilpatrick et al. (2005) es que el significado debe interpretarse con base en el horizonte del individuo. Para un estudiante el significado de un objeto va aumentando conforme lo hace su experiencia con el contenido. En el caso de un docente, el significado de un contenido emerge de su conocimiento matemático, la forma en la que concibe los problemas para aprenderlo y cómo implementa este en la enseñanza.

Ahora bien, ¿por qué es tan importante la noción de significado en Educación Matemática? Tal como se mencionó en el primer capítulo, Thompson y Milner (2019) afirman que la investigación debe centrarse en los significados antes que, en el conocimiento, ya que esta última tiene más que ver con hechos y saberes matemáticos, pero en la práctica los docentes operan con sus propias ideas, formuladas con base en lo que han aprendido y cómo lo han interpretado. De ahí que, Thompson y Milner, siguiendo a Mason y Spence (1999), diferencien entre conocimiento (Knowledge) y saber (knowing), donde este último se refiere a la acción de conocer, es decir, "saber acerca de", la cual es más útil al pensar e investigar sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje. Distinguiendo, además:

- Knowing to: saber en el momento (conocimiento activo). Puede ser caracterizado por lo que Piaget llama esquema y lo que Thompson interpreta como significado.
- Knowing that: saber algo
- Knowing how: saber cómo
- Knowing why: saber por qué algo es verdadero o apropiado.

Centrarse en los significados ayuda a establecer relaciones entre lo que el docente sabe, lo que enseña y lo que aprende el estudiante; permitiendo tomar acciones para la mejora. Sin embargo, el estudio de significados requiere de una teoría y modelos útiles que permitan determinar el significado de los docentes y así poder ayudar en su formación profesional (Thompson, 2016). De hecho, Balacheff (1990) destacó que una de las cuestiones centrales es: ¿cómo podemos caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?

En nuestro caso, para el análisis de los significados adoptamos la noción desarrollada en Rico (2012, 2013) en la que el significado de un contenido matemático escolar se compone de una serie de aspectos y elementos, que permiten y facilitan su estudio. El cual es detallado a continuación.

### *2.3.1. El significado de un contenido matemático escolar*

Para nuestro trabajo adoptamos el marco desarrollado en Rico (2012, 2013) denominado *significado de un contenido matemático escolar*, y que se contempla dentro del análisis didáctico. La complejidad de los objetos matemáticos nos lleva a contemplar el significado de contenidos y no de conceptos matemáticos pues, como se menciona en Piaget y García (1991), es complicado entender los conceptos de forma aislada. Tal como señala Biehler (2005) la educación matemática, y en nuestro caso la investigación, debe basar sus decisiones en aspectos curriculares, por lo que el significado debe ser pensado y construido para la matemática escolar. Precisamente esta es una de las potencialidades del marco teórico que contemplamos; además de que toma en consideración elementos filosóficos y psicológicos que lo enriquecen.

Esta perspectiva curricular defendida por Bielher nos anima a considerar el significado desde el análisis didáctico, concretamente desde el análisis de los significados. Se trata de una consideración de significado que combina una tradición filosófica, concretamente en la terna semántica (p. e. Frege, 1892; Ogden y Richards, 1923) y la dualidad del conocimiento matemático. De esta manera, el significado de un contenido matemático escolar (Rico, 2013) está compuesto por: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación, y (c) sentidos y modos de uso. Cada uno de estos tres organizadores (que coinciden con los del análisis didáctico) se conforman de una serie de componentes y elementos que permiten caracterizar el significado (ver tabla 2.1), lo cual a su vez puede usarse como herramienta metodológica para el análisis.

Tabla 2.1. *Componentes del significado de un contenido matemático escolar*

| *Estructura conceptual* | | | *Sistemas de representación* | *Sentido y modos de uso* |
|---|---|---|---|---|
| Campo conceptual | Campo procedimental | Campo actitudinal | | |
| Hechos<br>Conceptos<br>Estructuras | Destrezas<br>Razonamientos<br>Estrategias | Actitud emocional<br>Aspecto moral y normativo<br>Aspecto ético | Verbal<br>Simbólico<br>Numérico<br>Gráfico<br>Tabular | Modo de uso<br>Contexto<br>Situación |

Vemos como esta perspectiva incorpora ideas pragmáticas al contemplar las aplicaciones y contextos de los contenidos matemáticos; además, y como detallaremos más adelante, la caracterización de la estructura conceptual incluye varias de las ideas cognitivas abordadas desde la psicología y considerando la naturaleza de la matemática.

De este modo, en la matemática escolar comprender el significado de un concepto implica “conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas” (Rico, 2016, p. 94). Esta idea ha sido considerada en distintos trabajos como Bazzini et al. (2001), Castro-Rodríguez et al. (2016), Fernández-Plaza et al. (2013) y Martín-Fernández et al. (2016, 2019). A continuación, describimos cada uno de los organizadores. Además, con la intención de clarificar cada uno de ellos se plantean ciertos criterios cognitivos que permiten analizar cómo “se entiende, se aprenden y se utilizan [los conocimientos matemáticos] por usuarios y escolares" (Rico, 2016, p. 89). Mostramos algún ejemplo de estos componentes, sobre la derivada de una función en un punto, más adelante en la tabla 2.2.

#### *2.3.1.1 Estructura conceptual*

La noción de estructura es utilizada en distintos campos, generalmente refiriéndose a un todo organizado. En nuestro caso entendemos por estructura conceptual al conjunto de conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y proposiciones, así como sus criterios de veracidad, asociados a un contenido matemático.

Para la caracterización de esta estructura se plantean tres campos o categorías generales: campo conceptual, campo procedimental y campo actitudinal (Rico, 1997). Sin embargo, dado el alcance de nuestro trabajo, nos limitamos a los dos primeros campos. Los criterios aquí desarrollados se fundamentan en diversos trabajos, como el de Hiebert y Lefevre (1986) y por Onrubia et al. (1990) que mencionamos anteriormente. Al igual que ellos consideramos que en cada una de estas categorías o campos se pueden distinguir niveles cognitivos (tabla 2.1).

**Campo conceptual**

Concibiendo los conceptos como aquellas ideas con las que pensamos; relacionan y organizan hechos. Se entiende este campo como el conjunto de conceptos y relaciones que hacen alusión al contenido matemático, aquí son tan importantes las unidades, de forma individual, como la red que construyen.

Según su nivel de concreción y complejidad, estos conceptos pueden clasificarse en tres niveles de la siguiente manera:

- Los hechos que son las unidades de información más simples en las que se incluyen:
    - Términos: que se refieren a las palabras con las que designamos el concepto o sus relaciones. Pueden referirse a términos propios de la Matemática o no.
    - Notaciones: se consideran los signos y símbolos empleados para expresar alguna idea de forma precisa y breve.

- Convenios: entendidos como acuerdos consensuados en la comunidad matemática para transmitir información sin caer en ambigüedades y sin necesidad de explicaciones.
- Resultados: son el producto de relaciones entre conceptos, los cuales generalmente son memorizados y suponen herramientas con las cuales trabajar.

En general, estos hechos hacen tangible el concepto.

- Los conceptos y relaciones asociados al contenido, entendido concepto como una serie de hechos conectados entre sí.
- Y las estructuras conceptuales que son redes de conceptos que eventualmente pueden dar origen a conceptos más complejos.

**Campo procedimental**

En esta otra categoría se consideran las operaciones, propiedades y métodos matemáticos involucrados en el contenido. Al igual que Star (2007) y Baroody et al. (2007) creemos que en el campo procedimental deben incluirse formas operativas más allá de lo meramente algorítmico. De esta forma, se distinguen tres niveles de dificultad:

- Las destrezas que son los procedimientos definidos para ese contenido en el que se pueden incluir expresiones simbólicas, figuras y otros signos. Se caracterizan por ser unidades que promueven acciones y transformaciones.
- Los razonamientos que son las relaciones de inferencia que se establecen entre los conceptos y que se expresan mediante una secuencia argumental. El análisis de razonamientos lo abordamos con más detalle en el apartado 2.4 (página 43)
- Y finalmente las estrategias que se pueden definir como procesos que se realizan dentro de una estructura conceptual.

### *2.3.1.2. Sistemas de representación*

El uso de representaciones ha sido de gran relevancia en la Educación Matemática; esto ha provocado que su uso se analice desde hace ya algún tiempo (p.e., Kaput, 1987) y desde distintas perspectivas. Su relevancia radica en que “para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos" (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 66). Tanto Kaput (1987) como Hiebert y Carpenter (1992) reconocen la existencia de representaciones internas, definiéndolas como aquellas que permiten a la mete operar sobre ellas.

Golding y Kaput (1996) entienden representación como cualquier cosa externa para representar algo; además, consideran que los sistemas de representación organizan experiencias en las que se resaltan propiedades y relaciones. De forma similar Morgan y Kynigos (2017) aseguran que cada representación crea significado.

Otra forma de entender qué es una representación es la dada por Castro y Castro (1997) quienes afirman que "las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características más relevantes" (p. 96). En ese sentido, se distinguen dos grandes familias de representaciones, las simbólicas y las gráficas de quienes a su vez se desprenden los siguientes tipos de representaciones: simbólico, gráfico, numérico y verbal.

Cada sistema de representación dispone de reglas y convenios que permiten su manipulación. Asimismo, cada uno de ellos pone de manifiesto, o bien oculta, determinadas propiedades del concepto, de ahí que el concepto no se agota con un determinado tipo de representación. Aportando modos distintos en que las personas procesan esos conceptos y estructuras matemáticas (Kaput, 1987). Así, para este trabajo se considerará el conjunto de signos, gráficos y reglas que se ponen de manifiesto al evocar el significado de concepto de derivada.

#### *2.3.1.3. Sentidos y modos de uso*

Para Ruiz-Hidalgo (2016) "las diversas formas de entender, expresar y usar un concepto constituyen su significado conjuntamente" (p. 139). Asimismo, Freudenthal (1986) considera que los conceptos matemáticos, estructuras e ideas sirven para organizar los fenómenos, los cuales a su vez tienen indudablemente relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos. Por lo tanto, para finalizar el análisis del significado de un concepto, se incluye el estudio de los diversos sentidos y modos de uso de este; se consideran en esta categoría aquellos términos, contextos, fenómenos, situaciones o problemas que están presentes al referirnos al concepto y que le dan sentido. Por lo tanto, para este trabajo se prestará atención a las siguientes componentes (Rico et al., 2015):

- A los distintos términos y modos de usos cotidianos empleados para referirse a la derivada, ya que estos ayudarán a conocer sus diversos sentidos.
- A los contextos matemáticos que da respuesta el concepto, se trata de identificar ¿Qué tipo de problemas usan este concepto?, es decir, su función.
- Las situaciones en las que tiene aplicación y se trabaja el concepto.

En el apartado de resultados se ejemplificarán estos componentes y elementos con los aspectos analizados sobre la derivada de una función en un punto; mientras tanto, en la tabla 2.2 se muestra algún ejemplo.

Tabla 2.2. *Ejemplos sobre la derivada de los distintos componentes del significado*

| *Organizador* | *Componente* | *Ejemplo* |
|---|---|---|
| Estructura conceptual | Hechos | Términos relacionados: límite, recta tangente, entre otros.<br>Convenio: denotar la derivada en un punto como $f'(a)$ |
| | Conceptos | Definición de derivada o la de derivadas laterales.<br>Relación existente entre distintos conceptos. |
| | Estructuras | Conjunto de todas las funciones derivables en un intervalo dado, con las propiedades que permiten considerarlo espacio vectorial. |
| | Destreza | Procedimiento para hallar máximos y mínimos de una función. |
| | Razonamiento | Si toda función derivable en un punto es continua en dicho punto, entonces, una función no continua en un punto no puede ser derivable en ese punto.<br>En general, uso de las propiedades de las funciones derivables para resolver tareas no procedimentales como la representación gráfica detallada de funciones o para justificar y explicar comportamientos de las funciones. |
| | Estrategia | Aplicación de distintas herramientas para resolver problemas de optimización.<br>Decidir el razonamiento más apropiado o combinar razonamientos para resolver situaciones de derivación no habituales. |

Tabla 2.2. *Ejemplos sobre la derivada de los distintos componentes del significado*

| *Organizador* | *Componente* | *Ejemplo* |
|---|---|---|
| Sistema de representación | Verbal | La derivada de la función en el punto 4 es igual a 20 |
| | Simbólico | $f'(4) = 20$ |
| Sentidos y modos de uso | Modo de uso | La derivada como la velocidad de un objeto |
| | Contexto | Problemas de optimización |
| | Situación | El ejemplo de la velocidad estaría dentro de una situación física. |

## 2.4. Razonamiento y argumentación

El análisis de los significados es una herramienta que atiende a diferentes niveles de complejidad cognitiva, dentro de la estructura conceptual. En un primer nivel, se pueden analizar los hechos y las destrezas, cómo se manipulan y operan los objetos, cómo se expresan o representan y cómo y para qué se usan. En un segundo nivel, se encuentran los conceptos y los razonamientos. Al igual que con los hechos, se trata de analizar cómo se expresan, manipulan, representan y usan los conceptos, incluyendo cómo se razona y argumenta cuando se realizan tareas matemáticas.

La complejidad de los conceptos y, en particular, de los razonamientos nos obliga a considerar un marco interpretativo más amplio, que permita analizar los textos y discursos. Se trata, además, de un tópico ampliamente estudiado en educación matemática. Por ello, presentamos una fundamentación teórica de los razonamientos.

Para Lithner (2008) el *razonamiento* se define como la línea de pensamiento adoptada para traducir afirmaciones y llegar a conclusiones en la resolución de tareas, además, menciona que esta forma de proceder no se basa necesariamente en la lógica formal, por lo que no se restringe a demostraciones formales. También señala que esta línea de pensamiento puede ser incluso incorrecta siempre que, para quien razona, existan razones "válidas" que lo respalden. El mismo autor distingue dos tipos de razonamiento empleado en la resolución de tares matemáticas: el imitativo y el creativo.

- El imitativo es el razonamiento basado en la experiencia y puede ser o bien memorizado, es decir, recordar una respuesta completa y escribirla (una demostración específica, por ejemplo); o bien, algorítmico, en donde la estrategia consiste en elegir un algoritmo adecuado que resuelva el problema. El razonamiento algorítmico tiene la particularidad de que puede ejecutarse con escasa comprensión del tema.

- El creativo es un razonamiento cuya estrategia es construida, y aunque usa conocimiento básico, este conocimiento es el que guía la elección de la estrategia; su aspecto más notable es que los argumentos se basan en propiedades matemáticas.

A su vez, Lithner (2003) entiende por *argumento* ese sustento o parte del razonamiento que apunta a convencer que el razonamiento es apropiado. La argumentación se ha relacionado frecuentemente con la prueba o demostración. De hecho, en algunas ocasiones son usados como sinónimos, aunque hay quienes afirman que son nociones completamente distintas (Reid y Knipping, 2010). De Villiers (1990) plantea que la demostración matemática tiene distintas funciones, entre ellas:

- De verificación/convicción: en donde la demostración permite establecer la validez de una afirmación. El autor recalca además que no requiere ser una demostración rigurosa, y que incluso puede contener errores; pues su intención es principalmente la de convencerse a sí mismos o a los demás.
- De explicación: aquí la función de la demostración no es solo "asegurarse", sino dar una explicación satisfactoria del porqué.
- De sistematización: la función de la demostración es ahora sistematizar varios resultados por medio de un sistema deductivo. Ayuda a dar una perspectiva global y a identificar inconsistencias.
- De descubrimiento: aquí la demostración tiene como función descubrir nuevo conocimiento matemático.
- De comunicación: entendiendo aquí la demostración como el medio de comunicación entre quienes hacen matemática.

Desde esta perspectiva, podría considerarse las justificaciones o argumentos como demostraciones, entendiendo que la justificación pretende convencer de la veracidad de un enunciado o afirmación; siendo conscientes de que no constituyen necesariamente una demostración formal.

En ese sentido, Duval (1990) indica que la argumentación no constituye necesariamente una prueba, sino que se trata más bien de una justificación sobre una afirmación o tesis, siendo el argumento lo que se usa para refutar o afirmar la proposición y que este puede tratarse de una definición, un teorema, un ejemplo, entre otros. De manera similar, Balacheff (2008) considera que el argumento es un recurso que se emplea para convencer sobre la posición que se tiene de algo, incluso aunque no sea cierto; mientras que una prueba matemática es más estructurada y requiere de la aceptación por parte de la comunidad matemática.

De esta forma, dentro del marco del significado de un contenido matemático escolar, los argumentos tendrían lugar en la estructura conceptual, particularmente en el campo procedimental, y más específicamente en los razonamientos que se ponen de manifiesto al trabajar la derivada; es decir cómo procesan y entienden dicha noción.

### *2.4.1. Análisis de los argumentos*

La importancia del análisis de los argumentos radica en que al estudiar los componentes del argumento se tiene una aproximación sobre la comprensión y percepción que se tiene sobre las matemáticas (Koleza et al., 2017), además permiten identificar y categorizar patrones de razonamiento (Metaxas et al., 2016). En nuestro caso particular, describir la forma de entender la derivada que manifiesta el profesorado.

El estudio de los argumentos matemáticos dados por docentes y estudiantes ha sido abordado en distintas investigaciones (p. e. Knipping y Reid, 2013; Metaxas et al., 2016) desde diversas perspectivas. Las tareas de justificación o argumentación, dirigidas tanto al docente como al estudiante, pueden clasificarse, según su naturaleza, en cuatro:

- Decisión: tareas en las que se plantea una situación y opciones de respuesta y el individuo debe elegir y justificar su decisión.
- Inferencia: tareas en un contexto real, que requieren interpretar resultados matemáticos en dicho contexto.
- Validación: aquí se requiere de argumentos que apoyen o rechacen una afirmación o declaración.
- Elaboración: aquí se espera que el estudiante construya o elabore el proceso que se usó para obtener un resultado.

Otro marco utilizado frecuentemente en el análisis de pruebas y argumentos es el de Harel y Sowder (1998), quienes plantean tres tipos de esquema diferente que una persona puede adoptar al argumentar. Los autores afirman que el esquema elegido está estrechamente relacionado con la posición de la persona ante el enunciado y su forma de entender la matemática. Los esquemas que plantean son:

- Convicción externa: es una prueba que se fundamenta en la visualización de la matemática como un conjunto de verdades indiscutibles o fórmulas que se aplican para resolver problemas. Por lo general atienden a métodos aprendidos de memoria que les garantiza el éxito.
- Empíricos: en este caso la prueba apela a factores físicos o experimentales; por lo general la prueba se basa en la presentación de un ejemplo (o contraejemplo), o bien a su propia percepción (no necesariamente correcta)
- Analíticos: es aquel que se basa en la lógica deductiva, involucrando una secuencia lógica de declaraciones. En este caso se reconocen la generalidad de los objetos matemáticos.

De forma similar, Walton y Macagno (2016), plantean una clasificación para los esquemas de argumentación que ha sido ampliamente utilizada, en la que consideran cuatro tipos de esquema:

- Argumentos basados en la fuente: se basan en aspectos teóricos o bien en una autoridad (lo que el docente dice)
- Argumentos que aplican reglas a los casos: el argumento consiste en clasificar entidades bajo una regla general, extrayendo una conclusión particular de la misma.
- Argumentos de descubrimiento: argumentos que tienen como objetivo establecer reglas o entidades, creándolas.
- Razonamiento práctico: se distingue como un tipo distinto de argumento, ya que su conclusión está orientada a la acción (o una evaluación sobre la conveniencia de una acción) y se basa en consideraciones vinculadas a valores y evaluaciones de acciones futuras.

En nuestro caso, para el análisis de los argumentos asumimos una de las herramientas metodológicas más utilizadas: el modelo de Toulmin (1958), en el cual se establece que en un argumento se involucran 6 elementos: afirmación (claim), datos (data), garantía o justificación (warrant), respaldo (backing), cualificador modal (modal qualifier) y refutación (rebuttal). Emplearemos el modelo actualizado y específicamente adaptado para la educación matemática expuesto en Reid y Knipping (2010), en el que se contemplan únicamente los cuatro primeros elementos, entendiéndolos de la siguiente manera:

- Afirmación: conclusión, tesis o hipótesis que se defiende
- Datos: evidencia, hechos o prueba que apoyan la afirmación
- Garantía (justificación): regla o teoría que da paso de los datos a la afirmación
- Respaldo: apoyo a la garantía o justificación dada, se emplea para dar fuerza a la justificación o clarificarla. Por ejemplo, el argumento dado puede ser un teorema conocido que justifica la afirmación. Pero además de esto, se puede ejemplificar o bien justificar por qué el teorema es aplicable.

La elección de este modelo se debe a que nuestro interés está en las justificaciones que emplean los docentes al abordar tareas sobre derivada, así como el respaldo que se brinda. Para ampliar el análisis de estas justificaciones, consideramos además un esquema similar al de Stylianides (2007), en el que se contemplan tres componentes: elemento matemático empleado, modo de argumentar (cómo lo emplea) y el modo de representarlo; los cuales describimos a continuación.

#### *2.4.1.1. Elemento matemático empleado*

Para el análisis de este primer componente, realizamos un análisis de contenido identificando el elemento matemático de la estructura conceptual en el que se basa el argumento; prestando atención a si se trata de una definición, un axioma, un teorema, un aspecto gráfico, un procedimiento, entre otros.

#### *2.4.1.2. Modo de argumentar*

Solow (2006) plantea una serie de técnicas empleadas al realizar una demostración matemática, las cuales pueden aplicarse también a argumentos. Él asegura que las demostraciones se fundamentan en un método al que denomina *retroceder-avanzar*, ya que al demostrar una implicación de la forma $A \Rightarrow B$, donde $A$ es la hipótesis y $B$ lo que queremos concluir, tenemos dos opciones:

- Preguntarnos ¿cómo o cuando puedo demostrar que $B$ es verdadero? Es decir, iniciar de atrás hacia adelante (retroceder), o bien,
- Asumir que $A$ es verdadero y preguntarnos ¿Qué implica que $A$ sea verdadero? obtener de esa forma otra proposición y así sucesivamente hasta obtener $B$ (avanzar).

En ambos casos Solow (2006) considera que la clave está en la pregunta que nos hacemos y la respuesta que damos a la misma. Además, señala que para responder a esta podemos hacer uso de definiciones o bien de resultados ya establecidos, los cuales pueden utilizarse mediante una implicación lógica; en la tabla 2.3 se muestran los tipos de implicaciones que se pueden hallar. No todos los enunciados que se utilizan son verdaderos, solo son para ilustrar la estructura de la implicación lógica correspondiente.

Tabla 2.3. *Tipos de implicaciones lógicas*

| *Implicación lógica* | *Escritura* | *Ejemplo* |
|---|---|---|
| Directa | $A \Rightarrow B$ | Si una función es derivable en un punto, esa función es continua en dicho punto. |
| Recíproca | $B \Rightarrow A$ | Si una función es continua en un punto, entonces es derivable en ese punto. |
| Contraria | $\neg A \Rightarrow \neg B$ | Si una función no es derivable en un punto, entonces no es continua en ese punto. |
| Contrarrecíproca | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | Si la función no es continua en un punto, entonces no es derivable en ese punto. |

Así, prestaremos también atención a la implicación empleada al involucrar los elementos matemáticos en la justificación, esto nos permitirá analizar las distintas formas de utilizar un mismo elemento matemático y la influencia que esto pueda tener en la justificación presentada. Dado que el tipo de implicación dependerá de la que se considere como directa, en el apartado de resultados se establece la que se toma en consideración al definir las demás.

### *2.4.1.3. Modo de representación del argumento*

Este último componente tiene que ver con la forma en la que el argumento es representado. Distintos autores han clasificado las pruebas y argumentos; en nuestro caso seguiremos la propuesta de Reid y Knipping (2010) quienes atienden a la clasificación hecha por otros autores y además se centran en los sistemas de representación. Los autores consideran cuatro grandes categorías de argumentos, los cuales a su vez derivan en distintas subcategorías. Por cuestión de espacio y dado que en nuestro trabajo no se detectó mucha variedad al representar los argumentos, a continuación, describimos solamente algunas de ellas:

- Empíricos: que son aquellos basados en un ejemplo específico y no necesariamente representativo de la situación. Implica el análisis de uno o varios casos concretos. Algunas subcategorías:
    - Tipos: Mostrar diferentes casos o ejemplos.
    - Perceptual: un dibujo de un caso particular
- Genéricos: en este caso también se recurre a ejemplos, pero aquí se trata de un caso representativo de una clase, es decir, el esquema argumentativo se puede transferir a cualquier otro ejemplo de la clase.
    - Pictórico: un dibujo representativo.
- Simbólicos: argumentos y pruebas dados utilizando palabras y simbología matemática.
    - Narrativo: emplea principalmente palabras
    - Simbólicos: emplean más símbolos, aunque se apoyan también en palabras.
- Formales: son argumentos presentados de manera sintáctica, usando la menor cantidad de palabras posibles, son argumentos que constituyen una prueba, la cual se escribe mediante símbolos que fuera de un contexto matemático probablemente no significan nada.

La clasificación se basa en el uso que dan a los sistemas de representación, pero puede apreciarse como las categorías contemplan pruebas de menos a más formales. Así, por ejemplo, tanto los argumentos simbólicos como los formales emplean el sistema de representación simbólico, pero su nivel de formalidad es muy distinto. En los simbólicos no necesariamente se trata de una prueba formal, de hecho, puede incluir palabras como complemento, mientras que los argumentos formales se refieren a pruebas y demostraciones matemáticas que se caracterizan por ser muy sintácticas, evitando el uso de palabras. En el apartado de resultados ejemplificamos esto.

## 2.5. Tareas escolares

Se entiende *tarea escolar* como una propuesta o actividad que el docente plantea a sus estudiantes, la cual incluye una amplia gama de acciones, como: ejercicios, construcción de un objeto, dar ejemplos, decidir entre posibilidades, experimentos, entre otros. De manera general, se considera tarea escolar todo aquello que el docente use para trabajar interactivamente con el estudiante, pidiéndole que haga algo (Margolinas, 2014). En palabras de Moreno y Ramírez (2016) es "una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje" (p. 244).

Dada la importancia y el papel de las tareas escolares en el proceso de enseñanza y aprendizaje (comentada en el capítulo 1) es que su análisis resulta relevante. Por ello, diversos autores han creado categorías que permiten su caracterización y análisis. Por ejemplo, Ponte (2004) señala que toda tarea se caracteriza principalmente por dos aspectos: su dificultad y su estructura. Planteando que la dificultad varía entre los polos "accesible" y "difícil", mientras que por su estructura la tarea puede catalogarse como "abierta" o "cerrada". Y que al cruzar ambas dimensiones o aspectos es posible distinguir cuatro tipos de tarea, tal como lo muestra la figura 2.4. Así se tiene que una tarea puede ser un ejercicio, un problema, un proyecto o bien una investigación.

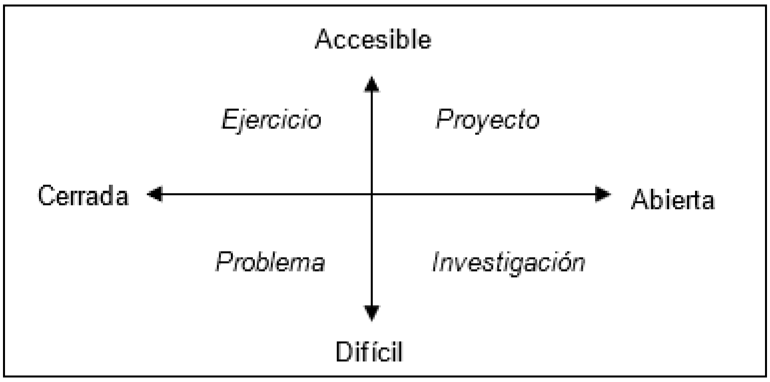



*Figura 2.4.* Clasificación tareas de Ponte

De manera similar, Sullivan et al. (2013) proponen que una buena enseñanza de la matemática debe incluir al menos tres tipos de tareas: (a) representativas, entendidas como aquellas en las que se usan modelos, materiales o representaciones; (b) contextualizadas, que son las diseñadas en contextos prácticos o reales; y (c) abiertas, las cuales tienen más de una respuesta posible.

Asimismo, existen otras clasificaciones de tareas, por ejemplo, Pointon y Sangwin (2003), refinaron el esquema dado por la Taxonomía de Bloom, obteniendo 8 tipos de tarea matemática:

1. Recalcar hechos
2. Realizar un cálculo de rutina o algoritmo
3. Clasificar algún objeto matemático
4. Interpretar situación o respuesta
5. Prueba, muestra, justifica— (argumento general)
6. Extiende un concepto
7. Construir ejemplo / instancia
8. Critica una falacia

O bien, Swan (2008) quien categorizó las tareas matemáticas, según la solicitud de estas en: clasificar objetos matemáticos, interpretar representaciones múltiples, evaluar enunciados matemáticos, crear problemas y analizar razonamientos y soluciones.

Por su parte, Stein et al. (1996) consideran que los criterios para elegir una buena tarea son: nivel del estudiante y la demanda cognitiva, distinguiendo cuatro tipos de tarea según su demanda, tal como se muestra en la tabla 2.4. Esta clasificación es posiblemente una de las más empleadas en el análisis de tareas (p. e. Cai y Jiang, 2017; Tekkumru-Kisa et al., 2015).

Tabla 2.4. *Taxonomía propuesta por Stein et al. (1996)*

| *Tipo de demanda* | *Descripción* |
|---|---|
| Memorización | Son aquellas tareas que piden al estudiante recordar hechos, reglas o definiciones. La respuesta implica una reproducción exacta y memorizada. No se emplea ningún tipo de procedimiento. |

Tabla 2.4. *Taxonomía propuesta por Stein et al. (1996)*

| *Tipo de demanda* | *Descripción* |
|---|---|
| Procedimiento sin conexión | El fin de la tarea es aplicar algún algoritmo para resolver un problema; sin embargo, se trata más de aplicar que de comprender. Estas tareas se caracterizan porque no requieren explicaciones y porque no hay ambigüedad sobre lo que hay que hacer y cómo hacerlo |
| Procedimiento con conexión | Estas tareas, aunque tienen un procedimiento para ser resueltas, su intención va más allá del proceso mismo, intentando desarrollar niveles más profundos de comprensión acerca de los conceptos e ideas matemáticas. Su principal característica es que no son tareas que pueden resolverse solo conociendo el algoritmo, requieren cierto esfuerzo por parte del estudiante. |
| Hacer matemática | Estas son las tareas de mayor demanda cognitiva, ya que requieren un pensamiento no algorítmico, pues el camino de resolución no está predeterminado. Requieren una verdadera comprensión de los conceptos, procesos, propiedades y así establecer relaciones entre estos |

De forma similar, la revisión de algunos trabajos realizados permite identificar otros marcos que se han utilizado para el análisis de tareas (p. e. Brändström, 2005; Verschaffel et al., 2000). Sin embargo, dado que la línea de investigación basada en libros de texto es relativamente reciente, aún no se dispone de un marco teórico unificado que especifique todas las herramientas disponibles (Fan, 2013).

En nuestro caso, dentro del análisis didáctico que empleamos como elemento vertebral del marco teórico, las tareas se consideran objetos de la dimensión ética/formativa, es decir, el análisis de las tareas se realiza en el análisis de *instrucción,* en el cual, uno de los elementos primordiales es el estudio y diseño de tareas, indagando en sus variables, funciones y los distintos tipos existentes. En esa línea, para estudiar e identificar el significado de derivada que manifiestas las tareas propuestas en los libros de texto, contemplamos las categorías de análisis de tareas propuestas por Moreno y Ramírez (2016) y Gómez y Romero (2015), las cuales organizamos en tres grandes bloques:

- Relacionadas con aspectos sintácticos (forma) de la tarea: este primer bloque contempla la estructura y la formulación de la tarea; además los materiales y recursos necesarios para su resolución.
- Relacionadas con aspectos semánticos (de significado): se consideran aquí algunos elementos que conforman el significado de la derivada y que pueden ser analizados

en una tarea matemática escolar, como lo son: el contenido, los sistemas de representación, el contexto, la situación y el tipo de función involucrada.

- Relacionadas con aspectos de aprendizaje o cognitivos: en cuanto a este aspecto analizaremos la demanda cognitiva y la capacidad de la tarea, así como el manejo de sistemas de representación que se solicita.

En el apartado de metodología se describe cada una de las variables incluidas dentro de cada bloque.

# CAPÍTULO 3

# Metodología

En este capítulo se describe la metodología empleada para el desarrollo de esta investigación. Hemos intentado incorporar cada detalle, lo cual permita visualizar el trabajo realizado. Para alcanzar los objetivos propuestos, se desarrollaron fundamentalmente tres fases; por lo tanto, hemos organizado este capítulo en 5 apartados, los dos primeros están dedicados al diseño y al alcance de la investigación, los otros tres describen las características metodológicas de cada fase.

## 3.1. Diseño de la investigación

Esta tesis se ubica dentro de las investigaciones de *diseño mixto*; las cuales contemplan el enfoque cualitativo y cuantitativo como aproximaciones complementarias para abordar un fenómeno. Hernández-Sampieri y Mendoza (2008) lo definen como un proceso sistemático de investigación que implica la recolección y análisis de datos cualitativos y cuantitativos, seguida de una integración y discusión de los resultados de forma conjunta.

En palabras de Johnson et al. (2007) es el tipo de indagación donde el investigador mezcla o combina técnicas, métodos y lenguaje cualitativo y cuantitativo en un solo estudio. En nuestro caso, y como detallaremos más adelante, empleamos herramientas de ambos enfoques, como lo son: cuestionario de respuesta abierta, cuestionario de respuesta cerrada, análisis de contenido y análisis clúster. El fin de esta combinación es, tal como señalan

Hernández-Sampieri et al. (2010), tener una visión más completa e integral de la temática que se estudia.

El trabajo desarrollado se compone de tres fases o estudios. Cada una de ellas respondiendo a uno de los tres primeros objetivos específicos, los otros dos objetivos se alcanzan tras la comparación y discusión de los resultados que surjan en estas tres fases.

- La primera fase corresponde al estudio en el que se analiza el significado que atribuyen futuros docentes al concepto de derivada. Esta fase es principalmente cualitativa, en la que empleamos un cuestionario de respuesta abierta y el método del análisis de contenido.
- La segunda fase corresponde al estudio del significado de derivada que trasmiten los libros de texto. Para este empleamos el método del análisis de contenido, por lo que también es una fase fundamentalmente cualitativa.
- La tercer y última fase constituye un estudio cuantitativo. El objetivo era identificar el significado que dan docentes en activo a la noción de derivada. Para ello empleamos un cuestionario de respuesta cerrada, el cual se construyó con base en los resultados obtenidos de la fase 1.

Para finalizar, tanto en la fase 1 como la 2, incluimos un análisis clúster que nos permitió describir con mejor claridad los resultados obtenidos, distinguiendo perfiles de significado dados a la derivada. De esta forma, en una misma fase se emplearon métodos cualitativos y cuantitativos. En los diseños mixtos, esta integración es conocida como *diseño mixto de conversión*, mediante la cual datos cualitativos se convierten en cuantitativos y se analizan ambos tipos de datos (Hernández-Sampieri et al., 2010), ampliando la perspectiva de los resultados.

En cuanto a la ejecución de la fase 1 y 3, se habla de un *diseño mixto exploratorio secuencial* en el que las fases se desarrollan de forma separada, pero los resultados obtenidos en la primera se utilizan como base de la siguiente. Para Hernández-Sampieri et al. (2010) un procedimiento típico en estos diseños es:

- Recoger y analizar datos cualitativos (lo que hicimos durante la primera fase).
- Diseñar un cuestionario cerrado.

- Aplicar el instrumento y obtener datos cuantitativos (precisamente lo realizado en la tercera fase).

La fase dos, aunque no se realiza de forma secuencial, viene a ser un complemento necesario para el logro de los objetivos propuestos. La estructura del diseño se resume en la figura 3.1, donde la flecha destaca el carácter secuencial de las fases 1 y 3. Pese a que la fase dos se realizara de forma separada, los resultados de cada estudio se integran y forman un todo más amplio que la suma de sus partes, que permiten la consecución de los objetivos OE4 y OE5.

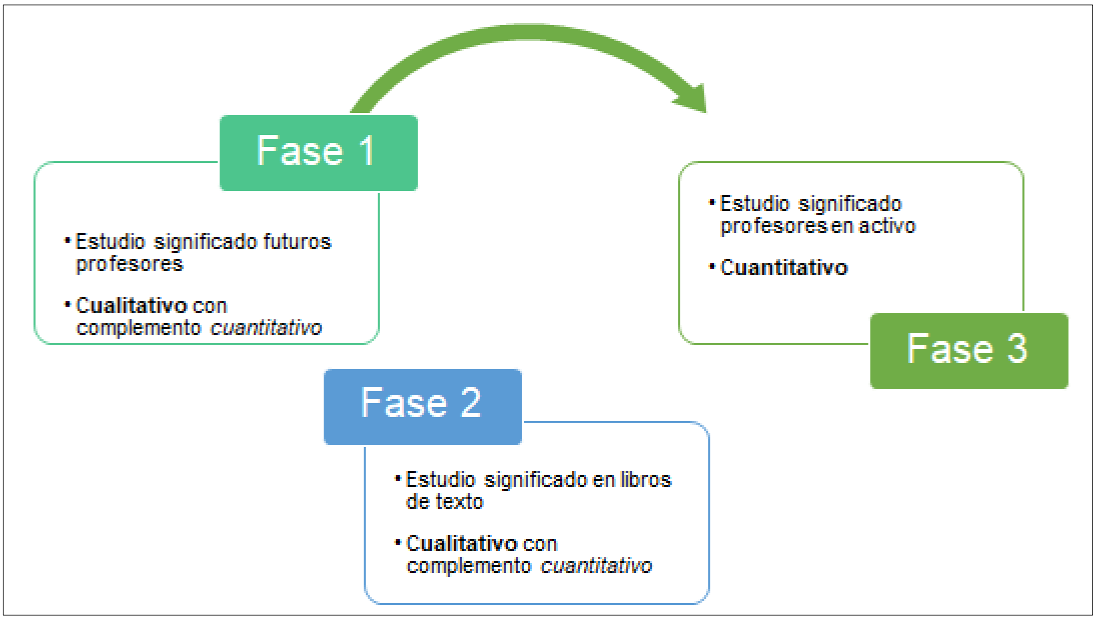



*Figura 3.1*. Fases de la investigación

Johnson et al. (2007) consideran que, en los diseños mixtos, el enfoque cualitativo y el cuantitativo pueden tener el mismo peso o centrarse más en uno de ellos. Desde su perspectiva, nuestro trabajo es de predominio cualitativo complementado con un enfoque cuantitativo.

La selección del diseño mixto tiene fundamentalmente dos razones: (a) la flexibilidad del diseño, y (b) el ajuste de este a los objetivos propuestos. El complemento del enfoque cuantitativo en las fases 1 y 2 enriquecieron mucho los resultados obtenidos, permitiéndonos una mejor exploración y explotación de los datos (Todd et al., 2004); asimismo, el empleo del enfoque cuantitativo en la fase 3 nos permitió la construcción de un instrumento cerrado que, además de la consecución del objetivo OE3, nos facilitaba la aplicación a la muestra seleccionada y su posterior análisis.

## 3.2. Alcance de la investigación

El alcance del trabajo es de naturaleza exploratoria y descriptiva (Cohen et al., 2011; Hernández-Sampieri et al., 2010). Exploratoria ya que se propone profundizar en una temática poco estudiada, lo cual se respalda tras la revisión de la literatura. Además, tal como mencionan Hernández-Sampieri et al. (2010) también son de carácter exploratorio aquellas investigaciones en las que “deseamos indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas” (p. 79) y en nuestro caso el análisis del significado que atribuye el profesorado al concepto de derivada, examinado bajo el marco del significado de un contenido matemático escolar, no se ha llevado a cabo.

Del mismo modo, la investigación se enmarca como descriptiva ya que su fin último es detallar los distintos significados –cómo lo entienden, utilizan e interpretan- evocados tanto por los docentes de matemática como por los libros de texto.

## 3.3. Aspectos metodológicos fase 1: estudio con futuros docentes

Tal como indicamos anteriormente, esta fase perseguía la consecución del primer objetivo específico (OE1), por lo que se centraba en el significado que tiene la derivada para futuros docentes. El proceso llevado a cabo fue principalmente cualitativo, sin embargo, para finalizar realizamos una conversión de los datos a cuantitativos para explorarlos y aprovecharlos aún más, lo que nos permitió ver con mayor claridad los distintos significados que se le atribuyen a la noción de derivada.

### *3.3.1. Participantes*

El trabajo se llevó a cabo con estudiantes del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Universidad de Granada, que cursaban la asignatura Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas durante el curso académico 2016/2017 y 2017/2018. Los participantes fueron seleccionados intencionalmente y por disponibilidad, dicha selección no representa una limitación ya que el objetivo no es generalizar (Cohen et al., 2011).

En total se contó con la participación de 98 estudiantes para profesor, 44 eran mujeres, 49 hombres (de los otros 5 no se tiene información sobre género). La formación de grado de los participantes era variada, tal como se muestra en la tabla 3.1.

Tabla 3.1. *Formación de los participantes de la fase 1*

| *Formación universitaria* | *Frecuencia* |
|---|---|
| Matemáticas | 54 |
| Ingeniería | 23 |
| Arquitectura | 6 |
| Física | 4 |
| Estadística | 3 |
| Pedagogía | 3 |
| Contabilidad | 1 |
| Sin información | 4 |

En todas las carreras referenciadas, a excepción de pedagogía, se ha cursado al menos una asignatura de cálculo, donde el tema de derivada se ha abordado. Además, más de la mitad de los participantes asegura tener algún tipo de experiencia enseñando matemáticas, aunque sea a nivel de clases particulares.

### *3.3.2. Instrumento para la recogida de datos*

Para la recogida de datos se diseñó un cuestionario semántico (Vander-Klok, 2014). Este tipo de instrumento tiene por objetivo "recoger palabras, términos, símbolos, gráficas, descripciones, explicaciones y otras notas que expresan y representan un modo de apropiación por cada sujeto del concepto considerado" (Martín-Fernández et al., 2016, p. 56). Con el cuestionario se pretendía identificar las nociones, correctas o no, que expresan los docentes en formación respecto al concepto de derivada, ya que no era intención del estudio, ni la finalidad de los cuestionarios semánticos, realizar una valoración o evaluación del conocimiento que tienen al respecto.

Para ello, diseñamos preguntas de respuesta abierta con las que los futuros docentes evidenciaran su manera de entender los elementos básicos de la derivada, como son: definición, requisitos, condiciones y algunos teoremas. Para su construcción consideramos oportuno analizar la definición, interpretación, notación, principales aspectos y teoremas que abordan los libros de texto al introducir el concepto (ver apéndice A, página 214). Para ello revisamos el libro de Burgos (2007) y el de Spivak (2012); siendo estos los más sugeridos en las guías docente de los cursos de Cálculo de las Universidades españolas (Herrera et al., 2017). Tras el análisis y tomando en consideración los distintos componentes y elementos del significado que nos brinda nuestro marco teórico, diseñamos tres tareas o preguntas de respuesta abierta, cuyo enfoque y finalidad era el siguiente:

- *Tarea 1: definición de derivada*

  Definir con sus propias palabras el concepto de derivada; el objetivo era conocer en términos generales cómo definen dicho concepto, los elementos o características destacan y alguna forma de representación que la noción les evoque.
- *Tarea 2: verdadero y falso*

  En esta tarea se solicitaba justificar la veracidad o falsedad de algunos enunciados dados respecto a la derivada (ver figura 3.2). La idea era ampliar, a partir de las argumentaciones proporcionadas, la concepción que reflejaban los futuros docentes tras definir derivada; esto al profundizar un poco en su forma de entender propiedades particulares de esta noción.
- *Tarea 3: aplicaciones*

  Tal como se indicó en el marco teórico, para entender un concepto matemático, no basta con analizar sus propiedades; un aspecto importante es saber su aplicación y utilidad en distintos contextos. Con la tercera tarea se esperaba obtener información de cómo entienden los futuros docentes la derivada en términos de aplicaciones, analizando los contextos y las situaciones en las que esta es concebida. Para ello, se les solicitó escribir las aplicaciones o situaciones en las que ellos consideraban se utilizaba la derivada, además de escribir un problema al respecto.

1. ( ) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, tiene por gráfica la que se muestra en la figura 1. La recta $m$ es tangente a la curva en $x = 1$; de esta forma es fácil asegurar que $f$ es derivable en ese punto.

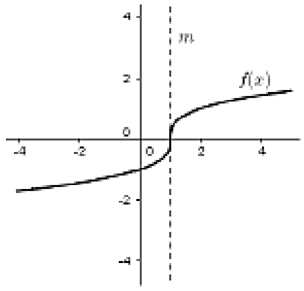



*Figura 1.* Gráfica de $f$

2. ( ) Dada la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$; con $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $f$ es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 5$.

3. ( ) Para la función $g$, cuya gráfica se muestra en la figura 1

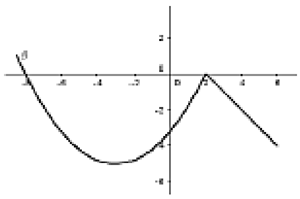


*Figura 2.* Gráfica de $g$

Se puede afirmar que como $g$ tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $g'(2) = 0$.

4. ( ) La función $h(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ cuya gráfica se muestra en la figura 2, satisface que $\lim_{x \to 0^-} h'(x) = \lim_{x \to 0^+} h'(x) = 0$. Por lo tanto $h'(0) = 0$.

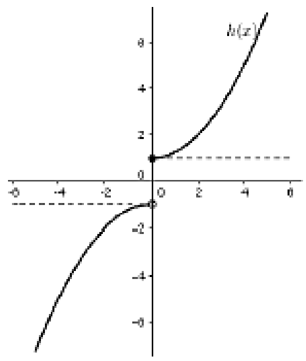



*Figura 3.* Gráfica de $h$

*Figura 3.2.* Enunciados de la tarea 2

Una vez diseñadas las tareas, se decidió elaborar dos versiones del instrumento, A y B, con la intención de que su aplicación no demandara mucho tiempo a los participantes. La versión A incluyó la tarea 1 y dos primeros enunciados de la figura 3.2. La versión B contemplaba la tarea 1 y 3, además de los dos enunciados restantes de la tarea 2 (ambas versiones se pueden ver en el apéndice B, página 217). El objetivo era examinar cómo abordaban las tareas los futuros docentes, no evaluarlos, por lo que no era indispensable que todos los participantes respondieran a las 3 tareas, lo importante era tener información que nos pusiera de manifiesto el significado que se le da al concepto de derivada. De ahí que el diseño de dos versiones no suponía un problema.

### 3.3.3. Aplicación del instrumento

Como ya se indicó, la aplicación del instrumento se llevó a cabo en dos ciclos lectivos. Una primera aplicación en febrero del 2017 y una segunda un año más tarde. En la tabla 3.2 se puede apreciar el número de participantes en cada aplicación, así como la cantidad de respuestas obtenidas para cada versión del cuestionario.

Tabla 3.2. *Número de participantes en cada aplicación*

| | *Versión del cuestionario* | |
|---|---|---|
| *Año de aplicación* | A | B |
| 2017 | 19 | 18 |
| 2018 | 24 | 37 |
| Total | 43 | 55 |

En ambos casos se brindó aproximadamente 45 minutos para que respondieran al instrumento. No se realizó ninguna organización particular de las mesas, ni distribución de estudiantes, utilizándose la ubicación habitual de la clase. Se repartió de forma alternada ambas opciones de cuestionario. Para iniciar se dieron algunas instrucciones de manera general. Durante la aplicación el profesor del grupo acompañó a la investigadora durante todo el proceso y ambos resolvieron dudas intentando no influir en la resolución. No hubo ninguna incidencia relevante durante ninguna de las dos sesiones.

### 3.3.4. Análisis de los datos

El primer paso para analizar los datos fue la transcripción de cada una de las respuestas obtenidas, identificando a los distintos participantes por la letra A o B, según la versión del cuestionario que respondieron y un número del 1 al 43 o del 1 al 55 según fuera el caso. Posteriormente recurrimos al análisis de dichas respuestas. Para ello empleamos dos métodos de análisis: el *análisis de contenido* y el *análisis clúster o de conglomerados*, los cuales se detallan a continuación.

#### *3.3.4.1. Método: análisis de contenido*

El análisis de contenido se puede definir como un proceso sistemático de selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación, que permite hacer inferencias válidas y confiables respecto a nuestro tema de interés (McMillan y Schumacher, 2005). Este análisis nos permite destacar las características relevantes de un mensaje, lo cual a su vez facilita la descripción y análisis de los datos (Hernández-Sampieri et al., 2006).

El análisis de contenido es uno de los más extendidos en las ciencias sociales (Mayring, 2015); el cual "se ha venido utilizando en educación matemática como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 11). Su utilidad en la Educación Matemática radica en que nos brinda la posibilidad, entre otras cosas, de:

- Descubrir patrones en el discurso.
- Contrastar una hipótesis previa.
- Inferir significados interpretativos en un texto (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 9).

A pesar de que no existe una manera "correcta" de realizar el análisis de contenido, ya que puede efectuarse de diversas formas y mediante distintos "caminos", el proceso que desarrollamos se basa en la propuesta realizada por Rico y Fernández-Cano (2013) que describimos a continuación:

- *Delimitar el corpus de contenido a analizar:* en este caso el corpus a analizar eran las respuestas dadas por los futuros docentes a las distintas tareas propuestas en los cuestionarios elaborados.
- *Concretar la unidad de análisis:* entendiendo unidad de análisis como "el registro más simple sobre el cual basar el análisis y cuya selección depende de los objetivos de investigación" (Hernández-Sampieri et al., 2006, p. 358); en cada una de las tareas detallaremos la unidad de análisis que se utilizó ya que esta varió según la pregunta realizada, en algunos casos se utilizó términos, notaciones, representaciones, argumentos y otros como la unidad de análisis. Lo anterior debido a que la información aportada por cada tarea era distinta.
- *Localizar o inferir en el texto la unidad de análisis:* esta etapa se realizó repetidas veces con la intención de asegurarnos no dejar de lado información pertinente y relevante.

- *Denominar, definir e interpretar las categorías:* estas fueron determinadas de dos formas:
  - Por un lado, nuestro marco teórico nos permitió establecer algunas categorías, e incluso unidades, de forma previa (proceso deductivo).
  - Sin embargo, tras los primeros análisis, fue posible establecer categorías y subcategorías que emergieron de los datos (proceso inductivo), aunque debemos reconocer que se trata más de un refinamiento de las ya establecidas por el marco teórico, pues en todo momento fue este el que nos indicó que observar y detallar.
- *Codificar y cuantificar:* aunque no en todos los aspectos analizados resultó de interés la cuantificación.
- *Relacionar entre sí e interpretar las categorías establecidas:* en la medida de lo posible intentamos relacionar los resultados obtenidos en cada tarea. Además, aunque el análisis se realizó de forma individual (por tarea) el objetivo era que de forma integral pudiésemos observar el significado de la derivada.
- *Relacionar el proceso de análisis con la cuestión que se indaga*: este aspecto se intentó hacer desde el inicio del análisis, identificando la terna del significado en cada una de las tareas.

Lo anterior respalda el método seleccionado, como un análisis riguroso, sistemático y verificable (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 9). En nuestro caso el análisis de contenido nos permitió examinar los distintos componentes y elementos del marco teórico en las respuestas dadas por lo futuros docentes a cada una de las tareas. En la tabla 3.3 se resume nuestro foco de interés en cada una de ellas.

Tabla 3.3. *Aspectos analizados en cada tarea*

| *Tarea 1* | *Tarea 2* | *Tarea 3* |
|---|---|---|
| Estructura conceptual:<br>• Términos<br>• Notación<br>• Definición<br>Sistemas de representación:<br>• El que emergiera<br>Sentido y modo de uso<br>• Sentido | Estructura conceptual<br>• Razonamientos: por medio de los argumentos:<br>- Validez y respaldo<br>- Elemento matemático y su uso.<br>- Modo y tipo de argumento<br>Sistemas de representación:<br>• El que emerja | Sentidos y modos de uso:<br>• Situaciones<br>• Contextos |

Mediante el análisis de contenido tuvimos una visión general de los elementos del significado de la derivada que los futuros docentes destacan en las respuestas a cada una de las tareas. Sin embargo, era de nuestro interés poder realizar un análisis de las tres tareas en su conjunto. Es decir, un análisis que englobara los aspectos más relevantes de las respuestas dadas *por participante*, y así tener una visión más amplia del significado de derivada puesto de manifiesto. Para ello, convertimos algunos de los datos cualitativos en cuantitativos y empleamos la herramienta estadística que describimos a continuación.

### *3.3.4.2. Método: análisis clúster o de conglomerados*

El análisis clúster tiene por objetivo principal la clasificación de los casos en grupos relativamente homogéneos a partir de un conjunto de variables clasificatorias (Härdle y Simar, 2015; Wendler y Gröttrup, 2016). En nuestro caso, el análisis cualitativo nos dejaba ver algunas similitudes entre las respuestas dadas a *cada* una de las tareas; sin embargo, también nos interesaba determinar similitudes por participante, según las respuestas que daba al instrumento de forma conjunta, y así poder identificar perfiles de significado dados a la derivada.

El análisis clúster nos permitía realizar agrupaciones que no era posible detectar de manera explícita a través de la observación directa de los datos. Para ello definimos una serie de variables que predominaron en el análisis cualitativo y nos centramos en la presencia o ausencia de estas en las respuestas dadas por cada participante. Las variables fueron:

1. Define la derivada mediante el límite.
2. Define la derivada mediante su interpretación geométrica; es decir, como la pendiente de la recta tangente a la función en el punto.
3. Considera al menos uno de los requisitos o condiciones al definir la derivada: es un número real, se define en un punto de acumulación, la función debe ser continua en el punto, las derivadas laterales deben coincidir.
4. Basa su argumento en aspectos gráficos: posición de la recta tangente, presencia de puntos angulosos (picos), entre otros.

5. Basa su argumento en un procedimiento: cálculo de máximos y mínimos de la función, determinar algebraicamente la función derivada (reglas de derivación), entre otros.
6. Basa su argumento en la definición: recurre al cálculo del límite que define a la derivada, o señala que algún requisito o condición no se satisface.
7. Basa su argumento en alguna relación propiedad ya establecida.

Aunque a lo largo del análisis cualitativo se identificaron otros aspectos, estos son los que de una u otra forma responden a los elementos de la derivada considerados en la construcción del instrumento, y que además eran variables que podían identificarse sin problema en las respuestas dadas a la tarea 1 y 2 (presentes en ambas versiones del cuestionario).

Para, y como método de transformación de valores cualitativos en cuantitativos, en este análisis sólo consideramos la presencia o ausencia de la variable en las respuestas de cada futuro profesor, sin importar si esta se había presentado de forma correcta o incorrecta. De esta forma cada participante se representó mediante un vector de dimensión 7, cuyas entradas eran 0 o 1, según la presencia o ausencia de las variables ya mencionadas (ver figura 3.3).

| | Definición | | | Para argumentar | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Participante | Limite | Int. Geométrica | Requisitos/ Condiciones | Asp. Gráfico | Procedimiento | Definición | Resultado |
| A1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

*Figura 3.3*. Vector que representa al participante A1

Para ejecutar el análisis empleamos el programa *RStudio*, el cual se caracteriza por ser un software de uso libre.

### Tipo de análisis clúster

Existen varios tipos de análisis clúster, nosotros empleamos el *método jerárquico aglomerativo.* Este análisis comienza con tantos clústeres como objetos tengamos que clasificar y en cada paso se recalculan las distancias entre los grupos existentes y se unen los grupos más similares o menos disimilares. El algoritmo acaba con un clúster conteniendo todos los elementos, formando una jerarquía (Pérez, 2004).

Para esto se emplea una matriz de proximidades (distancias o similaridades) como base para el agrupamiento. En nuestro caso, al tratarse de variables cualitativas, empleamos medidas de similitud. Para variables dicotómicas como las consideradas el análisis clúster se hace mediante una medida de similaridad basada en coincidencias. En la tabla 3.4 se aprecian las posibles combinaciones para dos variables.

Tabla 3.4. *Tabla de contingencia variables dicotómicas*

| | *Variable 2* | |
|---|---|---|
| *Variable 1* | Presencia (1) | Ausencia (0) |
| Presencia (1) | $a$ | $b$ |
| Ausencia (0) | $c$ | $d$ |

De todas las medidas de similaridad, hemos empleado la denominada *Rogers-Tanimoto*, la cual mide la probabilidad de coincidencia entre dos variables, duplicando la ponderación en las no coincidencias y cuya fórmula es

$$\frac{a+d}{a+d+2(b+c)}$$

Por otra parte, el análisis jerárquico puede desarrollarse empleando distintos métodos, entre los más usados están:

- *Single:* la distancia entre dos clústeres es la que hay entre los dos individuos más próximos de uno y otro grupo.
- *Average:* la distancia entre dos clústeres es la media entre todos los pares posibles de casos (uno de cada clúster).
- *Complete:* la distancia entre dos clústeres es la distancia que existe entre los individuos más separados de ambos grupos
- *Ward.D:* Pretende minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada individuo y su centroide dentro de cada grupo (Pérez, 2004).

Nosotros utilizamos el último, aunque reconocemos que con los otros métodos el resultado era muy similar. Dado que utilizamos dos versiones del cuestionario, se decidió primero realizar un análisis por separado, considerando las respuestas dadas en cada caso; aunque posteriormente se contemplaron los datos de ambos cuestionarios de manera conjunta. Para visualizar el resultado del proceso jerárquico, se empleó un dendrograma, de esta forma obtuvimos que:

- Los participantes que respondieron al cuestionario A, se agrupaban en 3 grupos
- Quienes respondieron al cuestionario B, se dividieron en 3 grupos
- Al considerar a todos los participantes se identificaban 4 clústers.

Debe señalarse que el uso de esta herramienta estadística se empleó como complemento al análisis cualitativo, pues tras definir los grupos se procedió a realizar una caracterización de los perfiles identificados de forma cualitativa. No obstante, sin el análisis clúster hubiese sido imposible determinar dichos perfiles.

## 3.4. Aspectos metodológicos fase 2: estudio con libros de texto

Esta fase tenía por objetivo la consecución del segundo objetivo específico: el significado de derivada que transmiten los libros de texto de 1º de bachillerato. Abordamos el objetivo a través del análisis de las tareas propuestas en los libros de texto, dada la ya comentada influencia y rol que estas desempeñan en la enseñanza de las matemáticas.

### *3.4.1. Muestra de libros de texto*

Se consideraron los libros de texto de 1º de bachillerato de las editoriales Anaya (Colera et al., 2008), Bruño (Arias y Maza, 2015), Edelvives (Cardona y Rey, 2015a, 2015b), Santillana (Antonio et al., 2015), 2015) y SM (Vizmanos et al., 2008). La elección de estos cinco libros se basa en una consulta realizada a centros educativos de Granada sobre los libros de texto utilizados. Para ello se revisó la página web de cada uno de los 93 Institutos de Educación Secundaria de la provincia, para identificar qué libro sugerían al alumnado de 1º bachillerato durante el curso 2017/2018. No en todas las páginas se especificaba dicha información, pero al menos en 38 de los centros consultados sí, hallándose lo siguiente: 13 Institutos utilizarían el libro de Anaya, otros 13 a SM, cinco a Bruño, tres a Santillana, otros tres a Edelvives, uno a Oxford y uno a Paraninfo. De esta forma, escogimos los cinco de mayor frecuencia.

Su extendido uso permitió acceder a ellos fácilmente para su respectivo análisis. Estos libros se caracterizan por estar organizados por capítulos en los que se abordan los distintos contenidos. Se presentan definiciones, propiedades y ejemplos de forma organizada, por lo que sirven de guía para el estudio de estos tópicos. Pero sin duda, un aspecto que los hace bastante llamativos es la cantidad de tareas que en ellos se plantean, lo cual, como mencionamos, es un factor relevante para los docentes (Pepin, 1997).

De esta forma, hemos tomado el primer capítulo que cada libro dedica al tópico de derivadas. Aunque cada libro tiene sus particularidades y diferencias, abordaban básicamente los mismos contenidos. Una diferencia particular es que en el libro de Anaya se define la derivada mediante su interpretación geométrica, Edelvives y Bruño lo hacen como la tasa de variación instantánea, mientras que SM y Santillana primero definen la derivada como un límite y luego hablan de su interpretación geométrica. Es importante mencionar que únicamente los libros de SM y Bruño incluían la relación entre derivada y continuidad. Anaya y Santillana abordaban en ese primer capítulo la representación de funciones; y Bruño, además de extremos relativos y monotonía de una función, define puntos de inflexión y curvatura de una función.

Analizamos tanto las tareas propuestas dentro del texto (conforme de desarrollan los contenidos), como las incluidas en la sección de ejercicios. En la tabla 3.5 se muestra el número de tareas propuestas por cada libro, y entre paréntesis la cantidad de ítems que esas tareas contemplaban. En total se analizaron 592 tareas equivalentes a 1249 ítems.

Tabla 3.5. *Número de tareas e ítems por libro de texto*

| | *Cantidad de tareas propuestas por libro de texto** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Posición de la tarea* | SM | Anaya | Edelvives | Bruño | Santillana |
| En el desarrollo del contenido | 31 (67) | 33 (45) | - | 38 (84) | 33 (58) |
| En la sección de ejercicios | 72 (148) | 106 (205) | 73 (200) | 113 (217) | 94 (225) |
| Total | 102 (215) | 139 (250) | 73 (200) | 151 (301) | 127 (283) |

*Entre paréntesis se indica el número de ítems

Entendemos por ítem cada uno de los apartados de la tarea, generalmente numerados o enlistados utilizando letras a), b), c), por ejemplo; la figura 3.4 muestra una tarea compuesta por 3 ítems.

> Una partícula se mueve sobre un eje según la siguiente ecuación de movimiento:
>
> $s(t) = 4t^2 - 8t - 3$, donde $t$ indica el tiempo en segundos, y $s(t)$, la distancia orientada, en metros, al origen.
>
> a) ¿Dónde está situada la partícula en el momento de empezar a moverse?
> b) Estudia la posición de la partícula en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.
> c) ¿En qué instante la partícula se detiene y cambia de sentido su movimiento?

*Figura 3.4.* Tarea 75 propuesta por el libro SM

Cada uno de los ítems fue codificado de la siguiente manera:

*Letra que identifica al libro de texto + número de página + número de tarea + ítem.*

Por ejemplo, el código S240-2a, se usó para identificar al ítem “a” de la tarea 2, ubicada en la página 240 del libro de Santillana. De esta forma, colocábamos la letra A, B, E, S o SM, según si se refería al libro de Anaya, Bruño, Edelvives, Santillana o SM.

## *3.4.2. Análisis de los datos*

Esta fase también se trata de un estudio mixto de conversión, es decir, realizamos primero un análisis cualitativo de las tareas, transformando posteriormente las variables analizadas en datos cuantitativos. Esta conversión, al igual que en la fase 1, nos permitió agrupar los datos identificando perfiles del significado dado a la derivada en los libros de texto.

### *3.4.2.1. Método: análisis de contenido*

Para esta fase empleamos el mismo proceso de análisis de contenido descrito en la fase 1. Tomando como unidades de información cada uno de los ítems de la tarea. Tal como señalamos en el marco teórico, consideramos para el análisis de tareas el estudio de aspectos sintácticos, del significado y cognitivos. Para cada uno de esos bloques se contempló una serie de variables. De esta forma, en la mayoría de los casos se trataba de una categorización deductiva; no obstante, mediante el análisis de contenido pudimos definir o refinar algunas de manera inductiva (p. e., el contenido y contexto de cada ítem). En la tabla 3.6 se muestran las variables empleadas.

Tabla 3.6. *Sistema de categorías empleado en el análisis*

| *Aspecto* | *Variable* | *Categorías* |
|---|---|---|
| Sintáctica | Estructura | Abierta / Cerrada |
| | Planteamiento | Directo / Inverso |
| | Materiales | Papel y lápiz / Software / Calculadora |
| Significado | Contenido | Contenido de la derivada que se aborda |
| | Sistema de representación | Verbal / Simbólico / Numérico / Tabular / Gráfico |
| | Situación | Científica / Personal / Laboral / Social |
| | Contexto | Contexto de la derivada que se aborda |
| | Tipo de función | Simple / No simple |
| Cognitiva | Demanda | Memorización / Procedimiento sin conexión / Procedimiento con conexión / Hacer matemática |
| | Capacidad | Comunicación / Matematización / Representación / Razonamiento y argumentación / Diseño de estrategias para resolver problemas / Utilización de operaciones y lenguaje simbólico formal / Utilización de herramientas matemáticas |
| | Manejo de los sistemas de representación | Conversión / Procesamiento |

Dado que en el marco teórico ya nos referimos detalladamente a la mayoría de los aspectos del significado, describimos a continuación las variables que no habíamos descrito anteriormente.

### De la categoría sintáctica

*1. Estructura (abierta/cerrada):* Ponte (2004) considera que una tarea cerrada es aquella en la que se expresa con claridad lo que se da y lo que se pide, mientras que una abierta es la que involucra cierto grado de indeterminación en lo que se da, lo que se pide, o en ambas cosas. Ponte (2004) señala, además, que las tareas abiertas se pueden clasificar en proyectos o investigaciones. Este tipo de tareas demandan que el estudiante indague sobre la temática para poder abordar el problema pues no basta con diseñar o emplear algún método de resolución. Por ejemplo, una tarea en la que se le solicite al alumnado determinar los extremos relativos de una función que modela cierto fenómeno (hasta este punto sería una tarea cerrada) y que posteriormente se le pida comparar los resultados obtenidos con lo que indican las estadísticas sobre dicho fenómeno para los últimos cinco años. Realizar esto requiere que el estudiante busque estos datos, luego, compare sus resultados y los interprete a la luz de lo investigado.

2. *Planteamiento (directo/inverso):* para Groetsch (2001), en una tarea directa se dispone de unos datos, cierto procedimiento y se solicita un resultado, el cual es único. Mientras en las tareas inversas, lo que se desconoce son los datos o el procedimiento que producen cierto resultado; estas tareas pueden tener múltiples soluciones o bien ser insolubles. Un ejemplo de tarea inversa es cuando se pide hallar una función cuya derivada sea tal, o cuando se dan ciertas condiciones y a partir de ellas se pide graficar.

*3. Materiales:* analizamos también el material o recurso didáctico necesario o propuesto para resolver el ítem.

**De la categoría semántica (significado)**

*1. Contenido:* identificamos el contenido de derivada que aborda cada ítem planteado. Según los tópicos tratados en los libros, este podía ser:

1. Tasa de variación media e instantánea
2. Resultados y propiedades
3. Otros
4. Definición de derivada
5. Reglas de derivación
6. Extremos relativos
7. Monotonía
8. Recta tangente y normal
9. Representación de funciones.

*2. Tipo de función involucrada:* el tipo de función involucrada en la tarea es un factor que influye en la complejidad de esta. Para su análisis consideraremos los siguientes rasgos de la función (Jiménez, 2017): polinómico, potencia de exponente negativo, radical, función algebraica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, trigonométrica inversa, producto, cociente, composición de funciones, función a trozos y valor absoluto. Entenderemos como función simple a aquella que presente solo uno de los siguientes rasgos: polinomio, trigonométrico, trigonométrica inversa, logarítmico, exponencial o radical. De lo contrario será no simple con n rasgos. Asumiendo que aquellas funciones no simples conllevan un mayor nivel de dificultad.

**De la categoría cognitiva**

*1. Demanda la tarea:* las tareas e ítems analizados demandan del estudiante distintos aspectos; por ejemplo, algunos requieren de la aplicación de una definición, o bien solo de un algoritmo, mientras otras requieren un poco más de trabajo, análisis e interpretación. Para analizar este aspecto utilizamos en primer lugar la taxonomía de Stein et al. (1996), descrita en el marco teórico.

Posteriormente, quisimos ser un poco más minuciosos al agrupar las tareas según su demanda, por lo que creamos una clasificación complementaria a la anterior que permitiera tener una idea más clara del tipo de tarea que se propone a los estudiantes. Así, tras el análisis observamos que los ítems analizados podían clasificarse según lo solicitado al estudiante de la siguiente manera:

- Cálculo directo: un grupo de tareas se caracteriza por el hecho de que su demanda es explicita. Por ejemplo, calcular la derivada de una función, determinar el valor de la derivada en un punto, hallar la tasa de variación media, determinar alguna imagen, entre otros.
  Su principal característica es precisamente que el proceso a ejecutar viene explícito en las indicaciones de la tarea. Aquí el estudiante simplemente debe ejecutar.
- Cálculo indirecto: estas tareas demandan al estudiante recordar el procedimiento adecuado para resolver lo solicitado. Incluimos aquí tareas del tipo “determine la ecuación de la recta tangente...”, “determine extremos relativos…”. Estas tareas, al igual que las anteriores, son bastantes algorítmicas; en estas el procedimiento de resolución también es conocido, pero no se menciona de manera explícita. Una vez recordado el procedimiento se trata de una mera ejecución.
- Representación gráfica: aquí claramente la demanda es representar gráficamente una función, no obstante, se distinguen dos niveles según lo que se demanda:
  - Representación gráfica conociendo el criterio

- Representación gráfica de una función que cumple ciertas condiciones.

  La primera de ellas se vuelve un poco más algorítmica, mientras que el segundo caso requiere de más interpretación.

- Identificación: se agrupan aquí tareas cuya demanda es identificar en una gráfica o situación algún punto o intervalo que cumpla cierta condición. En estas tareas el proceso no siempre está definido y se trata más de una aplicación interpretativa de los resultados.
- Resolución de problemas y optimización: aunque no en todos los casos, consideramos que la resolución de problemas requiere un nivel de demanda distinto ya que el estudiante se ve en la necesidad de formular una función que modele el caso, ejecutar procesos matemáticos, para finalmente interpretar esos datos en un contexto posiblemente extra-matemático. Por lo que decidimos catalogarlos por separado.
- Justificación y argumentación: una última categoría agrupa a las tareas en las que para su solución el estudiante debe aplicar y enlazar distintos resultados. Se incorporan tareas de tipo "justifique...", "crees que puede existir…". Aquí el objetivo principal no es la aplicación directa de algún proceso o resultado (aunque se incluya), sino que la tarea promueve el análisis y la argumentación.

Esta categorización propia la complementamos con la taxonomía de Stein et al. (1996) tal como se aprecia en la tabla 3.7, cabe destacar que resolución de problemas puede presentarse en procedimientos sin o con conexión, o bien en el cuarto nivel de demanda cognitiva.

Tabla 3.7. *Clasificación complementaria para el análisis de la demanda*

| *Clasificación de Stein et al. (1996)* | *Clasificación complementaria* |
|---|---|
| Memorización | No hallamos tareas de este tipo |
| Procedimiento sin conexión | Cálculo directo<br>Cálculo indirecto |
| Procedimiento con conexión | Representación gráfica<br>Identificación |
| Hacer matemática | Justificación y argumentación<br>Resolución de problemas y optimización |

*2. Capacidad matemática fomentada:* consideramos oportuno analizar las capacidades matemáticas que las distintas tareas estimulan. Para ello adoptamos las 7 capacidades empleadas en los marcos de PISA (OECD, 2016), las cuales son:

- Comunicación: el sujeto percibe la existencia de algún desafío y está estimulado para reconocer y comprender una situación problemática. La lectura, descodificación e interpretación de enunciados.
- Matematización: la competencia matemática puede suponer transformar un problema definido en el mundo real en una forma estrictamente matemática
- Representación: esto implica la utilización de una variedad de representaciones para plasmar una situación, interactuar con un problema o para presentar un trabajo propio.
- Razonamiento y argumentación: esta capacidad implica procesos de pensamiento arraigados de forma lógica que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, comprobar una justificación dada, o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones a los problemas.
- Diseño de estrategias para resolver problemas: implica un conjunto de procesos de control fundamentales que guían a un individuo para que reconozca, formule y resuelva problemas eficazmente. Esta destreza se caracteriza por la selección o diseño de un plan o estrategia para utilizar las matemáticas para resolver los problemas derivados de una tarea o contexto, además de guiar su implementación.
- Utilización de operaciones y de un lenguaje de carácter simbólico, formal y técnico: la competencia matemática implica servirse de unas operaciones y un lenguaje de carácter simbólico, formal y técnico.
- Utilización de herramientas matemáticas: las herramientas matemáticas incluyen herramientas físicas, como los instrumentos de medición, además de calculadoras y herramientas informáticas que cada vez son más accesibles. (p.70-71).

3. *Manejo del sistema de representación:* siguiendo a Duval (1999), analizaremos si la tarea propuesta engloba en su resolución transformaciones dentro de un mismo sistema de representación (procesamiento), o bien requiere de traducciones de un sistema a otro (conversión). Por ejemplo, una tarea de procesamiento sería calcular la derivada en un punto dado el criterio de la función (un trabajo dentro del sistema simbólico); mientras que una de

conversión sería calcular la derivada en un punto dada la gráfica de la función (tomar datos dados de manera gráfica, para luego trabajarlos en sistema simbólico o numérico).

### *3.4.2.2. Análisis clúster o de conglomerados*

Al igual que en la primera fase, convertimos algunos datos cualitativos en cuantitativos con el fin de aplicar el análisis clúster. Dada la cantidad de variables analizadas, la conversión de los datos resultaba algo complicada, por ello, decidimos centrarnos únicamente en 6 de ellas, seleccionado aquellas que realmente diferenciaban unas tareas de otras, pues, por ejemplo, en cuanto a la categoría sintáctica no se detectaron muchas diferencias entre las tareas. Así que para este análisis clúster consideramos: el contenido, tipo de función, demanda, contexto, sistema de representación y manejo del sistema de representación.

Para representar cada ítem, tratamos las modalidades de cada variable como características independientes, codificándolas con 0 (ausencia de dicha característica) o 1 (presencia). Así, representamos cada ítem mediante un vector de entradas 0 y 1, de dimensión 27. Por ejemplo, el ítem cuyo vector se aprecia en la figura 3.5, es un ítem que abordaba el contenido de resultados y propiedades (codificado como 8, ver página 72), con una función simple, en un contexto geométrico, utilizando el sistema de representación verbal y simbólico; en donde se demandaba un proceso sin conexión y un procesamiento del sistema de representación.

La justificación de esta forma de codificar reside en que las modalidades dentro de cada variable no se pueden ordenar. Por ejemplo, si en la variable contenido hubiésemos asignado un código del 1 al 9, el algoritmo del análisis clúster entendería que aquellos ítem en cuya primera entrada aparece un 2 y un 3, estarían más cercanos que aquellos que tienen un 2 y un 8; lo cual en nuestro caso no tiene sentido.

| | CONTENIDO | | | | | | | | | TIPO DE FUNCION | | | | DEMANDA | | | CONTEXTO | | | SISTEMA DE REPRESENTACION | | | | | | MANEJO DE LA | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Item | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Descon | Simple | 1,2 | 3,... | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | Verb | Sim | Tab | Gra | Num | Ilus | Proc | Conv |
| S239-1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

*Figura 3.5.* Vector del ítem S239-1

Tal como describimos en la fase 1, esta técnica requiere que se establezca una medida de asociación, es decir, de cercanía (métrica) o similitud según el tipo de variable que se esté trabajando. Dado que nuevamente se trata de variables cualitativas empleamos la denominada *Rogers-Tanimoto*. Empleamos otra vez el análisis jerárquico aglomerativo que comienza con tantos clústeres como objetos tengamos que clasificar y en cada paso se recalculan las distancias entre los grupos existentes y se unen los grupos más o menos similares. El algoritmo acaba con un clúster conteniendo todos los elementos, formando una jerarquía. Como ya señalamos, para el análisis jerárquico pueden emplearse distintos métodos (Pérez, 2004), entre los más usados están “Single”, “Average”, “Complete” o “Ward.D”, nuevamente empleamos este último.

## 3.5. Aspectos metodológicos fase 3: estudio con docentes

La tercera y última fase, perseguía el logro del tercer objetivo específico: el significado que dan los docentes en activo a la derivada. Esta fase es principalmente cuantitativa y surge a raíz de la fase 1, como mencionamos se trata de un diseño exploratorio secuencial en el que los resultados que habíamos obtenido en el primer estudio son la base para la realización de este último. De hecho, nuestra intención fue realizar un estudio similar al de la fase 1, pero utilizando ahora un instrumento cerrado.

### *3.5.1. Participantes*

Se consideró como posible participante a todo profesor de matemática que durante el curso académico 2019/2020 estuviera trabajando en algún Instituto de Educación Secundaria (I.E.S.) de Andalucía. Según los datos disponibles en la página de Educación de la Junta de Andalucía[4], y tal como se aprecia en la tabla 3.8, en dicha comunidad hay un total de 864 Institutos, en los cuales trabajan 5199 docentes.

Tabla 3.8. *Número de I.E.S. y docentes en Andalucía*

| *Provincia* | *Cantidad de I.E.S.* | *Cantidad de docentes* |
|---|---|---|
| Almería | 77 | 490 |
| Cádiz | 126 | 792 |
| Córdoba | 89 | 477 |
| Granada | 93 | 524 |
| Huelva | 60 | 350 |
| Jaén | 85 | 392 |
| Málaga | 143 | 934 |
| Sevilla | 191 | 1240 |
| Total | 864 | 5199 |

[4] http://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/ced

A través de la página de la Junta de Andalucía hallamos el contacto electrónico de los 864 institutos, por este medio solicitamos la participación voluntaria de los docentes de matemática que trabajaran en cada institución.

Tal como detallaremos en el próximo apartado, para esta fase utilizamos un cuestionario en línea.  Al instrumento ingresaron 669 docentes, pero muchos no contestaron más que la información general, por lo tanto, decimos considerar como participante a aquel que hubiese contestado al menos hasta la penúltima pregunta. De esta forma, contamos con la participación de 213 docentes, distribuidos por provincia como se observa en la figura 3.6.

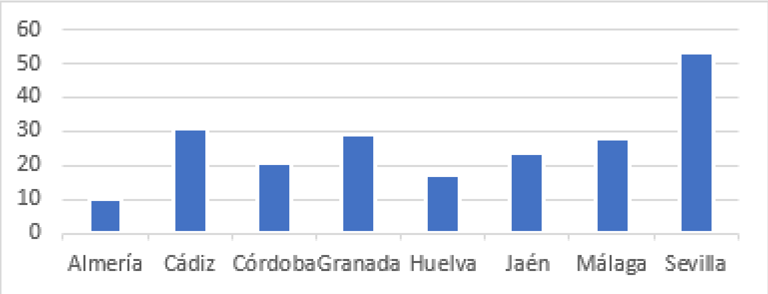



*Figura 3.6.* Distribución de los participantes por provincia

En cuanto a la experiencia como docentes que tenían los participantes, los datos obtenidos destacan que estos tienen bastantes años ejerciendo (figura 3.7). Además, de los 213 participantes, solo 18 manifestaron no haber impartido nunca el nivel de bachillerato, los demás sí lo han hecho, la mayoría inclusive en varias ocasiones.

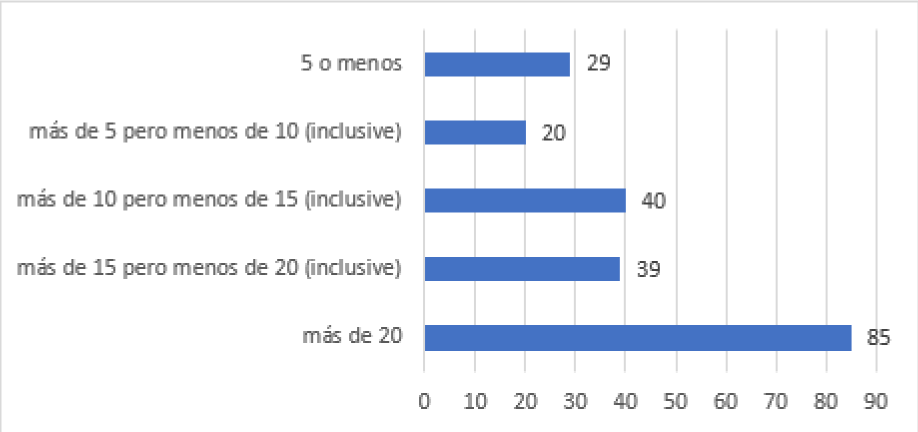



*Figura 3.7.* Años de experiencia docente de los participantes

### 3.5.2. Instrumento para la recogida de datos

El instrumento utilizado en esta fase se trata de un cuestionario cerrado de cuatro tareas, que se construyó con base en el cuestionario semántico utilizado en la primera fase. La intención era aprovechar las preguntas que allí se hacían y los datos ya obtenidos para rediseñar el instrumento de forma que las respuestas fueran cerradas. La necesidad de este nuevo instrumento se justifica dada la intención de aplicarlo a una muestra de los docentes de matemáticas de los centros de secundaria de toda la comunidad de Andalucía (la aplicación en línea facilitaría mucho la recogida de datos). Además, un cuestionario cerrado que permita valorar el significado que tiene la derivada para los docentes, aparte de ser un excelente instrumento, favorecería el nivel de respuesta y facilitaría el análisis de datos.

La construcción del instrumento puede resumirse en las siguientes cuatro etapas:

**Etapa #1:** ***Categorización de respuestas***

Tras la primera aplicación del cuestionario semántico, en la que participaron 37 futuros docentes; el análisis de los datos mostraba una tendencia a cierto tipo de respuestas en cada una de las tareas. Es decir, era posible establecer una serie de categorías o aspectos que representaban las respuestas a cada una de las cuestiones planteadas. Dicha categorización se validó y discutió con el director y codirector de la tesis. Posteriormente se realizó una segunda aplicación del instrumento, lo cual permitió corroborar y/o modificar las categorías mediante la saturación de datos.

**Etapa #2:** ***Diseño del instrumento cerrado***

A partir de la categorización realizada de las respuestas obtenidas en el cuestionario semántico, se procede a redactar la primera versión del cuestionario cerrado, esta constaba de 5 preguntas, cuya estructura se resume en la figura 3.8. Los enunciados de la pregunta 5 son los mismos empleados en el cuestionario de la fase 1 (ver figura 3.2), pero ahora, a partir de las respuestas obtenidas en la primera fase, hay una serie de justificaciones que el profesor puede elegir tras indicar que el enunciado es verdadero o falso.

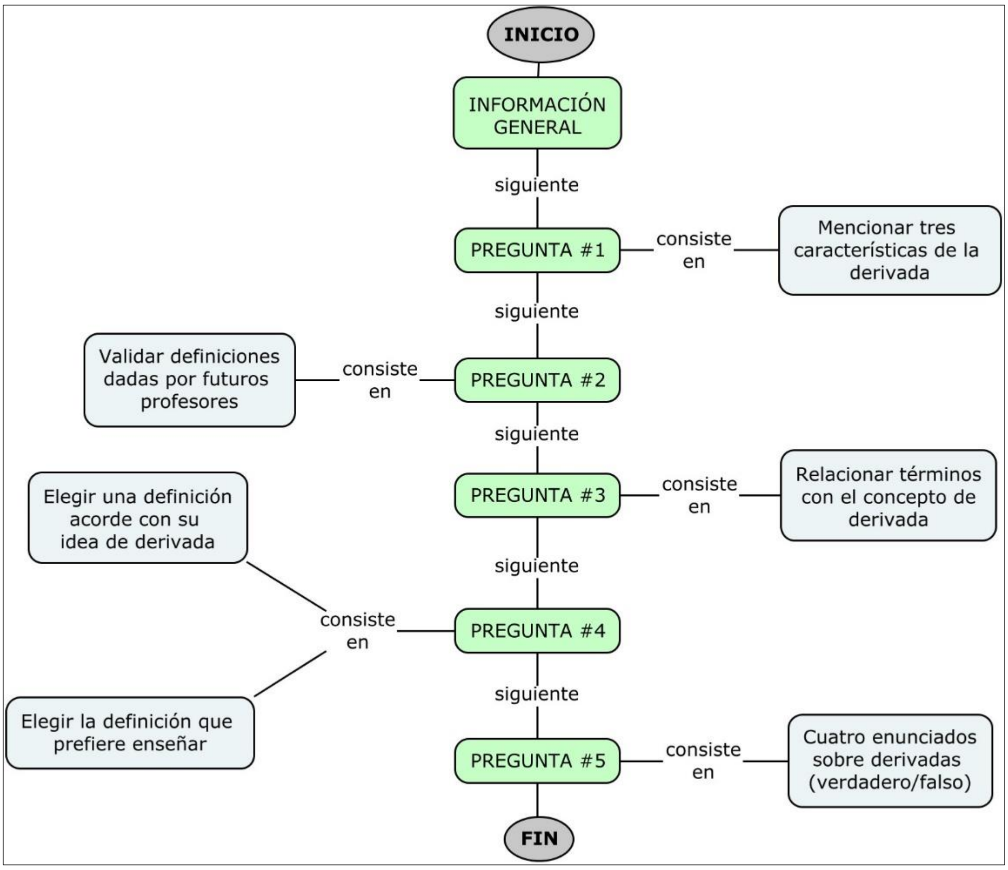



*Figura 3.8.* Estructura del cuestionario cerrado (primera versión)

Dado que la aplicación de este instrumento se realizaría de forma online, se procedió a ingresar las preguntas en la plataforma. En este caso la Universidad de Granada proporciona acceso de sus investigadores a *LimeSurvey*, siendo esta la que utilizamos.

**Etapa #3: *Validación y prueba piloto***

Una vez que se disponía de una primera versión del instrumento se sometió a una prueba piloto y posteriormente a una validación por expertos, esto con el fin de valorar la pertinencia del instrumento, así como de corregir aspectos que no estén claros; o bien, cambiar, eliminar o agregar algún detalle.

En cuanto a la *prueba piloto*, se llevó a cabo con docentes en formación de la Universidad de Granada. Para ello a inicios del 2019 se les envió vía online el enlace para acceder al instrumento. Además de poder examinar si la plataforma almacenaba correctamente los datos, la intención era que los participantes manifestaran cualquier duda o sugerencia al respecto. Para ello incluimos una pregunta adicional en la que solicitábamos hacernos saber de cualquier errata o detalle para mejora. En la prueba participaron 22 futuros docentes, los cuales nos informaron principalmente de erratas, mismas que procedimos a corregir.

Para la *validación del instrumento*, durante el mes de setiembre del año 2019, aprovechamos la reunión del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático (GIDAM) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), para que los participantes, como expertos en el área, nos dieran sus apreciaciones y sugerencias.

Dicho encuentro se desarrolló el 5 de setiembre en la Universidad de Valladolid y contó con la participación de 24 investigadores en el área. La sesión duró aproximadamente hora y media. Para la validación se les presentó brevemente los objetivos de la investigación y cómo se había construido el instrumento; posteriormente, se le dio el enlace de acceso, al cual ingresaron desde sus ordenadores portátiles, tablets o móviles. Los participantes decidieron trabajar en parejas o tríos de modo que pudieron discutir cada una de las preguntas que conformaban el instrumento.

Adicionalmente, diseñamos una guía de evaluación para que los participantes valoraran la pertinencia de las preguntas, en tanto que permitirán el abordaje de los elementos del significado que se establecían en nuestro marco teórico (ver apéndice C, página 229). Durante la sesión, y en el documento de evaluación que se entregó, los participantes hicieron una serie de sugerencias a cada una de las preguntas, las cuales se resumen en la tabla 3.9.

Tabla 3.9. *Síntesis de las sugerencias dadas al instrumento*

| *Sección del instrumento* | *Sugerencia* |
|---|---|
| Pregunta 1 | Consideraron que era muy general y que podía causar confusión al no saberse muy bien que se espera por respuesta. |
| Pregunta 2 | Considerar incluir la opción de “incompleta”. |
| Pregunta 3 | Que las opciones de respuesta sean excluyentes. Sugieren que sea: no relacionado, relacionado, pero no necesario, relacionado y necesario. |
| Pregunta 4 | Incluir la frase “si existe” en las tres definiciones, pues eso puede ser condicionante. |
| Pregunta 5 | En la 5.1 corregir palabra “polinomio”.<br>En la 5.2 cambiar palaba “enunciado” por “afirmación”.<br>En la 5.3 corregir el criterio de la función (errata). |
| Otras cuestiones | Valorar eliminar algunas opciones o preguntas, parece un poco extenso.<br>Redactar todo en términos de “derivada de una función en un punto”<br>Dejar la opción de respuesta “no lo sé” |

Como se puede apreciar, la mayoría de las sugerencias estaban relacionadas con la presentación o forma de las tareas, además de corregir erratas. Todas las preguntas fueron consideradas adecuadas para el objetivo de la investigación; la tabla 3.10 muestra las puntuaciones dadas por los participantes en una escala del 1 al 5, donde 1 era muy en desacuerdo y 5 era muy de acuerdo. El número de contestaciones en cada caso se debe, como ya mencionamos, a que se trabajó en parejas o tríos, por lo que se recibió solo una guía de evaluación por grupo.

Tabla 3.10. *Puntuación dada por los expertos a las preguntas del cuestionario*

| *Pregunta* | *Aspecto* | *Nº de respuestas* | *Puntuación* |
|---|---|---|---|
| 1 | *Estructura conceptual*, pues se relaciona con<br>- Términos | 10 | 4.2 |
| | - Requisitos y condiciones para definir la derivada | 9 | 3.7 |
| | - El concepto | 11 | 4.4 |
| | - Resultados y propiedades | 12 | 4.2 |
| | *Sentido y modo de uso*, ya que puede hacer alusión a situaciones y contextos en los que se aplica la derivada | 12 | 3.8 |
| 2 | *Estructura conceptual*, pues se relaciona con<br>- Su definición | 12 | 4.8 |
| | - Resultados y propiedades (al definirse puede hacerse referencia a estos) | 11 | 3.7 |
| | *Sentidos y modos de uso*, al definirse mediante su interpretación | 11 | 4.1 |
| 3 | *Estructura conceptual*, al relacionarse directamente con<br>- Términos | 12 | 4.8 |
| | - Requisitos y condiciones para la definición | 12 | 4.8 |
| 4 | *Estructura conceptual*, al tratarse de<br>- La definición | 10 | 5 |
| | - Notación | 11 | 4 |
| | *Sentido*, al relacionarse con modos de uso de la derivada | 11 | 3.9 |
| 5.1 | *Estructura conceptual*, al referirse a<br>- Requisitos necesarios para poder definirse la derivada en un punto | 12 | 4.3 |
| | - Razonamientos, pues permite indagar en el tipo de razonamiento que se pone en juego | 12 | 4 |

Tabla 3.10. *Puntuación dada por los expertos a las preguntas del cuestionario*

| *Pregunta* | *Aspecto* | *Nº de respuestas* | *Puntuación* |
|---|---|---|---|
| | al tratar temas de la derivada (si es algebraico, geométrico o analítico, por ejemplo) | | |
| 5.2 | *Estructura conceptual*, al relacionarse con<br>- Resultados o propiedades | 10 | 4.8 |
| | - Razonamientos, pues permite indagar en el tipo de razonamiento que se pone en juego al tratar temas de la derivada (si es algebraico, geométrico o analítico, por ejemplo) | 10 | 4.5 |
| 5.3 | *Estructura conceptual*, pues el enunciado tiene que ver con<br>- La definición y sus condiciones | 9 | 4.8 |
| | - Resultados | 8 | 4.4 |
| | - Razonamientos, pues permite indagar en el tipo de razonamiento que se pone en juego al tratar temas de la derivada (si es algebraico, geométrico o analítico, por ejemplo) | 9 | 4.9 |
| 5.4 | *Estructura conceptual*, pues se trata<br>- Requisitos | 8 | 4.5 |
| | - Razonamientos, pues permite indagar en el tipo de razonamiento que se pone en juego al tratar temas de la derivada (si es algebraico, geométrico o analítico, por ejemplo) | 8 | 4.6 |
| | *Sentido,* al analizar la influencia que la interpretación geométrica de la derivada puede tener | 9 | 4.7 |

Al final de la guía de evaluación había unas preguntas opcionales, quienes las respondieron, hicieron comentarios muy positivos sobre el instrumento. Siete participantes consideran que es adecuado; mencionado además que es novedoso, fácil de usar y flexible. Por otra parte, al preguntárseles si hay algo que deba agregarse, señalan que no, ya que está bastante completo.

**Etapa #4:** ***Rediseño del instrumento***

Tras la valoración de los expertos se discutieron y analizaron las sugerencias recibidas, resultando en los siguientes cambios:

- Eliminación de la primera pregunta, mucho se habló con los expertos de que podría causar confusión. Además, era la única pregunta de respuesta abierta.
- Dada la extensión del instrumento, en la pregunta 5, la de verdadero y falso, se dejaron únicamente dos enunciados.
- Se corrigieron las erratas señaladas.

La versión final del instrumento puede verse en el apéndice D (página 232). En términos generales, la finalidad de cada pregunta era:

- *Primera pregunta:* en esta se presentaban 5 definiciones de derivada de una función en un punto, que habían dado algunos futuros docentes en la fase 1. Los participantes debían indicar si esta era correcta o incorrecta y en ambos casos justificar su elección. El objetivo fundamental era que analizar qué elementos sobre la definición destacaban los participantes.
- *Segunda pregunta:* esta consistía en la clasificación de 8 términos que, en la fase 1, los futuros docentes habían mencionado al referirse a la derivada de una función en un punto. Los participantes debían indicar si estos estaban: relacionados y necesarios; relacionados, pero no necesarios; o bien, si no estaban relacionados con la noción de derivada de una función en un punto.
- *Tercera pregunta:* aquí se presentaban tres definiciones dadas al concepto de derivada de una función en un punto por algunos libros de texto utilizados en 1º de Bachillerato. Los participantes debían: (a) elegir la que coincidía más con su propia definición de derivada, y (b) indicar cuál de las tres usaría para enseñarla a sus estudiantes. La intención aquí era ver si cual definición se aproxima más a su idea de derivada de una función, y si esta misma es la que suelen enseñar. Además, con los comentarios que agregaran analizar los aspectos en los que enfatizan.
- *Cuarta pregunta:* al igual que en el cuestionario abierto utilizado en la primera fase, esta última pregunta consistía en un verdadero o falso, pero aquí solo utilizamos dos de los enunciados. En cada caso el participante debía: (a) indicar si era verdadero o falso, (b) determinar la validez de algunos argumentos que se habían presentado para justificar la veracidad o falsedad del enunciado, (c) elegir uno de los argumentos

presentados, y finalmente, (d) indicar si hay otro argumento posible. En cada caso podían justificar su elección.

Esta pregunta además de proporcionarnos una idea del argumento que utilizarían, nos permite identificar elementos que para ellos son indispensables para justificar la veracidad o falsedad del enunciado.

De esta forma, en su conjunto, las cuatro preguntas nos dan una idea de cómo es concebida, por los docentes de matemática, la noción de derivada de una función en un punto, a qué elementos y aspectos dan mayor relevancia y cómo los utilizan.

### *3.5.3. Aplicación del instrumento*

La aplicación del instrumento se realizó en línea, enviando un correo electrónico a los directores de los más de 800 Institutos de Educación Secundaria de Andalucía, solicitando que reenviaran el correo a sus docentes de matemáticas.

Dado que no teníamos forma de asegurarnos que el correo con el enlace al instrumento llegara a los docentes, reenviamos el correo en cuatro ocasiones, con la intención aumentar la probabilidad de participación. Dado que eran más de 800 centros, el envío debió realizarse en paquetes de 200 correos diarios (es lo que el sistema admitía). Las fechas de envío fueron:

- Semana del 16 al 20 de diciembre de 2019
- Semana del 8 al 14 de enero de 2020
- Semana del 29 de enero al 4 de febrero de 2020
- Semana del 17 al 21 de febrero de 2020.

### *3.5.4. Análisis de los datos*

Dado que en esta fase el instrumento era de respuesta cerrada, un primer análisis consistió en determinar la frecuencia obtenida en cada una de las posibles respuestas a las preguntas, y posteriormente realizar una descripción de los resultados. Adicionalmente llevamos a cabo un análisis cualitativo de los comentarios que los participantes agregaron al justificar algunas de sus respuestas. Estos comentarios no eran obligatorios; sin embargo, en todas las preguntas pudimos complementar las respuestas cerradas con los comentarios dados, identificando los aspectos que los docentes enfatizaron en cada caso. Para el análisis identificamos a cada participante con una P y un número del 1 al 213, lo cual nos permita referirnos a ellos en los resultados.

Tras el análisis a cada una de las 4 preguntas, quisimos, al igual que en la fase 1, analizar las respuestas dadas por participante. Para ello, empleamos nuevamente el análisis clúster. Definimos 10 variables o aspectos que nos sirvieran para caracterizar las respuestas dadas, identificando si estos habían sido, o no, considerados. Estos aspectos son básicamente los mismos que los que utilizamos en la primera fase, pero adaptados a los datos de los que disponíamos, estos fueron:

*Respecto a los requisitos y condiciones*

1. La derivada de una función en un punto es un número real.
2. Para definir la derivada de una función en un punto, este debe ser de acumulación del dominio.
3. Para definir la derivada de una función en un punto, esta debe ser continua en el punto.

*En cuanto a la definición de derivada de una función en un punto*

4. Se define la derivada de una función $f$ en el punto $x = a$, como la tasa de variación instantánea. Se representa $f'(a)$ y es igual a
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
5. El crecimiento de una función en un punto se mide por la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto. A este valor se le llama derivada de $f$ en $a$, se designa por $f'(a)$, donde
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
6. La derivada de la función $f(x)$ en un punto de abscisa $a$ se denota por $f'(a)$, y es el valor de este límite, si existe y es finito
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*Base del argumento utilizado en los enunciados*

7. Aspecto gráfico
8. Procedimiento algebraico
9. Derivadas laterales
10. Resultado

Para este análisis solo consideramos a los participantes que habían respondido de forma completa al cuestionario, lo cual nos permitiera analizar las 10 variables propuestas, por lo que en este análisis se incluyeron solo 158 docentes. Cada participante se representó mediante un vector de dimensión 10, como el que se muestra en la figura 3.9.

| | Requisitos | | | Definición | | | Para argumentar | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Participante | Número real | Punto acumulación | Continuidad | Límite | Int. Geométrica | Tasa variación instantánea | Asp. Gráfico | Procedimiento algebraico | Derivadas laterales | Resultado |
| P1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

*Figura 3.9.* Vector que representa al participante P1

Para identificar la presencia o ausencia de la variable en las respuestas del participante se tomaron en consideración: los comentarios realizados a la primera pregunta (dejaban ver requisitos y la definición de derivada que tenían), aquellos términos que valoraron como necesarios de la pregunta dos (identificar requisitos), la definición de derivada de una función en un punto que eligieron como más próxima a la suya, el argumento que eligieron en cada uno de los enunciados.

Para el análisis clúster empleamos la misma medida de similitud y el mismo método empleado en las fases anteriores (Rogers-Tanimoto y Ward.D), lo que nos permitió identificar cuatro perfiles de respuesta, con lo que de alguna forma pone de manifiesto 4 significados con los que operaron los docentes al contestar el cuestionario.

# CAPÍTULO 4

# Resultados fase 1: Estudio con docentes en formación

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos en la primera fase de la investigación, tras el análisis a las respuestas dadas por los docentes en formación a las 3 tareas propuestas en el cuestionario semántico. Para ello hemos considerado cinco apartados, los primeros tres corresponden al análisis de cada una de las tareas del instrumento; en el apartado cuatro se presentan los perfiles dados a la derivada identificados mediante el análisis clúster; finalmente presentamos una síntesis de los resultados obtenidos.

## 4.1. Tarea 1: definición de derivada

En la primera tarea se les pedía a los futuros docentes definir derivada de una función en un punto. Las respuestas dadas nos permitieron analizar elementos de los tres componentes de la terna: estructura conceptual, sistemas de representación y sentido. A esta tarea respondieron 95 docentes en formación.

### *4.1.1. Estructura conceptual*

En cuanto a la *definición*, llama la atención la variedad de formas con las que los participantes hicieron referencia a la derivada. Tras un esfuerzo por agrupar las definiciones dadas según su similitud, estas se pueden sintetizar en las siguientes 5 categorías:

I. *La derivada como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto:* en esta categoría se incorporaron aquellas respuestas en las que definieron la derivada de la función como, y solamente como, la pendiente de la recta tangente, incluyendo respuestas un poco imprecisas de tipo:

   1. La derivada es la pendiente de la función.
   2. La derivada es el valor de la recta tangente.
   3. La derivada es el punto tangente a la función.

   Aunque es claro que estas expresiones no definen la derivada exactamente como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, por su similitud y relación fueron incorporadas en esta categoría todas aquellas definiciones que emplearon como palabras clave *recta, tangente* o *pendiente*, asumiendo de algún modo que la intención del participante iba en esa dirección.

II. *La derivada como un límite:* en esta categoría se incluyen aquellas definiciones en las que el sujeto consideró la derivada como el límite de cociente incremental, ya sea porque lo describió de esta forma o porque lo expresara de manera simbólica.

III. *La derivada como pendiente de la recta tangente y como un límite:* aquí se consideraron las respuestas de los sujetos que hicieron alusión a ambos aspectos en su definición.

IV. *La derivada como pendiente de la recta tangente y otro:* incorporamos las respuestas que hacían alusión a la derivada como pendiente de la recta tangente, pero también mencionaban que se podía interpretar como un cambio, variación, o algún otro aspecto.

V. *Otras definiciones:* finalmente, se encontraron definiciones particulares que no correspondían con ninguno de los casos anteriores, por lo que se agruparon en esta categoría. Se encuentran aquí definiciones de tipo:

- La derivada es un *cambio*.
- Es el *proceso* contrario al cálculo de áreas.
- El punto crítico de una función donde su derivada es 0.
- Es el valor del l*ímite*, si existe, de la función en ese punto.
- La derivada es la *función* que para cada punto de una función f dada, devuelve la pendiente de la recta tangente en cada punto.
- Una derivada es una *descomposición de* expresiones que corresponda para una función dada

Esta última categoría acepta varias subcategorías, pero dado que fueron definiciones menos frecuentes (ver tabla 4.1) decidimos dejarlas en una sola. Tal como se aprecia en la tabla 4.1, la definición que predominó fue la derivada como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto. De hecho, esta fue considerada en la definición tipo I, III y IV; es decir, cerca del 70% de los participantes incluyeron este aspecto al definir la derivada.

Tabla 4.1. *Definiciones dadas a la derivada*

| *Tipo de definición* | | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| I. | Pendiente de la recta tangente | 35 |
| II. | Un límite | 15 |
| III. | Pendiente de la recta tangente y límite | 21 |
| IV. | Pendiente de la recta tangente y otro | 10 |
| V. | Otras definiciones | 14 |

Al analizar las definiciones que hacían alusión a la pendiente de la recta tangente, percibimos que la intención no era exactamente la misma en todos los casos; por ejemplo, para referirse a esta se emplearon distintos verbos como: *indica, coincide, representa, corresponde*, entre otros. Con esto, de una u otra forma reconocen que, más que su definición, están haciendo referencia a un modo de interpretar o utilizar la derivada. Aunque también se detectaron casos de participantes que indicaron que la derivada es *sinónimo* de pendiente.

Otro aspecto que llamó la atención fue que quienes dieron la definición del tipo III, en algunos casos consideraban el límite como la definición y reconocían la pendiente como una interpretación, pero en otros casos la pendiente de la recta tangente era la definición y el límite era solo el medio para calcularla, como se observa en la respuesta de la figura 3.10.

SE DEFINE COMO LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA FUNCIÓN EN EL PUNTO $x=a$ Y TOMA EL VALOR

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

*Figura 3.10.* Respuesta dada por B26 a la tarea 1

Algunos participantes señalan que definir la derivada mediante su interpretación geométrica permite una mejor visualización, pero que se trata de una definición más básica o intuitiva, considerando la definición mediante el límite como la "formal" o "clásica"; tal es el caso de participante A7 que se muestra en la figura 3.11. Incluso un participante señaló *"sé que hay otra definición más formal, pero no la recuerdo".*

Pienso que la forma más gráfica y visual de definir el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto $x_0$ es como la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x_0$.

Otra definición clásica se basa en el concepto de límite:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

*Figura 3.11.* Respuesta dada por A7 a la tarea 1

De las definiciones incluidas en la categoría V, destacan 6 futuros docentes que confunden la noción de derivada de una función en un punto con la del límite de la función en dicho punto; mezclando la definición de derivada con la continuidad de la función derivada en un punto. Se puede observar en definiciones como la que se muestra en la figura 3.12.

Es el valor del límite, si existe, de la función en ese punto

$$\lim_{x\to a} f(x) = f'(a)$$

*Figura 3.12.* Respuesta dada por A35 a la tarea 1

En términos generales, los futuros docentes recurrieron principalmente a aspectos geométricos (la pendiente de la recta tangente, por ejemplo) o analíticos (definición mediante límite) para dar su definición de derivada. Sin embargo, fue posible identificar definiciones basadas en otros elementos; por ejemplo, algunos participantes destacaron el carácter algebraico de la derivada considerándola como una "*descomposición de expresiones*" (uso de reglas de derivación), en otros casos se acudió a resultados o propiedades, e incluso se redujo la definición a un procedimiento.

### *Términos utilizados para definir*

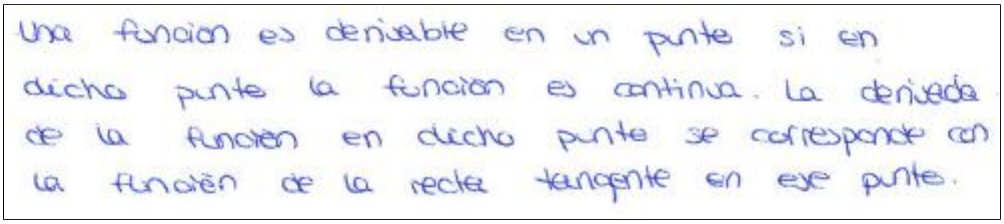
Una vez sintetizadas las definiciones dadas, con el fin de hacer un análisis más detallado, y con base en nuestro marco teórico, nos centramos en los distintos términos empleados para definir derivada. Dada la variedad de definiciones halladas, fue posible identificar una gran cantidad de términos, como se observa en la tabla 4.2.

Tabla 4.2. *Términos empleados para definir derivada*

| *Categoría* | *Términos* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| Palabras empleadas como apoyo | Función continua | 7 |
| | Función real de variable real | 3 |
| | Punto de acumulación | 1 |
| Palabras empleadas como símil de derivada | Pendiente | 53 |
| | Recta tangente | 47 |
| | Límite | 26 |
| | Límite del cociente incremental | 4 |
| | Límite de rectas secantes | 1 |
| | Una función | 2 |
| | Un proceso | 1 |
| | Descomposición de expresiones | 2 |
| | Cambio | 5 |
| | Vector dirección | 1 |
| | Variación | 2 |
| | Inclinación | 3 |
| | Variación instantánea | 1 |
| | Aplicación lineal | 1 |
| Palabras utilizadas como adjetivo | Valor | 11 |
| | Número real | 3 |
| | Integral | 1 |
| | Derivable | 7 |
| | Incremento infinitesimal | 3 |
| | Velocidad | 2 |

A estos términos deben agregarse las palabras: *derivada*, *función* y *punto* que emplearon más de la mitad de los futuros docentes al iniciar su definición; sin embargo, no las consideramos en la tabla 4.2 ya que forman parte del concepto a definir. Por otra parte, aunque el término pendiente y recta tangente son muy cercanos en frecuencia, debe reconocerse que estos no siempre se utilizaron de forma conjunta, como se señaló anteriormente entre las definiciones había frases como “función de la recta tangente”, “pendiente de la función” o “recta tangente a la función”.

Un dato interesante es que solamente 8 futuros participantes hicieron alusión a alguno de los requisitos para poder definir la derivada de una función en un punto: (a) que el punto sea de acumulación y (b) que la función sea continua; cabe señalar además que dos de los que mencionan la continuidad de la función lo hacen como condición suficiente, tal como se muestra en la figura 4.1. Asimismo, pocos indicaron el hecho de que se trata de un valor finito.



Una funcion es derivable en un punto si en dicho punto la funcion es continua. La derivada de la funcion en dicho punto se corresponde con la función de la recta tangente en ese punto.

*Figura 4.1*. Respuesta dada por A15 a la tarea 1

## *Notación empleada para definir*

Una vez analizados los términos, se procedió a identificar la notación empleada en la definición, en la tabla 4.3 se muestran los principales resultados.

Tabla 4.3. *Notación utilizada para definir derivada*

| *Aspecto* | *Notación* |
|---|---|
| Punto | $a, x_0, P$ y $x$ |
| Dominio | $A, D$ y $\mathbb{R}$ |
| Función | $f$ y $f(x)$ |
| Derivada en un punto | $f´(x_0)$ y $f´(a)$ |
| Recta | $r$<br>$y = mx + b$ |
| Puntos de acumulación | $A´$ |

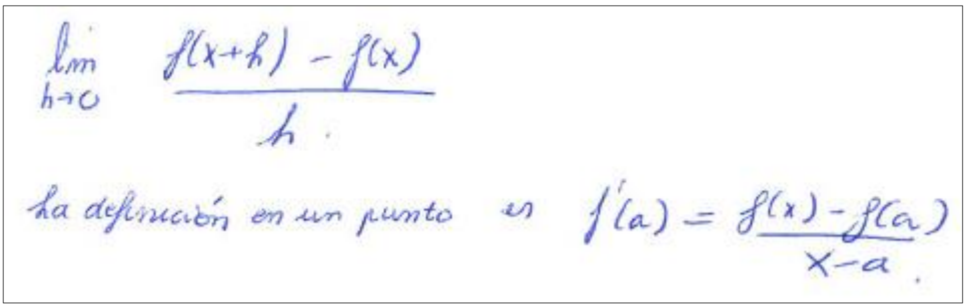
Tabla 4.3. *Notación utilizada para definir derivada*

| *Aspecto* | *Notación* |
|---|---|
| Pendiente | $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h-x}$ |
| Derivada | $f'(x_0)$ , $f'(a)$ y $f'(x)$ <br> $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ <br> $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ <br> $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ <br> $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ <br> $\left.\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}\right\|_{h\to 0}$ |

Esta notación fue empleada principalmente por los futuros docentes que definieron la derivada como un límite, destacamos que las últimas dos notaciones para derivada fueron empleadas solo una vez. Se detectaron algunos errores, por ejemplo, al expresar simbólicamente la pendiente; además de variantes a la definición de derivada hallándose expresiones como:

$$\lim_{x_0\to 0}\frac{f(h)-f(x_0)}{h-x_0} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h-x_0} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(b)+h-f(a)}{b-a}$$

Además, detectamos que algunos participantes dieron su definición mediante $f'(x)$ y su límite, sin diferenciar si se trataba de la derivada en un punto en específico o no. El participante B24 es el único que hace esta distinción, como se muestra en la figura 4.2. Resulta curioso que emplee dos notaciones distintas, aunque al definir $f'(a)$ olvidó colocar la notación de límite.


$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

La definición en un punto es $f'(a) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

*Figura 4.2.* Respuesta dada por B24 a la tarea 1

Por otra parte, 5 participantes hicieron mención explícita de que la notación de derivada es $f'(x_0)$; a pesar de que hay más respuestas en las que utilizan esta notación, lo hacen de manera conjunta a la definición mediante límite, sin mencionar que se trate de su notación. Incluso muchos participantes colocaron solo la expresión del límite, sin igualar la expresión a $f'(a)$ o similar.

### *4.1.2. Sistemas de representación*

Aunque la tarea no solicitaba el uso de ningún sistema de representación en particular, por lo que la mayoría de las respuestas se encuentran de forma verbal, 40 de los participantes complementaron su definición con representación simbólica, empleando alguna de las notaciones de la tabla 4.3. De hecho, dos de los participantes emplearon únicamente este sistema de representación, colocando por respuesta el límite que define a la derivada en un punto, sin agregar nada más.

De igual forma, 13 participantes hicieron uso de la representación gráfica, realizando un dibujo de una curva y una recta tangente a ella en un punto. Sin embargo, sólo 4 de ellos relacionaron de alguna manera la representación utilizada con la derivada de la función, como se muestra en la figura 4.3.

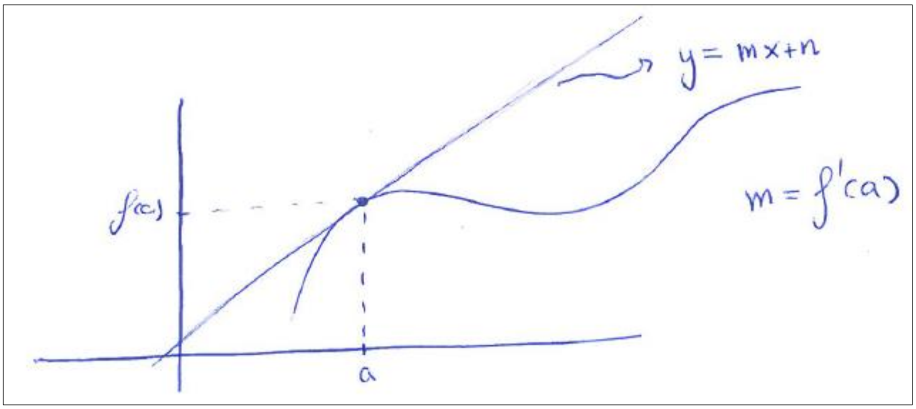



*Figura 4.3.* Gráfica realizada por A2, en la tarea 1

### *4.1.3. Sentido y modo de uso*

En esta primera tarea, el sentido que predomina es la derivada como pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado; es decir su sentido geométrico. Además, tiene presencia el sentido analítico y, aunque en menor medida, también se destacó el sentido físico al mencionar la interpretación de la derivada como velocidad.

## 4.2. Tarea 2: verdadero o falso

En esta segunda tarea, los futuros docentes debían justificar la veracidad o falsedad de 2 enunciados dados (dos en el cuestionario A y dos en el B). La intención era ahondar un poco en la estructura conceptual, estudiando elementos del campo conceptual y del procedimental. Para ellos analizamos el uso dado a los elementos matemáticos (definición, propiedades, relaciones, entre otros) al argumentar su postura ante el enunciado; además, esta tarea nos permitió aproximarnos a la forma de razonar de los futuros docentes al trabajar con la derivada. Pese a ser una tarea más centrada en la estructura conceptual, también identificamos el empleo de sistemas de representación. A continuación, describimos los principales resultados obtenidos, analizando cada uno de los enunciados de forma individual.

### *4.2.1. Primer enunciado: recta tangente vertical*

El primer enunciado del cuestionario A es el que se presenta en la figura 4.4. De los 43 participantes 5 no contestaron nada, por lo que analizamos un total de 38 respuestas.

1. ( ) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, tiene por gráfica la que se muestra en la figura 1. La recta $m$ es tangente a la curva en $x = 1$; de esta forma es fácil asegurar que $f$ es derivable en ese punto.

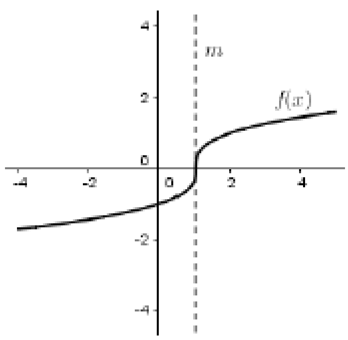



*Figura 1.* Gráfica de $f$

*Figura 4.4.* Primer enunciado del cuestionario A

En cuanto a la veracidad o falsedad, 9 participantes indicaron que el enunciado era verdadero, aunque uno no dio justificación; mientras que 29 aseguraron que era falso, 2 de los cuales no justificaron. Los argumentos dados fueron muy variados, en la tabla 4.4 se puede observar un resumen de las respuestas obtenidas.

Tabla 4.4. *Argumentos dados al primer enunciado*

| *Código*[*] | *Justificación* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| 1.V.1 | Determinar algebraicamente $f'(x)$, pero algunos errores en su cálculo lo llevan a concluir que $f'(1) = 0$, afirmando entonces que la función es derivable. | 3 |
| 1.V.2 | Calcular los límites laterales de la función derivada, cuando $x$ se aproxima a $1$, concluyendo que al ser iguales a $+\infty$, la función es derivable. | 1 |
| 1.V.3 | En $x = 1, f$ cambia de signo. | 1 |
| 1.V.4 | Probar que la función es continua. | 1 |
| 1.V.5 | Al ser una función continua y tener recta tangente en ese punto. | 1 |
| 1.V.6 | Dado que $f'(x) = \frac{(x-1)^{\left\{-\frac{2}{3}\right\}}}{3}$, $f'(x)$ es continua. | 1 |
| 1.F.1 | Dado que $f'(x)$ se indefine en $x = 1$. | 5 |
| 1.F.2 | La pendiente de la recta tangente dada es infinita, lo cual hace a la función no derivable. | 5 |
| 1.F.3 | Los límites laterales de $f'(x)$ cuando $x$ tiende a 1 no coinciden. | 6 |
| 1.F.4 | Aunque gráficamente sabemos que es derivable, no es fácil asegurarlo, hay que probar que los límites laterales de $f'(x)$ coinciden. | 2 |
| 1.F.5 | Calcular algebraicamente $f'(x)$, y por errores de cálculo obtener $f'(1) = 0$; pese a esto se concluye que es falso. | 1 |
| 1.F.6 | Que exista recta tangente, no implica que la función sea derivable en el punto de tangencia. | 1 |
| 1.F.7 | La recta dada no es la tangente en ese punto. | 1 |
| 1.F.8 | En este punto no es derivable al ser una raíz de la función $f(x)$. | 1 |
| 1.F.9 | $f'(1) = \frac{1}{0}$ por lo que tendría que hacerse un cambio de variable. | 1 |
| 1.F.10 | Dar un ejemplo | 1 |
| 1.F.11 | La definición no se cumple | 1 |
| 1.F.12 | $f'$ no es continua en $x = 1$ | 2 |

[*] Número de enunciado. V o F dependiendo de si fue utilizado para justificar la veracidad o falsedad. Número que distingue a una justificación de otra.

Se puede observar que la vía de argumentación a la que más se recurre es calcular algebraicamente $f'(x)$ y a partir de ahí hacer conclusiones. Llama la atención el argumento 1.F.10 en donde para justificar que el enunciado es falso, el participante dibuja otra función con una recta tangente vertical alegando que este tipo de funciones no son derivables.

### *A) Validez y respaldo*

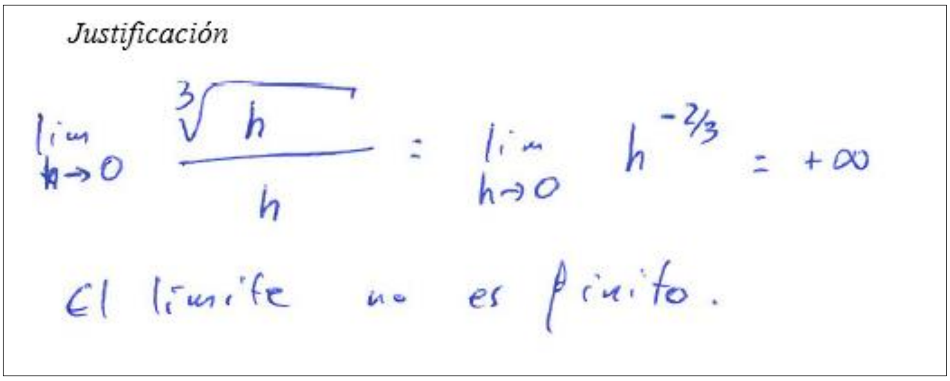
Una vez identificados los principales argumentos dados, procedimos a valorar su validez dentro del contexto dado. Aclaramos que nuestro análisis se centró en si el docente en formación elegía una vía de argumentación válida o adecuada para cada uno de los enunciados, pese a que la justificación dada no fuese del todo completa (no presente el respaldo suficiente).

Si observamos la tabla 4.4 apreciamos que hay varias justificaciones que no son válidas, por ejemplo: 1.V.3, 1.F.7, I.F.8 y 1.F.9, ya que se usa un argumento falso o fuera de contexto, como afirmar que la recta dada no es tangente. Del mismo modo, se detectan varios argumentos que pese a ser afirmaciones correctas, no son una justificación suficiente, por ejemplo, 1.V.4, 1.V.5., que sostienen que la continuidad de la función es suficiente para la derivabilidad, o bien 1.F.12; donde el argumento de que $f´(x)$ no es continua en $x = 1$ no es concluyente sobre la derivabilidad en el punto, al igual que 1.F.3 y 1.F.4.

Por otra parte, 1.F.1, 1.F.2, 1.F.6, 1.F.10 y 1.F.11, son justificaciones válidas, aunque sin duda algunas requerirían de más respaldo. Asimismo, consideramos que 1.V.1, 1.V.2, 1.V.6 y 1.F.5, pese a ser justificaciones en las que se eligió una vía de argumentación adecuada para el enunciado presentan errores que las convierten en justificaciones incorrectas; por ejemplo, recurrir a  la expresión algebraica de $f´(x)$ puede ser pertinente, pero errores de cálculo los hacen llegar a una conclusión errónea; o bien, calcular derivadas laterales es adecuado, pero considerar la función derivable porque ambas tienden a infinito es un error.

Así en total se hallaron 16 participantes que dieron una justificación inválida o no concluyente; 6 que, aunque seleccionaron una vía de argumentación válida, son incorrectas por errores cometidos; y 13 respuestas que podrían considerarse válidas.

En cuanto al respaldo presentado, tanto en justificaciones válidas como las que no, pudimos detectar que 25 de ellas presentaban algún tipo de respaldo, un ejemplo de ello se muestra en la figura 4.5, en el que para justificar la falsedad del enunciado se argumenta que “el límite no es finito” lo cual se acompaña de un cálculo algebraico que lo respalda.


Justificación

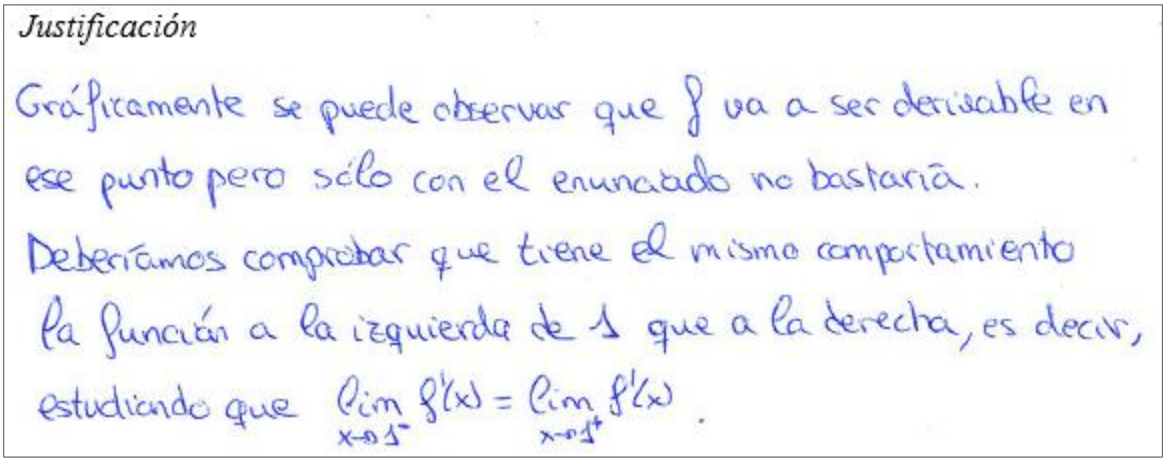
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-2/3} = +\infty$$

El límite no es finito.

*Figura 4.5*. Respuesta dada por A38 al primer enunciado

Hay que reconocer que no en todos los casos el respaldo identificado era correcto o suficiente; no obstante, en el análisis nos centrábamos en si había intención de respaldar o no la justificación. De hecho, 11 de los 25 respaldos detectados son equívocos o incurren en algún tipo de error, lo que en la mayoría de los casos los lleva a conclusiones falsas.

Por otra parte, los 10 participantes no sintieron necesidad de ampliar o reforzar su justificación, presentaban argumentos como el que se muestra en la figura 4.6, en el que para apoyar la veracidad del enunciado se escribe que debe verificarse si las derivadas laterales coinciden, pero no agrega nada más, probablemente si hubiese apoyado su justificación con el cálculo de dichos límites se habría dado cuenta que el enunciado era falso.


Justificación

Gráficamente se puede observar que f va a ser derivable en ese punto pero sólo con el enunciado no bastaría.
Deberíamos comprobar que tiene el mismo comportamiento la función a la izquierda de 1 que a la derecha, es decir, estudiando que $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$.

*Figura 4.6*. Respuesta dada por S7 al primer enunciado

## *B) Elemento matemático y modo de empleo*

Un aspecto importante de las justificaciones presentadas tiene que ver con el elemento matemático en el que se basa y modo en el que lo emplea. En la tabla 4.5 se puede observar cómo los docentes en formación, para este enunciado, optaron principalmente por un procedimiento algebraico o el uso de un resultado. En ese sentido, sobresalen dos elementos: primero, la importancia del aspecto algebraico como medio de argumentación y los errores de cálculo que se ponen de manifiesto; en segundo lugar, el uso de resultados incorrectos, empleándose en algunos casos implicaciones recíprocas o contrarias que no son verdaderas.

Tabla 4.5. *Elemento matemático utilizado en el primer enunciado*

| *Elemento* | *Base del argumento* | *Modo* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| Aspecto gráfico | La recta tangente vertical en un punto implica no derivabilidad en dicho punto. | Directa | 7 |
| Procedimiento | Si se conoce la derivada en un punto, se puede calcular la recta tangente | Recíproca | 2 |
| | Calcular la expresión $f'(x)$ y evaluar en el punto | Directa | 11 |
| Definición | Si el límite, $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, existe y es finito, entonces la función es derivable en $a$. | Contraria | 1 |
| Resultado | Si una función es derivable en un punto, es continua en ese punto. | Recíproca | 1 |
| | Si $f$ es continua en $a$. Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe, entonces $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$. (Si la función derivada es continua en un punto, entonces $f$ es derivable en dicho punto) | Directa | 4 |
| | | Contraria | 7 |
| Otros | | | 2 |

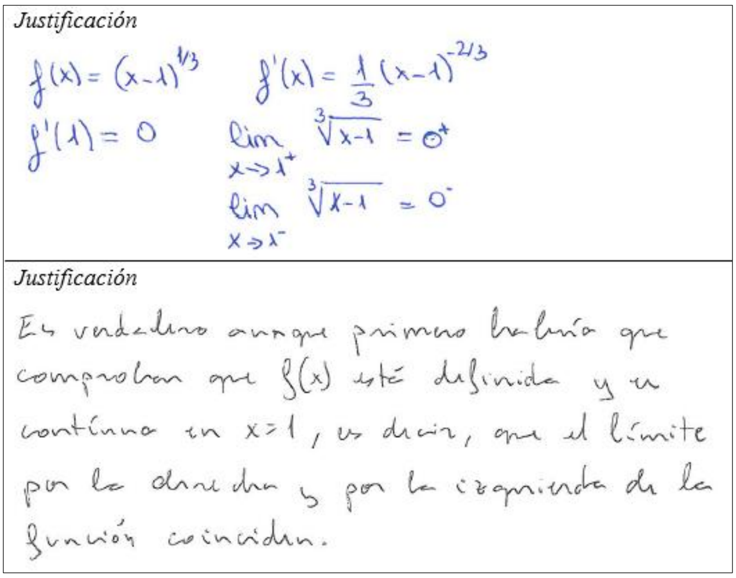
En el caso de una definición, al tratarse de una implicación equivalente, decidimos explicitar la implicación directa que asumidos y así poder indicar una implicación lógica utilizada, siendo conscientes de que según como se mire (la implicación directa que se considere) se trataría de una implicación recíproca o contrarrecíproca válida. En la categoría otros hemos incluido aspectos que, aunque no tienen relación alguna con la derivada (argumentos inventados), fueron utilizados de forma directa, como el caso "al ser una raíz de la función, no es derivable en ese punto". Este aspecto también llama la atención, pues algunos futuros docentes "inventaron" justificaciones sin sentido, en lugar de recurrir a un aspecto elemental como es la definición misma.

En la tabla 4.5, también señalamos el modo en el que cada uno de los elementos matemáticos fue utilizados, identificado la implicación lógica involucrada. Pese a que la mayoría de las justificaciones están escritas de la forma "Como $X$ sucede (o no sucede), entonces $Y$", lo que buscamos es el uso lógico que se le da a los elementos matemáticos. Por ejemplo, quienes aseguran que el enunciado es verdadero dado que la función es continua están usando el recíproco de un resultado. En otro ejemplo se asegura que el recíproco de una afirmación no siempre es verdadero al escribir: “si una función es derivable en un punto, la derivada nos permite calcular la recta tangente en ese punto, pero que haya recta tangente no implica que podamos calcular la derivada”.

De este modo, 25 elementos matemáticos fueron utilizados de manera directa, 3 haciendo uso de la implicación recíproca y 8 de la contraria.

### *C) Modo de representar el argumento*

De los 35 argumentos, uno de ellos es de tipo perceptual, es decir, se limitó a un dibujo de una función que al igual que la dada en el enunciado presentaba una recta tangente vertical y esto la hacía no derivable. Los 34 restantes hicieron uso de símbolos y palabras para representar su argumento, aunque unos fueron más simbólicos que otros; cómo se puede ver en la figura 4.7, donde la respuesta dada por A29 es simbólica, mientras que la de A22 es totalmente narrativa, pese al uso de algunos símbolos matemáticos.



*Justificación*

$f(x) = (x-1)^{1/3}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$

$f'(1) = 0$ $\quad \lim_{x \to 1^+} \sqrt[3]{x-1} = 0^+$

$\lim_{x \to 1^-} \sqrt[3]{x-1} = 0^-$

*Justificación*

Es verdadero aunque primero habría que comprobar que f(x) esté definida y es continua en x=1, es decir, que el límite por la derecha y por la izquierda de la función coinciden.

*Figura 4.7.* Respuesta dada por A29 y A22 al primer enunciado

De esta forma, 20 de ellos utilizaron principalmente un argumento narrativo mientras que 14 emplearon mayormente símbolos.

### *4.2.2. Segundo enunciado: función definida en un dominio discreto*

El segundo enunciado propuesto a los participantes en el cuestionario A es el que se muestra en la figura 4.8. Dos de los participantes no respondieron, por lo que en total se analizaron 41 argumentos.

2. ( ) Para la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$; tal que $f(x) = x^3 + 2x - 1$, se cumple que $f$ es derivable en $x = 1$, y además $f'(1) = 5$.

*Figura 4.8.* Segundo enunciado del cuestionario A

Este enunciado es sin duda uno de los que más llama la atención, ya que, de las 41 respuestas obtenidas, 26 de ellas aseguran que el enunciado es verdadero y 15 que es falso. De forma general, las justificaciones dadas se sintetizan en la tabla 4.6, en la que nuevamente se aprecia que el argumento más empleado tiene que ver con el proceso algebraico para calcular derivadas (reglas de derivación).

Tabla 4.6. *Argumentos presentados al segundo enunciado*

| *Código* | *Justificación* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| 2.V.1 | Calcular algebraicamente $f'(x)$ y evaluar | 15 |
| 2.V.2 | La función y su derivada son continuas en $x = 1$ | 6 |
| 2.V.3 | La función es un polinomio continuo | 4 |
| 2.V.4 | Al calcular el límite que define derivada se puede comprobar que la función es derivable | 1 |
| 2.F.1 | La función no es continua | 4 |
| 2.F.2 | Para que una función sea derivable en un punto es necesario que este sea de acumulación | 4 |
| 2.F.3 | La derivada involucra cálculo de límites, lo cual no tiene sentido en un dominio discreto | 4 |
| 2.F.4 | No se puede definir $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ (biyectividad) | 2 |
| 2.F.5 | Al derivar y evaluar $f'(1) \neq 5$ | 1 |

#### *A) Validez y respaldo*

De los argumentos dados, 2.F.2. y 2.F.3. se consideran justificaciones válidas. Precisamente la intención principal del enunciado era observar si los docentes en formación atienden a los requisitos necesarios para que pueda definirse la derivada en un punto. Un caso interesante ocurre con el argumento 2.V.4., pues una vía de argumentación válida es recurrir a la definición, el problema en este caso es que omite los requisitos y va directamente al cálculo del límite que define la derivada de una función en un punto.

Los argumentos restantes (33) no son válidos para el enunciado dado. Al tratarse de una función de dominio discreto, se considera que es una función continua en todos sus puntos del dominio (Apóstol, 2002), de esta forma no tiene sentido decir que la función es discontinua; sin embargo, dicha condición de continuidad tampoco es suficiente para hablar de derivabilidad, por lo que argumentos como 2.V.2., 2.V.3. o 2.F.1. no son válidos. Además, 2.F.4. no tiene relación con la derivabilidad, y en 2.V.1. se asume la derivabilidad, lo cual es un error.

En cuanto al respaldo que dan los docentes en formación a sus argumentos, en este enunciado la mayoría de ellos dio algún respaldo a sus justificaciones (33 de los participantes), principalmente del cálculo algebraico realizado para determinar $f'(x)$ o para "verificar" si la función era, o no, continua.

### *B) Elemento matemático y modo de empleo*

Dada la naturaleza de los argumentos empleados, el elemento más utilizado fue el procedimiento algebraico (reglas de derivación) para calcular la expresión $f'(x)$, seguido del empleo de algún resultado, tal como se aprecia en la tabla 4.7.

Tabla 4.7. *Elemento matemático utilizado en el segundo enunciado*

| *Elemento* | *Base del argumento* | *Modo* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| Definición | Si el límite, $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, existe y es finito, entonces la función es derivable en $a$. | Directa | 1 |
| Requisitos | La derivada de una función en un punto se define en puntos de acumulación | Contrarrecíproca | 8 |
| Procedimiento | Calcular la expresión $f'(x)$ y evaluar | Directa | 16 |
| Resultado | Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto. | Contrarrecíproca | 4 |
| | | Recíproca | 4 |
| | Si $f$ es continua en $a$. Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe, entonces $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$. (La derivada es continua en un punto, entonces es derivable) | Directa | 6 |
| Otros | | | 2 |

Incluimos en “otros” los dos argumentos que recurrieron a la noción de función biyectiva, al no tratarse de un elemento matemático relacionado directamente con el concepto de derivada. Para este enunciado, los elementos matemáticos se emplearon haciendo uso de las distintas implicaciones lógicas. Pese a que la mayoría utiliza los elementos de manera directa, se hallaron 4 implicaciones recíproca y 12 contrarrecíprocas

*C) Modo de representar el argumento*

En este enunciado el tipo de argumento que predominó fue el simbólico con 25 de estos y 16 de tipo narrativo.

### *4.2.3. Tercer enunciado: derivabilidad en un máximo local*

En la figura 4.9 se muestra el primer enunciado del cuestionario B, el cual se le aplicó a 55 participantes, sin embargo 2 no lo respondieron, por lo que en este caso se analizaron 53 respuestas.

1. ( ) Para la función $g$, cuya gráfica se muestra en la figura 1

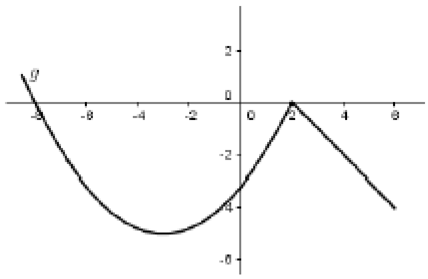



*Figura 1.* Gráfica de $g$

Se puede afirmar que como $g$ tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $g'(2) = 0$.

*Figura 4.9.* Primer enunciado del cuestionario B

Para este enunciado, 11 de los futuros docentes consideraron el enunciado como verdadero (3 de ellos no dieron justificación); mientras que 42 indicaron que era falso (1 de ellos sin justificar). Entre otros y de manera sintetizada los argumentos fueron los que se aprecian en la tabla 4.8. Al igual que en el primer enunciado se encontró gran variedad de argumentos, sobre todo para asegurar la falsedad de este.

Tabla 4.8. *Argumentos dados al tercer enunciado*

| *Código* | *Justificación* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| 3.F.1 | La función presenta un “pico” en $x = 2$ | 9 |
| 3.F.2 | Hay un cambio brusco de monotonía | 2 |
| 3.F.3 | Las derivadas laterales en ese punto no coinciden | 5 |
| 3.F.4 | La pendiente de la recta tangente es ese punto es infinita | 1 |
| 3.F.5 | La función no es derivable en ese punto | 10 |
| 3.F.6 | Al ser una función a trozos, su derivada no es continua | 3 |
| 3.F.7 | Los límites laterales de $g'(x)$ no coinciden | 4 |
| 3.F.8 | No se puede saber, pues no se conoce el criterio | 1 |
| 3.F.9 | Si la función es derivable en un máximo, $f'(x) = 0$, pero no en todos los máximos la función tiene que ser derivable. | 2 |
| 3.F.10 | No es derivable al tratarse de un punto silla. | 2 |
| 3.F.11 | El punto no es un máximo | 1 |
| 3.F.12 | La posición de la recta tangente | 1 |
| 3.V.1 | La derivada se anula en los extremos de una función | 7 |
| 3.V.2 | No existe tangente, por tanto, es cero | 1 |

### *A) Validez y respaldo*

En cuanto a la validez del argumento consideramos que la mayoría de ellos, 35 para ser exactos, eligen una vía de argumentación válida, aunque al igual que en casos anteriores no siempre con el suficiente respaldo. De hecho, 22 de los argumentos válidos no presentaron respaldo alguno, limitándose a indicar que la función no es derivable en el punto o simplemente afirmando que, dado que la función presenta un “pico”, esta no es derivable en ese punto.

En el caso de los 14 argumentos no válidos, se tratan principalmente de justificaciones que, aunque basadas en aspectos matemáticos verdaderos (procedimiento para hallar máximos y mínimos, por ejemplo 3.V.1), son utilizados en un contexto inadecuado. O bien se trata de justificaciones sin fundamento matemático; por ejemplo, señalar que *en el punto no ocurre un máximo*, o como la respuesta de la figura 4.10, que asegura que sin conocer el criterio o fórmula de la función no puede se puede asegurar nada.

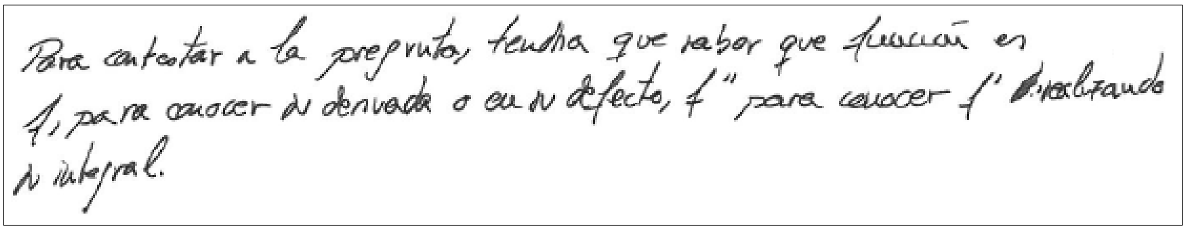

Para contestar a la pregunta, tendría que saber que función es $f$, para conocer su derivada o en su defecto, $f''$ para conocer $f'$ realizando su integral.

*Figura 4.10.* Respuesta dada por B41 al primer enunciado

Este último llama bastante la atención, pues la importancia que se le da a la expresión algebraica se evidenció además en dos participantes que se vieron en la necesidad de determinar el criterio que define la función para poder comprobar que las derivadas laterales no coincidían.

De estos 14 argumentos no válidos, 6 de ellos no presentaban respaldo. Entre otras cosas, subrayamos: (a) el uso de justificaciones o argumentos en contextos inadecuados; y (b) la poca necesidad manifestada de respaldar tales justificaciones. En el caso de los 21 argumentos que presentan respaldo, no siempre se trata de respaldos suficientes o correctos. De ello detectamos que cuatro de ellos son respaldos falsos o inventados. Además, se identificaron casos en los que lo planteado en realidad no es un aspecto concluyente. Sin embargo, nuestro interés en este trabajo tiene más que ver con la intención o la necesidad manifestada por los futuros docentes de respaldar la justificación.

### *B) Elemento matemático y modo de empleo*

Los elementos matemáticos utilizados para este enunciado se resumen en la tabla 4.9. El aspecto gráfico fue lo más empleado, particularmente el punto anguloso, seguido del uso de algún resultado.

Tabla 4.9. *Elemento matemático utilizado en los argumentos*

| *Elemento* | *Base del argumento* | *Modo* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| Gráfico | Una función no es derivable en los puntos en los que la gráfica presenta un "pico" | Directa | 9 |
| | Una función no es derivable en los puntos en los que se presenta un cambio brusco de monotonía | Directa | 2 |
| Definición | Si el límite, $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, existe y es finito, entonces la función es derivable en $a$. | Contraria | 1 |

Tabla 4.9. *Elemento matemático utilizado en los argumentos*

| *Elemento* | *Base del argumento* | *Modo* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| | Si en un punto las derivadas laterales existen y son iguales, entonces la función es derivable en el punto | Contraria | 5 |
| Resultado | Dada una función derivable en $a$. Si $f$ alcanza un extremo relativo en $a$, entonces $f'(a)=0$. | Directa | 5 |
| | | Recíproca | 2 |
| | Si $f$ es continua en $a$. Si $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe, entonces $f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x)$. (La derivada es continua en un punto, entonces es derivable) | Contraria | 7 |
| Procedimiento | Para hallar máximos y mínimos de una función, se resuelve la ecuación $f'(x)=0$. | Recíproca | 2 |
| Otros | | | 6 |

A la lista anterior debe agregarse los 10 docentes en formación que solo indicaron que era falso ya que la función no era derivable en el punto dado, aunque podría suponerse que el elemento matemático que emplean es el primer resultado de la tabla 4.9 y que se refieren a que las condiciones necesarias no se satisfacen, dado que no dan mayor explicación no podemos asegurarlo.

Ahora bien, la mayoría de los participantes que afirmaron que el enunciado era verdadero se basaron tanto en el primer resultado que aparece en la tabla 4.9; sin embargo, dos de ellos emplearon un argumento como el que se muestra en la figura 4.11.

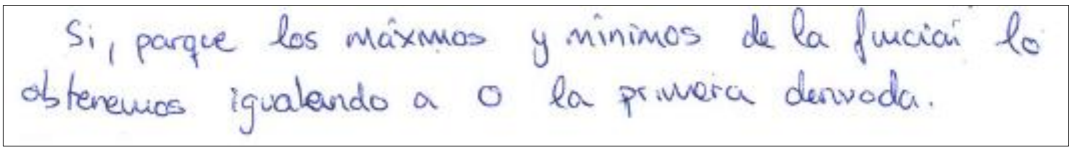

Si, porque los máximos y mínimos de la función lo obtenemos igualando a 0 la primera derivada.

*Figura 4.11.* Respuesta dada por B10 al primer enunciado

Aunque claramente este argumento también se basa en el resultado mencionado, decidimos separarlo, pues la forma en la que el futuro docente lo presenta no es la misma, en esta los participantes se están basando principalmente en un procedimiento que recuerda. El razonamiento del futuro docente es: *si para hallar máximos igualamos la derivada a cero, entonces si en x hay un máximo, la derivada se anula en ese punto”.* Es decir, asumen que el reciproco del procedimiento es verdadero. En ambos casos, vemos que el error en el argumento es no considerar las condiciones necesarias para que la proposición se cumpla o bien para poder aplicar el procedimiento.

Un argumento interesante que se presentó fue uno en el que el participante intenta explicar que el enunciado no es cierto "*pues el recíproco del teorema no siempre es verdadero*". Aquí el futuro docente alega que "*el hecho de que* $f'(x) = 0$ *no implica necesariamente que haya un máximo o mínimo, pues puede tratarse de un punto de inflexión*". El argumento nos muestra que el futuro docente es consciente de que el ejemplo mostrado es un caso en el que hay un máximo o mínimo pero la derivada no se anula, pero no se da cuenta de que no se trata de que el recíproco sea o no verdadero, sino de que hay una condición necesaria, la derivabilidad de la función en el punto, que no está siendo tomada en cuenta.

Por otra parte, los docentes en formación que intentaron respaldar su justificación no siempre lograban enlazar las ideas que presentaba. De este modo hay un elemento matemático adicional que 8 de los participantes consideraron: la función es continua en el punto dado; no obstante, no lo enlazan con el resto de su justificación.

Finalmente, al igual que en los anteriores enunciados, muchos prefieren "aplicar" de manera directa algún resultado que les justifique de forma inmediata la validez o falsedad del enunciado. Aunque en este caso, observamos también el uso erróneo de implicaciones contrarias o recíprocas de algunos elementos matemáticos.

### *C) Modo de representar el argumento*

Al tratarse de argumentos tan específicos y puntuales, la mayoría de ellos se presentaron de forma narrativa empleando complementariamente alguna notación. Aunque identificamos que 5 de los argumentos se presentaron principalmente de manera simbólica, determinado los criterios de la función de manera que pudieran corroborar que las derivadas laterales no coincidían, por lo que se trataban de argumentos creados a partir de una manipulación algebraica.

## *4.2.4. Cuarto enunciado: función discontinua*

El segundo enunciado del cuestionario B es el que se observa en la figura 4.12. De los 55 participantes, 16 de ellos consideraron el enunciado como verdadero, pero solo 13 presentaron alguna justificación; 37 indicaron que era falso, uno de los cuales no dio justificación; y dos no contestaron nada. Por lo que analizamos en total 49 justificaciones.

2. ( ) La función $h(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ cuya gráfica se muestra en la figura 2, satisface que $\lim\limits_{x \to 0^-} h'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h'(x) = 0$. Por lo tanto $h'(0) = 0$.

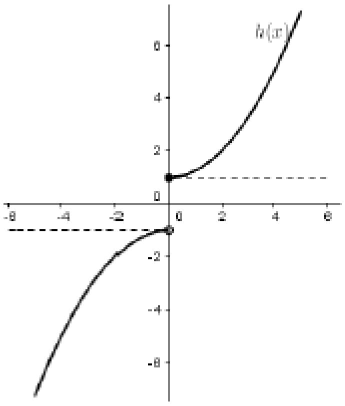



*Figura 2.* Gráfica de $h$

*Figura 4.12.* Segundo enunciado del cuestionario B

En este caso los argumentos empleados fueron menos variados que en los otros enunciados, tal como se observa en la tabla 4.10. Aunque la vía algebraica para argumentar sigue presentándose, en este caso tuvo más predominio el hecho de que la función no era continua.

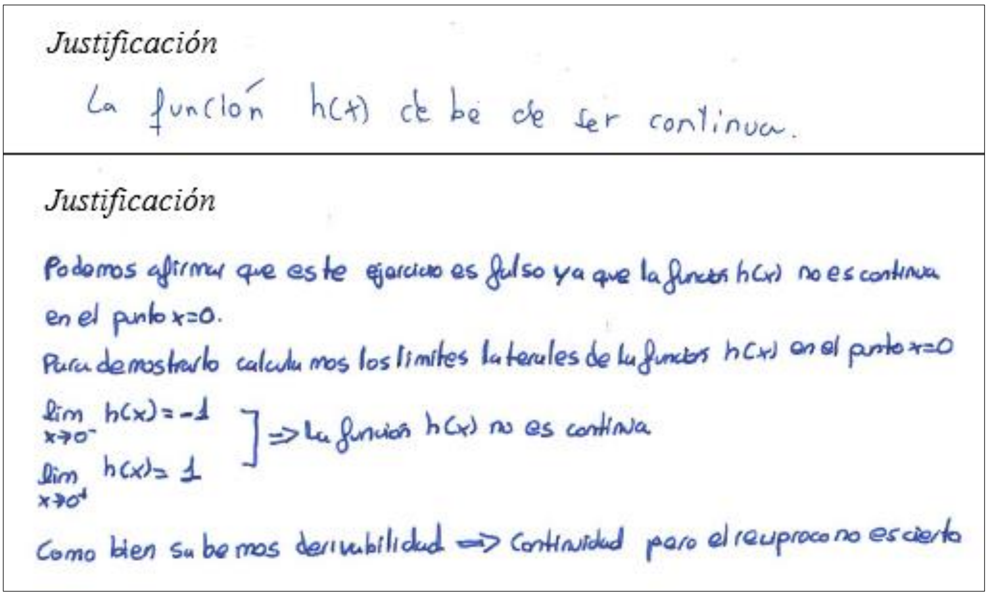
Tabla 4.10. *Argumentos presentados al cuarto enunciado*

| *Código* | *Justificación* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| 4.V.1 | Derivar la función dada y evaluar en $x = 0$ | 8 |
| 4.V.2 | Tanto a la izquierda como a la derecha la recta tangente es la misma | 1 |
| 4.V.3 | La función derivada es continua en $x = 0$ | 1 |
| 4.V.4 | Los límites laterales de $h´(x)$ coinciden | 2 |
| 4.V.5 | Por definición | 1 |
| 4.F.1 | La función no es continua | 34 |
| 4.F.2 | La definición de derivada no se satisface | 1 |
| 4.F.3 | No es derivable al ser una función a trozos | 1 |

*A) Validez y respaldo*

De los 49 argumentos analizados en este enunciado, nos damos cuenta de que precisamente las 13 justificaciones que apelan la veracidad del enunciado no son válidas; pese a esto, todas ellas contaban con algún respaldo (principalmente el cálculo realizado al utilizar el argumento 4.V.1.). De este modo, pese a ser una vía de argumentación incorrecta, el respaldo presentado era correcto. También se considera el enunciado 4.F.3. como una justificación no valida, pues no es un hecho concluyente para la no derivabilidad.

De los 35 argumentos válidos (básicamente los que justificaban la falsedad del enunciado), solo 8 de ellos presentaron algún respaldo a su justificación. Un ejemplo de esto se aprecia en la figura 4.13, donde el argumento más empleado (el hecho de que la función no era continua) fue utilizado sin dar respaldo, como la respuesta de B18, o bien, respaldando la justificación haciendo alusión al teorema y además probando algebraicamente que la función no era continua, como se muestra en la respuesta de B19.


Justificación

La función h(x) de be de ser continua.

Justificación

Podemos afirmar que este ejercicio es falso ya que la función h(x) no es continua en el punto x=0.

Para demostrarlo calculamos los límites laterales de la función h(x) en el punto x=0

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} h(x) = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} h(x) = 1\end{array}\right] \Rightarrow \text{la función } h(x) \text{ no es continua}$$

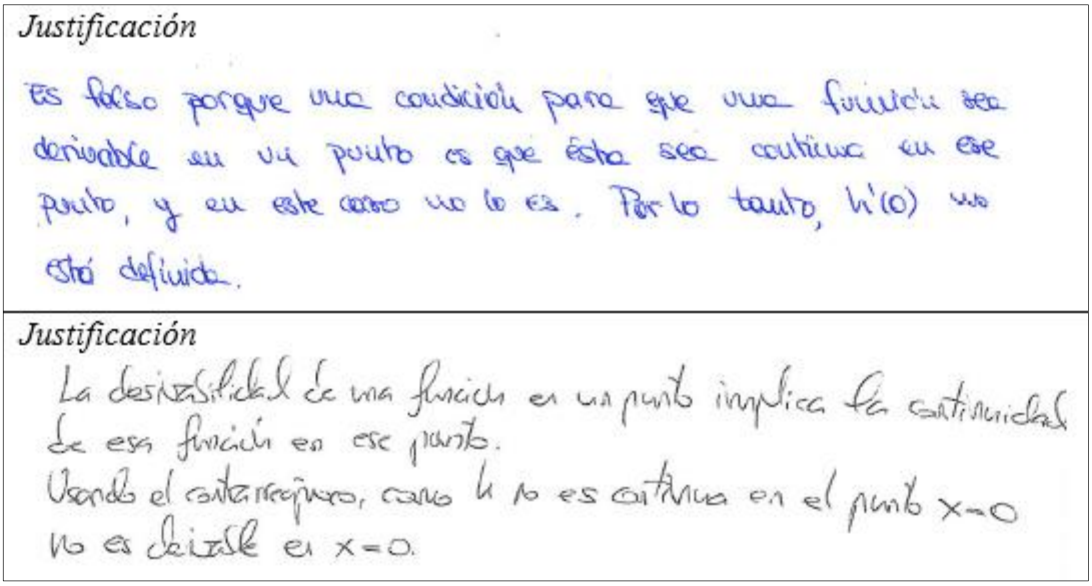
Como bien sabemos derivabilidad ⇒ Continuidad pero el recíproco no es cierto

*Figura 4.13.* Respuestas dadas al cuarto enunciado por B18 y B19 respectivamente

En total se tienen 21 justificaciones con respaldo (correcto), mientras que 28 docentes no sintieron la necesidad de presentar respaldo alguno.

### *B) Elemento matemático y modo de uso*

Al prestar atención al elemento matemático empleado nos damos cuenta de que argumentos similares hacían alusión a elementos matemáticos distintos, por ejemplo, en la figura 4.14 se pueden ver dos justificaciones basadas en la continuidad de la función; sin embargo, una emplea la continuidad como condición necesaria (respuesta de B5), mientras que otra hace referencia al contrarrecíproco de un teorema o resultado (respuesta de B28).



*Justificación*

Es falso porque una condición para que una función sea derivable en un punto es que ésta sea continua en ese punto, y en este caso no lo es. Por lo tanto, h'(0) no está definida.

*Justificación*

La derivabilidad de una función en un punto implica la continuidad de esa función en ese punto.
Usando el contrarrecíproco, como h no es continua en el punto x=0 no es derivable en x=0.

*Figura 4.14.* Respuestas dadas por B5 y B28 al cuarto enunciado

De esta forma, en la tabla 4.11 se muestran los elementos matemáticos utilizados.

Tabla 4.11. *Elemento matemático utilizado en el cuarto enunciado*

| *Elemento* | *Base del argumento* | *Modo* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| Gráfico | Posición de la recta tangente | Directa | 1 |
| Definición | Si el límite, $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, existe y es finito, entonces la función es derivable en $a$. | Directa | 1 |
| | | Contraria | 1 |
| Requisitos | La función debe ser continua para poder ser derivable | Contraria | 10 |
| Procedimiento | Calcular la expresión $f'(x)$ y evaluar | Directa | 8 |
| Resultado o relación | Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto. | Contrarrecíproca | 24 |
| | Si $f$ es continua en $a$. Si $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe, entonces $f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$. (Si la función derivada es continua en un punto, entonces $f$ es derivable en dicho punto) | Directa | 3 |
| Otros | | | 1 |

No sorprende que los elementos más empleados hayan sido el algebra de derivadas y los que tienen que ver con la continuidad de la función. Lo que si nos sorprende es el poco uso de la definición de derivada, incluso quienes la emplearon solo dicen que la definición no se satisface, pero no lo respaldan (no llevan a cabo el cálculo del límite). También nos parece interesante, y de ahí que se evidencia en la tabla 4.11, como un mismo argumento puede hacer uso de elementos matemáticos distintos, por ejemplo, al afirmar que la función no era derivable por no ser continua, algunos mencionan de manera explícita que, si fuera derivable, la función seria continua (teorema), mientras que otros alegan que la continuidad es una condición necesaria para que se dé la derivabilidad.

En cuanto al modo del argumento, en este enunciado predominó el uso de la implicación contrarrecíproca, dado a que el elemento matemático más empleado fue el resultado sobre la relación de la derivabilidad y la continuidad.

*C) Modo de representar el argumento*

Para este último enunciado, primaron los argumentos presentados de forma narrativa (39 de ellos), aunque muchos de ellos se apoyaron en símbolos al presentar su respaldo, los incluimos como narrativos al ser las palabras el principal sistema de representación. Los 10 argumentos restantes se consideran meramente simbólicos.

## 4.3. Tarea 3: aplicación de la derivada

Tal como detallamos en el capítulo 2, comprender un concepto matemático, implica entender los distintos modos de uso, contextos y situaciones en los que está involucrado. Por ello, en la tarea tres (cuestionario B) les solicitamos a los participantes escribir tres aplicaciones en las que se utiliza la derivada de una función en un punto, además de redactar un problema cuya solución involucrara dicho concepto. A continuación, describimos los resultados de las respuestas dadas.

### *4.3.1. Aplicaciones de la derivada*

En esta primera parte, no todos los participantes respondieron con tres aplicaciones, algunos se refirieron solo a una, pero otros plantearon cuatro o cinco; por lo que en total se analizaron

161 aplicaciones de la derivada, las cuales se sintetizan en la tabla 4.12. Se observa que las aplicaciones más destacadas son la optimización, al igual que el determinar puntos críticos de una función. Nuevamente se aprecia la relevancia de la interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente, siendo una de las aplicaciones a las que más se hizo alusión.

Tabla 4.12. *Aplicaciones de la derivada*

| *Aplicación* | *Frecuencia* |
|---|---|
| Optimización en la resolución de problemas varios | 29 |
| Determinar puntos máximos, mínimos y de inflexión | 29 |
| Estudiar la monotonía y concavidad de la función | 27 |
| Determinar velocidad y aceleración de objetos | 26 |
| Determinar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto | 23 |
| Cálculo de integrales | 7 |
| Cálculo de límites | 6 |
| Resolver ecuaciones diferenciales | 5 |
| Estudiar trayectoria de cuerpos | 3 |
| Determinar relación entre variables estadísticas | 2 |
| Determinar la función derivada | 2 |
| Cálculo de áreas | 1 |
| Determinar el polinomio de Taylor | 1 |

Si analizamos con más detalle cada una de las aplicaciones dadas, es fácil percatarse de que la naturaleza de la derivada no es la misma en todas ellas; unas están más ligadas al cálculo, otras a la resolución de problemas, a la derivada como herramienta de análisis, entre otros. Por lo tanto, nos enfocamos en agrupar las aplicaciones mencionadas según el contexto en el que se enmarca la derivada, en la tabla 4.13 se describe cada uno y además la frecuencia con la que se presentaron.

Tabla 4.13. *Contexto de las aplicaciones de la derivada*

| *Contexto* | *Descripción* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| Procedimental-algebraico | Se incluyen aquí aplicaciones de la derivada que destacan su carácter algebraico, cuando se emplea como herramienta para el cálculo de límites, integrales, ecuaciones diferenciales, entre otras. | 19 |
| Geométrico | Se consideran todas las aplicaciones alusivas al componente geométrico de la derivada: extremos, recta tangente, monotonía y representación. | 77 |
| Aplicado | Se refiere a las aplicaciones donde la noción de derivada es aplicada para la resolución de problemas. | 65 |

Aunque en apariencia las aplicaciones podían clasificarse fácilmente en los contextos dados, hay que mencionar que, por ejemplo, algunas aplicaciones sobre el estudio de la monotonía de funciones se contabilizaron dentro del contexto aplicado, dado los participantes aclararon que esto permitía analizar el crecimiento o decrecimiento de las ganancias de una empresa. Por otra parte, llama la atención que, aunque pocas, se hallaran aplicaciones de carácter meramente algebraico, pese a que el predominio esté en el contexto algebraico y aplicado.

Finalmente, nos centramos en las situaciones en las que se enmarcan esas aplicaciones, tras el análisis se determinó que estas podían ser:

- Matemática: se incluyen en esta categoría todas aquellas aplicaciones de la derivada que forman parte de prácticas propias de la disciplina matemática.
- Física: se consideran aquellas situaciones relativas a la rama de la física.
- Estadística: se incluyen los aspectos relacionados con la estadística.
- Laboral: contemplamos aquí la optimización de situaciones empresariales o laborales.
- Sin definir: incluimos aquí la optimización que no especificaba si se empleaba en el ámbito laboral o científico.

En la tabla 4.14 se muestra la frecuencia de las situaciones, predominando, con más del 60%, la situación matemática. En términos generales los futuros docentes destacan, en esta primera parte de la tarea, la aplicación de la derivada en contextos geométricos, donde si principal utilidad está dentro de la misma disciplina matemática.

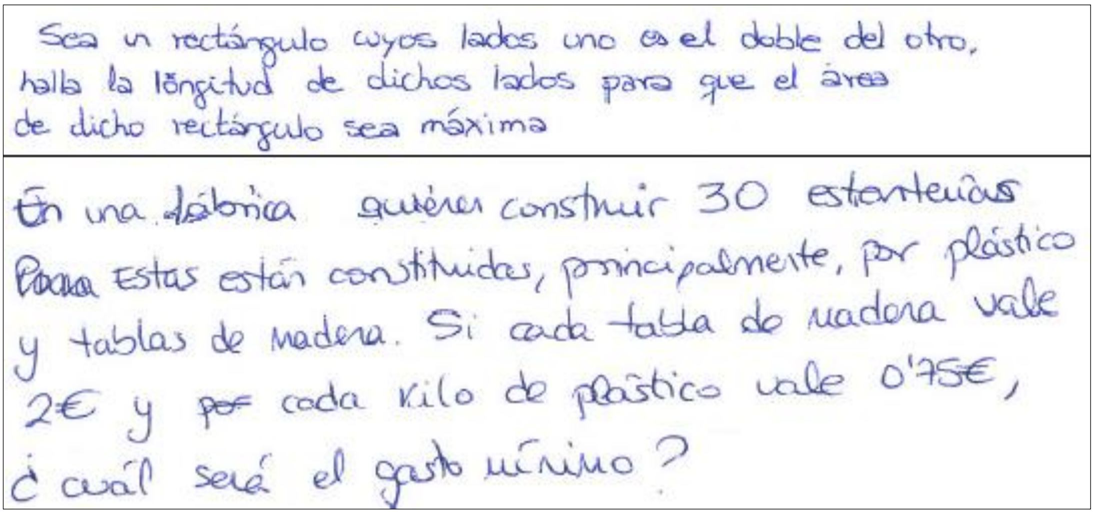
Tabla 4.14. *Contexto de las aplicaciones*

| *Situación* | *Frecuencia* |
|---|---|
| Matemática | 100 |
| Física | 30 |
| Laboral | 7 |
| Estadística | 2 |
| Sin definir | 22 |

### *4.3.2. Problema que involucra la derivada*

De los 55 participantes, uno de ellos no redactó ningún problema, otros 6 plantearon áreas en las que se utiliza la derivada, pero no presentaron realmente un problema cuya resolución involucrara a la derivada. Sin embargo, aunque únicamente se les solicitó redactar un ejemplo, algunos propusieron dos o tres, por lo que en total se analizaron 52 problemas. Los participantes no tenían que resolverlo, solo plantearlo.

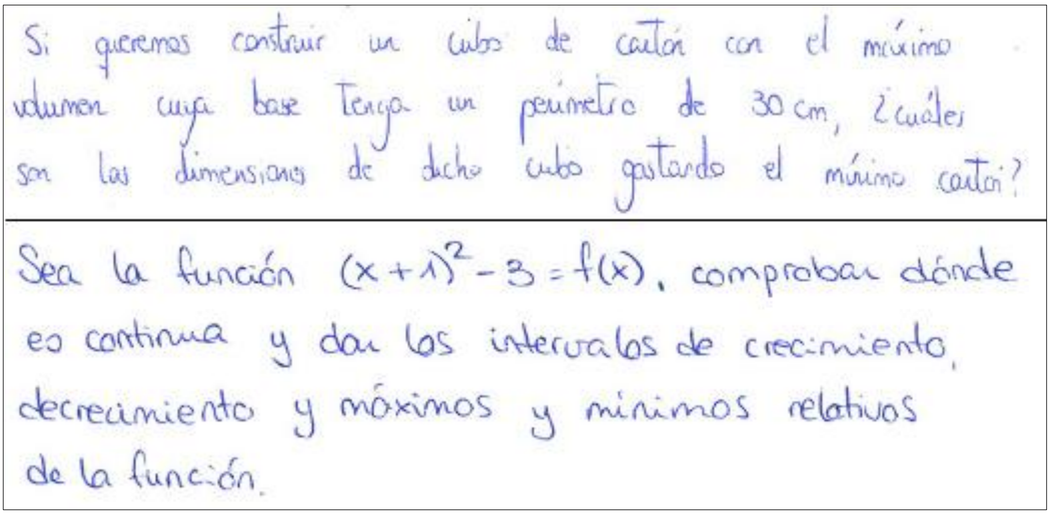
Un primer análisis nos permitió detectar que 9 de los problemas no tenían solución tal cual estaban redactados, ya que no se presentaban los datos necesarios para ello, o bien, los datos dados no guardan coherencia entre sí. Por ejemplo, en la figura 4.15 se muestran dos problemas propuestos: el primero, aunque tiene solución, es una solución sin sentido en el contexto planteado; el segundo es un problema en el que los datos que se presentan no son suficientes para llegar a una solución.


Sea un rectángulo cuyos lados uno es el doble del otro, halla la longitud de dichos lados para que el área de dicho rectángulo sea máxima

En una fábrica quieren construir 30 estanterías ~~Para~~ Estas están constituidas, principalmente, por plástico y tablas de madera. Si cada tabla de madera vale 2€ y por cada kilo de plástico vale 0'75€, ¿cuál será el gasto mínimo?

*Figura 4.15.* Problema planteado por B26 y B40

Pese a esto, esas 9 tareas sin solución formaron parte del análisis, considerando la intención con la que fueron planteadas. Asimismo, se detectó que 7 problemas no requieren del uso de la derivada para su resolución; en la figura 4.16 se observa el problema propuesto por B4, cuya intención es la optimización, pero hallar la solución no requiere más que conocer cómo se calcula el perímetro de un cuadrado. Por su parte, el problema que propuso B20, al tratarse de una función cuadrática, podría solucionarse sin recurrir a la derivada.


Si queremos construir un cubo de cartón con el máximo volumen cuya base Tenga un perímetro de 30 cm, ¿cuáles son las dimensiones de dicho cubo gastando el mínimo cartón?

Sea la función $(x+1)^2-3=f(x)$, comprobar dónde es continua y dar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos relativos de la función.

*Figura 4.16.* Problema planteado por B4 y B20

De forma similar, otro sujeto plantea como ejercicio determinar la pendiente de la recta tangente en un punto, pero la función que da es una recta, por lo que sin necesidad de derivar se podría identificar el valor de la pendiente. No obstante, al igual que los problemas sin solución, estos también fueron considerados en el análisis ya que el principal objetivo era determinar el sentido y los contextos, en el que los futuros docentes contemplan la aplicación de la derivada. Por otra parte, se pudo apreciar que, al igual que el participante B20, otros 23 participantes plantearon más un ejercicio con el cual practicar algún procedimiento y no realmente un problema.

Tras ese primer análisis general, nos centramos en: el contenido que aborda cada problema propuesto, el sistema de representación, el contexto y la situación en la que se encuentra cada uno, y finalmente, al tratarse de tareas, identificamos la demanda cognitiva requerida para su resolución.

Respecto al *contenido matemático* abordado en las tareas, tal como se aprecia en la tabla 4.15, predominó la resolución de problemas (principalmente de optimización, y de velocidad y aceleración de partículas), seguido de tareas en las que se plantea determinar los extremos de una función y analizar su monotonía.

Tabla 4.15. *Contenido abordado en los problemas propuestos*

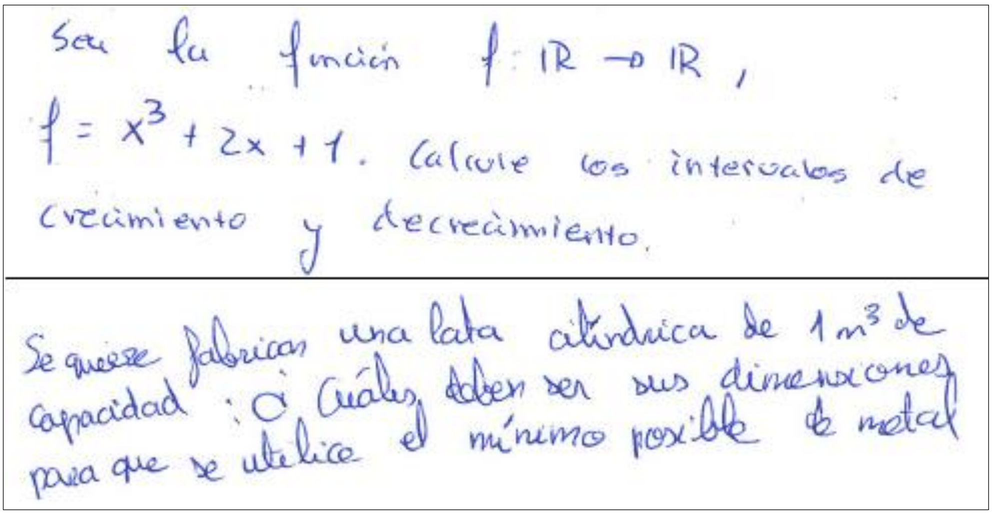
| *Contenido* | *Frecuencia* |
|---|---|
| Reglas de derivación | 2 |
| Ecuaciones diferenciales | 1 |
| Cálculo de límites | 2 |
| Extremos relativos y monotonía | 16 |
| Recta tangente y normal | 3 |
| Resolución de problemas | 26 |
| Otros | 2 |

Hemos incluido la categoría de "otros" para aquellas tareas que en realidad no abordaban ningún contenido particular de la derivada, como es el caso de un participante quien planteó: "indique los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función mostrada en la figura 1", tarea cuya solución no emplea la noción de derivada. En ese sentido, y tal como señalamos anteriormente, siete de las tareas que abordan extremos relativos y la monotonía lo hacen mediante una función cuadrática, de modo que conociendo el bosquejo de una gráfica de este tipo de función podría determinarse lo que se solicita sin tener que involucrar la noción de derivada.

Un aspecto interesante es que mayoría de las tareas involucró una función bastante simple (en 33 de las tareas), tratándose principalmente polinomios de grado 2 o 3; solo cuatro de las tareas sugieren funciones un poco más complejas y en el caso de las 15 tareas restantes no se plantea ninguna función en particular, si no que en algunas el resolutor debe plantear una función que modele la situación y así dar respuesta a la tarea.

Los únicos *sistemas de representación* que surgieron fueron el verbal-numérico (16 de los problemas) el simbólico (20), o verbal-simbólico (16). Debemos aclarar, aunque todos los problemas fueron planteados de forma verbal, consideramos su uso como sistema de representación solo en aquellos casos en los que se empleaba para algo más que dar instrucciones o indicaciones.

Por ejemplo, en la figura 4.17 se observan el problema planteado por B17 y B39; en el primero hemos considerado que el sistema de representación empleado es el simbólico, pues la parte verbal es solo instrucción, en el segundo el sistema verbal, cobra un papel más importante en el problema: debe traducirse los datos a simbología matemática y luego resolver el problema.


Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f = x^3 + 2x + 1$. Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Se quiere fabricar una lata cilíndrica de 1 $m^3$ de capacidad: ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal

*Figura 4.17.* Problema planteado por B17 y B39

En cuanto a la *situación*, predomina la científica, específicamente la matemática. La mitad de las tareas analizadas se planteó en una situación estrictamente matemática (26), la otra mitad se plantearon en situaciones laborales (12), principalmente cuestiones sobre beneficios empresariales; físicas (9), al tratarse de velocidad y aceleración de cuerpos; y finalmente personales (5). Respecto al *contexto* dentro del que se propusieron las tareas fue principalmente aplicado (29), seguido del geométrico (16) y unas pocas dentro de un contexto algebraico-numérico (7).

Los problemas o ejercicios propuestos pueden entenderse como tareas sobre la derivada, por lo que vimos oportuno ahondar en la *demanda cognitiva* de cada una de ellas. En la tabla 4.16, se aprecia lo que se solicita en las tareas y la demanda que esto supone.

Tabla 4.16. *Demanda cognitiva de las tareas propuestas*

| *Demanda cognitiva* | | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| Procedimiento sin conexión | Cálculo directo | 6 |
| | Cálculo indirecto | 19 |
| | Resolución de problemas | 15 |
| Procedimiento con conexión | Identificación | 1 |
| | Resolución de problemas | 11 |

Vemos como se trata principalmente de tareas que demandan un procedimiento sin conexión. La única tarea de identificación no es en realidad sobre derivación. De los 11 problemas que se consideraron tenían un nivel de demanda superior (procedimiento con conexión), la mayoría corresponden a las tareas que no tenían solución tal cual estaban planteadas; no obstante, según la intención de la propuesta y la cantidad de datos que requerirían para su solución, su demanda es distinta a problemas como el mostrado en la figura 4.17 que pueden ser resueltos de forma más mecánica. Además, en estos 11 problemas el contexto realmente juega un papel dentro de la tarea, ya que este se debe interpretar para poder hallar una función que modele la situación y posteriormente darle respuesta.

## 4.4. Perfiles del significado de la derivada dados por futuros docentes

Tras realizar un análisis detallado a las respuestas dadas a cada una de las tareas propuestas, consideramos pertinente realizar un análisis más general, que englobe los aspectos más relevantes de las respuestas dadas *por participante*, lo cual nos permita visualizar que elementos del significado de derivada destacaron.

Para esto llevamos a cabo un análisis clúster incluyendo las respuestas dadas a las tareas 1 y 2 (estaban en ambos cuestionarios), y nos centramos en identificar en ellas la presencia o ausencia de los aspectos que ya se mencionaron en la metodología:

1. Uso del límite para definir
2. Uso de la interpretación geométrica para definir
3. Consideración de requisitos o condiciones al definir
4. Argumentación basada en aspectos gráficos
5. Argumentación basada en procedimientos
6. Aumentación basada en la definición
7. Argumentación basada en resultados y propiedades.

Dado que eran dos versiones del cuestionario, realizamos primero un análisis para las respuestas dadas a cada uno de ellos, posteriormente lo realizamos incluyendo las respuestas de ambos.

### *4.4.1 Perfiles en el cuestionario A*

El análisis clúster de las respuestas dadas por los 43 participantes que contestaron esta versión del cuestionario, nos proporcionaba el dendrograma que se aprecia en la figura 4.18, en la cual se aprecia que los futuros docentes podían dividir ese en tres grupos, los cuales conformaron los grupos de la siguiente forma: un primer grupo de 22 participantes, el segundo de 12 y un tercero con 9.

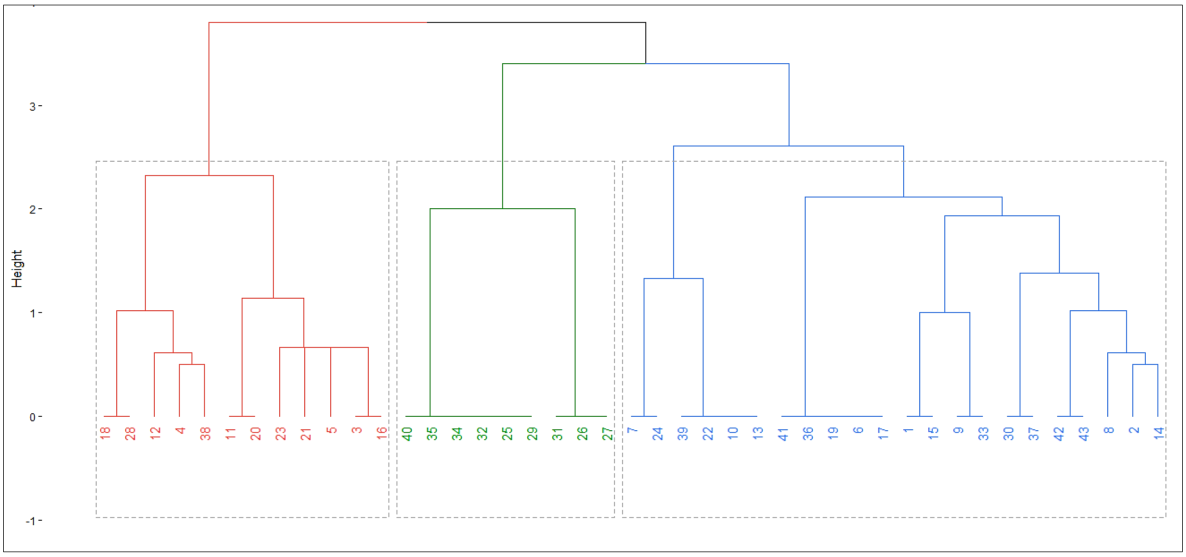



*Figura 4.18.* Dendrograma del análisis al cuestionario A

La caracterización de estos grupos se puede ver en la figura 4.19. El grupo 1, manifestó concebir la derivada mediante su interpretación geométrica, y aunque recurren a diversas formas de argumentación, destacan el uso de procedimientos algebraicos para argumentar.

En el grupo 2, algunos definen la derivaba mediante el límite y/o por su interpretación geométrica, aunque emplearon también otro tipo de definición. Se puede observar que en su definición varios señalan los requisitos o condiciones para poder definir la derivada, aspecto que pocos participantes mencionaron. Además, este grupo de futuros docentes tiene en común argumentar mediante la definición de derivada (junto con sus requisitos) y/o resultados o propiedades de esta.

El último grupo, se trata de participantes que no recurrieron ni al límite ni a la interpretación geométrica para definir la derivada, utilizando definiciones del tipo V detalladas en el apartado 4.1.1. (página 90), y su característica fundamental es la argumentación por medio de procedimientos.

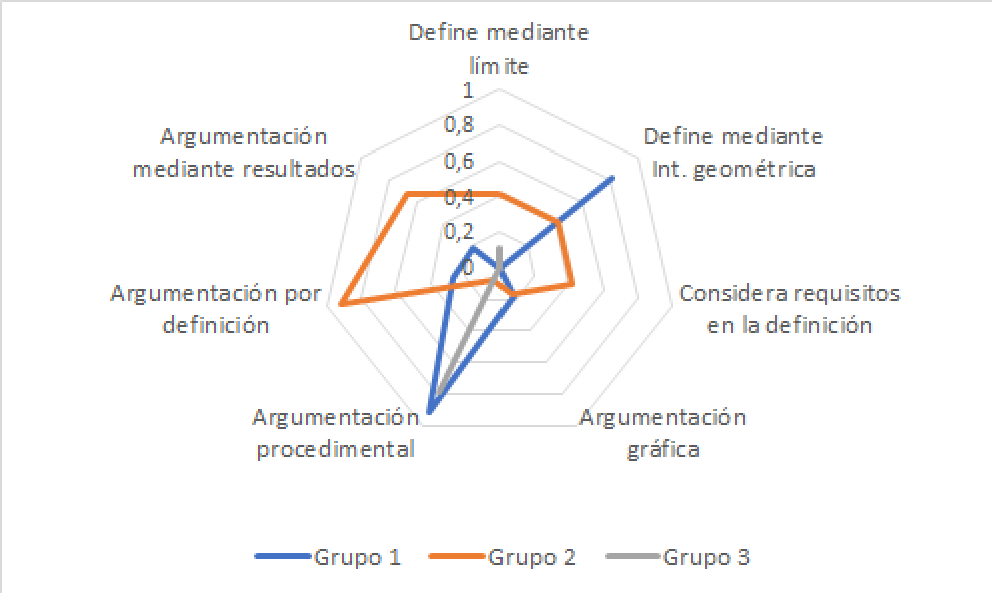



*Figura 4.19.* Perfiles de la derivada en el cuestionario A

### *4.4.2. Perfiles del cuestionario B*

En esta versión del cuestionario, el dendrograma del análisis clúster también mostraba tres grupos en los que podían separase los participantes según la similitud de sus respuestas (ver figura 4.20): el primero conformado por 22 futuros docentes, el segundo por 20 y el tercero con 13 participantes.

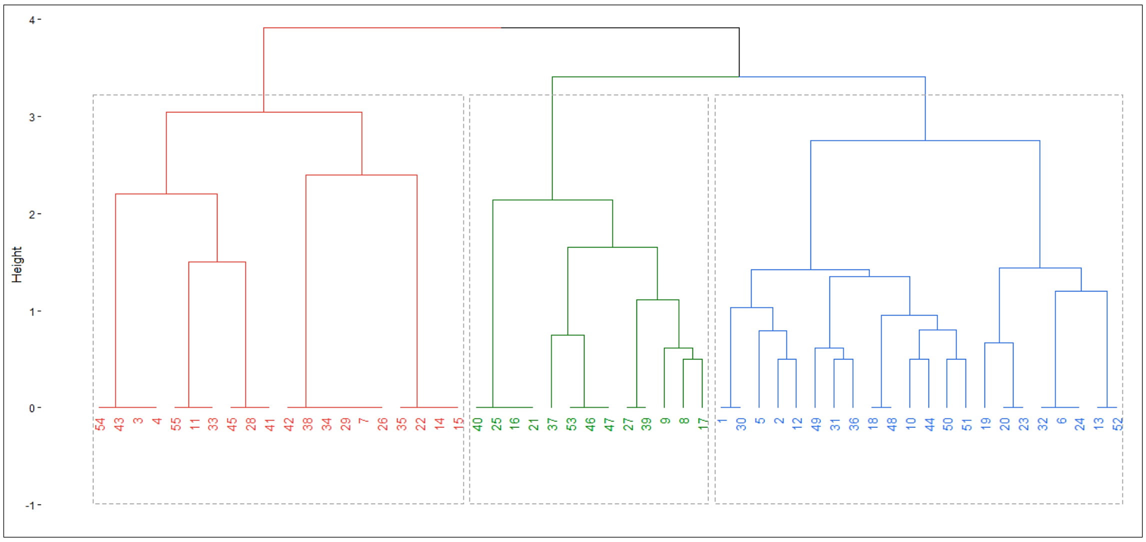



*Figura 4.20.* Dendrograma del análisis al cuestionario A

Tal como se puede observar en la figura 4.21, el primer grupo se caracterizaba por referirse a la derivada como la pendiente de la recta tangente; sin embargo, para argumentar emplearon principalmente la definición mediante límite o bien los requisitos y condiciones para que esta pueda darse. Un segundo grupo también define derivada mediante su interpretación geométrica, aunque algunos también aluden al límite. En este, los resultados y propiedades son el elemento utilizado para argumentar.

El tercer grupo, se identifica por definir la derivada mediante el límite, pero al igual que el grupo dos no menciona ni requisitos no condiciones para definirla. Para argumentar se basan en resultados o propiedades.

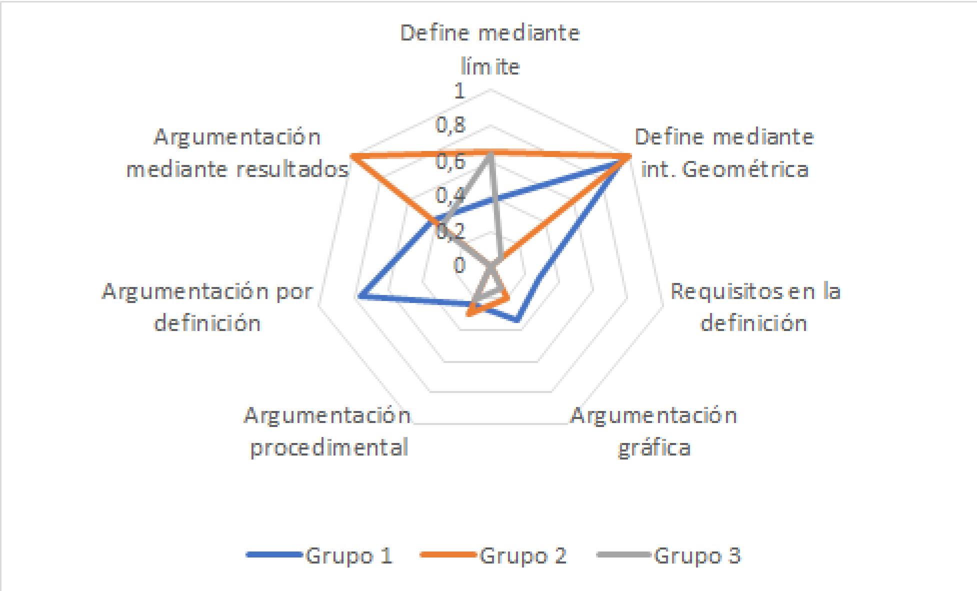



*Figura 4.21*. Perfiles de la derivada en el cuestionario B

### *4.4.3. Perfiles de la derivada (ambos cuestionarios)*

Finalmente, realizamos el análisis incluyendo las respuestas a ambos cuestionarios. En esta ocasión, como se observa en la figura 4.22, el análisis clúster mostraba 4 grupos bien definidos.

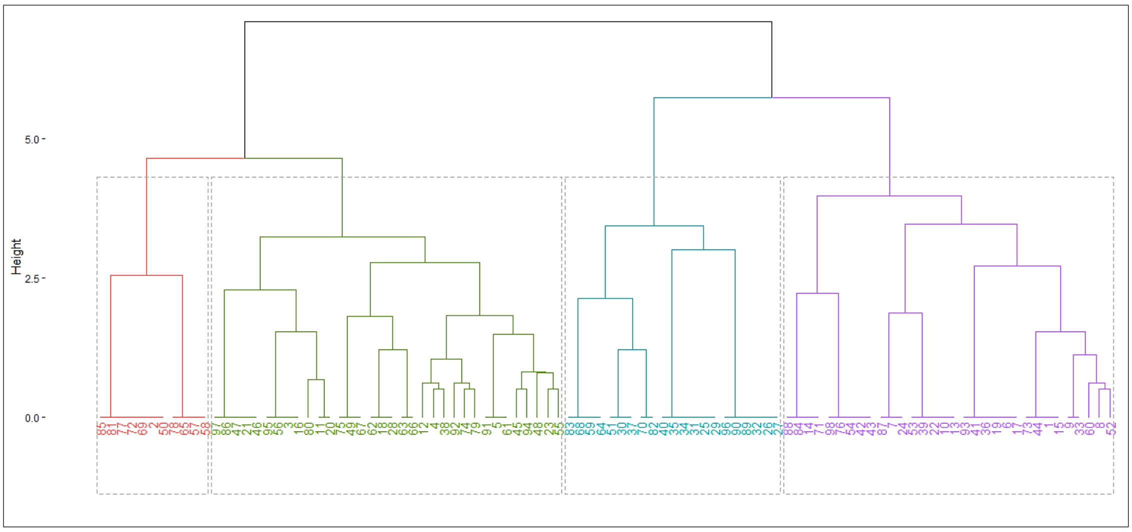



*Figura 4.22*. Dendrograma del análisis a ambos cuestionarios

En la tabla 4.17 Se aprecia la cantidad de futuros docentes en cada uno de ellos, resultando bastante similar en todos a excepción del grupo 2 que es el más pequeño de los 4.

Tabla 4.17. *Distribución de participantes por grupo*

| *Grupo* | *Número de participantes* |
|---|---|
| 1 | 32 |
| 2 | 11 |
| 3 | 34 |
| 4 | 21 |

La caracterización de cada perfil se puede observar en la figura 4.23. El grupo 1 se caracteriza por emplear la interpretación geométrica como medio para definir la derivada, y por recurrir a procedimientos algebraicos para argumentar. El grupo 2 se identifica por definir la derivada tanto por su interpretación geométrica como por el límite y para argumentar emplean tanto aspecto gráfico como resultados y propiedades.

Por su parte, el grupo 3 lo conforman futuros docentes que definen la derivada como la pendiente de la recta tangente, pero también emplean otros medios; en este grupo se incluyen los pocos participantes que toman en cuenta los requisitos y condiciones para definir la derivada; siendo además el grupo cuyo medio principal de argumentación es la propia definición de derivada.

El grupo 4, lo conforman sujetos particulares que definen mediante el límite y argumentan utilizando algún procedimiento. Además, se hallan aquí participantes que no dieron ninguna definición o no presentaron justificación en alguno de los enunciados.

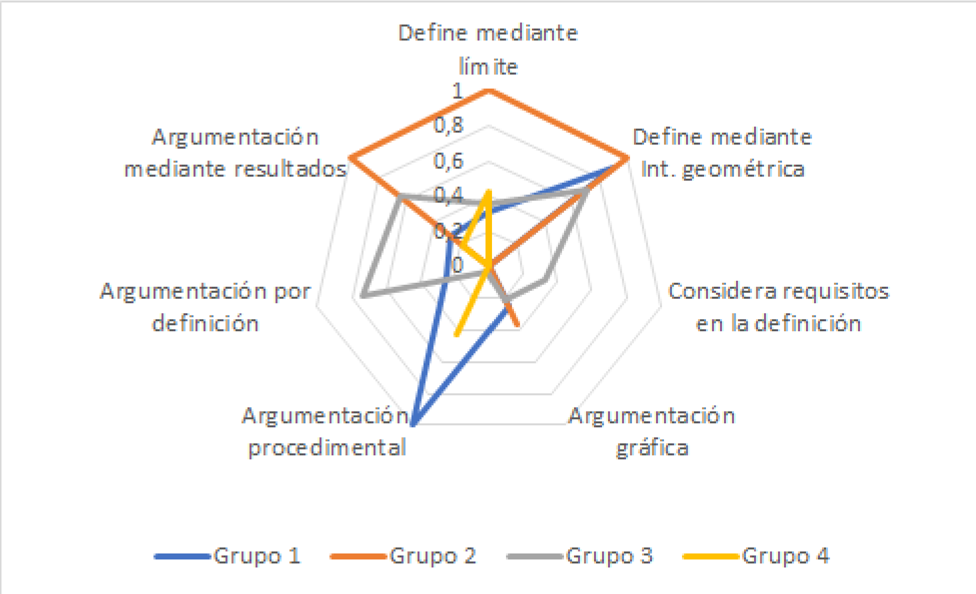



*Figura 4.23. Perfiles de la derivada puestos de manifiesto*

## 4.5. Síntesis

Tal como indicamos, nuestro marco teórico contempla para el análisis del significado una serie de componentes y elementos que sirven de foco al estudiar las respuestas dadas por los docentes a cada una de las tareas (ver tabla 4.18). En este apartado sintetizamos los resultados obtenidos en esta primera fase con base en dichos componentes.

Tabla 4.18. *Componentes del significado de un contenido matemático escolar*

| *Estructura conceptual* | | *Sistemas de representación* | *Sentido y modos de uso* |
|---|---|---|---|
| Campo conceptual | Campo procedimental | | |
| Hechos<br>Conceptos<br>Estructuras | Destrezas<br>Razonamientos<br>Estrategias | Verbal<br>Simbólico<br>Numérico<br>Gráfico<br>Tabular | Modo de uso<br>Contexto<br>Situación |

En cuanto a la *estructura conceptual*, las tareas 1 y 2 nos permitieron aproximarnos tanto al campo conceptual como al procedimental. Por un lado, pudimos apreciar algunas notaciones y términos empleados, además de cómo definen derivada, y el uso que le dan a algunos resultados importantes (incluso con sus fallos). Sobresale que los futuros docentes, al igual que los estudiantes, enfatizan en la componente geométrica de la derivada como principal medio para definirla. Observamos también algunas dificultades que se tienen para emplear correctamente algunas propiedades y relaciones.

El análisis de la tarea 2 nos permitió también ahondar en la forma de procesar y emplear esos elementos del campo conceptual. Nuestro interés se centró en los elementos que utilizan y la forma de emplearlos al argumentar sobre la derivada. Esto nos informa de la manera de razonar de los futuros docentes. Se ve una tendencia al argumentar de emplear un resultado o propiedad de forma directa; esto antes que la propia definición de derivada. Sin embargo, muchos de los resultados se emplean en un contexto inadecuado, con algunos errores y con poco o casi ningún respaldo. Asimismo, se pudo observar la importancia que los procesos algebraicos tienen en la argumentación.

Los *sistemas de representación* fue la componente menos abordada en esta fase. Somos conscientes de que es imposible abordar a profundidad cada componente. Pese a esto, la tarea 1 y 2 se puedo observar el uso de la representación verbal y simbólica en las respuestas dadas.

En cuanto a los *sentidos y modos de uso*, aunque la tarea 3 tenía esta finalidad específica, en la tarea 1 se pudieron detectar algunos términos que destacaban, como es el caso de la pendiente de la recta tangente. El análisis de la tarea 3 nos permitió identificar que la derivada es concebida en situaciones principalmente matemáticas, en contextos mayormente relacionados con la monotonía de una función y sus extremos.

Lo anterior es solo una síntesis de los resultados a la luz de nuestro marco teórico; sin embargo, creemos que los perfiles presentados en el apartado 4.4. (página 120) aportaron una visión global bastante interesante de las distintas formas en las que se concibe y utiliza la noción de derivada.

# CAPÍTULO 5

# Resultados fase 2:
# Análisis de libros de texto

Este capítulo contempla los resultados obtenidos tras analizar los más de 1200 ítems que conforman las tareas sobre derivada propuestas en cinco libros de 1º de bachillerato. Para ello presentamos 5 apartados: en los primeros tres abordamos los resultados obtenidos en cuanto a los aspectos sintácticos, semánticos y cognitivos, considerados en el marco teórico para el análisis de tareas (ver página 52); en el cuarto apartado empleamos el análisis clúster para agrupar ítems por similitud y así identificar perfiles del significado de derivada que manifiestan los libros a través de las tareas; y finalmente damos una síntesis de los resultados obtenidos en esta fase.

## 5.1. Aspectos sintácticos

En esta categoría se incluían tres variables (puede ver la página 71):

- La estructura de la tarea: podía ser abierta o cerrada.
- El planteamiento: directo o inverso
- Los materiales para la resolución de este: papel y lápiz, calculadora, software, entre otros.

En cuanto a la *estructura*, son pocos los ítems abiertos encontrados. El libro de SM propone, al final del capítulo, un proyecto en el que se le pide al estudiante analizar ciertos datos y funciones respecto al Sida. Aquí el estudiante debe buscar datos en Internet además de hacer uso de otras herramientas gráficas para su solución. Sin embargo, este tipo de tareas no son usuales. También consideramos como abiertos dos ítems propuestos por Santillana, dos de Anaya y uno de Edelvives, en las cuales se planteaban cuestiones como: *¿Pueden existir dos funciones que tengan la misma derivada?* Nótese aquí que la pregunta es bastante general y abierta para un estudiante, en la que, por ejemplo, no se le especifica tipo de función, lo que implica que en primera instancia el estudiante deberá tomar su tiempo para analizar la afirmación en distintos tipos de funciones, podría discutirlo con compañeros, entre otros.

Dedicamos unas líneas a distinguir entre tareas de estructura abierta y tareas de respuesta “abierta”. Los ítems de estructura abierta que se hallaron en el análisis se caracterizan porque los datos para su resolución están de alguna forma incompletos, además estas tareas pueden ser consideradas de respuesta abierta dado que no hay una única solución viable. En ese sentido, se identificaron tareas que, aunque eran cerradas, su resolución da la posibilidad de distintas respuestas. Por ejemplo, en la figura 5.1 se aprecia que los datos y lo que se solicita está claro, sin embargo, no hay una única respuesta correcta.

> Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos:
>
> - Es continua
> - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
> - Tiene tangente horizontal en $(-3, 2)$ y en $(1, 5)$.
>
> Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.

*Figura 5.1*. Tarea 55 propuesta en el libro de Anaya

Respecto al *planteamiento* inverso/directo, hay un predominio claro de los ítems directos. En el caso de Anaya y Santillana, solo 19 ítems son planteados de forma inversa, en SM 12, en el libro de Edelvives 11 y en el caso de Bruño únicamente 2. Las tareas halladas de tipo inverso son en su mayoría como la que se mostró en la figura 5.1. Las tareas inversas resultan bastante interesantes, pues no se trata de aplicar un procedimiento, sino que requiere de entenderlo. Por ello, son un tipo de tarea más enriquecedoras. No obstante, estas no son muy usuales, de hecho, la mayoría tareas son directas, lo que parece indicar que el objetivo es el aprendizaje y aplicación de procedimientos ya establecidos.

En cuanto a los *materiales*, la mayoría de los ítems son propuestos para ser resueltos empleando únicamente papel y lápiz; sin embargo, en 16 ítems del libro SM se da la indicación de usar calculadora. Además, aunque en muchos casos no se explicita el uso de la calculadora, debido a los valores numéricos con los que se trabaja, es probable que lo requieran.

Destaca el libro de la editorial de Bruño, ya que al final del capítulo se explica “paso a paso” como utilizar *Wiris*[5] para resolver algunos ejercicios, planteando posteriormente 22 ítems para poner en práctica dicho programa. El libro de Edelvives también dedica un par de páginas para explicar el uso tanto de *GeoGebra* como de *Wiris*; no obstante, posteriormente no propone tareas para utilizar tales programas, aunque en cada ítem de cálculo de función derivada plantea la sugerencia de comprobar los resultados empleando alguno de los programas. Se observa así una intención por parte de los libros de texto de implementar herramientas tecnológicas en la resolución de tareas matemáticas. Pese a ello, estos recursos no son explotados, pues básicamente son una herramienta para comprobar resultados.

## 5.2. Aspectos semánticos

En esta categoría se incluían cinco aspectos a analizar:

- El contenido de la derivada que abordaba cada ítem.
- Los sistemas de representación utilizados en la redacción del ítem: simbólico, verbal, gráfico, tabular, numérico
- La situación: podía ser personal, laboral, científica o social.
- Contexto: función matemática de la derivada.
- Tipo de función: simple o no simple, según la cantidad de rasgos o tipos de función involucrados.

[5] Software de álgebra de uso en línea.

### *5.2.1. Contenido*

Tal como indicábamos en la metodología, los cinco libros abordaban en su primer capítulo básicamente los mismos contenidos, a diferencia de la representación de funciones que no lo incluían todos los libros. En la tabla 5.1, se puede apreciar la distribución de ítems de acuerdo con el contenido de la derivada que abordaban. La categoría “otros” incluye ítems que en realidad no trataban específicamente un contenido de la derivada, por ejemplo, “halle la imagen de 3” o “halle los cortes con los ejes”.

Tabla 5.1. *Contenido según el ítem*

| | *Porcentaje (%) de ítems según el contenido* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Contenido* | SM N=215 | Anaya N=250 | Edelvives N=200 | Santillana N=283 | Bruño N=301 |
| Tasa de variación media e instantánea | 7,9 | 6 | 4,5 | 4,5 | 4,6 |
| Definición de derivada | 9,4 | 9,6 | 2,5 | 10,9 | 9,3 |
| Reglas de derivación | 40 | 38 | 53,5 | 42 | 31,2 |
| Extremos relativos | 15,3 | 10,8 | 11 | 10,6 | 21,2 |
| Monotonía | 3,7 | 6 | 5 | 3,5 | 20,5 |
| Recta tangente y normal | 9,7 | 9,2 | 7,5 | 8,8 | 7,9 |
| Representación de funciones | - | 17,6 | - | 8,4 | - |
| Resultados y propiedades | 7 | 0,8 | 9 | 8,4 | 2,9 |
| Otros | 7 | 2 | 7 | 3,3 | 2,4 |

En el caso de los libros de Santillana y Bruño planteaban 4 y 15 ítems respectivamente, sobre el cálculo de derivadas de orden superior, las cuales las contabilizamos dentro del contenido de regla de derivación. Asimismo, en el libro de Bruño, aunque se contabilizaron dentro del contenido de extremos relativos, en realidad 33 de ellos los redacta en términos de puntos críticos o de inflexión; del mismo modo, 23 ítems que piden determinar la curvatura de la función fueron contabilizados en el contenido de intervalos de monotonía. Además, Edelvives es el único libro que plantea 10 ítems de cálculo de función derivada que requiere de derivación logarítmica.

En términos generales, se puede apreciar que el contenido más abordado en los cinco libros tiene que ver con las reglas de derivación. Seguido, en la mayoría de los casos, por extremos relativos.

### *5.2.2. Sistema de representación*

En los cinco libros destaca el simbólico, seguido del sistema verbal. En la figura 5.2 se aprecia la frecuencia con la que se empleó cada uno de los sistemas de representación. Debe mencionarse que cada ítem podía utilizar más de un sistema de representación.

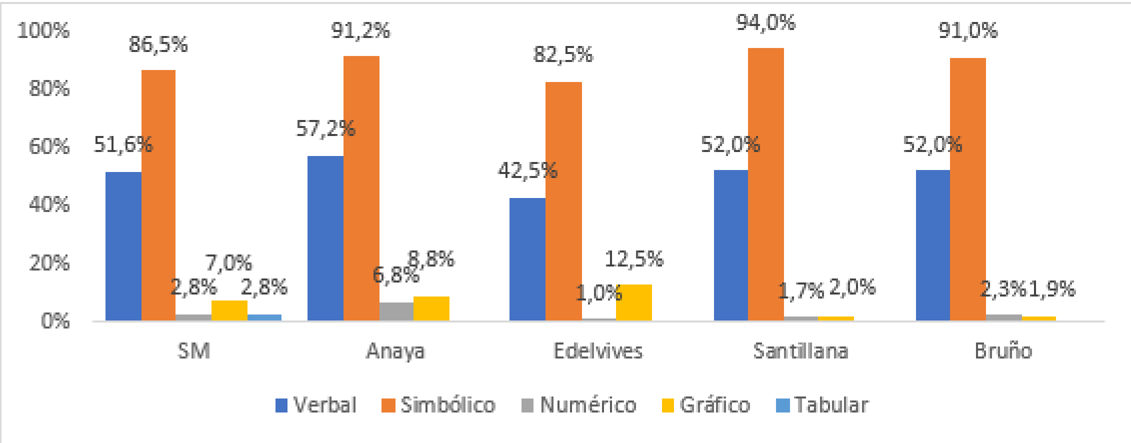



*Figura* 5.2. Sistemas de representación empleados en la redacción de los ítems

Durante el análisis pudimos detectar que aquellas tareas que empleaban el sistema tabular o gráfico, las cuales claramente tienen menos presencia, eran tareas bastante enriquecedoras y demandaban una mayor comprensión del concepto de derivada. Por lo que resulta curioso y lamentable que no se propongan más ítems en esta línea.

Por otra parte, aunque todos los ítems son planteados de forma verbal, consideramos su uso solo en aquellos casos en los que este hacía alusión a aspectos matemáticos o bien si se trataba de la redacción de problemas. Es decir, cuando el sistema verbal solo se empleaba en las instrucciones no se contabilizaba.

Un artista ha adquirido un listón de $6\ m$ de largo del que quiere colgar dos grandes telas rectangulares, una a continuación de la otra y que ocupen todo el listón: la primera ha de ser naranja, y el otro lado que está sobre el listón debe ser un tercio del lado que cuelga; y la otra será verde y debe tener forma de cuadrado.

¿Qué dimensiones deben tener las telas para que si superficie sea la mínima posible?

*Figura* 5.3. Tarea 85 planteada por SM

Por ejemplo, en la figura 5.3 se muestra una tarea en la que se emplea el sistema verbal, de hecho, representarlo de esta forma tiene cierta intención en la tarea: debe traducirse los datos a simbología matemática y luego resolver el problema. No obstante, en la figura 5.4 hemos considerado que el sistema de representación empleado es el simbólico, pues la parte verbal es solo instrucción.

Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{4-2x^2}{x}$ b) $y = \frac{x^3}{3(x+1)}$

c) $y = \frac{4+2x-x^3}{x^2}$ d) $y = \frac{x^4-2x^2}{x^2-1}$

*Figura 5.4.* Tarea 95 planteada en el libro de Anaya

Además de los sistemas de representación mencionados, queremos señalar que en los libros se aprecian algunas tareas con ilustraciones cuya función es solo decorativa, como la que se muestra en la figura 5.5. En los libros de Elelvives y Santillana 3 tareas incluyen una imagen alusiva a la situación, mientras que en el de SM 4 tareas usan este tipo de ilustración.

**109** Se ha estimado que el gasto de electricidad de una empresa, de 8 a 17 horas, sigue esta función.

$$E(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}36t^2 + 4{,}05t - 10$$

donde $t$ pertenece al intervalo (8, 17).

**a)** ¿Cuál es el consumo a las 10 horas? ¿Y a las 16 horas?

**b)** ¿En qué momento del día es máximo el consumo? ¿Y mínimo?

**c)** Determina las horas del día en las que el consumo se incrementa.

*Figura 5.5.* Tarea 109 propuesta por Santillana

### 5.2.3. Situación

Las diversas situaciones en las que tiene aplicabilidad la derivada confirman la relevancia y utilidad de este concepto. No obstante, los libros de texto analizados presentan a la derivada como un concepto cuya aplicabilidad está dentro de la propia matemática, desligándola de su uso en la vida real. Tal como se observa en la tabla 5.2, los cinco libros de texto plantean ítems en distintas situaciones, sin embargo, hay un claro predominio de la situación matemática. A excepción del libro de la editorial de Edelvives, más del 90% de los ítems se plantean en una situación matemática. De hecho, Anaya y Bruño, que son los que plantean más ítems, son los que menos diversidad de situaciones presentan.

Tabla 5.2. *Situación en la que se presentan los ítems*

| | *Porcentaje (%) de ítems en cada situación* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Situación* | SM N=215 | Anaya N=250 | Edelvives N=200 | Santillana N=283 | Bruño N=301 |
| Personal | - | - | 3,5 | 0,3 | 0,3 |
| Laboral | 2,7 | 2 | 5 | 2,1 | - |
| Social | 1,4 | 0,4 | 2 | 1 | - |
| Científica-Matemática | 90,6 | 97,6 | 85,5 | 95,4 | 99,1 |
| Científica-Física | 5,3 | - | 2 | 1,2 | 0,3 |
| Científica-Biología | - | - | 2 | - | 0,3 |

### 5.2.4. Contexto

Al igual que la situación en la que se presenta una tarea, el contexto nos permite ahondar en el significado que los libros de texto transmiten respecto al concepto de derivada. Tras el análisis se detectó que los ítems propuestos podían agruparse en tres contextos:

- Algebraico-Numérico: contemplamos aquí todos los ítems planteados en un contexto meramente algebraico como el cálculo de la función derivada, ampliándolo al numérico.
- Geométrico: incluimos aquí los ítems alusivos al componente geométrico de la derivada: extremos, recta tangente, monotonía, representación; así como aquellos ítems que abordan distintas propiedades o resultados que debían ser analizados o interpretados desde la gráfica.

- Aplicado: se refiere a ítem donde la noción de derivada es aplicada para la resolución de problemas.

En la tabla 5.3 se recogen cada uno de ellos y la frecuencia en la que se encontraron.

Tabla 5.3. *Contextos en los que planteaban los ítems*

| | *Porcentaje (%) de ítems en cada contexto* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Contexto* | SM N=215 | Anaya N=250 | Edelvives N=200 | Santillana N=283 | Bruño N=301 |
| Algebraico-Numérico | 53,5 | 50,4 | 62,5 | 62,8 | 46,5 |
| Geométrico | 32,6 | 48,4 | 24,5 | 30,7 | 53,5 |
| Aplicado | 13,9 | 1,2 | 13 | 6,5 | - |

Sin duda alguna, el aspecto más llamativo es la poca cantidad de ítems en un contexto aplicado, tratándose principalmente de problemas de optimización. Otro aspecto destacable es que en los libros de las editoriales SM, Edelvives y Santillana hay una mayoría significativa dentro del contexto algebraico, refiriéndose básicamente al uso de reglas de derivación.

### *5.2.5. Tipo de función*

Encontramos todos los tipos de rasgos descritos en la metodología; aunque con algunas diferencias entre un libro y otro. Sin embargo, el rasgo que predomina es el polinómico, tal como se aprecia en la tabla 5.4. Aclaramos que un mismo ítem podía involucrar más de un rasgo.

Tabla 5.4. *Rasgo de función empleado en los ítems*

| | *Porcentaje (%) de ítems según el rasgo* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Rasgo* | SM N=215 | Anaya N=250 | Edelvives N=200 | Santillana N=283 | Bruño N=301 |
| Polinómica | 55,3 | 54,8 | 59 | 53,7 | 66,4 |
| Trigonométrica | 0,9 | 3,2 | 24,5 | 13,4 | 13,9 |
| Trigonométrica inversa | - | 2,4 | 6 | 2,8 | - |
| Logarítmica | - | 6 | 17,5 | 12 | 5,6 |
| Exponencial | 1,8 | 6,4 | 13 | 9,8 | 7,6 |
| Exponente negativo | 0,9 | - | - | 0,3 | - |
| Radical | 15,3 | 8,8 | 13 | 9,8 | 6,9 |
| A tozos | - | - | 1 | 2,1 | 0,3 |
| Valor absoluto | 0,4 | - | - | 0,7 | - |
| Algebraica | 13,4 | 24,4 | 9 | 21,9 | 20,5 |

Tabla 5.4. *Rasgo de función empleado en los ítems*

| | *Porcentaje (%) de ítems según el rasgo* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Rasgo* | SM N=215 | Anaya N=250 | Edelvives N=200 | Santillana N=283 | Bruño N=301 |
| Cociente | 3,2 | 3,6 | 5 | 3,5 | 1,6 |
| Producto | 5,1 | 4,8 | 9 | 9,5 | 2,3 |
| Composición | 19 | 19,6 | 40,5 | 23,3 | 16,6 |

Hay poca presencia de las funciones trigonométricas inversas, y llama la atención la casi ausencia de funciones importantes en la construcción del concepto de continuidad como son el valor absoluto y las funciones definidas a trozos. Además de cuantificar los rasgos de funciones involucradas, también clasificamos la forma en la que estas se relacionaban, distinguiéndolas entre simples o no simples de n rasgos. Por ejemplo, en la figura 5.6, la función del ítem *c*) involucra rasgos trigonométricos, polinómicos y la composición, por tanto, es valorada como una función no simple de 3 rasgos.

Halla la derivada de las siguientes funciones. Después, comprueba con Wiris o GeoGebra los resultados que has obtenido.

a) $y = [\tan(\pi^2 + 3e)]^5$
b) $y = \tan(x + \pi)$
c) $y = 5\sin^4(2x + 3)$
d) $y = \sin(\cos x)$
e) $y = \sin[\cos(2x^4)]$
f) $y = \sqrt[8]{\cos x}$
g) $y = \sqrt[8]{\cos^2 x}$
h) $y = \sqrt[8]{\cos^2(3x + 1)}$
i) $y = \sqrt[8]{\left(\sqrt{x} + \cos^2 x\right)^2}$

*Figura 5.6.* Tarea 15 propuesta por Edelvives

Consideramos que cuantos más rasgos se involucran mayor complejidad supone el trabajo con la misma. No es igual derivar la función del ítem *b*) de la figura 5.6, que la del ítem *i*) en la que se involucran 4 rasgos.

En los libros las funciones más involucradas son las simples. En la figura 5.7, se puede apreciar la frecuencia de cada tipo de función. Hemos agregado la función desconocida, para poder comparar además el número de ítems en los que no se plantea una función en concreto, el estudiante debe formularla o bien se da de forma gráfica.

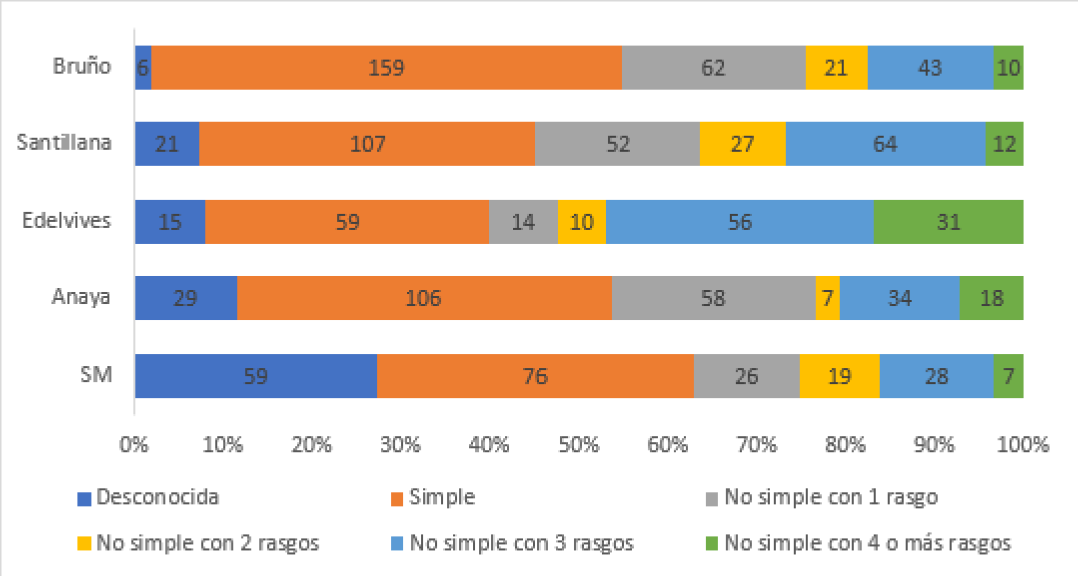



*Figura 5.7.* Tipo de función involucrada en cada ítem

Se observa el recargo de funciones simples en los libros de Bruño, Anaya y SM, aunque destacamos de este último la gran cantidad de ítems en los que no se plantea una función específica. Aspecto relacionado con el hecho de que es el libro que más ítems presenta en los contextos de resolución de problemas y geométrico, en los que no siempre se da de forma explícita el rasgo de la función que se trabaja. Por otra parte, Santillana y Edelvives están un poco más equilibrados entre funciones simples y no simples.

## 5.3. Aspectos cognitivos

De este bloque de categorías consideramos tres variables (puede ver la página 73):

- La demanda cognitiva: memorización, procedimiento sin conexión, procedimiento con conexión o hacer matemática.
- La capacidad matemática: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y lenguaje simbólico formal, y utilización de herramientas matemáticas
- Manejo de sistemas de representación solicitado: procesamiento o conversión.

### *5.3.1. Demanda cognitiva*

En los cinco libros, la principal demanda fue un procedimiento sin conexión; específicamente la de cálculo directo, sobresaliendo el cálculo de función derivada haciendo uso de reglas de derivación. Esto es un aspecto bastante interesante pues manifiesta la clara importancia dada al algoritmo más que a la propia definición y sus propiedades. En la tabla 5.5 Se muestra la frecuencia en la que se presenta cada una de las demandas cognitivas.

Tabla 5.5. *Demanda cognitiva de cada ítem*

| *Demanda* | | *Porcentaje (%) de ítems por demanda* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | SM N=215 | Anaya N=250 | Edelvives N=200 | Santillana N=283 | Bruño N=301 |
| Procedimiento sin conexión | Cálculo directo | 46,9 | 39,6 | 51 | 57,9 | 47,5 |
| | Cálculo indirecto | 22,4 | 33,6 | 30,5 | 20,8 | 42,8 |
| | Resolución de problemas | - | 2 | - | 2,1 | - |
| Procedimiento con conexión | Representación (criterio) | 2,3 | 15,2 | 1 | 8,4 | 6,9 |
| | Representación (condiciones) | 3,8 | 2 | - | 1,4 | - |
| | Identificación | 6 | 5,2 | 3,5 | 6 | 2,3 |
| | Resolución de problemas | 9,3 | 0,5 | 8 | - | - |
| Hacer matemática | Justificación | 9,3 | 1,9 | 6 | 3,4 | 0,5 |

La segunda demanda más frecuente es el cálculo indirecto, es decir, tareas de cálculo de extremos relativos, o de la ecuación de la recta tangente, entre otros. Nuevamente se trata de una propuesta de aprendizaje de procedimientos y algoritmos sin conexión. En ambos casos no se requiere de mayor interpretación, sino de una ejecución.

En cuanto a la representación gráfica de funciones dado su criterio, tal como se había señalado anteriormente, solo Anaya y Santillana lo incluyen en el capítulo analizado como aplicación de la derivada, las otras tres editoriales lo hacen en el capítulo siguiente el cual no consideramos en este análisis. Es decir, SM, Edelvives y Bruño demandan la representación gráfica, pero de funciones polinómicas conocidas, generalmente con la intención de que grafiquen también la recta tangente; es más un apoyo visual que propiamente una aplicación de la derivada.

Debemos justificar por qué la resolución de problemas la hemos incluido dos veces en la tabla 5.5. La taxonomía de Stein que hemos empleado aclara que la demanda no está directamente relacionada con la contextualización o no de un problema, pues esto no hace a un ítem más o menos demandante, cognitivamente hablando. Tras analizar uno a uno los ítems planteados en forma de problema contextualizado, optimización, por ejemplo, nos percatamos que algunos de ellos demandaban un procedimiento sin conexión, pero otros requerían de conexión. En la figura 5.8 se ejemplifica esto.

**83** En ciertas condiciones del mercado, el coste de producción, en euros, de cada artículo fabricado por una empresa viene dado por la función:

$$c(n) = \left(\frac{n}{4} - 1\right)^3 - n + 8$$

donde $n$ es el número, en miles, de artículos fabricados. ¿Cuál debe ser la producción de la empresa para minimizar el coste de producción?

**88** La página de un libro tiene un área de 600 $cm^2$. Si los cuatro márgenes miden 2 cm, calcula las dimensiones de la página para que la parte impresa sea la mayor posible.

*Figura 5.8.* Tarea 83 y 88 propuestas por SM

En la tarea 88 el estudiante debe formular una ecuación que modele la situación dada, derivarla, y hallar el extremo de dicha función; requiriendo el uso de distintos sistemas de representación y de verdaderamente comprender el problema para poder darle solución. En este tipo de problemas consideramos que la demanda es un procedimiento con conexión. Sin embargo, en la tarea 83 la función está dada y en algunos casos el estudiante aprende a resolverlo de forma mecánica, derivando y obteniendo el resultado sin necesidad de haber entendido el contexto. En esta situación la demanda sería un procedimiento sin conexión.

De forma general, en los cinco libros la formulación, interpretación, análisis y argumentación, no son procesos muy demandados. De hecho, tal como se observa, el libro de Bruño, que es el que más ítems plantea, solo incluye un ítem de justificación y argumentación.

### *5.3.2. Capacidad matemática*

En la tabla 5.6 presentamos la frecuencia con la que cada una de las capacidades matemáticas es fomentada por los diferentes ítems de las tareas, en cada uno de los libros de texto. La capacidad de comunicación, entendida como la destreza de leer, descodificar e interpretar enunciados (OECD, 2016), consideramos que de algún modo está presente siempre que se resuelven tareas, por lo que no la contabilizamos.

Tabla 5.6. *Capacidad fomentada en los distintos ítems*

| | *Porcentaje (%) de ítems por capacidad* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Capacidad* | SM N=215 | Anaya N=250 | Edelvives N=200 | Santillana N=283 | Bruño N=301 |
| Matematización | 9,3 | - | - | 0,7 | - |
| Representación | 6 | 17,2 | 1 | 9,8 | 6,9 |
| Razonar y argumentar | 23,7 | 25,2 | 18,5 | 6,7 | 5,6 |
| Diseño de estrategias | 12,5 | 4 | 7,5 | 8,8 | 3,9 |
| Operaciones y lenguaje simbólico | 81,6 | 93,6 | 85,5 | 97,1 | 86 |
| Herramientas matemáticas | 7,4 | - | - | - | 7,3 |

La información aquí mostrada confirma el hecho de que el aspecto más reforzado por los libros de texto es el manejo de algoritmos y procedimientos matemáticos, mientras que el diseño de estrategias es una capacidad poco fomentada. Vemos además que la matematización y el uso de herramientas matemáticas no son promovidas por los libros de texto. En el caso de la matematización, resulta lógico ya que, si observamos la tabla 5.5 en realidad se trabaja poco la resolución de problemas.

### *5.3.3. Manejo de los sistemas de representación*

Un punto importante al analizar los aspectos cognitivos tiene que ver con el manejo de los distintos sistemas de representación. En la figura 5.9 se muestra la cantidad de ítems que involucraban en su resolución el paso de un sistema a otro (conversión) o bien si solo se requería de la manipulación del sistema de representación dado (procesamiento).

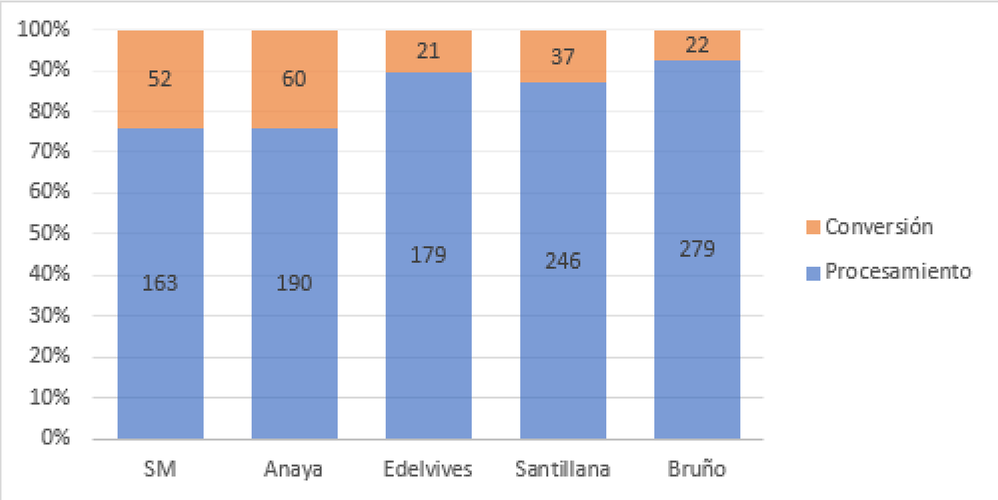



*Figura 5.9*. Manejo de los sistemas de representación en los libros

Se puede observar que hay una tendencia clara por el procesamiento, principalmente el manejo de símbolos. Esto resulta interesante, pues sin duda para comprender la derivada se requiere de más aspectos que solo el manejo de su álgebra.

## 5.4. Perfiles del significado de la derivada en los libros de texto

Al finalizar el análisis de las tareas según cada una de las variables consideradas, se procedió a realizar un análisis clúster que al igual que en la fase 1, nos permitiera agrupar los ítems por similitud y así identificar significados de la derivada que se transmiten en los libros de texto. Como señalamos en la metodología, dado que era muchas variables y en algunas de ellas no se hallaron diferencias significativas en los ítems, incluimos las siguientes:

1. Contenido
2. Tipo de función
3. Demanda cognitiva
4. Sistema de representación
5. Manejo del sistema de representación
6. Contexto

Para realizar los clústeres no diferenciamos los ítems por editorial, aunque posteriormente analizamos cuál perfil o grupo sobresale en cada editorial. Para visualizar el resultado del proceso jerárquico, se empleó un dendrograma o árbol de clasificación, el cual se puede apreciar en la figura 5.10.

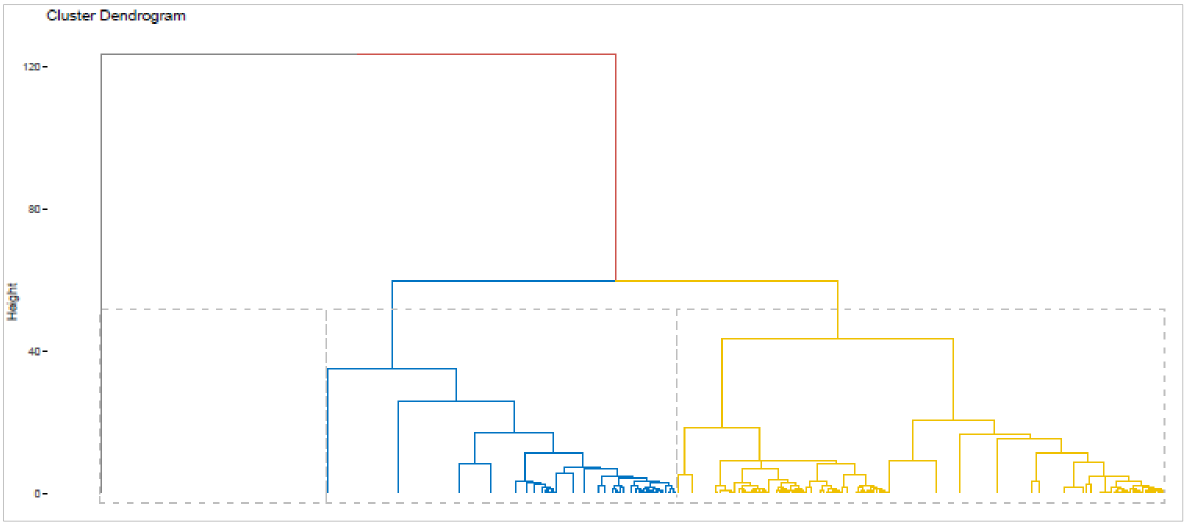



*Figura 5.10.* Dendrograma del análisis clúster

En el dendrograma se apreciaban que los 1249 ítems podían dividirse en 3 grandes grupos distribuidos tal como se observa en la figura 5.11. A continuación, describiremos de forma general cada uno de los grupos, lo cual nos brindará una primera idea de los tipos de tareas propuestas en los libros de texto. Posteriormente, asociamos a cada uno de los libros estudiados un grupo de tarea según lo que predominó en cada caso.

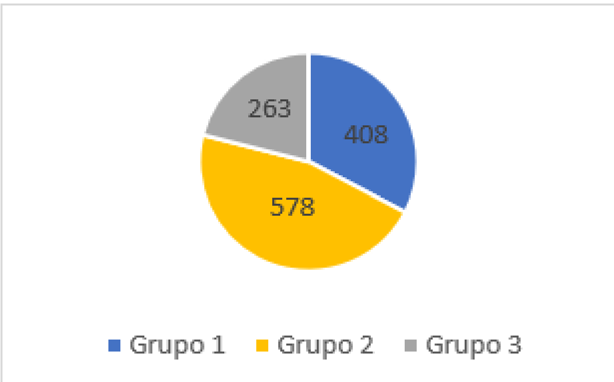



*Figura 5.11. Cantidad de ítems por grupo*

### *5.4.1. Grupos de tareas*

En un primer grupo, al que denominamos simbólico-algebraico (ver figura 5.12), las tareas abordan principalmente el cálculo de derivadas de funciones simples, empleando para ello tanto la definición como las reglas de derivación, siendo su principal contexto el algebraico, aunque algunos de sus ítems son más aplicados. La redacción de estos ítems se hace utilizando mayoritariamente el sistema simbólico y no se requieren conversiones

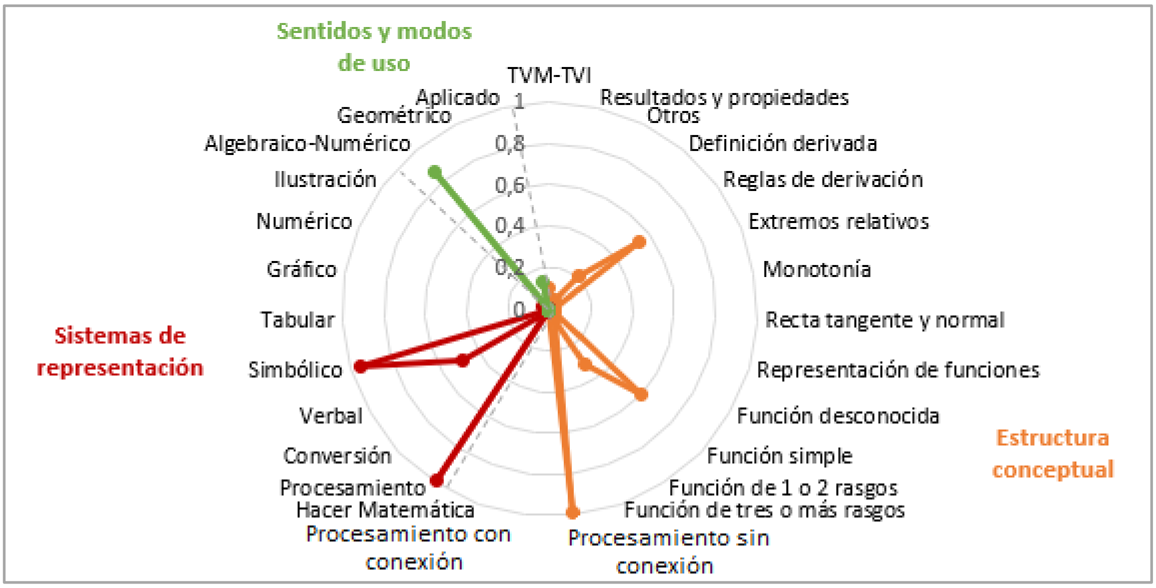



*Figura 5.12.* Características del grupo 1, simbólico-algebraico

Como indicamos anteriormente, al agrupar los ítems no hicimos distinción por editorial; sin embargo, una vez identificados los grupos procedimos a identificar el número de ítems de cada editorial que conformaban cada grupo. En la tabla 5.7 se observa que en este grupo la mayor participación la tiene Santillana y Bruño. Teniendo menos presencia el libro de la editorial Edelvives.

Tabla 5.7. *Distribución de ítems en cada grupo*

| | *Número de ítem dentro del grupo* | | |
|---|---|---|---|
| *Editorial* | 1 (408 ítems) | 2 (578 ítems) | 3 (263 ítems) |
| SM | 83 (20%) | 103 (17,8%) | 29 (11%) |
| Anaya | 74 (18%) | 131 (22,6%) | 45 (17%) |
| Santillana | 120 (29,5%) | 101 (17,4%) | 62 (23,5%) |
| Edelvives | 39 (9,5) | 85 (14,7%) | 76 (28,9%) |
| Bruño | 92 (23%) | 158 (27,5%) | 51 (19,6%) |

El segundo grupo (ver figura 5.13), al que denominamos simbólico-geométrico, se caracteriza por abordar principalmente el contenido de extremos relativos, la monotonía de una función y la recta tangente o normal, es decir, ítems en un contexto principalmente geométrico, empleando para ello funciones simples. Lo interesante de este grupo es que, aunque el sistema de representación suele ser el simbólico-verbal, no solo se espera un procesamiento, sino que en algunos de ellos se solicita el paso a otro sistema de representación (conversión). Además, en este grupo es posible hallar ítems que demandan un procedimiento con conexión, e incluso hacer matemáticas, aunque predominan las tareas sin conexión.

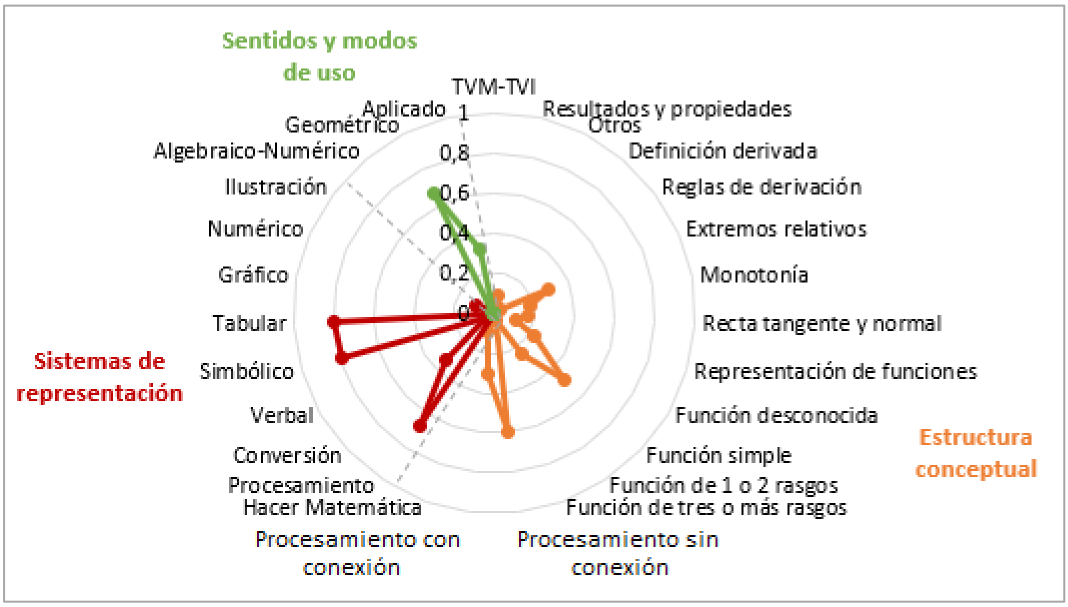



*Figura 5.13.* Características del grupo 2, simbólico-geométrico

Al analizar la cantidad de ítems por editorial que conforman este segundo grupo, tal como se observa en la tabla 5.7, notamos que las cinco editoriales tienen una presencia similar, aunque podemos observar que más de un cuarto de los ítems de este grupo pertenecen a la editorial Bruño.

Finalmente, el tercero y más particular de los grupos (figura 5.14), se conforma de ítems dedicados a las reglas de derivación donde el trabajo del estudiante consiste solo en conocerlas y aplicarlas, por lo que le llamamos algorítmico. Tratándose ítems en los que predominan procedimientos sin conexión, en un contexto meramente algebraico. Aunque sin duda en el grupo 1 también se hallan varios ítems de este tipo, en este grupo aparecen funciones de tres o más rasgos. En la tabla 5.7 vemos como Edelvives es el libro que más ítems presenta dentro de este grupo, seguido por Santillana.

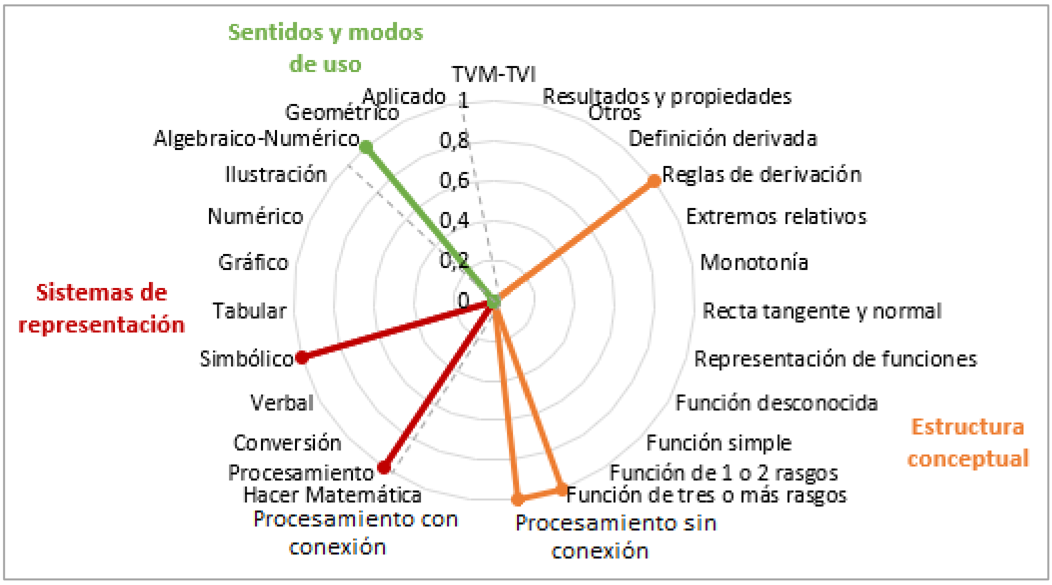



*Figura 5.14.* Características del grupo 3, algorítmico

Es posible detectar algunas similitudes entre este último grupo y el primero. Ambos presentan ítems desarrollados en un contexto meramente algebraico, donde su objetivo principal es el aprendizaje de las reglas de derivación. Sin embargo, el programa estadístico ha identificado este tercer grupo como un caso aparte, posiblemente debido a que son ítems idénticos en cuanto a las variables consideradas.

### *5.4.2. Grupo que caracteriza a cada libro*

Hasta ahora hemos descrito los tres grupos de tareas identificados mediante el análisis clúster. Ahora estableceremos la presencia de cada uno de los grupos en los distintos libros. En la figura 5.15 se puede observar como en los libros de SM, Anaya, Edelvives y Bruño sobresalen las tareas del segundo grupo, el simbólico-geométrico; mientras que al libro de Santillana lo caracterizan las tareas del primer grupo, el simbólico-algebraico.

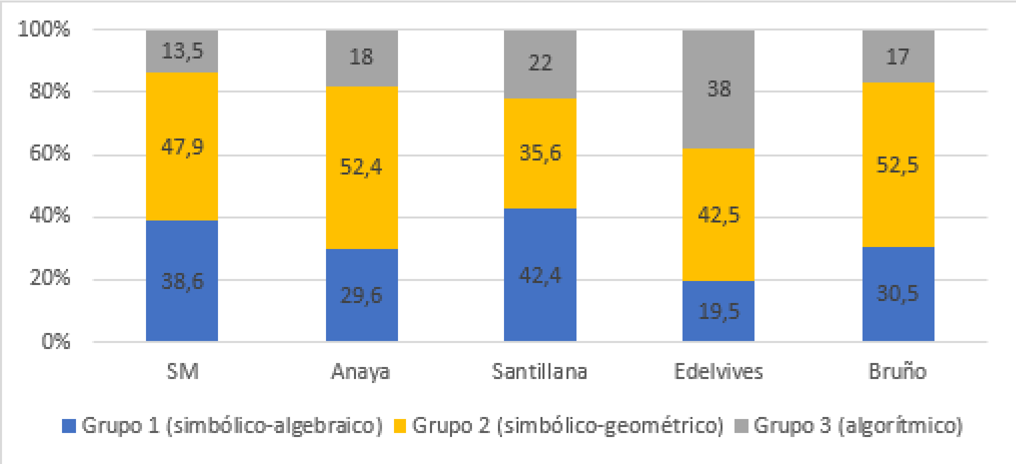



*Figura 5.15.* Porcentaje de ítems por grupo en cada libro

No obstante, si reconocemos las similitudes entre el grupo 1 y 3, siendo tareas enfocadas principalmente en el álgebra y reglas de derivación; vemos que, por ejemplo, en el libro de SM y Edelvives estos dos grupos conforman la mayoría de las tareas, de hecho, llama la atención que cerca de un 40% de las tareas de Edelvives se centran exclusivamente en las reglas de derivación (grupo 3, al que denominamos algorítmico).

De esta forma, si consideramos únicamente dos tipos de tareas, las simbólico-algorítmicas (grupo 1 y 3) y las simbólico-geométricas (grupo 2), tendríamos que Santillana contiene más tareas simbólico-algorítmicas; al igual que SM y Edelvives, aunque estos son bastante equilibrados en cuanto a estos dos tipos de tareas. Mientras que Anaya y Bruño prefieren tareas más simbólico-geométricas.

## 5.5. Síntesis

Nos centraremos ahora en analizar los resultados obtenidos en términos de nuestro marco teórico, utilizando los componentes del significado y los distintos niveles en los que estos se pueden analizar. De las 11 variables incluidas en el análisis de los libros de texto (ver tabla 3.6, página 71), siete pueden entenderse en términos de los elementos que constituyen el significado de un contenido matemático, tal como se muestra en la tabla 5.8 y como ya se podía apreciar en las figuras 5.12, 5.13 y 5.14, que describen los perfiles. Las otras cuatro (estructura abierta/cerrada, planteamiento directo/inverso, materiales y capacidad), aunque no tengan una relación directa, permiten un análisis más profundo del significado que se transmite de la derivada en los libros de texto.

Tabla 5.8. *Elementos del significado en cada una de las variables*

| *Componente del significado* | *Variable analizada* |
|---|---|
| Estructura conceptual | Contenido<br>Tipo de función<br>Demanda<br>Manejo de los sistemas de representación |
| Sistemas de representación | Sistemas de representación<br>Manejo de los sistemas de representación |
| Sentidos y modos de usos | Situación<br>Contexto |

Considerando un resumen de los resultados obtenidos (tabla 5.9), podemos ver que el primer y tercer grupo en cuanto a estructura conceptual abordan elementos básicos de la derivada, lo cual dentro de nuestro marco los interpretamos como hechos. Dentro del campo procedimental vemos que la principal demanda tiene más que ver con una destreza (aprender y manejar un algoritmo) y no tanto con razonamientos o estrategias. En cuanto a los sistemas de representación emplean el simbólico principalmente, destacando en todo momento el sentido algebraico de la derivada.

Tabla 5.9. *Resumen de resultados en términos de las componentes de significado*

| | *Grupos* | | |
|---|---|---|---|
| *Variable* | 1 (408 ítems) | 2 (578 ítems) | 3 (263 ítems) |
| Estructura conceptual | Definición y reglas de derivación para funciones simples y con procedimiento sin conexión | Aspectos geométricos para funciones simples y con procedimiento con y sin conexión<br>Un poco de "hacer matemática" | Reglas de derivación para funciones complejas y con procedimiento sin conexión |
| Sistema de representación | Simbólico verbal (Procesamiento) | Simbólico verbal (Procesamiento y conversión) | Simbólico (Procesamiento) |
| Contexto | Algebraico-numérico | Geométrico | Algebraico-numérico |

El segundo grupo, respecto a la estructura conceptual se adentra un poco más en los conceptos y relaciones de la derivada, aunque la mayoría de las veces con funciones simples, pero estudian la relación de la derivada con el componente geométrico. En cuanto al campo procedimental, estas tareas también promueven la destreza, pero incluyen algo de razonamiento, demandando procedimientos con conexión y el manejo de distintos sistemas de representación. Todo esto resaltando el sentido geométrico de la derivada.

De esta forma, en los cinco libros de texto analizados, se identifican tres grandes grupos de tareas, los cuales ponen de manifiesto tres significados de la derivada. Los dos primeros que fortalecen el aprendizaje procedimental y el tercero que favorece el conceptual:

a) Un significado meramente procedimental-algebraico, sin conexiones; basado en la ejecución de reglas básicas aplicadas a funciones sencillas y al conocimiento y aplicación de la definición del concepto. Está basado en un único sistema de representación, el algebraico, y las aplicaciones están contextualizadas en situaciones algebraico-numéricas. Se identifica con el grupo 1.
b) Un significado algorítmico, similar al anterior en casi todos los aspectos salvo en uno: está centrado exclusivamente en la aplicación de reglas de derivación para funciones compuestas, lo que le otorga una característica de complejidad basada en la dificultad de la manipulación algebraica. Se identifica con el grupo 3.
c) Un significado más conceptual-geométrico, donde se intenta establecer conexión entre los sentidos geométrico y algebraico, apareciendo así los sistemas de representación verbal y simbólico y los convenientes procesamientos entre ellos. Se identifica con el grupo 2.

Las variables no consideradas en los perfiles nos amplían la idea de derivada que se transmite en los libros de texto. Se pudo identificar que la mayoría de las tareas presentan una estructura cerrada, con planteamiento directo, en donde el objetivo parece ser aplicar y manejar procedimientos. Además, son tareas planteadas para resolver usando papel y lápiz y prácticamente todas en una situación meramente matemática.

# CAPÍTULO 6

# Resultados fase 3:
# Estudio con docentes de matemática

En este capítulo se describen los resultados obtenidos tras la aplicación del instrumento cerrado que se utilizó con docentes de matemática de Andalucía. Lo hemos organizado en 6 apartados, en los cuatro primeros se presentan los resultados obtenidos en el análisis de las respuestas dadas a cada una de las preguntas del instrumento (ver apéndice D, página 232); en el quinto apartado presentamos los distintos perfiles de las respuestas obtenidas por participante, identificados mediante un análisis clúster; finalmente, se realiza una síntesis.

## 6.1. Pregunta 1: corrección/incorreción de las definiciones de derivada en un punto

En esta pregunta se mostraban 6 definiciones proporcionadas en la fase 1 por estudiantes del Máster de Secundaria a la noción de derivada de una función en un punto. Los participantes debían indicar si la consideraban correcta o incorrecta, y en ambos casos justificar su elección. En la figura 6.1, se aprecia la respuesta obtenida para cada definición.

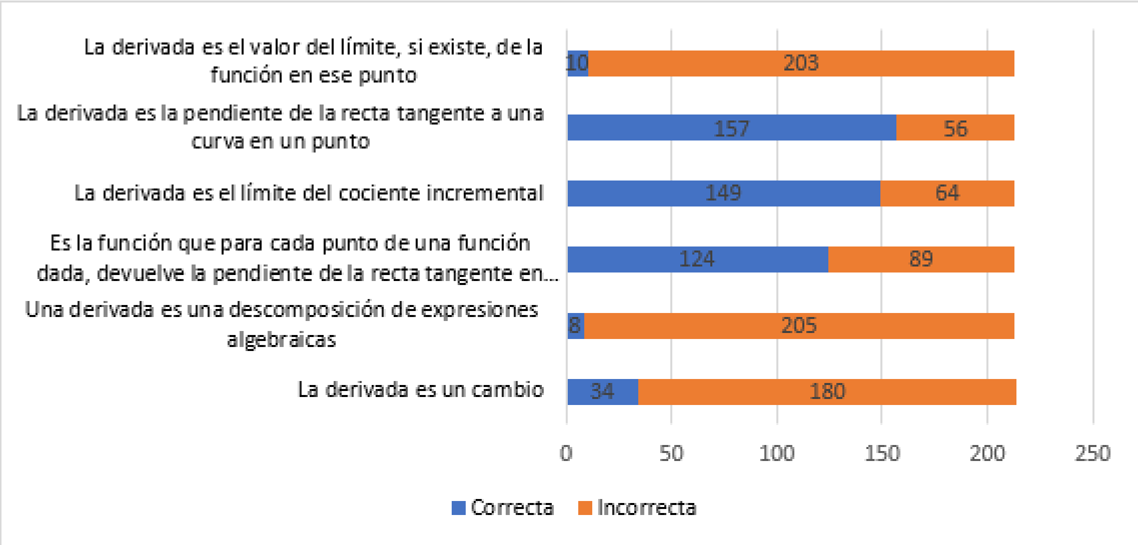



*Figura 6.1.* Respuestas dadas a la primera pregunta

Es claro que algunas definiciones incluidas eran incorrectas, o insuficientes, pero justamente la idea era apreciar qué elementos de la definición de derivada de una función en un punto echaban en falta los participantes. Pese a la incorrección de algunas de las posibilidades, resulta interesante que todas hayan sido consideras correctas por algunos docentes, aunque fuese en menor medida.

La justificación de la respuesta dada (correcta/incorrecta) no era una pregunta obligatoria, por lo que no todos los docentes contestaron, aunque sí un buen número de participantes. Debido a la variedad de comentarios, y para facilitar la presentación de los resultados, en el apéndice E (página 241) se resumen los comentarios y la frecuencia de estos, destacando, a continuación, sólo los más llamativos.

Muchos de los comentarios realizados, tanto para la corrección como incorrección, tenían que ver con la necesidad de especificar aspectos como:

- La función debe ser *continua*
- Debe especificarse *siempre que exista*
- Debe mencionarse la derivada *en un punto*

Este último fue el que más se presentó entre las justificaciones. Estos comentarios indican que, en muchos casos, la definición no se considera incorrecta, sino más bien incompleta, pues deben concretarse o especificarse algunos de sus requisitos.

Entre los comentarios hechos sobre la **primera definición** a validar ("la derivada es el valor del límite, si existe, de la función en ese punto") y tras indicar que era incorrecta, 69 participantes apelaron a dar la definición de derivada de una función en un punto que consideran correcta. La mayoría hizo alusión a la derivada como el límite del cociente incremental (37), de los cuales, seis lo expresaron de forma simbólica. Otros 15 docentes se refirieron a la derivada como el límite de la tasa de variación media; mientras que ocho expresaron de forma simbólica el límite que define a la derivada de una función en un punto. Entre ellos está P192, quien erróneamente la definió como $\lim_{x \to h} \frac{f(x+h)-f(x)}{x-h}$. Finalmente, nueve participantes la definieron como la pendiente de la recta tangente. Con lo que se detecta una de las primeras diferencias que se aprecia con las definiciones que dieron los futuros docentes (fase 1), donde la definición mediante la pendiente de la recta tangente predominaba.

Entre las nuevas definiciones de la derivada que surgieron, sobresale el participante P59, quien escribió *"la derivada de una función $f$, en un punto $a$ de acumulación de su dominio, es el valor del límite, si existe, del cociente entre la diferencia $f(x) - f(a)$ y la diferencia $x - a$, cuando $x \to a$"*, siendo el único docente que mencionó el punto de acumulación como requisito para poder definir la derivada en un punto. Por su parte, P144 enfatizó que la derivada si es un límite, pero no el de la función, afirmando "*es el valor límite de la recta pendiente en ese punto*".

Por otra parte, no sorprende que la **segunda definición** ("la derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto") sea considerada por muchos como correcta, si toma en cuenta la relevancia dada a la interpretación geométrica de la derivada (tal como se analizó en el estudio 1). Aunque es importante destacar que solo 10 docentes manifestaron que esa es la definición de derivada de una función en un punto, pues muchos señalaron que se trata de una interpretación, incluso 13 docentes indicaron que era incorrecta por este motivo.

Además de considerar correcta la segunda definición, algunos comentaron que resulta ser una forma sencilla para estudiarla en clase con el alumnado, por ejemplo, P49 comentó "*es la definición que más me gusta y la que utilizo. En las unidades anteriores se ha estado trabajando también por primera vez el concepto de límite y aproximarse al concepto de* *derivada con el límite me parece lo más acertado. Luego es más fácil explicar en el estudio global de las funciones porque los máximos y mínimos relativos tienen derivada cero. Además, hay animaciones de Geogebra que son ideales para explicar de esta manera".*

Llama la atención el comentario del participante P1, para quien la derivada de una función en un punto se define como una función, asegurando: *"lo correcto es: la función que, para cada punto de una función dada, devuelve la pendiente de la recta tangente en cada punto",* aunque esto puede deberse a que se confundiera con la definición de función derivada, como pasó con otros docentes en la cuarta definición. Por otra parte, un par de docentes comentaron que conocer la derivada permite definir la pendiente de la recta tangente, pero no al contrario; subrayando que la definición no debe depender de esta, pues incluso hay rectas tangente verticales en puntos donde la derivada no existe.

En cuanto a la **tercera definición** ("la derivada como límite del cociente incremental") fue también considerada por muchos como correcta, lo cual se podía deducir de los comentarios dados por los docentes en la primera definición, donde muchos aseguraron que esa era la definición de derivada. Aquí, tanto los docentes que afirmaron que era correcta, como quienes mencionaron que no lo era, comentaron que es necesario indicar la expresión del cociente incremental, esto muestra cierta importancia al elemento simbólico.

Un aspecto bastante interesante es que la mayoría consideró correcta la **cuarta definición** ("la derivada es la función que, para cada punto de una función dada, devuelve la pendiente de la recta tangente en cada punto"). Aunque los comentarios de 16 docentes dejan ver que en realidad consideran la expresión como una definición correcta de función derivada. Por ejemplo, P39 señala *"es correcto si estamos definiendo la función derivada y no la derivada que es una propiedad local que en teoría hay que calcular punto a punto";* sin embargo, muchos no hicieron esta aclaración, por lo que no se sabe si se referían a que era una definición correcta para función derivada, o si es que realmente entienden la derivada en un punto como una función.

Respecto a la **quinta definición** ("una derivada es una descomposición de expresiones algebraicas"), se hallan al menos 10 comentarios en los que pareciera que no considera erróneo que la derivada de una función en un punto se esté confundiendo y reduciendo al cálculo algebraico de la función derivada, pues apuntan a que el fallo está en el alcance de la definición. Por ejemplo, P130 comenta "*hay derivadas que son funciones transcendentes",* destacando que no tiene por qué ser algebraica, o bien P175 que afirma *"es una composición de expresiones algebraicas",* enfatizando que el error está en la palabra "descomposición".

En cuanto a la **sexta definición** ("la derivada es un cambio2), muchos aceptan que la derivada es un cambio; sin embargo, 13 docentes que la consideran incorrecta, al igual que P204, comentan "*la derivada permite analizar los cambios de una función, pero en si no es un cambio"*.

## 6.2. Pregunta 2: términos relacionados

En la segunda pregunta del instrumento, se le presentaban al profesorado 8 términos, para los cuales debían indicar que tan relacionados, o no, estaban estos con el concepto de derivada de una función en un punto. Las respuestas se registran en la figura 5.2.

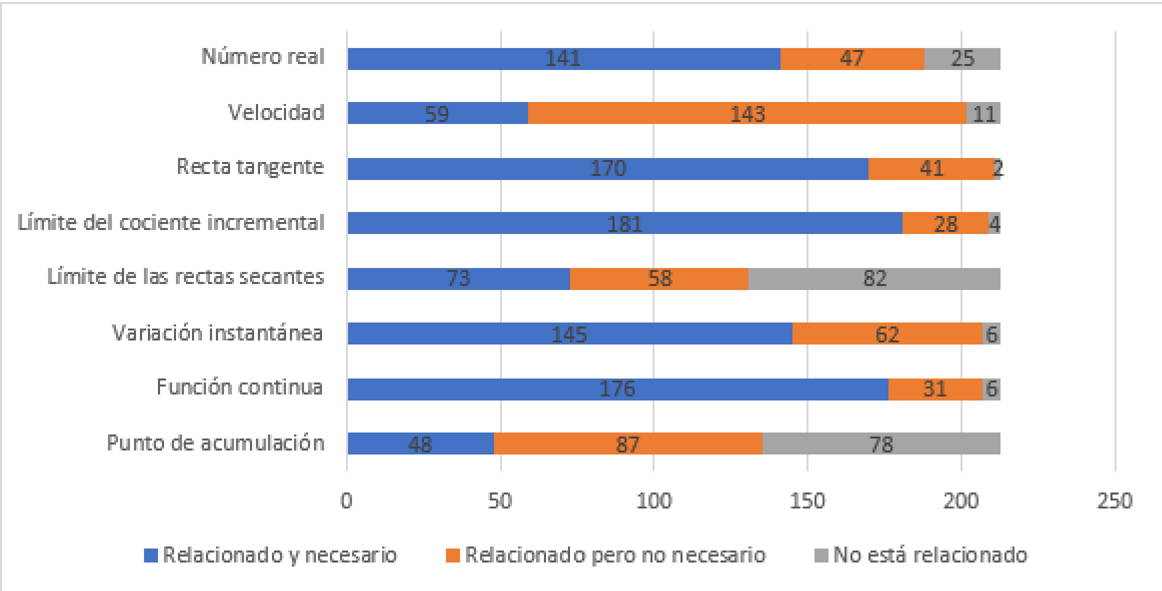



*Figura 6.2.* Respuestas dadas a la segunda pregunta

Esta pregunta nos permite visualizar la forma en la que estos elementos se atribuyen a la derivada. Por ejemplo, existe una cantidad importante de docentes que señalan que el término velocidad está relacionado con el estudio de la derivada, pero no es necesario. Por otra parte, gran cantidad de docentes indicaron que el límite de las rectas secantes no guarda relación alguna con la noción de derivada.

Pero sin duda, un aspecto que sobresale es que “punto de acumulación” sea contemplado por la mayoría como un aspecto relacionado, pero no necesario, o incluso no relacionado; lo que ya en la fase 1 llevó a muchos participantes a considerar que una función de dominio discreto era derivable.

## 6.3. Pregunta 3: definición de derivada en los libros de texto

En esta tarea se les mostraba a los participantes tres definiciones de derivada de una función en un punto que aparecen en los libros de texto de 1º de Bachillerato, y se les solicitaba dos cosas:

- Elegir la definición que coincidía más con su propia definición de derivada en un punto.
- Indicar cuál preferiría para enseñarla a sus estudiantes.

En la tabla 6.1 se muestra la definición que los docentes indicaron que coincide más con su definición de derivada, en la que puede apreciarse que la mayoría eligió la definición como tasa de variación instantánea. Además, 22 docentes consideraron que su definición no concuerda con ninguna de las tres; posiblemente, tal como lo reflejaron en la primera pregunta, creen que deben especificarse algunos aspectos.

Tabla 6.1. *Definición de derivada que coincide más con la de los participantes*

| *Definición* | *Frecuencia* |
|---|---|
| Se define la derivada de una función $f$ en el punto $x = a$, como la tasa de variación instantánea. Se representa $f'(a)$ y es igual a $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ | 95 |
| El crecimiento de una función en un punto se mide por la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto. A este valor se le llama derivada de $f$ en $a$, se designa por $f'(a)$, donde $$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ | 35 |
| La derivada de la función $f(x)$ en un punto de abscisa $a$ se denota por $f'(a)$, y es el valor de este límite, si existe y es finito $$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ | 61 |
| Otra con un nivel de formalidad superior a las anteriores | 8 |

Tabla 6.1. *Definición de derivada que coincide más con la de los participantes*

| *Definición* | *Frecuencia* |
|---|---|
| Otra con un nivel de formalidad similar a las ya dadas | 13 |
| Otra con un nivel de formalidad menor | 1 |

Aunque, en la primera pregunta, la mayoría de los docentes indicaron que definir la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente es correcto, vemos como no es la definición que coincide más con su definición ideal de derivada de una función en un punto. Mientras que, para los docentes en formación, sí era la definición más destacada (fase 1).

Por otra parte, al preguntarles cuál de las definiciones prefiere para enseñar esta noción, 34 docentes cambiaron la definición que eligieron en la primera parte; además, los 22 docentes que habían indicado que su definición no coincidía con ninguna, ahora debían elegir alguna. Pese a estos cambios, la definición de derivada de una función en un punto como tasa de variación instantánea sigue predominando en esta segunda parte (figura 6.3).

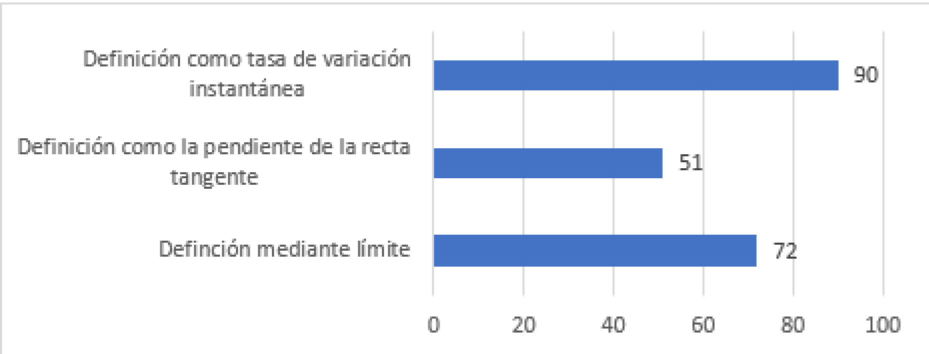



*Figura 6.3.* Definición de derivada para la enseñanza

Una vez que indicaban qué definición preferían usar en la enseñanza, se les pedía justificar el porqué de su elección, aunque no era una pregunta obligatoria, por lo que no todos los docentes respondieron. En la tabla 6.2 se presentan las justificaciones dadas en cada caso.

Tabla 6.2. *Justificación dada a la definición elegida para la enseñanza*

| *Definición elegida* | *Justificación* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| Definición como tasa de | Es la más fácil de entender para los estudiantes. El uso de la $h$, al expresar el límite, permite visualizar cómo el intervalo de reduce a un punto en la gráfica. | 8 |

Tabla 6.2. *Justificación dada a la definición elegida para la enseñanza*

| *Definición elegida* | *Justificación* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| variación instantánea | Resulta intuitivo y directo tras el estudio de la tasa de variación media | 21 |
| | La notación utilizada facilita el cálculo | 10 |
| | Es la que más me gusta | 4 |
| | Que no aparezca $x$ en el límite, hace que se entienda mejor que se trata de la derivada en un punto $a$ | 2 |
| | Es más formal | 3 |
| | Permite introducir ejemplos de velocidad instantánea | 1 |
| Definición como pendiente de la recta tangente | Es la que más fácil entienden, al ser más intuitiva. Da significatividad al concepto. | 17 |
| | Así fue como surgió el concepto, mediante su interpretación geométrica | 1 |
| | Visualizar la pendiente permite posteriormente relacionarlo con propiedades sobre la monotonía y otras | 7 |
| | Por su forma de expresar el límite es más fácil de calcular | 1 |
| | Es la que me gusta y entiendo mejor | 2 |
| | Permite relacionar conceptos geométricos y analíticos | 2 |
| | Es fácil de introducir mediante el límite de las rectas secantes | 2 |
| Definición mediante límite | Las dos primeras son interpretaciones, deben estudiarse después | 12 |
| | Es la más formal / Es la más matemática | 6 |
| | Su cálculo es más fácil | 2 |
| | Menor complejidad al no depender de $h$, ni de otros conceptos | 6 |
| | Es la única que destaca que el límite debe existir y ser finito | 4 |
| | Es la que aprendí | 1 |
| | Es la más apropiada para el nivel de Bachillerato | 2 |

En las tres opciones, se aprecia que la selección de la definición a enseñar se relaciona con la forma en la que el profesorado introduce esta noción y la que considere que el cálculo resultará más sencillo.

Un comentario que llamó la atención fue el que realizó P62, quien tras elegir la primera opción señaló *"en realidad no veo necesario que en primero de bachillerato vean esa definición cuando luego aplicamos reglas de derivabilidad de funciones elementales"*. Esto es relevante, pues, aunque es cierto que en primero de bachillerato se estudian las reglas de derivación, estas no sustituyen el concepto de derivada de una función en un punto, ni puede ni debe reducirse esta noción a reglas algorítmicas.

Por otra parte, quienes eligieron la tercera opción (definición mediante límite), destacan que posteriormente debe enseñársele al alumnado la interpretación de la derivada como tasa de variación instantánea o como pendiente de la recta tangente, pero que son un complemento a la definición; P57 comentó "*pienso que es mejor la definición como este límite y después adentrarse en su significado y no al revés*", es decir, considera que las dos primeras definiciones enriquecen el significado, pero no son su definición.

Otro aspecto interesante fue que solo el docente P77, quien seleccionó la tercera definición, señaló que debía indicarse que el punto fuese de acumulación del dominio. Pareciera que los docentes no echaron en falta los requisitos o condiciones para definir la derivada de una función en un punto, de hecho, que solo la tercera definición hiciera mención explícita de la existencia del límite, fue un aspecto al que hicieron referencia únicamente por cuatro participantes.

## 6.4. Pregunta 4: verdadero o falso. Justificación

Tal como se mencionó, la última pregunta del cuestionario fue una adaptación del verdadero o falso que se había planteado en el cuestionario semántico que se aplicó a futuros docentes en la fase 1. La pregunta constó de dos enunciados (de los ya utilizados), para los cuales los participantes debían:

1. Indicar si era verdadero o falso
2. Validar una serie de argumentos presentados en cada caso, además, si no lo consideraban válido, debían indicar que le hacía falta al argumento, o por qué no era válido.
3. Indicar cuál de los argumentos prefería y por qué.
4. Señalar si había otro posible argumento para justificar la veracidad o falsedad del enunciado.

A continuación, presentamos los resultados obtenidos para cada uno de los enunciados.

### *6.4.1. Primer enunciado: derivabilidad en un máximo local*

El enunciado fue exactamente el mismo que se había utilizado en la fase 1 (ver figura 6.4).

1. ( ) Para la función $g$, cuya gráfica se muestra en la figura 1

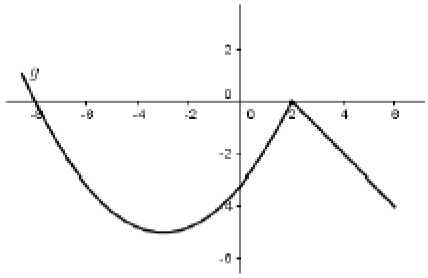


*Figura 1.* Gráfica de $g$

Se puede afirmar que como $g$ tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $g'(2) = 0$.

*Figura 6.4.* Primer enunciado de la pregunta de verdadero o falso (cuestionario en línea)

Tal como se observa en la figura 6.5, la mayoría de los participantes indicaron correctamente que el enunciado era falso.

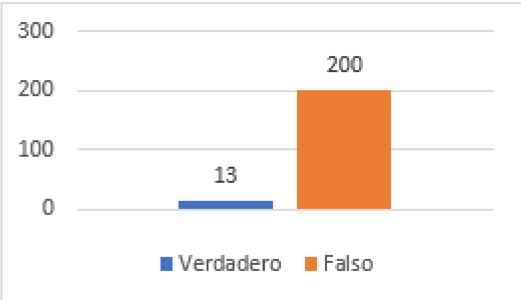



*Figura 6.5. Respuestas dadas al primer enunciado*

### *6.4.1.1. Validez de los argumentos dados*

Tras indicar si el enunciado era verdadero o falso, los docentes debían determinar la validez a una serie de argumentos que habían dado los futuros docentes en la fase 1. En la tabla 6.3 se muestran los resultados obtenidos en cada caso. Es importante señalar que a partir de aquí algunos docentes abandonaron el cuestionario en línea, por lo que no registraron respuesta.

Tabla 6.3. *Validez dada a los argumentos que justifican la falsedad o veracidad del primer enunciado*

| *Argumento* | *Válido y suficiente* | *Válido, pero no suficiente* | *No es válido* |
|---|---|---|---|
| 1. Es falso ya que la pendiente de la recta tangente es ese punto es infinita, por tanto, no es derivable. | 12 | 8 | 159 |

Tabla 6.3. *Validez dada a los argumentos que justifican la falsedad o veracidad del primer enunciado*

| *Argumento* | *Válido y suficiente* | *Válido, pero no suficiente* | *No es válido* |
|---|---|---|---|
| 2. Es falso porque los límites laterales de la derivada en ese punto no coinciden. | 143 | 25 | 12 |
| 3. Es falso porque una función no es derivable en los puntos que presenta un "pico". | 51 | 122 | 6 |
| 4. Es falso pues la derivada no es continua por ser una función definida a trozos. | 8 | 16 | 155 |
| 1. Es verdadero ya que la derivada se anula en los extremos de la función. | 4 | 4 | 3 |
| 2. Es verdadero ya que no existe tangente, por lo tanto, es cero. | 3 | 4 | 4 |

Los docentes que consideraban que el argumento no era suficiente, o bien, no era válido, debían indicar por qué; pero esta justificación no era obligatoria por lo que no todos contestaron. Pese a esto, se registraron bastantes comentarios en cada uno de los argumentos. Para facilitar la lectura y presentación de estos resultados, comentaremos aquí solo algunos de las respuestas obtenidas. En el apéndice F (página 245) se detallan los todos los comentarios registrados. Aunque adelantamos que muchos comentarios tienen que ver, por ejemplo, con que el argumento no menciona explícitamente que la función no es derivable en el punto.

Como se puede apreciar en la tabla 6.3, para justificar la **falsedad**, los argumentos 2 y 3 fueron los mejor valorados por los docentes. En cuanto al *primer argumento*, este fue considerado por la mayoría como no válido. Entre las razones para esto, 31 docentes destacan que no existe recta tangente en ese punto, ya que solo existe si la función es derivable en el punto. Otros afirman que no existe la noción de pendiente infinita. Por su parte un gran número de docentes (58) alegó que la pendiente no es infinita, sino que las derivadas laterales no coinciden, o bien aseguran que es finita, como P84 que afirmó *"la derivada de una función polinómica de cualquier grado es finita"*. Un caso particular es el de P14 que comentó *"la pendiente es cero"*, lo extraño es que P14 clasificó el enunciado como falso.

El *segundo argumento* fue valorado por la mayoría como válido y suficiente. Entre los comentarios destacamos dos: por un lado, un docente que lo consideró no suficiente señala que debe indicarse que la función no es continua. Por otra parte, solo tres docentes reconocieron que el argumento hace alusión a la continuidad de la función derivada y no a la derivabilidad de la función en el punto; esto puede deberse a dos motivos:

- Los docentes consideran que, si la función derivada no es continua en el punto, la función no es derivable en ese punto.
- Interpretaron que el argumento hacía referencia a las derivadas laterales; lo cual pudo haber ocurrido también con el docente en formación quien justificó de esa forma. Como se aprecia más adelante, esta confusión entre derivadas laterales y los límites laterales de la derivada también se presentó en otros argumentos.

El *tercer argumento* fue considerado por la mayoría como válido, pero no suficiente, pues alegaban que debía probarse que las derivadas laterales (o los límites laterales de la derivada) no coincidían. P155 fue uno de estos docentes, quien agregó *"habría que incluir que los límites laterales de la función derivada en dicho punto no coinciden"*, con lo que sé confirma que hay una confusión con la continuidad de la función derivada. Asimismo, cinco comentarios hablaban de los "límites laterales", sin especificar a cuáles se referían.

Los motivos para considerar el *cuarto argumento* como no válido fueron variados; pero en términos generales comentaron que una función a trozos puede ser continua y derivable. Así, como ejemplo, P20 mencionó que *"puede haber funciones definidas a trozos lo suficientemente 'suaves' para que sean derivables en ese punto".* Un aspecto interesante, es que, al parecer los participantes no tomaron en cuenta que la no continuidad de la función derivada en un punto no tiene implicación directa con la derivabilidad en ese punto.

Finalmente, dado que fueron pocos los participantes que indicaron que el enunciado era **verdadero**, y dado que no eran obligatorios, se tiene registro de pocos cometarios al respecto (ver apéndice F, página 245).

### *6.4.1.2. ¿Cuál de los argumentos prefiere?*

Una vez que establecieron la validez de los argumentos dados, se les preguntaba con cuál de los argumentos se sentía más identificado. Tal como se aprecia en la figura 6.6, la mayoría de quienes consideraron el enunciado como falso prefirió el segundo argumento presentado, lo que no sorprende pues fue el que más identificaron como válido y suficiente. Quienes señalaron que era verdadero, eligieron el primer argumento que se les presentó.

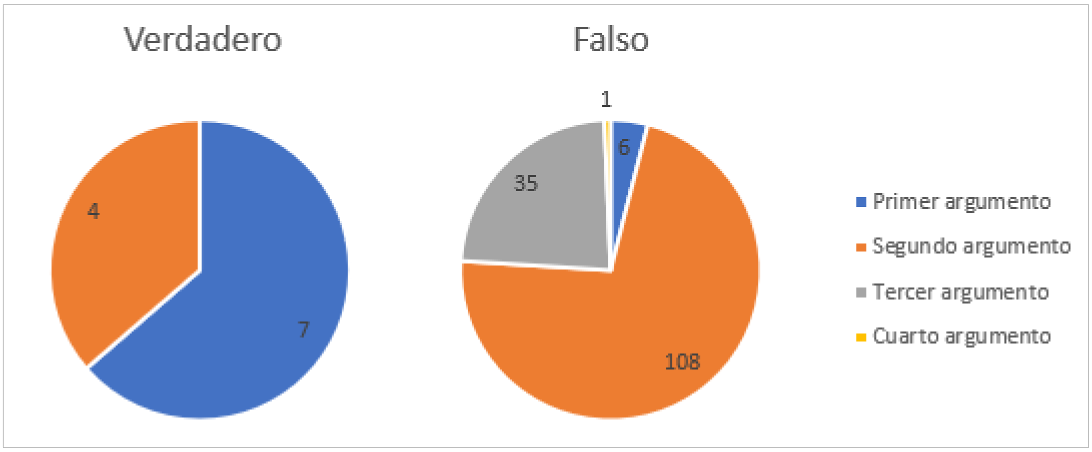



*Figura 6.6.* Argumento que los docentes prefieren para justificar el primer enunciado

Para la escogencia de los argumentos sobre la veracidad del enunciado, no se registraron comentarios. En el apéndice G (página 248) se detallan los motivos dados para la escogencia de los distintos argumentos para la falsedad. En términos generales los docentes justifican su preferencia por un argumento al considerarlo más formal, más correcto, o bien, porque les parece más intuitivo y visual.

Entre quienes eligieron el segundo argumento para la falsedad (los límites laterales de la derivada coinciden), 26 recalcaron que las derivadas laterales deben coincidir para que la definición de derivada se cumpla; sin embargo, solo un par menciona que, en el argumento dado, la expresión "límites laterales de la derivada" no es correcta, pues debería ser derivadas laterales. Esto confirma que algunos entienden que el segundo argumento hace alusión a las derivadas laterales. Por otra parte, tres docentes que eligieron también el segundo argumento comentaron que en realidad les gustaba más el tercero, pero que este les parece más formal.

### *6.4.1.3. ¿Existe otro argumento que justifique la falsedad o veracidad del enunciado?*

La mayoría de los docentes que consideró el enunciado como **falso,** contestaron que no existe otro argumento (92). Por su parte, 59 docentes afirmaron que sí, dando las siguientes alternativas:

- Considerar la condición necesaria para que la proposición sobre extremos relativos pueda darse: ser derivable (18)
- Usar la definición de derivada (5)
- La existencia de un cambio repentino en la monotonía de la función (1)
- Que no existe recta tangente en ese punto (1)
- Mencionar que en ese punto hay infinitas rectas tangentes (3)
- Indicar que la existencia de un punto máximo es una condición necesaria para que la derivada se anule, no suficiente (1)
- Se puede apreciar gráficamente que ninguna derivada lateral es cero (1)
- La función no es continua, y por lo tanto no derivable (1)

Finalmente, de los docentes que indicaron que el enunciado era **verdadero**, 5 señalaron que existe otro argumento, mientras que 2 comentaron "los puntos críticos de una función tienen derivada cero".

### *6.4.2. Segundo enunciado: recta tangente vertical*

El segundo enunciado que se presentó es otro de los utilizados en la fase 1 (ver figura 6.7), en el que se cuestiona la derivabilidad en un punto que presenta recta tangente vertical.

1. ( ) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, tiene por gráfica la que se muestra en la figura 1. La recta $m$ es tangente a la curva en $x = 1$; de esta forma es fácil asegurar que $f$ es derivable en ese punto.

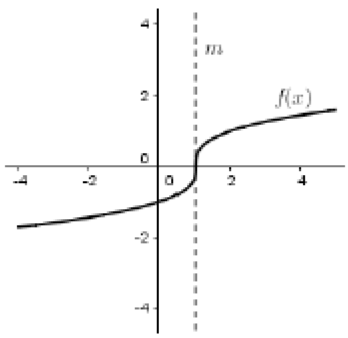



*Figura 1.* Gráfica de $f$

*Figura 6.7.* Segundo enunciado de la pregunta de verdadero o falso (cuestionario en línea)

A diferencia del primer enunciado, este fue contestado solo por 175 docentes, de los cuales 31 manifestó que el enunciado era verdadero (figura 6.8).

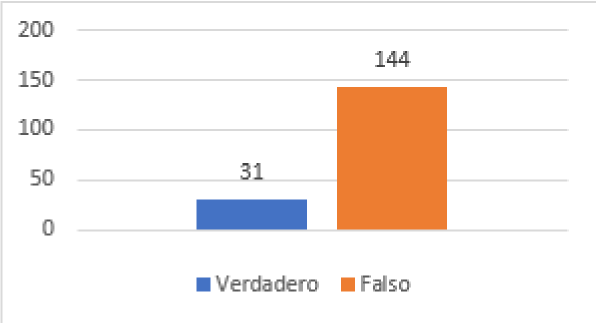



*Figura 6.8.* Respuestas dadas al segundo enunciado

De nuevo, tras indicar si el enunciado era verdadero o falso, se le presentaba una serie de argumentos dados por futuros docentes para que valoraran la validez de cada uno de ellos. Además, se les pedía que indicarán cuál argumento preferían y si existía algún otro.

### *3.4.2.1. Validez de los argumentos*

Tanto si el participante indicaba que el enunciado era falso como si señalaba que era verdadero, se le presentaban 4 posibles argumentos. La valoración de cada uno de ello se muestra en la tabla 6.4, recordamos que conforme avanzaban las preguntas algunos participantes dejaron de contestar, por lo que en la tabla no siempre se refleja el mismo número de participaciones.

Tabla 6.4. *Validez dada a los argumentos que justifican la falsedad o veracidad del segundo argumento*

| *Argumento* | *Válido y suficiente* | *Válido, pero no suficiente* | *No es válido* |
|---|---|---|---|
| 1. Es falso ya que la pendiente de la recta tangente dada es infinita, lo cual hace a la función no derivable. | 86 | 25 | 23 |
| 2. Es falso dado que los límites laterales de $f'(x)$ cuando $x$ tiende a 1 no coinciden. | 42 | 12 | 81 |
| 3. Es falso ya que $f'(x)$ se indefine en $x = 1$. | 71 | 31 | 32 |
| 4. Es falso pues la función no es continua y por tanto no derivable. | 6 | 1 | 128 |
| 1. Es verdadera pues la existencia de recta tangente asegura que haya derivada. | 11 | 9 | 5 |
| 2. Es verdadera dado que las derivadas laterales coinciden. | 15 | 8 | 2 |
| 3. Es verdadera porque la función es continua | 2 | 9 | 14 |

Tabla 6.4. *Validez dada a los argumentos que justifican la falsedad o veracidad del segundo argumento*

| *Argumento* | *Válido y suficiente* | *Válido, pero no suficiente* | *No es válido* |
|---|---|---|---|
| 4. Es verdadera dado que $f'(x) = \frac{(x-1)^{\left\{-\frac{2}{3}\right\}}}{3}$ , $f'(x)$ es continua | 5 | 7 | 13 |

Nuevamente, con la intención de facilitar la presentación de los resultados, nos limitamos a destacar algunos comentarios dados a cada uno de los argumentos, en el apéndice H (página 249) se muestra una tabla que sintetiza todos los comentarios.

Para justificar la **falsedad**, los docentes indicaron que los argumentos más válidos son el 1 y 3. Respecto al *primer argumento*, un comentario interesante fue el que realizaron un par de docentes que lo valoraron como válido, pero no suficiente, pues aseguran que en ese punto no existe recta tangente, lo que significaría entonces que consideran el argumento como no válido.

Por otra parte, pese a que los argumentos basados en la recta tangente son considerados como válidos por muchos docentes (lo mismo ocurrió en el enunciado pasado), también se encuentran comentarios como el de P57, quien argumenta que esto no es apropiado, pues "*debe ver los límites, y dejar de utilizar tangente como sinónimo de derivada".* De igual forma, algunos docentes que catalogaron el primer argumento como no válido, señalan que concepto de derivada es anterior al de la recta tangente y su pendiente, por lo que la noción de derivada no debe basarse en esta.

En cuanto al *segundo argumento,* algunos comentarios dejan ver que se confundió las derivadas laterales con el límite lateral de $f'(x)$. Solo cinco docentes manifestaron que son nociones distintas. En cuanto al *tercer argumento*, este también fue considerado mayormente como válido y suficiente. Sin embargo, para quienes no es válido, el principal comentario se asocia con la expresión "indefine", la cual expresan que es incorrecta o inapropiada.

Respecto a los argumentos que justifican la **veracidad** del enunciado, quienes aseguran que el *primer argumento* no es válido, destacan el ejemplo de funciones que tienen "picos" y aun así presentan recta tangente, sin ser derivable en esos puntos; además, comentan que el recíproco si es cierto; es decir, la existencia de la derivada en el punto asegura la de la recta tangente en dicho punto.

El *segundo argumento* fue considerado por la mayoría como válido y suficiente. Quienes lo valoraron como no es suficiente, afirman que el argumento debe complementarse verificando la continuidad de la función. Curiosamente, dos docentes comentan que, además de mencionar que las derivadas laterales coinciden, debe especificarse que el límite es infinito. Esto es un error que también se presentó en la fase 1, donde pese a que el límite que define la derivada es infinito, se considera la función como derivable. Sobresale el comentario que hizo el docente P36, quien identificó el argumento como no válido, para él no es cierto que si las derivadas laterales coinciden la función sea derivable, pues señaló *"a veces las derivadas laterales coinciden y hay pico"*.

El *tercer argumento* fue valorado principalmente como no válido, señalando que la continuidad es una condición necesaria pero no suficiente para a derivabilidad, algunos desataron de nuevo el ejemplo de funciones con "picos". Por otra parte, la insuficiencia del argumento se respalda con que es necesario agregar el cálculo de las derivadas laterales.

### *3.4.2.2. ¿Cuál de los argumentos prefiere?*

La valoración dada a los argumentos presentados pone de manifiesto cual argumento consideran más idóneo y, por lo tanto, cual sería más probable que eligieran. Tras preguntárselo de manera directa, se obtuvieron los resultados que se muestran en la figura 6.9, lo que coincide con los datos que se apreciaban en la tabla 6.4.

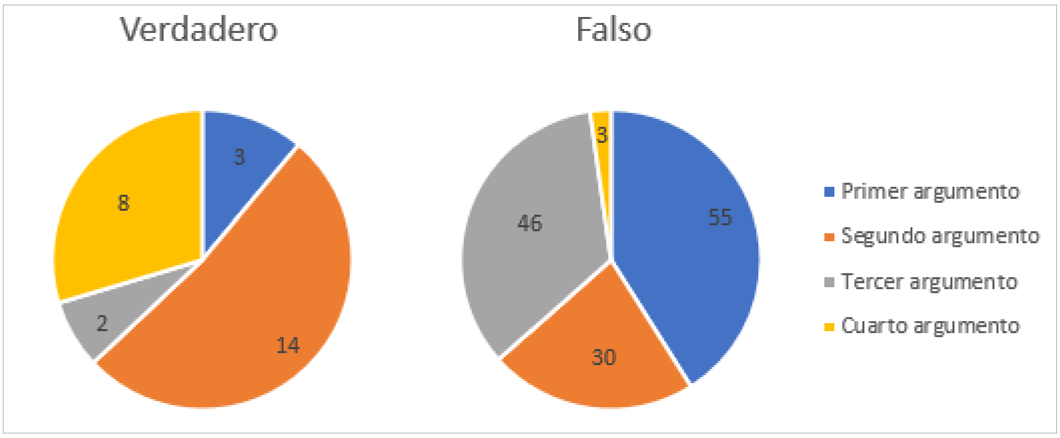



*Figura 6.9.* Argumento que los docentes prefieren para justificar el segundo enunciado

En el apéndice I (página 252) se resumen los comentarios dados para justificar la preferencia de cada uno de los argumentos. A grandes rasgos, muchos comentarios tienen que ver con que consideran el argumento más formal o correcto, más visual y en esta ocasión indicaron que su elección se debe a que resulta más fácil para el alumnado.

Entre los que eligieron el *primer argumento* que justifica la **falsedad**, llama la atención un par de comentarios en los que se señala que este argumento es el más próximo a la definición de derivada y a su interpretación geométrica. Por otra parte, los que prefirieron el *segundo argumento*, mencionaron que se deben comprobar las derivadas laterales, pues eso implica utilizar la definición de derivada. Esto confirma que algunos eligieron este argumento bajo la premisa de que los límites laterales de la función derivada son sinónimo de derivadas laterales. Los que prefirieron el *tercer argumento*, comentaron que es de los más fáciles para el estudiante, pues es sencillo descartar los puntos que no pertenecen al dominio.

Los docentes que consideraron el enunciado como **verdadero**, tras preguntarles con cual argumento se sienten más identificados, la mayoría eligió el segundo argumento (figura 6.9), lo cual no sorprende dado que la base de este es la definición; sin embargo, en este caso no es cierto que las derivadas laterales coincidan. Pocos realizaron algún comentario más sobre su elección (ver apéndice I, página 252).

### *3.4.2.3. ¿Existe otro argumento que justifique la falsedad o veracidad del enunciado?*

Finalmente, se les preguntó si además de los 4 argumentos mostrados, existía alguno otro que justificara la falsedad o veracidad del enunciado. Para la **falsedad**, 88 participantes contestaron que no, mientras que 45 contestaron de forma afirmativa, dando argumentos como:

- Indicar que la derivada en un punto es un número finito (13)
- Que el punto considerado es un punto de inflexión (3)
- Calcular las derivadas laterales (6)
- Calcular la pendiente de la recta a partir de dos puntos, al no ser finita, no es derivable (1).

Para la **veracidad**, 4 docentes indicaron que sí existe otro argumento, sus respuestas fueron bastante interesantes: dos recalcan que al tener recta tangente y ser una función continua en el punto, P104 señaló *"es un punto de inflexión, al ser continua en ese punto, debe tener derivada en el punto y la segunda derivada es 0"*, mientras que P36 comentó *"no hay pico y existe la recta tangente"*.

Un participante (P32), aunque no sugirió otro argumento, comentó *"nunca se me había presentado una función de este tipo en los años que llevo dando clase y me ha surgido la duda de si las derivadas laterales son infinitas, pero coinciden, existe o no la derivada, ya que hay autores que consideran que, si los límites laterales de una función en un punto coinciden, pero son infinitos, el límite no existe"*, esto es importante, pues como se comentó anteriormente, este fallo lo cometió tanto el profesorado en esta fase, como futuros docentes en la primera fase.

## 6.5. Perfiles de respuestas dadas

Tal como se señaló en la metodología, en esta tercera fase también utilizamos el análisis clúster como un complemento para visualizar mejor los resultados. Este análisis nos permitió resumir las respuestas dadas por cada participante, identificando los principales aspectos utilizados y destacados. Recordemos que para realizar el análisis tomamos en cuenta, la presencia o ausencia de los siguientes 10 aspectos, en las respuestas dadas:

- La derivada en un punto es un valor real
- Para definir la derivada en un punto la función debe ser continua en ese punto.
- La derivada se define en un punto de acumulación del dominio de la función.
- Define derivada la derivada en un punto mediante la tasa de variación media.
- Define derivada la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente.
- Define derivada la derivada en un punto mediante el límite del cociente incremental.
- Argumenta basado en aspectos gráficos
- Argumenta utilizando un procedimiento algebraico
- Argumenta utilizando las derivadas laterales
- Argumenta empleando algún resultado o propiedad.

Como puede observarse en la figura 6.10, los 158 participantes que respondieron a todas las preguntas planteadas en el instrumento pueden agruparse en cuatro grupos, según la similitud en los aspectos de la derivada de una función en un punto que utilizaron o mencionaron.

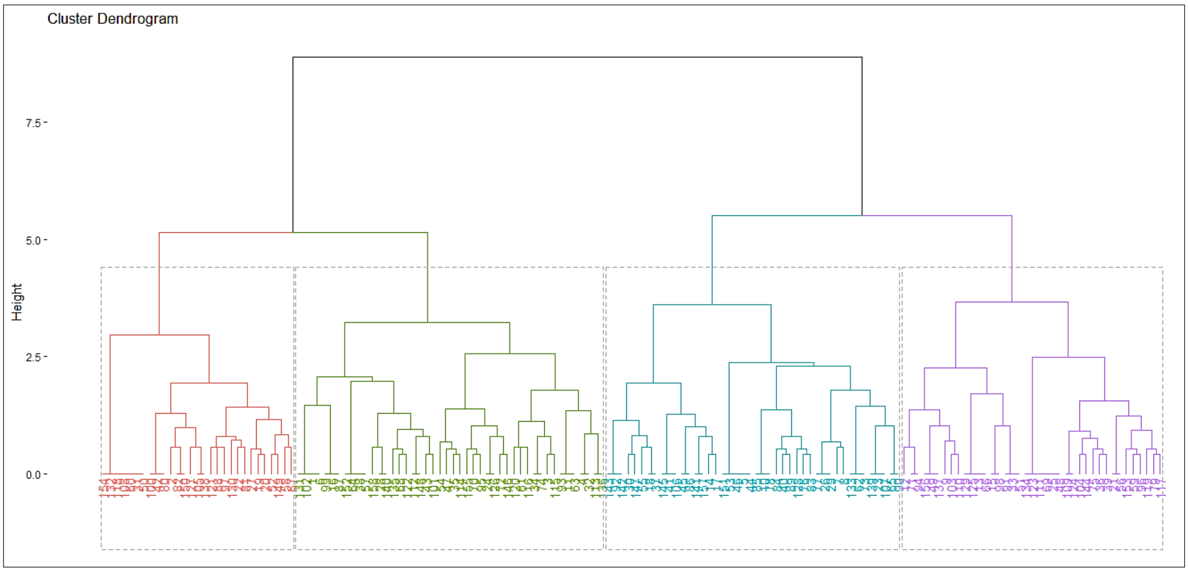



*Figura 6.10.* Dendrograma análisis de las respuestas por participante

La cantidad de docentes en cada grupo se muestra en la tabla 6.5 y la caracterización de cada uno de estos grupos en la figura 6.11.

Tabla 6.5. *Distribución de los grupos*

| *Grupo* | *Cantidad de docentes* |
|---|---|
| 1 | 46 |
| 2 | 29 |
| 3 | 44 |
| 4 | 39 |

Los 4 grupos tienen una característica en común, lo cual se debe a que la mayoría de los participantes reconoció que la derivada de una función en un punto es un valor real, además de que una condición necesaria para su definición es la continuidad en el punto. Pero también coinciden en que muy pocos consideran como requisito necesario que el punto en el que se defina sea un punto de acumulación del dominio de la función. De ahí que, en cuanto a los requisitos, los 4 grupos se comporten similarmente.

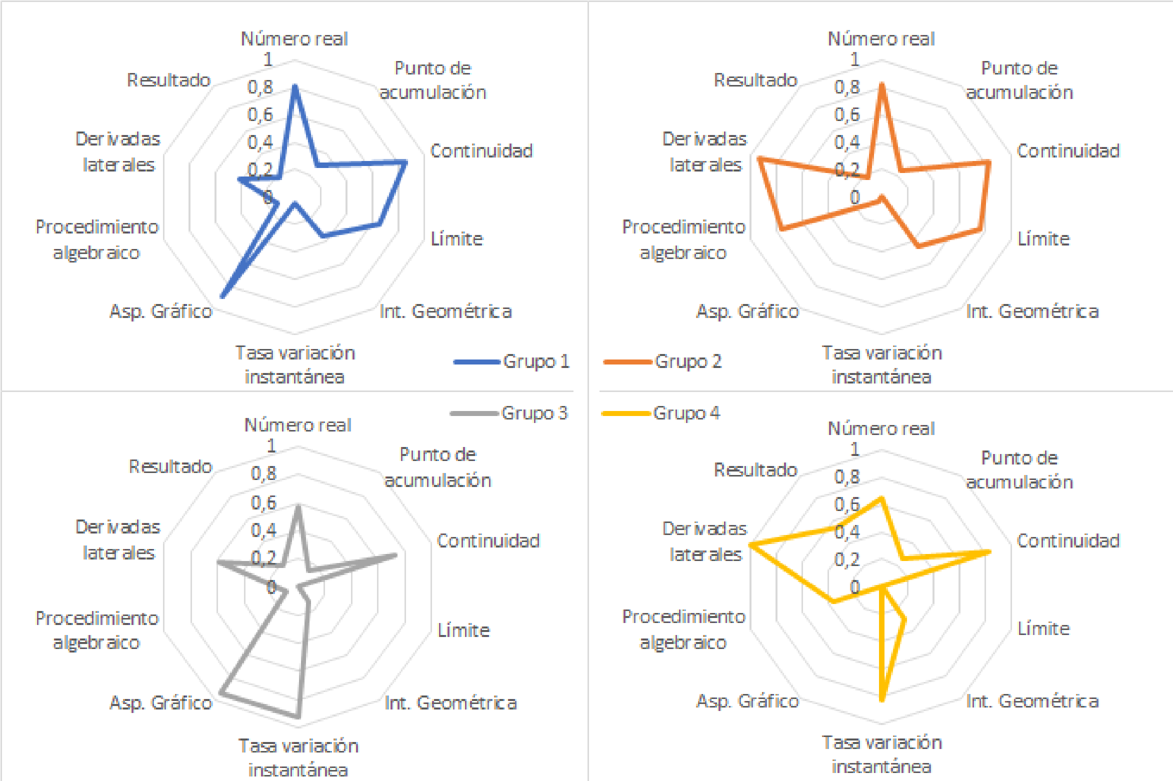



*Figura 6.11*. Caracterización de los perfiles obtenidos

Los grupos 1 y 2 se caracterizan por definir la derivada de una función en un punto mediante un límite, aunque algunos aceptan su interpretación geométrica como una definición valida. Sin embargo, difieren en la vía de argumentación elegida para pregunta de verdadero o falso; pues el grupo 1 recurre fundamentalmente a un aspecto gráfico, mientras que el grupo 2 eligió la noción de derivadas laterales, o bien, un procedimiento algebraico.

De forma similar, los grupos 3 y 4 coinciden en que prefieren definir la derivada de una función en punto como la tasa de variación instantánea, aunque en el grupo 4 algunos también la reconocen como la pendiente de la recta tangente. Pero nuevamente, su principal diferencia está en su forma de argumentar, ya que el grupo 3 casi todos se basan en un aspecto gráfico, utilizando también derivadas laterales; pero en el grupo 4 las derivadas laterales son el principal medio de argumentación utilizado, además son el único grupo en el que aparece el empleo de resultados.

## 6.6. Síntesis

Las cuatro preguntas planteadas y el análisis de los comentarios registrados nos permitieron examinar algunas ideas que el profesorado tiene sobre la derivada de una función en un punto, aproximándonos a la forma en la que entienden algunos aspectos y los elementos que más destacan. En la primera pregunta, pese a la incompletitud de algunas de las definiciones presentadas, destaca que todas hayan sido consideradas como correctas por algunos docentes. Los comentarios que hicieron al respecto pusieron de manifiesto que su definición de derivada coincide principalmente con la tasa de variación, o como el límite del cociente incremental; y aunque muchos aceptan la definición como pendiente de la recta tangente, en preguntas posteriores se observó que algunos se oponen a que ambas nociones se confundan o sean tratadas como sinónimos. De hecho, en la pregunta 3, la definición como la pendiente de la recta tangente fue la menos elegida, tanto como definición personal como la utilizada para enseñanza.

Por otra parte, en la pregunta 1, algunos docentes también mencionaron requisitos y condiciones necesarias para que se pueda definir la derivada de una función en un punto, principalmente la existencia del límite que define a la derivada y la necesidad de que la función sea continua en el punto; sin embargo, con la pregunta 2, esto fue más evidente, pues se pudo apreciar que el hecho de que la derivada en un punto es un número real y que la función debe ser continua, son aspectos necesarios o al menos relacionados con la derivada para la mayoría de los participantes; sin embargo, sorprende que el punto de acumulación haya sido considerado como aspecto necesario por muy pocos.

Con la pregunta tres, también se pudo apreciar que los docentes suelen enseñar su propia definición de derivada, y que la forma de introducir el concepto varía de un docente a otro. Además, algunos mencionaron que la tasa de variación y la pendiente deben verse como aplicaciones o interpretaciones y no confundirse con la definición.

La pregunta 4 puso de manifiesto que, en ocasiones, los docentes en activo cometen errores similares a los expuestos por los docentes en formación. Un aspecto interesante es que varios de los argumentos mostrados eran erróneos; sin embargo, muchos de los comentarios de los docentes se centraron en aspectos bastantes superficiales, como indicar que no se hacía explícito que se trataba de la derivada en un punto, o que no se decía directamente que la función no era derivable en el punto, sin realmente detectar el fallo del argumento.

Por otra parte, se detectó una confusión entre la idea de derivadas laterales con el límite lateral de la función derivada; o bien, que el profesorado considera la no continuidad de la función derivada como un argumento concluyente sobre la derivabilidad de la función. Un aspecto que coincide con los resultados de la fase 1 es la poca recurrencia que se hace a la definición de derivada de una función en un punto; en el segundo enunciado, por ejemplo, al contarse con la fórmula que define la función era esperable que al preguntar por otro argumento apareciera el uso de la función; sin embargo, tal como se pudo observar pocos se refirieron a esta.

# CAPÍTULO 7

# Comparación de resultados obtenidos en las distintas fases del estudio

En este capítulo realizamos una breve comparación entre los resultados obtenidos en cada una de las fases. Utilizamos las síntesis de resultados recogidas en los apartados 4.5., 5.5. y 6.6. (páginas 125, 145 y 170, respectivamente), centrando la atención en aquellos aspectos que los asemejan o diferencian. Somos conscientes de las particularidades de cada estudio, por lo que no podemos compararlos en muchos aspectos. Sin embargo, nuestra intención es, como se recoge en los objetivos, determinar si existe alguna relación entre los significados puesto de manifiesto sobre la derivada de una función en un punto, enfatizando en aquellos aspectos que destacaron en cada fase o estudio.

Para organizar el capítulo, primero compararemos los estudios realizados con docentes en formación y docentes activos (fase 1 y 3) y, posteriormente, señalamos algunas semejanzas de estas dos fases con el significado que se pone de manifiesto en los libros de texto (comparación de la fase 2 con la 1 y la 3). Finalizamos con una síntesis comparativa en términos de las tres componentes del significado.

## 7.1. Comparación de los resultados de las fases 1 y 3

Dada la metodología empleada en ambas fases y los instrumentos utilizados para la recogida de datos, la comparación se puede realizar en tres sentidos:

- La forma en la que se define la derivada de una función en un punto.
- La argumentación empleada en la tarea de verdadero o falso.
- Los perfiles de respuesta identificados que permiten visualizar el significado de derivada con el que operaron al responder.

Tal como se comentó en la fase 3, una de las primeras diferencias detectadas tiene que ver con la forma de definir la noción de derivada de una función en un punto. La mayoría de los docentes en formación hizo referencia a la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente; aunque dicha definición fue bien valorada por los docentes de la fase 3, lo cierto es que estos prefieren definir la derivada como la tasa de variación media o instantánea, o bien, como el límite del cociente incremental. De hecho, la definición como pendiente de la recta tangente fue la menos elegida por los docentes, tanto para su definición de derivada, como la que utilizan en la enseñanza. No obstante, en ambas fases se aprecia que definir la derivada como pendiente de la recta tangente es la forma más fácil de visualizar el concepto.

Aunque los docentes en formación y los docentes en ejercicio definen la derivada de forma diferente, una similitud es que en ambos estudios los participantes aceptaron expresiones bastante imprecisas (incluso, en ocasiones, incorrectas) como posible definición de derivada en un punto. Asimismo, en ambas fases sobresale el poco protagonismo dado a los requisitos o condiciones necesarias para una definición formal. Aunque reconocemos que algunos participantes los mencionan al definir, lo cierto es que no parece que les otorguen mayor relevancia. Incluso se observó que la condición de continuidad fue mal utilizada, principalmente en la fase 1, con profesorado en formación, donde algunos la emplearon como condición suficiente para la derivabilidad.

En ese sentido, el cuestionario aplicado a los docentes en activo incluía una pregunta en la que se hacía referencia a estos requisitos de forma explícita: los resultados mostraron que, al menos, los requisitos de “continuidad de la función” y que “la derivada en un punto es un número finito”, son aspectos importantes para la mayoría. No obstante, esto no ocurre con el requisito de que “el punto en el que se define sea de acumulación”, pues este fue considerado por muchos como un aspecto sin relación con la derivada. Lo anterior es muy interesante, pues como se mencionó, el no tomar en cuenta este requisito llevó a los futuros docentes a considerar una función de dominio discreto como derivable.

Por su parte, la tarea de verdadero o falso nos permitió identificar diferencias en cuanto al tipo de argumento que emplean para justificar tareas sobre la derivada. Por ejemplo, en la primera fase, para el enunciado en el que la función presentaba una recta tangente vertical (ver figura 7.1), los futuros docentes recurrieron principalmente al cálculo de la expresión de $f'(x)$, mientras que en la fase 3, los participantes apelaron más al aspecto gráfico. De forma similar, en el enunciado que se cuestionaba la derivabilidad en un máximo local (ver figura 7.1), en la fase 1 predominó ahora el aspecto gráfico o el uso de un resultado, mientras que en la fase 3 destacó el cálculo de los límites laterales de la derivada, lo que, como se señaló, muchos confundieron con las derivadas laterales. Por otra parte, el análisis permitió apreciar que los futuros docentes se apoyaron en varios argumentos erróneos y hasta inventados por ellos mismo, lo cual sucedió menos en la fase 3, probablemente por la posibilidad de elegirlos y haberlos valorado previamente, en lugar de tener que proporcionar un argumento propio.

( ) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, tiene por gráfica la que se muestra en la figura 1. La recta $m$ es tangente a la curva en $x = 1$; de esta forma es fácil asegurar que $f$ es derivable en ese punto.

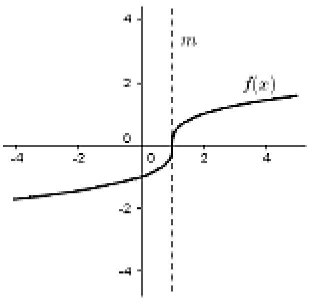



*Figura 1.* Gráfica de $f$

( ) Para la función $g$, cuya gráfica se muestra en la figura 1

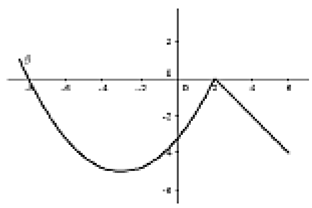


*Figura 2.* Gráfica de $g$

Se puede afirmar que como $g$ tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $g'(2) = 0$.

*Figura 7.1.* Enunciados presentes en ambos instrumentos

En esa misma línea, en la primera fase se apreció que los argumentos de los futuros docentes no presentaban el suficiente respaldo, y que incluso en algunos casos era incorrecto. Aunque en la fase 3 los participantes no tenían que plantear el argumento, sino elegirlo, al pedirles comentar porqué el argumento no era suficiente o válido, se puso de manifiesto precisamente algunas formas de respaldar el argumento, observándose que los comentarios u observaciones hechas seguían representando un respaldo insuficiente, pues la mayoría enfatizaron en aspectos como: mencionar que la función es continua, especificar que se trata de la derivada en un punto, o explicitar que el límite que define la derivada debe existir; pero pocas veces precisaron en el fallo del argumento, limitándose más a aspectos de “leguaje o escritura” que al elemento que estaba mal en el argumento presentado.

Por otra parte, la pregunta de verdadero o falso también nos permitió identificar algunas similitudes, ya que se pudo apreciar que en ambos grupos utilizan y aplican erróneamente algunas nociones o propiedades. Por ejemplo, en las dos fases se puso de manifiesto que hay confusión sobre la relación existente entre derivabilidad en un punto y la continuidad de la función derivada en ese punto; pues en ambos grupos se utilizó como argumento la no continuidad de $f'(x)$ para justificar la no derivabilidad de la función en un punto. Esto fue aún más evidente en la fase 3. No obstante, como se señaló, en esta fase se identificaron menos fallos en los argumentos.

Esas diferencias se aprecian también en los perfiles identificados mediante el análisis clúster desarrollado en cada fase. En la fase 1 se determinaron 3 grupos, en los cuales, pese a sus diferencias los aspectos más destacados eran: la interpretación geométrica como la definición de derivada, y el uso de resultados y aspectos algebraicos para argumentar. Mientras que en la fase 3, los 4 perfiles recalcaron: la definición mediante el límite, y al argumentar optan por aspectos gráficos y el cálculo de las derivadas laterales.

En términos generales, se puede observar que existe cierto cambio en la forma en la que se concibe la derivada de una función en un punto. Muchos de los docentes de la fase 3, identificaron sin problema los errores cometidos por los futuros docentes en la fase 1. De alguna forma podría suponerse que con la experiencia se han corregido confusiones o malinterpretaciones respecto a la noción. Además, los comentarios realizados en las distintas preguntas del cuestionario ponen de manifiesto que los docentes en activo prestan más atención, o se preocupan más por la formalidad y rigurosidad en las expresiones matemáticas.

## 7.2. Comparación de los resultados de la fase 2 con las otras fases

Pese a las particularidades de cada estudio y la naturaleza de estos, la comparación en este apartado puede realizarse en al menos dos sentidos:

- La definición de derivada de una función en un punto y su interpretación geométrica.
- Las tareas propuestas en los libros y las planteadas por los futuros docentes.
- Los perfiles del significado dado a la derivada en cada estudio.

El análisis de las tareas propuestas en los libros de texto fue lo suficientemente amplio como para identificar un único significado de derivada de una función en un punto que se ponga de manifiesto. Un aspecto interesante, y comparable con los resultados de las otras fases, es el poco uso e importancia que se le da a la definición de derivada en un punto. En los libros de texto, los ítems que abordan la definición de derivada no superan el 10%. No resulta sorprendente, en consecuencia, que los docentes no recurran a esta como una herramienta al resolver tareas. De hecho, que los libros de texto se centren en las reglas de derivación puede influir en comentarios como el del docente P62 quien destacó que no veía necesidad en ninguna de las tres definiciones de derivada, si al final los estudiantes aprenden las reglas de derivación; pues en efecto, pareciera que este es el aspecto central en este tópico.

Como indicamos anteriormente, los docentes en formación enfatizaron mucho la interpretación geométrica de la derivada; sin embargo, este aspecto parece tener menos relevancia tanto para los libros de texto, como para los docentes que imparten lecciones. En los libros de texto, nuevamente menos del 10% de las tareas propuestas abordan la derivada como la pendiente de la recta tangente. Asimismo, menos del 25% de los docentes prefirió esta forma para definir la derivada en un punto con sus estudiantes, lo que llama la atención pues, tal como señalaron algunos docentes la interpretación geométrica es una buena manera de visualizar el concepto, pero no parece involucrarse en la resolución de tareas.

Por otra parte, en el primer estudio (fase 1) se incluyó una pregunta en la que los docentes debían redactar una tarea sobre derivada, hallándose varias similitudes y diferencias con el análisis realizado a los libros de texto. Por ejemplo, en ambos casos las tareas propuestas se caracterizan por encontrarse en situaciones principalmente matemáticas; sin embargo, los docentes en formación mencionaron también la aplicación en la física, lo cual no ocurre en los libros de texto, pues los ítems en esa línea fueron muy escasos. Asimismo, los docentes propusieron mayormente tareas en contextos geométricos, y aunque en los libros este contexto también tuvo relevancia, lo cierto es que predominó el algebraico.

En esa línea, notamos que los futuros docentes plantearon muy pocas tareas sobre las reglas de derivación. De hecho, los docentes en formación se centraron en proponer problemas en situaciones matemáticas, laborales o físicas; no obstante, en los libros de texto la resolución de problemas representa solo un 10% de los ítems planteados. Pese a las diferencias en cuanto a contenido y situación de las tareas, en ambos casos la mayoría de las tareas planteadas se clasifican, según la demanda cognitiva, como un procedimiento sin conexión, en donde el énfasis está en la aplicación correcta de procedimientos y reforzar la capacidad de realizar operaciones y manejar el lenguaje simbólico. Hay que reconocer que, enfrentar al estudiante mayormente a este tipo de tarea no supone para él una demanda importante, ni requerirá de una comprensión importante sobre la noción de derivada, pues le bastará la aplicación correcta de procedimientos.

También, destacamos la poca relevancia dada a los resultados y propiedades en los libros de texto, donde los ítems de justificar y explicar representan poco menos del 7%, algo interesante pues tal como se aprecia en los resultados de la fase 1 y 3, los docentes manifiestan fallos al utilizar resultados en la argumentación, por lo que sugerimos que debería ampliarse en los libros de texto permitiendo al estudiantado utilizar estas propiedades y no solo enfocarse en procesos mecánicos.

En términos generales, los perfiles detectados en cada fase y la comparación aquí presentada nos dejan ver que, más allá de los errores evidenciados, la derivada se maneja como un concepto meramente matemático, en donde a su definición se le da poca utilidad, teniendo más relevancia los procedimientos o propiedades que pueden aplicarse de manera directa en la solución de tareas.

## 7.3. Síntesis

Sin duda alguna, pese a sus diferencias, los significados dados a la derivada en un punto en los tres estudios realizados guardan semejanzas importantes, la tabla 7.1 sintetiza algunas similitudes y diferencias en cuanto a los tres componentes del significado.

Tabla 7.1. *Algunas similitudes y diferencias de significado entre las fases*

| *Componente* | *Fase 1* | *Fase 2* | *Fase 3* |
|---|---|---|---|
| Estructura conceptual | Definición mediante pendiente de la recta tangente | Poco uso de la definición de derivada | Definición como tasa de variación instantánea |
| | Poca relevancia a los requisitos y condiciones | Poca referencia a los requisitos y condiciones | Poca relevancia a los requisitos y condiciones (aunque tuvo más representación) |
| | Predominio del uso de resultados | Predominio de elementos algebraicos (reglas de derivación) | Predominio del aspecto gráfico y las derivadas laterales |
| Sistemas de representación | Verbal y simbólico | Verbal y simbólico | |
| Sentidos y modos de uso | Situaciones matemáticas y físicas | Situaciones matemáticas | |
| | Contexto geométrico | Contexto algebraico | |

De esta forma, en cuanto a la *estructura conceptual*, podemos señalar las diferencias al definir la derivada en un punto, y la poca referencia que se hace a sus requisitos y condiciones. Además, el escaso uso de la definición para resolver tareas que involucran la derivada. En lo que tiene que ver con la argumentación y la forma de razonar al resolver tareas, se aprecia un cambio en los aspectos que los futuros y actuales docentes emplean como base del argumento. Asimismo, se aprecian algunos fallos o errores al usar propiedades y resultados. En ese sentido, en los libros de texto, la argumentación y justificación tienen poca presencia, por lo que no se fomenta el uso de propiedades para resolver tareas.

Respecto a los *sistemas de representación*, es cierto que fue uno de los componentes menos abordados; sin embargo, hay aspectos que pueden extraerse. Pese a la relevancia que dieron los futuros docentes a la interpretación geométrica y la riqueza de las tareas que utilizaban el sistema de representación gráfico o tabular, los resultados muestran una preferencia en el uso del sistema verbal y simbólico.

Finalmente, en cuanto a los *sentidos y modos de uso*, es claro que la derivada es una noción cuya utilidad se visualiza dentro de la propia matemática, en contextos relacionados con el estudio de funciones (monotonía y extremos), o bien, con el cálculo de la función derivada haciendo uso de las reglas de derivación. Esto merece atención, pues sin duda el significado de la derivada va más allá, pero su aplicación en problemas reales y en diversos campos no sobresalió.

# CAPÍTULO 8

# Conclusiones y discusión

En este último capítulo se presentan algunas conclusiones y reflexiones finales acerca del trabajo realizado. Para ello, en primer lugar, discutimos el logro de cada uno de los objetivos propuestos; posteriormente, realizamos una reflexión general acerca de lo que, desde nuestra perspectiva constituye el aporte del estudio. Finalmente, detallamos algunas dificultades que se presentaron a lo largo de la realización de la tesis y planteamos algunas líneas de investigación que darían continuidad al trabajo desarrollado.

## 8.1. Discusión y logro de los objetivos

En esta tesis nos propusimos como objetivo general: analizar el significado que tiene el concepto de derivada para los profesores de matemáticas de 1º de bachillerato. Para el cual planteamos 5 objetivos específicos. A continuación, discutimos el logro de cada uno de ellos.

***Objetivo específico 1:*** *Describir el significado que atribuyen los futuros profesores al concepto de derivada de una función en un punto.*

Para abordar este objetivo realizamos el primer estudio (fase 1), en el cual utilizamos un cuestionario semántico compuesto por 3 tareas o preguntas. Tal como señalamos en su apartado correspondiente, el análisis de las respuestas dadas nos permitió examinar elementos de los tres componentes de la terna semántica: estructura conceptual, sistemas de representación, y sentidos y modos de uso; lo cual sintetizamos en el apartado 4.5. (página 125). Además, la creación e identificación de los distintos perfiles del significado de la derivada que se pusieron de manifiesto nos permite asegurar que el objetivo se alcanzó satisfactoriamente. Presentamos ahora algunas conclusiones y reflexiones basados en los resultados obtenidos.

Tras preguntarles sobre la definición de derivada (primera pregunta del cuestionario), nos encontramos que la mayoría de los participantes aluden a la derivada mediante su interpretación geométrica (como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto), lo que coincide con los resultados mostrados en otros trabajos, como el de Bingolbali y Monaghan (2008), aunque dicho estudio se realizó con estudiantes. En nuestro caso, los docentes en formación aún son estudiantes de posgrado.

Un aspecto destacable es que muchas de las definiciones dadas por los futuros docentes están escritas de una manera muy imprecisa. La mayoría de ellos ignora los elementos y requisitos esenciales para definir la derivada en un punto (ser un punto de acumulación, por ejemplo). Estos aspectos, aunque simples, nos advierten que la definición de derivada no es manejada adecuadamente por los docentes en formación, pues esto, como se apreció también en el análisis desarrollado, los lleva a cometer errores argumentativos, considerando derivable una función de dominio discreto (Vargas et al., 2018a)

En menor medida, examinar las definiciones dadas también nos permitió identificar parte de la notación y los términos más utilizados por los futuros docentes, así como algunos sistemas de representación. Pese a la variedad de términos utilizados, lo cierto es que pendiente y recta tangente son los que predominaron. En cuanto a la notación de derivada, esta emergió de forma natural en algunos casos, aunque tampoco se utilizó mucho; incluso quienes definieron la derivada mediante el límite del cociente incremental en su forma simbólica, no sintieron necesidad de utilizar la noción de derivada y les bastó con la expresión del límite.

Por otra parte, el análisis de las respuestas dadas a la tarea de verdadero o falso (segunda pregunta del cuestionario) permitió identificar, en los cuatro enunciados propuestos, argumentos sin validez en el contexto dado, muchas veces por no considerar precisamente los requisitos o condiciones para que una función sea derivable en un punto. En el enunciado

3, por ejemplo, muchos afirmaron incorrectamente que la existencia de un extremo local implica que el valor de la derivada en ese punto es cero, cuando en el caso mostrado la función ni siquiera es derivable en el punto. Este tipo de respuestas nos permiten notar que, aunque los docentes en formación recuerdan algunos resultados fundamentales, estos no se manejan correctamente. En términos generales notamos que la no validez de los argumentos tiene principalmente dos orígenes: uso de resultados inventados por los participantes o el considerar como verdaderas implicaciones contrarias o recíprocas de algunos procedimientos o resultados (Vargas et al., 2020a).

Otro aspecto interesante es que muchos "resultados" (no siempre verdaderos) o propiedades son aplicados sin necesidad de respaldo o mayor justificación, tanto en aquellos argumentos válidos como en los que no. Incluso, tal como se detalló en los resultados, el respaldo presentado no siempre era suficiente o adecuado. Por ejemplo, de nuevo en el enunciado tres, algunos participantes indicaron que la función no era derivable en ese punto, debido a que en los "picos" (vértices) de una gráfica la derivada no estaba definida, lo cual es un resultado geométrico intuitivo que debería haber sido explicado o respaldado por personas con una formación académica en matemática (Vargas et al., 2019). Esto nos parece relevante, pues manifiesta una tendencia por parte de los docentes en formación a "buscar una regla" cuya aplicación de forma directa justifique su posición. Vemos como al igual que los estudiantes, los docentes en formación suelen reducir los argumentos a una sentencia única (Ortiz-May, 2018).

Un resultado notable es que, al argumentar la veracidad o falsedad de una declaración sobre la derivabilidad de una función en un punto, la definición rara vez se considera, teniendo mayor protagonismo el proceso algebraico del cálculo de la función derivada y diversas propiedades o resultados. De hecho, unos cuantos docentes en formación sintieron la necesidad de buscar la expresión algebraica de la función dada para poder justificar su posición. Otros incluso afirmaron que sin conocer la expresión algebraica no podían asegurar nada. Esto coincide con una de las conclusiones de Borji et al. (2018) quienes, tras una revisión de la literatura, señalaban que los estudiantes son capaces de hallar extremos de una función dada su forma algebraica, pero no son capaces de conceptualizar esta idea si no se les da la expresión algebraica, lo que los lleva a buscar primero esa representación simbólica.

Pese a que no era el foco de nuestro trabajo, es difícil pasar por alto los errores puestos de manifiesto al responder a esta segunda tarea. Por ejemplo, en el enunciado 2 (función de dominio discreto), la mayoría pasa por alto un requisito indispensable para poder definir la derivada en un punto: que el punto sea de acumulación. O en el cuarto enunciado (función discontinua), donde el aspecto algebraico pareciera tener más fuerza y credibilidad que la definición misma. Coincidimos con Boesen et al. (2010) en que las principales dificultades se deben a que los estudiantes, en nuestro caso de posgrado, se enfocan en aspectos superficiales. Fuentealba, Badillo, Sánchez-Matamoros, et al. (2019) ya han mostrado las distintas dificultades que se ponen de manifiesto al resolver problemas no rutinarios y que requieren de comprender el concepto de derivada; sin embargo, en nuestro caso, hemos evidenciado como estos problemas se presentan también en la justificación de tareas sencillas.

Finalmente, la tarea 3 fue un excelente complemento para analizar la forma en que los futuros docentes entienden la derivada de una función en un punto. Esta nos permitió identificar en qué aspectos ven la utilidad de este concepto, lo que desde nuestro marco teórico es fundamental para construir el significado. En este sentido, las tareas propuestas por los futuros docentes estaban mayormente relacionadas con la resolución de problemas; sin embargo, estas se presentaron en situaciones meramente matemáticas. Esto es algo a tomar en consideración, pues si los futuros docentes no conciben la derivada como una herramienta que resuelve problemas reales, lo que podemos esperar es que estos planteen contextos limitados en sus lecciones futuras (García et al., 2006). En ese sentido, los resultados indicaron que, en cuanto a la demanda cognitiva potencial de las tareas, predominó el procedimiento sin conexión. Por tanto, se considera que las expectativas y el conocimiento de los docentes influye en cómo estos configuran las tareas (Lee et al., 2016), dándonos alguna idea de cómo se concibe esta noción.

De esta forma, las 3 preguntas planteadas en el cuestionario nos dieron una aproximación de la forma en la que los futuros docentes entienden el concepto y los principales resultados de la derivada de una función en un punto, lo cual da respuesta al primer objetivo propuesto. A modo de conclusión, los perfiles identificados pueden entenderse como distintos significados o significados parciales con los que los docentes dieron respuesta a las tres tareas. De alguna manera, nuestros hallazgos respaldan lo expuesto por Likwambe y Christiansen (2008) para quienes las imágenes conceptuales sobre la derivada son limitadas, en las que se destacan solo algunos aspectos de la noción. Estos autores consideran además que esto se materializa en la elección de técnicas algebraicas y procedimientos, evidenciándose también alguna dificultad en la comprensión conceptual (Likwambe y Christiansen, 2008). Esto requiere tenerse en cuenta en la formación inicial y continua de los docentes, ya que, si no manejan aspectos conceptuales esenciales pueden surgir muchas otras dificultades. En nuestro caso se puso manifiesto que incluso la definición no se maneja adecuadamente.

***Objetivo específico 2:*** *Estudiar el significado de derivada que transmiten los libros de texto de 1º de bachillerato*

El segundo objetivo específico lo abordamos mediante la fase 2 analizando las tareas propuestas por 5 libros de texto de 1º de bachillerato. Aunque en el análisis incluimos aspectos sintácticos y cognitivos, además de los semánticos (significado), creemos que estos han reforzado el estudio, ya que han permitido visualizar mejor la idea de derivada que los libros de texto ponen de manifiesto. Los perfiles identificados y la síntesis mostrada en el apartado 5.5. (página 145) nos hacen creer que se alcanzó el objetivo.

Tras el análisis se pudo apreciar que los cinco libros siguen una tendencia bastante similar en cada uno de los aspectos considerados. Respecto los elementos *sintácticos*, notamos tareas cerradas, directas y planteadas para resolverse haciendo uso de papel y lápiz; esto último llama la atención, pues el uso de distintos recursos, como las tecnologías, no es muy fomentado y estudios reconocen que esto favorece el desarrollo de habilidades cognitivas (Bartau et al., 2017).

En relación con los elementos *semánticos*, podemos ver como los libros de texto fomentan una idea de derivada muy simbólica, donde el aspecto que más sobresale es su componente algebraica, lo cual podría llevar a creer que la derivada consiste principalmente en el cálculo de la función derivada, y que su utilidad se da dentro de la misma Matemática. De esta forma, no se promueve la visión de la matemática como una herramienta útil en el abordaje de situaciones reales, colocándola más bien como un conjunto de procesos mecánicos que se deben aprender.

En esta línea, en cuanto al ámbito *cognitivo*, predominan las tareas de cálculo (procedimiento sin conexión), en las que la capacidad que se fomenta es el uso de las operaciones y el lenguaje simbólico. Queda de cierta manera evidenciado que el principal objetivo es el aprendizaje de algoritmos, solicitándose más una ejecución que interpretación o análisis. Esto es algo a lo que debe dársele atención, pues Bergqvist y Lithner (2012) concluyeron que los estudiantes suelen recurrir a la memorización si se les expone repetidamente a tareas de baja demanda cognitiva. De hecho, algunos autores han demostrado que los estudiantes aprenden mejor, y obtienen mayor rendimiento académico, cuando se les involucra con tareas que demandan altos niveles de pensamiento y razonamiento (Smith y Stein, 1998). Sin embargo, en los libros el foco pareciera ser la reproducción de algoritmos.

Como mencionamos en el capítulo 1, para los docentes, además de la calidad de las tareas, la diversidad y variedad de estas es un aspecto fundamental de los libros de texto (Pepin, 1997). Sin embargo, el análisis clúster nos mostró que no hay mucha variedad, pues todos los ítems analizados conformaban tres grupos o tipos de tarea: uno simbólico-algebraico, un segundo geométrico y un tercero algorítmico; donde principalmente se favorecen los aspectos procedimentales (Vargas et al., en prensa-Bolema). Sin duda alguna, las reglas de derivación o el cálculo de valores extremos son contenidos que deben abordarse al estudiar la derivada, pero la comprensión del concepto, contemplando los distintos aspectos del significado, debe incluir, además:

- Variedad de demandas cognitivas, ya que altos logros de aprendizaje se asocian con tareas que involucran altos niveles de pensamiento y razonamiento (Smith y Stein, 1998). Por ejemplo, tareas de "hacer matemática", tienen poca presencia en los libros. Dentro de los grupos identificados se pueden observar algunos ítems cuya demanda es mayor (procedimientos con conexión o hacer matemática); sin embargo, consideramos que no constituyen un grupo predominante.

- Variedad de tipos de funciones para lograr los objetivos correspondientes a los procedimientos algebraicos. Consideramos que esto se recoge de manera adecuada en los libros de texto analizados.

- Variedad de sistemas de representación y conversiones entre ellos (Duval, 1999). Los resultados manifiestan que predomina la representación algebraica de una forma abrumadora.

- Variedad de contextos y situaciones que permitan dotar de sentido al concepto. No se completa el significado si carece de sentido, de un saber para qué se puede utilizar (Ruiz-Hidalgo, 2016). Un aprendizaje sin sentido es un aprendizaje a corto plazo, que no está relacionado con el desarrollo de la competencia matemática, cuya característica principal es la utilidad de las matemáticas solucionar problemas reales (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015). Los resultados son evidentemente negativos en este aspecto. Con las tareas propuestas estamos lejos del acercamiento al desarrollo de la competencia matemática.

Por lo tanto, creemos que es necesario que los libros de texto incorporen más tareas que permitan al alumnado apreciar realmente la utilidad e importancia que tiene el concepto de derivada; asimismo, que exploten otras herramientas y recursos que permitan estudiar el significado de la derivada de manera más enriquecedora (Vargas et al., en prensa-AIEM). En términos generales, pareciera que la enseñanza de la derivada se limita a aspectos que en realidad requieren de poca comprensión, pues se tratan más de procesos mecánicos. Sin embargo, como ya se ha reiterado, las tareas deben conducir a formas más rigurosas de pensamiento y razonamiento (Kessler et al., 2015).

Como ya se ha destacado, distintos autores han analizado la dificultad que presentan los estudiantes para comprender la derivada (p. e. Fuentealba, Badillo y Sánchez-Matamoros, 2019; Fuentealba, Badillo, Sánchez-Matamoros, et al., 2019; García-García y Dolores-Flores, 2019). Claramente la solución al problema no se reduce a mejorar o ampliar el tipo de tareas en los libros de texto, pero se debe tener presente que la naturaleza de las tareas a la que se enfrenta el alumnado determina en gran medida lo que estos aprenden (Smith y Stein, 1998), por lo que resulta ser un factor al que se debe prestársele atención. Debemos aclarar que en cada uno de los libros se hallan tareas bastante interesantes y de gran valor para el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada; sin embargo, en nuestra opinión, tras el análisis, estas deberían tener mayor presencia.

***Objetivo específico 3:*** *Describir el significado que tiene el concepto de derivada para los profesores de 1º de bachillerato.*

Para el logro de este objetivo realizamos el estudio de la fase 3, en el cual utilizamos un cuestionario cerrado compuesto de 4 preguntas que aplicamos en línea. Al igual que en las dos primeras fases, utilizamos el análisis clúster para determinar perfiles de respuestas dadas por cada participante, lo cual nos permitió visualizar la idea de derivada de una función con la que operaron, o al menos, la que se puso de manifiesto al responder. Estos perfiles y la síntesis de resultados incluida en el apartado 6.6. (página 170) nos permiten asegurar que se alcanzó el objetivo propuesto.

Con la pregunta 1 del instrumento (validar definiciones dadas a la derivada en un punto), pudimos apreciar que, si bien un grupo de docentes acepta definiciones erróneas o incompletas para la noción de derivada, otro grupo apela a la poca formalidad y rigurosidad de estas considerándolas incorrectas. No obstante, pese a que detectan que hay algún fallo en las definiciones no siempre son muy acertados en sus comentarios para corregirlos, pues la mayoría de las veces comentaron más sobre aspectos de redacción, que sobre los elementos matemáticos que estaban mal. Y aunque no es competencia de esta investigación, debe reflexionarse en las implicaciones que esto puede tener en la práctica docente.

Un aspecto que sobresale, que se observó en la pregunta 1, fue que más de la mitad de los docentes consideró correcto definir la derivada en un punto como la función derivada. Esto pudo deberse a un error al contestar, pero lo cierto es que pocos docentes hicieron la distinción entre ambas nociones. Esto coincide con hallazgos de otros autores; por ejemplo, Badillo et al. (2011) analizaron la comprensión que tienen los docentes sobre los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$, identificando ciertos errores o dificultades para coordinar ambas nociones. Asimismo, Pino-Fan et al. (2018, 2012, 2013), profundizando en el conocimiento didáctico-matemático de los futuros docentes desde el enfoque de la semiótica, evidenciaron una desconexión entre la noción de función derivada y derivada en un punto. Confusión que también se ha detectado en investigaciones con estudiantes (Vega et al., 2014).Y es que esto no es de extrañar ya que tal como mencionó Park (2015), en la enseñanza, suele pasarse de la derivada en un punto a la función derivada, simplemente cambiando $a$ por $x$.

Por otra parte, la pregunta 2 nos permitió detectar que los requisitos y condiciones para definir la derivada en un punto no son siempre considerados. De hecho, que se defina en un punto de acumulación es un aspecto que se pasa muy por alto. Esto es interesante, pues no se halló ningún estudio que haga alusión a esto; lo más próximo fue un resultado de Park (2013) quien detectó que los estudiantes no perciben la derivada como un número. Sin lugar a duda, al tratarse de la esencia de la definición de la derivada en un punto, es algo a lo que debe prestársele atención. Pues si en la propia definición se presentan confusiones o errores, es esperable que surjan muchas otras dificultades.

Un resultado que creemos importante de la pregunta 3, tiene que ver con que los docentes reconocen que acostumbran a enseñar su misma definición de derivada, frases como “es la que más entiendo”, “es la que aprendí” justifican este hecho. Esto confirma la importancia de este tipo de estudios, pues sin duda, tal como lo decía Thompson (2013), el significado con el que opera un docente constituye las matemáticas que enseñan e incluso que intenta que sus estudiantes tengan.

Finalmente, la pregunta 4, sirvió para identificar el tipo de argumento que prefieren los docentes, inclinándose por aspectos gráfico y el cálculo de las derivadas laterales. A diferencia de lo que evidencian otros estudios, fueron pocos los docentes que se inclinaron por aspectos procedimentales o algebraicos; de hecho, en los perfiles identificados, se detecta que este elemento argumentativo solo predominó en el grupo 2, el cual estaba compuesto por el 14% de los participantes.

De esta forma, aunque aún hay elementos del significado que deben analizarse, la fase 3 nos permitió aproximarnos al significado que dan los docentes a la noción de derivada en un punto. Permitiéndonos alcanzar nuestro tercer objetivo propuesto.

***Objetivo específico 4:*** *Determinar, si existe, la relación entre el significado de la derivada puesto de manifiesto por los profesores en formación y los profesores en activo.*

***Objetivo específico 5:*** *Determinar la relación entre los significados puestos de manifiesto por los profesores y los libros de texto de 1º de bachillerato.*

Dado que la intención de estos dos últimos objetivos era determinar alguna relación entre los resultados de las tres fases realizadas, nos referimos a su consecución de forma conjunta. En el capítulo 7 se identificaron algunas semejanzas y diferencias entre los significados de derivada de una función en un punto puestos de manifiesto en las tres fases del estudio. Esa comparación nos permite ver que existe cierta relación entre las fases, pues a pesar de que cada estudio tiene sus particularidades es posible hallar elementos en común; como, por ejemplo, la poca relevancia dada a la propia definición de derivada y sus requisitos. La comparación establecida nos lleva a considerar que estos últimos dos objetivos específicos también se alcanzaron satisfactoriamente.

En cuanto a los significados expresados por los futuros docentes y los docentes en activo, los resultados permiten apreciar que, de alguna forma, el significado manifestado por uno y otro grupo es diferente, pues incluso la forma en la que se define la derivada en un punto es distinta. Tal como señalan Kilpatrick et al. (2005), el significado que un docente expresa sobre un concepto matemático emerge de su conocimiento matemático, la forma en la que ve los problemas de su enseñanza y como lo implementa al enseñarlo. Por lo que se puede suponer que la experiencia docente ha influido y ha ido modificando la imagen de derivada que se tenía, produciendo una evolución de los significados que los modifica atendiendo al contexto o a la situación en la que nos encontremos.

Asimismo, tal como se comentó, en ambos estudios se detectaron ciertos errores al definir la derivada en un punto, o al argumentar sobre esta. Algunos autores consideran que una raíz del problema tiene que ver con darle prioridad a lo analítico, limitando el aprendizaje a una comprensión parcial e instrumental del concepto (p. e., Fuentealba et al., 2018). Esto llama la atención, pues sin duda alguna son los aspectos que más predominan en los libros de texto escolares analizados respecto a la derivada (Vargas et al., 2018b; Vargas et al., en prensa-AIEM). Esta visión procedimental de la matemática basada en la simple reproducción y aplicación de propiedades, tal como afirman Selden y Selden (1987), repercute negativamente en las habilidades de razonamiento. De ahí la importancia de reforzar un aprendizaje conceptual, más allá de la parte algorítmica, complementando con los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso, lo que desde nuestro marco permitiría significados más ricos.

No pretendemos culpabilizar a los libros de texto de los errores presentados, simplemente entendemos que son el reflejo de una tendencia generalizada. Incluso señalamos que los libros proponen tareas escolares muy interesantes, lo que pasa es que al determinar el significado dado a la derivada del conjunto de tareas (no una a una), lo que resalta es el componente algebraico y procedimental, y esto no favorece el aprendizaje de significados ricos sobre esta noción. Y esto sin duda influye, por ejemplo, Almeida y Silva (2018) concluyeron que el libro de cálculo que analizaron no ayuda en la distinción de derivada en un punto y función derivada, y tal como vimos, esta es una confusión que presentaron los docentes en activo. Por lo que es importante darle atención al significado de derivada que se presenta en los libros de texto utilizados en clase.

Aunque se requerirían de más estudios que confirmen y determinen el nivel de relación que se da entre los significados de la derivada identificados, lo cierto es que los resultados dan indicios de su relación y similitud.

## 8.2. Aporte del estudio

El trabajo desarrollado en esta tesis representa un aporte importante y un progreso a las investigaciones anteriores, no solo en la línea de la enseñanza de temas relacionados con el cálculo (p. e., Bressoud et al., 2016), sino también en muchos otros estudios sobre la comprensión y formación de docentes en contenidos matemáticos. Como señalamos al principio, la importancia de la investigación centrada en los significados radica en su utilidad diagnostica, pues la información puede ser útil para el desarrollo profesional de los docentes, lo cual podría ayudar a mejorar el aprendizaje de los estudiantes (Thompson, 2013).

En términos generales, el trabajo realizado pone de manifiesto la existencia de significados parciales sobre la derivada en un punto, los cuales, en su mayoría, se relacionan con su aspecto algebraico o geométrico (esto en las tres fases, es decir, tanto en futuros docentes, en docentes en activo y en libros de texto). Asimismo, tras el análisis se aprecian algunos errores o confusiones por parte de futuros y actuales docentes al responder a tareas sobre la derivada. Investigaciones previas ya nos advertían de algunas las dificultades que se presentan (p. e., Pino-Fan et al., 2018). Sin embargo, con nuestro trabajo corroboramos y proporcionamos otras evidencias sobre esto, además de otro tipo de dificultades presentes respecto al tema.

Por citar algunos de los resultados más llamativos, podemos mencionar los cambios identificados en el significado sobre derivada que pusieron de manifiesto los futuros docentes y los docentes en activo, en las respuestas dadas. Particularmente su forma de definir la derivada y argumentar sobre esta. Esa evolución o cambio no la hemos hallado en otras investigaciones, y aunque algunas de las preguntas del instrumento fueron modificadas, seguían una línea similar. Asimismo, pusimos de manifiesto la confusión que existe sobre derivadas parciales y los límites laterales de la función derivada. Además, de confundir la noción de función derivable en un punto con función derivada continua en ese punto.

Otro aspecto analizado, tiene que ver con el problema sobre derivada que plantearon los futuros docentes, lo cual se recoge en Vargas et al. (2020b). El diseño de tareas por parte de los maestros ha sido poco abordado, pues las investigaciones se han centrado más en cómo se plantean y organizan en clase, pero no en su diseño (Lee et al., 2016). Aunque nuestro no foco no era este, los resultados obtenidos merecen ser destacados. Pese a que la resolución de problemas fue el tópico central de las tareas propuestas por los futuros docentes, al igual que Stein y Lane (1996) consideramos que los docentes suelen reducir bastante el nivel de demanda potencial de la tarea, tratándose principalmente de procedimientos sin conexión. De esta forma, creemos que es necesario fomentar la práctica de plantear tareas, pues esta es una competencia que se desarrolla y mejora (Lee et al.,2016) y dado su rol en el proceso de enseñanza y aprendizaje, es de interés el planteamiento de tareas de alta demanda cognitiva, que como se discutió, son las que promueven un mejor aprendizaje.

Por otra parte, en cuanto al análisis de tareas propuestas en los libros de texto, esperamos que los resultados aquí presentados sirvan de reflexión a los docentes y les sean oportunos en la toma de decisiones al planificar sus lecciones. El análisis desarrollado puede ampliar la perspectiva docente sobre qué aspectos del contenido se enfatizan al trabajar con uno u otro libro de texto, permitiéndole, en la práctica docente, ampliar la riqueza de los significados que un solo libro expresa y así tener la posibilidad de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Sugerimos emplear los libros de texto complementando sus lecciones con tareas de tipos variados, con distintos niveles de demanda cognitiva, que enriquezcan la conversión entre diferentes sistemas de representación y que pongan de manifiesto la utilidad de la derivada más allá de las aplicaciones puramente matemáticas. En los libros de texto se proponen ejemplos de excelentes tareas que pueden servir de base, pero si deseamos enriquecer el significado de derivada y, consecuentemente favorecer el aprendizaje significativo, el profesorado debe procurar que estas tengan un mayor peso en el proceso de enseñanza, tomándolas en cuenta en el diseño de nuevas tareas.

Finalmente, nos gustaría recalcar las posibilidades que ofrece la noción de significado de un contenido matemático escolar utilizada como una herramienta para profundizar y caracterizar la comprensión de los docentes sobre diferentes temas. El análisis conceptual de contenido proporcionó una guía confiable sobre qué elementos buscar al estudiar los datos, para poder describir en detalle el significado que la derivada tiene para los docentes.

De igual forma, debemos señalar las potencialidades del sistema de categorías empleado en el análisis de las tareas propuestas por los libros de texto. Si bien es cierto estas categorías se ajustan y responden al objetivo que perseguíamos de identificar el significado de derivada, la variedad de aspectos considerados (sintácticos, semánticos y cognitivos) resulta ser una estructura exhaustiva como herramienta metodológica de investigación en el estudio de tareas escolares. Y pese a que nos hemos centrado en el contenido de derivadas, lo cierto es que el sistema de categorías es generalizable, con las adaptaciones necesarias atendiendo al contenido analizado y al nivel escolar correspondiente.

## 8.3. Limitaciones del estudio

Todo proceso de investigación enfrenta dificultades a lo largo de su desarrollo. Sin embargo, en nuestro caso ninguna supuso ser un obstáculo significativo para la realización de esta. Aunque creemos que la tesis se desarrolló de manera satisfactoria, consideramos que algunas limitaciones que merecen ser mencionadas son:

- La validez externa. El utilizar una muestra por disponibilidad no permite la generalización de los resultados, y aunque ese no era nuestro objetivo, puede valorarse como una limitación investigativa. Pese a ello, en cada estudio se utilizó una muestra considerable y, por ejemplo, en la fase tres hubo participación de todas las provincias de Andalucía, lo cual es destacable.

- Dado que el marco del significado de un contenido matemático escolar que utilizamos contempla una amplia variedad de elementos y componentes, resulta complicado poder abordarlos todos ellos en un solo estudio, por lo que muchos aspectos interesantes quedan fuera del análisis. Creemos que estos pueden ampliarse en posteriores estudios.

- En concordancia con el punto anterior, pese a que estamos satisfechos con los instrumentos empleados, lo cierto es que estos no favorecían el estudio de los sistemas de representación, siendo la componente menos estudiada. Asimismo, el instrumento utilizado en la tercera fase captó poco sobre los sentidos y modos de uso de la derivada. Por lo que es necesario profundizar en estos componentes.

- En la última fase, la participación de los docentes no fue la que hubiésemos querido. Nos habría gustado contar con las respuestas de muchos más docentes, pero no teníamos forma de asegurarnos que el enlace llegara a todos ellos. A esto se le suma otro factor: pese a que el instrumento se modificó para que no fuera tan extenso y no demandara mucho tiempo del docente, las respuestas registradas muestran que muchos abandonaron el instrumento sin siquiera completar la información general. Por lo que, aunque la modalidad empleada tuvo muchas ventajas, también supuso una desventaja en ese sentido.

## 8.4. Futuras líneas de investigación

Como señalamos en el apartado 8.2. (página 191) el trabajo aquí presentado constituye un aporte a las investigaciones que se han venido desarrollando respecto a la derivada de una función en un punto. Pero aún hay mucho más por estudiar, los resultados obtenidos dan paso a una serie de investigaciones que permitan profundizar y ampliar el estudio realizado. Entre ellas pueden mencionarse:

- Ampliar el estudio sobre la componente de sistemas de representación, analizando el uso y significado que se le da a estos respecto a la derivada de una función en un punto. Aunque ya se han realizado investigaciones en esa línea, pueden abordarse ahora como un componente dentro del significado dado al contenido y no como objetos aislados.

- La importancia que tienen las tareas escolares y los resultados obtenidos motivan a explorar más el significado dado a la derivada mediante el diseño de tareas propuestas por docentes en ejercicio. Sin duda da pie para que se aborde en un estudio completo y no solo como parte de uno. Esto permitiría además ahondar en los sentidos y modos de usos que dan los docentes en activo a la derivada.
- Profundizar en el razonamiento que emplean futuros y actuales docentes al resolver tareas que involucran a la derivada de una función en un punto. Esto es posible al estudiar los argumentos que brindan al justificar, es importante ampliar la investigación en esta línea, para ello puede plantearse distintas situaciones e intentar identificar patrones de argumentación a ciertos tipos de tarea.
- Aunque muchas investigaciones han puesto de manifiesto las dificultades que tienen docentes y estudiantes sobre la derivada, debe seguirse identificando errores y confusiones. Identificarlos nos da una base para tomar decisiones oportunas que permitan subsanarlos.
- Tal como señalamos, un resultado muy interesante de esta tesis tiene que ver con ese cambio de significado que se evidenció en las respuestas de los futuros y actuales docentes. Sin duda es un área en la cual merece la pena profundizar, lo cual permita corroborar esa evolución que se da y en qué medida. Para ello, podría emplearse el mismo instrumento con ambas poblaciones, ya sea cerrado o abierto, pero al ser el mismo permitiría identificar mejor el cambio.

# Referencias


Alkhateeb, M. (2019). The Language Used in the 8th Grade Mathematics Textbook. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(7), online. https://doi.org/10.29333/ejmste/106111

Almeida, L. M. W. y Silva, K. A. P. (2018). A semiotic interpretation of the derivative concept in a textbook. *ZDM Mathematics Education*, online. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0975-8

American Psychological Association. (2020). *Publication manual of the American psychological association* (7th ed.). https://doi.org/ 10.1037/0000165-000

Anderson, J. R. (1983). *The architecture of cognition*. Harvard University Press.

Anthony, G. y Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics*. International Academy of Education.

Antonio, M., González, L., Lorenzo, J., Malana, A., Del Rio, J., Santos, D. y De Vicente, M. (2015). *Matemáticas I. 1 Bachillerato*. Santillana.

Arias, J. M. y Maza, I. (2015). *Matemáticas 1 Bachillerato*. Bruño.

Ariza, A., Llinares, S. y Valls, J. (2015). Students' understanding of the function-derivative relationship when learning economic concepts. *Mathematics Education Research Journal*, *27*, 615-635. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0156-9

Aydin, U. y Ubuz, B. (2014). The thinking-about-derivative test for undergraduate students: Development and validation. *International Journal of Science and Mathematics Education*, online.

Azcárate, C. y Camacho-Machín, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 135-149.

Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M. T. y Moreno, M. (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM.* Universidad de la Laguna: Servicio de Impresiones.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f´(a) y f´(x) en profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191-206.

Balacheff, N. (1990). Towards a «problématique» for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(4), 259-272.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: An essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education*, *40,* 501-512. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0103-2

Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el Bachillerato. *Bolema, 31*(59), 1061-1081.

Baroody, A., Feil, Y. y Johnson, A. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38,* 115-131.

Bartau, I., Azpillaga, V. y Joaristi, L. M. (2017). Metodología de enseñanza en centros eficaces de la Comunidad Autónoma del País Vasco. *Revista de Investigación Educativa*, *35*(1), 93-112. https://doi.org/10.6018/rie.35.1.225141

Bazzini, L., Boero, P. y Garuti, R. (2001). Moving symbols around or developing understanding: The case of algebraic expressions. *Proceedings of the 25th PME International Conference*, *Vol. 2,* 121-128.

Bergqvist, T. y Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *Journal of Mathematical Behaviour*, *31*(2), 252-269.

Bergwall, A. y Hemmi, K. (2017). The State of Proof in Finnish and Swedish Mathematics Textbooks—Capturing Differences in Approaches to Upper-Secondary Integral Calculus. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(1), 1-18. http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2017.1258615

Bhaird, C. M., Nolan, B., O'Shea, A. y Pfeiffer, K. (2016). A study of creative reasoning opportunities in assessments in undergraduate calculus courses. *Research in Mathematics Education,* *19*(2), 147-162. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2017.1318084

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: The concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). Springer.

Bingolbali, E. y Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(1), 19-35.

Boesen, J., Lithner, J. y Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 89-105.

Borji, V., Alamolhodaei, H. y Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE Theory to improve Students' Graphical Understanding of Derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(7), 2947-2967. https://doi.org/10.29333/ejmste/91451

Brändström, A. (2005). *Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks: An analysis of the levels of difficulty* [Tesis licenciatura]. Lulea University of Technology.

Breen, S. y O'Shea, A. (2010). Mathematical Thinking and Task Design. *Irish Mathematical Society Bulletin*, *66*, 39-49.

Bressoud, D. M., Carlson, M. P., Mesa, V. y Rasmussen, C. (2013). The calculus student: Insights from the Mathematical Association of America national study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 685-698.

Bressoud, D. M., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. y Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus, ICME-13 Topical Surveys*. Springer.

Bruner, J. (1990). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Alianza.

Burgos, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de una variable* (Segunda edición). McGraw Hill.

Burns-Childers, A. y Vidakovic, D. (2017). Calculus students'understanding of the vertex of the quadratic function in relation to the concept of derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, online. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1409367

Byerley, C. y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Matheatical Behavior*, *48*, 168-193.

Cai, J. y Jiang, C. (2017). An Analysis of Problem-Posing Tasks in Chinese and US Elementary Mathematics Textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 1521-1540. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9758-2

Cardona, S. y Rey, J. (2015a). *Bachillerato 1. Matemáticas. Práctica*. Editorial Edelvives.

Cardona, S. y Rey, J. (2015b). *Bachillerato 1. Matemáticas. Teoría*. Editorial Edelvives.

Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: Su evolución tras décadas de investigación. *Revista Educación*, *374*, 43-68. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2016-374-325

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Horsori.

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L. y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics*, *92*, 129-146.

Chang, B., Cromley, J. G. y Tran, N. (2016). Coordinating Multiple Representations in a Reform Calculus Textbook. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 1475-1497. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9652-3

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (Séptima edición). Routledge.

Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Bachillerato 1. Matemáticas I*. Grupo Anaya.

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012). Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Bolema, 26*(42B), 667-690.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

Dewey, J. (1910). *How we think*. D. H. Heath.

Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. D. H. Heath.

Dolores-Flores, C. y García-García, J. (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: Un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Bolema*, *31*(57), 158-180. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Dummett, M. (1999). La teoría del significado en la filosofía analítica. *Cuaderno gris, 4,* 91-102.

Duval, R. (1990). Pour une approche cognitive de l`argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *3*, 195-221.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Edwards, B. S., Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 15-25.

Epstein, J. (2013). The calculus concept inventory: Measurement of the effect of teaching methodology in mathematics. *Notices of the AMS*, *60*(8), 1018-1026.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 765-777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2013). Concept of Finite Limit of a Function at a Point: Meanings and Specific Terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 699-710. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.805887

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación matemática IX* (pp. 111-128). SEIEM.

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, *100*, 25-50.

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Springer.

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez-Matamoros, G. (2018). Puntos de no-derivabilidad de una función y su importancia en la comprensión del concepto de derivada. *Seçao: Artigos*, *44*, online. http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201844181974

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(2), 63-84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G. y Cárcamo, A. (2019). The Understanding of the Derivative Concept in Higher Education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(2), online. https://doi.org/10.29333/ejmste/100640

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E. y Trigueros, M. (2016). Thematization of derivative schema in university students: Nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, online. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de los profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, *9*(1), 85-116.

García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(3), 219-235.

García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2019). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, online. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x

Godino, J. (2018). *Bases epistemológicas e instruccionales del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática.* http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_epins_EOS.pdf

Golding, G. A. y Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Golding y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Erlbaum.

Gómez, P. y Romero, L. (2015). Enseñar matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 61-88). Pirámide.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemática. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(3), 389-408.

González-Martín, A. S., Giraldo, V. y Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: An institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2013.803778

Grice, H. P. (1957). Meaning. *Philosophical Review*, *66*, 377-388.

Groetsch, C. W. (2001). Teaching-Inverse problems: The other two-thirds of the story. *Quaestiones Mathematics*, *24*(1), 89-94.

Hadar, L. L. y Ruby, T. L. (2019). Cognitive opportunities in textbooks: The cases of grade four and eight textbooks in Israel. *Mathematical Thinking and Learning*, online. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1564968

Härdle, W. y Simar, L. (2015). *Applied multivariate statistical analysis* (Cuarta edición). Springer.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students´ proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). American Mathematical Society.

Harel, G. y Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 27-50.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (Cuarta edición). McGraw Hill.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (Quinta edición). McGraw Hill.

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. P. (2008). El matrimonio cuantitativo cualitativo: El paradigma mixto. *6º Congreso de Investigación en Sexología*.

Herrera, M., Velasco, M. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2017). Comparando textos de cálculo: El caso de la derivada. *PNA*, *11*(4), 280-306.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and* (pp. 65-97). MacMillan.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: The case of Mathematics* (pp. 1-28). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. L. (2007). Assessing Teachers' Mathematical Knowledge: What Knowledge Matters and What Evidence Counts? En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics.* (Segunda edición, pp. 111-155).

Hine, G. (2015). Strengthening pre-service teachers' mathematical content knowledge. *Journal of University Teaching and Learning Practice*, *12*(4). https://ro.uow.edu.au/jutlp/vol12/iss4/5

Howson, A. G. (2005). «Meaning» and school mathematics. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 17-35). Springer.

Jaworski, B. (2015). Mathematical meaning-making and its relation to design of teaching. *PNA*, *9*(4), 261-272.

Jiménez, A. (2017). *Significados de la derivada en las pruebas de evaluación de bachillerato para el acceso a la universidad* [Trabajo Fin de Máster]. Universidad de Granada.

Johnson, B. R., Onwuegbuzie, A. J. y Turner, L. A. (2007). Toward a definition mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research*, *1*(2), 112-133.

Jones, R. (2018). Students' Application of Concavity and Inflection Points to Real-World Contexts. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9876-5

Kaput, J. (1987). Representational systems and mathematics. En *Problems of repre¬sentation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kessler, A. M., Stein, M. K. y Schunn, C. D. (2015). Cognitive Demand of Model Tracing Tutor Tasks: Conceptualizing and Predicting How Deeply Students Engage. *Technology, Knowledge and Learning*, online. https://doi.org/10.1007/s10758-015-9248-6

Khalloufi-Mouha, F. y Smida, H. (2012). Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artefact. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 207-224. http://dx.doi.org/10.1080/10288457.2012.10740740

Kilpatrick, J., Hoyles, C. y Skovsmose, O. (Eds.). (2005). Meanings of meaning of mathematics. En *Meaning in Mathematics Education* (pp. 9-16). Springer.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press.

Knipping, C. y Reid, D. (2013). Revealing structures of argumentations in classroom proving processes. En A. Aberdein y I. Dove (Eds.), *The argument of mathematics* (pp. 119-146). Springer.

Koleza, E., Metaxas, N. y Poli, K. (2017). Primary and secondary students' argumentation competence: A case study. En Dooley, T y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 179-186). DCU Institute of Education and Erme.

Lee, K. H., Lee, E. J. y Park, M. S. (2016). Task Modification and Knowledge Utilization by Korean Prospective Mathematics Teachers. *Pedagogical Research*, *1*(2). http://dx.doi.org/10.20897/lectito.201654

Likwambe, B. y Christiansen, I. M. (2008). A Case Study of the Development of In-service Teachers' Concept Images of the Derivative. *Pythagoras*, *68*, 22-31. https://doi.org/10.4102 / pythagoras.v0i68.64

Lithner, J. (2003). Students´ mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 29-55.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 225-276. https://doi.org/10.1007/sl0649-007-91

Margolinas, C. (Ed.). (2014). Introduction. En *Task Design in Mathematics Education. In Proceedings of ICMI Study 22*. ICMI.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(3), 51-71. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871 I

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2019). Meaning and Understanding of School Mathematical Concepts by Secondary Students: The Study of Sine and Cosine. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(12), online. https://doi.org/10.29333/ejmste/110490

Maschietto, M. (2004). The introduction of calculus in 12th grade: The role of artefacts. *Proceedings of the 28th Conference of the International. Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 273-280.

Mason, J. y Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 135-161. https://doi.org/10.1023/A:1003622804002

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods*. Springer.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa: Una introducción conceptual* (Quinta edición). Pearson Educación, S. A.

Metaxas, N., Potari, D. y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher's pedagogical arguments using Toulmin's model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 383-397.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial de Estado*, *37*(3), 169-546.

Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 139-160. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9184-2

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-257). Pirámide.

Morgan, C. y Kynigos, C. (2017). Digital artefacts as representations: Forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(3), 357-379. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9523-1

Moru, E. K., Qhobela, M., Poka, W. y Nchejane, J. (2014). Teacher knowledge of error analysis in differential calculus. *Pytha*, *35*(2), online. http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v35i2.263

Noh, J. y Kang, O. (2007). Exploring the idea of curriculum materials supporting teacher knowledge. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-23). PME.

OECD. (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy*. OECD Publishing.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing Dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(4), 396-246.

Ogden, C. K. y Richards, I. A. (1923). *The Meaning of Meaning*. Harcourt, Brace y World, Inc.

Onrubia, J., Rochera, M. J. y Barberà, E. (1990). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: Una perspectiva psicológica. En J. Palacios, A. Marchesi y C. Coll (Eds.), *Desarrollo psicológico y educación* (Vol. 2, pp. 487-508). Alianza.

Ortiz-May, D. (2018). Comparaciones entre argumentos formales e informales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García-García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 437-446). SEIEM.

Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 624-640. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.795248

Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics*, *89*, 233-250. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9601-7

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *91*, 395-421. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9655-6

Pepin, B. (1997). *Developing an understanding of mathematics teachers in England, France and Germany: An ethnographic study*. [Tesis doctoral]. Universidad de Reading.

Pepin, B. y Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *ZDM Mathematics Education*, *33*(5), 158-175.

Pérez, C. (2004). *Técnicas de análisis multivariable de datos*. Pearson Educación, S. A.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. Norton y Co.

Piaget, J. (1978). *Success and understanding*. Harvard University Press.

Piaget, J. y García, R. (1991). *Toward a logic of meaning* (P. Davidson y J. Easley, Eds.). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. Routledge.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didacticmathematical knowledge of prospective teachers: The case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Pino-Fan, L., Godino, J., Font, V. y Castro, W. (2012). Key epistemic features of matheatical knowledge for teachining the derivative. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceeding of the 36th coference of the internacional group for the psycholog of mathematics education: Vol. 3* (pp. 297-304). PME.

Pino-Fan, L., Godino, J., Font, V. y Castro, W. (2013). Prospective teacher´s specializd content knowledge on derivative. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education: Vol. 8* (pp. 3195-3205). CERME.

Pinto-Rojas, I. y Parraguez, M. (2017). Articulators for Thinking Modes of the Derivative from a Local Perspective. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *12*(3), 873-898.

Pointon, A. y Sangwin, C. (2003). An analysis of undergraduate core material in the light of hand-held computer algebra systems. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(5), 671-686.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Graó.

Putnam, H. (1975). The Meaning of «Meaning». En *Mind, Language and Reality: Philosophical Paper: Vol. 2* (pp. 131-193). Cambrige University Press.

Ramos, L. y Casas, L. (2018). Demanda Cognitiva de Estándares Educativos y Libros de Texto para la Enseñanza del Álgebra en Honduras. *Bolema*, *32*(62), 1134-1151. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a19

Randahl, M. (2012). First-year engineering students' use of their mathematics textbook—Opportunities and constraints. *Mathematics Education Research Journal*, *24*, 239-256. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0040-9

Reid, D. y Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education*. Sense Publishers.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 39-63.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *33*, 11-27.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100). Pirámide.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodoloía de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Editorial Comares.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO*, *70*, 48-54.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.). (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Editorial Comares.

Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Pirámide.

Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Ideas to Work for the Curriculum Change in School Mathematics. En Y. Shimizu y R. Vital (Eds.), *.), ICMI Study 24 Conference proceedings. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 301-308). ICMI.

Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). El área de conocimiento Didáctica de la Matemática. *Revista de Educación*, *328*, 35–58.

Rivkin, S. G., Hanushek, E. A. y Kain, J. F. (2005). Teachers, Schools, and Academic Achievement. *Econometrica*, *73*(2), 417-458.

Roh, K. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(3), 217-233.

Rowan, B., Correnti, R. y Miller, R. J. (2002). What large-scale survey research tells us about teacher effects on student achievement: Insights from the Prospects Study of Elementary Schools. *Teachers College Record*, *104*, 1525-1567.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139-152). Ediciones Pirámide.

Sánchez-Matamoros, G. (2014). Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 41-53). SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, online.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics*, online. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267-296.

Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Selden, A. y Selden, J. (1987). Errors and Misconceptions in College Level Theorem Proving. En J. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar on*

*Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics: Vol. III* (pp. 456-471).

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America.

Skovmose, O. (2005). Meaning in mathematics education. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 83-100). Springer.

Smith, M. y Stein, M. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*, 344-350.

Sofranas, K. S., DeFranco, T. C., Swaminathan, H., Gorgievski, N., Vinsonhaler, C., Wiseman, B. y Escolas, S. (2015). A Study of Calculus Instructors' Perceptions of Approximation as a Unifying Thread of the First-Year Calculus. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*, 386–412.

Solow, D. (2006). *Introducción al razonamiento matemático* (Segunda edición). Limusa.

Spivak, M. (2012). *Calculus* (Cuarta edición). Publisher or perish, Inc.

Star, J. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(2), 132-135.

Stein, M. K., Grover, B. W. y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 255-288.

Stein, M. K. y Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. . . *Educational Research and Evaluation*, *2*, 50-80.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elemntary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(1), 49-92.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 133-162. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5892-z

Stylianides, A. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (Eds.). (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning*. Springer.

Swan, M. (2008). Designing a multiple representation learning experience in secondary algebra. *Educational Designer*, *1*, 1-17.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. En D. A. Grouws (Ed.), *NCTM Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). McMillan.

Tatto, M. T. y Senk, S. (2011). The Mathematics Education of Future Primary and Secondary Teachers: Methods and Findings from the Teacher Education and Development Study in Mathematics. *Journal of Teacher Education*, *62*(2), 121-137.

Tekkumru-Kisa, M., Stein, M. K. y Schunn, C. (2015). AFramework for Analyzing Cognitive Demandand Content-Practices Integration:Task Analysis Guide in Science. *Journal of Research in Science Teaching*, *52*(5), 659-685.

Thompson, P. (2013). In the absence of meaning…. En K. Leatham (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education* (pp. 57-93). Springer.

Thompson, P. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435-461). Taylor and Francis.

Thompson, P., Carlson, M. P., Byerley, C. y Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: A hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. En L. P. Steffe, L. L. Hatffield y K. C. Moore (Eds.), *Epistemic algebra students: Emerging models of students' algebraic knowing, WISDOMe Monographs: Vol. 4* (pp. 1-24). University of Wyoming.

Thompson, P. y Milner, F. (2019). Teachers' Meanings for Function and Function Notation in South Korea and the United States. En H. G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand y G. Schubring (Eds.), *The Legacy of Felix Klein* (pp. 55-66). Springer.

Todd, Z., Nerlich, B. y McKeown, S. (2004). Introduction. En Z. Todd, B. Nerlich, S. McKeown y D. Clarke (Eds.), *Mixing methods in psychology* (pp. 3-16). Psychology Press.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambrige University Press.

Tran, D. y Tarr, J. E. (2018). Examination of Bivariate Data Tasks in US High School Textbooks Through the Statistical Investigation and Cognitive Demands Frameworks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*, 1581-1603. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9851-1

Vander-Klok, J. (2014). On the use of questionnaires in semantic fieldwork: A case study in modality. En A. Belkadi, K. Chatsiou y K. Rowan (Eds.), *Proceedings of Conference on Language Documentation and Linguistic Theory: Vol. 4*. SOAS.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018a). *Meaning of the derivative of a function at a point from the perspective of teachers in training.* Artículo en revisión.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018b). Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de la derivada. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García-García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 594-603). Gijón: SEIEM.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2019). Caracterización de los argumentos dados por profesores en formación a una tarea sobre derivada. En J. M. Marbán; M. Arce; A. Maroto; J. M. Muñoz-Escolano; A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXIII (pp. 593-602). Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020a). *Análisis de los argumentos dados por profesores en formación a una tarea sobre derivadas. PNA, 14*(3), 173-203. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.12229

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020b). Derivative tasks proposed by teachers in training. *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Khon Kaen, Thailand: PME (Comunicación aceptada)

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (en prensa-AIEM). La derivada en los libros de texto de 1º de bachillerato: un análisis a las tareas propuestas. *Avances de Investigación en Educación Matemática.*

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (en prensa-Bolema). Significado de derivada en las tareas de los libros de 1º de Bachillerato. *Bolema*

Vega, M. A., Carrillo, J. y Soto, J. (2014). Análisis según el Modelo Cognitivo APOS del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada. *Bolema*, *28*(48), 403-429. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a20

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, *52*, 83-94. https://doi.org/10.1159/000202727

Vergnaud, G. (2013). Conceptual development and learning. *Revista Curriculu*, *26*, 39-59.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets y Zeitlinger Publishers.

Vicente, S., Manchado, E. y Verschaffel, L. (2018). Solving arithmetic word problems. An analysis of Spanish textbooks / Resolución de problemas aritméticos verbales. Un análisis de los libros de texto españoles. *Cultura y Educación*, online. https://doi.org/10.1080/11356405.2017.1421606

Vizmanos, J., Hernández, J., Alcaide, F., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas. 1 Bachillerato. Ciencias y tecnología*. Ediciones SM.

Walton, D. y Macagno, F. (2016). A classification system for argumentation schemes. *Argument y Computation*, online, 219-245. https://doi.org/10.1080/19462166.2015.1123772

Wang, Y., Barmby, P. y Bolden, D. (2017). Understanding Linear Function: A Comparison of Selected Textbooks from England and Shanghai. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 131-153. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9674-x

Wendler, T. y Gröttrup, S. (2016). *Data mining with SPSS modeler*. Springer.

Wille, A. M. (2019). Activity with Signs and Speaking About It: Exploring Students' Mathematical Lines of Thought Regarding the Derivative. *International Journal of Science and Mathematics Education*, online. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10024-1

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Crítica.

Zengin, Y. (2018). Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method. *Educational Studies in Mathematics, 99*(3), 311–333. https://doi.org/10.1007 / s10649-018-9832-5

# Apéndices

# Apéndice A

## Aspectos que abordan los libros al introducir el tema de derivada

### 1. Definición de derivada

Al definir la derivada de una función en un punto, en Spivak (2012) se lee:

> La función $f$ es diferenciable en $a$ si existe el
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> En este caso, dicho límite se representa mediante $f'(a)$ y de denomina derivada de $f$ en $a$.

Por su parte, Burgos (2007) entra en mayor detalle y destaca:

> Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función, definida en un intervalo $I$, y consideremos un punto (fijo) $a \in I$. Se dice que $f$ es derivable en $a$ si existe y es finito el siguiente límite, que se denota por $f'(a)$ y se llama derivada de $f$ en $a$:
>
> $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

#### *1.1. Aspectos relevantes*

De las definiciones dadas y de algunos comentarios posteriores que se pueden apreciar en los libros, sobresalen los siguientes aspectos:

- La derivada se define en un punto de acumulación del dominio de la función.
- La derivada de una función en un punto es un número real.
- Para que el límite que define la derivada exista debe satisfacerse que los siguientes límites

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{y} \quad f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existan y sean iguales. Estos límites laterales se denominan derivada laterales (por la derecha y por la izquierda respectivamente).

## 2. Interpretaciones de la derivada

En ambos libros destacan las dos interpretaciones siguientes:

*Geométrica:* señala la derivada como la pendiente de la recta tangente a la función $f$ en el punto $a$.

*Física:* dada la función posición de un objeto respecto al tiempo, su derivada se interpreta como la velocidad instantánea de dicho objeto en el tiempo $a$.

Aludiendo al hecho de que estas interpretaciones son a su vez los problemas que dieron origen al concepto.

## 3. Notación

En términos generales, aunque a lo largo del tema emplean distintas notaciones, al introducir el concepto, la notación empleada para la derivada de una función en un punto es:

$f'(a)$

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

$$D[f(a)]$$

Aunque ambos autores utilizan principalmente la primera de ellas.

## 4. Teoremas

Tanto Spivak (2012) como Burgos (2007), destacan como primer resultado importante, de carácter necesario, la relación entre la continuidad y derivabilidad de una función:

- Si $f$ es diferenciable en el punto $a$, entonces $f$ es continua en ese punto.

Al respecto, señalan además que el recíproco no es cierto, es decir, que una función continua no necesariamente es diferenciable.

Con este primer teorema, y con los aspectos mencionados anteriormente, es posible entonces, establecer condiciones necesarias y suficientes para la derivabilidad de una función en un punto.

*Condición necesaria:* del teorema se desprende que si $f$ no es continua, entonces no es derivable. Así se establece como condición necesaria para la derivabilidad la continuidad de la función en el punto.

*Condición suficiente:* de lo anterior tendríamos que una función es derivable en un punto si y sólo si es continua en ese punto y además que las derivadas laterales existen y son iguales.

Finalmente, contemplamos otro resultado importante que, aunque no es uno de los teoremas que presenten los libros al introducir el concepto, si es de los primeros en cuanto a sus aplicaciones; incluso Spivak (2012) lo plantea como el teorema que, para él, justifica el para qué de la derivada. Así contemplamos entonces, el siguiente teorema:

- Sea $f$ una función definida en $(a, b)$. Si $x$ es un punto máximo o mínimo de $f$ en $(a, b)$ y $f$ es diferenciable en $x$, entonces $f'(x) = 0$.

En términos generales, los aspectos de la estructura conceptual que consideraremos para este trabajo se sintetizan en la figura A1.

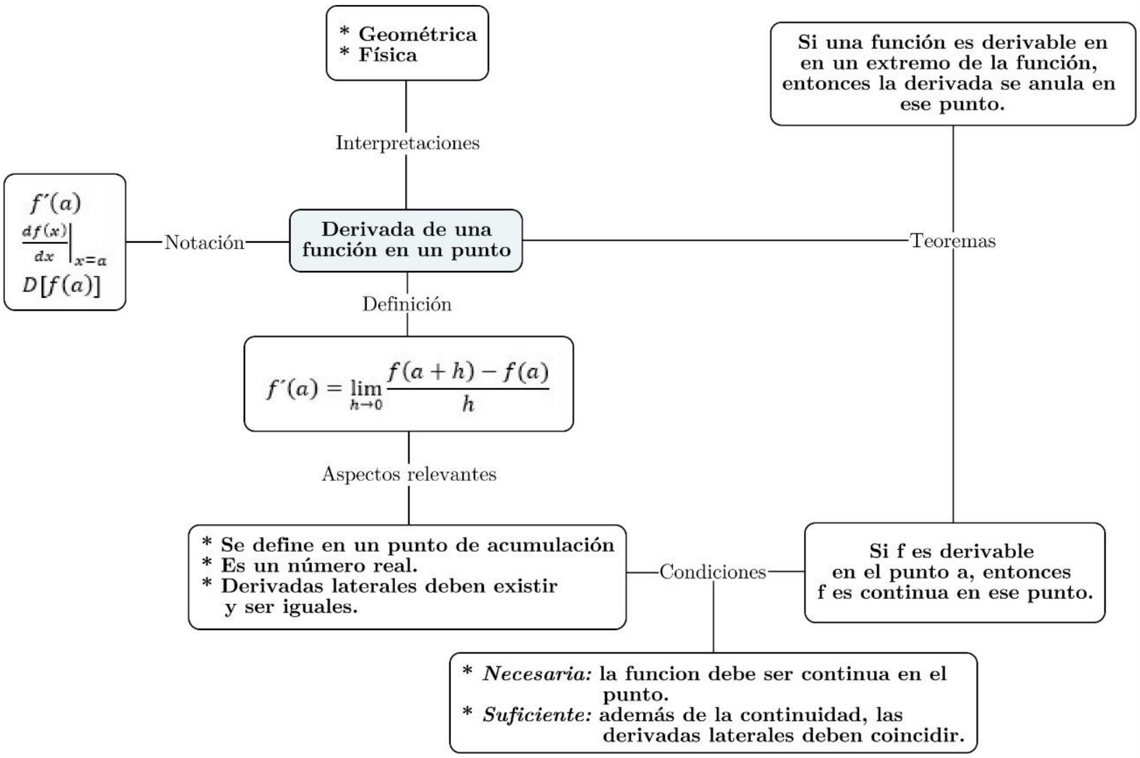



*Figura A1.* Concepto de derivada en los libros de Cálculo

# Apéndice B

## Versión A y B del cuestionario semántico empleado en la fase 1

Departamento de Didáctica de la Matemática

Grupo FQM-193. “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”

# Cuestionario A

Noción de derivada de una función en un punto

Estimado alumno,

El grupo *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico*, del Departamento de Didáctica de la Matemática, ha elaborado este cuestionario como parte de una investigación que está llevando a cabo la Universidad de Granada.

Su opinión e información serán muy útiles para nosotros. En el cuestionario que va a realizar, inicialmente le solicitamos algunos datos personales. A continuación tendrá que realizar unas tareas relacionadas con la noción de derivada de una función en un punto.

Antes de seguir adelante, es importante que tome en consideración lo siguiente:

1. No se trata de una prueba de evaluación. Realícelo con tranquilidad e interés.
2. Sus respuestas serán confidenciales.
3. Procure responder a todas las preguntas.
4. Imagine que un compañero va a leer sus respuestas, por tanto, procure incluir todas las aclaraciones necesarias para que entienda sin dificultad lo que quiere expresar.
5. Si se equivoca, tache la respuesta (una raya) y corríjala aparte.

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto "Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación"(EDU2015- 70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN), entre cuyos objetivos está mejorar los programas de formación para profesores de matemáticas.

Gracias por su colaboración.

**Datos personales**

1. Género: ☐ Masculino ☐ Femenino
2. Edad:
3. Carrera de grado:
4. Experiencia docente:

**ACTIVIDAD $N1$**

Exprese con sus propias palabras, una definición para el concepto de derivada de una función en un punto.

**ACTIVIDAD** $N2$

Se presentan dos enunciados referidos a una función y su derivada. Coloque V o F en el paréntesis de cada enunciado, según sea verdadero o falso. Justifique su elección.

1. (    ) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, tiene por gráfica la que se muestra en la figura 1. La recta $m$ es tangente a la curva en $x = 1$; de esta forma es fácil asegurar que $f$ es derivable en ese punto.

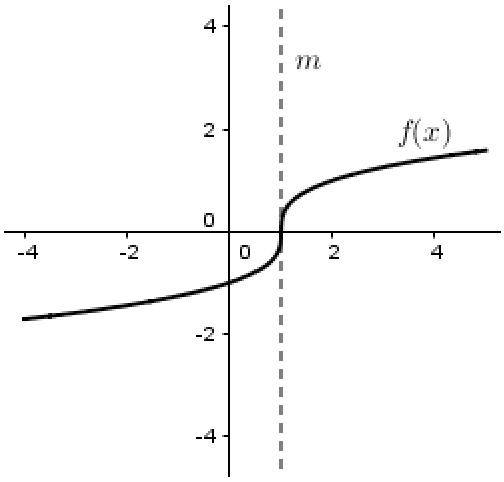



*Figura 1.* Gráfica de $f$

*Jutificación*

2. ( ) Dada la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = x^3 + 2x - 1$; $f$ es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 5$.

*Jutificación*

Departamento de Didáctica de la Matemática

Grupo FQM-193. “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”

# Cuestionario B

Noción de derivada de una función en un punto

Estimado alumno,

El grupo *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico*, del Departamento de Didáctica de la Matemática, ha elaborado este cuestionario como parte de una investigación que está llevando a cabo la Universidad de Granada.

Su opinión e información serán muy útiles para nosotros. En el cuestionario que va a realizar, inicialmente le solicitamos algunos datos personales. A continuación tendrá que realizar unas tareas relacionadas con la noción de derivada de una función en un punto.

Antes de seguir adelante, es importante que tome en consideración lo siguiente:

1. No se trata de una prueba de evaluación. Realícelo con tranquilidad e interés.
2. Sus respuestas serán confidenciales.
3. Procure responder a todas las preguntas.
4. Imagine que un compañero va a leer sus respuestas, por tanto, procure incluir todas las aclaraciones necesarias para que entienda sin dificultad lo que quiere expresar.
5. Si se equivoca, tache la respuesta (una raya) y corríjala aparte.

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto "Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación"(EDU2015- 70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN), entre cuyos objetivos está mejorar los programas de formación para profesores de matemáticas.

Gracias por su colaboración.

**Datos personales**

1. Género: ☐ Masculino ☐ Femenino
2. Edad:
3. Carrera de grado:
4. Experiencia docente:

**ACTIVIDAD $N1$**

Exprese con sus propias palabras, una definición para el concepto de derivada de una función en un punto.

**ACTIVIDAD** $N2$

Se presentan dos enunciados referidos a una función y su derivada. Coloque V o F en el paréntesis de cada enunciado, según sea verdadero o falso. Justifique su elección.

1. ( ) Para la función $g$, cuya gráfica se muestra en la figura 1

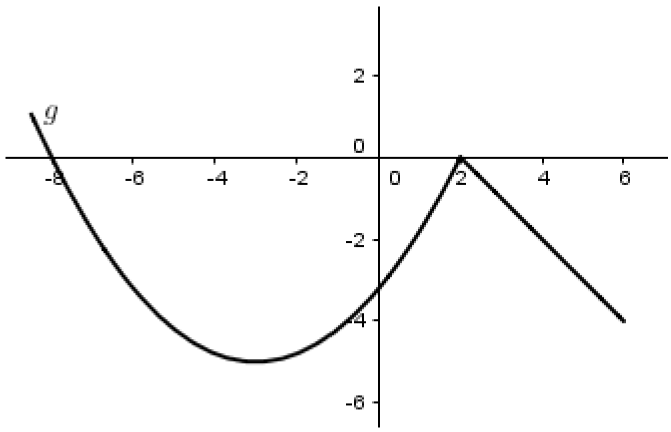



*Figura 1.* Gráfica de $g$

Se puede afirmar que como $g$ tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $g'(2) = 0$.

*Jutificación*

2. ( ) La función $h(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & si \quad x < 0 \\ & \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ cuya gráfica se muestra en la figura 2, satisface que $\lim\limits_{x \to 0^-} h'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h'(x) = 0$. Por lo tanto $h'(0) = 0$.

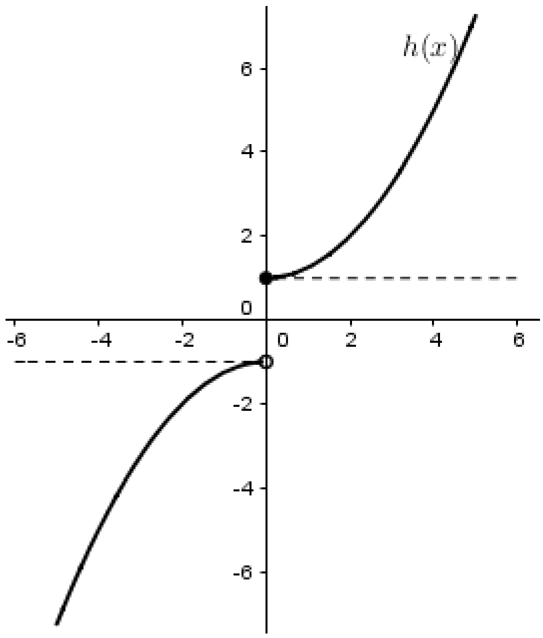



*Figura 2.* Gráfica de $h$

*Jutificación*

**ACTIVIDAD** $N3$

1. Indique al menos tres aplicaciones en las que se utiliza el concepto de derivada.

2. Plantee un ejemplo de problema de alguna de las aplicaciones mencionadas.

# Apéndice C

## Guía para la evaluación del instrumento

Para facilitar la revisión y valoración del instrumento, en el presente documento describimos brevemente la estructura del cuestionario, además brindamos una serie de aspectos a tomar en consideración para su respectiva evaluación.

Para acceder al cuestionario, ingrese en el siguiente enlace:

*https://encuestas.ugr.es/index.php/633684?lang=es*

Es importante mencionar que en la versión final las preguntas serán de respuesta obligatoria; sin embargo, hemos desactivado este requisito para facilitar la revisión; lo anterior genera la opción "sin respuesta", pero dicha alternativa no estará disponible al aplicar el instrumento.

***Posibles aspectos para evaluar***

A continuación, se le presentan una serie de aspectos que, desde nuestra perspectiva, configuran los elementos del significado de un concepto matemático que el cuestionario elaborado permite analizar. Su percepción, aporte y validación resultarán de gran provecho en el proceso de perfeccionamiento de dicho instrumento.

En la siguiente tabla, valore de 1 a 5 (1 nada de acuerdo y 5 completamente de acuerdo) las afirmaciones que se realizan respecto al aspecto que cada una de las preguntas permite estudiar. Dicha tabla es solo una guía para la valoración, siéntase en completa libertad de comentar o recomendar cualquier otro detalle que considere oportuno.

De antemano, muchas gracias.

| **Pregunta** | **Aspecto** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | *Estructura conceptual,* pues se relaciona con<br>- Términos | | | | | |
| | - Requisitos y condiciones para definir la derivada | | | | | |
| | - El concepto | | | | | |
| | - Resultados y propiedades | | | | | |
| | *Sentido y modo de uso,* ya que puede hacer alusión a situaciones y contextos en los que se aplica la derivada | | | | | |
| **2** | *Estructura conceptual,* pues se relaciona con<br>- Su definición | | | | | |
| | - Resultados y propiedades (al definirse puede hacerse referencia a estos) | | | | | |
| | *Sentidos y modos de uso,* al definirse mediante su interpretación | | | | | |
| **3** | *Estructura conceptual,* al relacionarse directamente con<br>- Términos | | | | | |
| | - Requisitos y condiciones para la definición | | | | | |

| Pregunta | Aspecto | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | *Estructura conceptual,* al tratarse de<br>- La definición | | | | | |
| | - Notación | | | | | |
| | *Sentido,* al relacionarse con modos de uso de la derivada | | | | | |
| **5** | *Estructura conceptual,* al referirse a<br>- Requisitos necesarios para poder definirse la derivada en un punto | | | | | |
| | - Razonamientos, pues permite indagar en el tipo de razonamiento que se pone en juego al tratar temas de la derivada (si es algebraico, geométrico o analítico, por ejemplo) | | | | | |
| **6** | *Estructura conceptual*, al relacionarse con<br>- Resultados o propiedades | | | | | |
| | - Razonamientos, pues permite indagar en el tipo de razonamiento que se pone en juego al tratar temas de la derivada (si es algebraico, geométrico o analítico, por ejemplo) | | | | | |
| **7** | *Estructura conceptual*, pues el enunciado tiene que ver con<br>- La definición y sus condiciones | | | | | |
| | - Resultados | | | | | |
| | - Razonamientos, pues permite indagar en el tipo de razonamiento que se pone en juego al tratar temas de la derivada (si es algebraico, geométrico o analítico, por ejemplo) | | | | | |
| **8** | *Estructura conceptual,* pues se trata<br>- Requisitos | | | | | |
| | - Razonamientos, pues permite indagar en el tipo de razonamiento que se pone en juego al tratar temas de la derivada (si es algebraico, geométrico o analítico, por ejemplo) | | | | | |
| | *Sentido,* al analizar la influencia que la interpretación geométrica de la derivada puede tener | | | | | |

En cuanto al sistema de representación, al tratarse de un cuestionario cerrado, es un elemento difícil de analizar; sin embargo, al estudiar el razonamiento, por ejemplo, puede detectarse en alguna medida la importancia que se le da a cada uno de los sistemas de representación. *¿Está de acuerdo con esta afirmación?*

***Para terminar,***

1. *¿Considera que el instrumento es oportuno?*
2. *¿Permite el instrumento analizar el significado que tiene la derivada para los profesores?*
3. *Además de la estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos y modos de uso, ¿considera que hay algún elemento más que puede analizarse?*
4. *¿Hay alguna pregunta que podría omitirse?*
5. *¿Hay alguna pregunta que deba agregarse?*
6. *Escriba aquí cualquier otro comentario*

# Apéndice D

## Cuestionario en línea aplicado durante la fase 3

LimeSurvey

**Información general**

*Género

Femenino | Masculino

*Provincia donde trabaja

Seleccione una de las siguientes opciones

Por favor escoja...

*Nombre del centro educativo

*Años de experiencia como profesor(a) de matemática

Sólo se pueden introducir números en este campo.

*¿Ha impartido 1º de bachillerato?

Sí | No

**1. Las siguientes son definiciones dadas por estudiantes del Máster de Secundaria al concepto de derivada de una función en un punto. Indique si la definición es correcta o incorrecta. En ambos casos justifique su elección.**

* ***La derivada es el valor del límite, si existe, de la función en ese punto.***

Seleccione una de las siguientes opciones

- Correcta
- Incorrecta

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

* ***La derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto***

Seleccione una de las siguientes opciones

- ◯ Correcta
- ◯ Incorrecta

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

* ***La derivada es el límite del cociente incremental***

Seleccione una de las siguientes opciones

- ◯ Correcta
- ◯ Incorrecta

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

* ***Es la función que para cada punto de una función $f$ dada, devuelve la pendiente de la recta tangente en cada punto***

Seleccione una de las siguientes opciones

- ◯ Correcta
- ◯ Incorrecta

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

* ***Una derivada es una descomposición de expresiones algebraicas***

Seleccione una de las siguientes opciones

- ◯ Correcta
- ◯ Incorrecta

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

* *La derivada es un cambio*

Seleccione una de las siguientes opciones

- ○ Correcta
- ○ Incorrecta

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

## 2. Términos relacionados

***Clasifique los siguientes términos como: a) no relacionados, b) relacionados pero no necesarios, o c) relacionados y necesarios para el concepto de derivada de una función en un punto.**

| | No está relacionado | Relacionado pero no necesario | Relacionado y necesario |
|---|---|---|---|
| Número real | ○ | ○ | ○ |
| Velocidad | ○ | ○ | ○ |
| Recta tangente | ○ | ○ | ○ |
| Límite del cociente incremental | ○ | ○ | ○ |
| Límite de las rectas secantes | ○ | ○ | ○ |
| Variación instantánea | ○ | ○ | ○ |
| Función continua | ○ | ○ | ○ |
| Punto de acumulación | ○ | ○ | ○ |

## 3. Definición derivada de una función en un punto

****3.1. ¿Cuál de las siguientes definiciones dadas por los libros de texto para la derivada de una función en un punto, coincide más con su definición de derivada?***

Seleccione una de las siguientes opciones

○ Se define la derivada de una función $f$ en el punto $x=a$, como la tasa de variación instantánea. Se representa $f'(a)$ y es igual a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

○ El crecimiento de una función en un punto se mide por la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto. A este valor se le llama derivada de $f$ en $a$, se designa por $f'(a)$, donde

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

○ La derivada de la función $f(x)$ en un punto de abscisa $a$ se denota por $f'(a)$ y es el valor de este límite, si existe y es finito

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

○ Otra con un nivel de formalidad superior a las anteriores

○ Otra con un nivel de formalidad similar a las ya dadas

○ Otra con un nivel de formalidad menor

***3.2. ¿Cuál de las definiciones dadas emplearía para enseñar el concepto a sus alumnos?***

Seleccione una de las siguientes opciones

- Se define la derivada de una función $f$ en el punto $x = a$, como la tasa de variación instantánea. Se representa $f'(a)$ y es igual a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- El crecimiento de una función en un punto se mide por la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto. A este valor se le llama derivada de $f$ en $a$, se designa por $f'(a)$ donde

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- La derivada de la función $f(x)$ en un punto de abscisa $a$ se denota por $f'(a)$ y es el valor de este límite, si existe y es finito

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**4. A continuación, se le presentan 2 enunciados relacionados con la derivada de una función en un punto, en cada caso, indique si el enunciado es verdadero o falso.**

*4.1. Para la función $f$, cuya gráfica se muestra en la figura 1

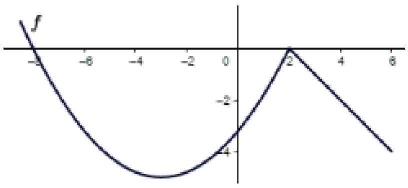



**Figura 1.** Gráfica de $f$

Se puede asegurar que, dado que $f$ tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $f'(2) = 0$

Seleccione una de las siguientes opciones

- Verdadero
- Falso

***a) Los siguientes son argumentos que estudiantes han dado para justificar la veracidad del enunciado.***

**Valore la validez de cada argumento.**

| | No es válido | Es válido, pero no suficiente | Es válido y suficiente |
|---|---|---|---|
| Es verdadero ya que la derivada se anula en los extremos de la función | ○ | ○ | ○ |
| Es verdadero ya que no existe tangente, por lo tanto, es cero | ○ | ○ | ○ |

*b) ¿Con cuál de los argumentos se siente más identificado? ¿Por qué?*

Seleccione una de las siguientes opciones

- Es verdadero ya que la derivada se anula en los extremos de la función.
- Es verdadero ya que no existe tangente, por lo tanto, es cero.

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

*c)¿Existe algún otro argumento que justifique que el enunciado sea verdadero? Escríbalo.*

Seleccione una de las siguientes opciones

- Si
- No

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

***a) Los siguientes son argumentos que estudiantes han dado para justificar la falsedad del enunciado.***

**Valore la validez de cada argumento.**

| | No es válido | Es válido, pero no suficiente | Es válido y suficiente |
|---|---|---|---|
| Es falso ya que la pendiente de la recta tangente es ese punto es infinita, por tanto, no es derivable. | | | |
| Es falso porque los límites laterales de la derivada en ese punto no coinciden. | | | |
| Es falso porque una función no es derivable en los puntos que presenta un "pico". | | | |
| Es falso pues la derivada no es continua por ser una función definida a trozos. | | | |

*b) ¿Con cuál de los argumentos se siente más identificado? ¿Por qué?*

Seleccione una de las siguientes opciones

- Es falso ya que la pendiente de la recta tangente es ese punto es infinita, por tanto, no es derivable.
- Es falso porque los límites laterales de la derivada en ese punto no coinciden.
- Es falso porque una función no es derivable en los puntos que presenta un "pico".
- Es falso pues la derivada no es continua por ser una función definida a trozos.

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

✱*c) ¿Existe algún otro argumento que justifique que el enunciado sea falso? Escríbalo.*

❗ Seleccione una de las siguientes opciones

- ◯ Si
- ◯ No

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

✱4.2. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, tiene por gráfica la que se muestra en la figura 2. La recta $m$ es tangente a la curva en $x = 1$; por lo que se pueda asegurar que $f$ es derivable en ese punto.

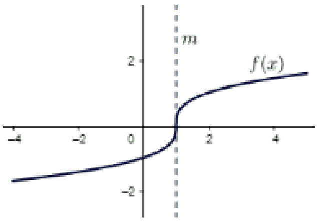



**Figura 2.** Gráfica de $f$

❗ Seleccione una de las siguientes opciones

- ◯ Verdadero
- ◯ Falso

**a) Los siguientes son argumentos que estudiantes han dado para justificar la veracidad del enunciado.*

**Valore la validez de cada argumento.**

| | No es válido | Es válido, pero no suficiente | Es válido y suficiente |
|---|---|---|---|
| Es verdadero pues la existencia de recta tangente asegura que haya derivada. | ○ | ○ | ○ |
| Es verdadero dado que las derivadas laterales coinciden. | ○ | ○ | ○ |
| Es verdadero porque la función es continua | ○ | ○ | ○ |
| Es verdadero dado que $f'(x) = \frac{(x-1)^{\{-\frac{2}{3}\}}}{3}$ por lo que $f'(x)$ es continua. | ○ | ○ | ○ |

**b) ¿Con cuál de los argumentos se siente más identificado? ¿Por qué?*

Seleccione una de las siguientes opciones

- ○ Es verdadero pues la existencia de recta tangente asegura que haya derivada.
- ○ Es verdadero dado que las derivadas laterales coinciden.
- ○ Es verdadero porque la función es continua.
- ○ Es verdadero dado que

  $$f'(x) = \frac{(x-1)^{\{-\frac{2}{3}\}}}{3}$$

  por lo que $f'(x)$ es continua.

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

**c) ¿Existe algún otro argumento que justifique que el enunciado sea verdadero? Escríbalo.*

Seleccione una de las siguientes opciones

- ○ Sí
- ○ No

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

***a) Los siguientes son argumentos que estudiantes han dado para justificar la falsedad del enunciado.***

**Valore la validez de cada argumento.**

| | No es válido | Es válido, pero no suficiente | Es válido y suficiente |
|---|---|---|---|
| Es falso ya que la pendiente de la recta tangente dada es infinita, lo cual hace a la función no derivable. | ○ | ○ | ○ |
| Es falso dado que los límites laterales de $f'(x)$ cuando $x$ tiende a 1 no coinciden. | ○ | ○ | ○ |
| Es falso ya que $f'(x)$ se indefine en $x = 1$. | ○ | ○ | ○ |
| Es falso, pues la función no es continua y por lo tanto no es derivable. | ○ | ○ | ○ |

***b) ¿Con cuál de los argumentos se siente más identificado? ¿Por qué?***

Seleccione una de las siguientes opciones

- ○ Es falso ya que la pendiente de la recta tangente dada es infinita, lo cual hace a la función no derivable.
- ○ Es falso dado que los límites laterales de $f'(x)$ cuando $x$ tiende a 1 no coinciden.
- ○ Es falso ya que $f'(x)$ se indefine en $x = 1$.
- ○ Es falso, pues la función no es continua y por lo tanto no es derivable.

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

***c) ¿Existe algún otro argumento que justifique que el enunciado sea falso? Escríbalo.***

Seleccione una de las siguientes opciones

- ○ Sí
- ○ No

Por favor, escriba la justificación de su respuesta aquí:

# Apéndice E

## Comentarios realizados por los docentes a las distintas definiciones dadas en la pregunta 1 (fase 3)

*Definición 1: La derivada es el valor del límite, si existe, de la función en ese punto*

Se registró un total de 140 comentarios, los cuales se muestran en la tabla E1.

Tabla E1. *Comentarios hechos al justificar la corrección o incorreción de la definición 1*

| *La consideró* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| Correcta | Así lo establece la definición | 1 |
| | La derivada en el punto $x = a$ se define como un número, cuyo valor es el del límite de la función cuando $x$ tiende a $a$". | 1 |
| Incorrecta | Dar una definición de derivada que consideren correcta | 69 |
| | La expresión dada está relacionada con la continuidad, no con la derivabilidad | 16 |
| | Ese límite es sobre la función, no de la derivada | 18 |
| | Está incompleta | 17 |
| | Esa no es la definición | 6 |
| | El límite de la función en un punto podría existir, y aun así no ser derivable en ese punto | 3 |
| | La derivada es un límite, pero no ese | 9 |

*Definición 2: La derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto*

Se registró un total de 121 comentarios, los cuales se muestran en la tabla E2.

Tabla E2. *Comentarios hechos al justificar la corrección o incorreción de la definición 2*

| *La consideró* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| Correcta | La derivada coincide con la pendiente | 6 |
| | Esa es la interpretación geométrica de la derivada | 30 |
| | Esa es la definición de derivada | 10 |
| | Esa es una de las formas de definir la derivada | 4 |
| | Dado que la derivada en un punto es el límite de las rectas secantes | 3 |
| | La ecuación de la recta tangente es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ | 2 |

Tabla E2. *Comentarios hechos al justificar la corrección o incorreción de la definición 2*

| *La consideró* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| | Es correcta, pero faltaría precisión* | 28 |
| | - Siempre que la función sea derivable en el punto (19) | |
| | - Siempre que la curva se trate de una función (3) | |
| | - Siempre que la recta tangente exista (2) | |
| | - La función debe ser continua en el punto (1) | |
| Incorrecta | Esa es la interpretación geométrica | 13 |
| | Requiere precisar | 25 |
| | - La derivada de una función en un punto (20) | |
| | - Que se trata de una función real de variable real (1) | |
| | - Siempre que exista (3) | |
| | - Siempre que la función sea continua y no tenga punto anguloso (1) | |

* Algunos solo dicen que requiere precisar, sin decir en qué.

*Definición 3: La derivada es el límite del cociente incremental*

Se registró un total de 71 comentarios, los cuales se muestran en la tabla E3.

Tabla E3. *Comentarios hechos al justificar la corrección o incorreción de la definición 3*

| *La consideró* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| Correcta | Es una forma de definir la derivada, aunque más analítica | 7 |
| | Corresponde a la tasa de variación instantánea | 6 |
| | Es correcta, pero debe especificarse: | 26 |
| | - La expresión algebraica del coeficiente incremental (13) | |
| | - Siempre que el límite existiera (6) | |
| | - Aclarar, la derivada de la función en un punto (4) | |
| | - Hay que especificar que cuando el incremento tiene a cero (6) | |
| | Esa es la definición de derivada | 6 |
| | El coeficiente incremental da la pendiente de la recta tangente | 4 |
| | Así se calcula la derivada | 1 |
| Incorrecta | Falta especificar: | 27 |
| | - Debe indicarse cuál coeficiente incremental (9) | |
| | - Siempre que exista (5) | |
| | - Aclararse que se trata de la derivada de una función en un punto (5) | |
| | - Hay que especificar que es el límite cuando el incremento tiende a cero (8) | |

*Definición 4: Es la función que, para cada punto de una función dada, devuelve la pendiente de la recta tangente en cada punto*

Se registró un total de 97 comentarios, los cuales se muestran en la tabla E4.

Tabla E4. *Comentarios hechos al justificar la corrección o incorreción de la definición 4*

| *La consideró* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| Correcta | Es la definición de función derivada | 16 |
| | Es una consecuencia directa de la interpretación geométrica | 8 |
| | Si existe la derivada en un punto, existe recta tangente y por lo tanto pendiente | 2 |
| | Es correcta, pero debe especificarse:<br>- Que la función sea derivable en cada punto (7)<br>- Decir que la función es continua en el punto (3) | 10 |
| Incorrecta | La derivada es un número, no una función | 14 |
| | Eso hace referencia a la función derivada | 28 |
| | Deben precisarse aspectos:<br>- Que la función sea derivable (6)<br>- La pendiente sea finita (1) | 12 |
| | Esa no es la definición | 5 |
| | Es una interpretación geométrica | 1 |
| | El concepto de recta tangente es posterior al de la derivada de una función en un punto | 1 |

*Definición 5: Una derivada es una descomposición de expresiones algebraicas*

Se registró un total de 51 comentarios, los cuales se muestran en la tabla E5.

Tabla E5. *Comentarios hechos al justificar la corrección o incorreción de la definición 5*

| *La consideró* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| Correcta | Se descompone al aplicar reglas de derivación | 2 |
| Incorrecta | No tiene relación con la derivada de una función en un punto | 13 |
| | Esa es una característica, no su definición | 1 |
| | Es muy imprecisa | 14 |
| | La derivada es el límite del coeficiente incremental | 3 |
| | No toda descomposición es una derivada | 2 |
| | Se está confundiendo la idea de derivada de una función, con el cálculo algebraico | 3 |
| | Esto se relaciona más con la función derivada | 3 |
| | No siempre es así, podría tratarse de otras expresiones | 10 |

*Definición 6: Un cambio*

Se registró un total de 42 comentarios, los cuales se muestran en la tabla E6.

Tabla E6. *Comentarios hechos al justificar la corrección o incorreción de la definición 6*

| *La consideró* | *Comentario* | *Frecuencia* |
| --- | --- | --- |
| Correcta | La pendiente de la recta tangente da la idea de cómo la función va cambiando | 2 |
| | La tasa de variación instantánea es un cambio | 3 |
| | La derivada mide o informa de un cambio | 7 |
| Incorrecta | La derivada mide un cambio, pero no es uno | 13 |
| | Mas que un cambio, se trata de una variación | 7 |
| | Es una definición insuficiente, pero no del todo incorrecta | 7 |
| | La derivada no es un cambio, es un límite | 1 |
| | Habría que concretar que expresa un cambio infinitesimal | 2 |

# Apéndice F

## Comentarios dados sobre la validez de los argumentos dados en el primer enunciado de verdadero o falso (fase 3)

Para justificar la *falsedad* del enunciado se presentaron los siguientes argumentos:

1. Es falso ya que la pendiente de la recta tangente es ese punto es infinita, por tanto, no es derivable.
2. Es falso porque los límites laterales de la derivada en ese punto no coinciden.
3. Es falso porque una función no es derivable en los puntos que presenta un "pico".
4. Es falso pues la derivada no es continua por ser una función definida a trozos.

En la tabla F1 se sintetizan los comentarios dados tras indicar la validez de cada uno de estos.

Tabla F1. *Comentarios dados a la validez de los argumentos sobre la falsedad del enunciado*

| *Argumento* | *Validez* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| 1 | No suficiente | No se registró comentarios | - |
| | No válido | No existe recta tangente en ese punto, pues solo existe si la función es derivable en el punto | 31 |
| | | La pendiente no es infinita, lo que pasa es que las derivadas laterales no coinciden; otros destacan si fuera infinita, existiera una recta tangente vertical. | 58 |
| | | La definición de derivada se basa en la pendiente de la recta tangente, así que no es justificación | 2 |
| | | No existen pendientes infinitas | 3 |
| | | En ese punto hay infinitas rectas tangentes | 4 |
| | | No puede hablarse de pendiente si no hay recta tangente | 2 |
| | | Podría darse el caso en el que la pendiente sea infinita y ser derivable | 1 |
| 2 | No suficiente | Hay que especificar que la derivada no existe | 9 |
| | | Hay que indicar que no es una función continua | 1 |
| | | Explicitar los límites que no coinciden y calcularlos | 2 |
| | No válido | Los límites laterales sí coinciden o podrían coincidir | 3 |
| | | No se está comprobando la continuidad de la derivada, sino su existencia. | 3 |

Tabla F1. *Comentarios dados a la validez de los argumentos sobre la falsedad del enunciado*

| *Argumento* | *Validez* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| 3 | No suficiente | Deben agregar o probar que las derivadas laterales (o límites laterales de la derivada) no coinciden. | 31 |
| | | Tiene poco rigor y formalismo matemático | 19 |
| | | Explicar lo que es un "pico" y qué lo hace no derivable | 21 |
| | | Decir que la función es continua | 1 |
| | | Justificar si el punto es o no un máximo relativo | 1 |
| | No válido | Es una idea intuitiva y que no se basa en conceptos matemáticos | 3 |
| 4 | No suficiente | Deben comprobarse las derivadas laterales | 3 |
| | | La función derivada no es continua | 1 |
| | No válido | Una función a trozos puede ser continua y derivable | 42 |
| | | La función derivada puede ser continua | 18 |
| | | La función derivada puede no ser continua en un punto y aun así ser derivable en dicho punto | 6 |
| | | Que la derivada no sea continua no es porque la función sea definida a trozos | 2 |
| | | Debe especificar que se trata del punto $x = 2$ | 1 |
| | | La función derivada no está definida en $x = 2$ por lo que no tiene sentido hablar de su continuidad en dicho punto | 1 |
| | | La derivada es un concepto local, que no depende de cómo este definida la función de forma global | 1 |
| | | No existe relación entre la continuidad de la función derivada y las funciones a trozos | 1 |
| | | La función si es continua | 21 |
| | | Dado que la función no está definida algebraicamente | 1 |

Para justificar la *veracidad* del enunciado se presentaron los siguientes argumentos:

1. Es verdadero ya que la derivada se anula en los extremos de la función.
2. Es verdadero ya que no existe tangente, por lo tanto, es cero.

En la tabla F2 se sintetizan los comentarios dados tras indicar la validez de cada uno de estos.

Tabla F2. *Comentarios dados a la validez de los argumentos sobre la veracidad del enunciado*

| *Argumento* | *Validez* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| 1 | No suficiente | Debe verificarse que la función es continua | 1 |

Tabla F2. *Comentarios dados a la validez de los argumentos sobre la veracidad del enunciado*

| *Argumento* | *Validez* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| 2 | No suficiente | La recta tangente si existe, pero su pendiente es nula. | 3 |
| | No válido | La recta tangente si existe, pero su pendiente es nula. | 1 |

# Apéndice G

## Comentarios que justifican el argumento elegido para justificar la veracidad o falsedad en el primer enunciado de verdadero o falso (fase 3)

Para la *falsedad* se presentaron los siguientes argumentos:

1. Es falso ya que la pendiente de la recta tangente es ese punto es infinita, por tanto, no es derivable.
2. Es falso porque los límites laterales de la derivada en ese punto no coinciden.
3. Es falso porque una función no es derivable en los puntos que presenta un "pico".
4. Es falso pues la derivada no es continua por ser una función definida a trozos.

En la tabla G1 se sintetizan los comentarios dados tras elegir alguno de los argumentos.

Tabla G1. *Comentarios dados al elegir un argumento para la falsedad*

| *Argumento* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| 1 | Los otros son falsos | 1 |
| | Se visualiza mejor | 1 |
| | Es el único que dice explícitamente que la función no es derivable en el punto | 1 |
| 2 | Esa es la definición de derivabilidad y no se cumple | 4 |
| | En efecto las derivadas laterales deben coincidir para que la definición de derivada se cumple (solo un par menciona que, en el argumento dado, la expresión "límites laterales de la derivada" no es correcto, pues debería ser derivadas laterales) | 26 |
| | Para que exista recta tangente, los límites laterales de la derivada deben coincidir | 3 |
| | Es la más formal | 8 |
| | Es correcto estudiar la continuidad de la derivada | 1 |
| 3 | Es más gráfica, intuitiva y fácil de entender | 10 |
| | Es la frase que representa gráficamente que las derivadas laterales no coinciden | 1 |
| | Se aprecia que no hay recta tangente, por lo que su pendiente no toma ningún valor | 1 |
| | Es el único argumento correcto, aunque le falta justificación | 4 |
| 4 | Sin comentarios | |

Para la *veracidad* del enunciado no se registraron comentarios.

# Apéndice H

## Comentarios dados sobre la validez de los argumentos en el segundo enunciado de verdadero o falso (fase 3)

Para justificar la *falsedad* del segundo enunciado se presentaron los siguientes argumentos:

1. Es falso ya que la pendiente de la recta tangente dada es infinita, lo cual hace a la función no derivable.
2. Es falso dado que los límites laterales de $f'(x)$ cuando $x$ tiende a 1 no coinciden.
3. Es falso ya que $f'(x)$ se indefine en $x = 1$.
4. Es falso pues la función no es continua y por tanto no derivable.

En la tabla H1 se muestran los comentarios hechos tras valorar la validez del argumento.

Tabla H1. *Comentarios dados a la validez de los argumentos sobre la falsedad del enunciado*

| *Argumento* | *Validez* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| 1 | No suficiente | Que no existe la recta tangente en ese punto | 2 |
| | | Calcular el límite y verificar que da infinito | 7 |
| | | Especificar que no es derivable en ese punto | 3 |
| | | Ser más riguroso | 1 |
| | | Aclarar la conexión entre el hecho de que la pendiente sea infinita y la no derivabilidad | 1 |
| | No válido | El concepto de derivada es anterior al de la recta tangente y su pendiente, por lo que la noción de derivada no debe basarse en esta | 3 |
| | | No existe la noción de "pendiente infinita" (el hecho de que la pendiente no esté determinada no quiere decir que sea infinita) | 4 |
| | | No es una pendiente infinita, es perpendicular | 1 |
| | | No existe la recta tangente en ese punto | 2 |
| | | La pendiente no siempre coincide con la derivada | 2 |
| 2 | No suficiente | Debe indicarse que los límites sí coinciden, pero que su resultado es infinito | 4 |
| | No válido | Los límites sí coinciden, lo que pasa es que son infinitos | 46 |
| | | Lo correcto sería que los límites laterales no existen, al no ser finitos | 6 |

Tabla H1. *Comentarios dados a la validez de los argumentos sobre la falsedad del enunciado*

| *Argumento* | *Validez* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| | | Debe valorarse las derivadas laterales, no el límite de la derivada | 3 |
| | | No tiene sentido analizar los límites de $f'(x)$ en un punto, si no es derivable en él | 1 |
| | | Se está confundiendo la continuidad de la derivada con la derivabilidad en ese punto | 1 |
| 3 | No suficiente | Hacer el cálculo de las derivadas laterales, para mostrar que es infinito | 7 |
| | | Explicar por qué no está definida en ese punto | 7 |
| | | Considerar que la función derivada no tiene por qué estar definida en todos los puntos del dominio de $f$ | 1 |
| | No válido | Es incorrecto, pues la función si se define en $x = 1$ | 3 |
| | | Es poco riguroso | 1 |
| | | Existen indeterminaciones que si se definen | 1 |
| | | No entiendo la palabra "indefine", no es adecuada | 13 |
| 4 | No válido | La función si es continua en el punto | 11 |

Para justificar la *veracidad* del segundo enunciado se presentaron los siguientes argumentos:

1. Es verdadera pues la existencia de recta tangente asegura que haya derivada.
2. Es verdadera dado que las derivadas laterales coinciden.
3. Es verdadera porque la función es continua
4. Es verdadera dado que $f'(x) = \frac{(x-1)^{\left\{-\frac{2}{3}\right\}}}{3}$, $f'(x)$ es continua

En la tabla H2 se sintetizan los comentarios dados tras valorar la validez de cada uno de ellos.

Tabla H2. *Comentarios dados a la validez de los argumentos sobre la veracidad del enunciado*

| *Argumento* | *Validez* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| 1 | No suficiente | Debe aclarar que la recta tangente en ambos lados debe coincidir | 1 |
| | | Ser más formal | 1 |
| | | Nombrar las derivadas laterales | 1 |
| | | Decir que la recta tangente es infinita | 1 |
| | No válido | Hay funciones que tienen "picos" y aun así presentan recta tangente | 1 |

Tabla H2. *Comentarios dados a la validez de los argumentos sobre la veracidad del enunciado*

| *Argumento* | *Validez* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|---|
| | | La existencia de la derivada en el punto asegura que recta tangente, no al contrario | 1 |
| 2 | No suficiente | Debe verificarse que la función es continua | 3 |
| | | Además de mencionar que las derivadas laterales coinciden, debe especificarse que el límite es infinito | 2 |
| | No válido | A veces las derivadas laterales coinciden y hay pico | 1 |
| 3 | No suficiente | Es necesario agregar el cálculo de las derivadas laterales | 3 |
| | No válido | La continuidad es una condición necesaria pero no suficiente para a derivabilidad | 11 |
| 4 | No suficiente | Es necesario probar que la función es continua | 1 |
| | | Deben calcularse las derivadas laterales | 1 |
| | No válido | $f'(x)$ no es continua en $x = 1$ | 6 |

# Apéndice I

## Comentarios que justifican el argumento elegido para justificar la veracidad o falsedad en el segundo enunciado de verdadero o falso (fase 3)

Para justificar la *falsedad* del argumento se presentaron los siguientes argumentos:

5. Es falso ya que la pendiente de la recta tangente dada es infinita, lo cual hace a la función no derivable.
6. Es falso dado que los límites laterales de $f'(x)$ cuando $x$ tiende a 1 no coinciden.
7. Es falso ya que $f'(x)$ se indefine en $x = 1$.
8. Es falso pues la función no es continua y por tanto no derivable.

En la tabla I1 se sintetizan los comentarios dados tras elegir alguno de los argumentos.

Tabla I1. *Comentarios dados al elegir un argumento para la falsedad*

| *Argumento* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| 1 | La derivada debe ser un número real | 6 |
| | No existe recta tangente | 1 |
| | Es el mejor argumento, pero debería comprobarse que el límite es infinito | 3 |
| | Es fácil verlo gráficamente | 4 |
| | Es el argumento más próximo a la definición de derivada y a su interpretación geométrica | 2 |
| | Es la única correcta | 3 |
| | Destaca que la derivada es la pendiente de la recta tangente | 2 |
| 2 | Es importante comprobar las derivadas laterales, pues eso implica utilizar la definición de derivada | 5 |
| | Es el más correcto | 1 |
| | Comprueba analíticamente lo que ya se ve gráficamente | 1 |
| 3 | Es fácil para el alumno, pues es un cálculo sencillo | 6 |
| | Es un buen ejemplo de una función continua, cuya derivada no lo es | 1 |
| | Mas analítico | 2 |
| | Es sencillo para el alumno pues el dominio es un concepto primario, y es fácil descartar los puntos que no pertenecen al dominio. Además, destaca la idea de continuidad | 3 |
| | Que no exista la derivada en un punto, implica que no existe el límite de la derivada en ese punto, pues es discontinua | 2 |

| | |
|---|---|
| 4 | Sin comentarios |

Para justificar la *veracidad* del segundo enunciado se presentaron los siguientes argumentos:

5. Es verdadera pues la existencia de recta tangente asegura que haya derivada.
6. Es verdadera dado que las derivadas laterales coinciden.
7. Es verdadera porque la función es continua
8. Es verdadera dado que $f'(x) = \frac{(x-1)^{\left\{-\frac{2}{3}\right\}}}{3}$, $f'(x)$ es continua

En la tabla I2 se sintetizan los comentarios dados tras elegir alguno de los argumentos.

Tabla I2. *Comentarios dados al elegir un argumento para la veracidad*

| *Argumento* | *Comentario* | *Frecuencia* |
|---|---|---|
| 2 | Es más formal dado que usa la definición | 4 |
| 4 | Tiene más rigor | 2 |
| | Garantiza que se cumpla la definición | 2 |