Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas II Andalucía – Julio de 2020

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

Miércoles, 8 de julio de 2020

Ejercicio 1:

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

(a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. **(1.25 puntos)**

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1.25 puntos)**

Solución : La función f es una función racional (cociente de polinomios), por lo que es continua y derivable en todo su dominio. El dominio de la función f es $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ ya que su denominador se anula en los puntos $x = 1$ y $x = -1$. En dicho dominio, factorizamos los polinomios que determinan su numerador y su denominador, simplificando su expresión general de la siguiente forma: para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ (es decir, $x \neq \pm 1$)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}.$$

Esto significa que la función f también puede ser expresada como:

$$f(x) = \frac{x-3}{x-1} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}.$$

Obsérvese que aunque esta expresión racional puede ser evaluada en $x = -1$, la función f no está definida en $x = -1$.

* Profesor de la Universidad de Granada - http://www.ugr.es/~aroldan

Apartado (a). Los puntos que anulan al denominador de f son los candidatos para convertirse en asíntotas verticales (en los restantes puntos, f es continua, por lo que no puede poseer una asíntota vertical en dichos puntos). Calculamos:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-1-3}{-1-1} = 2.$$

Como este límite es finito, f no posee una asíntota vertical en $x=-1$. Por otro lado, en $x=1$ calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x-1} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{x-1} = -\infty.$$

Por tanto, la función f posee una asíntota vertical en $x=1$.

Para estudiar la existencia de asíntotas horizontales u oblicuas, calculamos los límites:

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x-3}{x-1} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

Dado que este límite es finito, la recta $y=1$ es asíntota horizontal de f a ambos lados. Además, dado que posee asíntotas horizontales a ambos lados, la función f no posee ninguna asíntota oblícua.

$$\boxed{\text{La función } f \text{ posee AV en } x=1 \text{ y AH en } y=1.}$$

Apartado (b). Para estudiar la monotonía de f, calculamos su función primera derivada, que viene dada, para cada $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$, por:

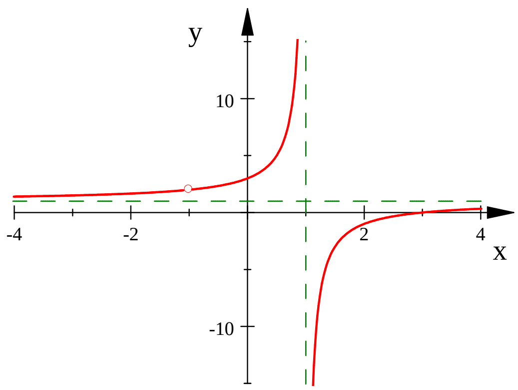
$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x-1}\right)' = \frac{1\cdot(x-1)-(x-3)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}.$$

Claramente $f'(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$, por lo que f es estrictamente creciente en todo su dominio. Su dominio se divide en tres intervalos.

$$\boxed{\text{La función } f \text{ es creciente en } (-\infty,-1), \text{ en } (-1,1) \text{ y en } (1,+\infty) \text{ (en todo su dominio).}}$$

■

La gráfica de la función f es la siguiente. Obsérvese que no está definida en $x = -1$.



Ejercicio 2:

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = x\,\mathrm{e}^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\dfrac{1}{9}$.

Solución : La función f es continua en $\mathbb{R}$ y, además, toma valores estrictamente positivos cuando $x > 0$. Por consiguiente, el área indicada se calcula mediante la siguiente integral definida, cuyo valor debe ser $1/9$:

$$\int_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{9}.$$

Calculamos la integral indefinida de la función f integrando por partes:

$$\int f(x)\,dx = \int x\,\mathrm{e}^{3x}\,dx = \left\| \begin{array}{lll} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \mathrm{e}^{3x}\,dx & \Rightarrow & v = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \end{array} \right\| = x \cdot \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} - \int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} dx$$

$$= \frac{x\,\mathrm{e}^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{3x}\,dx = \frac{x\,\mathrm{e}^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} + C = \frac{3x\,\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{3x}}{9} + C = \frac{\mathrm{e}^{3x}(3x-1)}{9} + C.$$

Aplicando la *regla de Barrow*,

$$\int_0^a f(x)\,dx = \left(\frac{\mathrm{e}^{3x}(3x-1)}{9}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{\mathrm{e}^{3a}(3a-1)}{9} - \frac{\mathrm{e}^{0}(0-1)}{9} = \frac{\mathrm{e}^{3a}(3a-1)+1}{9}.$$

Igualando a $\dfrac{1}{9}$, resolvemos la ecuación:

$$\frac{\mathrm{e}^{3a}(3a-1)+1}{9} = \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{3a}(3a-1)+1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{3a}(3a-1) = 0.$$

Un producto de números reales se anula únicamente cuando alguno de los factores vale cero. Dado que $\mathrm{e}^{3a} > 0$, debe ser el otro factor el que se anule. Así, la ecuación $3a - 1 = 0$ posee, como única solución, al número $a = \dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{a = \frac{1}{3}.}$$

■

Ejercicio 3:

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Estudia el rango de A según los valores de m. **(1.5 puntos)**

(b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$. **(1 punto)**

Solución: **Apartado (a).** La matriz A posee, al menos, rango dos ya que el siguiente menor no se anula:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Para que A posea rango 3, su determinante debe ser no nulo. Lo calculamos desarrollándolo por la primera columna:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & m+1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + m \cdot \begin{vmatrix} -1 & m+2 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 5 + m \cdot (-m-1-m-2) = 5 + m \cdot (-2m-3) = -2m^2 - 3m + 5.$$

Calculamos cuándo se anula este determinante:

$$\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2m^2 + 3m - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad m_1 = 1, \ m_2 = \frac{-5}{2}.$$

$$\boxed{\operatorname{rg} A = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad m = 1 \ \text{ o } \ m = \dfrac{-5}{2}, \\ 3, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}}$$

Apartado (b). Para $m = 2$, la matriz A posee rango 3, por lo que es invertible. Dado que

$$(2020\,A)^{-1} = 2020^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot A^{-1},$$

debemos calcular la matriz inversa de la matriz A. Teniendo en cuenta que $m = 2$, sabemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \det A = -2m^2 - 3m + 5\big|_{m=2} = -9.$$

La matriz adjunta de A es:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & -2 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj}(A)^T = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -5 & -5 & 7 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente:

$$(2020\,A)^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -5 & -5 & 7 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18180} \begin{pmatrix} -5 & -5 & 7 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{(2020\,A)^{-1} = \frac{1}{18180} \begin{pmatrix} -5 & -5 & 7 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.}$$

■

Ejercicio 4:

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

(a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a. **(1.25 puntos)**

(b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

Solución: **Apartado (a).** Un punto de la recta r es $A_r = (1, 2, 1)$ y un posible vector director de r es $\vec{u}_r = (1, 1, a)$. De igual forma, un punto de la recta s es $A_s = (3, 3, -1)$ y un posible vector director de s es $\vec{u}_s = (-a, -1, 2)$. Para que las rectas r y s fuesen paralelas (incluyendo la posibilidad de que fuesen iguales), sus vectores directores deberían ser proporcionales, por lo que deberían cumplirse las igualdades:

$$\frac{1}{-a} = \frac{1}{-1} = \frac{a}{2}$$

(podemos dividir entre a ya que $a \neq 0$). Sin embargo, el sistema anterior no posee ninguna solución. Por consiguiente, las rectas r y s no son nunca paralelas (ni iguales). Estudiamos ahora el rango del conjunto $\{ \vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{A_r A_s} \}$ para conocer si se cruzan o se cortan en el espacio. Este conjunto posee, al menos, rango 2 ya que los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ son linealmente independientes (no son paralelos). Dado que $\overrightarrow{A_r A_s} = A_s - A_r = (3, 3, -1) - (1, 2, 1) = (2, 1, -2)$, para conocer el rango de $\{ \vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{A_r A_s} \}$ calculamos el determinate de la matriz que forman sus coordenadas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \left(2 + 4 - a^2\right) - (-2a + 2a + 2) = 4 - a^2.$$

Dado que las soluciones de la ecuación $4 - a^2 = 0$ son 2 y -2, esta matriz poseerá rango 2 cuando $a = 2$ o $a = -2$ (en este caso, las rectas se cortan en un único punto), y poseerá rango 3 en cualquier otro caso (se cruzan en el espacio).

- Si $a \in \{2, -2\}$, las rectas r y s se cortan en un único punto.
- Si $a \in \mathbb{R} \diagdown \{2, -2\}$, las rectas r y s se cruzan en el espacio.

Apartado (b). Si suponemos que $a = 2$, los vectores directores de las rectas son $\vec{u}_r = (1, 1, 2)$ y $\vec{u}_s = (-2, -1, 2)$. Así, puntos genéricos de dichas rectas son de la forma:

$$P_r = A_r + \lambda\, \vec{u}_r = (1, 2, 1) + \lambda(1, 1, 2) = (\lambda + 1, \lambda + 2, 2\lambda + 1)\,,$$
$$P_s = A_s + \mu\, \vec{u}_s = (3, 3, -1) + \mu(-2, -1, 2) = (3 - 2\mu, 3 - \mu, 2\mu - 1)\,.$$

Dado que sabemos que existe un único punto en común en r y s, igualamos $P_r = P_s$, obteniendo el sistema

$$\begin{cases} \lambda + 1 = 3 - 2\mu, \\ \lambda + 2 = 3 - \mu, \\ 2\lambda + 1 = 2\mu - 1, \end{cases}$$

cuya única solución es $\lambda = 0$ y $\mu = 1$. Por tanto, el punto de intersección entre las rectas r y s es:

$$P = P_r|_{\lambda=0} = (\lambda + 1, \lambda + 2, 2\lambda + 1)|_{\lambda=0} = (1, 2, 1)\,.$$

Cualquier recta perpendicular a las rectas rectas r y s debe llevar la dirección de un vector que sea, a la vez, perpendicular a los vectores directores de r y de s. Calculamos un vector perpendicular, a la vez, a los vectores directores de r y de s, mediante su producto vectorial:

$$\vec{v} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la recta solicitada es la recta que pasa por el punto $P(1,2,1)$ en la dirección del vector $\vec{v}(4,-6,1)$. Las ecuaciones paramétricas de dicha recta son las siguientes:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 4\lambda, \\ y = 2 - 6\lambda, \\ z = 1 + \lambda. \end{cases}}$$

■

Ejercicio 5:

Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$.

(a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**

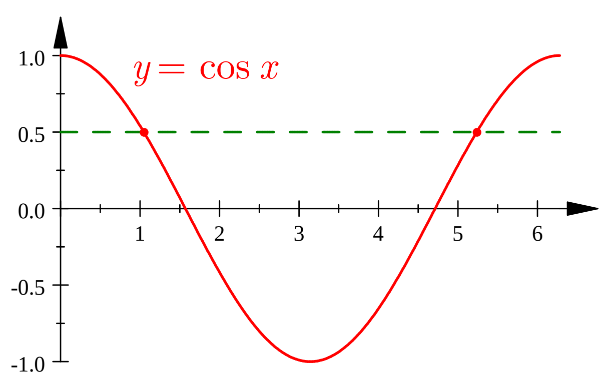
(b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{3}$. **(0.5 puntos)**

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** La primera derivada de la función f en su dominio es:

$$f'(x) = \frac{\cos x\,(2 - \cos x) - \operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen} x)}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\cos x - \left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right)}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}.$$

Esta derivada se anula cuando se anula su numerador en el intervalo $[0, 2\pi]$, lo cual corresponde a las soluciones:

$$2\cos x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$



Estudiamos el signo de la primera derivada de f empleando una tabla como la siguiente, donde incluimos los puntos críticos de f y los extremos de su dominio de definición:

f'	mín	+	máx	−	mín	+	máx
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{3}$	$\searrow$	$\frac{5\pi}{3}$	$\nearrow$	2π

$$\begin{cases} f'(0.5) = \dfrac{2\cos 0.5 - 1}{(2-\cos 0.5)^2} \approx 0.599 > 0, \\ f'(3) = \dfrac{2\cos 3 - 1}{(2-\cos 3)^2} \approx -0.333 < 0, \\ f'(6) = \dfrac{2\cos 6 - 1}{(2-\cos 6)^2} \approx 0.851 > 0. \end{cases}$$

De esta forma, la función f es estrictamente creciente en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$, y estrictamente decreciente en el intervalo $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$. Por tanto, la función f posee un máximo relativo en $x = \pi/3$ y un mínimo relativo en $x = 5\pi/3$. Los extremos del intervalo de definición, a saber, $x = 0$ y $x = 2\pi$, también son extremos relativos de la función f. Por ello, para determinar sus extremos absolutos, evaluamos dicha función tanto en sus puntos críticos como en los extremos de su dominio de definición:

$$f(0) = \frac{\operatorname{sen} 0}{2-\cos 0} = \frac{0}{2-1} = 0, \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{2-\cos(\pi/3)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}(5\pi/3)}{2-\cos(5\pi/3)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad f(2\pi) = \frac{\operatorname{sen} 2\pi}{2-\cos 2\pi} = \frac{0}{2-1} = 0.$$

Por consiguiente,

> La función f alcanza su máximo absoluto en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y su mínimo absoluto en $\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Apartado (b). En el apartado anterior hemos demostrado que en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$ la función f posee un máximo absoluto y su primera derivada se anula en dicho punto. Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente en dicho punto es:

$$y - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

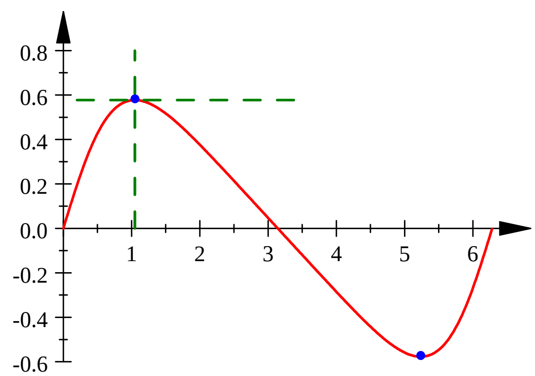
La recta normal a la gráfica de f en este punto es la recta perpendicular a la anterior que pasa por dicho punto. Dado que $y = \sqrt{3}/3$ es una recta paralela al eje de abscisas (su representación gráfica es horizontal), la recta perpendicular indicada debe ser paralela al eje de ordenadas, es decir, vertical, por lo que su ecuación es precisamente $x = \dfrac{\pi}{3}$.

> La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{3}$ es $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en dicho punto es $x = \dfrac{\pi}{3}$.

■

Aunque no se pide, la gráfica de la función f en el intervalo $[0, 2\pi]$ es la siguiente:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$$



Ejercicio 6:

Sea f la función dada por $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$.

(a) Calcula $\displaystyle\int f(x)dx$. **(2 puntos)**

(b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$. **(0.5 puntos)**

Solución: **Apartado (a).** En primer lugar, dividimos los polinomios numerador y denominador,

$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & & +4 & x^2 - 4x + 4 \\ \cline{4-4} -3x^2 & +12x & -12 & \qquad 3 \\ \cline{1-3} & 12x & -8 & \end{array}$$

y obtenemos:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2} = \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4} = 3 + \frac{12x - 8}{(x-2)^2}.$$

Expresamos el término de la derecha como suma de fracciones simples:

$$\frac{12x-8}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A\,(x-2)+B}{(x-2)^2}=\frac{Ax+(B-2A)}{(x-2)^2}.$$

Así $A=12$ y $B-2A=-8$, de donde $B=16$. Esto significa que la función f puede expresarse de la forma:

$$f\,(x)=3+\frac{12x-8}{(x-2)^2}=3+\frac{12}{x-2}+\frac{16}{(x-2)^2}.$$

Por consiguiente:

$$\int f\,(x)\,dx=\int\left(3+\frac{12}{x-2}+\frac{16}{(x-2)^2}\right)dx=\int 3dx+\int\frac{12}{x-2}dx+\int\frac{16}{(x-2)^2}dx$$
$$=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+C.$$

$$\boxed{\int f\,(x)\,dx=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+C.}$$

Apartado (b). Todas las primitivas de la función f son de la forma:

$$F\,(x)=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+C.$$

Calculamos el valor de C para que $F\,(3)=5$. Debemos resolver la ecuación:

$$5=F\,(3)=3\cdot 3+12\ln|3-2|-\frac{16}{3-2}+C=9+0-16+C=-7+C.$$

Por consiguiente, $C=12$.

La primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3,5)$ es:

$$F\,(x)=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+12.$$

■

Ejercicio 7:

Considera $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\4&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a\\2a\\3a\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

(a) Discute el sistema dado por $AX=B$, según los valores de a. **(1.25 puntos)**

(b) Para $a=0$, resuelve el sistema dado por $AX=B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y+z=4$. **(1.25 puntos)**

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** Aplicamos el método de Gauss-Jordan a la matriz ampliada $(A|B)$:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & -3 & 0 & -a \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & -4a \end{array} \right\|$$

La matriz A posee rango 2 mientras que la matriz ampliada posee rango 2, si $a = 0$, y rango 3, si $a \neq 0$. En el primer caso ($a = 0$), las matrices A y $(A|B)$ poseen el mismo rango (2), por lo que el sistema es compatible; en el segundo caso ($a \neq 0$), la matriz del sistema A posee rango 2 y la matriz ampliada $(A|B)$ posee rango 3, por lo que el sistema es incompatible (poseen rangos diferentes). En caso de ser compatible ($a = 0$), dado que el sistema posee tres incógnitas y las matrices A y $(A|B)$ poseen rango dos, el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico.

- Si $a = 0$, el sistema es compatible indeterminado (uniparamétrico).
- Si $a \neq 0$, el sistema es incompatible.

Apartado (b). Suponiendo que $a = 0$, el resultado del proceso de Gauss-Jordan nos indica que el sistema $AX = B$ es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Si llamamos $\lambda = z$, resulta que $x = -y - z = -z = -\lambda$. Por consiguiente, las infinitas soluciones del sistema $AX = B$ vienen dadas por la expresión:

$$\begin{cases} x = -\lambda, \\ y = 0, \\ z = \lambda, \end{cases} \qquad \text{siendo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ arbitrario.}$$

La solución que cumple $y + z = 4$ debe estar formada por $y = 0$, de donde $z = 4$ y $x = -z = -4$.

$$\text{Las soluciones del sistema } AX = B \text{ son } \begin{cases} x = -\lambda, \\ y = 0, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La solución que cumple $y + z = 4$ es $(x, y, z) = (-4, 0, 4)$.

■

Ejercicio 8:

Se considera el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

(a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r. **(1.25 puntos)**

(b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r. **(1.25 puntos)**

Solución: **Apartado (a).** Un vector director de la recta r es

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, el haz de planos perpendiculares a la recta r es:

$$\{\, 3x-3y-z=k \,\}_{k\in\mathbb{R}}\,.$$

Determinamos el parámetro k para que el plano pase por el punto $A(1,-2,0)$, obteniendo:

$$k = 3\cdot 1 - 3\cdot(-2) - 0 = 9.$$

Así:

$$\boxed{\text{El plano que pasa por } A \text{ y es perpendicular a } r \text{ es: } \quad 3x-3y-z=9.}$$

Apartado (b). Obtenemos un punto B_r de la recta r tomando $y=1$ en sus ecuaciones, de donde $x=-1$ y $z=1$. Así $B_r=(-1,1,1)$. El vector $\overrightarrow{B_rA} = A - B_r = (1,-2,0)-(-1,1,1) = (2,-3,-1)$ debe ser un vector director del plano solicitado. Por ello, dicho plano queda determinado por el punto $A(1,-2,0)$ y los vectores directores $\vec{u}_r$ y $\overrightarrow{B_rA}$. De esta forma, un vector normal al plano es:

$$\vec{n} = \vec{u}_r \times \overrightarrow{A_rA_s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

El haz de planos perpendiculares a este vector es:

$$\{\, y-3z=k \,\}_{k\in\mathbb{R}}\,.$$

Determinamos el parámetro k para que el plano pase por el punto $A(1,-2,0)$, obteniendo:

$$k = (-2) - 3\cdot 0 = -2.$$

Así:

$$\boxed{\text{El plano que pasa por } A \text{ y contiene a } r \text{ es:} \quad y - 3z = -2.}$$

■