



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

M.M. Gea  
R. Álvarez- Arroyo  
J.A. Garzón-Guerrero  
(Editores)



**Seminario**  
**Hispano-Brasileño de**  
**Educación Estadística**

Granada **2020**



# SEMINARIO HISPANO BRASILEÑO DE EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

EDITORES:

MARIA MAGDALENA GEA SERRANO

ROCÍO ÁLVAREZ ARROYO

JOSÉ ANTONIO GARZÓN GUERRERO

GRANADA, 2020

SEMINARIO HISPANO BRASILEÑO DE EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

© Los autores

Grupo PAI: FQM 126

Departamento de Didáctica de la Matemática

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Granada

18071 Granada

ISBN: 978-84-09-20298-0

# PRESENTACIÓN

En la actualidad, encontramos gran interés e implicación por la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad en docentes e investigadores, que se visibiliza en diversas fuentes de información (congresos, revistas, instituciones, etc.), así como en las nuevas líneas de investigación que se incorporan a programas de doctorado y maestría, con la finalidad de atender a las problemáticas que surgen en este campo de investigación.

En muchas de estas fuentes se emplea el término cultura o alfabetización estadística para referirse, fundamentalmente, a la necesidad de un conocimiento estadístico básico para todos los ciudadanos. Paralelamente, surge un compromiso de la institución educativa (gobierno de un país, programas de formación de docentes y alumnado, etc.) por ofrecer una formación estadística adecuada a la realidad en que vivimos. Gran parte de responsabilidad recae en el docente, quien debe diseñar planes de formación idóneos para que los estudiantes adquieran con sentido los conocimientos de la materia. Justo aquí es donde la investigación en educación estadística evidencia su gran potencialidad para responder a la problemática planteada.

En Brasil y España encontramos grupos de investigación consolidados en torno a la didáctica de la estadística y probabilidad, cuyas líneas de actuación tienen muchos puntos de encuentro. Entre miembros de estos grupos se han establecido contactos en los últimos años, generalmente a través de visitas, participación conjunta en congresos y mediante estancias de investigación internacionales. Estas actividades, en su mayoría, son financiadas a nivel estatal o local, apoyando a que la investigación alcance la excelencia científica, y produzca resultados que redunden en la sociedad.

En el escenario de intercambio y colaboración entre investigadores internacionales, un grupo de profesores brasileños, miembros del Grupo de Trabajo de Educación Estadística GT12 de la Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, planteó la iniciativa de visitar al Grupo de investigación de Educación Estadística, que forma parte del grupo PAIDI - FQM126, de la Universidad de Granada durante la semana del 18 al 22 de mayo. Así surgió la idea de celebrar un seminario de investigación durante las citadas fechas que se ha denominado *Seminario Hispano-Brasileño de Educación Estadística*, y que se realizará virtualmente.

Dicho seminario ha sido organizado por el comité local del evento, formado por los profesores *Gustavo R. Cañadas, Rocío Álvarez Arroyo, José Antonio Garzón y María Burgos*, de la Universidad de Granada, junto al comité científico constituido por los profesores de la Universidad de Granada *Carmen Batanero, Juan D. Godino, Pedro Arteaga y María Magdalena Gea* y profesores de distintas universidades brasileñas *Cassio Giordano, Irene Mauricio Cazorla, Suzi Samá y Marta Élid Amorim*, (Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Universidade Estadual de Santa Cruz, Universidade Federal do Rio Grande y Universidade Federal de Sergipe, respectivamente).

La finalidad del evento es dar a conocer con profundidad a los participantes algunos de los trabajos realizados actualmente en España y Brasil, para determinar complementariedades y concordancias que redunden en los siguientes aspectos:

- Fomentar la producción científica en Educación Estadística, realizada en colaboración a medio y largo plazo en entre España y Brasil, incluyendo estudios comparados, replicación de trabajos con nuevas variables o reanálisis de trabajos anteriores desde otras perspectivas teóricas.
- Desarrollar proyectos de investigación conjunto y buscar fuentes de financiación.
- Preparar propuestas conjuntas de formación de profesores y de mejora de la educación estadística en las escuelas.
- Promocionar visitas internacionales de investigadores y estudiantes de los cursos de máster y doctorado de las universidades participantes; Analizar la posibilidad de codirección de trabajos, o participación en tribunales.
- Fomentar la presentación de trabajos conjuntos en congresos españoles, europeos y brasileños. En particular, preparar una amplia presencia de investigadores españoles y brasileños en el próximo ICOTS (International Conference on Teaching Statistics), que se celebrará en Rosario, Argentina, en 2022.
- Preparar ediciones especiales sobre Educación Estadística en revistas brasileñas y españolas.

El seminario se ha organizado mediante presentaciones orales, con discusión posterior por los asistentes. Para el mayor aprovechamiento de esta actividad, los ponentes previamente han elaborado documentos de resumen de dichas ponencias, que pretenden facilitar la discusión en el seminario y la búsqueda de colaboraciones entre participantes. Los trabajos presentados se organizan en cuatro focos de interés que son la formación de profesores, la estadística, la probabilidad, la inferencia y trabajos generales.

María Magdalena Gea Serrano  
Rocío Álvarez Arroyo  
José Antonio Garzón Guerrero

# Índice

	Pág.
<b>1. Trabajos Generales</b>	
Coutinho, C. Q. S. & Goulart, A. <i>Las organizaciones didácticas y matemáticas en libros didácticos en Brasil.</i>	1
Estrada, A., Alvarado, H., & Nascimento, M. M. <i>La medición de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza.</i>	5
Godino, J. D. <i>Perspectiva de las investigaciones sobre educación estadística realizadas en el marco del enfoque ontosemiótico.</i>	9
Oliveira Junior, A. P. <i>Actitudes hacia la probabilidad de estudiantes de cursos interdisciplinarios en educación superior en Brasil y su rendimiento académico.</i>	13
<b>2. Formación de profesores</b>	
Amorim, M. E., Pietropaolo, R. C., & Galvão, M. E. E. L. <i>Conhecimentos profissionais para o ensino de probabilidade: Uma meta-análise dos estudos desenvolvidos pelo grupo FORCHILD.</i>	17
Batanero, C., Gea, M., & Arteaga, P. <i>El análisis de la idoneidad didáctica en la formación de profesores para enseñar estadística.</i>	21
Berciano, A., Subinas, A., & Anasagasti, J. <i>Estadística basada en proyectos en contextos de riesgo de exclusión social: Cómo inferir esta práctica a la formación inicial del profesorado.</i>	25
Bertazini, E. & Figueiredo, A. C. <i>Conocimiento de la tabla de doble entrada por estudiantes de profesorado en matemáticas.</i>	29
Corrêa, S. A. & Espasandín Lopes C. <i>Aprendizagens docentes em educação estatística narradas por professores em formação contínua.</i>	33
Fontoura Garcia Silva, A., Pietropaolo, R. C., & Brisola Brito Prado, M. E. <i>Conhecimento profissional para o ensino da estatística: um estudo sobre pesquisas desenvolvidas no âmbito do OBEDUC.</i>	37
Muñiz-Rodríguez, L. & Rodríguez-Muñiz, L. J. <i>Fomentando la alfabetización estadística en el profesorado de educación secundaria mediante una actividad formativa y evaluadora.</i>	41
Samá, S. & Amorim, M. E. <i>Formação inicial de professores: uma discussão sobre o ensino de estatística na educação básica.</i>	45
Santana, E. R. S., & Couto, M. E. S. <i>Desenvolvimento profissional e estatística: um encontro entre a universidade e a escola.</i>	49
Scarlassari, N. T. & Espasandín Lopes C. <i>A autoformação narrada por professores ao promoverem a educação estatística.</i>	53

### 3. Estadística

Alsina, A. <i>Aplicación del enfoque de los itinerarios de enseñanza de las matemáticas a la enseñanza de la estadística en educación primaria.</i>	57
Anasagasti, J. & Berciano A. <i>Inteligencias múltiples en la personalización de la educación estadística.</i>	61
Campos, C. R. & Perín, A. P. <i>Interfaces y convergencias entre la educación estadística y la educación financiera.</i>	65
Cazorla, I., Utsumi, M., & Monteiro, C. E. <i>Variáveis estatísticas e seus gráficos.</i>	69
Diniz, L. N. & Diniz, I. G. A. <i>Um estado do conhecimento de investigações sobre interpretação de gráficos estatísticos.</i>	73
Estepa, A. & del Pino, J. <i>La estadística en los libros de texto en la educación secundaria obligatoria.</i>	77
García-Alonso, I. <i>Análisis exploratorio de la lectura conjunta de dos gráficos estadísticos por estudiantes de secundaria.</i>	81
Garzón-Guerrero, J. A. <i>Lectura e interpretación de gráficos estadísticos de la prensa escrita en futuros profesores: un estudio exploratorio en Italia y Portugal.</i>	85
Giordano, C. C. & Schnorr Buehring, R. <i>Concepciones estadísticas: un estudio con estudiantes de la secundaria.</i>	89
Ody, M. C., Viali, L., & Giordano, C. C. <i>Análise do tratamento da informação realizado por estudantes do ensino superior.</i>	93
Pallauta, J. D. & y Arteaga, P. <i>Complejidad semiótica de gráficos y tablas estadísticas.</i>	97
Santos, L. R. S., Oliveira Júnior, A. P., & Lozada, A. O. <i>Preparación de libros paradidacticos para la enseñanza de estadística en la escuela primaria considerando la base curricular nacional común en Brasil.</i>	101

### 4. Probabilidad

Beltrán-Pellicer, P. & Giacomone, B. <i>Algunas propuestas de aplicación de indicadores de idoneidad didáctica en probabilidad.</i>	105
Felisberto de Carvalho, J. I. F. & Queiroz Araújo, A. F. <i>Articulando a estatística e a probabilidade por meio da curva normal: conhecimentos didáticos-matemáticos de professores do ensino médio.</i>	109
Figueiredo, A. C. <i>Simulación: La probabilidad frecuentista en el contexto del juego franc-carreau.</i>	113
Kian, A. F., de Oliveira Júnior, A. P. & Barbosa, N. D. <i>Un camino hacia el desarrollo del lenguaje probabilístico para los primeros años de la escuela primaria.</i>	117
Souza, A. C., & Rocha, C. A. <i>O que dizem as pesquisas brasileiras sobre combinatória? Um estudo produzido a partir de periódicos nacionais na última década.</i>	121

## 5. Inferencia

- Álvarez-Arroyo, R. & Cañadas, G. R. *Comprensión de los estudiantes de psicología sobre intervalos de confianza.* 125
- Begué, N., Gea, M., & Batanero, C. *Conflictos semióticos de estudiantes de bachillerato al generar muestras de la distribución binomial.* 129
- Lopez-Martín, M. M. *Análisis del significado evaluado de la inferencia estadística en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía.* 133
- Ortiz de Haro, J.J. & Castro Lugo, F. *Análisis del lenguaje de la proporción muestral en libros de texto.* 137
- Roldán López de Hierro, A. F. *Acerca de la comprensión del intervalo de confianza entre estudiantes preuniversitarios.* 141
- Velasque, L. S., Barbosa, M. T. S., & Silva, A. S. A. *Inferência informal no ensino de estatística: reflexões a partir de experimentos práticos.* 145



# Las organizaciones didácticas y matemáticas en libros didácticos en Brasil

Cileda de Queiroz y Silva Coutinho<sup>1</sup> e Amari Goulart<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Pontificia Universidad Católica de São Paulo; Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de São Paulo

## Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar cómo las organizaciones matemáticas y didácticas, en el sentido propuesto por Chevallard (1999), están presentes en los libros didácticos utilizados en las escuelas públicas brasileñas. Para lograr este objetivo, analizamos dos colecciones, una dirigida a los últimos cuatro años de la escuela primaria, y otra dirigida a la secundaria, ambas aprobadas por el Programa Nacional del Libro Didáctico. Según los análisis, encontramos una Organización Matemática limitada a un saber hacer cuya razón de ser ya no es significativa, y una Organización Didáctica tecnicista.

**Palabras clave:** Libros didácticos, organización matemática, organización didáctica, probabilidad.

## 1. Introducción

El objetivo de este artículo es analizar cómo son propuestas las Organizaciones Matemáticas (O.M.) y las Organizaciones Didácticas (O.D.), en el sentido presentado por Chevallard (1999), en los libros didácticos de Matemáticas utilizados en la escuela básica brasileña.

La importancia de analizarse los libros didácticos en Brasil se debe, según Silva (1996), a su fuerte tradición dentro de la cultura escolar brasileña. Dante (1996), Lajolo (1996), E.T Silva (1996) y M.A. Silva (2012), señalan que, debido a la precaria situación del sistema educativo brasileño, el libro didáctico en Brasil puede determinar los contenidos y las estrategias de enseñanza, por lo tanto, determinar de manera decisiva lo que se enseña y cómo se enseña, es decir, determina las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas en el sistema educativo brasileño, como veremos más adelante.

## 2. Organización matemática y organización didáctica

Según Chevallard (1999), una O.M. es una respuesta a una tarea o conjunto de tareas. Aunque el autor no defina claramente qué es un O.M., nos brinda un bosquejo para que comprendamos su estructura. El autor postula que la O.M. es compuesta por cuatro componentes principales: tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Chevallard (1999) llama “organización praxeológica” a las relaciones dinámicas que operan entre estos componentes.

Observándose tales relaciones, cuyo objetivo es responder cuestiones sobre un determinado conjunto de actividades matemáticas, emergen dos perfiles inseparables de esta organización, que el autor llama el bloque del “saber hacer” y el bloque del “saber”.

Al unirse estos dos bloques que se refieren a un conjunto de actividades matemáticas, tenemos una O.M. Paralelamente a la noción de O.M., surge la noción de O.D., que, según Chevallard (1999), trata de las respuestas más o menos explícitas que se refieren a la

"praxis" determinada por las tareas y técnicas didácticas y los "logotipos" determinados por la justificativa sobre el saber hacer, es decir, as tecnologías y teorías didácticas.

Considere, por ejemplo, la O.M. relativa al estudio del objeto matemático Ecuación de Segundo Grado. Tal organización tiene sus tareas, sus técnicas y su discurso teórico-tecnológico, y luego podemos elaborar la siguiente pregunta: "¿Cómo enseñar ecuaciones de segundo grado a los estudiantes de la educación básica?"

Podemos preguntarlo en la forma de la siguiente tarea: "Enseñar la ecuación de segundo grado a estudiantes de la educación básica". Según Chevallard (1999), la ejecución de esa tarea requiere por lo menos una técnica, que a su vez tiene un discurso teórico-tecnológico construido a partir de las teorías desarrolladas dentro del alcance de la Didáctica de las Matemáticas.

### **3. Metodología**

Para determinar cuáles son las O.M. y O.D. presentes en los tópicos de Probabilidad que están cubiertos en los libros didácticos de Matemáticas utilizados en las escuelas de educación básica en Brasil, analizamos una obra dirigida a los últimos cuatro años de la escuela primaria y una obra dirigida a la escuela secundaria, que fueron las más distribuidas por el Programa Nacional del Libro Didáctico, según lo indicado por el Fondo Nacional de Desarrollo Educativo - FNDE, el organismo responsable de la compra y distribución de libros en las escuelas públicas brasileñas.

### **4. Análisis de las obras**

Analizando los contenidos en cuestión en la obra dirigida a los últimos cuatro años de la escuela primaria, encontramos las siguientes tareas relacionadas con la Probabilidad: Dado un experimento aleatorio, describir el espacio muestral; Calcular la probabilidad de un evento; Comparar la probabilidad de eventos; Calcular la probabilidad de un evento complementario; Calcular la probabilidad de la unión de eventos y Calcular el número de elementos de un evento dado. Observemos que aquí hay solo tres tipos de tareas: Calcular la probabilidad; Calcular el número de eventos y Describir el espacio muestral. Esos tipos de tareas están asociados con un número bastante reducido de técnicas que les son comunes (una técnica es la forma de realizar esta tarea) y todas están justificadas por el mismo discurso teórico-tecnológico: definición de probabilidad según el enfoque clásico.

Analizándose los contenidos relacionados con la escuela secundaria, encontramos las siguientes tareas relacionadas con la Probabilidad: Determinar el espacio muestral y los eventos de un experimento aleatorio; Calcular la probabilidad de un evento; Calcular la probabilidad de la unión de eventos; Calcular la probabilidad de un evento complementario; Calcular la probabilidad de un evento condicionado; Verificar la independencia de dos eventos; Calcular la probabilidad de un evento utilizando la distribución binomial. Nuevamente, observamos un número muy reducido de tipos de tareas y técnicas, siempre justificado por el mismo discurso tecnológico-teórico.

Al analizar las tareas encontradas, notamos que más del 50% de las tareas cubiertas en la escuela primaria se abordan nuevamente en la escuela secundaria. Además, también concluimos que las colecciones enfatizan el bloque "saber hacer" en detrimento del bloque "saber", que es casi ausente en las obras analizadas. Además, se hace hincapié en

algunas tareas en detrimento de otras, en general, la tarea Calcular la Probabilidad de un Evento es la más frecuente en las colecciones analizadas.

En relación con la O.D., predomina la O.D. tecnicista, según la clasificación de Gáscon (2003), y dicha organización implica la perspectiva de que enseñar y aprender Matemáticas significa enseñar y aprender algoritmos, con todo el reduccionismo que esto implica.

Se observa que en las actividades propuestas de las obras analizadas las tareas solicitadas generalmente implican el uso de algoritmos como técnica, en detrimento de la interpretación de los datos, y esta perspectiva no favorece la Alfabetización Probabilística, como lo señala Gal (2005).

## 5. Conclusión

En términos de TAD, debemos cuestionar la razón de ser de las organizaciones praxeológicas relativas a la probabilidad presente en los libros didácticos destinados a la Enseñanza Primaria II y Enseñanza Secundaria en la escuela brasileña, para que los analicemos. Es necesario, en términos de Lucas, Fonseca, Gascón y Casas (2014), que el bloque técnico-práctico (tarea/técnica) "no viva aislado del bloque tecnológico-teórico o del "discurso racional" que pueda mostrar la relevancia del trabajo con un cierto tipo de tareas" (p.6).

Nuestra investigación nos lleva a preguntar si las praxeologías matemáticas identificadas en los libros didácticos analizados no han perdido su "razón de ser", es decir, en términos de los autores antes mencionados: "no desaparecieron de esta institución escolar las cuestiones a las que esas praxeologías podrían responder y, en consecuencia, su estudio en la institución citada ya no tiene sentido" (pp. 6-7).

Continuamos investigando y buscando posibles razones de ser para las praxeologías matemáticas relacionadas con la probabilidad en la escuela básica brasileña.

## Referencias

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique du didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Dante, L. D. (1996). Livro didático de matemática: uso ou abuso?. *Em aberto*, 69, 52-58.
- Gascón, J. (2003). La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa*, 5, 11-37.
- Lucas, C. Oliveira., Bon, C. F., Gascón, J., & Casas, J. M. (2014). *Educação Matemática em Revista*, 16, 1-24.
- Lajolo, M. (1996). Livro didático: um (quase) manual de usuário. *Em aberto*, 69, 3-7.
- Silva, E. T. (1996). Livro didático: do ritual de passagem à ultrapassagem. *Em aberto*, 69, 8-11.
- Silva, M. A. (2012). A fetichização do livro didático no Brasil. *Educação e Realidade*, 37, 803-821.



# La medición de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza

Assumpta Estrada Roca <sup>1</sup>, Hugo Alvarado <sup>2</sup> y Maria Manuel Nascimento<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Lleida, España <sup>2</sup>Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile <sup>3</sup> Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal

## Resumen

La probabilidad es un componente importante de la educación escolar en el que los profesores tienen un rol fundamental. Por ello la medición de las actitudes hacia dicha materia es importante en el colectivo de profesores de Educación Primaria. El objetivo de esta comunicación es describir la Escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza (EAPE), (Estrada y Batanero, 2015) construida específicamente para docentes y futuros docentes, así como presentar los resultados obtenidos con futuros profesores de educación primaria en España y Chile. Se complementará aportando la versión en portugués de la escala.

**Palabras clave:** Medición de actitudes, probabilidad, formación de profesores.

## 1. Introducción

La probabilidad forma parte del currículo desde la Educación Primaria para ayudar a los niños a enfrentar la gran cantidad de información de naturaleza probabilística que se maneja en nuestro día a día. En España y otros países se incluyen contenidos sobre el lenguaje del azar, la comparación de probabilidades, la observación de experimentos aleatorios y recogida de datos sobre los mismos.

Desafortunadamente, a pesar de estar incluida de forma oficial en el currículo, es la probabilidad algo bastante olvidado en la clase de matemáticas, debido a falta de tiempo o de formación docente sobre esta materia o la actitud del profesorado hacia la misma (Batanero, Ortiz, & Serrano, 2007). Ello se explica porque hasta muy recientemente, no se contemplaba la probabilidad como parte de la formación de los futuros maestros, situación común en otros países. Por ello, es necesario reforzar la formación de los profesores responsables de introducir el conocimiento probabilístico en las escuelas y desarrollarlo (Azacárate & Cardeñoso, 2008).

Simultáneamente es importante valorar y reforzar la componente emocional en la formación de estos profesores, pues si un profesor no valora un tema, le parece que no está preparado para impartirlo o le disgusta, difícilmente logrará un aprendizaje efectivo por parte de los alumnos (Batanero & Díaz, 2012). Las actitudes forman parte del dominio emocional, junto con las emociones y creencias, que se diferencian en la estabilidad de la respuesta afectiva que representan, por el grado en que la cognición interviene en su formación, así como el tiempo que tardan en desarrollarse (Gómez-Chacón, 2016). En consecuencia, la evaluación de las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza de profesores y futuros profesores es un primer paso para organizar acciones educativas pertinentes.

El objetivo de este trabajo es presentar la escala EAPE, (Estrada & Batanero, 2015) construida específicamente para docentes y futuros docentes. Se complementará presentando resultados obtenidos con profesores de educación primaria en España

(Estrada, Batanero, & Diaz, 2018) y en Chile (Alvarado, Andaur, & Estrada, 2018) así como su versión en portugués.

## 2. La Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza, EAPE

Al ser la probabilidad un tema nuevo en la educación primaria, la medición de las actitudes del profesorado es imprescindible para organizar acciones formativas. Pero en la actualidad hay numerosas escalas de medición de actitudes y varias específicas hacia la estadística, pero ninguna para medir las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza dirigida al profesorado.

En Estrada y Batanero, (2015), se describe de forma precisa y detallada la construcción de la *Escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza (EAPE)*, obteniéndose un modelo multidimensional en el que las actitudes se estructuran en componentes relacionados con la probabilidad y otros relacionados con su enseñanza y que presentamos a continuación:

- *Componente afectivo hacia la probabilidad AP.* Valora los sentimientos personales del sujeto hacia la Probabilidad, como, por ejemplo: agrado-desagrado hacia esta materia, miedo-confianza al iniciar su estudio o al resolver problemas, interés-desinterés por el tema; sentimientos positivos o negativos hacia la Probabilidad. Este componente ha sido considerado en las escalas de actitudes hacia la estadística.
- *Competencia cognitiva apreciada hacia la probabilidad CCP.* Valora la percepción de la propia capacidad, conocimientos y habilidades intelectuales en Probabilidad. También, presente en las escalas de actitudes hacia la estadística, debido a que cuando una materia guste a un sujeto, es posible que la encuentre difícil o piense que tiene poca capacidad para la misma. Será importante que un profesor tenga una buena percepción de su propia capacidad para formarse en una materia determinada.
- *Componente comportamental hacia la probabilidad CP.* Evalúa la tendencia a utilizar la probabilidad, a la toma de decisiones, la ayuda a otros compañeros, el uso que se hace de la Probabilidad.
- *Componente afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad AE.* Valora los sentimientos personales hacia la enseñanza de la Probabilidad, que pueden variar (aunque estarán relacionados) con el componente afectivo hacia el tema. Este componente intenta medir el agrado-desagrado, miedo-confianza interés-desinterés por enseñar probabilidad.
- *Componente de competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad CDE.* Evalúa la percepción de la propia capacidad para enseñarla, resolver dificultades de los estudiantes, proponer buenas tareas, buscar recursos, etc. Un profesor puede pensar que tiene facilidad para aprender un tema, no obstante puede sentirse capacitado o no para enseñarlo.
- *Componente comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad CE.* Valora la tendencia a la acción didáctica: si el profesor trata o ha tratado o no de enseñar Probabilidad, si le da prioridad sobre otros temas, si piensa que debería posponerse en general.

- *Componente de valor hacia la probabilidad y su enseñanza VPE.* Se intenta evaluar el valor, utilidad y relevancia que el profesor concede a la probabilidad en la vida personal y profesional y a la formación del alumno en este tema, es decir a la inclusión de la enseñanza de la probabilidad en el currículo.

La escala está compuesta por 28 ítems, distribuidos equitativamente por componentes, 14 con enunciados en positivos y 14 en negativo. (Tabla 1)

### 3. Análisis de resultados de evaluación de actitudes.

Se presentan en la tabla 1 los resultados obtenidos en la aplicación de la escala con 232 futuros maestros españoles y 70 profesores de matemática en ejercicio y 51 profesores en formación de educación media chilenos.

	España		Chile	
	Media	Desv. Típica	Media	Desv. Típica
1. Me divierto en las clases en las que se explica probabilidad	3.04	0.80	3,93	0,82
2. Utilizo información sobre probabilidad a la hora de tomar decisiones	3.17	0.95	3,42	1,00
3. Será difícil para mí enseñar probabilidad	3.29	0.98	3,65	1,17
4. La probabilidad ayuda a entender el mundo de hoy	3.55	0.94	4,06	0,83
5. Me gusta la probabilidad; es un tema que siempre me ha interesado	2.91	0.92	3,79	0,91
6. La probabilidad es fácil	2.87	0.94	2,98	1,1
7. Nunca he usado la probabilidad fuera de las matemáticas	3.73	1.04	3,81	1,11
8. Domino los principales contenidos de probabilidad	2.69	0.96	3,91	0,90
9. Pienso que me gustará enseñar probabilidad en la escuela	3.31	0.90	4,07	1,09
10. Creo que sabré detectar y corregir errores y dificultades de los alumnos con la probabilidad	3.32	0.84	3,79	0,85
11. Sólo enseñaré probabilidad si me queda tiempo después de los otros temas	4.13	0.90	4,03	1,03
12. La probabilidad sólo sirve para los juegos de azar	4.41	0.75	4,26	0,98
13. La probabilidad no tiene tanto valor como otras ramas de las matemáticas	4.09	0.90	3,83	1,15
14. Me resultará fácil diseñar actividades de evaluación de la probabilidad	2.68	0.70	3,26	1,00
15. Uso la probabilidad en la vida cotidiana	3.36	0.93	3,84	0,98
16. Me siento intimidado ante datos probabilísticos	3.53	0.99	3,54	1,15
17. La probabilidad sólo la entienden la gente de ciencias	4.26	0.90	4,34	0,91
18. Evito leer las informaciones donde aparecen términos de probabilidad (en prospectos de medicamentos, etc.)	3.99	1.00	4,14	1,05
19. Los conocimientos sobre probabilidad, ayudan a los alumnos a razonar críticamente	3.73	0.76	4,12	0,78
20. Se debería enseñar probabilidad en los primeros niveles de enseñanza	3.48	0.95	4,14	1,01
21. Me preocupa saber responder preguntas de probabilidad de los alumnos	3.07	0.96	4,17	0,92
22. No me siento preparado para resolver cualquier problema básico de probabilidad	3.35	0.99	3,75	1,18
23. Pienso que no seré capaz de preparar recursos didácticos apropiados para la clase de probabilidad	3.67	0.91	3,94	1,03
24. Cuando sea pertinente, utilizaré la probabilidad en otras materia que enseño	3.48	0.83	3,95	0,74
25. Si pudiera eliminar alguna materia, sería la probabilidad	4.40	0.90	4,36	1,02
26. No tengo mucho interés en enseñar probabilidad aunque aparezca en el currículum	4.19	0.89	4,14	1,08
27. No me agrada resolver problemas de probabilidad	3.75	1.04	3,89	1,11
28. Como profesor creo que me sentiré cómodo al enseñar probabilidad	3.47	0.87	3,9	0,95

Los ítems con los puntajes más altos (más de 4 puntos en promedio y puntajes muy similares en las dos muestras) fueron el ítem 12 (la probabilidad es útil en situaciones además de los juegos de azar), ítem 25 (intención de enseñar probabilidad) y el ítem 17 (la probabilidad es comprensible. Los ítems con los puntajes más bajos (puntajes por debajo de 3 puntos) fueron el ítem 14 para las dos muestras (facilidad para preparar materiales didácticos), el ítem 6 (la probabilidad es fácil) y el ítem 8 (he dominado el contenido de probabilidad) solo para los españoles.

#### 4. Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos podemos concluir que la actitud es positiva tanto en los profesores españoles como en los chilenos, aunque es levemente mejor en profesores chilenos en ejercicio y con experiencia docente. Los futuros maestros en el estudio perciben la utilidad de la probabilidad y están dispuestos a enseñarla, pero no se sienten lo suficientemente preparados en el contenido matemático o pedagógico para hacerlo.

Por otro lado, en nuestro estudio de los componentes hacia la probabilidad y su enseñanza, queda en evidencia que el profesorado trata de darle prioridad sobre otros temas y valora la utilidad y relevancia de la probabilidad en la vida personal y profesional.

#### Referencias

- Alvarado, H., Andaur, G., & Estrada, A. (2018) Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: Un estudio exploratorio con profesores de matemática en formación y en ejercicio de Chile. *-Revista Paradigma*, 39 (2), 36-64.
- Azacárate, P., y Cardeñoso, J.M. (2008). Probabilidad. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en Educación Primaria* (pp. 591-620). Madrid: Síntesis.
- Batanero, C., Ortiz, J.J., y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 7-16.
- Batanero, C. & Díaz, C. (2012). Training teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics* 3(1), 3-13.
- Estrada, A. & Batanero, C. (2015). Construcción de la escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernandez, M. Molina & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-248). Alicante: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Estrada, A., Batanero, C., & Díaz, C. (2018). Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching. En C. Batanero & E. Chernoff, (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 313-332). Berlin: Springer.
- Gómez-Chacón, I. (2016). Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas. En A. Berciano et al. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 93-114). Malaga: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

# Perspectiva de las investigaciones sobre educación estadística realizadas en el marco del Enfoque Ontosemiótico

Juan D. Godino

Universidad de Granada

## Resumen

Se presenta una revisión de los trabajos de investigación realizados sobre la enseñanza de la estadística, probabilidad y combinatoria, analizando el uso que se hace en los mismos de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos. Se analiza, además, el papel desempeñado por las investigaciones sobre educación estadística en la construcción del EOS, así como las posibilidades que pueden ofrecer los progresivos refinamientos de este marco teórico para extender y profundizar en la investigación en dicho campo.

**Palabras claves:** educación estadística, fundamentos teóricos, enfoque ontosemiótico

## 1. Introducción

Se presenta un resumen de la ponencia presentada en el CIVEEST-2019 (Godino, 2019) en la cual se incluye una síntesis de las investigaciones realizadas en el campo de la educación estadística aplicando y desarrollando herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002).

El desarrollo del EOS ha estado estrechamente ligado a sus aplicaciones al campo de la Educación Estadística. Así, en el artículo “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos” (Godino & Batanero, 1994), que se considera como la “semilla” del EOS, se usa el concepto de media aritmética para contextualizar la reflexión sobre las nociones centrales de problema matemático, práctica, objeto y significado.

También, en el trabajo de síntesis del EOS “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática” (Godino, 2002) se aplica el concepto de mediana para presentar una técnica de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que permite determinar los significados institucionales y personales puestos en juego, e identificar posibles conflictos semióticos en la interacción didáctica. Concretamente, se analiza el proceso de instrucción propuesto para la mediana en un libro de texto, y las respuestas de una estudiante a una prueba de evaluación, aplicada tras la realización de dicho proceso de estudio.

Los diferentes proyectos de investigación y tesis doctorales dirigidos por Carmen Batanero en la Universidad de Granada han estado centrados en el campo de la educación estadística y, al ser coprotagonista de la elaboración del EOS, han usado el EOS como marco teórico. Por ello, en la ponencia realizada para el congreso CIVEEST y en esta presentación he considerado de interés hacer un análisis retrospectivo del papel desempeñado por las diversas herramientas del EOS en las investigaciones sobre educación estadística, muchas de las cuales han sido realizadas en el Grupo de Investigación de Educación Estadística de la Universidad de Granada. También trataré de hacer una propuesta de posibles avances en la investigación sobre formación de profesores en educación estadística, mediante la aplicación de los recientes desarrollos del EOS, en particular, del modelo de “Conocimientos y competencias didáctico-

matemáticas” (CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

## 2. Planteamiento metodológico

Las herramientas del EOS, cuyo uso vamos a analizar en las publicaciones sobre educación estadística, son las siguientes:

1. Significado pragmático de los objetos matemáticos, en su versión institucional y personal.
2. Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos.
3. Configuración didáctica. Diseño instruccional
4. Idoneidad didáctica
5. Modelo de Conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM)

Estas son las herramientas desarrolladas hasta la fecha para el análisis de los problemas epistemológico, ontológico, semiótico-cognitivo, educativo-instruccional y ecológico implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como para abordar el problema de la formación de profesores de matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2019). En la Tabla 1 incluimos una selección de trabajos publicados, clasificados según las herramientas del EOS que usan y los temas estadísticos abordados, los cuales serán analizados en los siguientes apartados.

Tabla 1. Selección de publicaciones según herramientas EOS y contenido estadístico

Herramienta EOS	Referencias	Contenido estadístico
Significados pragmáticos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Godino y Batanero (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.</li> <li>- Godino (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.</li> <li>- Batanero (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria.</li> </ul>	<p>Media</p> <p>Mediana</p> <p>Probabilidad</p>
Configuración ontosemiótica	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Batanero (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria.</li> <li>- Godino (2013a). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores</li> </ul>	<p>Probabilidad;</p>
Diseño instruccional	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tauber, Batanero y Sánchez (2004). Diseño, implementación y análisis de una secuencia de enseñanza de la distribución normal en un curso universitario.</li> <li>- Alvarado y Batanero (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial.</li> <li>- Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos.</li> </ul>	<p>Distribución normal</p> <p>Distribución binomial y normal</p> <p>Estadística descriptiva</p>
Idoneidad didáctica	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Arteaga, Batanero, Cañadas y Gea (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico.</li> <li>- Arteaga, Contreras y Cañadas (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio.</li> <li>- Arteaga, Batanero y Gea (2017). La componente mediacional del conocimiento didáctico- matemático de futuros profesores sobre estadística: un estudio de evaluación exploratorio.</li> <li>- Godino, Rivas y Arteaga (2012). Inferencia de indicadores de</li> </ul>	<p>Análisis datos</p> <p>Gráficos estadísticos</p> <p>Aleatoriedad</p> <p>Proyectos</p> <p>Estadística y</p>

	<p>idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Beltrán-Pellicer y Godino (2017). Aplicación de indicadores de idoneidad afectiva en un proceso de enseñanza de probabilidad en educación secundaria.</li> <li>- Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: <u>Aplicación para la reflexión sobre la práctica docente.</u></li> </ul>	<p>probabilidad elemental</p> <p>Probabilidad</p>
Modelo CCDM (formación de profesores)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Gea, M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico.</li> <li>- Godino (2013a). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores.</li> <li>- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático</li> <li>- Vásquez y Alsina (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático.</li> <li>- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M., y Cañadas, G. R. (2015) Statistical graphs complexity and reading levels: a study with prospective teachers.</li> <li>- Batanero, C. Arteaga, P., Serrano, L. y Ruiz, B. (2014). Prospective primary school teachers' perception of randomness.</li> <li>- Arteaga, P., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio.</li> <li>- Godino, J. D. y Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica.</li> <li>- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work.</li> <li>- Ortíz, J. J. y Font, V. (2014). Pre-service teachers' common content knowledge regarding the arithmetic mean.</li> </ul>	<p>Probabilidad</p> <p>Gráficos estadísticos</p> <p>Análisis de datos</p> <p>Aleatoriedad</p> <p>Estadística</p> <p>Probabilidad; análisis de datos</p> <p>Media aritmética</p>

Remitimos al lector al texto de la ponencia Godino (2019) presentada en el CIVEEST 2019 donde se incluye una breve descripción de algunos de los trabajos mencionados en la Tabla 1.

### 3. Reflexiones finales

La aplicación de las herramientas teóricas del EOS para el análisis e intervención didáctica se ha ido enriqueciendo progresivamente, revelando que este marco teórico es dinámico, que las herramientas se van refinando a medida que se aplican en las diversas investigaciones. Permite hacer análisis a nivel global, de tipo macroscópico, como es la caracterización de los significados pragmáticos de un objeto, por ejemplo, la probabilidad (Batanero, 2005), o la valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción, en sus diferentes facetas. Pero también se pueden hacer análisis a nivel microscópico de la resolución de un problema, tanto desde el punto de vista institucional (epistémico) como personal (cognitivo).

El panorama presentado en esta ponencia sobre las investigaciones realizadas en educación estadística basadas en el uso del EOS revela la estrecha relación del desarrollo y evolución de este marco teórico con los problemas de enseñanza de la estadística, probabilidad y combinatoria, así como con la formación de profesores.

En la Figura 1 se resumen cinco sub-competencias de la competencia general de análisis e intervención didáctica que deberían desarrollar los profesores. Si bien el desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica ha sido objeto de atención en el campo de la estadística sería de interés promover proyectos de investigación sobre formación de profesores que les capaciten en el desarrollo de las restantes competencias, en particular, el análisis global de los significados de los objetos del campo de la estadística, probabilidad y combinatoria, el análisis ontosemiótico de las prácticas, las configuraciones y trayectorias didácticas y la toma de conciencia de la trama de normas que soportan y condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje.



Figura 4. Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017)

## Referencias

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-263.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.
- Godino, J. D. (2019). Perspectiva de las investigaciones sobre educación estadística realizadas en el marco del Enfoque Ontosemiótico. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html)
- Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39 (1), 37- 42.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.

# Actitudes hacia la probabilidad de estudiantes de cursos interdisciplinarios en educación superior en Brasil y su rendimiento académico

Ailton Paulo de Oliveira Júnior

Universidade Federal do ABC

## Resumen

El objetivo de este trabajo es identificar las actitudes de 456 estudiantes que tomaron cursos interdisciplinarios con contenido probabilístico en una universidad federal en el estado de São Paulo, Brasil, y relacionarlos con el rendimiento académico. Adaptamos la escala de Elena Auzmendi considerando las actitudes hacia la probabilidad, compuesta por los factores (utilidad, ansiedad, confianza, placer y motivación). Utilizamos estadísticas de los estudiantes que describen la relación entre las evaluaciones aplicadas y los factores generados en la escala que evalúan las actitudes. Algunos de los resultados indican que los estudiantes tienen actitudes positivas relacionadas con su utilidad para el mercado laboral y que sus actitudes están significativamente relacionadas con los resultados finales de la disciplina que se ocupa de los conceptos introductorios de probabilidad.

**Palabras clave:** Actitudes, enseñanza de probabilidad, educación universitaria, rendimiento académico

## 1. Introducción

Creemos que las personas olvidan lo que no usan, pero las actitudes permanecen. Y, considerando que los cursos introductorios de probabilidad son quizás los principales contribuyentes a una sociedad alfabetizada probabilísticamente, las actitudes de los estudiantes hacia la probabilidad merecen especial atención.

La medición y evaluación de actitudes son fundamentales para la investigación científica y la práctica educativa, por lo que se realizan esfuerzos para mejorar los enfoques metodológicos para configurar instrumentos de medición nuevos y más precisos. Un instrumento privilegiado es la escala de medición de actitud, que determina diferencias o intensidad en relación con un objeto actitudinal.

Sin olvidar la complementariedad de otras técnicas (Martins, Nascimento, & Estrada, 2012), las escalas son procedimientos más objetivos y, en nuestro trabajo, utilizaremos una escala Likert, que proporciona puntajes calificados para una serie de declaraciones.

Según Oliveira Júnior (2016), parte de los estudios sobre actitudes hacia la probabilidad se ocupan de las actitudes de los estudiantes, especialmente de la educación superior. Esta tendencia parece reflejar las preocupaciones de los investigadores sobre las actitudes de los estudiantes y las influencias que las actitudes tienen en sus vidas.

Por lo tanto, el objetivo de este estudio es investigar la relación entre la actitud y el rendimiento académico de los estudiantes de una disciplina obligatoria del cuarto período centrada en aspectos introductorios de probabilidad, en una universidad federal, en el estado de São Paulo, Brasil, en 2018.

## 2. Marco teórico

Para Gal, Ginsburg y Schau (1997), la actitud concreta hacia las estadísticas y la probabilidad es una tendencia que se forma con el tiempo y como consecuencia de las emociones y sentimientos experimentados en el contexto del aprendizaje, se puede definir como una suma de sentimientos experimentados durante el período de aprendizaje del sujeto, que se desarrollan lentamente y en los que los factores culturales juegan un papel importante.

La importancia de estudiar las actitudes de los estudiantes hacia la probabilidad radica en la teoría de que cuando las actitudes hacia el tema son favorables, los sujetos están motivados para aprender, hacer esfuerzos más intensos y concentrados, tener ideas claras y estables de consolidación y relevante para incorporar el nuevo material; por el contrario, cuando las actitudes son desfavorables, los factores operan en la dirección opuesta (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983).

Considerando estudiantes de educación superior, Ruiz de Miguel (2015) considera que las actitudes hacia las estadísticas y la probabilidad de estos estudiantes varían de acuerdo con su experiencia previa con el tema.

En cuanto a la relación entre la afectividad y el rendimiento académico, Bologna y Vaiman (2013) dicen que la ansiedad por el contenido es uno de los factores que más afectan el rendimiento académico. Por otro lado, Estrada (2007) observó que la capacitación estadística y probabilística es un factor indispensable para mejorar las actitudes y Estrada, Batanero y Lancaster (2011) indican estudios que estudian la relación entre la actitud y el rendimiento académico.

## 3. Método de investigación

En este trabajo, utilizamos la Escala de Auzmendi (1992) que considera las actitudes hacia las matemáticas y la estadística, que se compone de cinco factores básicos (utilidad, ansiedad, confianza, placer y motivación). La escala fue tomada del original (en español), traducida y adaptada al portugués considerando las actitudes hacia la probabilidad, el foco de la disciplina en la que hay interés en estudiar, la probabilidad.

Destacamos que la escala fue validada por Oliveira Júnior et al. (2018) con 134 estudiantes de tres clases de asignaturas obligatorias del cuarto período, centradas en contenido probabilístico, en una universidad federal en el estado de São Paulo, Brasil.

El instrumento se aplicó a 456 estudiantes que tomaron disciplina obligatoria en el cuarto período centrado en contenido probabilístico, en una universidad federal en el estado de São Paulo, Brasil, en 2018. Las edades de los estudiantes oscilaron entre 18 y 37 años. La edad media fue de 21,17 años y la desviación estándar fue de 2,72 años.

El análisis factorial confirmatorio se utilizó para identificar variables representativas de un conjunto de variables más grande para su uso en análisis multivariados posteriores o para crear un conjunto de variables completamente nuevo para reemplazar parcial o completamente el conjunto original de variables para su inclusión en técnicas posteriores. El propósito es mantener la naturaleza y el carácter de las variables originales, reduciendo su número para simplificar el análisis múltiple que se empleará. También realizamos el análisis de consistencia interna (alfa de Cronbach) que es lo

cálculo de la correlación que existe entre cada ítem de prueba y el resto de los ítems o el total (puntaje total) de los ítems (Pasquali, 2001).

Generamos los coeficientes de correlación entre las variables independientes (rendimiento del alumno en las evaluaciones aplicadas durante el curso) y la variable dependiente (Actitudes del alumno) llamado criterio para relacionar las actitudes con el rendimiento académico de los alumnos.

#### 4. Resultados

El análisis factorial confirmatorio identificó variables y presentamos una explicación detallada de la identificación de los cuatro dominios o factores:

1. No hay ansiedad, sin embargo, existe una falta parcial de confianza al resolver problemas probabilísticos: en relación con los aspectos de no tener gran ansiedad en relación con la probabilidad, sin embargo, existe una perspectiva con la percepción de falta parcial de confianza en relación con la capacidad en la ejecución de problemas.
2. No es agradable pensar en elementos de Probabilidad a pesar de considerar su utilidad para el mercado laboral y hay una indicación de motivación: tiene connotaciones negativas con respecto a la satisfacción en el tratamiento de cuestiones de probabilidad a pesar de la consideración de su utilidad en el mercado laboral.
3. Falta de motivación y aspectos agradables cuando se piensa en el uso de la probabilidad en el mercado laboral: mide la productividad o los beneficios que la probabilidad pueden ofrecer.
4. La probabilidad se considera útil para el mercado laboral: incluye aspectos de la utilidad de la probabilidad en el mercado laboral y con eso hay una indicación de motivación para asistir a la disciplina.

En este estudio, el grado de confiabilidad de las respuestas de la escala fue de 0.926, lo que confirma la alta consistencia interna del instrumento. También utilizamos coeficientes de correlación de Pearson que determinan la relación entre las actitudes de los estudiantes hacia la probabilidad y el rendimiento académico durante el curso del curso de contenido de probabilidad básica.

La razón de la calificación final de las listas hechas durante el curso y la escala que determina las actitudes hacia la probabilidad después de la aplicación del análisis factorial es  $-0.141$  ( $p < 0.05$ ), es decir, es una relación negativa que indica que a medida que aumenta el puntaje en las listas, el puntaje en la escala de actitudes disminuye, convergiendo en una actitud negativa hacia la probabilidad.

Finalmente, cuando observamos el grado final de la disciplina, se observa que existe una relación directamente proporcional tanto con la escala ( $r = 0.175$ ;  $p, 0.01$ ) como con el dominio “No hay ansiedad, pero hay una falta parcial al resolver problemas probabilísticos” ( $r = 0.182$ ;  $p, 0.01$ ), lo que indica que cuanto mayor es el grado final de la disciplina, más actitudes positivas son.

#### 5. Conclusiones

Destacamos las actitudes de los estudiantes de la licenciatura interdisciplinario que toman una disciplina con contenido probabilístico, indicamos los siguientes aspectos:

(1) No consideran que las listas de actividades de los contenidos de la materia que se llevan a cabo durante el curso traigan beneficios para su aprendizaje; (2) Cuanto mejor sea el rendimiento al final del curso, más positiva es su actitud hacia la probabilidad.

Creemos que las escalas de actitudes, como la utilizada en nuestra investigación, permiten un diagnóstico inicial en el establecimiento de estrategias que apuntan a mejorar las actitudes, principalmente negativas que se detectan, con el fin de mejorar la predisposición de los estudiantes. La utilidad de la probabilidad tanto en su vida diaria como en su vida profesional. Por otro lado, no debemos olvidar que estas escalas deben ser instrumentos psicométricamente válidos para obtener un buen diagnóstico.

## Referencias

- Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao: Mensajero.
- Bologna, E. L., & Vaiman, M. Actitudes, experiencia previa y nivel de logro en estadística en la carrera de psicología. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds), *Actas da I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 91-103). Universidad de Granada, Granada, Espanha.
- Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. En M. Camacho, P. Flores, & P. Bolea (Eds), *Investigación em Educação Matemática XI* (pp. 121-140). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Estrada, A., Batanero, C., & Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burril, G., & C. Reading (Eds), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 173-174). Dordrecht: Springer.
- Gal, I., Ginsburg, L., & Schau, C. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En I. Gal & J. B. Garfield (Eds), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). The Netherlands: IOS Press.
- Martins, J. A., Nascimento, M. M., & Estrada, A. (2012). Looking back over their shoulders: a qualitative analysis of portuguese teachers' attitudes towards statistics. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 26-44.
- Oliveira Júnior, A. P. (2016). A escala de atitudes em relação ao ensino de estatística de professores do ensino superior no Brasil. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1449-1463.
- Oliveira Júnior, A. P., Zamora, P. R., Azevedo de Oliveira, L., & Costa de Souza, T. (2018). Student's attitudes towards probability and statistics and academic achievement on higher education. *Acta Didactica Napocensia*, 11(2), 43- 56.
- Pasquali, L. (2001). *Técnicas de exame psicológico: manual*. São Paulo: Casa do Psicólogo.

# Conhecimentos profissionais para o ensino de probabilidade: uma meta-análise dos estudos desenvolvidos pelo grupo FORCHILD

Marta Élid Amorim<sup>1</sup>, Ruy César Pietropaolo<sup>2</sup> e Maria Elisa Esteves Lopes Galvão<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Sergipe, <sup>2</sup>Universidade Anhanguera de São Paulo

## Resumo

Este texto realiza um balanço das pesquisas em formação de professores desenvolvidas no grupo FORCHILD nos últimos cinco anos. Focaliza teses defendidas no Projeto Observatório da Educação do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, bem como artigos gerados a partir destes estudos. Por meio de uma meta-análise buscou-se analisar os conhecimentos explicitados por professores brasileiros durante sua participação em processos formativos que favoreceram discussões e reflexões coletivas a respeito do ensino e da aprendizagem da probabilidade. Essas pesquisas mostram que é possível contribuir para o desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores participantes.

**Palavras chave:** Formação de professor, desenvolvimento profissional, conhecimento profissional, probabilidade, prática reflexiva.

## 1. Introdução

Consideramos ser a probabilidade uma temática relevante, pois a proposição de seu ensino tem espaço em todas as etapas da Educação Básica nas propostas curriculares recentes de muitos países. No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) a considera, junto com a Estatística, um dos eixos organizadores do currículo de Matemática em todos os anos do Ensino Fundamental. Nesse contexto, referenciados em Sacristan (2000) consideramos a importância do professor diante das orientações curriculares uma vez que ele exerce um papel central no ensino, pois é ele que molda, implementa e avalia os efeitos produzidos pelo currículo prescrito.

## 2. Pesquisas desenvolvidas no grupo FORCHILD

As pesquisas aqui apresentadas foram desenvolvidas no grupo FORCHILD – Formação de Professores, Currículo e História as quais discutiram questões ligadas à Formação de professores e à Probabilidade. Neste estudo destacamos aquelas elaboradas ou orientadas por membros do grupo de pesquisa ligado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN-SP), realizado no âmbito do Projeto Observatório da Educação - OBEDUC<sup>1</sup> contou com três teses Grenchi (2016), Felisberto de Carvalho (2017) e Pinheiro (2019) e quatro artigos delas decorrentes<sup>2</sup>. Incluem-se também estudos decorrentes do estágio pós doutoral realizados a partir de resultados de pesquisas também desenvolvidas no OBEDUC (Amorim, 2020).

As três teses defendidas no âmbito do projeto OBEDUC foram desenvolvidas a partir de um processo formativo baseado em uma adaptação das sequências de atividades propostas no programa de ensino de Bryant e Nunes (2012) sobre Probabilidade e Risco, complementada por outras propostas decorrentes da revisão de literatura dos autores.

---

Amorim, M. E., Pietropaolo, R. C., & Galvão, M. E. E. L. (2020). conhecimentos profissionais para o ensino de probabilidade: uma meta-análise dos estudos desenvolvidos pelo grupo FORCHILD. En M. M. Gea. R. Álvarez-Arroyo y J.A. Garzón (Eds.), *Seminario Hispano Brasileño de Educación Estadística*. Granada: Grupo PAI FQM-126.

Grenchi (2016), em sua pesquisa, acompanhou cinco professores do 9º ano do Ensino Fundamental, participantes do curso de formação continuada, e analisou, identificou e buscou compreender as possíveis contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco para a prática letiva dos professores de Matemática que lecionam essa temática e para seus 319 alunos. Para isso, Grenchi (2016) utilizou-se de pesquisas que discutem a questão didática do ensino da probabilidade e risco como: Batanero (2009), Borovcnik (2008), Bryant, Nunes, Evans e Barros (2012), Garfield e Ahlgren (1988), Gal (2009, 2011), Gigerenzer (2002, 2011), Gigerenzer e Hoffrage (1995), Heitele (1975), Piaget e Inhelder (1951), Watson (2003, 2009).

O pesquisador entrevistou os cinco professores participantes do processo formativo do OBEDUC e observou que todos eles consideram importante o letramento probabilístico para a Matemática escolar, argumentando ser essa uma das áreas da Matemática que mais se aproxima da realidade e do cotidiano dos alunos, sobretudo para tomadas de decisões com base na probabilidade, evitando-se assim, que estas decisões sejam tomadas de forma subjetiva ou baseadas no determinismo. Concernente ao conhecimento dos professores, o autor observou que eles dominavam a definição de aleatoriedade, espaço amostral e compressão de risco. Todavia a definição da ideia de comparação de probabilidades já não parecia tão familiar uma vez que foi verificado que os argumentos apresentados pelos professores se mostraram distantes da definição desejada para a comparação de probabilidades. O programa de ensino em probabilidade propiciou, segundo o autor, mudanças na condução das aulas dos professores investigados. Todos os profissionais foram unânimes em admitir com as mudanças e relacioná-las a situações práticas. Esse fato ficou evidente quando, por exemplo, uma das professoras afirmou que o programa de ensino mudou o foco de suas aulas para uma perspectiva mais abrangente, como por exemplo, valer-se de situações concretas ao invés de apenas pedir para que os alunos resolvam exercícios matemáticos, ou seja, valorizar mais a prática do que o cálculo pelo cálculo.

Felisberto de Carvalho (2017) e Pinheiro (2019) desempenharam um duplo papel: como formadores e pesquisadores e realizaram a formação com o propósito investigar o que o programa sugerido por eles (adaptados de Bryant & Nunes, 2012), poderia favorecer na construção dos conhecimentos didáticos-matemáticos sobre probabilidade e analisar o desenvolvimento profissional dos professores participantes do processo de formação continuada. Propuseram-se a discutir sobre conhecimentos para o ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental (Pinheiro, 2019) e contaram também com a participação de professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental (Felisberto de Carvalho, 2017). Ambos optaram por um caminho no qual inicialmente aplicaram um questionário inicial para identificar os conhecimentos dos professores investigados para posteriormente elaborar o processo formativo, dando ênfase aos aspectos identificados no diagnóstico e incluindo discussões que favorecessem aos professores (re)significar concepções equivocadas, ampliar conhecimentos já consolidados e a-adquirir novos.

Felisberto Carvalho (2017) utilizou a teoria do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS – (Godino, 2002; 2012; Godino, Font, Contreras & Wilhelmi, 2006), a teoria do Conhecimento Didático-Matemático do professor (Godino, 2009; Godino & Pino-Fan, 2015), a Engenharia Didática do EOS (Godino, 2012; 2013) e a teoria da Idoneidade Didática (Godino, 2011). A análise do questionário inicial, realizada sob a perspectiva da teoria do Conhecimento Didático-Matemático do professor de matemática, permitiu o pesquisador concluir que

professores apresentavam lacunas tanto nos conhecimentos sobre o conteúdo, quanto sobre o seu ensino: comum, avançado e especializado. Observou-se que os participantes, “possuíam um nível elementar e insuficiente do conhecimento sobre a probabilidade não dominando desta forma os conceitos e noções básicas sobre este objeto epistêmico previsto para o ensino ao nível dos anos finais do Ensino Fundamental que ora atuam como professores” (Felisberto de Carvalho, 2017, p. 323). No entanto, ao final da formação, que levou em consideração um desenho que articulou a formação matemática e a formação didática, foi possível observar que a compreensão desde a aleatoriedade, incluindo a base conceitual desse objeto, até a quantificação de probabilidades foram conhecimentos que os professores puderam desenvolver e ampliar. Além da noção de risco, conhecimento adquirido pelos professores durante a formação, que foi abordada por meio da associação entre variáveis em tabela de dupla entrada, ampliaram também seus conhecimentos para o seu ensino desse tema para os anos finais do Ensino Fundamental.

A base teórica utilizada na investigação de Pinheiro (2019), no que tange à formação de professores, versa sobre o Conhecimento Profissional Docente (Ball, Thames, Phelps, 2008; Ball, Bass, 2003); o Desenvolvimento Profissional (Guskey, 2002; Day, 2001); e a Reflexão sobre a prática (Alarcão, 2011; Nóvoa, 2001; Ponte, 1998; Schön, 1987; Serrazina, 1999). Em relação ao conteúdo específico, trata do Letramento em Probabilidade considerando os trabalhos de (Batanero, Godino, 2003; Coutinho, 2001 e Gal, 2004;) e concepções de probabilidade (Batanero, 2005; Batanero & Díaz, 2012; Godino, Batanero, Cañizares, 1996; Santos, 2011). A autora, a partir da análise das limitações dos conhecimentos profissionais explicitadas pelas professoras no questionário inicial, propôs uma vivência de propostas de abordagem de conceitos e ideias probabilísticas que passa pelas noções mais simples sobre aleatoriedade, determinação do espaço amostral e alcança a quantificação de probabilidades e o entendimento do risco – relação entre variáveis.

Durante a formação foi possível identificar que as discussões e reflexões ocorridas possibilitaram a ampliação dos conhecimentos profissionais dos professores, relativos à Matemática, à Probabilidade e o seu ensino. Os professores, de maneira geral, adquiriram compreensões importantes em relação às ideias subjacentes ao conceito de Probabilidade: eles constataram, por exemplo, que a Probabilidade se relaciona com a incerteza, em acontecimentos de natureza aleatória; compreenderam espaços amostrais, formas de descrevê-los e analisá-los; e também adquiriam a capacidade de analisar e comparar probabilidades, sobretudo, entre eventos simples. Um ano e meio após o término da formação, a pesquisadora buscou compreender as implicações do processo formativo no desenvolvimento profissional das participantes, a partir de entrevistas e observações de aula de algumas dessas professoras. Nesse momento, a pesquisadora notou que discussões provocadas em sessões de formação, bem como as entrevistas, permitiram-na fazer questionamentos constantes, estimulando a reflexão sobre a prática de sala de aula ou a reflexão sobre a ação na perspectiva de Schön (1987) e, isso favoreceu tanto o desenvolvimento profissional como ampliou a base de conhecimentos das participantes para o ensino.

Amorim (2020) optou em realizar sua pesquisa na formação inicial, buscando analisar os conhecimentos de futuros professores de Matemática sobre o ensino da probabilidade, de forma particular sobre noções de aleatoriedade. Esta investigação envolveu um processo formativo, conduzido pela pesquisadora, no qual foi discutida a questão da independência de eventos a partir dos resultados de pesquisa realizada por Bryant e Nunes (2012). Este processo contou com participação de 11 estudantes de

Licenciatura em Matemática de uma universidade pública. Para elaboração do processo formativo, no que tange às atividades que favoreceram a reflexão do grupo em relação ao ensino e para a análise dos dados, foram consideradas as categorias discutidas por Shulman (1986, 1987) sobre os conhecimentos do professor. Quanto ao ensino da probabilidade, a autora utilizou os estudos de e Batanero, Contreras e Diaz (2011) e Gal (2004). Sobre a prática reflexiva de professores utilizou-se Zeichner (2003). A análise mostrou que os futuros professores ampliaram a base de conhecimentos para a docência de probabilidade, sobretudo em relação ao reconhecimento da necessidade de superação da recência positiva e negativa para a compreensão da independência de eventos. Além disso, os participantes reconsideraram a posição contrária, demonstrada inicialmente, de incluir o ensino de noções de Probabilidade a partir dos anos iniciais. Assim, ficou evidente a importância de ações formativas que propicie a vivência de situações que envolvam conceitos de probabilidade, por meio de experimentações e reflexões.

### 3. Perspectivas futuras

A partir, da experiência do grupo em processos de formação inicial e continuada, temos por objetivo desenvolver investigações, em conjunto, em processos formativos para a ampliação do conhecimento didático-matemático sobre probabilidade, associadas a formação professores de matemática (ou futuros) que atuam na Educação Básica no Brasil e/ou em outros países.

### Referências

- Amorim, M. E. (2020). *Relatório das atividades desenvolvidas no Pós doc.* (Trabalho não publicado)
- Gimeno Sacristán, J. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. 3. ed. Porto Alegre: Artmed.
- Felisberto de Carvalho, J. I. (2017). *Aprender e Ensinar Probabilidade: um olhar para o conhecimento do professor*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, UNIAN. São Paulo, p. 347.
- Grenchi, W. A. (2016). *Contribuições de um programa de ensino para o letramento probabilístico na Educação Básica*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, UNIAN.
- Pinheiro, M. G. C. (2019). *Ensino de Probabilidade nos Anos Iniciais: um estudo sobre o desenvolvimento profissional do professor*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, UNIAN.

---

<sup>1</sup> Projeto Observatório da Educação. Auxílio nº 1052/2013 D.O. 30/07/2013: Investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos concernentes à probabilidade e estatística. Coordenado pelo Professor Doutor Ruy César Pietropaolo

<sup>2</sup> Considerando o espaço destinado ao resumo optamos por apresentar somente as referências das teses.

# El análisis de la idoneidad didáctica en la formación de profesores para enseñar estadística

Carmen Batanero, María M. Gea y Pedro Arteaga

Universidad de Granada

## Resumen

Entre los modelos utilizados en la investigación sobre formación del profesor de matemáticas, en el enfoque ontosemiótico se propone el de conocimiento didáctico-matemático, que se añade al conocimiento matemático común y avanzado y tiene en cuenta diferentes componentes relacionadas con las facetas de la idoneidad didáctica. En este trabajo se describen algunas experiencias de formación de futuros profesores que parten del análisis por parte de los mismos de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la estadística y han permitido evaluar y desarrollar diferentes componentes del conocimiento didáctico-matemático de los participantes.

**Palabras clave:** Conocimiento didáctico-matemático; idoneidad didáctica, formación de profesores de estadística.

## 1. Introducción

La formación de los profesores que deben enseñar estadística se ha convertido en un área importante de investigación en educación estadística, a partir del estudio conjunto sobre el tema organizado por ICMI e IASE (Batanero, Burrill, & Reading, 2011). Estas investigaciones se apoyan en diferentes marcos teóricos que analizan y detallan el conocimiento del profesor de matemáticas. Uno de estos marcos, desarrollado como parte del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), es el modelo del conocimiento didáctico-matemático, ampliado posteriormente para incluir las competencias y conocimientos (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017).

## 2. El conocimiento didáctico matemático

En el modelo de conocimiento didáctico matemático, que se resume esquemáticamente en la Figura 1, el conocimiento didáctico-matemático se añade al conocimiento matemático (que puede ser común y ampliado) y consta de las facetas siguientes:

- *Faceta epistémica:* conocimiento didáctico-matemático sobre el contenido, por ejemplo, los tipos de problemas que pueden plantearse sobre el mismo, los cuales implican diferentes significados para los objetos de conocimiento.
- *Faceta cognitiva:* conocimiento sobre el aprendizaje, dificultades, razonamiento de los estudiantes.
- *Faceta afectiva:* incluye comprender los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes en relación al tema.
- *Faceta interaccional:* forma de establecer las interacciones en la clase para facilitar el aprendizaje.

- *Faceta mediacional*: recursos, como libros, tecnología, que pueden favorecer el aprendizaje del tema.
- *Faceta ecológica*: relaciones del contenido con otros objetos matemáticos o de otras materias, con el currículo y con la sociedad.

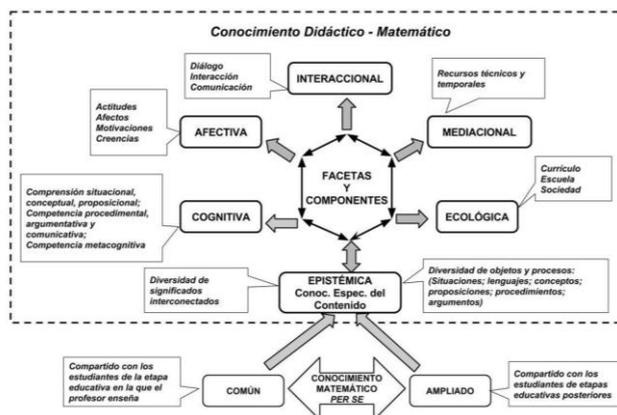


Figura 1. Facetas y componentes del conocimiento del profesor (Godino et al., 2017, p. 96)

### 3. La idoneidad didáctica. Análisis de la misma como proceso de evaluación y formación de profesores

Las facetas del conocimiento didáctico-matemático guardan estrecha relación con las del mismo nombre de la idoneidad didáctica, un concepto introducido en el EOS para analizar los procesos de instrucción en matemáticas (Godino, 2009; 2013).

Tabla 1. Pauta de análisis de la idoneidad afectiva

Componentes	Indicadores
Intereses y necesidades	I1. ¿Piensas que las tareas tienen interés para los alumnos?
	I2. Las tareas propuestas ¿permiten valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional? ¿por qué?
Actitudes	I3. ¿Se promueve la participación de los estudiantes en las actividades, la responsabilidad, etc.?
	I4. ¿Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice?
Emociones	I5. ¿Promueve la enseñanza efectuada la autoestima, ayudando a evitar el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas?
	I6. ¿Se resaltan las cualidades estéticas de las matemáticas? ¿Qué otras actitudes o emociones positivas hacia las matemáticas permitiría desarrollar?

Se considera que este proceso es más o menos idóneo (o adecuado) si facilita la adaptación de los significados personales de los estudiantes (aprendizaje) a los institucionales (enseñanza), teniendo en cuenta las restricciones del proceso. Se incluyen en la idoneidad didáctica las componentes epistémicas, cognitivas, afectivas, interaccional, mediacional y ecológica; por ejemplo, la idoneidad afectiva es el grado en que un proceso de estudio tiene en cuenta la afectividad, emociones y actitudes de los estudiantes. Para valorar cada una de las componentes de la idoneidad de un proceso de

estudio Godino (2013) propone una serie de indicadores. Como ejemplo, en la Tabla 1 mostramos los componentes e indicadores de la idoneidad afectiva, que nosotros hemos reformulado en forma de pregunta para utilizar en los cursos de formación de profesores.

#### **4. Algunas investigaciones**

Algunas de nuestras investigaciones se han basado en el modelo de conocimiento didáctico-matemático y se ha utilizado la valoración de la idoneidad didáctica como recurso en la evaluación y desarrollo de todas o parte de las facetas del conocimiento del profesor sobre un cierto contenido estadístico. Desde el punto de vista metodológico se ha trabajado con los profesores en tres fases diferentes:

- Trabajo con una situación didáctica orientada a la enseñanza de uno o varios temas estadísticos; generalmente esta situación didáctica toma la forma de proyecto que el futuro profesor debe resolver y que posteriormente puede utilizar con sus estudiantes.
- Discusión en clase con el formador de profesores de las soluciones en la fase anterior y análisis por parte de los futuros profesores de la idoneidad didáctica de la situación didáctica o proyecto.
- Discusión final sobre el concepto de idoneidad didáctica, sus componentes, cómo se ponen de manifiesto en el proceso formativo y cómo se puede aumentar.

Por ejemplo, en la tesis de Arteaga (2011) se parte de un proyecto estadístico centrado en la elaboración e interpretación de gráficos por parte de futuros profesores de educación primaria y luego se analiza su idoneidad didáctica. El estudio cualitativo sistemático de las producciones de los futuros profesores al analizar las facetas de la idoneidad didáctica ha dado lugar, entre otros, a los trabajos de Arteaga, Batanero y Cañadas (2012), Arteaga, Batanero y Gea (2017) o Arteaga, Contreras y Cañadas (2014).

En otro ejemplo, en la tesis de Gea (2014), se trabaja con futuros profesores de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato un proyecto orientado al estudio de la correlación y regresión, cuya idoneidad didáctica es analizada por los futuros profesores. De ello se han obtenido publicaciones como las de Gea et al. (2019) y Gea, Batanero y Estrada (2019).

En ambos casos, el análisis cualitativo de las producciones de los participantes se ha completado con la asignación de puntuaciones numéricas a las respuestas, que permiten valorar la calidad del conocimiento del futuro profesor en cada componente e indicador de las diferentes facetas de la idoneidad didáctica.

#### **Reflexiones y líneas de investigación**

Aunque ya se ha avanzado en el estudio de los conocimientos del profesor para enseñar estadística desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático, pensamos que esta línea de investigación está muy poco explotada y es posible centrarse en otros objetos estadísticos, o mejorar la pauta de evaluación de la idoneidad didáctica más centrados específicamente en estadística o probabilidad, en la línea de Godino, Rivas y Arteaga (2014) o Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone (2018), para utilizarla en estas investigaciones. Sería también interesante la elaboración de trabajos comparados con

los compañeros brasileños, replicando en otro contexto algunas de nuestras investigaciones para ampliar la generalizabilidad de los resultados.

## Referencias

- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., & Gea, M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 279-297.
- Arteaga, P., Batanero, C., & Gea, M. M. (2017). La componente mediacional del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre estadística: un estudio de evaluación exploratorio. *Educação Matemática Debate*, 1(1), 54-75.
- Arteaga, P., Contreras, J. M., & Cañadas, G. (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 63-84. DOI: <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i6.97>
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study*. New York: Springer.
- Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D., & Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema*, 32 (61), 526-548.
- Gea, M.M. (2014). *La correlación en Bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de futuros profesores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., & Estepa, A. (2019). Conocimiento especializado de correlación y regresión en futuros profesores de educación secundaria. *Profesorado*, 23(2), 397-419. DOI: <https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i2.9693>
- Gea, M. M., Batanero, C., & Estrada, A. (2019). Evaluación de la componente afectiva del trabajo con proyectos estadísticos por futuros profesores *Acta Scientiae* 21(3) 112-130. DOI: 10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5092
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11 (1), 111-132.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Godino, J., Rivas, H., & Arteaga, P. (2014). Suitability criteria for teachers' education programs in mathematics and statistics education. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* Voorburg: International Statistical Institute.

# Estadística basada en proyectos en contextos de riesgo de exclusión social: Cómo inferir esta práctica a la formación inicial del profesorado

Ainhoa Berciano, Ainhoa Subinas y Jon Anasagasti

Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales  
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

## Resumen

Múltiples investigaciones han destacado la relación existente entre la afectividad del alumnado y la posibilidad de que en el proceso de enseñanza se dé un aprendizaje significativo; en este sentido, la estadística no es ajena a esta realidad y se sabe que una falta de motivación influye negativamente en el proceso de alfabetización del alumnado en todas las etapas educativas. En este trabajo, restringimos nuestro interés a ámbitos escolares de Educación Primaria con un alto índice de riesgo social, en los que queremos evaluar cuál es la repercusión de una enseñanza de la estadística basada en una Aprendizaje Basado en Proyectos tanto a nivel de motivación del alumnado como de su aprendizaje, con el fin de inferir estrategias docentes en formación del futuro profesorado de Educación Primaria.

**Palabras clave:** Motivación, contextos de riesgo de exclusión social, educación primaria, formación inicial de profesorado, estadística basada en proyectos.

## 1. Introducción

Un entorno de exclusión social puede definirse como aquel que presenta vulnerabilidad social, donde ésta trata de representar al conjunto de personas o comunidades que, aunque participan en la sociedad, lo hacen desde la periferia (Taberner, 2011), y se traduce en niveles socioeconómicos y culturales bajos.

En un entorno de estas características la educación matemática adquiere un papel fundamental (Escudero Muñoz, 2005), siendo materia instrumental y esencial en todo el itinerario educativo; de hecho, su potencialidad en influir en los itinerarios académicos es superior a otras materias (Bosker & Witziers, 1996) y, por tanto, la reflexión en torno a su didáctica y su enseñanza es primordial.

Así, teniendo en cuenta que en investigaciones previas se muestra que es posible mejorar la motivación del alumnado en estos contextos cuando se hace un cambio de metodología docente (Subinas & Berciano, 2019), en este trabajo centramos nuestro interés en analizar las repercusiones que tiene un curso de Estadística específicamente diseñado usando la metodología ABP, Aprendizaje Basado en Proyectos, al implementarlo en un aula de 5º de Educación Primaria en un contexto de riesgo de exclusión social, desde la perspectiva de la motivación del alumnado y desde la curricular.

### 1.1. Marco teórico

Como es bien sabido, la enseñanza-aprendizaje de la matemática en el aula de Educación Primaria no es fácil y el éxito de la misma depende, en gran medida, de la motivación que tenga el alumnado por su aprendizaje. Así, investigaciones previas destacan la relación positiva existente entre el rendimiento académico y la motivación

(Mercader, Presentación, Siegenthaler, Molinero, & Miranda, 2017). Sobre el término motivación, Gómez Chacón (2000) diferencia entre motivación *intrínseca* y *extrínseca*, la primera definida como un interés interno de la persona que le anima a realizar la tarea, mientras que la segunda viene dada por estímulos externos, relacionados con la recompensa de la realización de la tarea más que del interés por la tarea en sí misma; destacando la necesidad de fomentar la motivación extrínseca cuando la intrínseca del alumnado asociada a la tarea matemática es baja.

Dentro de las distintas metodologías de enseñanza-aprendizaje que pueden darse en el aula de matemáticas, en este trabajo destacamos el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), el cual ofrece oportunidades de aprendizaje que se adaptan bien a entornos desfavorecidos, debido a que, al estar centrado en tareas de trabajo, relacionarse con otras disciplinas y mostrar versatilidad en cuanto a ritmos de trabajo, permite poder adaptarse a las necesidades del alumnado (Pozuelos & Rodríguez, 2008), que en este tipo de centros suele ser muy diverso, y con necesidades y expectativas muy diferentes.

Así, encontramos trabajos de investigación que, por un lado, establecen las relaciones teóricas del ABP con los objetivos a conseguir con la enseñanza de la estadística y, por otro, analizan las bondades de los proyectos ABP implementados en contextos reales de aula de matemáticas. En particular, en Anasagasti y Berciano (2016) se detalla la estructura teórica de un módulo de aprendizaje de estadística diseñado para futuro profesorado de Educación primaria, que, tras su implementación y estudio muestra como resultado principal una mejora relacionada con la motivación del alumnado (Anasagasti & Berciano, 2017).

## 1.2. Metodología

Nuestra investigación se enmarca en un paradigma interpretativo; dentro del conjunto de investigaciones basadas en el diseño (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011).

El proyecto se ha llevado a cabo en un centro de Bilbao, cuyas características son alta diversidad de alumnado y alto porcentaje de familias inmigrantes, o en situación de riesgo de exclusión social. Se ha implementado en un aula de 5º de Educación Primaria con un número total de 15 estudiantes, de los cuales 8 son niñas y 7 niños, en el que el alumnado destaca por una alta diversidad en cuanto a necesidades, expectativas y capacidades, y en general, con baja motivación.

Para evaluar el nivel de aprendizaje, se han tenido en cuenta los contenidos del primer y segundo ciclo de Educación Primaria (Heziberri 2020): recogida de datos [...] (C1), elaboración de cuadros de doble entrada de datos obtenidos [...] (C2), elaboración de gráficos de barras [...] (C3), lectura e interpretación de textos numéricos en forma de tablas de doble entrada [...] (C4), lectura e interpretación de gráficas de barras sencillas [...] (C5); y, del segundo ciclo: recogida y clasificación de informaciones y datos cualitativos y cuantitativos relativos a objetos, fenómenos y situaciones del entorno, utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición (C6), interpretación y construcción de tablas de frecuencias absolutas y relativas (C7), realización e interpretación de gráficos sencillos [...] (C8); iniciación intuitiva a las medidas de centralización [...] (C9), análisis crítico de las informaciones [...] (C10).

Para evaluar el cambio en la motivación, nos hemos centrado en: 1) tiempo de dedicación a la tarea; 2) si todas las personas participantes participan activamente, esto es, si aportan sus conocimientos y/o destrezas en la actividad.

## Diseño de la implementación

Atendiendo al esquema de Wild y Plankfuch (1999), se ha realizado una adaptación de las fases de aprendizaje del ABP al contexto de aprendizaje que nos rodea (Figura 1). Este hecho nos lleva a plantear 3 grandes bloques, que incluyen a su vez cinco fases (F1, F2, F3, F4 y F5 respectivamente).

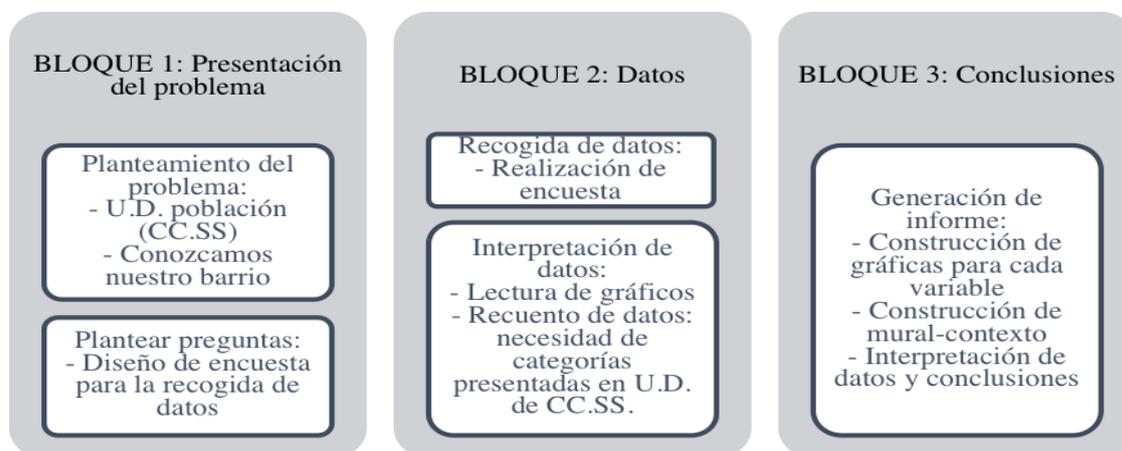


Figura 1. Bloques de aprendizaje del Proyecto “la población”

## 2. Resultados

Tabla 1. Análisis de cumplimiento de contenido curricular, según fase

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
F1	X									
F2	X					X				
F3	X			X						
F4		X			X		X			
F5			X		X			X		

Análisis de la motivación: 1) se han dedicado dos semanas al desarrollo del proyecto, 2) todo el alumnado ha colaborado en la elaboración de las encuestas y de los informes.

## 3. Conclusiones

Destacamos que por medio de la metodología ABP, la implicación y motivación del alumnado ha sido mayor, debido a que todo el grupo ha participado en la realización de los ejercicios y al tiempo dedicado al trabajo realizado en el aula.

Aún así, debido a la singularidad del alumnado, se ha realizado una readaptación del contenido estadístico, por lo que la función del docente, relativa a la adecuación curricular ha sido fundamental para el éxito en este contexto educativo.

Así, entendemos que la casuística de estos contextos de aprendizaje, muy cercanos a nuestro día a día, y a la vez, lejanos a la formación del futuro docente de Educación Primaria, debe ser incorporada de modo sistemático a dicha formación; para ello,

planteamos tener en cuenta la necesidad de encontrar un equilibrio entre la consecución de contenidos y destrezas estadísticas en el aula, atendiendo a los requisitos curriculares y la labor social del docente en conseguir que el mayor número de estudiantes consiga una educación de calidad atendiendo a su entorno; así, una herramienta de medición de este último apartado radicaría en establecer rúbricas especiales que midan distintos aspectos relativos a la motivación.

## Referencias

- Anasagasti, J. & Berciano, A. (2016). El aprendizaje de la estadística a través de PBL con futuros profesores de primaria. *Contextos Educativos, 1* (extraordinario), 31-43.
- Anasagasti, J. & Berciano, A. (2017). Evolución de las actitudes de futuros docentes de Primaria hacia la Estadística tras un curso basado en metodología ABP. *XXIV Jornadas de Investigación en Psicodidáctica*. Bilbao, España: Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.
- Bosker, R. J. & Witziers, B. (1996). *The magnitude of school effects, or: Does it really matter which school a student attends*. New York: American Educational Research Association.
- Escudero Muñoz, J. M. (2005). Fracaso escolar, exclusión social: ¿De qué se excluye y cómo? *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 9*, 1-24.
- Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea, Madrid.
- Mercader, J., Presentación M-J., Siegenthaler, R., Molinero, V., & Miranda, A. (2017). Motivación y rendimiento académico en matemáticas: un estudio longitudinal en las primeras etapas educativas. *Revista de Psicodidáctica, 22*(2), 157-163.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.
- Pozuelos, J., & Rodríguez, F. (2008). Trabajando por proyectos en el aula. Aportaciones de una investigación colaborativa. *Investigación en la escuela, 66*, 5-27.
- Subinas, A., & Berciano, A. (2019). La motivación en el aula de matemáticas: ejemplo de yincana en 5º de educación primaria. *Revista Números, 101*, 45-58.
- Taberner, J. (2011). *Sociología y Educación*. Madrid: Tecnos.
- Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

# Conocimiento de la tabla de doble entrada por estudiantes de profesorado en matemáticas

Enzo Bertazini<sup>1</sup> e Auriluci de Carvalho Figueiredo<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Federal de São Paulo <sup>2</sup> Universidad Metropolitana de Santos - Pontificia Universidad Católica de São Paulo

## Resumen

El artículo presenta un análisis de las respuestas de los alumnos de Profesorado en Matemáticas a una evaluación diagnóstica que involucra el conocimiento de construcción, lectura e interpretación de datos en tablas de doble entrada, así como la relación que establecen entre esta y el cálculo de probabilidades. El análisis de los datos se basó en los protocolos de los alumnos. Se analizan niveles de comprensión de tablas y registros de representación. Se concluye que hay estudiantes que, además de construir tablas de doble entrada a partir de ciertos datos, establecen una relación con el cálculo de probabilidades. Sin embargo, entre ellos también hay los que tienen dificultades con su construcción.

**Palabras clave:** tabla de doble entrada, probabilidad, registro de representación.

## 1. Introducción

En Brasil, el BNCC - Base Nacional Común Curricular (Ministério da Educação, 2018) indica cuáles son las competencias y habilidades que deben desarrollar los alumnos de la Educación Básica en Matemáticas. Defiende que a partir del 1<sup>er</sup> año de escolarización los alumnos deben desarrollar una tarea de lectura de tablas simples, en el 2<sup>o</sup> año comparar las informaciones de investigación presentadas por medio de tablas de doble entrada, y a partir del 3<sup>er</sup> año los estudiantes deben poder leer, interpretar y representar datos en tablas de doble entrada. Este documento también destaca la importancia del trabajo con tablas en otras áreas del conocimiento, como en la lengua portuguesa, que considera la importancia del desarrollo de la lectura de géneros textuales que se presenta en los medios, entre los que destaca gráficas y tablas; y que los estudiantes también deben “exponer trabajos o investigaciones escolares en clase, con el apoyo de recursos multisemióticos (imágenes, diagramas, tablas, etc.) (p.131).

Presumimos que ese interés se vuelve relevante en este documento debido a la cantidad de informaciones que los medios actuales ofrecen en esta forma de registro. Gal (2012) señala que es necesario que se desarrollen ciertas habilidades para que se interprete correctamente informaciones probabilísticas que normalmente se encuentran en los medios, destacando que es necesario que se aborden situaciones que puedan proporcionar a los estudiantes la instrucción necesaria para acceder, utilizar, evaluar críticamente, comunicarse y reaccionar a los mensajes probabilísticos que se encuentran en contextos de lectura, además de comprender textos presentados en gráficas y tablas de doble entrada.

Gea, Gossa, Batanero y Pallauta (2019), al desarrollar una investigación con maestros de la Educación Primaria en España, encuentran que los participantes construyen la tabla de doble entrada correctamente, observando que las principales dificultades están en la interpretación de las representaciones que construyen. Figueiredo (2018), al desarrollar actividades con futuros maestros, estudiantes de un curso de Profesorado en Matemáticas, encuentra que algunos no estaban familiarizados con este registro, y

presentaban dificultades para la lectura de los datos en la tabla, incluso al reconocer que esta describe el contexto del número de alumnos en sala separados por hombres, mujeres y semestres del curso.

Basados en preocupaciones sobre el conocimiento previo necesario para el desarrollo de la asignatura de Probabilidad en un curso de Profesorado en Matemáticas -además de la preocupación de cumplir con los requisitos de una evaluación diagnóstica de una institución-, se aplicó una actividad con los futuros maestros en su primer día de clase. Así, presentamos un análisis de las respuestas de esos alumnos a una evaluación diagnóstica que involucra el conocimiento de representación, lectura y interpretación de datos en tablas de doble entrada, así como la relación que establecen entre esta y el cálculo de probabilidades.

## **2. Marco teórico**

Las actividades, aplicadas por Figueiredo (2018) con alumnos de Profesorado en Matemáticas, destacan, entre otros registros, el uso de tablas de doble entrada, que considera una herramienta efectiva para el trabajo con modelos probabilísticos, y los relaciona con la Teoría de la Representación Semiótica de Duval. Este autor describe la lectura e interpretación de gráficas y tablas y admite que la interpretación no es sencilla, ya que necesita activar todas las funciones cognitivas. En la cuestión de tablas, la función identificación es la más utilizada, debido a la visualización de los datos por separado.

Duval (2003) afirma que el estudio de gráficos y tablas debe darse en el tránsito entre diferentes tipos de registros, y que cada uno de los registros requiere un tipo de tratamiento. Destacaremos aquí algunos tipos de tratamiento que requieren el estudio de la tabla de doble entrada.

Estrella, Mena y Olfos (2014) presentan cuatro niveles distintos para la comprensión lectora de tablas, inspirados en la clasificación Curcio (1989). Con respecto al nivel de comprensión de las tablas, Estrella et al. (2014) identifican: en el nivel 1, se deben leer las celdas, lectura puntual para asociar solo los datos; en el nivel 2, se debe leer la estructura básica de la tabla y las relaciones que contiene, comparar e interpretar, operar con datos de celda y distribuir parcialmente algunos datos; nivel 3, se debe interpretar y comparar los cálculos contenidos en la tabla o los producidos a partir de ella, usar su conocimiento del contexto externo o interno de los datos, e incluir y reformular la tabla; en el nivel 4, se debe leer más allá de la tabla (lectura constructiva total), implica lectura total de la tabla, de los datos. Este nivel incluye la formulación de otra representación basada en la tabla completa. Él también evalúa el diseño de la tabla o su grado de comunicabilidad.

## **3. Metodología**

Nuestro artículo es un estudio de caso en la línea de Ponte (2006), cuyo objetivo es conocer una entidad bien definida en un sistema educativo. Para esto tomamos como punto de partida una actividad propuesta para alumnos de Profesorado en Matemáticas. El trabajo fue desarrollado con 22 estudiantes del 3<sup>er</sup> semestre de Profesorado en Matemáticas en una institución pública de educación superior en el estado de São Paulo. La evaluación diagnóstica aplicada se realizó en dúos, formados libremente por los alumnos. La actividad está presentada en la Figura 1.

- Considere todos sus compañeros presentes en la clase de hoy y analice su edad y género.
- Con los resultados encontrados, construya una tabla de doble entrada. Considere dos intervalos de edad: el primero, con menores de 22 años y el segundo, con mayores o iguales a 22 años.
  - Luego de la construcción de la tabla, haga preguntas sobre probabilidad considerando los datos que se muestran en ella.

Figura 1: Evaluación diagnóstica propuesta a los alumnos  
Fuente: las autoras

La elección del enunciado se basó en la representación del contexto de un grupo que retrata el aula en sí, y la división en relación con las edades se había planteado previamente para que se generara dos grupos, y que hubiera miembros de los dos grupos, menores y mayores de 22 años, para la generación de una tabla con pocos eventos.

Una forma en que los estudiantes del Profesorado en Matemáticas podrían representar los datos se describe en la Tabla 1, que indica los datos relacionados con la variable edad y la variable sexo, donde se puede incluir otras informaciones, como las sumas de las líneas y columnas generadas en la tabla, informaciones que pueden usarse para algunos cálculos de probabilidad. Al realizar estas sumas, estamos involucrando algunos tratamientos internos al registro figural, de acuerdo con la Teoría de Duval (2003).

Tabla 1. Datos de los alumnos de la clase

Edad \ Género	Menor de 22 años (A)	22 años o más (B)	Total
Femenino (F)	7	5	12
Masculino (M)	5	5	10
Total	12	10	22

Según Figueiredo (2018), a partir de la lectura e interpretación de los datos de los eventos involucrados, es posible construir la Tabla 2. Esta tabla puede contener algunas de las respuestas a las cuestiones formuladas por los alumnos.

Tabla 2. Probabilidades Conjuntas, Marginales y Totales

Edad \ Género	A	B	Total
F	$P(A \cap F) = 7/12$	$P(B \cap F) = 5/10$	$P(F) = 12/22$
M	$P(A \cap M) = 5/12$	$P(B \cap M) = 5/10$	$P(M) = 10/22$
Total	$P(A) = 12/22$	$P(B) = 10/22$	1

#### 4. Discusión y Resultados

El análisis de los datos de los alumnos se basó en los protocolos entregados. Clasificamos las 12 parejas en tres categorías, considerando la construcción de las tablas y las preguntas elaboradas. En la primera categoría compuesta por tres dúos, se construyeron dos tablas simples, una con datos de la edad variable de los alumnos y algunos eventos distintos de lo previsto, y otra tabla con la variable género. Presentan diferentes preguntas sobre probabilidad para cada una de las variables. Suponemos que, por no haber establecido relaciones entre variables en una sola tabla, tampoco fueron capaces de elaborar preguntas que cubrieran ambas simultáneamente.

En la segunda categoría, compuesta de 6 dúos, construyeron tablas que enumeran las variables A y B, pero no las escriben como se esperaba, crean más categorías de las que suponemos con los eventos A y B, y creemos que esto ha sucedido porque no saben cómo sintetizar la información o no logran reformular tabla. En relación con las preguntas de probabilidad que esos alumnos crearon, en los enunciados indican el cálculo de las probabilidades con dos variables y algunos de ellos, además de las probabilidades conjuntas, hacen preguntas en lenguaje natural, que, para solucionarlas, es necesario movilizar el concepto de probabilidad condicional.

En la tercera categoría, compuesta por 2 parejas, construyeron tablas muy próximas a las esperadas, las preguntas formuladas indican su resolución, el conocimiento de las probabilidades conjuntas y condicionales, y presentan en los enunciados palabras con datos referentes a las frecuencias marginales. Concluimos que esta categoría puede operar con la tabla construida, reconociendo los posibles tratamientos que involucran la tabla de doble entrada y el cálculo de probabilidades.

Con respecto a los niveles de Estrella, Mena y Olfos (2014), solo nuestra tercera categoría construyó la tabla de doble entrada que presenta el nivel 3 de comprensión, según nuestro análisis.

### Consideraciones finales

Los resultados de esta investigación están basados en una actividad diagnóstica de una asignatura en la que uno de los autores de este artículo comenzará a trabajar durante el semestre. Estos resultados proporcionaron subsidios para que el maestro establezca una relación entre el conocimiento previo de estos alumnos y busque maneras de promover el desarrollo de la lectura, la interpretación y la construcción de la tabla de doble entrada, y su relación con el cálculo de probabilidades.

### Referencias

- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.
- Duval, R. (2003). Comment analyser le fonctionnement représentationnel des tableaux et leur diversité? *Spirale - Revue de Recherches en Éducation*, 32, 7-31.
- Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. A. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 7-10). Campinas: Papirus.
- Estrella, S., Mena, A., & Olfos, R. (2014). Desarrollo de una taxonomía de comprensión tabular. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1041-1047.
- Figueiredo, A. (2018). Probabilidade condicional em contexto de ensino aprendizagem. In: *II Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática – LADIMA*.
- Gal, I. (2012). Developing probability literacy: Needs and pressures stemmings from frameworks of adult competencies an mathematics curricula, *12<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education, Seoul – Korea*.
- Gea, M. M., Gossa, A., Batanero, C., Pallauta, J. (2020). Construcción y lectura de la tabla de doble entrada por profesores de educación primaria en formación. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(1), 348-370.
- Ministério da Educação, Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: BNCC*. Brasília: MEC.

# Aprendizagens docentes em educação estatística narradas por professores em formação contínua

Solange Aparecida Corrêa e Celi Espasandin Lopes

Universidade Cruzeiro do Sul

## Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo analisar as aprendizagens docentes em Educação Estatística na infância desencadeadas por um curso na modalidade de Ensino a Distância (EAD). O estudo pauta-se na perspectiva da pesquisa (auto)biográfica que toma a narrativa de si como práticas de formação e autoformação para responder à seguinte questão: Quais aprendizagens docentes de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental emergem de suas narrativas produzidas no decorrer de um curso de Educação Estatística na modalidade de Ensino a Distância? Serão solicitadas narrativas orais e escritas aos professores participantes do curso, a fim de obter dados oriundos da sua trajetória profissional e de suas práticas pedagógicas. O processo de análise se pauta em um direcionamento holístico e a expectativa é de que emergjam indícios significativos sobre a identidade profissional e agência do professor.

**Palavras-chave:** Educação Estatística, infância, pesquisa (auto)biográfica, identidade profissional, agência.

## 1. Introdução

Este trabalho contém a proposta de um projeto de doutorado intitulado “Aprendizagens docentes em Educação Estatística narradas por professores em formação contínua”.

Buehring e Grando (2019) analisaram pesquisas sobre o ensino da estatística na fase inicial da escolaridade e constataram ser esse um terreno pouco pesquisado e pouco conhecido no Brasil. Ademais, é escasso o conhecimento dos professores sobre a estatística e sobre a forma de ensiná-la, e os professores pedagogos, responsáveis por educar nos primeiros anos de escolaridade, não estudaram estatística ou práticas do seu ensino em sua formação inicial e ao longo de sua carreira. Sendo assim, são extremamente necessários cursos que preparem professores para conhecer e dominar a estatística e sua prática de ensino.

Lopes (2011) considera também que o professor precisa ter práticas de ensino fundamentadas na resolução de problemas e nas situações de incerteza, porque essas têm grande repercussão em contextos do mundo real, em consequência da complexidade e das rápidas mudanças da atualidade. Sendo assim, justifica-se a necessidade de um trabalho efetivo com a estatística desde as séries iniciais.

Esta pesquisa irá trabalhar com o professor das séries iniciais através das narrativas de si, que se transformam em uma fonte privilegiada para a pesquisa qualitativa (Passeggi et al., 2018). As pesquisas são guiadas pelo desejo de considerar o que a pessoa pensa sobre si mesma e sobre o mundo, como ela dá sentido às suas ações e toma consciência de sua historicidade (Passeggi, 2010). Dessa forma, espera-se que venham a emergir dos educadores indícios significativos sobre a identidade profissional e a agência do professor, relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem de estatística e probabilidade na infância.

## 2. Quadro teórico metodológico

Para Lopes (2003), a combinatória, a probabilidade e a estatística inter-relacionam-se, proporcionando uma filosofia do azar de grande alcance para a compreensão do mundo em situações atuais, e capacitam pessoas a enfrentarem a tomada de decisões, quando somente dispõem de dados afetados pela incerteza – situações comuns em nosso cotidiano.

Sendo assim, é necessário formar o professor que ensina estatística na infância, para que ele tenha o entendimento e a compreensão dessas situações. Sua trajetória profissional e sua prática pedagógica precisam estar em constante formação.

A formação docente contínua é essencial para uma prática reflexiva, pois somente ela garante uma aprendizagem eficaz e com significado para os aprendizes. Para Lopes (2003),

o desenvolvimento profissional é um processo que salienta os aspectos que o professor pode desenvolver em função de suas potencialidades. Ocorre com base em um certo autodidatismo em que ele procura, decide, projeta e executa um plano de formação. É nessa busca que melhora seu conhecimento, suas competências e/ou atitudes. Muitos trabalhos com desenvolvimento profissional são feitos fora do contexto escolar e realizados individualmente pelos professores, sem que haja um compromisso de continuidade por parte da instituição de ensino. (p.29-30)

Sendo assim, com as adversidades diárias inerentes à profissão do professor, o trabalho com EAD facilita a participação do professor, pois há mais facilidade para administrar o seu tempo e participar de uma formação contínua.

Apoiados nessa proposta, os professores participantes vão elaborar narrativas sobre sua prática e seu desenvolvimento profissional. Com efeito, sua identidade profissional também fará parte desse todo, pois não há como separá-la do seu desenvolvimento profissional.

De acordo com Day (2006), as identidades dos professores – o que e quem são, sua autoimagem, os significados que se vinculam a seu trabalho e os significados atribuídos a eles pelos outros – estão, portanto, associadas à matéria que ensinam, a suas relações com os alunos, a seus papéis e conexões entre eles e à vida fora da escola. (p.68)

Considerando esses aspectos, espera-se que, a partir das análises dessas narrativas dos professores participantes do curso EAD, manifestem-se indícios de desenvolvimento profissional, identidade profissional e agência.

Para Lopes e D'Ambrosio (2016),

a noção de agência molda a descrição do processo de tomada de decisão dos professores em relação não apenas a seus próprios caminhos para o desenvolvimento profissional, mas também a suas escolhas e decisões em relação às práticas em sala de aula que são mais benéficas para o aprendizado de matemática dos alunos. Quando os professores são mobilizados para aprimorar o aprendizado dos alunos e investir na melhoria das condições em que esse aprendizado ocorre, eles criam e colocam em movimento padrões e procedimentos alinhados à sua identidade profissional. (p.1088)

Sendo assim, para Lopes (2019), à medida que exercem sua profissão, os professores se envolvem mais ativamente na invenção e na originalidade do que na reprodução e na imitação de práticas de ensino.

Além do mais, outro enfoque precisa ser considerado, pois pesquisador e professor necessitam de uma relação interativa e dialógica. Ambos aprendem e se formam.

### 3. Resultados esperados

Acreditamos que a opção por obter dados por meio de narrativas nos possibilitará construir o significado que surge a partir da interpretação de cada um. De acordo com Pereira e Eugênio (2019),

a possibilidade de mobilizar as ações vividas no processo formativo de uma maneira mais ampla por pensar sobre determinadas questões a fim de compreendê-las a partir de novas reflexões pode, potencialmente, fomentar aperfeiçoamentos no pensar e agir pedagógico. O trabalho biográfico possibilita o resgate de situações cotidianas nos espaços pessoal e profissional por dialogar reflexivamente com as problemáticas dali resultantes. (p.33)

Assim, este estudo propiciará repensares do professor participante da pesquisa sobre sua própria formação e prática profissional. Com isso, ele poderá sentir-se mais confiante diante do processo de ensino e aprendizagem da probabilidade (Estrada & Batanero, 2019). O mesmo se pode considerar em relação ao estudo da estatística.

Para que essa reflexividade ocorra de forma legítima, precisamos estar atentos e coesos na tolerância. Freire (2016) salienta que a tolerância legítima termina por ensinar que, na sua experiência do outro, aprende-se com o diferente.

Diante disso, consideramos que esta pesquisa possa contribuir para a que os participantes ampliem seu conhecimento profissional relativo aos conceitos estatísticos e probabilísticos, por inseri-los em um processo de formação contínua pautado em práticas reflexivas, a fim de aprimorarem suas possibilidades de promover a aprendizagem de seus alunos.

### Referências

- Day, C. (2006) *Pasión por enseñar: La identidad personal y profesional del docente y sus valores*. Madrid: Narcea.
- Freire, P. (2016) *Pedagogia da tolerância*. (Ana Maria Araújo Freire, Org. e notas). Paz & Terra.
- Estrada, A., & Batanero, C. (2019). Prospective primary school teachers' attitudes towards probability and its teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1).
- Lopes, C. E. (2003). *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil* (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas.
- Lopes, C. E. (2011). A estocástica no currículo de matemática e a resolução de problemas. Trabalho apresentado em *Seminário em Resolução de Problemas* (vol.1, p.1-10). Rio Claro.
- Lopes, C. E., & D'Ambrosio, B. (2016). Professional development shaping teacher agency and creative insubordination. *Ciência & Educação*, 22(4), 1085-1095.
- Lopes, C. (2019). A constituição de professores pesquisadores que ensinam matemática e suas identidades profissionais ativistas. *Perspectivas da Educação Matemática*, 12(30) p.598- 6+00.

- Buehring, R. S., & Grando, R. C. (2019). Pesquisas brasileiras em educação estatística na infância: suas contribuições para o campo de investigação e para a prática. *REVEMAT, 14*(Edição Especial Educação Estatística), 1-15.
- Passeggi, M. C. (2010). Narrar é humano! Autobiografar é um processo civilizatório. In M. C. Passeggi, & V. B. Silva, (Orgs.). *Invenções de vida, compreensão de itinerários e alternativas de formação* (p. 112-113). Cultura Acadêmica.
- Passeggi, C., Nascimento, G. & Rodrigues, S. (2018). Narrativas de crianças sobre a escola: desafios das análises. *Revista Lusófona, 40*, 155-169.
- Pereira, E. B. F., & Eugênio, B. G. (2019). Narrativas de formação: potencialidades e possibilidades para a pesquisa em educação. *Revista Multidisciplinar de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira, 8*(18), 31-46.

# Conhecimento profissional para o ensino da estatística: um estudo sobre pesquisas desenvolvidas no âmbito do OBEDUC

Angélica da F. Garcia Silva<sup>1</sup>, Ruy César Pietropaolo<sup>1</sup> e Maria Elisabette B. B. Prado<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Anhanguera de São Paulo

## Resumo

Destacamos aqui as pesquisas que foram elaboradas e orientadas pelo grupo de pesquisa em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN-SP), ligado ao projeto Investigações sobre o Processo de Ensino e de Aprendizagem de Conceitos concernentes à Probabilidade e Estatística, coordenado pelo Professor Doutor Ruy César Pietropaolo. Esse projeto, destinado à pesquisa e formação de professores, foi aprovado e desenvolvido no âmbito do Programa Observatório da Educação promovido nacionalmente pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES. As atividades de formação foram realizadas com o objetivo de ampliar os conhecimentos profissionais de um grupo de professores em relação à leitura e construção de gráficos estatísticos, Medidas de Tendência Central (MTC) e noções envolvidas na leitura da curva normal.

**Palavras chave:** Letramento Estatístico, Medidas de Tendência Central, Curva Normal, Formação Continuada de Professores, Conhecimento Matemático para o Ensino.

## 1. Introdução

A finalidade dos estudos aqui expostos – Sera (2016); Alves (2016); Macedo (2016) – foi investigar a ampliação da base de conhecimentos de um grupo de professores de Matemática da Educação Básica para ensinar noções de Estatística, mediante uma formação continuada, cujos pressupostos estavam ancorados em promover reflexões compartilhadas sobre o Letramento Estatístico, envolvendo questões relacionadas às dificuldades de ensinar noções relativas ao tema. Estudos nacionais e internacionais, além de resultados de exames de desempenho de estudantes, apontaram limitações enfrentadas por alunos (Batanero, 2013) e professores da Educação Básica frente ao conteúdo. Como tais dificuldades podem comprometer o desenvolvimento do letramento estatístico do cidadão, sem que este possa compreender adequadamente as informações a que é submetido e, conseqüentemente, posicionar-se corretamente para a tomada de decisão, percebe-se a importância em abordar tal temática nesta investigação.

Participaram dos três estudos 15 professores de Matemática atuantes no Ensino Fundamental II e Ensino Médio da rede pública da cidade de São Paulo. Além disso, nessas três dissertações aqui analisadas a pesquisa de natureza qualitativa foi orientada metodologicamente pelo *Design Experiments* (Cobb et al, 2003) e realizou-se em três etapas que contemplaram, respectivamente, os temas: leitura e construção de gráficos estatísticos, Medidas de Tendência Central (MTC) e noções envolvidas na leitura da curva normal. Em cada etapa, a fase prospectiva do Design contemplou a revisão de literatura e a escolha do aporte teórico para a preparação das atividades a serem desenvolvidas, uma atividade diagnóstica sobre os conhecimentos dos participantes em relação ao tema e a aplicação de um questionário para ter uma perspectiva da experiência que eles vivenciaram frente ao ensino do tema em questão. Na segunda fase, denominada de processo formativo, o planejamento da formação sobre o tema

---

Garcia Silva, A. F., Pietropaolo, R. C. y Prado, M. E. B. B. (2020). Conhecimento profissional para o ensino da estatística: um estudo sobre pesquisas desenvolvidas no âmbito do OBEDUC. En M. M. Gea. R. Álvarez-Arroyo y J.A. Garzón (Eds.), *Seminario Hispano Brasileño de Educación Estadística*. Granada: Grupo PAI FQM-126.

levou em conta as respostas aos instrumentos de coleta de dados aplicados o qual sofreu alterações a fim de se adequar às necessidades apresentadas pelos professores ao longo da formação e, conseqüentemente, favorecer a discussão de novos conhecimentos. O desenvolvimento de todo o processo foi baseado nas demandas dos professores e nos resultados de pesquisas sobre os processos de ensino e aprendizagem em Estatística. Em relação às fundamentações teóricas relativas aos conhecimentos profissionais docentes que consubstanciaram a análise dos dados obtidos, foram utilizadas as categorias propostas por Ball, Thames e Phelps (2008). No tocante à formação de professores reflexivos, recorreu-se a estudos Schön (1992) e Zeichner (1993, 2008). Em cada etapa, foram considerados aportes teóricos para o ensino de Estatística relacionados ao tema central da intervenção, ou seja, leitura e construção de gráficos estatísticos, Medidas de Tendência Central (MTC) e noções envolvidas na leitura da curva normal. Cada um dos temas foi desenvolvido com a participação dos pesquisadores do grupo e deu origem à uma dissertação de mestrado, que passaremos a descrever a seguir. Destacamos os estudos de Sera (2016); Alves (2016) e Macedo (2016) os quais geraram artigos publicados em revistas e em atas de eventos nacionais e internacionais<sup>1</sup>.

## 2. Descrição dos resultados

Sera (2016) investigou a ampliação da base de conhecimentos necessários ao ensino de um grupo de professores e os aspectos relativos à formação reflexiva dos participantes em um ambiente de estudo de inovações curriculares. Para ensinar leitura e construção de gráficos estatísticos, o pesquisador considerou o Letramento Estatístico e dificuldades de ensinar noções relativas ao tema contidas nos trabalhos de Gal (2004) e os significados que Freire (1994) atribui para Leitura. Na análise inicial dos conhecimentos dos participantes concernentes à leitura e construção de gráficos estatísticos foi possível observar limitações como o desconhecimento de representações gráficas presentes nos documentos de apoio ao currículo ou gráficos presentes no cotidiano dos alunos. Verificou-se também a falta de domínio em manipular um software como auxílio para o ensino de gráficos estatísticos, e que, a maioria dos participantes, ao lecionar sobre o tema em sala de aula, não considerava outras estratégias para o ensino, se não aulas expositivas. No início da formação, alguns professores do grupo demonstraram que não sabiam determinar tipos de gráficos adequados para representar variáveis específicas e, muito menos, se preocupavam com os elementos que compõem um gráfico estatístico, tais como título, rótulo dos eixos vertical e horizontal ou linhas de grade. Na leitura dos gráficos, os dados mostraram limitações de conhecimento quando o autor identificou incorreções ao extrair informações básicas da representação gráfica. Apesar da preocupação de alguns professores em levar, para a sala de aula, gráficos retirados dos meios de comunicação ou de avaliações nacionais e considerarem fundamental garantir

---

<sup>1</sup> Considerando o espaço destinado ao resumo optamos por apresentar somente as referências das dissertações, os artigos que dela decorreram não serão referenciados no final do artigo, quais sejam: Alves e Pietropaolo (2018); Pietropaolo, Garcia Silva, Prado e Galvão (2017) Alves, Garcia Silva e Pietropaolo (2017); Alves, Garcia Silva, Pietropaolo e Amorim (2019); Alves, Garcia Silva, Amorim e Pietropaolo (2019) e Garcia Silva, Alves, Pietropaolo e Amorim (2020 – no prelo)

o letramento estatístico dos estudantes para leitura de gráficos, de maneira geral, esses participantes não apresentaram uma base sólida de conhecimentos estatísticos. Durante o processo formativo, foram discutidas situações que podem favorecer o desenvolvimento do Letramento Estatístico no tocante à leitura e construção de gráficos e promovida a familiarização com o software Excel. A sequência proposta favoreceu aos participantes a reflexão a respeito de uma leitura crítica dos gráficos. A socialização das discussões favoreceu a prática reflexiva dos participantes que passaram a questionar determinadas construções e adequações de certos tipos de gráficos. A vivência da construção de gráficos estatísticos também favoreceu o reconhecimento da relevância de se procurar ler cuidadosamente as informações dispostas em uma tabela e a promoção da reflexão favoreceu a ampliação das próprias estratégias para o ensino de leitura de gráficos estatísticos, segundo a concepção de leitura de Freire (1994). Ao final da formação ficou clara a evolução de cada participante – embora uns tenham ampliado mais a base de conhecimentos para o ensino que outros – em relação ao tema do estudo.

A pesquisa de Alves (2016), norteadada pelo mesmo aporte teórico para a formação de professores, buscou investigar a ampliação dos conhecimentos dos professores para o ensino de Medidas de Tendência Central (MTC), com o apoio do modelo de Letramento Estatístico proposto por Gal (2004) e dos estudos de Batanero (2000) e Batanero, Díaz, Contreras e Roa (2013) sobre o sentido, significado e a compreensão de MTC. A análise dos dados coletados mostrou que, no início do processo formativo, a maioria dos participantes dominava os procedimentos de cálculo das medidas, no entanto não apresentava argumentações que levassem em conta a relação entre essas medidas para a tomada de decisão solicitada numa situação-problema e quando o faziam apoiavam-se na análise dos valores das medidas de forma isolada. O plano inicial para o processo formativo levou em conta esses resultados para a proposição das atividades, as quais aprofundaram os conhecimentos acerca das características e propriedades das MTC. Nessa fase, os formadores reforçaram, por meio das discussões e reflexões, a perspectiva da prática docente de ensino e as dificuldades que os alunos poderiam vivenciar durante o aprendizado de média, mediana e moda. De modo geral, verificou-se a ampliação nos conhecimentos profissionais docentes acerca dos conceitos e significados das MTC, possibilitando que eles desenvolvessem análises mais estruturadas de situações que tivessem como informação a média, a mediana e a moda dos elementos estudados. Houve a superação, por parte dos professores, acerca da ideia de que a média geralmente é a mais adequada para indicar a tendência central de um conjunto de dados; a necessidade da retomada do significado da moda, ao longo do curso, pois havia professores que a consideravam como uma medida que representava a maioria dos elementos do conjunto estudado; de os participantes desenvolverem o conhecimento de quais são as dificuldades encontrada por alunos em relação à MTC.

Macedo (2016) considerou os conhecimentos dos professores para o ensino de noções envolvidas na leitura da curva normal para alunos do Ensino Médio. Por meio de reflexões compartilhadas e vivências sobre inovações apresentadas em currículos recentes acerca da Estatística e Probabilidade, com os mesmos pressupostos teóricos dos trabalhos anteriores. Para as discussões referentes ao Letramento Estatístico optou pelas ideias de Gal (2004) e Batanero e Godino (2005), que discutem investigações sobre a Educação Estatística e justificam a inserção desse tema na escola básica desde os anos iniciais. As respostas dos professores ao diagnóstico inicial revelaram concepções inconsistentes sobre significados de noções estatísticas, nomeadamente do desvio padrão. Observou-se que o grupo de professores, no geral, não priorizava esse tema em suas aulas. Os participantes discutiram situações de aprendizagem com o objetivo de favorecer a compreensão de alunos do Ensino Médio sobre os significados de média,

mediana e desvio padrão e realizar a leitura do gráfico de uma curva normal, ainda que de forma incipiente, favorecendo o desenvolvimento do Letramento Estatístico. As discussões sobre os significados de noções concernentes ao tema favoreceram uma tomada de posição favorável dos docentes para introduzi-las em suas aulas e, em especial, a análise da curva normal em contextos significativos para estudantes. O autor conclui que as reflexões realizadas durante o processo formativo ampliaram a base de conhecimentos dos professores para o ensino da Estatística. Os resultados deste estudo também indicam a necessidade de haver, em processos formativos, uma articulação entre diferentes abordagens, estratégias, contextos e materiais para os processos de ensino e aprendizagem de noções relativas ao tema estudado.

### 3. Considerações finais

Consideramos que outras pesquisas envolvendo os aspectos já contemplados e outros tipos de gráficos estatísticos (boxplot, histograma, de dispersão bivariada) deveriam ser desenvolvidas. Também consideramos relevante o estudo do outlier e sua influência na interpretação das informações e cálculo dessas medidas estatísticas. Entretanto, para isso, esse grupo de professores deveria avançar mais nos conhecimentos estatísticos.

Como resultados alcançados, concluiu-se que a compreensão das propriedades e significados das MTC possibilitou a ampliação da base de conhecimentos dos professores, de modo a inter-relacionar tais medidas para a tomada de decisão e reconhecer que, em certos momentos, teriam de lançar mão de outras ferramentas, como análise da dispersão dos dados. Temos convicção de que os resultados obtidos, tanto pelos professores participantes dessa investigação, quanto para o desenvolvimento da pesquisa para a Educação Estatística, foram possíveis de se alcançar devido à maneira como o curso de formação continuada foi desenvolvido, pela motivação para a discussão e reflexão e a disposição para expor concepções e questionamentos. Acreditamos que as características das pesquisas podem ser utilizados em cursos de formação inicial e continuada, possibilitando a outros professores ampliarem suas visões dessa temática voltada para o ensino.

### Referencias

- Alves, T. A. (2016). *Conhecimentos de professores de matemática da educação básica sobre o ensino de medidas de tendência central*. Dissertação de Mestrado. UNIAN, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, SP.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico. Componentes y desarrollo. *I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria*.
- Macedo, R. C. (2016). *Conhecimentos de professores de matemática sobre o processo de ensino e de aprendizagem de noções estatísticas – curva normal*. Dissertação de Mestrado, UNIAN, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, SP.
- Sera, E. K. (2016). *Conhecimento de professores para o ensino da leitura e construção de gráficos estatísticos na educação básica*. Dissertação de Mestrado, UNIAN, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. SP.

# Fomentando la alfabetización estadística en el profesorado de educación secundaria mediante una actividad formativa y evaluadora

Laura Muñiz-Rodríguez y Luis J. Rodríguez-Muñiz

Universidad de Oviedo

## Resumen

El objetivo de este trabajo consiste en diseñar una actividad formativa y evaluadora que fomente la alfabetización estadística en el profesorado de Educación Secundaria. Para lograr esta meta se tienen en cuenta los elementos que sustentan la noción de sentido estadístico, así como las directrices para la evaluación y enseñanza en educación estadística. El doble carácter de esta actividad busca, por un lado, documentar al profesorado participante sobre: bases de datos de gran tamaño, reales y próximas al alumnado, materiales manipulativos, y experiencias de aprendizaje por proyectos. Por otro lado, pretende conocer los recursos y metodologías utilizados por el profesorado en la actualidad y las dificultades a las que se enfrenta. Los resultados corroboran la consecución del objetivo propuesto e indican aspectos de mejora en lo relativo a la formación docente.

**Palabras clave:** Alfabetización, educación secundaria, estadística, formación, profesorado

## 1. Introducción

La sociedad actual requiere el desarrollo de capacidades que permitan a los ciudadanos interpretar y confrontar con una actitud crítica la ingente cantidad de información a la que se exponen cada día, y que sustenta decisiones de su vida personal y profesional. Como resultado de esta exigencia, se requiere el diseño de planes de formación para la comunidad educativa que fomenten la alfabetización estadística, tanto en el alumnado como en el profesorado, en todas las etapas, aumentando de manera progresiva el nivel de formalización (Batanero, Díaz, Contreras, & Roa, 2013).

Recientes publicaciones (Gordon & Nicholas, 2012; Gould, 2017; Rumsey, 2017; Shaughnessy, Chance, & Kranendonk, 2009) proponen recursos y metodologías que buscan promover habilidades básicas en el alumnado para interpretar y comunicar los datos, basadas en el uso de ejemplos publicados en los medios de comunicación, en el empleo de contextos cercanos al alumnado, en el trabajo por proyectos y en la formulación de preguntas abiertas que estimulen el debate. Sin embargo, pese a que el profesorado admite la importancia de la alfabetización estadística, reconoce a su vez encontrar obstáculos para identificar qué conceptos pueden ser estudiados a partir de un conjunto de datos, o qué software es más apropiado (Batanero, 2009).

Con el propósito de asistir al profesorado en esta labor, este trabajo tiene como objetivo diseñar una actividad formativa y evaluadora que fomente la alfabetización estadística en el profesorado de Educación Secundaria. La finalidad del doble carácter de esta actividad permite, por un lado, informar al profesorado participante sobre recursos y metodologías disponibles y, por otro lado, averiguar qué recursos y metodologías aplica actualmente el profesorado para fomentar la alfabetización estadística y con qué limitaciones se encuentra. En las líneas que siguen se define el marco teórico, a

continuación, se describe la actividad llevada a cabo con 14 profesores de Educación Secundaria y, por último, se resumen los resultados y se aportan unas conclusiones.

## 2. Marco teórico

Este trabajo se sustenta en la noción de sentido estadístico, definida por Batanero et al. (2013) como la unión de la cultura estadística y el razonamiento probabilístico. Se entiende que la cultura estadística aúna tanto los conocimientos teóricos relacionados con la estadística, como la capacidad para abordar una situación en la que estos se manifiesten (Gal, 2002; Watson, 2006). A su vez, el razonamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999) incide en la toma de decisiones y la realización de predicciones a partir de datos y en presencia de incertidumbre.

Otro fundamento teórico relevante son las Directrices para la Evaluación y Enseñanza en Educación Estadística (GAISE, acrónimo en inglés) de la American Statistical Association (2005). La actividad del presente trabajo contempla las seis recomendaciones para la enseñanza de la estadística propuestas en el informe GAISE.

## 3. Metodología

Para dar respuesta al objetivo, en el seno del grupo MERG (*Mathematics Education Research Group*) de la Universidad de Oviedo, y contando con colaboraciones externas y el apoyo del Centro de Profesorado y Recursos Gijón-Oriente, se diseña una actividad a desarrollar a lo largo de tres sesiones de tres horas cada una. Cada sesión comprende dos fases. Una primera fase de carácter formador durante la cual un ponente experto por su investigación o práctica educativa proporciona al profesorado participante formación sobre cómo fomentar la alfabetización estadística en Educación Secundaria. Los contenidos de esta fase para cada sesión tratan los siguientes temas: conocimiento, manejo y visualización de bases de datos de gran tamaño en contextos reales y próximos al alumnado (redes sociales, estadísticas deportivas), conocimiento y uso de materiales manipulativos y otros recursos (juegos, entornos virtuales), y conocimiento de experiencias en el ámbito del aprendizaje por proyectos que contemplan la interdisciplinaridad y el trabajo en grupo.

Durante la segunda fase, de carácter evaluador, se aplica una dinámica de grupos de discusión utilizando dos métodos de moderación, que permiten obtener de manera organizada a través de diferentes elementos gráficos información compartida en el seno de un grupo. En este caso, la discusión va dirigida a conocer la naturaleza y el origen de los datos que utiliza el profesorado en el aula, el tipo de representaciones, herramientas tecnológicas y orientaciones metodológicas empleadas para su visualización y análisis, la evaluación de las competencias relacionadas con la alfabetización estadística del alumnado y, en general, las dificultades encontradas y los aspectos de su formación que consideran deben ser reforzados en la línea de los aspectos anteriores. Se observa que los temas sobre los que se centra la discusión se relacionan directamente con las recomendaciones para la enseñanza de la estadística propuestas en el informe GAISE.

## 4. Resultados

A partir de la información recogida en el seno de los grupos de discusión a lo largo de las tres sesiones se obtienen los siguientes resultados. Los datos que utiliza el

profesorado de Educación Secundaria para la enseñanza de la estadística son, principalmente, demográficos, académicos y, en menor medida, electorales. Con respecto a la fuente de origen observamos que la mayoría de los participantes hacen uso de aquellos que aparecen en el libro de texto correspondiente, aunque también datos obtenidos de Internet, del Instituto Nacional de Estadística (INE), de los medios de comunicación o de encuestas, y con una frecuencia relativamente menor datos generados de manera aleatoria por una calculadora. Estos datos se usan fundamentalmente para calcular parámetros estadísticos. También cobra importancia la elaboración de tablas y de gráficos, siendo menor el tiempo que se dedica a darles sentido. En cuanto al tipo de representaciones, destacan el histograma, el diagrama de sectores, la tabla de frecuencias, el pictograma y el diagrama de cajas. La mayor parte del profesorado participante asegura no haber representado nunca en el aula datos mediante un mapa de calor, una gráfica de puntos o *dotplot*, una nube de términos o *tagcloud*, o un árbol jerárquico o *treemap*. Las herramientas tecnológicas más manejadas para analizar y visualizar los datos son la hoja de cálculo de Excel y la calculadora, aunque algunos participantes reconocen hacer uso de otras aplicaciones disponibles en Internet. Dentro de las orientaciones metodológicas, destaca el trabajo en grupo o el uso de encuestas; un 36% de los participantes emplean, en ocasiones puntuales, el trabajo por proyectos. Un grupo minoritario de profesores asegura hacer uso de la experimentación y de los juegos de azar. De forma unánime, el profesorado asegura que la evaluación de las competencias relacionadas con la alfabetización estadística del alumnado es, por el momento, escasa, puesto que se focaliza en la mera comprensión de los conceptos, no tanto en los procedimientos o en el empleo de la tecnología para el análisis de datos. Por otro lado, conviene destacar que son numerosas las dificultades encontradas por el profesorado para fomentar la alfabetización estadística, entre las que señalamos: la falta de tiempo, de recursos y de formación, la densidad del currículo, o la baja calidad del producto final presentado por el alumnado. En particular, la falta de formación se detecta en lo relativo al conocimiento y uso de recursos informáticos actualizados, al diseño de secuencias didácticas y, en general, a la didáctica de la estadística.

## 5. Conclusiones

Apoyándonos en la definición de sentido estadístico y en las seis recomendaciones propuestas por el informe GAISE para la evaluación y enseñanza en educación estadística se ha diseñado una actividad formativa y evaluadora que fomenta la alfabetización estadística del profesorado en Educación Secundaria. El doble carácter de esta actividad ha conseguido, por un lado, formar al profesorado participante sobre el acceso a bases de datos de gran tamaño, el empleo de materiales manipulativos, especialmente en los primeros años de Educación Secundaria (partiendo de propuestas como las de Alsina, 2019), y el conocimiento de experiencias en el ámbito del aprendizaje por proyectos que pueden emplear en el aula para fomentar la alfabetización estadística del alumnado (Batanero & Díaz, 2011).

Los resultados aconsejan el diseño de una formación específica con el formato de comunidad de aprendizaje matemático (Jaworski, 2005), que permita establecer un debate entre el grupo MERG y el profesorado de Educación Secundaria. La finalidad de la formación será no sólo capacitar al profesorado, sino analizar el uso de los recursos mencionados arriba, diseñar secuencias didácticas concretas e imprimir al currículo

implementado un carácter más alineado con el sentido estadístico, valorando la posibilidad de utilizar paradigmas como el razonamiento inferencial informal (Leavy, 2010) o de subrayar el manejo de la subjetividad o la imprecisión en probabilidad (Batanero, 2005; Blanco-Fernández et al., 2016).

## Referencias

- Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Graó.
- American Statistical Association. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE). College Report*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. *II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola*. Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Batanero, C., y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18.
- Blanco-Fernández, Á., Díaz-Díaz, P., García-Honrado, I., Ramos-Guajardo, A. B., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2016). A proposal for assessing imprecise concepts in spanish primary and secondary schools. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 24, 71-91.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-51.
- Gordon, S., & Nicholas, J. (2012). Using examples to promote statistical literacy. En *Proceedings of the Motivating Science Undergraduates: Ideas and Intervention* (pp. 58-64). Sydney: UniServe Science Proceedings.
- Gould, R. (2017). Data literacy is statistical literacy. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 22-25.
- Jaworski, B. (2005). Learning communities in mathematics: Creating an inquiry community between teachers and didacticians. *Research in Mathematics Education*, 7(1), 101-119.
- Leavy, A. M. (2010). The challenge of preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. *Statistics education research journal*, 9(1), 46-67.
- Rumsey, D. J. (2017). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education*, 10(3), 1-12.
- Shaughnessy, J. M., Chance, B., & Kranendonk, H. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making in statistics and probability*. Reston, VA: NCTM.
- Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.

# Formação inicial de professores: uma discussão sobre o ensino de estatística na educação básica

Suzi Samá<sup>1</sup> e Marta Élid Amorim<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Rio Grande, <sup>2</sup>Universidade Federal de Sergipe

## Resumo

Recentemente no Brasil, uma nova base curricular foi aprovada. Nesta a Estatística ganha mais espaço no currículo escolar. Por outro lado, poucos cursos de formação de professores ofertam disciplinas que abordem conceitos de Estatística ou o conhecimento pedagógico destes conceitos. Neste sentido, o presente texto tem por objetivo investigar o conhecimento dos professores de matemática em formação sobre os conceitos de Estatística previsto para Educação Básica. Para tal, será desenvolvida com os professores em formação uma atividade didática que possibilite explorar conceitos estatísticos. Propomos como aporte teórico para esta investigação as ideias de Shulman, relativos ao conhecimento profissional docente; de Godino, quanto à idoneidade didática; de Gal e de Cazorla e Santana quanto ao Letramento Estatístico.

**Palavras-chave:** Formação de Professores, Educação Estatística, Idoneidade Didática, Letramento Estatístico.

## 1. Introdução

Com a aprovação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (MEC, 2018), que fixou conteúdos mínimos para a Educação Básica no Brasil, a Estatística e a Probabilidade ganharam espaço no currículo escolar, sendo uma das cinco unidades temáticas da área de Matemática. Com isto, as redes de ensino estão em fase de elaboração e implementação dos novos currículos. Esses currículos estão sofrendo significativas modificações, principalmente no que tange a inclusão de conceitos estatísticos, que agora passam a compor os conteúdos obrigatórios desde o primeiro ano do Ensino Fundamental.

Um dos aspectos importantes no ensino de Estatística na educação básica consiste em possibilitar ao estudante, um entendimento intuitivo e formal das principais ideias matemáticas que estão implícitas em representações estatísticas, procedimentos ou conceitos (Lopes, 2008). Quando o estudante adquire as habilidades de ler e usar a linguagem estatística para entender informações presentes na vida cotidiana ele alcança uma das três competências da Estatística, o Letramento (Garfield e Ben-Zvi, 2008). O Letramento Estatístico também abarca a capacidade de avaliar e comunicar criticamente informações estatísticas e tirar conclusões a partir delas (Gal, 2002). Para tal, é necessário que os professores planejem atividades que possibilitem aos estudantes perceber a existência da variabilidade, incerteza, aleatoriedade, bem como a reduzir e representar os dados coletados. Isso inclui reconhecer como, quando e quais ferramentas estatísticas podem ser utilizadas e aplicadas nos diversos contextos de nossas vidas, assim como interpretar os resultados obtidos (Lopes, 2008).

Para tal, se faz necessário que a formação inicial do professor que atuará na educação básica possibilite a este adquirir tanto o conhecimento dos conceitos estatísticos como o conhecimento pedagógico destes. Para Lopes (2008) a amplitude do conceito é mais importante do que o conceito formal. Segundo a autora o processo de ensinar e aprender conceitos estatísticos planejado com base na resolução de problemas, simulações e experimentos, possibilita ao professor construir conhecimentos, à medida que estabelece

Samá, S. P.; Amorim, M. E. (2020). Formação inicial de professores: uma discussão sobre o ensino de estatística na educação básica. En M. M. Gea. R. Álvarez-Arroyo y J.A. Garzón (Eds.), *Seminario Hispano Brasileño de Educación Estadística*. Granada: Grupo PAI FQM-126.

relações com informações adquiridas e com o domínio de diferentes linguagens e formas de expressão.

Arteaga, Batanero, Cañadas e Gea (2012) também defendem que para alcançar a melhoria do ensino de estatística nas escolas é necessário aperfeiçoar a formação de professores. No entanto, pesquisadores da Educação Estatística no Brasil, como Viali (2008) e Cazorla (2006), salientam que nem todos os cursos de formação de professores de matemática ofertam disciplinas de Estatística, e quando estas integram o currículo dos cursos, em geral, abordam conceitos básicos, e, raramente, questões relacionadas ao ensino dos mesmos. Dessa forma, se faz urgente e necessário que mais pesquisas estejam em consonância com as demandas da formação de professores para o ensino de Estatística, em especial na Educação Básica.

Neste contexto, este artigo tem por objetivo desenvolver uma atividade que possibilite potencializar competências e conhecimentos estatísticos necessários na prática docente da Educação Básica. Para tal, buscamos fundamentação teórica em Shulman (1987) e Godino (2009, 2011), os quais apresentamos na próxima seção. Na terceira seção do artigo, relatamos a atividade estatística proposta a luz do aporte teórico. Por fim, as perspectivas futuras da presente proposta.

## 2. Aporte teórico

Cabe assinalar que para todo o processo de planejamento e análise dos dados dessa pesquisa levaremos em conta as ideias de Shulman (1987), relativos ao conhecimento profissional docente, Godino (2009, 2011), quanto à idoneidade didática, Gal (2002) e Cazorla e Santana (2010) quanto ao Letramento Estatístico.

Shulman (1987) desenvolveu uma base de conhecimentos necessários ao professor para o ensino. Em seus estudos concluiu que essa base deveria incluir, no mínimo, aspectos relacionados ao conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico geral, conhecimento do currículo, conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento dos estudantes e de suas características, conhecimento de contextos educacionais e conhecimento das finalidades, propósitos e valores da educação. No entanto, enuncia que o conhecimento pedagógico do conteúdo é de especial importância, porque identifica os diferentes corpos de conhecimento necessários para o ensino.

Shulman (1986) define Conhecimento Pedagógico do Conteúdo como aquele referente às teorias e princípios dos processos de ensino do tema [no nosso caso específico, a Estatística], conhecimentos das distintas representações, analogias, ilustrações e exemplos, que permita a elaboração de argumentações que favoreçam a compreensão e torne a aprendizagem mais fácil. Além de compreender as dificuldades enfrentadas por estudantes e maneiras de superá-las, incluindo aquelas presentes em resultados de pesquisas.

Em consonância com as ideias de Shulman (1986, 1987), Godino, Batanero, Rivas e Arteaga (2013) defendem que o conhecimento que o professor deverá ter para ensinar “implica em uma articulação entre o matemático e o didático”. (p. 71). Dessa forma, optamos por também nos apoiar na Teoria da Idoneidade Didática proposta por Godino (2011) a qual considera seis dimensões para abarcar os conhecimentos necessários ao professor para ensinar matemática e estatística: epistêmica, cognitiva, afetiva, mediacional, interacional e ecológica.

### 3. Atividade de estatística

Neste estudo utilizaremos a atividade “Verifique as suas intuições sobre o acaso”, proposta por Godino, Batanero, Roa e Wilhelmi (2008). Esta tem por finalidade identificar os conhecimentos dos professores em formação sobre os conteúdos de Estatística e Probabilidade. Na atividade serão trabalhados os conceitos de experimento aleatório, probabilidade, gráficos e medidas estatística.

Inicialmente, cada estudante estimará os resultados de uma sequência de 20 lançamentos de uma moeda sem realmente jogá-la, buscando simular uma sequência aleatória. Na segunda parte (sequência real), os participantes lançarão uma moeda honesta 20 vezes realizando a sequência real do experimento. Finalizada a coleta de dados das duas sequências os futuros professores serão estimulados a discutir sobre as possíveis estratégias para comparar as sequências, simuladas e real, de toda a turma. Em um segundo momento, o pesquisador propõe a comparação das seguintes variáveis estatísticas: número de caras, número de coroas e o maior número de caras que ocorreram sequencialmente entre os 20 lançamentos, tanto na sequência simulada quanto na real. Os licenciandos serão convidados a escrever um relatório com a análise estatística dos resultados da atividade, bem como as conclusões finais a que chegaram.

Após a sistematização da atividade e discussão dos conceitos relacionados, os pesquisadores solicitarão aos grupos que realizem uma discussão acerca das questões relativas ao ensino do tema. Materiais didáticos, abordagem metodológica, erros prováveis dos estudantes farão parte dos questionamentos feitos pelos pesquisadores com o intuito que os licenciandos expressem aspectos do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Shulman, 1986).

Finalizada esta etapa, os professores em formação aplicarão a mesma atividade em turmas da Educação Básica, com o acompanhamento de pesquisadores da Educação Estatística. Por fim, os pesquisadores discutirão com todos os participantes os resultados dessa atividade.

### 4. Perspectivas futuras

De posse dos resultados obtidos com o processo formativo, com o grupo de licenciandos, buscaremos compreender os conhecimentos dos participantes acerca da temática e relacioná-los aqueles obtidos por Godino, Batanero, Roa e Wilhelmi (2008).

### Referências

- Arteaga, P. Batanero, C. Cañadas, G. R., & Gea, M. M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educación Matemática Pesquisa*, 14(2), 279-297.
- Cazorla, I. M. (2006). Teaching statistics in Brazil. In: A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil: IASE.
- Cazorla, I. M. & Santana, E. R, S. (2010). *Do tratamento da informação ao letramento estatístico*. Itabuna: Via Litterarum.

- Conti, K. C., Nunes, L. N., Estevam, E. J. G., & Goulart, A. (2019). Um cenário da educação estatística em cursos de pedagogia. *REVEMAT*, 14 (Educação Estatística), 1-15.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. In: C. Batanero, G. Burril, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Teaching statistical in school mathematics: challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008*. Monterrey, México: IASE.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*. 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia apresentada em XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. & Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, 8(1), 46-74.
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R., & Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI /IASE StudyTeaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Monterrey, Mexico: ICMI e IASE.
- Lopes, C. E. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cadernos CEDES*, 28(74), 57-73.
- Ministério da Educação, Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base*. Brasília: Ministério da Educação. Disponível em: [http://basenacionalcomuma.mec.gov.br/images/BNCC\\_20dez\\_site.pdf](http://basenacionalcomuma.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf)
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, (57), 1-21.
- Viali, L. (2008). O ensino de estatística e probabilidade nos cursos de licenciatura em matemática. *Anais do 18º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística. Estância de São Pedro, SP*. Doi 10.13140/RG.2.1.3956.4640.

# **Desenvolvimento profissional e estatística: um encontro entre a universidade e a escola**

Eurivalda Ribeiro Santana e Maria Elizabete Souza Couto  
UESC

## **Resumo**

Os estudos sobre formação de professores e desenvolvimento profissional vem crescendo considerando várias perspectivas teóricas e de análises. Temos um projeto de pesquisa amplo, que conta com a participação de pesquisadores de universidades das regiões Nordeste e Sudeste do Brasil, com o objetivo de compreender como uma intervenção formativa colabora com o desenvolvimento profissional dos professores de matemática do ensino fundamental (seus conhecimentos e ensino de estatística) e afeta o conhecimento de seus estudantes sobre conceitos estatísticos. Para este trabalho, temos a indagação: como é efetivada a articulação entre a universidade e a escola (liderança universidade-escola) na perspectiva da formação e desenvolvimento profissional dos professores que ensinam estatística?, na tentativa de compreender o movimento desenvolvido durante o processo formativo, que acontece na escola, e envolve os pesquisadores da universidade e os professores e coordenadores pedagógicos na escola. Após o processo formativo foi realizada uma entrevista com dois professores que participaram dos encontros e realizaram as atividades. Os dados foram analisados seguindo os princípios da Análise Textual Discursiva (ATD), no qual as categorias de análise emergem dos dados. Os resultados indicam influência da liderança universidade-escola, ao serem efetivados o planejamento das atividades de estatística a serem desenvolvidas em sala de aula, a prática de ensino do professor em sala de aula, a relação com o conhecimento estatístico, a aprendizagem dos estudantes e, nas relações entre a universidade, a gestão escolar e sua relação pedagógica com os professores.

## **1. Escola e universidade na formação e desenvolvimento profissional de professores**

O processo de formação do professor é o momento para a construção, mobilização, reflexão e análise dos conhecimentos adquiridos durante eventos da profissão, como estudos na universidade e na escola, em seminários, oficinas, cursos de pós-graduação ou atividades planejadas com análise das intercorrências, considerando as particularidades do processo formativo e das experiências construídas e socializadas no local de trabalho (Marcelo Garcia, 1999).

A formação será legítima quando contribuir ao desenvolvimento profissional do professor melhorando o seu trabalho e suas aprendizagens profissionais (Imbernón, 2011).

O desenvolvimento profissional do professor acontecerá por meio de formações, quando as mesmas acontecem no contexto de sua prática e proporcionam enriquecimento, no âmbito moral e ético, para suas práticas e ajudam a desenvolver um conhecimento, quer seja do conteúdo, pedagógico, do aluno, do currículo, das políticas públicas, que lhe atribua uma capacidade de avaliar, planejar e modificar suas estratégias educativas ou processos de formação permanente, para que os mesmos gerem um profissional mais ativo e participativo (Marcelo Garcia, 1999).

Têm-se uma conotação de evolução e continuidade que supera a justaposição entre a formação inicial e a continuada. Atividades de desenvolvimento não afetam apenas o professor, mas àqueles que têm alguma responsabilidade ou implicação no aperfeiçoamento da escola e no desenvolvimento profissional e pessoal do professor (Marcelo Garcia, 1999). Acontece no contexto em que o mesmo está mergulhado, de forma articulada, numa dimensão de aliança produtiva, como denomina Anderson e Herr (1999), tendo como meta fortalecer áreas comuns e colaborar entre as duas culturas – a

---

Santana, E. R. S. y Couto, M. E. S. (2020). Desenvolvimento profissional e estatística: um encontro entre a universidade e a escola. En M. M. Gea. R. Álvarez-Arroyo y J.A. Garzón (Eds.), *Seminario Hispano Brasileño de Educación Estadística*. Granada: Grupo PAI FQM-126.

universidade e a escola, os professores pesquisadores e os professores na escola. É um campo colaborativo de aprendizagens a partir da experiência de cada um (Lüdke, 2001).

Day (2001) defini o desenvolvimento profissional, não como sendo uma única coisa ou como tendo um único aspecto, mas, mostra uma visão holística desse desenvolvimento, como algo que interfere no professor como um todo, quando o entende como a soma dos desafios e constrangimentos que afetam sua capacidade para se empenhar profissionalmente e para desenvolver suas habilidades, de forma a melhorar a educação e os resultados escolares. O sentido de desenvolvimento profissional dos professores depende da história de suas vidas profissionais e pessoais, de políticas públicas e contextos escolares nos quais realizam suas atividades docentes, considerando-as como oportunidades oferecidas aos professores em atividades formais e informais, que o encaminharão a revisar, renovar e aperfeiçoar seus pensamentos e ações e, sobretudo, seu compromisso profissional.

O desenvolvimento profissional vai além das práticas de formação, está presente nas ações do dia a dia do professor. É visto como estímulo ao crescimento pessoal e profissional e, também, a mudança nas relações de trabalho, pois promove o estabelecimento de um novo olhar sobre suas relações (Imbernón, 2011).

As atividades de desenvolvimento profissional, visando ao aumento da capacidade crítica, reflexiva parece ser uma possibilidade de promover a equidade no ensino e na sociedade (Zeichner, 2008). Tal condição flexibiliza a profissão e o profissional e, torna possível a convivência com o trabalho realizado nas diferentes modalidades de ensino, bem como na coordenação e na gestão (Day, 2001).

Pensar na formação e no desenvolvimento profissional para o ensino de Matemática (especialmente os conteúdos de Estatística) vai para além da questão conceitual, mas numa perspectiva de formar professores de Matemática que estejam preparados para “trabalhar dentro e fora da sala de aula a fim de mudar as desigualdades que existem tanto no ensino quanto na sociedade como um todo” (Zeichner, 2008, p. 17).

## **2. O campo empírico**

Este trabalho é um recorte de uma pesquisa mais ampla, de caráter qualitativo, desenvolvido em rede com universidades públicas da região Nordeste e Sudeste do Brasil.

A pesquisa está sendo desenvolvida em escolas do ensino fundamental I e II, com professores que lecionam Matemática, e conteúdos de Estatística. Participam da pesquisa, ainda, os coordenadores pedagógicos e articuladores da área de ensino na escola. Este articulador (liderança universidade-escola) é licenciado em Matemática e tem a função de fazer a mediação e articulação entre o grupo de pesquisa na Universidade, nesse caso o Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática, Estatística e Ciências (GPEMEC), os professores de Matemática na escola e os coordenadores pedagógicos e direção escolar.

Para a produção do material empírico foram realizadas entrevistas com dois professores que lecionam Matemática no ensino fundamental II.

Usamos a Análise Textual Discursiva (ATD) (Moraes & Galiuzzi, 2011) como método para compreender o movimento desenvolvido durante o processo formativo na escola, que envolve pesquisadores da universidade, professores e coordenadores pedagógicos.

Com a leitura das entrevistas, desmontando o texto para compreender as falas dos professores e encontrar as unidades de análise. Estas retratam o significado e o sentido do movimento da formação que ora está acontecendo na escola. O significado é um sistema

de relações que se formou objetivamente no processo histórico e que se encerra na palavra, da mesma forma para todas as pessoas (Luria, 1986). Está ligado a experiência social e a um determinado conjunto de relações. O sentido apresenta um caráter individual, mas tem relação diferente para cada pessoa, nesse caso, na situação de formação na escola (Luria, 1986).

Desmontados os relatos das entrevistas, captamos as unidades de análises e constituímos um novo texto que foi submetido à interpretação que buscou compreender a luz do referencial teórico, as ações da liderança universidade-escola. E por fim, a reorganização do novo texto a partir da desmontagem, reconstrução, análise e validação a partir do material produzido na pesquisa. Pela natureza desse trabalho elegemos as unidades de análises: articulação e atuação e, influência da articuladora.

### **3. A liderança na escola**

A articulação entre a universidade e os gestores da escola (coordenação e direção), influencia no desenvolvimento das atividades em sala de aula, a análise do metatexto indicou elementos articuladores evidenciados nas respostas dos professores, com as categorias teóricas da relação liderança com os gestores escolares e coordenação com os professores: a) Relação com os gestores: construção, confluência, integração, diálogo, parceria, colaboração e apoio; b) Relação entre coordenação e professores: vencer desafios, representa a universidade, motivação e confiança, diálogo, divide tarefas.

Os dois professores indicaram em suas respostas itens que elencam as categorias apresentadas (a e b). Como resultados prévios das análises feitas até o momento, podemos afirmar que a liderança exerce com a gestão da escola um papel no qual possibilita vencer desafios postos para a organização das atividades de investigação que possibilitou o trabalho com conceitos estatísticos, faz parcerias necessárias com os coordenadores pedagógicos e com a direção da escola, buscando a confluência entre os objetivos postos no programa escolar e a proposta do processo formativo. Além de motivar a equipe de coordenadores e professores para o desenvolvimento das ações.

### **4. Atuação e influência da liderança no planejamento e na prática**

Ao se buscar identificar a influência da liderança universidade-escola para o planejamento das atividades estatística e acompanhamento da prática, a análise do metatexto produzido indicou as seguintes categorias teóricas: c) Influência: diagnóstico da aprendizagem dos estudantes, inovação da prática, mudança na prática de ensino, mudança no comportamento dos estudantes, na compreensão do processo de ensino do conceito estatístico, na reflexão sobre a prática; d) Planejamento: responsabilidade e diálogo; e) Apresenta: desafios, orientação, confiança para desenvolver as atividades na escola, apoio para as decisões dos professores.

A análise do metatexto aponta evidências que a liderança universidade-escola, influencia no planejamento ao dialogar com os professores e a coordenação pedagógica, a respeito da necessidade de inserção dos conteúdos de estatística ao longo do ano letivo. Essas inserções são recebidas como desafios para os professores que não estão acostumados a trabalhar com esses conteúdos e nem com a investigação para o trabalho com o pensamento científico, o que mobiliza o interesse e participação ativa dos estudantes.

A relação entre a universidade, professores e entre os próprios professores foi indicada na fala dos professores e categorizamos como: f) Acompanha os professores: trata os professores igualmente; articuladora (as ações do grupo de pesquisa com os professores); realiza os planejamentos, acompanha e avalia as aulas.

Essa análise prévia do metatexto indica que a liderança universidade-escola acompanha os professores sem diferenciar o tratamento, articulando os interesses dos pesquisadores com os dos professores e os da escola. Ao acompanhar o planejamento incentiva a garantia da inserção das atividades planejadas no processo formativo, acompanha o desenvolvimento das atividades em sala de aula e avalia com os professores as ações desenvolvidas em sala de aula e a aprendizagem dos estudantes.

## 5. Considerações

Esses são resultados iniciais que indicam sinais positivos das ações efetivadas pela articulação da liderança universidade-escola, para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam estatística. A liderança influencia no planejamento das aulas dos professores de matemática na escola, acompanha a prática desses professores e os incentiva a refletir sobre a prática de ensino.

O ensino de estatística passa a ser refletido, desde o seu planejamento, ao diagnóstico da aprendizagem dos estudantes, a prática de ensino realizada nas salas de aula e a aprendizagem dos estudantes. Esses resultados serão mais delineados com o aprofundamento das análises.

## Referências

- Anderson, G. & Herr, K. (1999). The new paradigm wars. Is there room for rigorous practitioner knowledge in schools and universities? *Educational Researcher*, 28(5), 12-40.
- Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: O desafio da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.
- Imbernón, F. (2011). *Formação docente e profissional: Forma-se para a mudança e incerteza*. São Paulo: Cortez.
- Lüdke, M. (2001). O professor, seu saber e sua pesquisa. *Revista Educação e Sociedade*, 22(74), 77-96.
- Luria, A. R. (1986). *Pensamento e linguagem. As últimas conferências de Luria*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Marcelo Garcia, C. (1999). *Formação de professores: para uma mudança educativa*. Porto: Porto Editora.
- Moraes, R. & Galiazzi, M (2011). *Análise textual discursiva*. 2 ed, Ijuí: Unijuí.
- Zeichner, K. M. (2008). Formação de professores para a justiça social, em tempos de incerteza e desigualdades crescentes. In J. E. Diniz-Pereira & K. M. Zeichner, *Justiça Social. Desafio para a formação de professores* (pp. 11-34). Belo Horizonte: Autêntica.

# A autoformação narrada por professores ao promoverem a educação estatística

Nathalia Tornisiello Scarlassari e Celi Espasandin Lopes

Universidade Cruzeiro do Sul

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo discutir as práticas e as concepções de três professores de matemática da rede municipal de Valinhos – SP, ao ensinar Estatística e Probabilidade para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Pretende-se, a partir de narrativas orais e escritas, discutir quais ações de autoformação são identificadas nas práticas desses professores. Para isso, utilizou-se parte dos dados de uma pesquisa de doutorado em andamento. Os pressupostos da pesquisa (auto)biográfica pautada na escrita de si, por meio de narrativas orais e escritas, permitem uma análise aprofundada do movimento realizado pelos professores como protagonistas de seus ofícios. As narrativas revelam que as vivências de professores em um grupo colaborativo os impulsionam a redimensionar sua identidade profissional e caracterizam-nos como autores de suas práticas, produtores de conhecimento, e não meros repetidores de práticas já institucionalizadas.

**Palavras-chave:** Educação estatística, formação de professores, narrativas, autoformação, grupo colaborativo.

## 1. Introdução

Neste trabalho, o foco está em discutir ações de autoformação presentes nas práticas de três professores de matemática da rede municipal de Valinhos – SP, que participam do Grupo de Investigação e Formação em Educação Matemática (GIFEM), ao ensinar Estatística e Probabilidade para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, temática discutida no grupo. A dinâmica atual desse espaço se pauta na reflexão de práticas narradas a partir de experiências desenvolvidas na sala de aula. Dessa forma, trazemos discussões do que acontece no dia a dia de algumas escolas públicas brasileiras, localizadas no interior do estado de São Paulo, partindo do que os professores “são e fazem” (Tardif & Lessard 2014, p. 36), e não do que eles deveriam ser ou fazer.

Com base em narrativas orais e escritas, construídas pelos professores participantes do GIFEM, trazemos discussões sobre a forma como desenvolvem suas práticas e os fatores que mais os influenciam nas tomadas de decisões, ao elaborar as atividades e desenvolvê-las na sala de aula. Essas narrativas são parte integrante de uma pesquisa de doutorado em andamento, sob orientação da professora Dra. Celi Espasandin Lopes.

As pesquisas em Educação Estatística têm evidenciado que, ao aprender Estatística e Probabilidade, de maneira a compreender os processos de construção, tratamento e análise dos dados, as pessoas ampliam suas condições de realizar uma leitura mais crítica da realidade em que vivem e adquirem habilidades para tomar decisões com maior argumentação. Essa compreensão está estreitamente conectada a propostas de ensino pautadas em processos de investigação estatística com dados oriundos dos diversos contextos sociais e culturais em que os estudantes estão inseridos.

Essa perspectiva metodológica para promover a aprendizagem estatística e probabilística envolve a participação dos professores no movimento de formação contínua no grupo de estudos. Suas narrativas mostram que a participação no grupo, a

troca de experiências, os estudos teóricos, lhes permitiram romper com práticas tradicionais e transformar suas aulas em ambientes investigativos a partir do olhar do estudante. Em contrapartida, professores que não buscam a aprendizagem constante tendem a ter práticas mais centradas na resolução de exercícios com a aplicação de teorias e fórmulas.

Nossa dinâmica atual no GIFEM é de compartilhar experiências que desenvolvemos na sala de aula com narrativas escritas. Os trabalhos são planejados e discutidos com o apoio e a participação de todos os membros e, depois de desenvolvidos na sala de aula, discutimos novamente para verificar o que pode ser melhor explorado, modificado, o que precisamos estudar para enriquecer o trabalho docente.

Entendemos que essa dinâmica estabelecida no grupo é o que encoraja e fortalece os professores para desenvolverem trabalhos diferenciados na sala de aula. A participação efetiva de cada membro é fundamental para a autoformação dos professores e está vinculada ao desenvolvimento crítico, já que a criticidade é essencial para os processos de transformações das pessoas e exige constante questionamento e problematização. O profissional que se insere nesse movimento não só redimensiona sua prática e sua identidade, tomando decisões que favoreçam a aprendizagem de seus alunos, como também revela seu compromisso e sua ética. As discussões são realizadas com fundamento nos estudos de Passeggi e Cunha (2013) e Lopes e D'Ambrosio (2016).

Esse movimento de autoformação permite aos professores romperem com currículos e burocracias postos, em prol de uma aprendizagem mais significativa para os educandos, que lhes permita realizar uma leitura crítica do mundo, sem receber as informações passivamente. Os resultados dos dados só podem ser analisados à luz da trajetória de cada professor, cada um em seu tempo, em seu espaço cultural, com sua história única, inserido em seu próprio contexto.

O fato de narrarem suas práticas e levá-las para discussão no grupo colaborativo, segundo Bolívar et al. (2001), permite que, diante da burocracia que envolve a prática docente, o professor recupere a “autoridade sobre sua própria prática, sendo sujeito do seu próprio desenvolvimento e que se expressa como autor dos relatos de práticas” (p.12). As narrativas levam à reflexão não somente quem escreve, mas também quem lê. Como ressalta Passeggi (2011),

o processo de reflexão biográfica em grupos reflexivos situa o coletivo no seio de uma prática individual e o indivíduo no seio de uma prática coletiva, em que se alternam a escrita de si (autobiografia) e a compreensão de si pela história do outro (heterobiografia). (p. 153)

Dessa forma, as narrativas (auto)biográficas permitem que o professor se insira em um novo profissionalismo. Sua identidade profissional vai se constituindo por uma combinação entre a biografia pessoal, a cultura, a influência social e os valores institucionais. Pela análise das entrevistas narrativas cedidas pelos profissionais em questão, é possível perceber essas influências e o modo como essa identidade se constitui ao longo da vida. Os professores, quando inseridos em um grupo colaborativo, envolvem-se mais ativamente na invenção e na originalidade do que na reprodução e na imitação de práticas de ensino, o que está relacionado com o que Freire (1996) afirma: “na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a prática” (p. 43).

As narrativas trazem lembranças não só de quem narra, mas também do ouvinte; e, a partir do que se ouve, há muita reflexão sobre a própria prática e a prática do outro. De acordo com Freire (1996), “o que se precisa é possibilitar, que, voltando-se sobre si mesma, através da reflexão sobre a prática, a curiosidade ingênua, percebendo-se como tal, se vá tornando crítica” (p. 43).

Ao dialogar com Vicentini et al. (2013), consideram-se “as narrativas autobiográficas como método de pesquisa, preocupando-se com a constituição e a análise de fontes biográficas e autobiográficas para investigar aspectos históricos, sociais, multiculturais, institucionais da formação humana” (p. 15). Essa vertente da pesquisa (auto)biográfica é tomada como metodologia de pesquisa, pois são analisadas qualitativamente as (auto)narrativas dos professores participantes por meio das entrevistas narrativas e de narrativas de aulas escritas.

São consideradas também, na perspectiva desses mesmos autores, “as narrativas de si como práticas de formação e de autoformação, procurando investigar a reflexividade autobiográfica e suas repercussões nos processos de constituição da subjetividade e da inserção social do sujeito” (Vicentini et al., 2013, p. 15), com o intuito de incentivar no professor o hábito de refletir sobre sua prática e perceber como isso pode influenciar no seu dia a dia, em suas ações em sala de aula, no cotidiano escolar. Por conseguinte, a narrativa se constitui como meio de formação, considerando seu potencial para instigar reflexões e ações na prática profissional.

## **2. Práticas em educação estatística**

Com autorização dos professores, utilizaremos seus nomes originais, a fim de valorizar suas práticas. A seguir apresentaremos uma breve amostra de como os professores protagonistas desenvolvem seus trabalhos nas escolas públicas de Valinhos – SP.

Adriana apresenta uma trajetória de formação bastante intensa, com participação em cursos e busca por formação contínua. Ressalta que o GIFEM foi o local onde ela se sentiu mais segura para falar de sua prática e relaciona isso ao fato de ser um grupo pequeno, sem rotatividade de seus membros. Nesse grupo também é que seus estudos de estatística e probabilidade ganharam corpo, e hoje ela acredita que realiza um bom trabalho, focado no aluno, com estratégias diferenciadas de ensino. Uma delas é o trabalho com jogos, a partir de dados de contexto dos estudantes. Seu objetivo era trabalhar estocástica (estatística, probabilidade e combinatória) com base em um levantamento de dados com os estudantes sobre o que eles comem no jantar. Com os dados em mãos, elaborou um jogo que denominou de “Comprando seu jantar”, em cujo tabuleiro havia 6 casas vermelhas, 12 verdes e 18 brancas, e foi possível discutir a probabilidade de cair cada casa. Ao avançar as casas por meio do lançamento de dados numéricos, dependendo da cor da casa, o aluno deveria jogar o dado correspondente: vermelho – comprar uma carne; verde – comprar uma salada. Trabalhou com atividades de combinatória para as quais preparou diversos cartões com as mesmas figuras dos dados de carnes e saladas e distribuiu para os grupos, juntamente com pratinhos descartáveis.

Rogério também pontua a importância de sua participação no GIFEM para o desenvolvimento de atividades investigativas. Destacamos uma delas, denominada “Lançamentos de CDs”, que trabalha com dados produzidos pelos estudantes a partir de lançamentos de CDs sobre os ladrilhos do piso do pátio da escola. CDs que caíssem

totalmente dentro do piso eram considerados como “casos favoráveis”, e os que caíssem sobre o rejunte eram considerados “não favoráveis”. Hipóteses sobre o que aconteceria foram levantadas, e foi trabalhada a questão de se tratar de experimento aleatório, considerado um fenômeno atribuído ao acaso. Daí vem a importância de saber analisar os dados antes de fazer qualquer escolha. No decorrer do experimento, o qual foi realizado com um considerável número de lançamentos, Rogério observou que os alunos começavam a manifestar opiniões diferentes daquelas que tinham antes de realizá-lo, o que parece revelar sua conscientização para uma visão crítica do mundo que os rodeia.

Sandra realizou uma pesquisa de opinião na escola, da mesma forma como tem realizado todos os anos, a partir de um tema escolhido pela turma. Para isso, os alunos sugeriram várias propostas: esportes, profissões, saúde, dentre outras. A maioria escolheu o tema “filmes”, e vários subtemas foram surgindo (bilheteria, filmes premiados, premiações, categorias de filmes, efeitos especiais etc.). Em grupos, os alunos estudaram esses tópicos e elaboraram questões que pudessem ser usadas em uma pesquisa de opinião. Cada grupo ficou responsável por entrevistar uma turma de alunos da própria escola. Os dados foram tratados na sala de informática com o programa *Excel*. Com os gráficos em mãos, os alunos tiveram uma noção geral das preferências dos entrevistados e puderam elaborar conclusões interessantes. Depois disso, criaram filmes com o aplicativo de celular *Stop Motion*, que transforma em filme as fotos organizadas em sequência. Foi uma atividade muito interessante, que permitiu a reflexão dos estudantes e o aprendizado de estatística.

Percebemos aqui que os professores promovem uma aprendizagem estatística pautada na coleta, na representação e na análise de um conjunto de dados, utilizando características estatísticas que lhes permitem responder às suas perguntas (Batanero, 2002).

## Referências

- Batanero, C. (2002). *Los retos de la cultura estadística* [Conferência inaugural]. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires.
- Bolívar, A., Segovia, D., & Fernández, M. (2001). *La investigación biográfico-narrativa en educación. Enfoque y metodología*. Madrid: La Muralla.
- Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. Paz e Terra.
- Lopes, C. E., & D'Ambrosio, B. S. (2016). Professional development shaping teacher agency and creative insubordination. *Ciências & Educação*, 22(4), 1085-1095.
- Passeggi, M. C. (2011). A experiência em formação. *Educação*, 2(34), 147-156.
- Passeggi, M. C., & Cunha, L. M. (2013). Narrativas autobiográficas: a imersão no processo de autoria. In P.P. Vicentini, E. C. Souza, E. C., & M. C. Passeggi, *Pesquisa (auto) biográfica: questões de ensino e formação* (pp.43-57). CRV.
- Tardif, M., & Lessard, C. (2014). *O trabalho docente: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas*. Vozes.
- Vicentini, P. P., Souza, E. C. de, & Passeggi, M. da C. (Orgs.). (2013). *Pesquisa (auto)biográfica: questões de ensino e formação*. CRV.

# Aplicación del enfoque de los itinerarios de enseñanza de las matemáticas a la enseñanza de la estadística en educación primaria

Ángel Alsina

Universidad de Girona

## Resumen

Se presenta el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas, un enfoque que trata de ser respetuoso con las necesidades reales de los estudiantes para aprender matemáticas. En la primera parte se presenta la fundamentación del enfoque, que se sustenta en la Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano, el Modelo de Formación Realista-Reflexivo y la Educación Matemática Realista; en la segunda parte se describe el enfoque, que se refiere a una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles: 1) enseñanza en contextos informales (el entorno inmediato, los materiales manipulativos y los juegos); 2) enseñanza en contextos intermedios (recursos literarios y tecnológicos); 3) enseñanza en contextos formales (recursos gráficos); finalmente, en la tercera parte se ejemplifica dicho enfoque con un itinerario de enseñanza de la estadística para estudiantes de 6 a 12 años.

**Palabras clave:** Didáctica de las Matemáticas; Itinerario de Enseñanza; Estadística; Educación Primaria

## 1. Introducción

Todos los que de alguna forma estamos vinculados a la Didáctica de las Matemáticas sabemos que el libro de texto es un recurso que ha ejercido una influencia notable en la educación matemática que reciben los estudiantes en las escuelas. Este hecho debido a diversos factores: la concepción tradicional de la enseñanza de las matemáticas; el recubrimiento curricular “garantizado”; la medición del aprendizaje con base en el número de páginas completadas; los intereses económicos de las editoriales, etc. La toma de consciencia de estos factores debería desencadenar una profunda reflexión acerca del papel de este recurso.

Una reflexión que debería sustentarse tanto en los resultados de los estudios que han puesto de manifiesto que el uso exclusivo del libro de texto conlleva descontextualización de los aprendizajes (Alsina, 2010), como en los estudios centrados en el análisis de los libros de texto, que en su práctica totalidad evidencian falencias y errores conceptuales (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga, & Gea, 2015; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga, & López-Martín, 2015).

Para subsanar esta realidad y transformarla, diversos ámbitos de investigación en educación matemática y sus respectivas agendas de investigación (Alsina, 2019a, Llinares, 2008) han puesto el foco tanto en el análisis didáctico como en la construcción del conocimiento matemático. En este trabajo voy a centrarme en la agenda de investigación sobre “análisis de contextos de enseñanza y/o recursos didácticos” que es una de las agendas del ámbito de investigación sobre análisis didáctico (Alsina, 2019a). En concreto, se va presentar un enfoque de enseñanza que intenta ser más respetuoso con las necesidades reales de los niños y niñas para aprender matemáticas: el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIAM). Desde este prisma, el trabajo se organiza en tres secciones que responden a la fundamentación, la definición y la ejemplificación del enfoque para la enseñanza de la estadística de 6 a 12 años.

## 2. Fundamentación del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas

Se fundamenta en tres pilares interrelacionados: 1) La Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano (Vygotsky, 1978). Se ha integrado dos ideas centrales de esta perspectiva: a) la educación se concibe como un fenómeno social y cultural que es posible gracias a la interacción, la negociación y el diálogo; b) el pensamiento intelectual depende de la construcción autorregulada del conocimiento, que va de un proceso interpsicológico a un proceso intrapsicológico (Alsina & Domingo, 2010); 2) El Modelo de Formación Realista-Reflexivo (Korthagen, 2001; Melief, Tigchelaar. & Korthagen, 2010). Se han incorporado dos aspectos clave de este modelo: a) la reflexión sistemática impulsa la integración de la persona con sus experiencias personales y como aprendices, con sus conocimientos teóricos y con sus representaciones sobre lo que es enseñar y aprender, razón por la cual se usa el término “realista-reflexivo”; b) la aplicación de este modelo en la formación de maestros de matemáticas, que a partir de diversos estudios ha dado lugar a un modelo transformador de la competencia profesional de los futuros maestros de matemáticas (Alsina, 2019b); 3) La Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991), que describe seis principios vinculados a qué matemáticas enseñar y cómo enseñarlas: de actividad, de realidad, de reinención guiada, de niveles, de interacción y de interconexión. La adhesión a estos seis principios conlleva que en el EIEM se utilizan situaciones de la vida cotidiana o problemas contextualizados como punto de partida para aprender matemáticas. Progresivamente, estas situaciones son matematizadas a través de modelos, mediadores entre lo concreto y lo abstracto, para formar relaciones más formales y estructuras abstractas. Además, se apoya en la idea que a los estudiantes se les debería dar la oportunidad de reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto en lugar de intentar transmitirles una matemática pre-construida.

## 3. El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas

Hace ya varios años, Alsina (2010) planteó un diagrama piramidal en el que se comunicaba el tipo de contextos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su “frecuencia de uso” más recomendable, en función de la posición que ocupa cada contexto: de más o menos frecuencia desde la base hacia la cúspide. Este planteamiento ha evolucionado hacia el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza (Alsina, 2019c), asumiendo que la palabra “itinerario” se refiere a una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles:

1. Enseñanza en contextos informales: la enseñanza del contenido matemático se inicia en situaciones reales o realistas de los niños, incluidos materiales manipulativos y juegos, en los que el conocimiento de la situación y las estrategias se utilizan en el contexto de la situación misma apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.
2. Enseñanza en contextos intermedios: la enseñanza del contenido prosigue en contextos que hacen de puente entre los contextos reales o realistas y los contextos formales. Se incluyen los recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (*Applets*, robots educativos programables, etc.), que a través de la exploración y la reflexión conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático.

3. Enseñanza en contextos formales: la enseñanza del contenido finaliza en contextos gráficos y simbólicos, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales.

El EIEM, pues, se aleja de una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la práctica de ejercicios como principal estrategia didáctica para “aprender” matemáticas, y en su lugar, plantea que es necesario fomentar la comprensión más que la repetición, la actividad heurística más que la mecanización y el pensamiento matemático crítico más que la memorización.

#### **4. Itinerario de enseñanza de la estadística de 6 a 12 años.**

Considerando los fundamentos indicados, a continuación, se ejemplifica el EIEM para la enseñanza de la estadística en Educación Primaria.

##### **4.1. Situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos para la enseñanza de la estadística.**

En este primer nivel se va a presentar una experiencia a partir de un contexto real en la que se observa cómo, a partir de un reto inicial, los estudiantes llevan a cabo un proceso de toma de decisiones para la recogida, organización, representación e interpretación de los datos. Asimismo, se van a mostrar diversos materiales manipulativos y juegos partiendo de la base que, para la enseñanza de la estadística, “como en cualquier otra rama de las matemáticas, el material manipulativo debe desempeñar un papel básico en los primeros niveles de enseñanza, por la necesidad que tienen los niños de contar con referentes concretos de los conceptos abstractos que tratamos de enseñarles” (Batanero, 2000, p. 9).

##### **4.2. Recursos literarios y tecnológicos para la enseñanza de la estadística.**

Una de las finalidades de las matemáticas es llegar a representar de manera abstracta la realidad, que es concreta, a través de procesos de simbolización y modelización. Esta idea, que es generalizable a cualquier bloque de contenido matemático, adquiere especial relevancia en la enseñanza de la estadística, puesto que la representación (principalmente a través de gráficos de distinta naturaleza) adquiere un especial protagonismo. Los recursos literarios y tecnológicos (*Applets*, lenguajes de programación visual, etc.) pueden ser, pues, de gran ayuda para hacer de nexo entre la realidad y el formalismo que requiere las matemáticas. Desde este prisma se van a describir diversos recursos que se pueden utilizar durante el segundo nivel del itinerario didáctico para la enseñanza de la estadística en Educación Primaria.

##### **4.3. Recursos gráficos para la enseñanza de la estadística.**

Más allá del libro de texto o las fichas, existen otros recursos que pueden ejercer una función importante en el último nivel de un itinerario didáctico que persiga una enseñanza eficaz de la estadística. En este sentido, se va a presentar el recurso *Which One Doesn't Belong?*, que permite promover la comunicación y la argumentación y, de modo más general, la formalización e institucionalización de los aprendizajes.

## Referencias

- Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.
- Alsina, Á. (2019a). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 85-108.
- Alsina, Á. (2019b). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Editorial Graó.
- Alsina, Á. (2019c). Hacia una formación transformadora de futuros maestros de matemáticas: avances de investigación desde el modelo realista-reflexivo. *Unipluriversidad*, 19(2), 60-79
- Alsina, Á. y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 7-32.
- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Biaix*, 15, 2-13.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M<sup>a</sup> M. (2015). Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 44, 90-112.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & López-Martín, M<sup>a</sup> del M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(4), 715-739.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Korthagen, F.A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde “ISI-web of knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L.J. Blanco (Eds), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.
- Melief, K., Tigchelaar, A., & Korthagen, K. (2010). Aprender de la práctica. En O. Esteve, K. Melief y Á. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 19-38). Barcelona: Octaedro.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge (Mass): Harvard University Press.

# Inteligencias múltiples en la personalización de la educación estadística.

Jon Anasagasti y Ainhoa Berciano

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

## Resumen

Lograr una mayor personalización de la educación es una de las aportaciones que realiza la teoría de las Inteligencias Múltiples definida por Gardner. En este trabajo se muestra la manera en que es posible incorporar dicha teoría en un proyecto de estadística, y los resultados derivados de dicha propuesta. Se trata de un proyecto de estadística llevado a cabo con el alumnado de tercer curso del Grado de Educación Primaria, dentro de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica, y en el cual se pretende que todo el alumnado implemente un ciclo de investigación completo, utilizando para ello técnicas estadísticas básicas. Entre los resultados obtenidos cabe destacar aquellos que están relacionados con la Actitud hacia la estadística, puesto que en su conjunto mejoran de manera significativa mediante este proceso de personalización.

**Palabras clave:** Inteligencias múltiples, Futuros docentes, educación estadística, actitud hacia la estadística.

## 1. Introducción

Ante la gran cantidad de información y de datos que encontramos a diario en nuestra sociedad, la necesidad de que toda persona desarrolle su sentido estadístico conduce a que la Educación Estadística haya ganado peso dentro de los currículos matemáticos en distintos niveles educativos. En consecuencia, creemos que la dedicación que se le da en el Grado de Educación Primaria (EP) debe estar en la misma línea.

El concepto de sentido estadístico acuñado por Batanero (2013) resulta de la unión de tres componentes: comprender las ideas estadísticas fundamentales, tener cierta competencia de análisis de datos y el razonamiento estadístico. Con la intención de desarrollar dicho sentido y lograr un conocimiento significativo, son muchos los estudios que proponen trabajar esta materia mediante la metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP). Pero ¿qué se puede decir acerca de otras aportaciones de metodologías activas como la teoría de las Inteligencias Múltiples (IM)?

Tal como argumentan Prieto, Navarro, Villa, Ferrándiz, & Ballester (2002) parece bastante evidente que cada persona elabora y relaciona los datos percibidos en función de sus propias características personales y contextuales. Estos autores apoyan mediante sus trabajos empíricos la existencia de distintas maneras de aprender ligadas a cada inteligencia; y en consecuencia, ponen de manifiesto la idea de que un docente debe utilizar los estilos de aprendizaje que un determinado estudiante manifiesta para implicarle en las tareas escolares. No obstante, no encontramos muchos estudios que relacionen la teoría de las IM con el desarrollo del sentido estadístico.

Con la idea de desarrollar el sentido estadístico de futuros docentes de EP, junto con otras competencias necesarias para dicha profesión como son conocer el currículo escolar, utilizar de manera adecuada los materiales didácticos y medios tecnológicos, o reconocer el papel de las matemáticas, hemos desarrollado un módulo de aprendizaje que además de utilizar metodologías activas como el ABP también incorpora la teoría de las IM (Anasagasti, 2019). La investigación que se muestra a continuación es parte

de un estudio más amplio en el que se implementa dicho módulo, poniendo en práctica un ciclo de investigación completo y utilizando técnicas estadísticas básicas, y el cual busca mejorar la competencia y la actitud hacia la estadística de futuros docentes de EP.

En este caso, nos centramos en exponer de qué manera se ha incorporado la teoría de las IM en el módulo y estudiar qué relación ha tenido con la Actitud hacia la Estadística, observando si existen diferencias en algún tipo de IM, con la intención de poder desarrollar en un futuro secuencias didácticas apropiadas para cada estudiante. Por lo tanto, podemos resumir nuestro problema de investigación como: ¿Cuál es la aportación de la teoría de las Inteligencias Múltiples a la mejora de la Actitud hacia la estadística?

## 2. Marco teórico

La teoría de las Inteligencias Múltiples, en contra de la teoría psicométrica cuya piedra angular es la inteligencia general o “g”, pretende articular diversas capacidades o inteligencias que, por medio de estudios del desarrollo cognitivo y la neuropsicología, parecen formar clases naturales (Gardner, 2012). En esta teoría, las inteligencias se sacan de contexto con el único propósito de examinar sus principales características y aprender a utilizarlas de forma eficaz (Armstrong, 2006). A pesar de que las capacidades o inteligencias definidas en esta teoría han ido cambiando, fundamentalmente se tienen en cuenta las siguientes ocho inteligencias: Lingüística-Verbal, Lógico-Matemática, Visual-Espacial, Cinestésica-Corporal, Musical, Interpersonal, Intrapersonal y Naturalista.

Los defensores de esta teoría critican el sistema educativo, argumentando que concentrarse de forma exclusiva en las capacidades lingüísticas y lógicas durante la escolaridad formal puede negar la atención a las habilidades propias de los estudiantes. En este sentido, una de las tres maneras positivas en las que Gardner (2012) propone aplicar la teoría de las IM en las escuelas es la personalización de la educación, por ejemplo, al formar grupos o al buscar apoyo cognitivo vinculado al tipo de inteligencia.

En cuanto a Actitud hacia la estadística podemos encontrar en la literatura diferentes constructos entre los que destacamos el propuesto Schau, Stevens, Dauphinee, y Del Vecchio (1995) el cual es de carácter multidimensional y se compone de cuatro componentes o sub-escalas diferenciadas: Afectivo, Cognitivo, Valor y Dificultad. De la aplicación de este cuestionario a 367 futuros docentes de Primaria, Estrada, Batanero, Fortuny y Díaz (2005) concluyen que la Actitud hacia la estadística está muy ligada a la percepción de su propia capacidad de aprendizaje y al valor atribuido a la materia. Los autores concluyen que las experiencias formativas positivas fomentan la capacidad de los futuros docentes para el aprendizaje estadístico continuo, además de ayudarles a reflexionar sobre la naturaleza de las estadísticas y les ayuden a valorar el conocimiento estadístico y su alfabetización.

## 3. Metodología

Para este estudio contamos con datos cuantitativos de un grupo de 69 estudiantes y, además, realizamos una entrevista semi-estructurada a 4 participantes para poder realizar un estudio de casos. Todos ellos trabajan los contenidos de estadística por medio del módulo que aplica los principios metodológicos del ABP y la teoría de las IM.

Antes de realizar el módulo se identifican los tipos de IM por medio de un cuestionario que los propios estudiantes contestan, y el cual está basado en el inventario de IM para

personas adultas propuesto por Armstrong (2006). Este cuestionario devuelve, por tanto, una percepción que de sus propias “inteligencias” tienen las personas de la muestra. Además, antes y después de realizar el módulo también se les pasa el *Survey of Attitudes Toward Statistics* (SATS) (Schau et al., 1995) para medir la evolución en cuanto a Actitud hacia la estadística.

En cuanto a la manera de incorporar la teoría de las IM en el módulo debemos señalar dos ejes de actuación que parten del hecho de agrupar a los estudiantes de forma homogénea para trabajar en el módulo (una vez analizados los resultados del inventario de IM). Por un lado, como las personas con el mismo tipo de IM destacado deben trabajar en el mismo grupo de manera cooperativa, el tema o contexto elegido para realizar el proyecto de cada grupo puede estar orientado hacia intereses comunes, y lograr de esta manera una motivación e implicación mayor.

Por otro lado, los ejercicios y lecturas propuestas por el docente están personalizados según el tipo de IM destacado en cada grupo, ofreciendo de esta manera apoyos cognitivos para cada estudiante. Los ejercicios persiguen unos objetivos concretos por lo que únicamente se diferencian en el contexto construido para cada uno. En cuanto a las lecturas, los artículos seleccionados para cada grupo son un buen ejemplo de cómo se puede utilizar la estadística en ámbitos relacionados con el campo de interés de cada persona, mostrando ejemplos concretos de su aplicación.

#### 4. Resultados

A continuación se presentan los resultados de Actitud hacia la estadística (SATS) obtenidos antes y después de implementar el módulo y en función del tipo de inteligencia destacado en cada estudiante (Figura 1). Se debe señalar que los grupos difieren considerablemente en tamaño, dado que la muestra no es muy grande (69); hay grupos como el Musical o el Inter-personal que están formados por 22 y 14 personas respectivamente, pero hay otros como el Naturalista que solamente lo componen 2 personas. En el caso de la inteligencia Lingüística-Verbal no encontramos a ninguna persona que destaque en ella y en consecuencia ni siquiera aparece en los resultados.

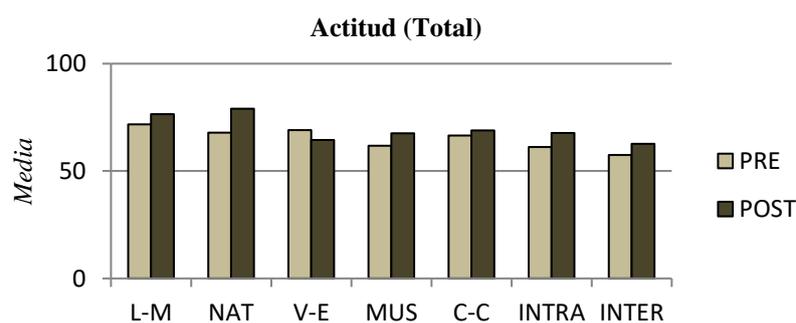


Figura 1. Puntuación media total SATS según tipo de IM (pre y post)

Los grupos que en general destacan por sus puntuaciones más altas tanto en el pre-test como en el post-test son los de inteligencia Lógico-Matemática y Naturalista, mientras que grupos como el Interpersonal o el Intrapersonal registran puntuaciones que indican una actitud menos positiva. Destacar también que el grupo Visual-Espacial obtiene buenos resultados en el pre-test pero es el único que empeora en el post-test, convirtiéndose en uno de los grupos con puntuación más baja. En todo caso, se obtiene que la diferencia en positivo entre pre-test y post-test sí es estadísticamente significativa para todo el conjunto. Al analizar las diferencias existentes entre grupos, se obtiene que

dichas diferencias son estadísticamente significativas tanto en el pre-test como en el post-test pero en ningún caso las diferencias registradas en su evolución.

En cuanto al estudio de casos, la opinión recogida de los estudiantes indica que si bien el hecho de agruparlos según el tipo de IM en algún caso no ha sido determinante para definir un tema o un contexto determinado, ha valido para dinamizar los equipos de trabajo y para ser conscientes de las competencias en las que ellos y ellas destacan.

## 5. Conclusiones

A raíz de los resultados cuantitativos creemos que la incorporación de la teoría de las Inteligencias Múltiples sí ha ayudado a implicar a los estudiantes en la tarea propuesta, puesto que, al margen de las diferencias existentes entre grupos, prácticamente en todos ellos se logra mejorar la Actitud hacia la estadística. Este hecho se ve confirmado por las entrevistas del estudio de casos, que ven esta incorporación como una de las razones para poder aplicar los conocimientos teóricos a contextos cercanos y motivadores.

No obstante, creemos oportuno seguir trabajando en la personalización de las tareas a realizar en el módulo, especialmente en algunos tipos de inteligencia, considerando la creación de modelos o propuestas ejemplo. De esta forma creemos que se puede ayudar a orientar el trabajo del proyecto hacia los intereses de todas las personas, y lograr así experiencias formativas positivas que fomenten el aprendizaje estadístico continuo.

## Referencias

- Anasagasti, J. (2019). *Desarrollo de la competencia estadística del futuro docente de primaria a través del aprendizaje basado en proyectos* (Tesis Doctoral). Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, Bilbao, España.
- Armstrong, T. (2006). *Inteligencias múltiples en el aula. Guía práctica para educadores*. Barcelona, España: Paidós Educador.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds.). *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 55- 61). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Estrada, A., Batanero, C., Fortuny, J. M., & Díaz, C. (2005). A structural study of future teachers' attitudes towards statistics. *Proceedings of CERME IV, European Research in Mathematics Education*. San Feliu de Guixols, Gerona: CERME.
- Gardner, H. (2012). *El desarrollo y la educación de la mente*. Barcelona, España: Paidós.
- Prieto, M. D., Navarro, J.A., Villa, E., Ferrándiz, C., & Ballester, P. (2002). Estilos de trabajo e inteligencias múltiples. *XXI. Revista de Educación*, 4, 107-118.
- Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T. L., & Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the Survey of Attitudes toward Statistics. *Educational and Psychological Measurement* 55(5), 868-875.

# Interfaces y convergencias entre la educación estadística y la educación financiera

Celso Ribeiro Campos<sup>1</sup> y Andréa Pavan Perin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>PUC-SP, <sup>2</sup>FATEC

## Resumen

La nueva Base Curricular Común Nacional adoptada en Brasil para la educación primaria y secundaria propone la Estadística como una unidad temática dentro del área de Matemáticas, insertándola en el plan de estudios en todos los años de la escuela básica. Además, BNCC propone que el tema de la educación financiera también se aborde dentro del área de las Matemáticas, pero también como un tema transversal e integrador, que puede abarcar otras disciplinas. En este contexto, proponemos en este artículo tres proyectos de investigación que exploran algunos vínculos entre las estadísticas y la educación financiera en el ámbito de la escuela básica. Nuestro objetivo es desarrollar actividades que fomenten el desarrollo de habilidades relacionadas con el aprendizaje de estadísticas, como la alfabetización estadística y la competencia crítica.

**Palabras clave:** Educación estadística, educación financiera, alfabetización estadística, educación estadística crítica

## 1. Introducción

Desde 2018, Brasil ha adoptado la nueva Base Curricular Común Nacional (BNCC), que guía a las escuelas de educación básica sobre los objetivos, el contenido y las habilidades relacionadas con cada área de enseñanza.

En la presentación del área de Matemáticas, BNCC cita un pilar importante de Estadística, que es la incertidumbre:

La matemática no se limita a cuantificar fenómenos deterministas (contar, medir objetos, cantidades) y técnicas de cálculo con números y cantidades, ya que también estudia la incertidumbre que surge de los fenómenos aleatorios (Ministério da Educação, 2018, p. 265).

El documento cita explícitamente Estadísticas y Probabilidad como campos importantes para la Educación Primaria (PE), que cubre a niños de 6 a 14 años:

En la escuela primaria, esta área, a través de la articulación de sus diversos campos (aritmética, álgebra, geometría, estadística y probabilidad), debe garantizar que los estudiantes relacionen las observaciones empíricas del mundo real con las representaciones (tablas, figuras y diagramas) y las asocien. representaciones a una actividad matemática (conceptos y propiedades), haciendo inducciones y conjeturas (Ministério da Educação, 2018, p. 265).

Además, el documento destaca la importancia del modelado matemático para la enseñanza / aprendizaje de la disciplina:

Los **procesos matemáticos** de resolución de problemas, investigación, desarrollo de proyectos y modelado pueden citarse como formas privilegiadas de actividad matemática, por lo que son, al mismo tiempo, un objeto y una estrategia para el aprendizaje en la escuela primaria. . Estos procesos de aprendizaje son potencialmente ricos para el desarrollo de habilidades fundamentales para la alfabetización matemática (razonamiento, representación, comunicación y argumentación) y para el desarrollo del pensamiento computacional (Ministério da Educação, 2018, p. 266, énfasis del autor).

La BNCC (Ministério da Educação, 2018) propone cinco unidades temáticas correlacionadas y articuladas entre sí para guiar la formulación de habilidades que se desarrollarán a lo largo de la EP. Ellos son: números; Álgebra; Geometría; Cantidades y medidas; y probabilidad y estadística.

La incertidumbre y el procesamiento de datos se estudian en la unidad temática Probabilidad y Estadística. Propone el enfoque de conceptos, hechos y procedimientos presentes en muchas situaciones problemáticas en la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología. Por lo tanto, todos los ciudadanos necesitan desarrollar habilidades para recopilar, organizar, representar, interpretar y analizar datos en una variedad de contextos, a fin de emitir juicios fundados y tomar las decisiones apropiadas. Esto incluye razonamiento y uso de conceptos, representaciones e índices estadísticos para describir, explicar y predecir fenómenos (Ministério da Educação, 2018, p. 276).

Por otro lado, BNCC establece que las redes educativas y las escuelas deben "incorporar en los planes de estudio y propuestas pedagógicas el enfoque de los temas contemporáneos que afectan la vida humana a escala local, regional y global, preferiblemente de manera transversal e integradora" (Ministério da Educação, 2018, p. 19), como la educación del consumidor y la educación financiera.

Otro aspecto para considerar en esta unidad temática es el estudio de conceptos básicos de economía y finanzas, con el objetivo de la educación financiera de los estudiantes. Por lo tanto, se pueden discutir temas como tasas de interés, inflación, inversiones financieras (rentabilidad y liquidez de una inversión) e impuestos. Esta unidad temática favorece un estudio interdisciplinario que involucra dimensiones culturales, sociales, políticas y psicológicas, además de las económicas, sobre los temas de consumo, trabajo y dinero. (Ministério da Educação, 2018, p. 269).

Es importante tener en cuenta que, si se propone trabajar con educación financiera de manera transversal, integradora e interdisciplinaria, este tema puede estar presente en las diversas unidades temáticas, así como en conjunto con otras disciplinas.

## **2. La articulación entre estadística y educación financiera.**

Creemos que es posible concebir acciones pedagógicas dirigidas a la enseñanza / aprendizaje de estadísticas que permitan trabajar con elementos de educación financiera.

Una propuesta que presentamos en forma de un más alto en el X CIEM (Congreso Internacional SOBRE Enseñanza de las Matemáticas) celebrado en Lima-Perú en febrero de 2020 fue la creación de una moneda virtual en la clase de Matemáticas, que entendemos que es aplicable a cualquier año del año. EF. De manera democrática, el maestro podría discutir con los estudiantes la forma en que tendrían que adoptar para extraer estas monedas. Una de las sugerencias que surgieron en el taller fue asignar un cierto valor en monedas virtuales para alentar a los estudiantes a leer libros, es decir, leer libros generaría una ganancia en monedas. Otra propuesta que se discutió en el taller fue la provisión de inversiones para que los estudiantes hicieran con sus monedas. Dichas inversiones podrían ser conservadoras, moderadas o audaces, es decir, podrían implicar un riesgo bajo, medio o alto. A continuación, descebemos tres proyectos que están vinculados a la temática de este artículo, pero tienen objetivos distintos.

## **3. Creación de un libro paradidactico de estadísticas para la escuela básica.**

El objetivo de este proyecto es producir y editar un libro paradidactico que cubra contenidos básicos de Estadística, tales como: gráficos estadísticos, tablas, variables, medidas de posición y dispersión, etc. El libro será escrito por los investigadores involucrados en el proyecto y tiene como hilo conductor una historia que involucra un torneo de fútbol jugado entre equipos de diferentes escuelas. Los juegos generan

información estadística que los estudiantes de un equipo cuentan y estudian, quienes, utilizando estos datos sintetizados en gráficos y tablas, calculan cantidades que pueden ayudar a su equipo a ganar el torneo.

El formato y el lenguaje adoptados en el libro están destinados a ayudar a desarrollar la alfabetización estadística. Este proyecto también establece que, después de editar el libro, se realizará un estudio piloto en los últimos años de la escuela primaria en una escuela pública (estudiantes de 13 y 14 años). La idea es aplicar una prueba de diagnóstico sobre el contenido de las estadísticas cubiertas en el libro antes de leerlo, y aplicar otra prueba después de leer, buscando capturar cualquier diferencia en el desarrollo de la alfabetización estadística y la competencia crítica. Entrevistas también deben realizarse con los estudiantes que participan en este proyecto.

Por lo tanto, esta investigación se ajusta a lo que conocemos como metodología de estudio de caso y su marco teórico está integrado en los estudios de Gal (2002) sobre alfabetización estadística, así como Skovsmose (2004) con respecto a la educación matemática crítica, con apoyo también en los estudios de Campos (2007), Campos et al. (2011), Perin (2019) y Campos y Perin (2020).

#### **4. Modelagem matemática no ensino de gráficos, tabelas, medidas de posição e dispersão e probabilidade.**

Se trata de la creación y aplicación de una actividad de modelación matemática en los últimos años de la escuela primaria, similar a la historia descrita en el libro paradidactico, en el que los estudiantes seguirían a los equipos de la 1a división del campeonato de fútbol brasileño obteniendo datos del tipo: goles marcados en casa, goles recibidos en casa, goles marcados fuera de casa, goles recibidos fuera de casa, número de tiros, número de pases, porcentaje de pases correctos, tiempo en posesión, etc.

Con estas cantidades, el maestro podría trabajar en la idea de la posibilidad de que un equipo gane en cualquier juego, pero para eso los datos tendrían que sintetizarse en un reporte, en el que los estudiantes trabajarían en la construcción de gráficos y tablas, el cálculo de posición y dispersión. Como la estrategia pedagógica adoptada es el modelado matemático, esta actividad es propicia para el desarrollo de la educación estadística crítica, que puede implicar críticas tanto epistemológicas como sociopolíticas.

También parte de los objetivos de esta actividad es el desarrollo de la alfabetización estadística, según lo definido por Gal (2002). Las referencias para la educación matemática crítica son de Skovsmose (2004), con apoyo también en los trabajos de Campos (2007), Campos et al. (2011), Perin (2019), Campos y Perin (2020).

#### **5. Probabilidad como medida de riesgo en inversiones.**

Aún dentro del contexto del proyecto más amplio sobre educación financiera, las monedas extraídas por los estudiantes podrían usarse para realizar inversiones (virtuales), que pueden ser de tres tipos con respecto al riesgo: bajo, medio y alto. Este riesgo está relacionado con la probabilidad de que la inversión resulte en una ganancia o pérdida de divisas.

El objetivo de esta actividad es trabajar en el concepto de probabilidad como una medida de probabilidad asociada con el riesgo de inversión, que se puede desarrollar a través de simulaciones que involucran el juego de dados, cartas de una baraja, bolas de una urna, etc. Este tema tiene el potencial de permitir discusiones relacionadas con el mercado

financiero y el riesgo asociado con los juegos de azar, que conducen bastante a discusiones que ayudan a desarrollar la competencia crítica de la educación estadística.

Evaluaremos la actividad relacionada con el desarrollo de la alfabetización estadística y la competencia crítica, asociada con los fundamentos de la Educación Estadística Crítica, tal como lo describe Campos (2007 y 2016).

### Conclusiones

Los vínculos entre la educación financiera y las estadísticas tienen muchas formas de ser explorados. Las propuestas descritas aquí son complementarias y no agotan el tema, pero creemos que tienen un gran potencial para estimular el desarrollo de varias competencias estadísticas descritas en las especificaciones de las actividades.

Los proyectos se llevarán a cabo en escuelas públicas, donde podremos recopilar información importante para la publicación de varios artículos (al menos tres) y la presentación en congresos internacionales que se celebrarán en los próximos años.

### Referencias

- Campos, C. R. (2007). *Educação estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da Estatística em cursos de graduação*. (Tesis de Doctorado en Educación Matemática). Rio Claro/SP: UNESP.
- Campos, C. R. (2016). *Towards critical statistics education – theory and practice*. Saarbrücken/Alemania: Lambert Academic Publishing.
- Campos, C. R. & Perin, A. P. (2020). Sobre as competências crítica e comportamental na educação estatística. *Zetetiké Revista de Educação Matemática*, 28(2), 1-19.
- Campos, C. R., Wodewotzki, M. L. L., & Jacobini, O. R. (2011) *Educação estatística – teoria e prática em ambientes de modelagem matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Ministério da Educação, Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: educação é a base*. Brasília: MEC/SEF, 2018. Disponible en: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-51.
- Perin, A. P. (2019). *Educação estatística crítica: um estudo das práticas discentes em um curso de tecnologia*. (Tesis de Doctorado en Educación Matemática). Rio Claro/SP: UNESP.
- Skovsmose, O. (2004). *Educação matemática crítica – A questão da democracia*. 2ª ed. Campinas: Papirus

# Variáveis estatísticas e seus gráficos

Irene Mauricio Cazorla<sup>1</sup>, Miriam Cardoso Utsumi<sup>2</sup> e Carlos Eduardo F. Monteiro<sup>3</sup>

<sup>1</sup>UESC, <sup>2</sup>UNICAMP, <sup>3</sup>UFPE

## Resumo

Este trabalho é um ensaio teórico e tem como objetivo colocar em discussão os fundamentos que embasam as variáveis estatísticas e seus gráficos, a fim de sistematizar recomendações desejáveis para seu ensino na Educação Básica. Examinamos cada tipo de gráfico para representar as variáveis estatísticas de forma univariada e bivariada, explicitando suas principais características, como também suas vantagens e desvantagens. Postulamos um esquema conceitual que pode auxiliar os professores na escolha e construção dos gráficos, potencializando seu ensino. Tomamos como referência os trabalhos de Cazorla e Arteaga e sistematizamos as diversas investigações sobre a construção de gráficos estatísticos. Esperamos que nesta reunião possamos elaborar um documento norteador a ser submetido a comunidade de educadores estatísticos, a fim de auxiliar os professores na sua prática.

**Palavras chave:** Variáveis estatísticas, gráficos estatísticos, educação básica.

## 1. Introdução

Os gráficos estatísticos se constituem em uma ferramenta cultural para apresentar dados. Todavia as pessoas não apreendem as informações dos gráficos num processo de decodificação direta, assim é necessário mobilizar diversos conhecimentos relacionados, por exemplo às variáveis imbricadas nos diversos fenômenos e temáticas associadas aos dados apresentados. Num mundo marcado pela revolução computacional que possibilita o tratamento de milhares de dados, com recursos dinâmicos cada vez mais potentes e complexos, torna-se urgente estudos que auxiliem leitores na compreensão de dados apresentados em gráficos, os quais são comuns de serem veiculados em diversos meios de comunicação

O ensino dos gráficos estatísticos na Educação Básica no Brasil é recomendado pelos documentos oficiais (MEC, 1997, 1998) para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio (MEC, 2002), e ratificado pela Base Nacional Comum Curricular (MEC, 2018).

Na Educação Básica, os conteúdos de Estatística estão inseridos na disciplina de Matemática, cabendo ao professor de Matemática trabalhar a interpretação, a escolha e a construção dos gráficos estatísticos, isto é, o trato dos aspectos matemáticos formais por trás da construção dos gráficos (Silva & Figueiredo, 2019). Já seu uso, cada vez mais complexo e em contexto, é realizado em outras disciplinas, em especial, pela Geografia (Cardoso, 2012) e a Sociologia para apresentar e discutir problemas sociais como a distribuição de renda, o processo migratório, a globalização, ou em Ciências da Natureza ao trabalhar os cuidados com o corpo humano e com o meio ambiente, o avanço de doenças silenciosas, dentre outros temas transversais que envolvem dados estatísticos e sua representação em gráficos (Jesus, Fernandes & Leite, 2013).

As orientações curriculares para o ensino dos gráficos estatísticos, na disciplina de Matemática, já eram preconizadas desde 1997. No caso da BNCC (Brasil, 2018) é explícita a necessidade de analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir à erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não

explicitadas, omissão de informações importantes (fontes e datas), dentre outros. Da mesma forma instrui sobre a escolha e construção do gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), destacando aspectos como as medidas de tendência central; sendo que isso deve ser realizado por pesquisa amostral envolvendo temas da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório, contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Ao examinarmos essas orientações e os livros didáticos de Matemática, Geografia e Ciências (Coutinho, 2014; Oliveira, 2006; Santos, Santos-Junior, & Velasque, 2018; Silva; Selva, 2011), verificamos que os gráficos que devem ser trabalhados na Educação Básica são: gráfico de setores, pictogramas, gráficos de barras (colunas), simples, lado a lado, empilhadas, opostas, gráfico de linhas, histograma, polígono de frequência e, mais recentemente foram introduzidos o diagrama de ramo e folha e o da caixa (*boxplot*).

Assim, neste trabalho sistematizamos os componentes dos gráficos e apresentaremos cada um deles e a escolha de acordo com a natureza da variável. Como referencial teórico nos apoiamos nos estudos de Cazorla (2002), Martins e Ponte (2010) e Arteaga (2011). Além disso, nossas discussões se baseiam em revisões de estudos anteriores relativos à gráficos.

## 2. Conceitos subjacentes aos gráficos estatísticos

Segundo Fernandes, Batanero e Gea (2019, p. 2), “o tipo de variável estatística que queremos estudar determina em grande parte os métodos estatísticos que podem ser usados para a análise dos dados”. Para escolher ou construir um gráfico, o conceito de *variável* é crucial, pois o gráfico adequado para representá-la depende de sua natureza (Cazorla; Utsumi, 2010).

Na Figura 1 apresentamos os gráficos para análise univariada, utilizamos linha tracejada para indicar a recomendação preferencial por certo tipo de gráfico. No caso das variáveis ordinais não é recomendável o uso do gráfico circular, uma vez que elas podem apresentar tendências entre as categorias e o gráfico circular não permitirá observar essa qualidade. No caso das variáveis discretas que tomam poucos valores, como por exemplo, número de filhos por mulher, os gráficos adequados são o de hastes ou o diagrama de pontos; todavia, nem os documentos oficiais e nem os livros didáticos os mencionam; além disso, os softwares acessíveis, com exceção do Geogebra não os apresentam em seu menu. Observamos que a BNCC inclui o boxplot para o Ensino Médio. Na Figura 2 esquematizamos os gráficos adequados para representar duas variáveis (análise bivariada).

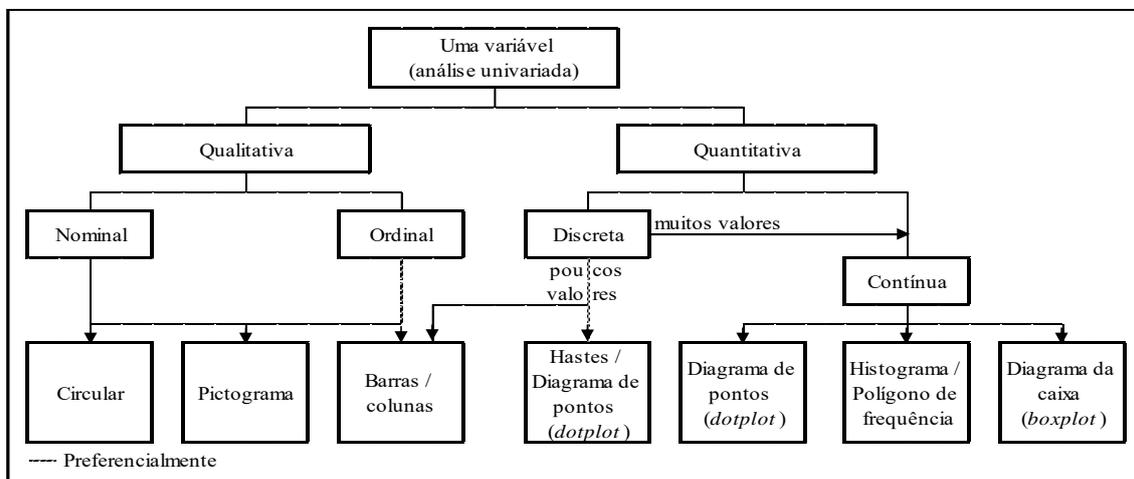


Figura 1. Tipos de gráficos para representar uma variável na Educação Básica.

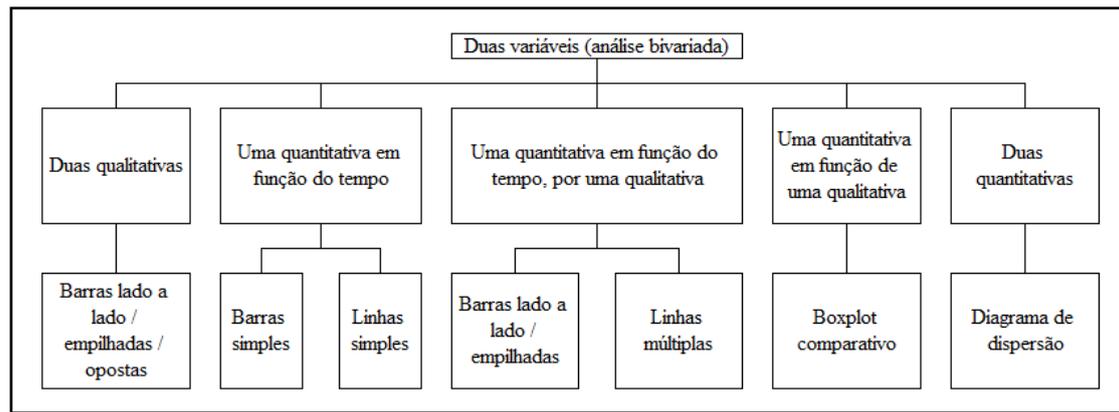


Figura 2. Tipos de gráficos para representar duas variáveis na Educação Básica.

Os dados brutos fornecem os elementos essenciais para a escolha da representação gráfica a ser utilizada, pois a depender do tipo de gráfico vamos precisar dos dados brutos, de preferência em lista, como por exemplo, para construir o diagrama de dispersão; já para construir o gráfico de linhas de uma série temporal vamos precisar de uma tabela estatística; já no caso da variável número de filhos por mulher vamos precisar de uma TDF ou um gráfico de barras ou ainda de um pictograma; e por fim, também podemos tomar como fonte um gráfico para construir outro gráfico, como veremos mais adiante.

### 3. Gráficos estatísticos

Cazorla (2002) define gráfico como uma representação simbólica de dados, geralmente relacionando duas ou mais variáveis, utilizando o sistema de coordenadas cartesianas; o objetivo do gráfico estatístico é comunicar ao leitor um conjunto de  $n$ -uplas de valores em  $n$ -escalas matemáticas, usando objetos cujas dimensões (comprimento, sombreamento, forma, posição dentre outros) correspondem às respectivas escalas e cujos valores em cada dimensão (particularidade de um objeto, comprimento, posição, entre outros) se relacionam.

Visando compreender os componentes dos gráficos, distinguimos três tipos de arcabouços no qual são construídos os gráficos estatísticos: coordenadas circulares, formado pelo círculo e setores; pseudo plano cartesiano, quando os dois eixos não seguem as propriedades dos eixos cartesianos, como os pictogramas ou quando um dos eixos não segue essas propriedades, como os gráficos de barras; plano cartesiano, genuíno, formado por dois eixos cartesianos e dentro dele por coordenadas cartesianas, do tipo  $(x, y)$ . Este tipo de arcabouço é adequado para representar gráfico de linhas e o diagrama de dispersão.

Assim, pretendemos discutir cada um dos gráficos e sua adequação para descrever as variáveis estatísticas em estudo.

### Referências

- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Cardoso, H. M. F. (2012). *A apreciação estética na História da Cultura e das Artes e a construção de gráficos na Geografia – Um estudo com alunos do Ensino Secundário*. Dissertação (Mestrado em Ensino de História e de Geografia). Universidade do Minho.

- Cazorla, I. M. (2002). *A relação entre a habilidades viso-pictóricas e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.
- Cazorla, I. M. & Utsumi, M. C. (2010). Reflexões sobre o ensino de Estatística na Educação Básica. In I. M. Cazorla & E. Santana (Orgs.). *Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico*. Itabuna: Via Litterarum.
- Coutinho, C. Q. S. (2014). Letramento estatístico: Qual a contribuição dos livros didáticos? In L. Andrade (Ed.). *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 58-66). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.
- Salcedo, A. (2017). Los gráficos estadísticos en la primaria venezolana: Una mirada desde el programa y el libro de texto de Matemáticas. In T. Ramírez (Ed.), *El texto escolar diferentes miradas* (pp. 69-84). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas UCV.
- Fernandes, J. A., Batanero, C. & Gea, M. M. (2019). Escolha e aplicação de métodos estatísticos por futuros professores dos primeiros anos. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- Jesus, D. S., Fernandes, J. A. & Leite, L. (2013). Relevância dos gráficos estatísticos nos manuais escolares da disciplina de ciências físico-químicas. In L. Fernandes, J. A., Viseu, F., Martinho, M. H. & P. F., Correia, (Orgs.). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Martins, M. E. G. & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Portugal: Ministério da Educação. Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- Ministério da Educação (MEC). (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC.
- Ministério da Educação (MEC). (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC.
- Ministério da Educação (MEC). (2018). Base Nacional Comum Curricular – BNCC. *Educação é a base*. MEC.
- Oliveira, P. I. F. (2006). *A Estatística e a Probabilidade nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade, Rio Grande do Sul.
- Santos, W. D., Santos-Junior, J. & Velasque, L de S. (2018). O desenvolvimento do letramento estatístico pelos livros didáticos e a Base Nacional Comum Curricular. *REnCiMa*, v.9, n.2, p. 210-229.
- Silva, D. B. & Selva, A. C. V. (2011). *Analizando atividades envolvendo gráficos e tabelas nos livros didáticos de matemática*. In: XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.
- Silva, N. A. & Figueiredo, H. R. S. (2019). A educação estatística na Educação Básica do Brasil, Estados Unidos, França e Espanha segundo os documentos curriculares. *Revemat*, v.14, Edição Especial Educação Estatística, 1-20.

# Um estado do conhecimento de investigações sobre interpretação de gráficos estatísticos

Leandro do Nascimento Diniz<sup>1</sup> e Ivanise Gomes Arcanjo Diniz<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Secretaria de Educação do Estado da Bahia

## Resumo

Este texto tem por objetivo refletir sobre um estado do conhecimento das pesquisas realizadas pelo Grupo de Pesquisa Educação Matemática no Recôncavo da Bahia (GPEMAR) sobre a interpretação de gráficos estatísticos, sendo um estudo qualitativo. Nas questões do tipo ler o gráfico os alunos não apresentam dificuldades. Já as de leitura entre os dados, há algumas dificuldades comuns à literatura e outras novas, como a presença do intérprete com alunos surdos. Geralmente apresentam dificuldades nas questões do tipo ler além dos dados, mas que foram reduzidas com a modelagem matemática e as investigações estatísticas. A presença de aspectos externos da matemática e estatística, no processo de interpretação dos gráficos, foram ampliados para os conhecimentos etnomatemáticos. Pretende-se desenvolver novos estudos com as feiras, alunos surdos e ouvintes e interação entre raça, sexo e dados sociais e econômicos na interpretação dos gráficos estatísticos.

**Palavras-chave:** Educação estatística. feiras de matemática. modelagem matemática. alunos surdos. investigações estatísticas.

## 1. Introdução

Este texto tem por objetivo refletir sobre um estado do conhecimento das investigações realizadas sobre a interpretação de gráficos estatísticos no Grupo de Pesquisa Educação Matemática no Recôncavo da Bahia - GPEMAR. Entende-se que esta síntese provisória poderá ser útil para se refletir sobre o que e como as investigações estão sendo realizadas, tanto para comparar seus resultados, como para analisar possíveis equívocos que estão sendo realizados ou ações que poderiam ser realizadas, além de perspectivar novas pesquisas.

De modo geral, as pesquisas sobre interpretação de gráficos estatísticos são relacionadas à elaboração de tarefas para que os alunos possam aprender conteúdos da Estatística Descritiva. Sem negar a importância disto, o GPEMAR tem observado lacunas de pesquisas, as quais os membros do grupo estão propondo reflexões sobre as articulações de pesquisas com temáticas como modelagem matemática na Educação Matemática, tecnologias digitais, em provas de larga escala e documentos oficiais e com alunos surdos. Estes estudos e também algumas tarefas elaboradas, mas que ainda não foram sintetizadas em artigos, serão apresentados na seção seguinte, juntamente com o método deste estudo. Posteriormente, apresentam-se algumas sínteses e as considerações finais.

## 2. Revisão da literatura, método da pesquisa e algumas reflexões

Este estudo é de natureza qualitativa e do tipo bibliográfica, pois o foco é realizar uma

revisão de estudos ou processo tendo como material de análise documentos escritos e/ou produções culturais a partir de acervos. [Com isto, espera-se] realizar uma análise crítica de um conjunto de estudos realizados, tentando extrair deles informações adicionais que permitam produzir novos resultados, transcendendo aqueles anteriormente obtidos" (Fiorentini & Lorenzato, 2006, p. 71).

As pesquisas foram analisadas a partir da leitura completa e com foco na análise de dados, mais especificamente na interpretação dos gráficos e são apresentadas a seguir. Assim, conforme os autores mencionados, denomina-se este estudo de estado de conhecimento. A primeira pesquisa do grupo é resultado da tese de doutorado<sup>1</sup> do primeiro autor, cujo objetivo foi analisar a leitura, construção e interpretação de gráficos estatísticos em projetos de modelagem matemática<sup>2</sup> com uso das tecnologias de informação e comunicação (Diniz, 2016). Decorrentes deste estudo, foram publicados Diniz e Fernandes (2016, 2017). O estudo foi realizado num colégio de ensino médio técnico, a partir do tema agricultura familiar. Alunos desenvolveram projetos de modelagem em uma perspectiva sociocrítica, em que a Matemática foi um meio para uma maior compreensão da realidade (Barbosa, 2006). Neste processo, eles coletaram dados, realizaram entrevistas, buscaram informações na Internet sobre seus temas, incluindo alguns gráficos, sendo que algumas equipes construíram tabelas e gráficos.

Na interpretação dos gráficos, Diniz (2016) identificou<sup>3</sup> 39% do nível 3, 35% do nível 2, 9% do nível 1 de Curcio (1987), sendo os alunos tiveram bom desempenho nos 3 níveis. No nível 1, os alunos não apresentaram dificuldades. Maiores dificuldades do nível 2 se referem a identificar os valores extremos, mobilizando conhecimentos prévios de Matemática relacionados ao paradigma do exercício (Skovsmose, 2000). Também identificou-se, conforme defende Monteiro (2006), que outros aspectos também interferiram neste cenário. Como resultados da investigação, além aspectos dos pontuados na literatura, destacou-se a produção de conhecimentos coletivos e reflexivos, a partir da perspectiva da Educação Matemática Crítica (Skovsmose, 2001) e a produção de conhecimentos etnomatemáticos, o que contribuiu, por exemplo, para melhores resultados no nível 3 (Curcio, 1987).

Silva (2017) focou numa tarefa de modelagem (com texto e questões) e analisou a interpretação dos gráficos pelos alunos de ensino médio técnico. Em outro estudo, Reis (2018) estudou como os alunos interpretaram os gráficos estatísticos nas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), avaliação utilizada para ingresso em universidades brasileiras. Pereira (2018) investigou a interpretação de gráficos realizada por alunos do 9º ano num contexto de aulas tradicionais de Matemática. Num curso de especialização, uma das licenciadas em Matemática deu continuidade ao estudo anteriormente realizado ao pesquisar a construção e interpretação de gráficos estatísticos num livro do ensino médio (secundário) adotado em Amargosa (um dos *campi* da UFRB), com base nas competências exigidas para os gráficos estatísticos na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Ministério da Educação, 2018), documento do Ministério da Educação que norteia o currículo das escolas de Educação Básica (Silva, 2019).

De modo geral, essas investigações concluíram que os alunos não apresentam dificuldades no nível 1 de Curcio (1987). Quanto ao nível 2, geralmente, os estudantes não encontraram dificuldades para comparar valores, como na identificação dos valores mínimos ou máximos, mas há diferenças entre as pesquisas. Silva (2017) relata que alguns estudantes apresentaram dificuldades na comparação dos dados para identificação do valor máximo. Ela pontua que os alunos fizeram referência ao contexto social no processo, devido à forma com a atividade se apresentava. Assim como na pesquisa de Diniz (2016), aqui também os alunos tiveram facilidades para resolverem questões do nível 3. Nos estudos aqui apresentados, pode-se concluir que os alunos tiveram mais facilidades, para interpretar gráficos neste nível, se este processo é permeado por conteúdos que extrapolam conteúdos matemáticos e estatísticos.

Em Pereira (2018), dificuldades dos alunos se referiam aos cálculos. Ao notar isto, a professora que aplicou a atividade atuou direcionando os alunos para a solução dos exercícios, o que gerou percentual maior de acertos. Nesta pesquisa, não há atividades do nível 3, uma vez que não foram encontradas no livro didático adotado.

Reis (2018) percebeu que os alunos apresentaram dificuldades nas escalas do gráfico, uma vez que consideravam a interpretação complexa. Em parte, segundo o autor, os alunos alcançaram o nível 2 de Curcio (1987) devido a dificuldades em conhecimentos prévios de Matemática. Também não houve questões do nível 3 de Curcio (1987) na prova. Por fim, destaca-se que, numa questão, mobilizaram conhecimentos sobre o tema do cotidiano presente no gráfico, extrapolando os conteúdos matemáticos e estatísticos.

Por fim, Silva (2019) destacou que uma questão do nível 2 apresentou dados fictícios no gráfico o que, segundo a BNCC, deveriam ser dados reais. Também destacou-se que as questões não se articulam com outras áreas da matemática, nem mesmo com conteúdos da estatística, além da ausência do uso de tecnologias digitais, como sugerido no documento. Além disso, a autora recomenda mais questões do nível 2 que envolvam a combinação em que é necessária juntar diferentes valores da variável com soma ou subtração, por exemplo, assim como questões de igualização, em que se analisa quanto de um valor falta para atingir outro valor da variável investigada. Apenas uma questão de cada tipo foi identificada pela autora. Um avanço notado foi ter 4 questões, sendo 3 relacionadas ao nível 2 e 1 ao nível 3 (Curcio, 1987). Nestas, as opiniões dos alunos sobre o tema eram solicitadas e poderiam influenciar na compreensão da tarefa. Sugeriu-se a ampliação das questões do nível 3, inserir o nível 1 e atividades com gráficos tendo erros, para que os estudantes possam analisá-los.

Além disto, realizou-se o desenvolvimento de tarefas, baseadas na resolução de problemas. Menciona-se duas delas. Uma foi desenvolvida para um minicurso do XVIII Encontro, a qual focou na interpretação de gráficos numa atividade a partir de dados coletados sobre o uso de uma rede social, em uma sala de aula com alunos surdos e ouvintes. Outra tarefa ainda não foi aplicada em sala de aula do ensino médio. Os dois autores deste texto, juntamente com outro pesquisador, construíram uma tarefa para refletirem sobre como os alunos interpretam gráficos estatísticos a partir de temas sobre a interseccionalidade de sexo e raça com aspectos sociais e econômicos dos municípios de Salvador e São Paulo de 2011 a 2017. Pretende-se aplicar e analisar esta tarefa e esperam-se parcerias para que os resultados possam ser comparados.

### **3. Considerações finais**

Um dos focos do novo projeto de pesquisa são as feiras. Assim, Diniz e Diniz (2019) refletiram sobre os impactos das apresentações orais na feira de Matemática realizada num colégio. Outras pesquisas estão sendo desenvolvidas em monografias: a interpretação de uma tarefa contendo gráfico box-plot e no contexto com alunos surdos. Tem-se interesse também no uso das tecnologias digitais e as feiras.

Desta forma, solicita-se que investigadores interessados possam interagir conosco para que se estabeleçam parcerias entre as possibilidades aqui apresentadas e outras que possam surgir nas discussões apresentadas, uma vez que nas lacunas identificadas ainda há muitas investigações a serem realizadas.

### **Referências**

Barbosa, J. C. (2006). *Mathematical modelling in classroom: a social-critical and discursive*

- perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 293-301.
- Ministério da Educação, Brasil (2018). *Base nacional comum curricular*. Brasília: Ministério da Educação.
- Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationship expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Diniz, L. N. (2016). *Leitura, construção e interpretação de gráficos estatísticos em projetos de modelagem matemática com uso das tecnologias de informação e comunicação*. Tese de Doutorado, Universidade do Minho, Braga.
- Diniz, L. N., & Diniz, I. G. A. (2019). Algumas reflexões sobre os impactos das apresentações orais de Projetos de Modelagem numa Feira de Matemática. *Revista de Ensino, Matemática e Cultura*, 14(30), 90-104.
- Diniz, L. N., & Fernandes, J. A. S. (2017). Refletindo sobre a interpretação de gráficos estatísticos em projetos de modelagem matemática com uso das tecnologias digitais: a presença de conhecimentos etnomatemáticos. *X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática* (pp. 1-14). Maringá: Universidade Estadual de Maringá.
- Diniz, L. N., & Fernandes, J. A. S. (2016). Interações entre construção e interpretação de gráficos estatísticos em projetos de modelagem matemática com uso de tecnologias de informação e comunicação. *Revista Vidya*, 36(2), 457-475.
- Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.
- Monteiro, C. E. F. (2006). Explorando a complexidade da interpretação de gráficos entre professores em formação inicial. *Cadernos de Estudos Sociais*, 22(2), 211-224.
- Pereira, B. V. (2018). *Interpretação de gráficos estatísticos em aulas tradicionais de Matemática*. Monografia de Graduação, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa.
- Reis, R. S. (2018). *Interpretação de gráficos estatísticos na prova do ENEM*. Monografia de Graduação, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa.
- Silva, F. S. S. (2017). *Interpretação de gráficos estatísticos por meio da modelagem matemática*. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa.
- Silva, F. S. S. (2019). *A interpretação e a construção de gráficos estatísticos em livros didáticos de matemática com base nas orientações da base nacional comum curricular*. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa.
- Skovsmose, O. (2001). *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*, 13(14), 66-91.

---

<sup>1</sup> Doutorado em Ciências da Educação, especialidade Educação Matemática, realizada na Universidade do Minho, sob orientação do Prof. Dr. José António da Silva Fernandes.

<sup>2</sup> A partir deste ponto, ao se referir a modelagem matemática na Educação Matemática, será usado apenas o termo modelagem.

<sup>3</sup> 17% não sendo possível identificar o nível de Curcio (1987), pois os gráficos precisaram ser refeitos.

# La estadística en los libros de texto en la Educación Secundaria Obligatoria

Antonio Estepa Castro y Jesús del Pino Ruiz

Universidad de Jaén

## Resumen

El trabajo que presentamos es parte de un proyecto más amplio sobre la investigación didáctica de la dispersión y sus medidas en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España. Nos centramos en el análisis de los libros de texto de la ESO, atendiendo a su estructura. Hemos constatado, en el análisis de la macroestructura, que los libros de texto exponen los contenidos en el mismo orden que se expresan en las dispersiones oficiales del curriculum, lo que implica que el bloque de Estadística y Probabilidad aparezca siempre el último con el riesgo de no ser impartido si ocurriese alguna contingencia en el desarrollo del curso escolar. En el análisis de la microestructura hemos observado que en algunos textos faltan o están deficientemente expuestos contenidos prescriptivos del curriculum. Esperamos que nuestros hallazgos sean de interés para la intervención didáctica.

**Palabras clave:** Libros de texto, medidas de dispersión, macroestructura, microestructura

## 1. Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto más amplio sobre investigación didáctica de la dispersión y sus medidas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) en España. Parte de este proyecto es un estudio sobre el tratamiento de las medidas de dispersión en los libros de texto utilizados en ese nivel de enseñanza (Del Pino, 2019) y que resumimos en el presente trabajo. El objetivo de este trabajo es caracterizar las medidas de dispersión en libros de texto de la ESO.

La presencia de los libros de texto en la enseñanza es bien patente; en consecuencia, al realizar una investigación didáctica sobre un contenido matemático es de interés incluir el estudio de los libros de texto y, más pertinente aún, si tenemos la sospecha de que la apropiación del contenido matemático por parte de los estudiantes es problemática, como es nuestro caso.

Analizamos la estructura de los libros de texto siguiendo a Valverde et al. (2002), entendiendo por macroestructura las características que recorren todo el libro, el armazón que lo integra y que nos proporciona la visión de las Matemáticas que se quiere transmitir. En contraposición la microestructura se refiere a la estructura asociada a un bloque de contenido que se pretende impartir en unas pocas sesiones.

Se describe la investigación y los resultados obtenidos, terminamos el trabajo con discutiendo los resultados obtenidos y la obtención de unas conclusiones.

## 2. Fundamentos teóricos y metodología

La investigación didáctica sobre libros de texto se ha incrementado en las últimas décadas, con diferentes enfoques y constructos. En nuestro caso hemos analizado la estructura de los libros porque según Valverde et al. (2002) puede proporcionar

conocimiento sobre el aprendizaje de los contenidos incluidos en el texto. Hemos realizado un estudio exploratorio siguiendo los trabajos de Love y Pimm (1996), Valverde et al. (2002) y Mikk (2000) entre otros.

La muestra de libros de texto estuvo compuesta por los libros más utilizados en Andalucía. Se analizaron 12 libros de texto de los cursos 3º, 4ºA y 4ºB de la ESO, de las editoriales Anaya Santillana, SM y Oxford, un libro de cada editorial por cada uno de los 3 cursos. La obtención de la muestra se describe en Del Pino y Estepa (2015).

### 3. Análisis de la estructura de los libros de texto

**Macroestructura.** Se ha incluido en Del-Pino y Estepa (2019), aquí realizaremos un resumen. Se analiza el contenido curricular: bloques de contenido y orden de los mismos.

La macroestructura depende del currículum oficial, obviamente distinto para cada curso, en consecuencia en el análisis de la macroestructura se distinguirán los tres cursos. En los tres cursos analizados el currículum que tiene cinco bloques de contenido: Aritmética, Álgebra, Análisis, Geometría y Estadística y Probabilidad. El espacio dedicado en cada libro al bloque de Estadística y Probabilidad se expone en la tabla 1.

Tabla 1. Porcentaje de páginas dedicado a cada bloque de contenidos en los libros de texto analizados

Bloque de contenidos	3º de ESO			4º de ESO Opción A				4º de ESO Opción B				
	3A <sup>1</sup>	3S	3O	3SM	4AA <sup>1</sup>	4AS <sup>1</sup>	4AO	4ASM	4BA <sup>1</sup>	4BS <sup>1</sup>	4BO	4BSM
Números	10,9	21,7	15,4	17,9	26,3	28,2	19,9	17,5	8,9	14,9	10,1	7,4
Álgebra	24,5	28,1	27,6	29,6	20,7	13,7	21,4	16,1	16,1	20,2	21,3	24,2
Geomet.	23,1	21,3	27,6	19,3	14,2	20,2	21,4	21	25	19,5	23,7	18,8
Análisis	13,5	12,5	13	11,7	17,2	14,1	12,5	18,2	16,9	19,8	13,6	32,2
Est. y Pro	13,5	12,5	13,4	17,2	13,4	17,9	15,1	22,3	24,2	18,7	21,9	20,8

A = Anaya; S = Santillana; O = Oxford; SM = SM

<sup>1</sup> Presentan una unidad para trabajar problemas, repaso y/o otra para calculadora

Se puede observar que en los libros de 3º y 4º opción A, el bloque de Estadística y Probabilidad, es el que menor espacio ocupa, salvo en el libro de la editorial SM, 4ASM. En 4º opción B los porcentajes están más equilibrados si se tiene en cuenta que el porcentaje de Aritmética baja y dicho espacio lo ocupará de manera natural Álgebra y Análisis.

**Microestructura.** Se analizará los libros desde dos perspectivas: a) como está distribuido los capítulos de cada libro, siguiendo a Valverde et al. (2002) y b) cómo se trabaja cada contenido sobre las medidas de dispersión incluido en el currículum, seguiremos lo indicado por Love y Pimm (1996).

En cada capítulo hemos considerado los siguientes elementos de microestructura: Lectura introductoria, actividades de introducción, desarrollo contenidos, mapa conceptual o resumen, ejercicios finales, recursos online y propuesta de investigación. De las lecturas y actividades introductorias se puede deducir la filosofía pedagógica que la editorial pretende: relacionar el tema con la historia del desarrollo de los saberes matemáticos, con las ideas previas de los estudiantes sobre el tema, motivar al estudiante en el estudio del tema, o bien, mostrar la utilidad de los contenidos que se

van a estudiar (enfoque competencial) Los libros de Santillana (3S, 4AS y 4BS) no tienen este tipo de actividades, lo que indica desinterés por la exploración de ideas previas o usos de los saberes matemáticos. En algunos textos falta un resumen final muy útil para organizar las ideas, relacionar los elementos del tema y obtener una visión global del mismo. Santillana y Oxford no incluyen recursos “on line”. Los demás elementos están en todos los libros.

En cuanto a los contenidos sobre medidas de dispersión (tablas 3, 4 y 5) en los libros analizados un hecho sorprendente es que en algunos libros faltan contenidos prescriptivos del curriculum oficial, en otros pueden estar demasiado escuetos o incompletos (4AS en tablas 4, 4BS, tabla 5).

Tabla 3. Microestructura de las medidas de dispersión en los textos de 3º de ESO

Contenidos	3A	3S	3O	3SM
Rango	X	*		X
Desviación típica	X	X	X	X
Varianza	X	X		X
Interpretación conjunta de la media y la desviación típica	X			X
Comparación de conjuntos de datos	X	X		X

\*No incluye ejemplo, solo exposición y ejercicios.

Tabla 4. Microestructura de las medidas de dispersión en los textos de 4º de ESO opción A

Contenidos	4AA	4AS	4AO	4ASM
Desviación típica	X	X	X	X
Varianza	X	X	X	X
Coefficiente de variación	X	X	<sup>2</sup>	X
Comparación de distribuciones	X	X		X
Cuartiles	X	X	X	X
Diagrama de caja	X	<sup>1</sup>		X

<sup>1</sup>Se incluye en los ejercicios finales de forma escueta e incompleta. <sup>2</sup>No incluye ejemplo, solo exposición y ejercicios.

Tabla 5. Microestructura de las medidas de dispersión en los textos de 4º de ESO opción B

Contenidos	4BA	4BS	4BO	4BSM
Desviación típica	X	X	X	X
Varianza	X	X	X	X
Coefficiente de variación	X	X	X	X
Influencia de los valores atípicos			X	X
Elección de medidas de dispersión en función de los valores atípicos			X	
Comparación de distribuciones	X		X	X
Cuartiles	X	X	X	X
Diagrama de caja	X	*	X	X

\*Se incluye en los ejercicios finales de forma escueta e incompleta.

#### 4. Conclusiones

Hemos visto que la Estadística y Probabilidad aparece en los últimos temas del libro en los tres cursos y en las 4 editoriales, lo mismo que ocurre en el curriculum oficial, en consecuencia, y al seguir la enseñanza el orden de los temas que se establecen en el libro de texto, el último bloque a enseñar es la Estadística y la Probabilidad, en muchas

ocasiones se queda sin desarrollar por múltiples circunstancias (por ejemplo falta de tiempo). Esto lo hemos constatado en Del Pino (2019), donde se preguntó a una extensa muestra de centros de ESO de Andalucía si habían impartido el curso escolar anterior el bloque de Estadística y Probabilidad y el 67,81% respondió que en 3º de ESO no se había impartido el bloque de Estadística y probabilidad el curso anterior.

La falta de contenidos prescriptivos curriculares en los libros de texto es inadmisibles, puede ser debido a que desde la aprobación de la LOE los libros de texto no precisan de la autorización de la Administración educativa. La disposición adicional cuarta apartado 2 de la LOE indica: “2. *La edición y adopción de los libros de texto y demás materiales no requerirán la previa autorización de la Administración educativa. En todo caso, estos deberán adaptarse al rigor científico adecuado a las edades de los alumnos y al currículo aprobado por cada Administración educativa.*” (MEC, 2006, p.86). Esta disposición adicional cuarta no ha sido modificada en la LOMCE (MECD, 2013), es decir, sigue vigente. Esperamos que estos hallazgos sean de interés para la enseñanza.

## 5. Referencias

- Del Pino, J. (2019). *Las medidas de dispersión en la Educación Secundaria Obligatoria: Análisis de libros de texto y de la comprensión de los estudiantes*. Tesis doctoral. Universidad de Jaén.
- Del-Pino, J., & Estepa, A. (2015). Analisis de libros de texto. Estadística de libros empleados en Andalucía. En J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas de las II Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 117-124). Granada: Grupo FQM-126.
- Del-Pino, J. & Estepa, A. (2019). Estudio de la presencia de la estadística en libros de 3º y 4º cursos de ESO a través del análisis de su macroestructura. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. Lopez-Martin, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada: Grupo FQM-126.
- Love, E. & Pimm, D. (1996). ‘This is so’: a text on texts. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 371–409). New York: Springer.
- MEC. (2006). *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. Madrid: Autor.
- MECD. (2013). *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa*. Madrid: Autor.
- Mikk, J. (2000). Textbook: Research and writing. *Baltische Studien zur Erziehungs und Sozialwissenschaft, Band 3*. Recuperado de <http://eric.ed.gov/?id=ED451244>
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. New York: Springer.

# Análisis exploratorio de la lectura conjunta de dos gráficos estadísticos por estudiantes de secundaria

Israel García-Alonso

Universidad de La Laguna

## Resumen

La lectura e interpretación de gráficos estadísticos es objeto de análisis en muchas investigaciones de Educación Estadística. Pero se observa que los gráficos estadísticos que recogen información de dos conjuntos de datos presentan especial dificultad y tienen mucha relevancia por lo abundantes que son en la información que se nos ofrece diariamente. Analizamos las respuestas de estudiantes de secundaria ante este tipo de gráficos y abrimos una vía de investigación sobre las dificultades que estos gráficos ofrecen y la influencia de los contextos en su comprensión.

**Palabras clave:** gráficos estadísticos, niveles de lectura

## 1. Introducción

Todo ciudadano formado necesita comprender ideas y conclusiones estadísticas, para enriquecer tanto su vida profesional como personal (Wild, Utts y Horton, 2018, p. 16). Pero, por otro lado, actualmente el mundo de la desinformación, las noticias falsas y la ignorancia son amenazas para nuestra forma de vida (Engel, 2019). Mucha de la información que se ofrece en nuestra vida cotidiana viene dada mediante gráficos estadísticos. De ahí la importancia del estudio de la lectura de gráficos de forma que se pueda ofrecer una formación que evite dificultades de comprensión o su mal uso.

En los últimos años la investigación en Educación Estadística ha caracterizado la lectura de los gráficos estadísticos adoptando diferentes niveles de lectura e interpretación (Aoyama & Stephens, 2003; Batanero et al., 2013; Curcio, 1987; Friel et al., 2001). En este trabajo nos centraremos en aquellos gráficos que representan simultáneamente dos conjuntos de datos. Nos preguntamos acerca de las dificultades de interpretación que se pueden encontrar estudiantes de secundaria. Nos preguntamos si la demanda cognitiva de estos gráficos es equiparable a otros que representan un único conjunto de datos.

## 2. Marco conceptual

Los gráficos estadísticos son objetos semióticos que requieren del dominio de elementos matemáticos para su lectura y han sido ampliamente analizados y estudiados por diversos autores (Arteaga et al., 2015; Curcio, 1987; Friel et al., 2001, entre otros). Estos autores han definido distintos niveles de lectura, según el grado de competencia adquirido por los estudiantes y sin diferenciar gráficos: Leer los datos (N1), Leer entre los datos (N2), Leer más allá de los datos (N3) y Leer detrás de los datos (N4). Por su parte, Mooney (2002) propone un marco para caracterizar el pensamiento estadístico de los estudiantes de secundaria donde el Análisis e Interpretación de los datos viene determinado por niveles que atienden a si realizan una comparación o una inferencia.

Estos estudios hacen una descripción de los gráficos en general, sin diferenciar los tipos de gráficos, y en particular se ajustan muy bien a gráficos que representan un único conjunto de datos desde el que realizamos la interpretación y análisis. Consideramos

que es conveniente estudiar en mayor profundidad qué diferencias se producen cuando utilizamos gráficos que muestran la información simultánea de dos conjuntos de datos o bien cuando es necesario estudiar dos gráficos para dar respuesta a una tarea. Este tipo de objetos semióticos es diferente y con mayor demanda cognitiva, pues requiere mayor abstracción para conseguir su correcta comprensión e interpretación, de modo que debe ser tenido en cuenta de forma diferente en los niveles de lectura de gráficos.

### 3. Metodología

Realizaremos un análisis exploratorio de las respuestas dadas por los estudiantes ante gráficos que provienen de dos conjuntos diferentes de datos y que se presentan de forma que se requiere conjugar la información que se muestra para crear una información nueva y relevante para la tarea. Analizamos las respuestas dadas por 110 estudiantes del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria (14-15 años) que completaron un cuestionario de elaboración propia que tiene por objeto desarrollar una tarea que implica el uso e interpretación de gráficos. Estos estudiantes se distribuían en tres centros educativos públicos de Tenerife (Canarias). Más detalle acerca de este instrumento y los resultados obtenidos se pueden encontrar en los trabajos publicados en García-Alonso y Bruno (2019). A diferencia de los trabajos anteriormente indicados, en esta ocasión profundizamos en cómo abordan el análisis e interpretación de los gráficos ofrecidos. Esto lo hacemos mediante el análisis de las respuestas que dan a las tareas propuestas.

### 4. Datos y discusión

PREGUNTA 1. La primera pregunta ofrece un diagrama poligonal acerca de la evolución en Canarias y en España del uso del móvil por niños de 10 a 15 años. Ambas evoluciones aparecen en el mismo gráfico. Ante esta tarea hemos encontrado diferentes formas de abordar la lectura de los gráficos.

- A. *Análisis independiente de las poligonales.* Los estudiantes realizan un análisis por separado de cada una de las gráficas, explicando lo que sucede en Canarias y posteriormente lo que sucede en España, siguiendo la poligonal correspondiente. Analizando la respuesta dada al estudio individual de la gráfica, observamos que los estudiantes muestran una interpretación que podría situarse en niveles altos. Pero este gráfico así planteado busca, entre otros objetivos, que se realice una lectura de la evolución de ambos conjuntos de datos de forma conjunta. Los estudiantes que responden sólo siguiendo la información de una gráfica, no muestran esta nueva información en su lectura. Por esa razón diríamos que se sitúan en un nivel básico de acercamiento a esta gráfica.
- B. *Análisis combinado de las poligonales.* Aquí los estudiantes han sido capaces de indicar, al menos que los datos de Canarias están por encima de los datos nacionales. Esta información es una nueva y sólo se puede apreciar en este tipo de representaciones combinadas, lo que muestra un nivel de lectura más elevado.
- C. *Respuestas en base a su experiencia.* Hay un conjunto de estudiantes que no es capaz de interpretar la información que se ofrece en el gráfico y basa su respuesta en elementos subjetivos acerca de su conocimiento del uso del móvil o bien no precisan ningún aspecto concreto de la gráfica que permita identificar si sólo se fija en una de ellas o bien lo hace comparándolas.

En general, observamos que la mayoría de los estudiantes al describir la gráfica no acceden a ella de manera que transfieran la información nueva que ofrece este tipo de gráfico. La mayor parte de los estudiantes o bien estudia cada gráfica por separado o hace una interpretación basada en su experiencia sin hacer intervenir la gráfica.

**PREGUNTA 2.** La segunda pregunta ofrece dos diagramas de barras diferentes, pero que, según el contexto de la tarea, se relacionan de manera consecutiva, es decir, se debe comenzar leyendo la información del primer diagrama y se completa la información con la lectura del segundo diagrama de barras. En este caso, las gráficas, a pesar de estar bajo el mismo contexto y referirse a las mismas compañías telefónicas, presentan diferente información y distinta escala en el eje vertical. Ante esta tarea los estudiantes mostraron diferentes tipos de respuesta:

- A. *Análisis independiente de los diagramas de barras.* Hay estudiantes que, al igual que en el caso anterior, realizan una lectura de las gráficas por separado, o bien sólo estudia una de las gráficas e ignora la otra. Algunos estudiantes se centran en buscar la compañía telefónica que resulte más barata sin tener en cuenta que el bono no sea suficiente o bien indicando que se ajuste al mismo, realizando algunas operaciones que sustenten esta afirmación.
- B. *Análisis combinado de los diagramas de barras.* Menos de la mitad de los estudiantes analizados realizan la lectura conjunta de las dos gráficas. Si bien es cierto que no todos ellos llegan a dar la respuesta correcta a la tarea propuesta, pues no hacen bien pues, luego son pocos estudiantes los que realizan los cálculos necesarios para resolver la tarea (García-Alonso y Bruno, 2019).
- C. *Suman los datos de los diagramas de barras.* Un pequeño grupo de estudiantes sumaron los datos de las compañías que se muestran en ambos diagramas de barras para obtener un único dato y resolver con él la tarea. Estos estudiantes demuestran tener bajo conocimiento numérico, gráfico y contextual, así como necesidad de clausura de los datos. Error poco frecuente en este estudio pero que pueden provenir de dificultades de comprensión que van más allá de la lectura gráfica.
- D. *Respuestas en base a su experiencia.* Este último caso, detectamos de nuevo una respuesta basada en su propia experiencia y no en el contexto propuesto. La mayoría de los estudiantes de esta categoría no realizaron ninguna operación.

Tabla 1. Frecuencia (y porcentaje) en cada categoría de respuesta

	Pregunta 1	Pregunta 2
Análisis combinado de las gráficas	45 (41)	48 (43,6)
Análisis individual de las gráficas	37 (33,6)	32 (29)
Suma de los datos	-	6 (5,4)
Respuestas en base a su experiencia	26 (23,6)	13 (12)
No contestan	2 (1,8)	11 (10)

En la tabla 1 se recogen las respuestas analizadas en cada categoría. Hemos analizado las respuestas de los estudiantes de educación secundaria cuando se enfrentan a dos tareas que muestran la información de dos conjuntos de datos, ya sea en un único gráfico o bien en dos gráficos que deben combinar. Observamos que, ante este tipo de tareas, hay un grupo de estudiantes que integra los gráficos para su interpretación, pero hay un grupo importante de estudiantes que interpreta los gráficos de forma

independiente cada uno. Finalmente hay estudiantes para los que el gráfico no es relevante frente a su experiencia en el contexto de trabajo, o para los que era necesario realizar la suma de los datos de los gráficos. Por todo ello consideramos que es conveniente profundizar en cómo se relacionan los niveles de lectura propuestos en las investigaciones con la interpretación de este tipo de gráficos en los que no es relevante la lectura individual de cada gráfica.

## 5. Futuras investigaciones

Consideramos que se abre una nueva vía a explorar en el análisis de la lectura e interpretación de gráficos de datos conjuntos y que requieren diferentes estrategias de lectura, pues pueden contener la información en el mismo gráfico o bien son gráficos diferentes o con unidades distintas, etc. El estudio de los contextos y su influencia en este tipo de gráficos, sigue siendo otro factor a analizar. Es necesario estudiar cómo se relaciona la lectura e interpretación de los estudiantes con los niveles de lectura que ya ofrece la investigación en Educación Estadística.

## Referencias

- Aoyama, K. & Stephens, M. (2003). Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective. *Mathematics Education Research Journal*, 15(3), 207-225.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M., & Cañadas, G.R. (2015). Statistical graphs complexity and reading levels: a study with prospective teachers. *Statistique et Enseignement*, 6(1), 3-23
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M., & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18.
- Curcio, F.R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. What is civic statistics? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada: Grupo FQM-126. Disponible en [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html).
- Friel, S.N., Curcio, F.R., & Bright, G.W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158. DOI: <https://doi.org/10.2307/749671>.
- García-Alonso, I., & Bruno, A. (2019). Razonabilidad numérica en respuestas estadísticas. En J.M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada: Grupo FQM-126.
- Mooney, E.S. (2002). A framework for characterizing middle school students' statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(1), 23-63.
- Wild, C.J., Utts, J.M. y Horton, N.J. (2018). What is statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5-36). Cham, Suiza: Springer.

# Lectura e interpretación de gráficos estadísticos de la prensa escrita en futuros profesores: un estudio exploratorio en Italia y Portugal

José A. Garzón-Guerrero

Universidad de Granada

## Resumen

Interpretar los datos estadísticos es vital en la sociedad de la información en la que vivimos y que muchas veces nos llegan en forma de gráficos estadísticos, sobre todo a través de los medios de comunicación. Además, los futuros profesores deberían poseer una competencia gráfica adecuada a su labor de formación. En este trabajo se realiza un estudio preliminar sobre la evaluación de dicha competencia en futuros docentes de Italia y Portugal. Los resultados arrojan cierto déficit en la formación estadística que impide la completa interpretación y lectura crítica de los gráficos.

**Palabras clave:** gráficos estadísticos, errores y dificultades, cultura estadística, futuros profesores.

## 1. Introducción

En la actualidad los ciudadanos estamos bajo un constante aporte de información que proviene de diversas fuentes, sobre todo de los medios de comunicación, tanto tradicionales como digitales. Gran parte de dicha información nos llega en forma de resultados estadísticos, fáciles de entender y que aportan rigor y seriedad a la información expuesta. Pero a veces esto no siempre ocurre y es necesario que el individuo sea crítico y que posea las adecuadas herramientas y conocimientos en estadística para poder desenvolverse con soltura a la hora de interpretar esas informaciones o detectar posibles sesgos en ellas (Contreras & Molina-Portillo, 2019). Es lo que se denomina cultura estadística, e involucra las capacidades y habilidades de entender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que aparecen en la vida cotidiana (Batanero, 2013).

En particular, la interpretación de gráficos estadísticos elementales es una de las habilidades básicas que una persona estadísticamente culta debiera tener en una sociedad marcada por los avances tecnológicos y la transmisión inmediata de la información (Sharma, 2013). Pero esa interpretación no debe restringirse a una mera lectura literal del gráfico, sino que se debe interpretar y realizar una lectura crítica de la información estadística incluida en el gráfico y también formular y comunicar a otros opiniones y conclusiones sobre dicha información (Gal & Murray, 2011).

Como caso particular, los futuros docentes necesitan de una adecuada cultura estadística, ya que de ellos depende que el resto de los ciudadanos adquieran todas las competencias básicas. Son varios los trabajos en la literatura que abordan esta temática. En Monteiro y Ainley (2007) se estudia la lectura de gráficos de la prensa diaria en este colectivo, concluyendo que muchos de ellos no poseen suficiente conocimiento matemático para poder leerlos, o lo hacían, pero luego no eran capaces de interpretarlos y leerlos críticamente. En Molina-Portillo, Contreras, Godino y Díaz-Levicoy (2017), analizan la interpretación crítica de datos a través de gráficos publicados en medios digitales. En general, los estudios existentes coinciden en que, a pesar de la importancia que tiene la interpretación de la información estadística a través de gráficos, se observan

bastantes dificultades y errores en dicha tarea y pueden existir sesgos, intencionados o no, que la compliquen aún más (Arteaga, 2011).

El objetivo de este trabajo es evaluar la competencia de interpretación de algunos gráficos estadísticos en futuros profesores de Primaria y Secundaria de Italia y Portugal y su comparación con trabajos similares realizados en España. Los resultados podrán servir para la creación de actividades formativas acerca de la comprensión gráfica de la estadística (Gea, Arteaga, & Cañadas, 2017).

## 2. Marco teórico

Los gráficos estadísticos son objetos semióticos complejos que demandan de varios procesos de interpretación, empezando por analizar los elementos estructurales del gráfico, continuando por la percepción de las variables que aparecen y sus escalas y finalmente las conclusiones sobre los niveles de cada variable y su relación con la realidad que se busca representar (Arteaga, 2011).

En este trabajo nos basaremos en la adquisición de las competencias fundamentales para la comprensión del lenguaje gráfico. Según Friel, Curcio y Bright (2001) se requieren las siguientes destrezas para ello:

- Reconocer los componentes estructurales del gráfico y sus relaciones.
- Percibir el impacto de dichas componentes sobre la presentación de la información.
- Traducir las relaciones reflejadas en el gráfico a los datos que se representan en el mismo y viceversa.
- Reconocer si un gráfico es más adecuado que otro.

En este estudio se utilizarán dichas competencias para el análisis de la comprensión gráfica en futuros maestros.

## 3. Metodología

Este estudio se realizó en una muestra de 52 futuros maestros, 29 en Portugal (Universidade de Tras-os-Montes e Alto Douro, Vila-Real) y 23 en Italia (Università Roma III, Roma). La mayoría eran alumnos al nivel equivalente a un máster de formación del profesorado en España, o estaban cursando el doctorado en educación. Durante unas semanas antes, se realizó una investigación entre los medios de comunicación de ambos países, buscando gráficos adecuados para su estudio, sobre todo con algún tipo de error o sesgo de construcción para comprobar las competencias en la interpretación de gráficos. Se eligieron tres tipos de gráficos diferentes: de barras, de líneas y de sectores. Cada uno de ellos adaptado a cada país analizado. En la Figura 1 se puede observar el caso del diagrama de sectores para Italia y Portugal.

A los participantes se les preguntó acerca del gráfico cuatro cuestiones que debían responder, relacionadas con las competencias gráficas:

1. Descripción del gráfico: describir el tipo de gráfico, variables, criterio para mostrar la información...
2. ¿Puede encontrar algún sesgo o error en el gráfico?
3. ¿Qué información relevante puede extraer del gráfico?



comparación con España. Los resultados arrojan cierto déficit en la formación estadística que impide la completa interpretación y lectura crítica de los gráficos de la prensa. Es necesario, por tanto, realizar acciones formativas específicas sobre el alumnado de Educación y profesorado en formación para evitar este tipo de carencias y alcanzar una adecuada cultura estadística entre los futuros formadores.

Una línea de trabajo futuro inmediato es la de realizar esta evaluación de la competencia gráfica en distintos países de diferentes entornos y características, en cuyo caso, Brasil sería un perfecto objetivo de estudio.

## Referencias

- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 55-61.
- Contreras, J. M. & Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. del M. López-Martín & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-12). Granada: Grupo FQM-126.
- Espinel, C., González, T., Bruno, A. & Pinto J. (2009). Las gráficas estadísticas. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estadística*, (pp. 133-156). Melilla. Facultad de Humanidades y Educación.
- Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- Gal, I. & Murray, S. T. (2011). Responding to diversity in users' statistical literacy and information needs: Institutional and educational implications. *Statistical Journal of the International Association for Official Statistics*, 27(3-4), 185-195.
- Gea, M.M., Arteaga, P., & Cañadas, G.R. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 19-37.
- Molina-Portillo, E., Contreras, J. M., Godino, J. D., & Díaz-Levicoy, D. (2017). Interpretación crítica de gráficos estadísticos incorrectos en la sociedad de la comunicación: un desafío para futuros maestros. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, (Extra), 4787-4794.
- Monteiro, C. & Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), 188-207.
- Sharma, S. (2013). Assessing students' understanding of tables and graphs: implications for teaching and research. *International Journal of Educational Research and Technology*, 51-70.

# Concepciones estadísticas: un estudio con estudiantes de la secundaria

Cassio Cristiano Giordano<sup>1</sup> y Roberta Schnorr Buehring<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Pontificia Universidade Católica de São Paulo, <sup>2</sup>Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

## Resumen

Llevamos a cabo una investigación cualitativa, en la que tratamos de identificar conocimientos y concepciones de ochenta y seis estudiantes del último año de la secundaria en una escuela brasileña, sobre estadística descriptiva, movilizadas por la resolución de problemas, después de desarrollar proyectos de investigación estadística. Adoptamos, en nuestro marco teórico, el Análisis Exploratorio de Datos (AED) y la Teoría de las Concepciones. Realizamos un Análisis Estadístico Implicativo (ASI), con el software CHIC (Clasificación Jerárquica Implicativa y Cohesiva), para evaluar el nivel de conocimiento de los estudiantes, y un análisis de sus concepciones, de acuerdo con el modelo kkc. Al final, pudimos identificar diez concepciones sobre estadísticas, así como cambio de concepción, lo que, en el modelo ckç, se entiende como un indicador de aprendizaje.

**Palabras clave:** Concepciones, educación estadística, teoría de las concepciones, análisis estadístico implicativo, proyectos.

## 1. Introducción

Comprender la estadística es fundamental para la educación escolar, la vida profesional y para el ejercicio pleno de la ciudadanía, en el siglo XXI. En este sentido, con base en nuestra revisión de literatura, consideramos el enfoque estadístico por proyectos como un elemento con amplio potencial para el desarrollo de la alfabetización estadística, desde la perspectiva de Gal (2019). Este entendimiento está en línea con la Base de Currículo Nacional Común - BNCC (Ministério da Educação e Cultura, 2018). La propuesta curricular en vigor preveía la enseñanza de estadística descriptiva (la enseñanza de estadística inferencial no estaba prevista en el currículum) solo en el según semestre del tercer y último año de la escuela secundaria. Así, evaluamos sus concepciones previas, a través del ASI, antes de empezar a abordar la estadística a través de proyectos. Después de que la investigación de los estudiantes se haya completado, buscamos identificar las concepciones movilizadas sobre los contenidos curriculares previstos: variabilidad, medidas de tendencia central, medidas de dispersión y registros de representación (gráficos estadísticos y tablas de distribución de frecuencia - TDF). La pregunta que guía nuestra investigación es: "¿Qué concepciones movilizan los estudiantes de secundaria al resolver problemas relacionados con la estadística descriptiva, después del desarrollo de proyectos en esta área?"

## 2. Marco teórico

La opción para el AED nos parece una elección natural, ya que su enfoque de estadística valora la postura investigativa crítica del estudiante y presupone una propuesta didáctico-pedagógica centrada en la investigación del profesor. Como características básicas de AED, Batanero, Estepa y Godino (1991) destacan la posibilidad de generar situaciones de aprendizaje sobre temas de interés para los estudiantes, basándose en representaciones gráficas que favorecen la percepción de variabilidad, la valoración de las medidas de orden, que minimizar cualquier caso atípico, el uso de diferentes escalas y la falta de necesidad de una teoría matemática compleja, con herramientas

innecesarias en ese momento. Estamos interesados en el desarrollo de proyectos estadísticos por parte de los estudiantes, desde la perspectiva de AED. Para Batanero y Díaz (2004), los proyectos estadísticos motivan a los estudiantes, más que la resolución de ejercicios descontextualizados. Para las autoras, la estadística es la ciencia de los datos, y estos no son solo números, sino números en contexto. Según ellas, en el trabajo del proyecto, el énfasis está en tareas realistas. Batanero y Díaz (2011) enfatizan que el desarrollo de proyectos contribuye a la adquisición de las siguientes habilidades, fundamentales para el estudiante de secundaria: competencia del lenguaje comunicativo, competencia matemática, competencia de reconocimiento e interacción con el mundo físico, la competencia para el tratamiento de la información y la competencia digital, la competencia social y el ejercicio de la ciudadanía, la competencia para aprender", cuestionar, identificar y gestionar las diversas técnicas y estrategias para abordar la misma situación problemática, la competencia para logro de autonomía e iniciativa personal. El trabajo del proyecto puede ayudar a desarrollar tales habilidades.

Según Balacheff y Gaudin (2002), el conocimiento no puede reducirse totalmente a comportamientos, pero tampoco puede enseñarse en su ausencia. Cada acción moviliza una cantidad considerable de conocimiento. Para desarrollar nuevos conocimientos, así como profundizar los anteriores, es necesario movilizar concepciones, directamente relacionadas con los problemas que enfrentan los estudiantes. Balacheff (2001) afirma que una concepción no puede ni debe separarse del contexto del que surge el problema, que lo resalta y le da sentido. Las concepciones permiten interpretaciones, predicciones y construcción de modelos y, sobre todo, describen una parte de la estructura cognitiva del alumno. Adoptaremos, en nuestra investigación, las definiciones de conocimiento, de concepción y de concepto de la teoría  $ck\phi$ , del modelo propuesto por Balacheff (2002). Para él, una concepción es una estructura mental, característica de un tema determinado, constituida por un observador de su comportamiento (en nuestro caso, el investigador). El aprendizaje, a su vez, consiste en pasar de una concepción a una nueva, más compleja e integral. Una concepción, en el modelo  $ck\phi$ , es un estado de equilibrio de un sistema, sujeto-ambiente, considerando las limitaciones, imposiciones, es decir, cualquier cosa que influya o interfiera con su funcionamiento. La concepción pertenece al sujeto y, por lo tanto, puede ser correcta o no desde el punto de vista del conocimiento de referencia. Una concepción implica un cuádruple  $(P, R, L, \Sigma)$ , donde  $P$  es un conjunto de problemas, sobre los cuales  $\phi$  está operativo;  $R$  es un conjunto de operadores (herramientas cognitivas para la acción);  $L$  es un sistema de representación, que permite expresar los elementos de  $P$  y  $R$ ;  $\Sigma$  es una estructura de control que garantiza la no contradicción de la concepción  $\phi$ . En este cuádruple, un sujeto que enfrenta un problema por resolver puede tener varias concepciones sobre el mismo objeto matemático y movilizar a uno u otro de acuerdo con el problema propuesto.

### 3. Método de investigación

Investigamos las concepciones movilizadas por estudiantes en la resolución de problemas estadísticos, cuando el tema se aborda a través de proyectos, antes y después de su realización, desde la planificación y la recopilación de datos hasta el análisis final y la difusión de los resultados de la investigación. Optamos por el enfoque metodológico de la investigación cualitativa, en la perspectiva de Creswell (2010). Para evaluar el nivel de conocimiento de los estudiantes, antes del desarrollo del proyecto, aplicamos un cuestionario con veintinueve preguntas estadísticas básicas, analizando las respuestas a través del ASI. Los sujetos de la investigación fueron ochenta y seis estudiantes del último año de una escuela pública brasileña, de edades entre dieciséis y

diecinueve años. Ellos respondieron a un cuestionario que consta de veintinueve preguntas sobre estadística, analizadas con la ayuda del *software* CHIC (Clasificación Jerárquica Implícita y Cohesiva). Dicho *software* permite extraer información de un conjunto de datos, cruzar sujetos y atributos, reglas de asociación entre variables, indicando el índice de calidad de asociación y representando una estructuración de estas variables según Couturier y Gras (2005) y Gras et al. (2013). En la segunda etapa de la investigación, cuatro grupos de estudiantes (dos tríos y dos dobles), respondieron tres preguntas de estadística descriptiva durante un período de una a tres sesiones de 100 minutos, en tres días separados de la misma semana. Dicha producción, registrada a través de la producción escrita y grabaciones de audio de las interacciones entre los estudiantes del grupo, se analiza a la luz de la Teoría de las Concepciones.

#### 4. Resultados

El ASI identificó variables y proporcionó explicaciones para evaluar el nivel de conocimiento de los estudiantes, con la ayuda del *software* CHIC. Realizamos el análisis relacionando estas variables, interpretando los gráficos implicativos, cohesivos y de similitud pero, sin embargo, por razones de limitación de espacio, en este artículo, no es posible presentaremos estos gráficos. Los resultados indican que el conocimiento previo presentado por los estudiantes fue bastante frágil y necesitaba ser trabajado en mayor profundidad a lo largo del proyecto a desarrollar, para abordar los contenidos estadísticos y probabilísticos durante el trimestre siguiente. El análisis implicativo demostró ser una buena herramienta para evaluar el instrumento y analizar las respuestas dadas por los estudiantes. Identificamos algunas concepciones movilizadas por los estudiantes al resolver problemas estadísticos. Aquí no es posible presentar las concepciones identificadas, cada una asociada con sus cuatro elementos constitutivos, por razones de espacio, pero podemos destacar, en líneas generales que, mientras trabajo estadístico cooperativo, llevado a cabo en pequeños grupos, el choque de ideas, el planteamiento y la comprobación de hipótesis, según lo predicho por Garfield (1993), favorecen el cambio esperado de concepción y el refinamiento del pensamiento estadístico. En nuestro caso, en paralelo con la acción de las estructuras de control individuales, la discusión colectiva permitió verificar hipótesis, revisar resultados y acercarse a los resultados esperados. Díaz (2016) destaca que, según los estudiantes, el trabajo colaborativo en grupos pequeños reduce la ansiedad, lo que contribuye a una mayor comprensión de las nociones estadísticas y la adquisición de experiencia. Según esta autora, las actividades de colaboración son más tranquilizadoras, motivadoras y estimulantes, favorecen la concentración en la tarea y alientan el surgimiento de una diversidad de propuestas. El estímulo de la ayuda mutua permite la asimilación de conceptos, el progreso en las actividades, la reducción de la percepción de dificultad de la tarea y la reducción de la ansiedad. La atención colectiva reduce la carga de las dificultades, intercambiar y compartir mejora la autoconfianza y el compromiso colectivo. Percibimos los mismos efectos al observar el trabajo de los estudiantes en grupos, tanto después del diagnóstico de sus conocimientos previos, a través del ASI, durante el desarrollo de proyectos de investigación y, finalmente, durante la resolución de problemas estadísticos en grupos pequeños.

#### 5. Conclusiones

Consideramos que el enfoque de la estadística a través de proyectos puede contribuir al cambio de las concepciones de estudiantes. Como descubrimos, hay pocos estudios

publicados sobre concepciones desde la perspectiva del modelo cKç. Sin prácticamente ningún contacto escolar previo con estadísticas en un ambiente escolar, los estudiantes presentaron comprensión mínima de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos, así como medidas de tendencia central y dispersión. Con respecto a las concepciones movilizadas, consideramos que la interacción entre los miembros del grupo es positiva, especialmente con respecto a las estructuras de control. El conocimiento del contexto, resaltado por el modelo de Gal (2019), jugó un papel fundamental en la validación de las concepciones por parte de los estudiantes.

## 6. Referencias

- Balacheff, N. (2001). Les connaissances, pluralité de conceptions. Le cas des mathématiques. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 19, 83-90.
- Balacheff, N. (2002). Cadre, registre et conception: note sur les relations entre trois concepts clés de la didactique. *Les Cahiers du laboratoire Leibniz*, 58, 1-18.
- Balacheff, N. & Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz* 65,1-21.
- Batanero, C. & Díaz, C. (2004) El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Em J. P. Royo (Ed.). *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE.
- Batanero, C. & Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C., Estepa, A., & Godino, J. D. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.
- Ministério da Educação e Cultura, Brasil. (2018) *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base: Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, Brasília.
- Couturier, R. D.; Gras, R. (2005) CHIC: traitement de données avec l'analyse implicative. En C. Ritschard y Djeraba (Eds.), *Journées d'extraction et gestion des connaissances (EGC'2005)* (Vol.2, pp. 679-684).
- Creswell, J. W. (2010) *Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed.
- Diaz, D. (2016). Les facteurs influençant la réussite des activités collaboratives médiées par les TICE dans une situation de formation universitaire à la statistique (Doctoral dissertation, Thèse de doctorat. Lyon 2, Lyon, France, 2016.
- Gal, I. (2019) Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada. Disponible en: <http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html>
- Garfield, J. (1993) Teaching statistics using small-group cooperative learning. *Journal of Statistics Education*, 1(1), 1-9.
- Gras, R., Régnier, J. C., Marinica, C. & Guillet, F. (2013) *L'analyse statistique implicative Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Toulouse: Cépaduès.

# Análise do tratamento da informação realizado por estudantes do ensino superior

Magnus Cesar Ody<sup>1</sup>, Lori Viali<sup>2</sup> e Cassio Cristiano Giordano<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Faculdades Integradas de Taquara, <sup>2</sup>Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, <sup>3</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP

## Resumo

O objetivo desse estudo consiste em analisar o tratamento da informação realizado por estudantes universitários na promoção literacia estatística. Foram analisados os trabalhos elaborados por 16 grupos num total de 60 estudantes de 9 cursos de graduação. Os materiais foram coletados pelo professor-pesquisador no segundo semestre de 2019. Foi observada a contribuição da literacia estatística de Gal. Emergiram 16 textos, abordando diferentes temas em função da natureza interdisciplinar do componente curricular Estatística Aplicada. Na dimensão cognitiva apresentam dificuldades na produção textual e no raciocínio estatístico, a familiaridade com conhecimentos básicos da estatística descritiva, com números e proporcionalidade. Os grupos estabeleceram relações com o contexto pessoal, profissional e social. Na dimensão afetiva/comportamental, estiveram presentes as questões de crenças.

**Palavras-chave:** Tratamento da informação. literacia estatística. ensino superior.

## 1. Introdução

As informações estatísticas em suas diversas representações de linguagem, exigem um cidadão com competências básicas para que possam interpretar, tomar decisões e comunicá-las adequadamente sobre um determinado tema ou fato cotidiano. Não há dúvidas que cada vez mais os cidadãos são reconhecidos pelo conjunto de competências que dispõem.

Observa-se a relevância no desenvolvimento da literacia estatística (Gal, 2002), para as habilidades elementares de conceitos estatísticos e, como um construto relevante para a formação de uma cultura estatística (Otaviani, 1998; Gal, 2002; Watson, 2006). Esta, por sua vez, para aproximar as demandas da sociedade com relação às demandas e produtos construídos na educação formal (Batanero, 2001).

Isso é pertinente pelo fato de estar, neste estudo, envolvendo estudantes universitários, que fazem ou irão fazer, em suas diferentes atribuições profissionais, o uso dos estudos de estatística na graduação. Estes, por vezes, terão contato, na universidade, com conceitos estatísticos somente uma vez. Uma realidade presente em boa parte das instituições brasileiras, inclusive nos cursos voltados à formação docente (Viali, 2008).

Compreende-se, nesse contexto, o claro papel que a estatística desempenha no tratamento de dados gerados nas diversas áreas da ciência. Exemplo disso, foi o último *International Conference on Teaching Statistics, ICOTS*, ocorrido em Kyoto, que em algumas das considerações emergidas diz respeito à relevância da educação estatística “para a interpretação e a apropriação do conhecimento estatístico pelos espaços formais de ensino e pelos cidadãos em todo o mundo”, Viali e Ody (2020, p. 69).

Esse estudo é de natureza qualitativa, cujo objetivo consiste em analisar o tratamento da informação realizado por estudantes universitários de uma Instituição de Ensino Superior da grande Porto Alegre, na promoção literacia estatística. A pesquisa ocorreu no segundo semestre de 2019, durante 15 semanas, na realização do componente curricular Estatística

---

Ody, M. C. y Viali, L. (2020). Análise do tratamento da informação realizado por estudantes do ensino superior: En M. M. Gea. R. Álvarez-Arroyo y J.A. Garzón (Eds.), *Seminario Hispano Brasileño de Educación Estadística*. Granada: Grupo PAI FQM-126.

Aplicada. Este, entretanto, possui diversos nomes em função do número de cursos envolvidos: Estatística, Probabilidade e Estatística, Estatística Aplicada à Qualidade I, Estatística Aplicada e Probabilidades, Estatística I, Fundamentos da Estatística e Introdução à Estatística.

A turma era formada por 60 alunos dos cursos de Administração de Empresas, Ciências Contábeis, Engenharia de Produção, Gestão Comercial, Gestão da Qualidade, Licenciatura em Matemática, Psicologia, Publicidade e Propaganda e Relações Públicas. A formação dos grupos adotou como critério ter estudantes de cursos diferentes. Com relação aos temas, o professor-pesquisador sugeriu a realização de um *Brainstorm*, para que emergisse um tema atual e do contexto do grupo.

Todos os materiais com as informações e os *feedbacks*, eram mediados com o uso do *Google Classroom*, adotado pela instituição como sistema de gerenciamento de conteúdo. Os grupos eram orientados nas aulas e por meio do sistema. Foram elaborados 16 textos, apresentados oralmente e entregues, por cada grupo, no final do semestre. Os textos tinham o formato de artigo, tendo como critério os seguintes elementos: título, autores, resumo, palavras-chave, introdução, dados (elaboração e coleta), tratamento dos dados (produção da informação), considerações e referências. Cada texto estava limitado a 6 páginas.

## 2. Marco teórico

O marco teórico adotado no estudo é a literacia estatística, compreendida como a capacidade de ler, interpretar e avaliar os resultados e informações estatísticas presentes nos contextos formais e não formais dos cidadãos. Gal (2002) apresenta um construto formado por duas dimensões para o desenvolvimento da literacia: as dimensões cognitiva e afetiva/atitude. A cognitiva é caracterizada pelo conjunto de elementos que envolvem o conhecimento em literacia/linguagem, em estatística, em matemática, do contexto e de criticidade. A dimensão afetiva/comportamental, observa a postura crítica, as crenças e atitudes.

Nesse estudo, foram observadas as duas dimensões, contudo, foi dada ênfase, com relação ao desenvolvimento dos conhecimentos para a dimensão cognitiva, aqueles voltados à *literacia*, que representam as habilidades da linguagem, aqui descritas pelo uso da leitura, da escrita e do cálculo expresso em gráficos e tabelas; a *estatística*, enquanto capacidade de reconhecer dados como um modo de produzir e tratar informação, a familiaridade com os resumos de informações em tabelas e gráficos, os conceitos e ideias básicas de estatística descritiva e apresentar noções básicas de probabilidade; a *matemática*, com as ideias de proporcionalidade, números e operações. Na dimensão afetiva/comportamental, apesar de poder estar implícitas as *atitudes*, *emoções* e *valores*, particularmente foram observadas as *crenças*, que expressam as opiniões, ideias e compreensões acerca de um determinado tema e contexto social.

O estudo também está apoiado nas contribuições de Wild e Pfannkuch (1999) a respeito do raciocínio estatístico, especialmente na ideia de transnumeração, pelo fato dos estudantes, ao elaborarem os textos e produzir informações a partir de um conjunto de dados, foram exigidos a realizar mudanças de registros. As diferentes representações estatísticas, sejam elas, gráficas, tabulares, percentuais e proporcionais, por exemplo, são instrumentos de transnumeração (Arteaga, Batanero, Cañadas, & Contreras, 2011).

A literacia estatística colabora na formação da cultura estatística pelos estudantes. Como descreve Batanero (2002), a estatística é um componente cultural da sociedade moderna, o que corrobora para o desenvolvimento da educação estatística. Isso ocorre pelo fato de utilizar o conhecimento estatístico para compreender o contexto em que estão inseridos. Produzir e comunicar informação a partir de dados reais e cotidianos e, também, interpretar e avaliar aquelas disponíveis nos meios de comunicação como modo de ser/estar/viver em sociedade NCTM (2006), Gal (2002), Otaviani (1998).

### 3 Resultados

Com relação aos textos é possível observar os seguintes resultados. Os trabalhos desenvolvidos pelos estudantes abordaram temas diversos, considerando o interesse e o contexto de cada grupo. Ficou explícita a presença da dimensão afetiva/comportamental, especialmente nas crenças e atitudes. Isso ocorre em função da emergência dos temas e interesses comuns de cada grupo, o que ficou claro nas apresentações orais e textuais, com a defesa das ideias expressas em argumentos e opiniões críticas, observado o contexto pessoal, profissional e social. Segue o título de cada grupo: (1) *O perfil do consumidor online*; (2) *A importância do planejamento financeiro pessoal*; (3) *A compreensão da utilização de copos descartáveis no meio acadêmico e seus respectivos impactos*; (4) *Análise do consumo de sanduíches em uma lanchonete Fast Food*; (5) *Conhecimento dos acadêmicos do curso de Administração de Empresas sobre Intercâmbio Cultural*; (6) *Pesquisa de satisfação interna com gestores de uma indústria calçadista*; (7) *Índice de massa corporal dos trabalhadores de um atacado de móveis e estofados*; (8) *Análise do desenvolvimento dos futuros profissionais da cidade de Três Coroas*; (9) *Análise das plataformas digitais utilizados pelos acadêmicos da Faccat*; (10) *Transtornos de Ansiedade de alunos do Ensino Superior*; (11) *Oktoberfest de Igrejinha: resgatando valores e princípios socioeconômicos*; (12) *A forma como estudantes universitários agem perante a ansiedade e a depressão*; (13) *O uso do celular: os benefícios e os malefícios*; (14) *Comportamento do consumidor: o papel do influenciador digital no processo de decisão de compra*; (15) *A alta rotatividade do setor de Call Center*; (16) *Cartão de crédito: suas vantagens e desvantagens*.

Na dimensão cognitiva, os estudantes apresentaram dificuldades no exercício da escrita, especialmente no raciocínio estatístico para explicar as informações presentes nas representações gráficas e tabulares construídas. Estas, tiveram origem nas questões elaboradas para a coleta de dados a respeito dos temas elegidos. Contudo, foi possível identificar que, após, os *feedbacks* dados pelo professor para as primeiras questões, passaram a ocorrer as mudanças de registros, ficando clara a ideia de transnumeração.

Com relação ao conhecimento estatístico, os estudantes souberam reconhecer dados como um modo de produzir e tratar informação, utilizando, por exemplo, variáveis qualitativas e quantitativas e classificando-as, expressando informações usando os conceitos de média e mediana, de variabilidade como a amplitude e o desvio padrão. Os grupos produziram gráficos adequadamente, considerando as variáveis, com os eixos definidos e os títulos adequados. Contudo, apesar de estarem utilizando recursos computacionais, foi possível perceber uma tendência no uso de gráficos de setores. Parte dos grupos resumiram dados agregando gráficos e tabelas de frequência completas (incluídas as frequências acumuladas), sendo produzidas informações a respeito, como havia ocorrido nas aulas.

No conhecimento matemático, predominou o uso adequado da proporcionalidade como um modo de expressar as informações. Os percentuais eram corretamente explicados com

valores absolutos, citando a parte e o todo. O mesmo ocorria quando valores absolutos eram descritos na produção textual utilizando frequências relativas. Em muitos casos, foram utilizadas expressões comparativas para produzir informação. Por exemplo: 20% era explicado como (aproximadamente uma em cada cinco pessoas possuem...ou, aproximadamente, quatro em cada cinco pessoas não possuem...).

#### 4. Considerações finais

Observa-se a relevância da promoção do conhecimento estatístico para os estudantes dos cursos de graduação. Aqui estiveram envolvidos estudantes de diferentes cursos, que de modo interdisciplinar, nas suas produções textuais, perceberam que a estatística transita em praticamente todas as áreas do conhecimento. O modo adequado de produzir informação, com a coleta, o tratamento e a comunicação, permitiu compreender o papel da literacia estatística na formação de cidadãos críticos nos espaços formais e não formais, especialmente nos seus locais de trabalho. Isso contribui para a educação pela estatística, em prol da cultura estatística na prática. Contudo, ocorre a necessidade de mais incentivos à produção textual e oral na universidade.

#### Referencias

- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Conferencia en las Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*, Buenos Aires. Confederación Latinoamericana de Sociedades de Estadística.
- Cezón, P, A., Batanero, C., Cañadas, G., & Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales, *Números 76*, 55-67.
- Gal, I. (2002) Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Ottaviani, M. G. (1998). Developments and perspectives in statistical education. *Proceedings IASS/IAOS Joint Conference, Statistics for Economic and Social Development*, [CD-ROM]. Aguascalientes: International Association for Official Statistics.
- Viali, L. (2008) O ensino de Estatística e Probabilidade nos cursos de Licenciatura em Matemática. *Anais do Décimo Oitavo Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*. Estância de São Pedro – SP.
- Viali, L. & Ody, M. C. (2020). A produção brasileira em Educação Estatística, avaliada pela análise das teses. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(1), 068-094.
- Watson, J. M. (2006). *Statistical Literacy at School*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

# Complejidad semiótica de gráficos y tablas estadísticas

Pedro Arteaga y Jocelyn D. Pallauta

Universidad de Granada

## Resumen

En esta presentación resumimos los niveles de complejidad de gráficos estadísticos propuestos en nuestras primeras investigaciones sobre gráficos y la ampliación reciente de estos niveles para ser aplicados a las tablas estadísticas. Dichos niveles se basan en el análisis semiótico de los objetos matemáticos requeridos en la construcción y trabajo con dichos gráficos y tablas y han sido utilizados en diversas investigaciones sobre análisis de libros de texto y comprensión de los estudiantes o profesores.

**Palabras clave:** Gráficos y tablas estadísticas. Complejidad semiótica. Niveles de complejidad.

## 1. Introducción

Las tablas y gráficos estadísticos aparecen con frecuencia en los medios de comunicación, de modo que su conocimiento es necesario en la sociedad actual (Engel, 2019). En diferentes temas curriculares son utilizados para representar, resumir y comunicar información de tipo diverso y también como instrumento de análisis. Por este motivo, nuestro grupo de investigación ha realizado diversos trabajos para profundizar en el análisis de estos objetos matemáticos.

## 2. Fundamentos

Nos apoyamos en el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero, & Font, 2007; 2019) en que la situación-problema y las prácticas matemáticas realizadas en su resolución permiten definir tanto al objeto matemático como a su significado (institucional o personal). En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos o perceptibles (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas), que son representados en forma textual, oral, gráfica o simbólica. También se utilizan diferentes tipos de objetos matemáticos (campos de problemas, conceptos, proposiciones, lenguaje, procedimientos y argumentos).

La importancia que tienen las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje es ampliamente asumida en didáctica de la matemática, aunque no se es suficientemente consciente de la variedad de objetos que pueden desempeñar el papel de representación o representado. Para analizar esta cuestión, los autores toman de Eco la noción de *función semiótica* como una correspondencia que involucra tres componentes: La expresión (objeto inicial, o signo); el contenido (objeto final, o significado del signo); y un criterio o código interpretativo que relaciona la expresión y el contenido.

Dada la diversidad de objetos que se utilizan en las prácticas matemáticas, el carácter inmaterial de los objetos y la variedad de representaciones utilizadas, al resolver problemas o en general, en las prácticas matemáticas se requieren numerosos procesos interpretativos. Teniendo en cuenta la variedad y complejidad de estos procesos para el caso de los gráficos y tablas estadísticas, en nuestro equipo se han definido niveles de complejidad semiótica de las mismas y realizado investigaciones al respecto que se

describen a continuación.

### 3. Niveles de complejidad semiótica de gráficos

La idea de complejidad semiótica se aplicó, en primer lugar en el estudio de los gráficos estadísticos, a partir del análisis semiótico de las prácticas realizadas en la construcción de diferentes tipos de gráficos (Ver Figura 1) (Arteaga, 2011; Batanero, Arteaga, & Ruiz, 2010). Se definieron cuatro niveles de complejidad, que se describen seguidamente.

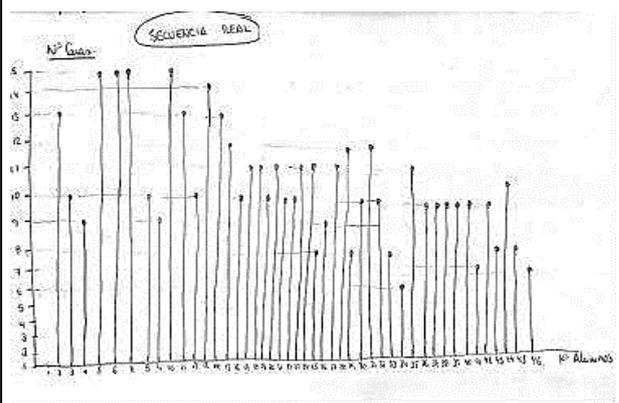
<i>Gráfico de barras separados de cada secuencia</i>	<i>Configuración cognitiva</i>
 <p>Procedimientos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Representa en el eje X: Número de orden de los alumnos en la clase, según su colocación, no corresponde a una propiedad del conjunto de alumnos.</li> <li>- Establece una correspondencia entre las divisiones en el eje que son los números naturales y cada uno de los alumnos. Dicha correspondencia es arbitraria.</li> <li>- Representación del eje Y: número de caras obtenido por cada alumno, es decir representa el valor de la variable. Hay divisiones, en el eje que representan los resultados individuales obtenidos por cada uno de los alumnos</li> </ul>	<p>Conceptos y proposiciones</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Experimento aleatorio: lanzamiento de una moneda 20 veces.</li> <li>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 por un estudiante genérico.</li> <li>- Variables estadísticas: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 obtenidas por cada uno de los <math>m</math> estudiantes de la clase</li> <li>- Proporcionalidad (altura de la barra con valor de la variable)</li> <li>- Números naturales</li> <li>- Orden de los números naturales.</li> <li>- Segmento</li> <li>- Perpendicularidad y paralelismo.</li> <li>- Variabilidad de los datos.</li> </ul> <p>Lenguaje</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Gráfico: líneas, puntos, marcas</li> <li>- Verbal: título del gráfico y etiquetas de los ejes.</li> <li>- Numérico, en las escalas de los ejes.</li> <li>- Rótulo para el título del gráfico confuso al no hacer referencia a la variable “Nº de caras”.</li> <li>- Incluye rótulo en los dos ejes.</li> </ul>

Figura 1. Análisis semiótico de un gráfico N2 (Arteaga, 2011, p. 162)

- *Nivel 1 (N1)*. Representar solo algunos datos aislados de una variable.
- *Nivel 2 (N2)*. Representar un conjunto de datos asociado a una variable, sin formar la distribución de frecuencias. Se utiliza la idea de variable y sus valores, pero no la de frecuencia o distribución.
- *Nivel 3 (N3)*. Representar una distribución de frecuencias de una variable, donde ya aparecen los conceptos de frecuencia y de distribución.
- *Nivel 4 (N4)*. Representar una distribución de frecuencias de dos o más variables. Se emplean todos los objetos anteriores y además, generalmente, se utiliza una misma escala para representar las variables.

La complejidad semiótica de los gráficos se ha aplicado al análisis de la dificultad progresiva de los mismos en libros de texto, por ejemplo, en los trabajos de Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín (2015), Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2015;

2016). También se ha utilizado para el diseño de cuestionarios de evaluación de la comprensión gráfica de los niños, entre otros por Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2019).

#### 4. Adaptación de los niveles de complejidad al análisis de tablas estadísticas

En Pallauta, Gea y Batanero (2020) se han adaptado los niveles anteriores para el análisis de tablas estadísticas, teniendo, además, en cuenta los tipos diferenciados por Lahanier-Reuter (2003)

- *Tabla de datos*. Es la primera organización de un conjunto de datos. Tiene forma de matriz y contiene, para cada individuo de la muestra, los valores de una o varias variables. Correspondería al Nivel N2 descrito por Arteaga y colaboradores.
- *Tabla de distribución de una variable*. Describe la distribución de una variable, dado que asocia cada modalidad de la variable con la frecuencia que presenta dicha modalidad. Este nivel, además, podríamos dividirlo en tres subniveles, dependiendo de si se consideran las frecuencias acumuladas y los intervalos de clase.
  - *Nivel de complejidad N3.1*: Tablas de distribución de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales.
  - *Nivel de complejidad N3.2*: Tablas de distribución de frecuencias, que incluyen también frecuencias acumuladas (absolutas, relativas o porcentuales). Su nivel de complejidad es mayor, porque involucra el manejo de desigualdades.
  - *Nivel de complejidad N3.3*: Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia, tanto ordinaria como acumulada. Se añade la idea de intervalo, sus extremos y marca de clase.
- *Tabla de doble entrada o de contingencia*. Representa datos mediante el cruce de dos variables estadísticas. En la parte superior de la tabla (primera fila), se indican las modalidades de una de las variables, mientras que, en la primera columna se indican las modalidades de la segunda variable. El cuerpo de la tabla está formado por las frecuencias conjuntas que corresponde a la modalidad de la fila para la primera variable y de la columna para la segunda variable. Estas tablas, a su vez, podrían contener intervalos de clase, aunque no es habitual considerar frecuencias acumuladas. Por tanto, se podría clasificar este nivel en dos subniveles, según se consideren intervalos de clase o no:
  - *Nivel de complejidad N4.1*: Tablas de contingencia de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales.
  - *Nivel de complejidad N4.2*: Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia.

Algunas investigaciones han utilizado directamente los niveles descritos por Arteaga (2011) para gráficos estadísticos, para analizar las tablas estadísticas en libros de texto, por ejemplo, la de García-García, Díaz-Levicoy, Vidal-Henry y Arredondo (2019). A diferencia de ellos, nosotros estamos comenzando a utilizar la clasificación ampliada y en el trabajo descrito de Pallauta et al. (2020) se analizó la distribución de esta variable en libros de 5° a 8° curso chilenos (10 a 13 años).

### Perspectivas de investigación.

En estos ejemplos, observamos la utilidad de la idea de complejidad semiótica para el análisis de la dificultad de las tareas propuestas en libros de texto y en cuestionarios dirigidos a los estudiantes. La clasificación más reciente de niveles de Pallauta et al. (2020) está todavía poco explotada, por lo que pensamos en el futuro continuar aplicándola en un trabajo de evaluación de la comprensión de las tablas estadísticas por parte de niños chilenos. Una posibilidad de trabajos en colaboración con los compañeros brasileños sería la replicación en los textos chilenos del trabajo de Pallauta et al. (2020) o bien replicar en Brasil algunos de los estudios realizados con gráficos o tablas utilizando los niveles de Arteaga (2011).

### Referencias

- Arteaga, P. (2011). Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada, España.
- Batanero, C., Arteaga, P., & Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. M. (2015). Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española. *UNIÓN*, 44, 90-112 .
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 713-737.
- Díaz-Levicoy, D. A., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. M. (2019). Chilean children's reading levels of statistical graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 14 (3), 689-700
- Díaz-Levicoy, D. A., Batanero, C., Arteaga, P., & López-Martín, M. M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de Educación Primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(4), pp. 715-739 .
- Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada: Grupo FQM-126. Disponible en: [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html).
- García-García, J. I., Díaz-Levicoy, D., Vidal-Henry, S., & Arredondo, E. H. (2019). Las tablas estadísticas en libros de texto de educación primaria en México. *Paradigma* 40 (2), 153-175
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Pallauta, J.D., Gea, M.M., & Batanero (2020) Un análisis semiótico del objeto tabla estadística en los libros de texto chilenos. *Zetetiké* 28, e020001. <https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656257>

# Preparación de libros paradidacticos para la enseñanza de estadística en la escuela primaria considerando la Base Curricular Nacional Común en Brasil

Luzia Roseli da Silva Santos, Ailton Paulo de Oliveira Júnior y Anneliese de Oliveira Lozada

Universidade Federal do ABC

## Resumen

Se definió como un objetivo, elaborar libros paradidacticos para apoyar la enseñanza del contenido estadístico en Educación Primaria considerando la Base Curricular Nacional Común - BNCC, Brasil, siguiendo en su elaboración los principios de la Teoría Antropológica del Didáctico en la organización didáctica y estadística praxeológica y en su validación siguiendo las pautas de la Editora Scipione sobre la evaluación de libros educativos. La intención de construir paradidacticos no es reemplazar el libro de texto, sino complementar la educación de los estudiantes de primaria en relación con el contenido estadístico. Es necesario enfatizar la importancia de que el estudiante tenga contacto con la lectura e interpretación de textos en su educación inicial, pudiendo ser ayudado con el libro paradidactico donde trabajará los conceptos estadísticos de una manera más agradable.

**Palabras clave:** Libro paradidactico, enseñanza de estadística, escuela primaria, teoría antropológica del didáctico

## 1. Introducción

Con respecto a las estadísticas, la Base Curricular Nacional Común - BNCC señala que los primeros pasos implican trabajar con la recopilación y organización de datos de una encuesta de interés para los estudiantes. La lectura, interpretación y construcción de tablas y gráficos tienen un papel fundamental, así como la forma de producir texto escrito para la comunicación de datos (Ministério da Educação, 2017).

Por lo tanto, en vista del tema y el problema de investigación, el objetivo de este artículo es analizar el proceso de preparación de un libro paradidactico para apoyar la enseñanza del contenido estadístico en los primeros años de la escuela primaria, siguiendo los principios de la Teoría Antropológica de la Didáctica - TAD de Chevallard, Bosch, & Gascón (2001), en la organización didáctica y praxeológica.

Considerando el objetivo indicado, establecimos la siguiente pregunta de investigación: ¿El proceso de preparación de libros narrativos ficticios en la enseñanza de estadística proporciona material didáctico para facilitar la comprensión de los conceptos estadísticos en las actividades sugeridas al alumno, con el fin de alentar el aprendizaje del alumno y el profesor, elementos que apoyan la enseñanza de estos contenidos?

## 2. Marco teórico

Fonseca y Cardoso (2005) presentan aspectos de la interacción discursiva en las clases de matemáticas a través de prácticas de lectura de textos matemáticos, o textos traídos a la escena escolar para enseñar matemáticas, o incluso textos que exigen la movilización del conocimiento matemático para la lectura.

Dalcin (2007) abordó en su investigación sobre los paradidactico matemáticos, la relación entre la simbología matemática, las imágenes y el texto escrito entre los diferentes enfoques del contenido matemático.

Para comprender la razón de la creación del término paradidactico, Borelli (1996) presenta el significado del término paraliteratura, a partir de la interpretación de la formación de palabras como el prefijo ‘para’ denota tanto el significado de proximidad - al lado, a lo largo - y la connotación de accesorio, subsidiaria, y también la sensación de funcionamiento desordenado o anormal.

Según Lima (2012), la opción de nombrar estos libros paradidacticos y no paraliteratura, o cualquier otro término, fue dada por el primer término para sugerir una aproximación con los libros de texto.

Con la creación del libro paradidactico, no solo contribuimos a exponer una historia y la importancia de los libros paradidacticos, sino también a abrir puertas y estimular producciones académicas, además de mostrar a los estudiantes, cuán importante es la lectura para enriquecer el vocabulario de los estudiantes, su conocimiento del mundo, sin salir de su ciudad, y mejorar su escritura y oralidad.

### **3. Método de investigación**

Para elaborar las tareas que se desarrollarán a través del paradidactico, contemplaremos los aspectos relacionados con los contenidos estadísticos para los años iniciales de la escuela primaria sugeridos por BNCC (Ministério da Educação, 2017), con el fin de proporcionar a los estudiantes la experiencia de los procesos señalados por Nacarato y Lopes (2005) al considerar que se utiliza la comunicación de ideas, interacciones, prácticas discursivas, representaciones matemáticas, argumentos y negociación de significados.

Además, con base en la Teoría Antropológica de la Didáctica - TAD presentaremos la preparación de un libro paradidactico para apoyar la enseñanza del contenido estadístico de los primeros años de la Escuela Primaria, que estará compuesto por tipos de tareas, que identificaremos por (T), constituido por de una secuencia de subtareas (t), que se puede realizar utilizando diversas técnicas ( $\tau$ ) justificadas por la tecnología ( $\theta$ ) que utiliza la teoría ( $\Theta$ ) estadística como objeto de estudio. De esta manera, las tareas propuestas apuntan a estar bien identificadas de acuerdo con el contenido y la razón de su propuesta y si es adecuada para los estudiantes en el ciclo al que está destinada (primeros años de la escuela primaria); si el conjunto de tareas proporciona una visión general de las situaciones estadísticas utilizadas en el libro de texto. La técnica estará disponible de manera completa, es decir, paso a paso, o solo resumida, en el bloque de tecnología/teoría: se expresará a lo largo del libro y con justificaciones tecnológicas.

La preparación del libro básicamente obedecerá los siguientes pasos: (1) Presentar al menos una técnica para resolver las tareas solicitadas; (2) Para las técnicas descritas, establezca al menos un bosquejo de un discurso tecnológico; (3) Presentar tareas que proponen el estudio de contenidos estadísticos de acuerdo con la resolución del problema del documento GAISE (Directrices para la evaluación e instrucción en educación estadística para educación básica) por Franklin et al. (2005); (4) Articular diferentes tipos de tareas en torno a conceptos estadísticos.

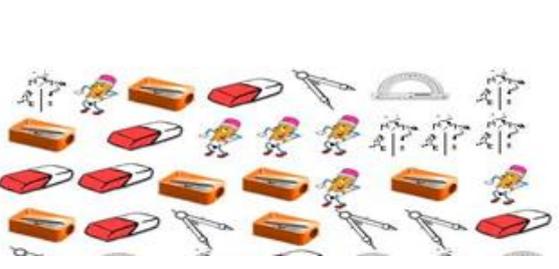
El documento GAISE describe los cuatro componentes de la siguiente manera: (1)

Hacer preguntas: aclara el problema y hace preguntas que pueden responderse con datos; (2) Recopilar datos: elaborar un plan y utilizar para recopilar los datos; (3) Analizar: seleccione métodos gráficos o numéricos adecuados y use estos métodos para analizar los datos; (4) Interpretar los resultados: interpretar el análisis e informar la interpretación de acuerdo con la pregunta inicial o provocadora del problema.

#### 4. Resultados parciales

A continuación presentamos tarea que aparecerá en el libro paradidactico correspondiente al propuesto en la Figura 1, abordando la presentación de algunos datos que se refieren a los personajes del libro y de ellos para elaborar una tabla estadística (figura 2). La tarea se centra en la habilidad indicada en la BNCC que es la realización de una investigación, que involucra hasta dos variables categóricas de interés para el estudiante y que el universo presentado tiene hasta 30 elementos, y por lo tanto, organiza los datos por a través de representaciones personales.

**Verifique la cantidad de veces que se utilizó cada uno de los personajes de la historia durante la clase de estadísticas y complete la tabla a continuación.**



Personaje	Número de veces que se usó el personaje
Estatido	
Modacildo	
Señor Perninha	
Medialina	
Reguítá	
Transferildo	

Figura 1. Tarea propuesta para la observación y organización de datos.

También volvemos al documento GAISE que indica la formulación de una pregunta que aclara el problema y formula una pregunta que puede responderse con datos, es decir: ¿Cuántas veces han usado los alumnos los personajes de la historia durante la clase de estadística?, es decir, borrador, lápiz, sacapuntas, regla, transportador y compás.

Otro componente de GAISE es recopilar datos, considerando que es la elaboración de un plan apropiado y el uso de la planificación para recopilar los datos. Estos componentes se abordan a medida que se presenta el número de veces que aparece cada personaje en las actividades en el aula, configurándose como recopilación de datos (figura 1). A continuación, se solicita completar la Tabla 1, o sea, la propuesta de esta tarea converge con el componente "Analizar" de GAISE al proponer el uso de la representación tabular y numérica de los datos destinados al análisis de datos. Además, también se permite, en la secuencia, trabajar en el componente "Interpretar los resultados" cuando se permite interpretar e informar los datos de acuerdo con la pregunta inicial o la causa del problema.

La Tarea (T) consiste en determinar la cantidad de veces que cada personaje del libro paradidactico se usa en el aula en una propuesta de investigación. La técnica ( $\tau$ ) que responde a la tarea T corresponde a la cardinalidad al establecer que el último número utilizado en el recuento de un conjunto indica el número de elementos en él (número). La indicación del número correcto de un conjunto se refleja sin contar cuando este conjunto se contó previamente, es decir, se responde con la cardinalidad del primer

recuento. Cuento la cantidad de veces que cada personaje parece identificar cuántos hay y asociarlos con la frecuencia de su aparición en la actividad del aula.

La tecnología/teoría  $\theta/ \Theta$ , que permite justificar y explicar las técnicas ( $\tau$ ) se puede describir al considerar Duval (2003), cuando dice que el estudio de las tablas debe guiarse en tránsito entre diferentes tipos de registros, ya que proporciona la visualización del mismo objeto matemático bajo diferentes formas, lo que lleva a los estudiantes a no "registrar el recinto".

## 5. Conclusiones

La elaboración de este material no solo contribuye a exponer una historia y la importancia de los libros paradidacticos, sino también a abrir las puertas y estimular las producciones académicas y publicaciones de nuevos títulos para la Enseñanza de la Estadística, además de mostrarnos cuán importante es leer para cubrir tu vocabulario, tu conocimiento del mundo, sin salir de tu ciudad, para mejorar tu escritura y tu oralidad.

El trabajo realizado revela que el material paradidactico, aunque parte del mismo género de libros de texto, difiere según el tipo de enfoque del contenido y la forma en que se articulan la simbología estadística, las imágenes y el texto escrito.

## Referencias

- Borelli, S. H. S. (1996). *Ação, suspense, emoção: Literatura e cultura de massa no Brasil*. São Paulo: EDUC/Estação Liberdade.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Dalcin, A. (2007). Um olhar sobre o paradidático de matemática. *Zetetiké*, 15(27), 25-35.
- Duval, R. (2003). Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: S. Diaz (Ed.), *Aprendizagem em matemática: registro de representação semiótica* (pp. 11-33). Campinas, São Paulo: Papirus.
- Fonseca, M. C. & Cardoso, C. A. (2005). Educação matemática e letramento: textos para ensinar matemática e matemática para ler o texto. In: A. M. Nacarato & C. A. E. Lopes *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Franklin, C. et al. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education*. GAISE report. American Statistical Association. Disponible en: [www.amstat.org/education/gaise/](http://www.amstat.org/education/gaise/)
- Lima, E. G. (2012). *Iconografias no livro didático de história: leituras e percepções de alunos do Ensino Fundamental*. Pará de Minas, MG: Virtual Books.
- Ministério da Educação, Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base*. Brasília: Ministério da Educação, Disponible en: [http://basenacionalcomuma.mec.gov.br/images/BNCC\\_20dez\\_site.pdf](http://basenacionalcomuma.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf)
- Nacarato, A. M. & Lopes, C. A. E. (2005). *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

# Algunas propuestas de aplicación de indicadores de idoneidad didáctica en probabilidad

Pablo Beltrán-Pellicer<sup>1</sup> y Belén Giacomone<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Zaragoza <sup>2</sup>Università degli Studi della Repubblica di San Marino

## Resumen

La idoneidad didáctica es una herramienta teórica nacida en el seno del enfoque ontosemiótico (EOS) que proporciona un marco para la reflexión de procesos de enseñanza y aprendizaje de educación matemática. De esta manera, han ido surgiendo trabajos de investigación sobre diseño de actividades, análisis de experiencias de aula o análisis de recursos didácticos, entre otros. Muchos de estos resultados se centran en el ámbito de la formación de profesores. En esta comunicación, los autores esbozamos el punto de partida de algunas líneas de trabajo que pueden realizarse en el ámbito de la didáctica de la probabilidad y la estadística, como el análisis de vídeos en línea de contenidos específicos.

**Palabras clave:** idoneidad didáctica, probabilidad, formación de profesores, recursos didácticos.

## 1. Introducción y marco teórico

La Teoría de la Idoneidad Didáctica (TID) (Godino, 2013; Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi, 2006) es una herramienta surgida en el seno del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero, & Font, 2007) que proporciona un andamiaje para la reflexión en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

En a TID se proponen seis facetas para el análisis de los procesos instruccionales, identificando, para cada faceta, criterios de idoneidad generales (Godino, 2013), de aplicación a cualquier contenido matemático. De esta manera, es posible elaborar una guía general de indicadores de idoneidad (GVID) para cada contenido, que puede servir como instrumento de ayuda para el profesor, tanto en el diseño como en la implementación y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje. Para elaborar estas GVID se debe llevar a cabo una revisión de los resultados de investigación sobre la didáctica de cada uno de estos contenidos específicos, lo cual permite concretar los criterios generales en unos criterios específicos (Alsina y Domingo, 2010; Arguedas-Matarrita, Concari, & Giacomone, 2017; Aroza, Beltrán-Pellicer, & Godino, 2017; Blanco-Álvarez, Fernández-Oliveras, & Oliveras, 2017; Breda, Font, & Pino-Fan, 2018; Cruz, Gea, & Giacomone, 2017; Robles, Tellechea, & Font, 2014; Vasconcelos, & Carvalho, 2019).

## 2. Propuesta y método de investigación

Como resultado de la investigación realizada en Beltrán-Pellicer, Godino, & Giacomone (2018) se obtuvo una propuesta de indicadores de idoneidad didáctica para procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, para cada una de sus seis facetas. Un ejemplo de ello son los indicadores correspondientes a la faceta epistémica, que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Indicadores específicos para la idoneidad epistémica en probabilidad. Fuente: Beltrán-Pellicer et al. (2018).

<i>Componentes</i>	<i>Indicadores</i>
Situaciones-problema	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Se plantean situaciones-problema que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (informal, subjetiva, frecuencial y clásica).</li> <li>2) Se propone una muestra representativa de experiencias aleatorias, reales o virtuales, distinguiéndolas de experiencias deterministas. Por ejemplo: lanzamientos de dados o monedas, simulaciones de concursos o bingos etc.</li> <li>3) Se propone una muestra representativa de contextos donde ejercitar y aplicar los contenidos tratados.</li> <li>4) Se proponen situaciones de generación de problemas sobre fenómenos aleatorios (problematización) por los propios estudiantes.</li> </ol>
Lenguajes	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Se emplean diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólica, conjuntos etc.), señalando las relaciones entre las mismas.</li> <li>2) Se utiliza un nivel lingüístico adecuado al alumnado al que se dirige, en cuanto a construcciones gramaticales y vocabulario.</li> <li>3) Se emplean términos precisos, como suceso, espacio muestral, frecuencia relativa, aleatorio, determinista, casos favorables, casos totales, resultado de un experimento, sucesos simples y sucesos compuestos.</li> <li>4) Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de fenómenos aleatorios, en los diferentes registros mencionados.</li> </ol>
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Las definiciones y procedimientos se formulan con claridad y corrección, adaptados al nivel educativo al que se dirigen.</li> <li>2) Se presentan las definiciones de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto y probabilidad.</li> <li>3) Se presentan proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, del suceso seguro y del complementario; propiedades de las frecuencias relativas</li> <li>4) Estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad.</li> <li>5) Se presentan los procedimientos de cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y el empleo de tablas y diagramas de árbol.</li> <li>6) Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.</li> </ol>

Argumentos	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen.</li> <li>2) Se usan simulaciones para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas.</li> <li>3) Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.</li> </ol>
Relaciones	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones etc.) se relacionan y conectan entre sí.</li> <li>2) Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (uso informal, subjetivo, frecuencial y clásico).</li> </ol>

Este tipo de indicadores específicos se ha aplicado en la evaluación de vídeos en línea sobre contenidos concretos, como la proporcionalidad (Beltrán-Pellicer, Giacomone, & Burgos, 2018), mostrando que estos presentan diversos grados de idoneidad, observándose que los vídeos más populares no tienen por qué ser los más adecuados. Además, muchos de estos vídeos presentan errores e imprecisiones. Por otro lado, la diversidad de significados que presentan, en torno a un mismo objeto matemático, debe ser tenida en cuenta por los docentes, pues es algo que puede interferir en la negociación de significados en el aula. Este tipo de análisis se puede utilizar como experiencia formativa en la formación de profesores (Burgos, Beltrán-Pellicer, & Godino, 2020).

Sería interesante realizar estudios similares a los anteriormente mencionados, pero sobre vídeos orientados a la enseñanza de contenidos de probabilidad y estadística. De esta manera, se podrían comparar los resultados de dichas investigaciones con los obtenidos en el ámbito de la proporcionalidad. Posteriormente, sería interesante el planteamiento de experiencias en el ámbito de la formación de profesores.

### 3. Conclusiones

La TID ofrece un campo activo de trabajo que puede combinarse con metodologías de formación docente y crecimiento profesional, como el estudio de clases (Hummes, Font, & Breda, 2019). En esta breve comunicación hemos planteado el interés en analizar vídeos educativos online sobre contenidos específicos de probabilidad y estadística. En primer lugar, porque resulta ser un recurso utilizado por el alumnado como refuerzo o ayuda al estudio; y en segundo lugar porque son un elemento clave en algunas propuestas metodológicas como la clase invertida. Finalmente, estos estudios se complementarían con el diseño de experiencias con profesores en formación.

### Referencias

- Alsina, À. & Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 7-32.
- Arguedas-Matarrita, C., Concari, S. B., & Giacomone, B. (2017). La idoneidad didáctica de los laboratorios remotos como recursos para la enseñanza y aprendizaje de la física. Didactic suitability of remote laboratories as resources for physics teaching and learning. *Revista de Enseñanza de la Física*, 29(Extra), 511-517.

- Aroza, C. J., Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. D. (2017). Criterios de idoneidad didáctica para el estudio de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria *Libro de actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* Andújar, España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Burgos, M. (2018). Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics. *Cultura y Educación*, 30(4), 633-662. doi: [10.1080/11356405.2018.1524651](https://doi.org/10.1080/11356405.2018.1524651).
- Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D., & Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(61), 526-548. doi: [10.1590/1980-4415v32n61a11](https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11).
- Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., & Oliveras, M. L. (2017). Evaluación de una clase de matemáticas diseñada desde la etnomatemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Granada: Grupo FQM-126.
- Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L.R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), p. 255 - 278.
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía*, 78(275), 27-49. doi:[10.2307/26868323](https://doi.org/10.2307/26868323).
- Cruz A., Gea M., & Giacomone B. (2017). Criterios de idoneidad epistémica para el estudio de la geometría espacial en educación primaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Granada: Grupo FQM-126.
- Hummes, V. B., Font, V., & Breda, A. (2019). Uso combinado del estudio de clases y la idoneidad didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica en la formación de profesores de matemáticas. *Acta Scientiae*, 21(1), 64-82.
- Robles, M. G., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, 26(2), 69-109.
- Vasconcelos, D. M. de, & Carvalho, J. I. F. (2019). Idoneidade cognitivo-afetiva de uma sequência didática para a construção do conhecimento de razões trigonométricas por meio de uma história em quadrinhos. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - Em Teia*. 10(2), 1-24.

# Articulando a estatística e a probabilidade por meio da curva normal: conhecimentos didáticos-matemáticos de professores do ensino médio

José Ivanildo Felisberto de Carvalho<sup>1</sup> e André Fellipe Queiroz Araújo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pernambuco, <sup>2</sup>Secretaria Educação de Pernambuco

## Resumen

A presente pesquisa teve como objetivo investigar uma proposta de ensino para a abordagem articulada entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal com professores de Matemática do Ensino Médio. Para isso, este estudo está fundamentado no modelo teórico de Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos do professor – CCDM, desenvolvido no âmbito da teoria do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS. Concluímos que os professores conseguiram avançar na construção, ressignificação e ampliação de seus conhecimentos sobre articulação entre a Estatística e a Probabilidade, tanto na perspectiva Matemática, como também, na perspectiva didática, com a compreensão e domínio de aspectos e possibilidades didáticas para o ensino deste tema no Ensino Médio da escolarização básica.

**Palabras clave:** Educação estatística, conhecimentos didáticos-matemáticos, formação de professores, enfoque ontossemiótico.

## 1. Introdução

Neste resumo apresentamos um estudo que propõe a abordagem da Curva Normal como uma das possibilidades para o ensino e aprendizagem da Estatística e da Probabilidade na etapa de escolaridade do Ensino Médio. A Base Nacional Comum Curricular (2018), principal documento orientador para o ensino no Brasil, propõem que os conceitos de estatística e probabilidade devem ser iniciados já nos primeiros anos do Ensino Fundamental, e, em seguida, aprimorado e ampliado no Ensino Médio.

Na literatura há diversos estudos (Santana, 2016; Batanero & Díaz, 2012) que apontam lacunas nos conhecimentos docentes para o ensino da estatística e da probabilidade. O ensino de estatística ainda está pautado em uma abordagem tradicional, não promovendo, por exemplo, a articulação com a probabilidade, sendo essas duas áreas ensinadas de forma separada e independente.

Diante desse cenário, acreditamos que é oportuna a realização de investigações que tratem dos conhecimentos de professores relativos ao campo estatístico e probabilístico, considerando que os mesmos exercem um papel primordial no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, sendo os principais responsáveis por apresentar o conhecimento matemático, e que suas ações determinam, em grande medida, os resultados desse processo.

Nessa direção, focamos no conceito da Curva Normal, por considerá-lo o principal modelo de análise de dados presente na Inferência Estatística (Batanero, Tauber, & Sánchez, 2004), e por acreditar que seu processo de ensino e aprendizagem possibilita a abordagem da inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade, áreas que, comumente são ensinadas na Educação Básica de forma totalmente independente.

No estudo realizado por Tauber (2001), a autora aponta que o ensino da Curva Normal deve ser iniciado já na Educação Básica, cuja relevância na Estatística se deve ao fato de que muitos fenômenos físicos, biológicos e sociológicos do nosso cotidiano podem ser modelados através da Curva Normal; grande parte das variáveis aleatórias encontra-

se distribuídas em uma distribuição normal, e que permite o uso em qualquer área do conhecimento que muitos métodos estatísticos exigem a condição de normalidade para sua correta aplicação. A autora pontua que para o ensino da Curva Normal, é importante a realização de sequências didáticas que envolvam a utilização lúdica de recursos computacionais e que permita o envolvimento dos estudantes com a coleta, organização e análise exploratória e significativa de dados reais, tendo em vista que há uma complexidade do significado e entendimento do conceito da Curva Normal, pois ela não pode ser reduzida apenas à sua definição, mas inclui um sistema interligado de conceitos estatísticos e probabilísticos.

Outros estudos (Bansilal, 2014; Macedo, 2016; Monroy & Herrera, 2019), realizados com diferentes métodos e públicos, apresentam resultados semelhantes, tais como, dificuldades de professores e futuros professores em não possuir domínio conceitual sobre a Curva Normal e, além disso, dificuldades no reconhecimento da probabilidade associada à área intervalos sob a Curva.

Diante disso, o presente estudo buscou responder as seguintes problemáticas: Quais os conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino Médio concernentes ao Conceito da Curva Normal e aos conceitos estatísticos e probabilísticos que estão presentes nesse modelo? Como uma proposta de ensino, desenvolvida através de um encontro formativo, favorece a construção/ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino médio sobre a abordagem articulada da Estatística com a Probabilidade por meio da Curva Normal?

## **2. Marco teórico e método**

A pesquisa utiliza como marco teórico o modelo de Conhecimentos e Competências Didático-Matemático do professor – CCDM (Pino-Fan & Godino, 2015; Godino, Batanero, Font, & Giacomone, 2016), e que está embasado na Teoria do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática - EOS. A partir desse modelo, os autores advogam que para o professor de Matemática possa exercer a função docente, faz-se necessário o domínio de conhecimentos e competências que englobam tanto o conhecimento matemático, como também o conhecimento sobre o ensino da Matemática.

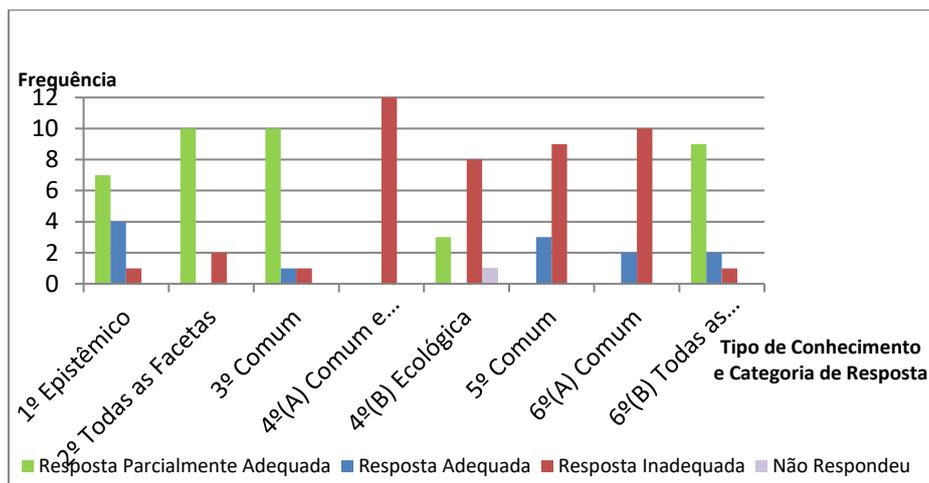
A pesquisa foi realizada com professores de matemática do Ensino Médio que atuam na rede pública de ensino do estado de Pernambuco, localizado na região nordeste do Brasil. A escolha por professores desse nível de escolarização se deve ao fato de o estudo da Curva Normal, através do ensino da Estatística e da Probabilidade, ser apresentado e recomendado para essa etapa de ensino, a partir das diretrizes veiculadas pela Base Nacional Comum Curricular (Ministério da Educação, 2018), constituída como o principal documento norteador da educação no Brasil, e mais especificamente, pelos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013). Essa pesquisa se dividiu em duas etapas: um estudo diagnóstico e a construção e vivência de um encontro formativo com os referidos professores.

O estudo diagnóstico foi realizado por meio de um questionário composto por 6 questões que envolveram 8 itens relativos aos conhecimentos didático-matemáticos para a articulação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal aplicados a 12 professores. Como critério de análise foi instituído três categorias para as respostas: Adequadas, Parcialmente Adequadas e Inadequadas. Para a fase formativa organizamos um encontro com quatro sessões, que permeavam a realização de três atividades, a

discussão coletiva de cada atividade e uma sistematização teórica. As duas fases desse estudo levaram em consideração as ferramentas teóricas sobre o conhecimento matemático e didático do professor. Neste texto apresentaremos de forma geral as conclusões concernentes às duas fases deste estudo.

### 3. Conclusões

No estudo diagnóstico, os dados demonstram que há uma predominância no desempenho dos professores de respostas do tipo Parcialmente Adequada (RPA) e do tipo Inadequada (RI). O gráfico apresenta a frequência das categorias por questão.



Figural: Gráfico da categorização das respostas ao questionário diagnóstico

Chamamos atenção para o fato de que quatro questões com maior frequência de respostas inadequadas três delas envolveram o conhecimento comum do conteúdo. E a questão 4(A), onde indagamos aos professores de que modo eles conceituavam a Curva Normal, constatamos que todos eles apresentaram respostas inadequadas. Nessa questão, 8 professores, em suas respostas, se limitaram a informar que não sabem ou não conhecem o referido conceito e apenas 4 professores buscaram, mesmo que sem êxito, apresentar uma conceitualização para a Curva Normal.

Verificamos que a maioria dos professores demonstrou não conhecer a relação teórica entre a Estatística e a Probabilidade, os conceitos de Amostragem, Amplitude, Desvio-Padrão e o conceito da Curva Normal. Por vez, percebemos que o conceito de média, como medida de tendência central, demonstrou ser aquele que os professores mais conhecem e dominam, enquanto conhecimento matemático comum.

Os professores evidenciaram algumas noções de conhecimento didático envolvendo as facetas Cognitiva, Afetiva, Mediacional e Interacional quando indagados sobre o procedimento de discussão com a classe de alunos a partir das respostas apresentadas pelos grupos de estudantes (respostas fictícias) a uma situação-problema envolvendo a Curva Normal. Entretanto, em linhas gerais, a análise realizada na primeira etapa da pesquisa indicou, veementemente, que a maioria dos professores não tinha domínio conceitual e não estavam habituados, em sala de aula, a ensinar a estatística articulada com a probabilidade, e, em particular, a Estatística Inferencial, bem como o conceito da Curva Normal, contemplando os conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nesse modelo.

Concernente a fase formativa, destacamos que o estudo proporcionou o entendimento de novas possibilidades didáticas para o ensino da Estatística e da Probabilidade no Ensino Médio e da relação entre ambas através da Curva Normal, abarcando a compreensão de aspectos didáticos relacionados ao currículo de Matemática para a referida etapa de ensino, dos recursos didáticos que podem ser utilizados para robustecer a prática docente e as diferentes maneiras de interagir e abordar essa temática com os estudantes em sala de aula.

Acreditamos ainda que os resultados aqui observados possam promover novas discussões e reflexões sobre o ensino da Estatística e da Probabilidade, ampliando a base de conhecimentos de professores de Matemática do Ensino Médio relativa ao campo Estatístico e Probabilístico.

## Referências

- Bansilal, S. (2014). Using an APOS framework to understand teachers' responses to questions on the normal distribution. *Statistics Education Research Journal*, 13(2), 42-57
- Batanero, C., Tauber, L., & Sánchez, V. (2004). Students' reasoning about the normal distribution. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 257–276). Dordrecht: Springer.
- Batanero, C. & Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, 3(1), 3-13.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. *Investigación en Educación Matemática XX*, 285-294.
- Macedo, R. C. (2016). Conhecimentos de professores de matemática sobre o processo de ensino e de aprendizagem de noções estatísticas - curva normal. (Dissertação Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Anhanguera de São Paulo.
- Ministério da Educação. Brasil. (2018) *Base Nacional Curricular Comum*, Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.
- Monroy, J. C. V., & Herrera, J. S. (2019). Análisis de las respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas sobre la distribución normal. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López- Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada: Grupo FQM-126. Disponible en [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html).
- Pino-Fan, L. & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Santana, M. S. (2016). Traduzindo pensamento e letramento estatístico em atividades para sala de aula: construção de um produto educacional. *Bolema*, 30(56), 1165 - 1187.
- Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. (Tese Doutorado em Educação Matemática) – Universidad de Sevilla, Sevilla.

# Simulación: La probabilidad frecuentista en el contexto del juego franc-carreau

Auriluci de Carvalho Figueiredo

Universidad Metropolitana de Santos; Pontificia Universidad Católica de São Paulo

## Resumen

Este artículo discute aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, en el contexto de la articulación entre el enfoque clásico y el frecuentista. Para esto, se utiliza una herramienta de simulación computacional construida con el software GeoGebra. Los resultados fueron recolectados en las actividades propuestas a los alumnos de un curso de Licenciatura en Matemáticas, llevándose en cuenta la alfabetización probabilística y la aprehensión al observar una gráfica de puntos y líneas para estimar la probabilidad de un evento a partir de la estabilización de las frecuencias relativas acumuladas de ese evento. Entre las conclusiones, se pudo constatar que la actividad en este ambiente ofreció a esos alumnos la oportunidad de organizar y configurar sus propios conocimientos, posibilitando el desarrollo de elementos de un modelo de alfabetización probabilística.

**Palabras clave:** alfabetización probabilística; enfoque frecuentista; registros de representación.

## 1. Introducción

La importancia de incluir contenidos relacionados con la probabilidad se expresa, en Brasil, en documentos oficiales como la Base Nacional Común Curricular - BNCC (Ministério da Educação, 2018), que propone que el estudio de la probabilidad debería expandirse y profundizarse en los últimos años de la escuela primaria, a través de actividades en las que los estudiantes realicen experimentos aleatorios y simulaciones para comparar los resultados obtenidos de la probabilidad clásica con la probabilidad frecuentista. Este documento también trae, en todas las áreas del conocimiento, la indicación del uso y la exploración de la tecnología como recurso para la enseñanza y el aprendizaje.

Varios investigadores proponen el uso de la computadora para la enseñanza y aprendizaje de conceptos que movilizan la probabilidad como medio de entenderlos, para minimizar las dificultades de los estudiantes en situaciones que involucren la probabilidad, mejorando sus habilidades (Gürbüz, 2008). Borovcnik y Kapadia (2009) afirman que la simulación, combinada con el uso de la tecnología, es la estrategia más apropiada para enfocar mejor los conceptos y reducir los cálculos técnicos.

Para combinar la enseñanza de la probabilidad con la tecnología y la simulación, proponemos actividades en un taller aplicado a estudiantes de Profesorado en Matemáticas con el uso de un *applet* de GeoGebra que simula el juego *Franc-carreau* (Badizé, Jacques, Petitpas y Pichard, 1996), propuesto por el matemático y naturalista francés George Louis Leclerc (1707-1788), Conde de Buffon, que consiste en arrojar una moneda en un piso de baldosas de forma cuadrada. La posición *franc-carreau* ocurre cuando la moneda cae y se para completamente dentro de una sola baldosa. De los lanzamientos consecutivos en el juego, se construyen tablas que consisten en las frecuencias acumuladas y sus respectivas probabilidades de que la posición *franc-carreau* sea lanzada. El *applet* usado está disponible en Internet, en el sitio web de GeoGebra, de forma gratuita: <https://www.geogebra.org/m/zegKUvqP>, en donde es posible manipular la "moneda" dentro de la "baldosa" y lanzar esa "moneda" tantas

---

Figueiredo, A.C. (2020). Simulación: La probabilidad frecuentista en el contexto del juego franc-carreau. En M. M. Gea. R. Álvarez-Arroyo y J.A. Garzón (Eds.), *Seminario Hispano Brasileño de Educación Estadística*. Granada: Grupo PAI FQM-126.

veces como uno desee. Gana quien logre la posición *franc-carreau*, es decir, la moneda queda completamente inmobilizada dentro de una sola baldosa. A continuación, en la Figura 1, presentamos la imagen del juego luego de 94 movimientos, el número de ocurrencias de *franc-carreau*, así como otros datos y comandos que el *applet* ofrece frente a las simulaciones.

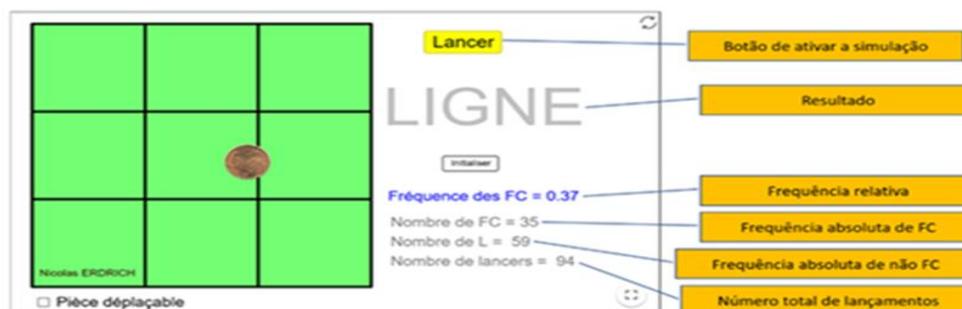


Figura 1: Datos y comandos disponibles en el *applet*

Las dimensiones de los cuadrados y la moneda son fijas, la figura se compone de 9 cuadrados de 5 cm y el radio de la moneda es de 1 cm.

Los resultados obtenidos en el taller nos brindaron subsidios para plantear consideraciones sobre el trabajo desarrollado con futuros docentes sobre la probabilidad. Con esto, presentamos en este artículo una discusión sobre aspectos considerados para la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad a partir de los modelos de alfabetización probabilística, teniendo como contexto la articulación entre los enfoques clásicos y los frecuentistas.

## 2. Marco teórico

Basaremos nuestro trabajo sobre la enseñanza y aprendizaje de probabilidad en la idea de alfabetización probabilística, en los términos propuestos por Gal (2005), que se compone de elementos disposicionales y cognitivos. Los elementos disposicionales involucran creencias, actitudes, hábitos, mientras que los elementos cognitivos se vinculan a grandes ideas, cálculos probabilísticos, lenguaje, contextos y preguntas críticas. Con respecto a los contenidos probabilísticos abordados, nos limitaremos a aquellos directamente involucrados en el juego *Franc-Carreau*, que cubre cálculo de la probabilidad geométrica, aleatoriedad, probabilidad clásica y frecuentista y representación gráfica de la estabilización de las frecuencias acumuladas obtenidas cuando simulamos una experiencia aleatoria muchas veces, con el objetivo de estimar la probabilidad de un evento resultante de esa experiencia.

Utilizaremos los Registros de Representación Semiótica (Duval, 1994, 2012) para análisis de la articulación de su uso en la representación y manipulación de los objetos probabilísticos que son tratados por simulación computacional y su representación gráfica. Duval (1994, p.123) afirma que hay varias formas de aprehensión de una figura en un contexto geométrico, destacando cuatro tipos de: aprehensión perceptiva, aprehensión discursiva, aprehensión secuencial y aprehensión operativa. Aunque este autor ha desarrollado estos estudios en un contexto de Geometría, creemos que la representación figural es muy importante para comprender los conceptos probabilísticos que involucran la probabilidad frecuentista y su representación gráfica, y buscaremos comprender las diferentes aprehensiones en el contenido de las actividades que involucran simultáneamente simulación computacional en nuestro escenario.

### 3. Metodología y escenario

Realizaremos un estudio de caso, modalidad que tiene como objetivo conocer una entidad bien definida en un sistema educativo (Ponte, 2006), que consiste en una actividad propuesta para un taller aplicado a alumnos de Profesorado en Matemáticas. Para Ponte, ello favorece "descubrir lo que es más esencial y característico en ella y, por lo tanto, contribuir a la comprensión global del fenómeno de interés" (p.2).

El taller desarrollado con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas tuvo lugar durante la semana de tecnología que se lleva a cabo en las Instituciones de Educación Superior (IES) en Brasil. Cinco de los sujetos de esta investigación están cursando el cuarto semestre y los otros cuatro cursan el segundo semestre de la carrera. El taller se llevó a cabo en un laboratorio de computación, en el cual cada alumno usaba una sola computadora, pero el comportamiento era el de un grupo colaborativo: trabajaron en colaboración durante el desarrollo de la actividad.

### 4. Discusión

Todos los estudiantes del taller no conocían el juego *Franc-carreau*, pero pronto se familiarizaron y construyeron planillas que contenían los resultados de la simulación realizada con el *applet* suministrado y construido con el software GeoGebra. Al principio trabajaron con simulaciones que consistían en 20 lanzamientos consecutivos, pasando enseguida para 50 lanzamientos consecutivos, computando las frecuencias acumuladas y las ocurrencias del resultado *franc-carreau*.

Hasta entonces, estos estudiantes asumieron que deberían alcanzar algún número, pero parece que la tabla no fue bastante para responder a sus dudas. Cuando pasaron a la etapa de construcción del gráfico tomando como referencia las frecuencias acumuladas y el número respectivo de posiciones *franc-carreau*, estos estudiantes también comenzaron a discutir entre ellos que hay una tendencia alrededor de una línea del tipo  $y = k$  y apuntan a la proximidad de la probabilidad buscada, lo que indica la aprehensión perceptiva en el sentido de Duval (2003). En relación con la aprehensión discursiva, los estudiantes comienzan a discutir cuestiones de aleatoriedad, la importancia para el cálculo de probabilidad en el enfoque frecuentista con el gráfico de frecuencias.

Señalamos algunas discusiones de los estudiantes durante el taller que evidencian las características de la alfabetización probabilística descrita por Gal (2005), en relación con las "grandes ideas": podemos destacar el trabajo con el lanzamiento de la moneda que cubrió variación, aleatoriedad, previsibilidad e incertidumbre en el "cálculo de probabilidades" para encontrar la probabilidad geométrica, al usar la simulación con el enfoque frecuentista y comparar con el enfoque clásico de probabilidad, en el enfoque frecuentista, a través de una estimación observada por la aprehensión de los gráficos de las frecuencias y el enfoque clásico:  $P(FC) = \frac{9.3^2}{9.5^2} = \frac{9}{25}$ , es decir,  $P(FC) = 0.36$ .

"lenguaje": uso de lenguaje accesible, como juego de monedas, baldosas, lechada, inmovilización, probabilidades, estabilización de frecuencia; "el contexto": el uso del contexto de los juegos es bastante usual tanto en la escuela como en la vida cotidiana de los estudiantes y profesores, y fue muy bien aceptado y estimulante para los estudiantes de este taller; la "postura crítica": desde el debate, fue posible asumir una postura crítica ante las situaciones que los juegos pueden proporcionar, con distinción entre ocio o no, y, a la vista de estos hallazgos, fue posible aumentar las posibilidades de que el mismo juego se utilice como herramienta de aprendizaje de probabilidad para estudiantes de diferentes años de educación básica.

Hay otros puntos que consideramos relevantes levantados por los estudiantes del taller, como el desconocimiento del cálculo de la probabilidad con un enfoque frecuentista y el de la probabilidad geométrica. La asimilación del conocimiento sobre el enfoque frecuentista se dio en la propia actividad. Ya en el cálculo con la probabilidad geométrica, fue necesario que los investigadores que aplicaron el taller lo aclararon mejor.

## 5. Consideraciones finales

La actividad desarrollada con nueve estudiantes de un curso de Licenciatura en Matemáticas, en un laboratorio de computación y trabajo en grupo colaborativo fue más allá de los puntos mencionados anteriormente en este artículo, ya que se pudo dejar el contexto del uso de la computadora y se pudo trabajar con el mismo juego haciendo otras suposiciones sobre el tamaño de los cuadrados y el radio de la moneda y una forma de calcular la probabilidad del *Franc-carreau* frente a un cuadrado de medida  $l$  y un radio de moneda  $n$ , planteando las condiciones para que la posición *franc-carreau* nunca ocurriera u ocurriera una sola vez. El hecho de que estos estudiantes realicen la actividad en ese ambiente les ofreció la oportunidad de organizar y configurar su propio conocimiento, evaluar los conceptos de probabilidad desde diferentes perspectivas, posibilitando el desarrollo de elementos del modelo de alfabetización probabilística según los términos propuestos por Gal (2005).

## Referencias

- Badizé M., Jacques A., Petitpas M. & Pichard J.-F. (1996). *Le jeu du Franc-carreau – une activité probabiliste au Collège*. Rouen: IREM de Rouen.
- Borovenik, M., & Kapadia, R. (2009). Research and developments in probability education. *International Electronic Journal of Mathematics*, 4(3). Disponible em: [www.iejme.com/032009/IEJME\\_p00\\_introd\\_E.pdf](http://www.iejme.com/032009/IEJME_p00_introd_E.pdf).
- Ministério da Educação Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular: BNCC*. Brasília: MEC.
- Duval, R. (1994) Les différents fonctionnements possibles d'une figure une démarche géométrique. *Reperés*, 17, 121-138.
- Duval, R- (2012) Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*, 7(2),266-297.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Boston, MA: Springer.
- Gürbüz, R. (2008). Olasılık konusunun öğretiminde kullanılabilir bilgisayar destekli bir materyal [A computer aided material for teaching ‘probability’ topic]. *Mehmet Akif Ersoy University Journal of Faculty of Education*, 8(15), 41-52.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

# Un camino hacia el desarrollo del lenguaje probabilístico para los primeros años de la escuela primaria

Fátima Aparecida Kian, Ailton Paulo de Oliveira Júnior y Nilceia Datori Barbosa

Universidade Federal do ABC

## Resumen

De acuerdo con la Base Curricular Común Nacional - BNCC, en Brasil, la formación de conceptos de naturaleza probabilística debe ser estimulada desde los primeros años de la Escuela Primaria. Por lo tanto, en este estudio describiremos y analizaremos cómo emergen los elementos lingüísticos en el proceso de probabilidad de enseñanza y aprendizaje, entendido como un lenguaje preciso y especializado. Para esto, realizaremos un estudio exploratorio con estudiantes en el quinto año de la escuela primaria que hayan recibido algún tipo de instrucción previa sobre el tema. A través del análisis ontosemiótico, buscaremos identificar y explicar la multiplicidad de términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones utilizados cuando se pretende que los estudiantes aprendan el concepto gradualmente y adquieran los conceptos probabilísticos básicos.

**Palabras clave:** Enseñanza de probabilidad, lenguaje probabilístico, últimos años de escuela primaria, BNCC, análisis ontosemiótico.

## 1. Introducción

Godino, Batanero y Cañizares (1996) y Vecino (2003) sugieren que el desarrollo del pensamiento probabilístico converge a la presencia del juego en la vida de los niños, la variedad de expresiones aleatorias que encontramos en nuestro lenguaje cotidiano (por suerte, sin intención, etc.), la presencia de situaciones aleatorias en el entorno (meteorología, apuestas, deportes, etc.) y la necesidad de comprender el funcionamiento de lo probable, además de la visión determinista del pensamiento lógico.

Para Vásquez y Alsina (2017), los conceptos de probabilidad son complejos con un alto grado de abstracción, por lo que es necesario avanzar gradualmente hacia una comprensión adecuada del lenguaje específico de probabilidad, para aproximar la cuantificación de la incertidumbre y, finalmente, para el cálculo de probabilidades al final de la escuela primaria. Por esta razón, nuestra investigación tiene el desafío de avanzar hacia una comprensión profunda de la naturaleza y características del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en el aula de la escuela primaria.

Creemos que la probabilidad de aprendizaje desde una edad temprana comienza de manera informal, introduciendo vocabulario vinculado a las nociones de probabilidad a través de actividades o situaciones problemáticas centradas en los juicios que los estudiantes hacen en función de sus propias experiencias.

Por lo tanto, aún enfatizamos que el lenguaje asociado con la vida cotidiana es un elemento clave, especialmente en los primeros niveles educativos, para incorporar progresivamente un lenguaje probabilístico y, por lo tanto, avanzar en la construcción del conocimiento sobre la probabilidad, especialmente si consideramos que el lenguaje

matemático, puede ser una barrera para el aprendizaje de los estudiantes debido a los requisitos y convenciones específicos necesarios para expresar conceptos matemáticos.

Así, para dar una idea de lo que sucede dentro del aula cuando se enseña la probabilidad en la escuela primaria, el objetivo de nuestro estudio es describir y analizar cómo emergen los elementos lingüísticos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en un grupo de estudiantes de 11 a 12 años.

## **2. Marco teórico**

Es necesario aclarar que, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, es esencial adoptar una perspectiva de modelado para que estos significados se complementen entre sí, ya que una comprensión adecuada del concepto no puede limitarse a solo uno de ellos (Batanero, Henry, & Parzysz, 2005).

En esta perspectiva, en este trabajo enfocamos nuestra atención en los significados intuitivos y de frecuencia, ya que según Alsina y Vásquez (2016) son los significados predominantes en la educación primaria, especialmente en los primeros niveles de educación.

Consideramos que el significado intuitivo de probabilidad constituye un elemento central y básico en las primeras edades, ya que se refiere a esos términos de uso común para referirse a la incertidumbre y para expresar cuantificación y grado a través de frases coloquiales y creencias en relación con eventos inciertos.

Por lo tanto, con base en lo propuesto por Gal (2005) y por Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) es posible distinguir cinco enfoques principales para la adquisición del lenguaje probabilístico, entendido como un lenguaje especializado para comunicar el azar, que los estudiantes necesitan desarrollar como una progresión de sus intuiciones probabilísticas para lograr una comprensión adecuada de la probabilidad, a saber: (1) Lenguaje verbal tal como expresiones verbales específicas de matemáticas, expresiones verbales relacionadas con matemáticas y expresiones verbales comunes; (2) lenguaje numérico; (3) lenguaje tabular; (4) lenguaje gráfico; (5) Lenguaje simbólico.

En este estudio nos centraremos específicamente en el lenguaje verbal, confiando en el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas - NCTM de los Estados Unidos NCTM (2003), cuando considera el papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de Matemáticas, especialmente para el caso de la probabilidad y su estudio en las primeras edades, debido a la estrecha relación entre las expresiones comunes y el lenguaje matemático o probabilístico.

## **3. Método de investigación**

Comenzamos desde la Base Curricular Común Nacional - BNCC (Ministério da Educação, 2017) para estudiar las probabilidades en los primeros años de la escuela primaria con el propósito de promover el entendimiento de que no todos los eventos son deterministas. El trabajo inicial con probabilidad debe enfocarse en el desarrollo de la noción de aleatoriedad, para que los estudiantes entiendan que hay ciertos eventos (imposibles y posibles). Para obtener los datos, se desarrollará una clase de 90 minutos que se grabará en video con estudiantes del quinto año de la escuela primaria (entre 11 y 12 años) que hayan recibido instrucción previa sobre conceptos básicos de probabilidad.

Para describir y analizar cómo emergen los primeros elementos lingüísticos, consideramos una metodología exploratoria que consta de los siguientes pasos: (1) Identificar y clasificar los episodios de las clases (de la transcripción) en los que, según la categorización propuesta por Gómez et al (2013) en el que se abordan situaciones que involucran términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones (tablas y gráficos) asociados con la probabilidad, que constituyen las unidades de análisis; (2) Codificar los términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones asociadas con la probabilidad que se utilizan para describir ideas, términos, conceptos o procedimientos; (3) A través del análisis ontosemiotico, identificar y explicar la multiplicidad de términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones utilizados cuando los estudiantes deben aprender el concepto gradualmente y adquirir los conceptos probabilísticos básicos.

#### 4. Resultados parciales

En este texto, presentamos algunas actividades diseñadas para identificar los elementos lingüísticos que emergen en el contexto de una primera clase de probabilidad con estudiantes de primaria que no han recibido instrucción previa sobre el tema.

Se pretende, con el apoyo de Vásquez (2018), presentar un conjunto de situaciones cotidianas del alumno en las que pueda determinar si existe la posibilidad de que los alumnos puedan distinguir entre un fenómeno determinista y uno aleatorio.

Según Batanero (2013), para una comprensión adecuada de la probabilidad, es necesario que los estudiantes puedan diferenciar entre situaciones aleatorias y deterministas, es decir, apreciar algunas características básicas de la aleatoriedad.

Proponemos algunas situaciones a través de cartas en las que el azar interviene, o no, (Figuras 1 y 2), en el sentido de que, incluso si hay algunos patrones de comportamiento, es imposible predecir con certeza una situación futura (fenómeno aleatorio) y los fenómenos deterministas que se oponen a fenómenos aleatorios, conocer todos los factores de un experimento es predecir exactamente el resultado.

<b>1. Antes de tomar el examen, el género del niño es masculino.</b>	<b>Salir en la calle y encontrar un amigo de la escuela</b>	<b>3. Sacar las llaves de tu bolsillo y caerá al suelo.</b>	<b>4. Ganar una carrera.</b>
			

Figura 1. Situaciones que se configuran como fenómenos aleatorios.

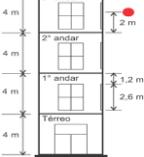
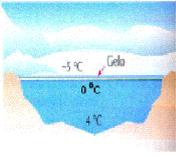
<b>5. Jugar una pelota desde lo alto de un edificio y cae al suelo.</b>	<b>6. El agua se congelará cuando alcance una temperatura bajo cero.</b>	<b>7. Poner el hielo al sol en verano y se derretirá.</b>	<b>8. El agua calentada a 100°C, bajo presión normal, hierve.</b>
			

Figura 2. Situaciones configuradas como fenómenos deterministas.

## 5. Conclusiones

El estudio en cuestión sugiere que los estudiantes de los primeros niveles de Educación Primaria tienen conocimientos y experiencias previas en el contexto cotidiano que permiten estudiar la probabilidad desde las edades más tempranas.

Por lo tanto, es importante que al comienzo del estudio de probabilidad, se considere el desarrollo de las primeras nociones y elementos de aproximación para la adquisición y el desarrollo del lenguaje probabilístico.

## Referencias

- Alsina, Á. & Vásquez, C. (2016). La probabilidad en educación primaria. De lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 71, 46-52.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, y F. Viseu, (Eds.), *Atas do III Encontro De Probabilidades e Estatística Na Escola* (pp. 1-13). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Batanero, C., Henry, M., & Parzys, B. (2005). The nature of chance and probability. In: JONES, G. (Ed.). *Exploring Probability in School: challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.
- Vecino, F. (2003). El desarrollo del pensamiento aleatorio en educación primaria. En C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para primaria* (pp. 329-351). Madrid: Pearson.
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). USA: Kluwer Academic Publisher.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1996). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de educación primaria. *Unión*, 35, 75-91.
- Ministério da Educação, Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: BNCC*. Brasília: MEC.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).(2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Vásquez, C. O. (2018). Surgimiento del lenguaje probabilístico en el aula de educación primaria. *REnCiMa*, 9(2), 374-389.
- Vásquez, C. O. & Alsina, A. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema*, 31(57), 454-478.

# O que dizem as pesquisas brasileiras sobre combinatória? Um estudo produzido a partir de periódicos nacionais na última década

Antonio Carlos de Souza<sup>1</sup> e Cristiane de Arimatéa Rocha<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual Paulista, <sup>2</sup>Universidade Federal de Pernambuco

## Resumo

O presente trabalho faz parte de uma investigação que tem por objetivo analisar a discussão das pesquisas brasileiras sobre Estatística, Probabilidade e Combinatória na última década. Nesse recorte, centramos a discussão sobre a Combinatória. Para isso, investigamos os artigos que discutam a temática nos periódicos, classificados com Qualis A1 a B2, no período de 2010 a 2019. Foram contabilizados 46 trabalhos que versam direta ou indiretamente com Combinatória. Foi observada a ênfase de trabalhos sobre conhecimentos de alunos, além de trabalhos que discutem a Combinatória nos anos iniciais como também no Ensino Médio.

**Palavras-chaves:** Combinatória, estocástica, raciocínio combinatório.

## 1. Introdução

A Combinatória, especificamente, a habilidade de resolução de problemas combinatórios pode promover “um excelente meio para que os estudantes realizem atividades de matematização, dar significado a outras ferramentas conceituais básicas e relacionar entre si variados ramos da matemática” (Godino & Batanero, 2016, p.8). Reed e Lockwood (2018) afirmam que tais problemas são ambientes propícios para generalização por serem acessíveis e ao mesmo tempo desafiadores. Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Borba (2010, 2016), Hart e Sandeful (2018), Kapur (1970) e Kenney e Hirsch (1991) Souza (2013), defendem a inclusão no currículo desse conteúdo desde as etapas iniciais de escolarização. Em contrapartida, muitos alunos apresentam dificuldades na resolução de problemas combinatórios, e apesar de pesquisas e práticas docentes que abordam a Combinatória na sala de aula de diferentes níveis, professores ainda necessitam de conhecimentos para embasar as tomadas de atitudes em sala de aula. Com base no exposto, a presente pesquisa visa apresentar pontualmente o que está sendo discutido nas pesquisas brasileiras sobre Combinatória na última década.

## 2. Combinatória um campo propício para novas aprendizagens em Matemática

Os problemas combinatórios, de acordo com Batanero *et al* (1996), são de interesse do homem desde a antiguidade e isso teve início não só em distintas culturas, mas também em diferentes tipos de problemas, diversificando-se ao longo do tempo em aspectos e campos de atividades. Knuth (2013) em seu texto intitulado “Two thousand years of combinatorics” apresenta um percurso histórico da Combinatória produzido a partir de enumerações para tais problemas, existentes em fontes históricas de civilizações chinesas, indianas, gregas, entre outras, ao longo da história.

A curiosidade das civilizações em enumerar todas as possibilidades percorrem temas como música, religião, linguagens e contemporaneamente, na Matemática Discreta, na Biologia, Química, entre outros. Dessa maneira, professores, pesquisadores, podem fazer uso dessa. A Combinatória nasceu pela necessidade do homem em conhecer a forma de selecionar, de escolher ou de determinar pares de um determinado conjunto de elementos. Lopes e

---

Souza, A. C. y Rocha, C. A. (2020). O que dizem as pesquisas brasileiras sobre combinatória? Um estudo produzido a partir de periódicos nacionais na última década. En M. M. Gea. R. Álvarez-Arroyo y J.A. Garzón (Eds.), Seminario Hispano Brasileño de Educación Estadística. Granada: Grupo PAI FQM-126.

Coutinho (2009) entendem o desenvolvimento do raciocínio combinatório como uma forma de pensar importante na vida das pessoas, porque lhes permite analisar as situações de decisão que envolve mais de uma possibilidade de resultado final em diferentes situações e suas possíveis ramificações.

### 3. Os procedimentos de pesquisa

Para a realização do presente estudo fizemos uma revisão sistemática que, segundo Sampaio e Mancini (2007) e Rother (2007), trata-se de uma revisão planejada criteriosa com uma pergunta definida, com estratégias de busca e critérios para selecionar, avaliar e analisar criticamente os dados dos trabalhos encontrados. Nosso ponto de partida foi a definição do período de publicações a ser considerado. Definimos que buscaríamos trabalhos publicados em periódicos brasileiros no período de 2010 a 2019, cuja temática fosse Combinatória a partir de uma lista de 42 periódicos, da área de ensino que possuem em seu escopo a publicação de trabalhos relacionados à Matemática. Os periódicos (todos online) foram classificados na lista, Qualis da Capes publicada na Plataforma Sucupira, entre os estratos A1, A2, B1 e B2 no quadriênio 2013-2016.

A partir da lista, fizemos buscas nos repositórios ou indexadores dos periódicos selecionados utilizando as seguintes palavras-chave: combinatória, combinatório, estocástica, probabilístico. Todas seguidas do termo *or* (ou) para que qualquer artigo que contivesse ao menos uma das palavras-chaves fosse exibido como resultado de busca e foram encontrados 104 trabalhos. Nem todos os periódicos tinham artigos que continham as palavras-chaves utilizadas. Nesse recorte, centramos a discussão sobre a Combinatória. Dessa forma, consideramos 3 artigos em periódicos publicados no estrato A1, 25 artigos em periódicos A2, 15 artigos em periódicos B1 e 3 artigos em periódicos B2, conforme apresentado na tabela 1 abaixo:

Tabela 1. Classificação dos periódicos e frequência dos artigos

Nome do periódico	Qualis	Frequência
Bolema	A1	1
Educar em Revista	A1	2
Acta Scientiae	A2	1
Alexandria	A2	1
Educação Matemática Pesquisa	A2	11
Educação Matemática em Revista	A2	1
Revista de Ensino de Ciências e Matemática	A2	2
Zetetike	A2	2
Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)	A2	3
Revista Eletrônica de Educação (REVEDUC)	A2	3
AMAZÔNIA	A2	1
BOEM	B1	2
Em Teia	B1	11
Perspectivas da Educação Matemática	B1	2
Caminhos da Educação Matemática em Revista	B2	3

Feita a seleção dos artigos, para o estudo aqui apresentado, realizamos a leitura de seus respectivos resumos com o objetivo de verificar quais de deles tinham a temática

relacionada à Combinatória. A tabela 2 apresenta a quantidade de trabalhos de acordo com as temáticas observadas.

Tabela 2: Classificação dos artigos

Temática	Quantidade
Combinatória	12
Estocástica	5
Combinatória, Estatística e Probabilidade	4
Raciocínio combinatório	16
Probabilidade e Combinatória	1
Análise Combinatória	8

A seguir apresentamos os critérios utilizados para a análise dos artigos selecionados.

#### 4. A análise

Para a análise dos trabalhos, consideramos categorias definidas por Souza, Lopes e Souza (2015), sendo elas: estudo de observação direta (23 trabalhos); estudo de observação participante (9); e estudo teórico (14). Para um aprofundamento nas discussões dos estudos de observação direta e participante, adotamos outros critérios de análise, como por exemplo, a abrangência do nível de escolarização (Educação Básica e Ensino Superior) e foco da pesquisa (formação professores, recursos, conhecimento dos alunos e currículo). Observamos que o foco dos estudos no nível de escolarização centra-se em maior número nos anos iniciais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, e com relação ao foco da pesquisa se discute sobre o conhecimento dos alunos. Quanto à formação de professores, as pesquisas em sua maioria centram-se na formação inicial. Os recursos mais discutidos foram os livros didáticos. O foco das discussões do currículo foram em níveis de currículo prescrito.

#### 5. Algumas considerações

A Combinatória é um campo que de acordo com o documento curricular oficial brasileiro, Base Nacional Comum Curricular (Ministério da Educação, 2017), aparece desde o quarto ano (crianças de 9 anos) do Ensino Fundamental. Especificamente, como problemas de contagem, utilizando como método de resolução o princípio multiplicativo. Entretanto, dentre os trabalhos pesquisados, ainda que publicados antes da BNCC, há trabalhos que discutem sobre a inserção de ideias relacionadas à Combinatória desde a Educação Infantil, como por exemplo os trabalhos de Souza & Lopes (2012), Lopes (2012) e Borba (2016). Ainda necessitam-se de pesquisas que abordem a Educação Infantil e a formação continuada de professores no âmbito da Combinatória, como também a proposta de recursos para os diferentes níveis de escolarização.

#### Referencias

- Batanero, C.; Godino, J. & Navarro-Pelayo, V. (1996). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Borba, R. (2010). O raciocínio combinatório na educação básica. *Anais do Encontro*

*Nacional de Educação Matemática*. Salvador, BA, Brasil.

Borba, R. (2016). Antes que seja tarde: Aprendendo combinatória desde o início da escolarização. *Em Teia*, 7(1), 1-17.

Ministério da Educação, Brasil. (2017). *Base nacional comum curricular*. Brasília: Ministério da Educação.

Godino, J & Batanero, C.(2016).Implicaciones de las relaciones entre epistemología e instrucción matemática para el desarrollo curricular: el caso de la combinatoria. *La Matematica e la sua Didattica*, 24(1-2), 17-39.

Hart, E. & Sandeful, J. (2018). *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: curriculum and research*. New York: Springer.

Lopes, C. E. & Coutinho, C. Q. S. (2009). Leitura e escrita em educação estatística. In: Lopes, C. E. & Nacarato, A. M. (Org.). *Educação matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidade*. Campinas: Mercado de Letras.

Lopes, C. E. (2012). A educação estocástica na infância. *Reveduc*, 6, 160-174.

Kapur, J. N. (1970) Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 111-127

Kenney, M. J & Hirsch, C.R. (1991) *Discrete mathematics across the curriculum, K-12*. Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.

Knuth, D. E. (2013). Two thousand years of combinatorics. In R. Wilson & J.J.Watkin (Eds.), *Combinatorics: ancient e modern*. (p. 2-38). Oxford: University Press.

Reed, Z. & Lockwood, E. (2018) Generalizing in combinatorics through categorization. *CRUME-Conf. Research in Undergraduate Maths Education*, San Diego, CA.,1-10.

Rother, E. T. (2007). Revisão sistemática X revisão narrativa. *Acta Paulista de Enfermagem*, 20(2), v-vi.

Sampaio, R. F. & Mancini, M. C. (2007). Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. *Revista Brasileira de Fisioterapia*, 11(1), 83-89.

Souza, A. C. & Lopes, C. E. (2012). Combinando roupas e vestindo bonecos: ideias de Combinatória no desenvolvimento profissional de uma educadora da infância. *REVEDUC*, 6, 148-159.

Souza, A. C. (2013). *O desenvolvimento profissional de educadoras da infância: uma aproximação à educação estatística*. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática)—Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Souza, L. O., Lopes, C. A. E., & Souza, A. C. (2015). Os delineamentos metodológicos nas investigações brasileiras em educação estatística. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8, 506-525.

# Comprensión de los estudiantes de psicología sobre intervalos de confianza

Rocío Álvarez-Arroyo y Gustavo R. Cañadas

<sup>1</sup>Universidad de Granada

## Resumen

En los programas de estudios universitarios de la titulación de Psicología la estadística tiene una presencia notable. Dentro de ella, los intervalos de confianza se han convertido en la práctica más recomendada para el reporte de resultados estadísticos, ya sea en sustitución o como complemento de otras estrategias inferenciales. Este trabajo de investigación se plantea con el objetivo de evaluar el conocimiento que poseen los estudiantes de psicología sobre los intervalos de confianza, así como los errores y dificultades que presentan en el tema, considerando para ello las respuestas de 56 estudiantes a un cuestionario dado. Los resultados revelan que, a pesar de que la determinación de los intervalos de confianza fue en su mayoría correcta, los estudiantes presentan ciertas carencias en cuanto a la interpretación de los mismos.

**Palabras clave:** dificultades, inferencia, intervalos de confianza, psicología, universidad.

## 1. Introducción

La inferencia estadística surge como respuesta al problema inductivo, es decir, obtener un conocimiento general de una población a partir del análisis de una muestra de casos particulares. Pero la verdad de las premisas (en la muestra) no asegura categóricamente la verdad de la conclusión (en la población). De todas las pruebas de inferencia estadística, los intervalos de confianza son considerados por muchos autores la mejor estrategia, siendo una norma casi obligada en el campo de la psicología (APA, 2010; Caballo, Salazar, & García-López, 2006, p. 135).

No obstante, a pesar de la importancia que tiene el uso y manejo de este concepto, hay investigaciones que ponen de manifiesto ciertas carencias o errores que presentan los estudiantes universitarios en relación a la definición y otros aspectos propios de los intervalos de confianza (Fidler & Cumming, 2005; Olivo & Batanero, 2007; Olivo, Batanero, & Díaz, 2008).

Es por ello que surge el problema de investigación que se plantea en este trabajo, centrado en la evaluación del conocimiento que tienen los estudiantes universitarios de psicología sobre los intervalos de confianza, así como el análisis de los errores o dificultades que presentan respecto a este concepto.

## 2. Antecedentes

Son muchas las investigaciones que ponen de manifiesto los errores más habituales entorno a los intervalos de confianza. Quizá sea llamativo que estos errores no solo se dan en estudiantes (Behar, 2001; Fidler & Cumming, 2005; Kalinowski, 2010; Olivo *et al.*, 2008; Yáñez y Behar, 2009), sino que también los cometen investigadores (Belia, Fidler, Williams, & Cumming, 2005; Cumming, Williams, & Fidler, 2004; Fidler y &

Cumming, 2005), e incluso instructores de esta materia y libros de texto (Haller & Krauss, 2002). Entre los errores y dificultades más comunes se encuentran:

- Considerar el IC como estadístico descriptivo, no inferencial.
- Interpretar el IC como un rango de valores plausibles para algún parámetro muestral, como un rango de valores individuales o como un rango de valores individuales dentro de una desviación estándar.
- Creer que la amplitud del IC aumenta con el aumento del tamaño de muestra o con la disminución del nivel de confianza ( $1 - \alpha$ ), o incluso que no les afecta.
- Interpretación bayesiana del nivel de confianza, creyendo erróneamente que éste representa la probabilidad de que el IC contenga los valores de las medias muestrales, o asumiendo que el parámetro poblacional está contenido en el IC con una probabilidad del  $(1 - \alpha) \%$ .
- Débil comprensión acerca de las distribuciones muestrales.

### 3. Fundamento teórico

En base al modelo de comprensión en educación matemática de Godino (1996), referimos que “un sujeto comprende el significado de un objeto matemático cuando es capaz de realizar correctamente las distintas prácticas que configuran el significado de dicho objeto institucional”. La evaluación de esta comprensión pasa por la comparación del significado institucionalmente acordado para tal objeto y el significado personal que un alumno ha adquirido (teoría de los significados de Godino & Batanero, 1998).

Aunque históricamente se han proporcionado distintas soluciones al problema inferencial, es la teoría de Neyman-Pearson la que inicia la teoría moderna de los IC. En ella se entiende que para estimar el valor de un parámetro  $\theta$ , el estadístico de inferencia tendrá éxito en un porcentaje  $(1 - \alpha)$  de muestras tomadas de esa población, y existe una desviación ( $\sigma$ ) del estimador con respecto al parámetro. Por tanto, se asume que el verdadero valor del parámetro poblacional estaría incluido dentro del  $(1 - \alpha) \%$  de los IC calculados en un supuesto muestreo indefinido de una misma población. De este modo, tomamos como definición institucional de IC un rango de valores, calculado a partir de los datos de una muestra significativa extraída de una población, que contiene el verdadero valor del parámetro que se desea estimar, con un determinado nivel de confianza que indica el porcentaje de muestras tomadas en las mismas condiciones que la muestra originaria.

### 4. Metodología

La muestra (no probabilística) estuvo formada por 56 estudiantes de primer curso del Grado de Psicología de la Universidad de Granada, que se encontraban cursando la asignatura de “Técnicas de análisis en la investigación psicológica” de segundo cuatrimestre.

El cuestionario empleado para la toma de datos fue extraído del *Cuestionario para recogida de datos de expertos* del trabajo de Olivo (2008), constando de 17 ítems de opción múltiple y 5 de respuesta abierta, tratando un total de 10 contenidos (Tabla 1).

Tabla 1. Contenidos evaluados con los ítems del cuestionario.

	Ítems
C1: Definición de IC	1, 2 y 3
C2: El ancho de los IC disminuye cuando aumenta el tamaño de la muestra	4, 5 y 6
C3: El ancho de los IC aumenta cuando el nivel de confianza aumenta	7, 8 y 9
C4: El ancho de los IC aumenta cuando aumenta la varianza	10 y 11
C5: Significado del nivel de confianza (variación del intervalo en diferentes muestras)	12, 13 y 14
C6: Estimar la media de una población normal o en una muestra grande con $\sigma$ conocida	15 y 16
C7: Estimar la media de una población aproximadamente normal cuando $\sigma$ es desconocida	17 y 18
C8: Estimar la media de una población a partir de datos experimentales, $\sigma$ es desconocida, muestra grande	19
C10: Estimar una varianza	20 y 21
C11: Comparar medias en dos poblaciones, conociendo $\sigma_1^2$ y $\sigma_2^2$ , muestras independientes.	22

## 5. Resultados y discusión

En términos generales, y con un alto porcentaje de participación (el 86% de las preguntas fueron respondidas), puede decirse que el conocimiento que presenta el alumnado de psicología sobre los IC es bueno, pues el 62% de las preguntas fueron contestadas correctamente y la media por cuestionario fue de 14 aciertos, 5 fallos y 3 ítems en blanco. Ciertamente es que hubo una amplia variabilidad de respuestas acertadas, desde 4 a 21 aciertos de los 22 ítems, aunque el número de errores osciló entre 1 y 11, y las no contestadas de 0 a 9.

Aunque la tabla de resultados se mostrará en detalle durante el seminario, puede decirse que los mejores resultados se dieron en los contenidos relacionados con la estimación del IC para la media poblacional con  $\sigma$  conocida o desconocida (C6 y C7, ítems 15 y 17) y la definición de IC (C1). Por el contrario, los peores resultados se concentraron en los contenidos C5 (significado del nivel de confianza) y C2 (el ancho disminuye cuando aumenta  $n$ ), expresando que la mayor dificultad se encuentra en la interpretación del IC y sus propiedades (Tabla 2). Un ejemplo fue el ítem 14, el cual pudo considerarse el más difícil de los ítems, que manifestó el error más común: dar una interpretación bayesiana del intervalo (distractor a), o bien creer que el intervalo se refiere a la media muestral en vez de a la media poblacional (distractor b). Los ítems 5 y 6 (siguientes en dificultad), que evalúan el efecto del tamaño de muestra ( $n$ ) sobre la precisión o amplitud del intervalo, revelaron ciertas dificultades al respecto, no sabiendo determinar el efecto de  $n$  sobre la amplitud del IC, creer que dicho efecto es justamente al contrario del real, o incluso desconocer por completo si la variación del primero tiene algún efecto sobre el segundo.

## 6. Conclusiones

Este trabajo desvela que, a pesar de la importancia que tienen los intervalos de confianza en la formación de un psicólogo, estos estudiantes presentan errores y dificultades asociados a ese concepto, principalmente en lo que a interpretación y propiedades se refiere. Sin embargo, no muestran dificultades en la determinación de los intervalos. Esto debe hacernos reflexionar sobre la necesidad de un cambio de perspectiva en la enseñanza de los intervalos de confianza, centrándose menos en la mera aplicación de fórmulas y cálculos, para dirigirse más hacia el significado de cada término y su efecto en la interpretación del objeto.

## Referencias

- APA. (2010). *Publication manual of the American Psychological Association* (6th ed.). Washington, DC.
- Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya.
- Belia, S., Fidler, F., Williams, J., & Cumming, G. (2005). Researchers misunderstand confidence intervals and standard error bars. *Psychological Methods*, *10*(4), 389-396. <https://doi.org/10.1037/1082-989X.10.4.389>
- Caballo, V. E., Salazar, I. C., & García-López, L. J. (2006). Normas para la publicación de artículos en psicología conductual: actualización, sugerencias y recomendaciones. *Psicología Conductual*, *14*(1), 129-148.
- Cumming, G., Williams, J., & Fidler, F. (2004). Replication and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, *3*(4), 299-311. <https://doi.org/10.1207/s15328031us0304>
- Fidler, F., & Cumming, G. (2005). Teaching confidence intervals: Problems and potential solutions. Presentado en la *55th Session of the International Statistical Institute*. Sydney.
- Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 417-425). University of Valencia.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in mathematics education. En A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- Haller, H., & Krauss, S. (2002). Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research - Online*, *7*(1), 1-20.
- Kalinowski, P. (2010). Identifying misconceptions about confidence intervals. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics* Ljubljana, Slovenia: International Association of Statistical Education.
- Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Universidad de Granada.
- Olivo, E., & Batanero, C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *12*, 37-51.
- Olivo, E., Batanero, C., & Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, *20*(3), 5-32.
- Yáñez, G., & Behar, R. (2009). Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM* (p. 14). Santander.

# Conflictos semióticos de estudiantes de bachillerato al generar muestras de la distribución binomial

Nuria Begué<sup>1</sup>, María M. Gea<sup>2</sup> y Carmen Batanero<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Universidad de Zaragoza, <sup>2</sup>Universidad de Granada

## Resumen

En esta presentación resumimos nuestro trabajo previo sobre comprensión del muestreo con estudiantes de Bachillerato e interpretamos en términos de conflicto semiótico algunas de las justificaciones dadas en la generación de muestras que asocian a la aleatoriedad o muestreo propiedades que no se adaptan al significado institucional de estos conceptos. El trabajo se realiza sobre una muestra de 127 estudiantes españoles de bachillerato a quienes se pide escribir cuatro muestras de una distribución binomial, variando los parámetros y justificar las muestras proporcionadas.

**Palabras clave:** Muestreo, distribución binomial, conflicto semiótico.

## 1. Introducción

El muestreo es una idea básica, tanto en inferencia estadística como en probabilidad, por su relación con la definición frecuencial de este término. Dos ideas aparentemente antagónicas que se deben coordinar de manera adecuada en el trabajo con muestras para inferir información su análisis son la representatividad y variabilidad muestral. La primera indica que una muestra aleatoria de tamaño suficiente tendrá características parecidas a las correspondientes características en la población, mientras que la variabilidad supone que las muestras pueden cambiar en su composición y características (Saldahna y Thompson, 2002).

Con objeto de analizar si los estudiantes de secundaria y Bachillerato comprenden estos dos conceptos se han realizado investigaciones en las que se les pide generar muestras de cuatro elementos de una distribución binomial, variando los parámetros de la misma, y se han analizado los valores proporcionados (Begué, 2019; Begué, Batanero, & Gea, 2018; 2019). Para el análisis nos apoyamos en estudios previos como los relacionados con la heurística de la representatividad (Tversky & Kahneman, 1982) y los niveles de razonamiento sobre muestreo descritos por Shaughnessy, Ciancetta y Canada (2004): aditivo, proporcional y distribucional. Un resultado de nuestros anteriores trabajos fue que, mientras que la representatividad muestral fue intuitiva, los estudiantes tuvieron dificultad para comprender la variabilidad muestral y no llegan a alcanzar el razonamiento distribucional sobre muestreo (Shaughnessy, Ciancetta, & Canada, 2004), quedando en un razonamiento puramente proporcional. En Begué, Batanero y Gea (2019) se pidió a los estudiantes de Bachillerato justificar las muestras producidas. El análisis detallado de estas justificaciones permitió identificar una serie de conflictos semióticos de los estudiantes relacionados con las ideas de aleatoriedad y muestreo. La finalidad de esta presentación es analizar algunos de estos conflictos semióticos.

## 2. Fundamentos

Nos apoyamos en el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero, & Font, 2007; 2019), en que la situación-problema y las prácticas matemáticas realizadas en su resolución

permiten definir tanto al objeto matemático como a su significado (institucional o personal). En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos o perceptibles (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas), que son representados en forma textual, oral, gráfica o simbólica. Por otro lado, en el EOS se consideran diferentes tipos de objetos matemáticos (campos de problemas, conceptos, proposiciones, lenguaje, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas matemáticas.

La importancia que tienen las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje es ampliamente asumida en didáctica de la matemática, aunque no se es suficientemente consciente de la variedad de objetos que pueden desempeñar el papel de representación o representado (Godino, 2002; Godino, Batanero, & Font, 2007). Para analizar esta cuestión, los autores toman de Eco la noción de *función semiótica* como una correspondencia que involucra tres componentes:

- La expresión (objeto inicial, o signo);
- El contenido (objeto final, o significado del signo, lo representado);
- Un criterio o código interpretativo que relaciona la expresión y el contenido.

Dada la diversidad de objetos que se utilizan en las prácticas matemáticas, el carácter inmaterial de los objetos y la variedad de representaciones utilizadas, al resolver problemas o en general, en las prácticas matemáticas se requieren numerosos procesos interpretativos. Pero en ocasiones la persona que interpreta una expresión (por ejemplo, el estudiante) realiza una interpretación no acorde al significado que a dicha expresión ha dado el autor de la misma (por ejemplo, el profesor). Godino (2002) propone la idea de *conflicto semiótico* como cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Estos errores de interpretación (conflictos semióticos), producen errores, que no siempre son debidos a falta de conocimientos, sino a no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica. La idea de conflicto semiótico se ha utilizado para explicar errores de los estudiantes (por ejemplo, en Mayén, Batanero, & Díaz, 2009; Mayén, Díaz, & Batanero, 2009) y desajustes respecto a la matemática o las orientaciones curriculares en el análisis de libros de texto (Contreras, García, & Sánchez, 2005; Gea, López-Martín, & Roa, 2015).

### 3. Método

En Begué, Batanero y Gea (2019) se propuso a una muestra de 127 estudiantes de Bachillerato cuatro tareas. En la primera se describe un experimento, consistente en lanzar 100 chinchetas sobre una mesa, indicando que en la realización previa del experimento se obtiene 68 de 100 chinchetas con la punta hacia arriba, por lo que se trata de una población binomial  $B(100, 0,68)$ . En concreto, se pide a los estudiantes valores probables del número de chinchetas con la punta hacia arriba en cuatro repeticiones del experimento. Las otras tres tareas son idénticas, salvo que se varían las distribuciones binomiales de partida ( $B(100, 0,5)$ ,  $B(10, 0,5)$  y  $B(10, 0,7)$ ). Más detalles sobre las tareas y el análisis cuantitativo de los resultados de las mismas en una muestra de alumnos de menor edad se puede consultar en Begué, Batanero y Gea (2018).

En lo que sigue analizamos algunos de los conflictos semióticos mostrados en el análisis de los argumentos de los estudiantes en el ítem 1 (lanzamiento de 100 chinchetas,  $B(100,$

0,68), transcribiendo el argumento del estudiante, junto con los cuatro valores proporcionados (entre paréntesis).

#### 4. Algunos resultados

Muchos argumentos de los estudiantes fueron muy completos, pues, por un lado, identifican la asimetría del dispositivo mediante el análisis físico del mismo y, por otro lado, presentan una comprensión del enfoque frecuencial adecuada en la que se apoyan para argumentar las muestras que proporcionan, e incluso señalan la variabilidad intrínseca al proceso de muestreo.

E1: Como el % de chinchetas que caen de cada forma en el caso del profesor: 68% hacia arriba y 32% hacia abajo. Por lo que el porcentaje que tendrá en el caso de los niños será similar. Moviendo el porcentaje mínimamente hasta un 8% por ejemplo, por lo que los márgenes serán un 60%-74% hacia arriba y 24% - 40% hacia abajo, pero siempre teniendo en cuenta que es más frecuente que las chinchetas que caigan hacia arriba, ya que la parte de abajo pesa más, por lo que tiende a ir hacia abajo (70, 60, 72, 65).

Sin embargo, también se observaron respuestas en las que los estudiantes presentan conflictos semióticos, por ejemplo, al asignar propiedades inexistentes a los sucesos aleatorios, como los siguientes:

C1. *Confusión entre suceso aleatorio y suceso equiprobable*, donde subyace el sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992). El estudiante E2 indica que al ser aleatorio cualquier resultado puede ocurrir, sin tener en cuenta que el mayor peso de la cabeza de la chincheta hace más probable un suceso que otro, ni tener en cuenta la frecuencia relativa dada en el enunciado del problema. Consecuentemente, asigna valores cuya media es exactamente 50, unos por encima y otros por debajo de la media. El conflicto se debe a que se establece una correspondencia que asigna una propiedad (equiprobabilidad) no existente al concepto de suceso aleatorio, es decir se establece una función semiótica que no tiene paralelo en la matemática.

E2: A priori la probabilidad es que sea 50% y 50% por lo que en unos casos superar la media y en otros estará por debajo al ser aleatorio (60, 40, 30, 70).

C2. *Suponer que la aleatoriedad indica máxima variabilidad*, es decir, resultados muy diferentes entre sí. Es otra propiedad mal asignada, pues aunque la aleatoriedad implica variabilidad, la variabilidad de los datos de una muestra puede ser grande o pequeña, dependiendo de la variabilidad de la población de partida. Se observa en el ejemplo de E2, además del conflicto anterior.

E2: Pienso que cualquier resultado que se escriba será correcto porque cada chincheta que se tira tiene un 50% de probabilidades de caer con la punta hacia arriba y 50% de probabilidades de caer con la punta hacia abajo. De esa manera el resultado de cómo caen las chinchetas, no tiene nada que ver con el resultado que daba el profesor (73, 2, 100, 0).

C3. *No relacionar la probabilidad teórica de un suceso con la frecuencia relativa* en una muestra de ensayos. Ninguno de los estudiantes en los ejemplos anteriores ha relacionado la probabilidad de los resultados en los siguientes experimentos con la frecuencia relativa (0,68) de veces que en 100 repeticiones se obtuvo la cabeza hacia arriba. En este caso el conflicto semiótico se debe a que no se conectan dos conceptos que están conectados en la matemática; no se identifica la correspondiente función semiótica.

## Reflexión final

En estos ejemplos podemos observar algunas características de los conflictos semióticos: a) se trata de una disparidad de interpretación de una función semiótica que relaciona dos objetos matemáticos (en los ejemplos, dos conceptos o concepto y propiedad); b) más que un tipo de error es una explicación de por qué se produce el error; c) no tiene por qué ser resistente al cambio, como son las concepciones; y d) no tiene por qué tener paralelo en el estudio histórico como son los obstáculos. Puesto que algunos de estos conflictos se encuentran también entre los futuros profesores, pensamos es interesante continuar la investigación dirigida a su identificación.

## Referencias

- Begué, N., Batanero, C., & Gea, M. M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 63-79.
- Begué, N., Batanero, C., & Gea, M.M. (2019). Argumentos de los estudiantes de bachillerato en la generación de muestras de la distribución binomial. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html)
- Contreras, A., García, M., & Sánchez, C. (2005). Significados institucionales y conflictos semióticos del límite de una función en la educación matemática. *EMA*, 10(2 y 3), 413-439.
- Eco, U. (1995). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135.
- Gea, M. M., López-Martín, M.M, & Roa, R. (2015). Conflictos semióticos sobre la correlación y regresión en los libros de texto de Bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 29-49. DOI: <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.113>.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- Mayén, S., Díaz, C., & Batanero, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. *Statistics Education Research Journal*, 8(2), 74-93.
- Mayen, S., Batanero, C., & Díaz, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(2), 151-178.
- Shaughnessy, J.M., Ciancetta, M., & Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M.J. Høines, & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 177-184). Bergen, Noruega: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

# **Análisis del significado evaluado de la inferencia estadística en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía**

María del Mar López Martín

Universidad de Almería

## **Resumen**

El presente estudio tiene como objetivo principal analizar el contenido de inferencia estadística que se recogen en las Pruebas de Acceso a la Universidad de la Comunidad Autónoma Andaluza desde 2003 hasta 2014. La resolución de los distintos problemas ha permitido clasificarlos en función al campo de problema, el modelo probabilístico de la población bajo estudio, el parámetro poblacional a estimar y el contexto en el que se enmarca considerando los contextos descritos en PISA. Los resultados obtenidos pueden ser considerados tanto para la elaboración de las futuras pruebas como en el proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiantado de Bachillerato.

**Palabras clave:** Inferencia Estadística, Pruebas de Acceso a la Universidad, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, Significado Evaluado.

## **1. Introducción**

El acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado por parte de los estudiantes de Bachillerato y Formación Profesional implica la realización obligatoria de las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) o Evaluación final de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (PEvAU), cuya finalidad es evaluar los conocimientos y capacidades adquiridas por los futuros estudiantes universitarios. La importancia y el impacto que tienen dichas pruebas se ha visto reflejado en los contenidos tratados en el último curso de Bachillerato.

La importancia que ha adquirido en las últimas décadas la inferencia estadística en Área de Ciencias Sociales, también se ha visto reflejada en las normativas curriculares de la etapa de Bachillerato (MEC, 2007; MECD, 2015) y en las enseñanzas de Grado y Másteres incluyendo dicho contenido en sus enseñanzas. En atención a lo cual, y dada la estrecha relación que existe entre Bachillerato y las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU), se realiza en primer lugar una revisión de cómo las PAU realizadas en la Comunidad Andaluza durante el periodo comprendido entre 2003 y 2014 contemplan los contenidos de inferencia estadística. Los resultados del presente estudio aportarán una gran información sobre la adecuación de los contenidos de estas pruebas. Asimismo, esperamos que sirvan de guía en la planificación y preparación del alumnado que accederá a la Universidad a través de las mencionadas. El presente trabajo resume algunos de los resultados ya publicados por miembros del grupo de investigación de Educación Matemática de la Universidad de Granada (López-Martín, Batanero, Díaz-Batanero y Gea, 2016; López-Martín, Batanero, Gea y Arteaga, 2016).

## **2. Marco teórico**

Dentro del enfoque onto-semiótico, EOS, (Godino, Batanero, & Font, 2007), se asume que los objetos matemáticos surgen de las prácticas matemáticas llevadas a cabo en el

proceso de resolución de los problemas (ejercicios o tareas) relacionados con el objeto matemático en cuestión. En el caso particular de nuestro trabajo, la reiteración de estas prácticas, permitirá configurar el significado de los objetos relacionados con la inferencia estadística.

En el marco teórico del EOS se diferencian entre el significado institucional del objeto matemático y el significado personal asociado al mismo. Centrando la atención en el primero, los autores distinguen cuatro significados dentro de la institución: 1) significado global, en nuestro caso corresponde al significado de la inferencia en la propia estadística; 2) significado pretendido, marcado por las orientaciones curriculares; 3) significado implementado, el que se presenta al alumnado en los distintos centros educativos; 4) significado evaluado, correspondiente al contenido de inferencia estadística recogido en las diversas pruebas de evaluación, siendo este el elemento principal a analizar.

### 3. Metodología

La metodología de investigación tiene carácter cualitativo basado principalmente en el análisis y centrado en el análisis del significado evaluado de la inferencia estadística. Se ha analizado un total de 144 pruebas correspondientes a la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (6 pruebas por año con dos modelos a elegir). De los cuatro ejercicios que forman dicha prueba, dos corresponden al Bloque de Estadística y Probabilidad, suponiendo el 50% en la calificación final. Las pruebas incluyen un problema relacionado con inferencia estadística, por lo que la muestra total de problemas analizados corresponde a 144. Mediante un proceso análisis riguroso y reiterativo que ha permitido definir 3 tipos de variables y sus correspondientes categorías (véase Tabla 1).

Tabla 1. Variables de estudio analizadas en las PAU

Variabes	Categorías	Subcategorías
Campo de problema	A. Muestreo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A1. Enumeración de muestra aleatoria de una población finita</li> <li>• A2. Identificación de la distribución muestral y cálculo de probabilidades</li> </ul>
	B. Intervalos de Confianza	<ul style="list-style-type: none"> <li>• B1. Cálculo e interpretación del Intervalo de Confianza</li> <li>• B2. Relación entre error de estimación, tamaño muestral y nivel de confianza</li> </ul>
	C. Contraste de hipótesis	<ul style="list-style-type: none"> <li>• C. Contraste de hipótesis</li> </ul>
Modelo probabilístico de la población	Tipo de distribución poblacional	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Distribución uniforme discreta</li> <li>• Distribución binomial</li> <li>• Distribución normal o gaussiana</li> </ul>
Parámetro poblacional a estimar	Parámetro	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Media</li> <li>• Varianza</li> <li>• Proporción</li> </ul>
Contexto del problema	Contextos PISA (OCDE, 2009)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Personal</li> <li>• Profesional</li> <li>• Social</li> <li>• Científico</li> </ul>

#### 4. Resultados

*Campo de problema.* El análisis de los diversos problemas desde el punto de vista del tipo de campo de problema, pone en relieve la gran variedad y especificidad de objetos matemáticos implicando distintos grados de dificultad en la realización del mismo.

En relación al campo de problema de muestreo, queda plasmada la necesidad de dominar los distintos muestreos además de identificar las diferencias existentes entre las técnicas de obtención de una muestra (con o sin reemplazamiento). Asimismo, se pone en juego el Teorema Central del Límite permitiendo describir el modelo teórico de distribución. La determinación de la distribución de probabilidad de las variables muestrales y el cálculo de probabilidades asociadas a las mismas, implica la necesidad de tipificar y hacer uso de las tablas de probabilidad.

La construcción del intervalo de confianza conlleva por un lado, la distinción entre parámetros poblacionales y estadísticos muestrales y por otro, el uso de las tablas estadísticas. Una variante de este problema es la interpretación del resultado obtenido a partir del intervalo, sin embargo, este tipo de actividad supone una complejidad mayor por las dificultades y los errores que giran en torno a la misma (Cumming, William y Fidler, 2004; López-Martín, Batanero y Gea, 2019). Asimismo, el estudio de la relación existente entre la confianza, error de estimación y tamaño muestral, lleva implícito el uso de los objetos matemáticos empleados en la construcción del intervalo de confianza.

Los problemas de contraste de hipótesis supone, en un primer nivel, definir las hipótesis nula y alternativa del parámetro poblacional bajo estudio, tarea que supone ciertas dificultades tanto en estudiantes como en futuros profesores de matemáticas (López-Martín, Batanero y Gea, 2019; Vallecillos, 1999). Aunque de manera general, el desarrollo del procedimiento se realiza de una forma correcta, generalmente debido a la mecanización del mismo, la conclusión e interpretación del resultado obtenido supone una dificultad extra pues son varios los estudios que revelan las dificultades y errores que se comenten (López-Martín, Batanero y Gea, 2019).

Dado que la mayoría de los problemas contiene más de un apartado se han clasificado en las distintas categorías un total de 270 actividades. Del análisis se ha comprobado una alta presencia de problemas sobre construcción e interpretación del intervalo de confianza (31,5%) seguidos, con un mismo porcentaje, de los problemas en los que se solicita relacionar los elementos de un intervalo de confianza. Los problemas de contrastes de hipótesis aparecen con un menor porcentaje pues formaron parte de las pruebas en los cuatro últimos años analizados. Destacamos la exclusión de este contenido en el currículo actual, (MECD, 2015).

*Modelo probabilístico de la población.* Del análisis se observa la transcendencia de la Distribución Normal (59%). Aunque no se indica explícitamente, destacamos la presencia de la Distribución Binomial (26%) implicando la necesidad de identificar el valor de la varianza poblacional y recordar las condiciones requeridas para aproximar un modelo binomial a uno normal. La distribución uniforme se ha detectado en los problemas relacionados con muestreo.

*Parámetro poblacional a estimar.* Resaltamos la media poblacional como el parámetro sobre el que se centra la atención tanto en Bachillerato como en las PAU (65%). El interés por la varianza poblacional es casi despreciable pues no llega al 2% su presencia y solamente se ha detectado en los primeros años del periodo seleccionado para este

estudio. Aproximadamente un tercio de los problemas se centran en la proporción poblacional contemplándose a partir del 2007.

*Contexto.* El estudio de esta variable nos permite analizar la conexión entre los conceptos y las situaciones reales, dando sentido al aprendizaje por parte del alumnado. Se observa que aproximadamente el 29% están referidas a situaciones sociales, situaciones relacionadas con su comunidad. Destacamos el hecho de que el 21% son problemas que no se pueden clasificar en alguno de los contextos descritos en PISA, sin embargo, es necesario señalar que el 75% de estos problemas fueron propuestos hasta 2010 reflejando la importancia de seguir las actuales recomendaciones de la enseñanza de estadística. El resto de contextos tienen un porcentaje de aproximadamente un 20%.

## 5. Conclusiones

El análisis llevado a cabo refleja la gran variedad de objetos sobre inferencia estadística que se ponen en juego. Este tipo de estudio, junto a los ya realizados dentro del seno del Grupo de Investigación, pone de manifiesto la necesidad de asegurar una correcta transmisión de dichos contenidos por parte de los docentes encargados de dicha labor. Así mismo, se espera que los resultados sean considerados por los diseñadores curriculares y de las diversas pruebas de evaluación.

## Referencias

- Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding statistics*, 3(4), 299-311.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 27-135.
- López-Martín, M.M., Batanero, C., Díaz-Batanero, C. y Gea, M. (2016). La inferencia estadística en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía, *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 5(8), 33-59.
- López-Martín, M. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística?. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(64), 672-693
- López-Martín, M. M., Batanero, C., Gea, M. y Arteaga, P. (2016), Análisis de los problemas de inferencia propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía, *Vidya*, 36(2), 409-428.
- MEC, Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.
- MECD, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Proceedings of the 52 session of the International Statistical Institute* (Vol.2, pp. 201–204). Helsinki: International Statistical Institute.

# Análisis del lenguaje de la proporción muestral en libros de texto

Juan Jesús Ortiz de Haro<sup>1</sup> y Felipe Castro Lugo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Granada, <sup>2</sup>Instituto Tecnológico de Sonora

## Resumen

En este trabajo analizamos el lenguaje utilizado en el tema de la estimación de la proporción muestral en tres libros de texto españoles de bachillerato. Entre las diferentes perspectivas teóricas para abordar el análisis de libros de texto, hemos elegido el Enfoque Onto-semiótico (EOS), por la importancia que otorga al lenguaje. Los resultados muestran la gran riqueza de expresiones verbales, otras propias de la estadística y probabilidad y las que se refieren a materiales que se utilizan en los juegos de azar. Hay predominio de lenguaje formal y lenguaje simbólico complejo y diverso. El lenguaje numérico contempla todos los sistemas numéricos y se encuentran también gran cantidad de representaciones tabulares y gráficas. Se observan algunas diferencias en los libros que el profesorado debe tener en cuenta al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.

**Palabras clave:** Inferencia, libros de texto, lenguaje matemático, bachillerato.

## 1. Introducción

La enseñanza de la inferencia es un tema fundamental de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, por la importancia que tiene en la sociedad actual (Batanero & Borovcnik, 2016). En segundo curso de Bachillerato (17-18 años) de esta modalidad (MECD, 2015, p. 389), en el *Bloque 4. Estadística y probabilidad* se presentan los siguientes contenidos de inferencia relacionados con la estimación de la proporción muestral:

Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

Debido al cambio de directrices curriculares en España, se han editado nuevos libros de texto. El libro de texto es uno de los principales recursos educativos, ya que muchas decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar están mediadas por los mismos (Stylianides, 2009). Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel-Eisenmann, 2007).

El lenguaje es una de las características importantes del libro de texto de matemáticas, por ser un instrumento necesario en la representación y la actividad de matematización y por reflejar la complejidad conceptual de un tema. Respecto al lenguaje utilizado en los libros de texto sobre la estadística y la probabilidad, Ortiz, Serrano y Batanero (2001) estudiaron el lenguaje en dos libros de texto de Educación Secundaria, distinguiendo entre el lenguaje del azar y de la probabilidad, observando en uno de los textos una mayor riqueza del lenguaje empleado respecto al azar así como un vocabulario más rico respecto a la probabilidad, con gradaciones cualitativas, presentando las concepciones subjetivas y frecuencial y conectando con el estudio de la estadística. Gómez, Ortiz, Batanero, & Contreras (2013) analizaron el lenguaje utilizado

en probabilidad en dos series de libros de texto españoles de Educación Primaria, encontrando una gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). García y García (2009) realizaron un estudio detallado de los términos específicos sobre la inferencia estadística. Concluyen que el contexto de trabajo es determinante en el significado de los términos y que, en ocasiones, la definición de estos términos que aparece en los libros de texto no corresponde a la propia del contexto matemático, sino más bien a la del contexto cotidiano, lo que según el autor no es adecuado ya que el libro de texto, debe presentar al estudiante los conceptos matemáticos de forma correcta.

En este trabajo pretendemos analizar el lenguaje en el tema de estimación de la proporción muestral en tres libros de texto españoles, de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales, publicados según la nueva normativa. La finalidad es comparar los resultados con otros estudios previos y las directrices curriculares citadas. A continuación se describe el marco teórico y la metodología, se presenta el análisis y discusión de los resultados, finalizando con las conclusiones.

## **2. Marco teórico y metodología**

Entre los diversos enfoques para analizar los libros de texto, hemos optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero, & Font, 2007), por el importante papel que otorga al lenguaje matemático, al que considera mediador de las prácticas personales o institucionales en la resolución de problemas, por su carácter representacional y operativo. En este marco teórico es también fundamental la idea de conflicto semiótico, que puede surgir al interpretar el lenguaje matemático (Godino, Batanero, & Font, 2007).

La muestra está constituida por tres libros de texto, de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales, publicados en 2016, que se eligieron por ser editoriales de gran prestigio a nivel nacional. Al ser un estudio exploratorio, se trata de una muestra intencional, sin pretensiones de extender las conclusiones. Se incluyen como anexo y se denotan con un código en el trabajo. En estos libros se ha realizado un análisis de contenido del capítulo dedicado a inferencia estadística y estimación de la proporción muestral, estudiando las variables determinadas en Gómez et al. (2013), que permiten lograr el objetivo de este estudio: a) expresiones verbales, según tipología; b) expresiones numéricas; c) símbolos; d) representaciones tabulares y gráficas. Las categorías de cada una de estas variables se determinan mediante sucesivas revisiones de los textos de un modo cíclico e inductivo...

## **3. Resultados y discusión**

### **3.1. Expresiones verbales**

Siguiendo a Shuard y Rothery (1984), hemos tenido en cuenta, las palabras del lenguaje cotidiano, que se usan en el texto con sentido diferente al cotidiano, lo que puede crear problemas de ambigüedad al aplicarlas con un sentido diferente al conocido anteriormente por el estudiante (Barwell, 2005). Dentro de las específicas, siguiendo a Gómez et al. (2013), hemos diferenciado las que se refieren a juegos de azar y hemos separado las específicas de estadística y de probabilidad. El mayor número de

expresiones diferentes son las específicas de estadística y probabilidad, siendo muy escasas las referidas a juegos de azar, al contrario que en el estudio de Gómez et al. (2013) con textos de primaria, y en Ortiz et al. (2016) con textos de secundaria. Observamos un aumento en la formalización y variedad del lenguaje en Bachillerato.

### **3.2. Lenguaje numérico**

En los tres libros de texto encontramos los mismos tipos de números: Números enteros que suelen expresar el tamaño de la muestra o el valor de los parámetros de las distribuciones; decimales y fracciones que a veces aparecen en la misma expresión; porcentajes que se utilizan para expresar probabilidades. Los irracionales aparecen en la fórmula de la desviación típica de la distribución de la proporción muestral, al contrario que en Ortiz et al. (2016) que no se presentaban.

### **3.3. Lenguaje simbólico**

En los tres textos queda reflejada la gran riqueza y complejidad del lenguaje simbólico, como en el trabajo de Ortiz et al. (2016), pero con mayor complejidad, indicador del alto grado de formalización que se pretende alcancen los estudiantes del Bachillerato.

### **3.4. Lenguaje tabular**

El único texto que presenta tablas es el [T1]: una tabla resumen de niveles de confianza e intervalos de confianza (Figura 1.a), y otra tabla con datos de proporción en la población y tamaño de la muestra (Figura 1.b), ambas en la sección de ejercicios. Destacar que la presencia de tablas es casi nula, al contrario que en Ortiz et al. (2016), donde sí había una gran variedad de lenguaje tabular.

### **3.5. Lenguaje gráfico**

Las gráficas de la normal y de la binomial aparecen en los tres textos, aunque en algunos de ellos en un tema previo al de la estimación de la proporción muestral. Se observa también que el empleo de gráficas disminuye con respecto a textos de niveles inferiores (Ortiz et al., 2016), aunque son de mayor complejidad, como es esperable en este nivel educativo.

## **4. Conclusiones**

Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de lenguaje en los textos analizados, que el profesor ha de tener en cuenta para valorar la dificultad que supone para los alumnos. Como indican Ortiz et al. (2001), a esta dificultad se añade el uso de algunas palabras del lenguaje cotidiano, con significado diferente, en el tema de probabilidad.

Se encontraron mayor número de expresiones verbales específicas de la estadística con respecto a las de la probabilidad, y muy pocas relativas a los juegos de azar que si aparecen en el estudio de Ortiz et al. (2016). Hay un texto que no hace referencia al uso de la tecnología, en contra de las orientaciones curriculares.

Para que los estudiantes consoliden un lenguaje matemático más avanzado, los profesores deben cuidar el lenguaje formal que se utiliza en el aula, evitando dar definiciones incompletas o incorrectas que no se corresponden con el significado matemático y que pueden generar obstáculos en el aprendizaje del alumnado (García &

García, 2009). Dada la importancia del tema se considera necesario ampliar el estudio con otros textos.

## Referencias

- Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education* 19(2), 118–126.
- Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.
- García, I. & García, J. A. (2009). Enseñanza de la estadística y lenguaje: un estudio en bachillerato. *Educación Matemática*, 21(3), 95-126.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.
- MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Ortiz, J. J., Albanese, V., & Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). Málaga: SEIEM.
- Ortiz, J. J., Serrano, L., & Batanero, C. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-14.
- Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, 23, 139-159.
- Shuard, H. & Rothery, A (Eds) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.

## ANEXO: Textos empleados en el análisis.

- [T1]. Colera, J., Oliveira, M. J., Colera, R. (2016). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Anaya.
- [T2]. Gámez, J., Marín, S., Martín, A., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Santillana.
- [T3]. Sanz, L., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2016). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: SM.

# Acerca de la comprensión del intervalo de confianza entre estudiantes preuniversitarios

Antonio Francisco Roldán López de Hierro

Universidad de Granada

## Resumen

En el presente trabajo se muestran los resultados obtenidos en un estudio exploratorio, desarrollado con estudiantes del segundo curso de Bachillerato, sobre su comprensión e interpretación de la noción de “intervalo de confianza”. Antes de ello se describen algunas de las interpretaciones que pueden hacerse de la noción de intervalo de confianza, destacando la necesidad de mostrárselas al alumnado durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. El estudio se desarrolló a través de un cuestionario con varias preguntas de opción múltiple y una cuestión abierta.

**Palabras clave:** Intervalo de confianza, comprensión, significado, interpretación, valor crítico.

## 1. Introducción

Uno de los temas de investigación más atractivos en el ámbito de la Educación Matemática es el de analizar la comprensión que muestran los estudiantes de las diferentes etapas educativas de los conceptos que han de manejarse en el aula de matemáticas. Únicamente cuando el docente comprende el razonamiento que es capaz de desarrollar cada estudiante según sus conocimientos y experiencias (razonamiento que puede ser correcto o no) podrá intervenir de manera decisiva para orientarle por el camino que desea hasta el punto de que éste pueda manifestar prácticas discursivas, acordes con los significados institucionales de los conceptos involucrados.

Mi experiencia docente en el ámbito preuniversitario me llevó a interesarme por la noción de intervalo de confianza pues, a pesar de ser en apariencia muy sencilla, conlleva en realidad muchas dificultades de aprendizaje que el alumnado manifiesta de muy diversas formas. Aparte de las consabidas limitaciones en el cálculo propio del intervalo (tema absolutamente superado por la tecnología), la mayor dificultad que se puede observar entre el alumnado de Bachillerato (y, por qué no decirlo, también entre el alumnado universitario) en este tema inferencial es la interpretación que hacen del intervalo de confianza. Posiblemente, dicha interpretación (en este caso, “malinterpretación”) no solo proviene de la escasez de tiempo que tiene el docente para desarrollar estos temas, sino también del desconocimiento de los posibles significados que puede tener el intervalo de confianza (incluso entre el propio profesorado especialista en el tema).

En este trabajo expongo un análisis exploratorio acerca de la interpretación que hace el alumnado de segundo de Bachillerato de la noción de intervalo de confianza, a la vez que muestro algunos de los errores más extendidos entre estos estudiantes (algunos descritos en investigaciones previas y otros extraídos por primera vez de la experimentación desarrollada). Una versión más extensa y detallada del contenido de esta contribución puede encontrarse en Roldán López de Hierro (2019).

## 2. Diferentes concepciones de la noción de intervalo de confianza

Existen varias concepciones acerca de la noción de “intervalo de confianza”. Por su importancia y extensión, cabe destacar las tres siguientes, donde nos centraremos en el caso del intervalo de confianza para la media de una población normal.

- Interpretación en *remuestreo*, según la cual el intervalo de confianza representa un conjunto de valores razonables para la media de la población de manera que si se toman muestras aleatorias, las medias muestrales de las mismas caerán dentro del intervalo concreto.
- Interpretación *bayesiana*, según la cual el intervalo de confianza para la media poblacional es un intervalo, centrado en la media muestral, de manera que la probabilidad de que la media poblacional pertenezca a dicho intervalo (al menos, antes de ser éste calculado en la práctica) es igual a un cierto *nivel de confianza* fijado previamente.
- Interpretación *frecuencial*, según la fórmula concreta del intervalo de confianza para la media muestral, fijado un cierto *nivel de confianza*, es una expresión teórica de manera que si se toma una cantidad muy grande de muestras aleatorias independientes y se calculan los correspondientes intervalos asociados, al menos encontraremos una proporción de dichos intervalos igual al nivel de confianza que contengan al verdadero valor de la media poblacional (si bien este valor es desconocido).

Aunque, desde el punto de vista de la metodología frecuencial, que es la que se enseña en Bachillerato, claramente la interpretación frecuencial es la correcta, también somos conscientes de que otros investigadores pudieran tener puntos de vista diferentes al nuestro. Por ejemplo, bajo la interpretación bayesiana, el verdadero valor (desconocido) de la media poblacional no se interpreta como un único valor real, sino como una variable aleatoria real, lo cual permite preguntarnos acerca de la probabilidad de que dicha variable pertenezca a un cierto intervalo de números reales. No es nuestra intención entrar en este trabajo en esta cuestión, sino poner de manifiesto dos cuestiones: en primer lugar, si no se le explica al alumnado las diferentes concepciones de la noción de intervalo de confianza, se le está privando de la posibilidad de que experimente por sí mismo a través de las diferentes concepciones cuál es la que más se aproxima a la realidad y, en segundo lugar, se le está escatimando la posibilidad de que él lo interprete como más conveniente vea. De ahí la necesidad de poner de manifiesto estas concepciones incluso entre el profesorado especialista en el área.

## 3. Antecedentes

Aunque pueda parecer lo contrario, no son muchas las investigaciones que se han desarrollado en el ámbito de la Didáctica de la Matemática acerca de la interpretación por parte del alumnado de la noción de “intervalo de confianza”. Las primeras investigaciones en este ámbito tomaron como muestra aleatoria a algunos investigadores que habían publicado estudios en revistas con impacto en los que hacían uso de intervalos de confianza para desarrollar sus argumentaciones (véase, por ejemplo, Cumming, William, & Fidler, 2004). A pesar de ser especialistas, los investigadores mostraron algunas limitaciones sobre su conocimiento acerca de la noción de intervalo

de confianza, decantándose principalmente por una interpretación en remuestreo, lo cual ya había sido puesto de manifiesto por Estes (1997) en un porcentaje superior al 80%.

Investigaciones posteriores se han llevado a cabo involucrando muestras formadas por estudiantes pregraduados y posgraduados, y también por profesorado en formación en el área de matemáticas (cabe destacar los trabajos de Behar, 2001; Fidler & Cumming, 2005; López-Martín, Batanero, & Gea, 2019a, 2019b; Olivo & Batanero, 2007).

#### 4. Desarrollo de la investigación

El trabajo exploratorio se desarrolló mediante el análisis de las respuestas aportadas por 58 estudiantes matriculados en segundo de Bachillerato (último curso preuniversitario en España) en la asignatura “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II”, la cual es la única asignatura impartida en cursos preuniversitarios que aborda contenidos propios de la inferencia estadística (actualmente, se centra en el tema de intervalos de confianza tras un estudio previo de las distribuciones en el muestreo, si bien hace pocos años también incluía contenidos de contrastes de hipótesis). Los estudiantes estaban repartidos en dos institutos de la provincia de Granada, uno en la capital y otro en un municipio cercano. Dichos estudiantes no habían sido seleccionados al azar sino que, al tratarse de un trabajo exploratorio, éstos constituían una muestra intencional.

El cuestionario aplicado estuvo formado por seis cuestiones de opción múltiple, con cuatro posibles distractores, habiendo una o dos respuestas correctas a cada cuestión. Cada pregunta trataba de analizar uno o dos aspectos acerca de la interpretación que el alumnado hace acerca del intervalo de confianza en su conjunto o de alguno de los conceptos más importantes que intervienen en su definición. Algunas de las cuestiones fueron tomadas (y adaptadas) de Cruise, Dudley y Thayer (1984), inspirándonos en los contenidos mostrados en Olivo (2008). No obstante, una de las cuestiones de elaboración propia que propusimos es la siguiente:

Se sabe que la altura media  $\mu$  de los pinos de una zona forestal muy amplia es de 6.5 metros. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A. Un posible intervalo de confianza para  $\mu$  es [6.25, 8.4].
- B. Un posible intervalo de confianza para  $\mu$  es [6.75, 8.4].
- C. Cualquier intervalo de confianza para  $\mu$  que calculemos, asociado a una muestra aleatoria cualquiera, debe contener al valor 6.5.
- D. En este contexto, no tiene sentido determinar el intervalo de confianza ya que se conoce la altura media de todos los pinos.

Con esta cuestión pretendíamos determinar si el alumnado comprendía que el intervalo de confianza sirve para estimar un valor desconocido de un parámetro. Por tanto, si este datos es conocido, no tiene ningún sentido aplicar esta técnica inferencial, lo que significa que la respuesta correcta es la D.

Se analizaron las respuestas obtenidas en cada una de las cuestiones propuestas, calculando las frecuencias en las que se habían obtenido. A continuación, teniendo en cuenta los objetivos a cada pregunta, se mostraron algunas de las dificultades mostradas por el alumnado que podrían estar relacionadas con las respuestas erróneas. Muchas de estas dificultades ya habían sido puestas de manifiesto por investigaciones previas en este campo de estudio, como pueden ser las siguientes:

- Considerar el intervalo de confianza con extremos constantes.

- Confundir confianza con probabilidad de que el parámetro caiga en el intervalo.
- Pensar que el ancho del intervalo aumenta cuando crece el tamaño de la muestra.

Otros errores no habían sido detectados en investigaciones previas y constituyeron aportaciones originales de la investigación. Entre ellos, destacamos los siguientes:

- Considerar que la media muestral se sitúa en un extremo del intervalo de confianza.
- No relacionar las ideas equivalentes de “intervalo más estrecho” con “intervalo más preciso”.
- Suponer que algunos intervalos no contienen a la media muestral.
- Considerar que la anchura del intervalo de confianza depende de la media muestral.

Entre las conclusiones que se obtuvieron del trabajo cabe destacar la necesidad de prestar más atención por parte de los docentes a la interpretación del intervalo de confianza entre estudiantes preuniversitarios frente al mero cálculo numérico. Posibles trabajos de colaboración con los compañeros brasileños sería el análisis comparado de los contenidos de inferencia en Bachillerato en los dos países o la replicación de este estudio en el contexto brasileño.

## Referencias

- Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña.
- Cruise, R., Dudley, R., & Thayer, J (1984). *A resource guide for introductory statistics*. Nueva York: Kendall/Hunt.
- Cumming, G., Williams, J., & Fidler, F. (2004). Replication, and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, 18(3), 299-311. doi: [10.1111/j.1467-9280.2007.01881.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2007.01881.x)
- Estes, W. K. (1997). Significance testing in psychological research. Some persisting issues. *Psychological Science* 8(1), 18-20.
- López-Martín, M. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019a). Prospective high school teachers' interpretation of hypothesis tests and confidence intervals. Trabajo presentado en *CERME 11*, Utrecht, Febrero, 2019.
- López-Martín, M. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019b). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en inferencia? *Bolema*, 33(64), 672-693. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a11>
- Olivo, E. (2008). *Significados del intervalo de confianza en la enseñanza de la ingeniería en México*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Olivo, E. y Batanero, C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza. *Unión* 12, 37-51.
- Roldán-López de Hierro, A. F. (2019). *Un análisis exploratorio de la comprensión del intervalo de confianza por estudiantes de Bachillerato*. Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada. Disponible en: <https://digibug.ugr.es/handle/10481/5961>

# Inferência informal no ensino de estatística: reflexões a partir de experimentos práticos

Luciane de Souza Velasque, Maria Tereza Serrano Barbosa e Alexandre Sousa da Silva  
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

## Resumo

A Estatística é uma ciência que tem como um dos seus principais objetivos, transformar observações em informações que auxiliem na tomada de decisão, através de processo onde são utilizados conceitos, às vezes complexos, de Inferência. Entre os muitos desafios colocados para os professores de Estatística dos cursos de formação, estão os de conseguirem discutir formas de tornar compreensíveis estes conceitos na Educação Básica. Este artigo apresenta e discute duas atividades que permitem desenvolver conhecimentos intuitivos necessários a uma melhor compreensão dos pensamentos estatísticos e probabilísticos. A primeira atividade é um experimento de amostragem e a segunda, um experimento de teste de hipóteses.

**Palabras clave:** Inferência informal, educação estatística, formação de professores, pensamento estatístico e probabilístico

## 1. Introdução

A Estatística é uma ciência que tem como um dos seus principais objetivos, transformar observações (dados) em informações que auxiliem na tomada de decisão, através de processo onde são utilizados conceitos, às vezes complexos, de Inferência. A Inferência é apresentada de maneira formal apenas em cursos de graduação e pós-graduação, pois exige um série de prévios conhecimentos matemáticos.

Em cursos de licenciatura vivenciamos o desafio de ensinar a formalização dos conceitos sem deixar de discutir formas de tornar estes conceitos compreensíveis para os estudantes da Educação Básica.

Neste artigo serão apresentadas e discutidas atividades realizadas junto à licenciandos de Matemática e de Pedagogia. As atividades tem como objetivo apresentar os pensamento estatístico e probabilístico de forma intuitiva e informal. Mais especificamente, iremos focar no conceito de Inferência Estatística Informal (IEI) apresentada em Makar, Bakker e Bem-Zvi (2011) e, nas reflexões apresentadas por Batanero et al (2016). Estes últimos autores ressaltaram as diferenças, apesar da estreita relação, entre o pensamento probabilístico e o pensamento estatístico. Para eles, enquanto o pensamento probabilístico tem o objetivo de estruturar nosso pensamento através de modelos, o pensamento estatístico busca modelos que possam explicar os dados observados. Assim, Inferência Estatística Informal para Makar, Baker e Bem-Zvi, é a aprendizagem da generalização iniciada a partir da observação, comparação e raciocínio com dados. Para caracterizar este conceito, eles ressaltaram a necessidade da Inferência ser compreendida como a possibilidade de se conhecer a população a partir de uma amostra, considerando as margens de erro e confiança explicitadas, sem a formalidade trazida nos cursos introdutórios.

Ancorados na proposta de fomentar uma aprendizagem significativa do pensamento estatístico e probabilístico, serão apresentados aqui duas atividades: uma delas busca

fazer com que os estudantes adquiram conhecimentos a respeito da representatividade de uma amostra, em relação à população; da variabilidade amostral e a partir dela, do significado de margem de erro e intervalo de confiança. A segunda atividade permite introduzir de forma lúdica, o pensamento estatístico necessário para testar uma hipótese em um experimento concreto.

## 2. Atividade 1- Experimento de amostragem para estimar a proporção de balas verdes

A atividade tem como objetivo permitir a discussão de como pode-se inferir valores da população, por meio de uma amostra. A atividade é iniciada com seguinte Questão de Pesquisa: “Qual é a proporção de balas verdes no recipiente?” e “Como podemos estimar esta proporção sem precisar contar todas?”

**3. Descrição da atividade:** Em um recipiente transparente coloque um certo número de balas de duas cores, permitindo que a proporção de uma delas (por exemplo, as verdes) seja de 30%. Será necessário um coletor para retirada das balas (amostra). É importante que esse coletor não seja muito pequeno, pois o tamanho da amostra terá um impacto na estimação do valor que se deseja estimar. As etapas a serem realizadas por cada um dos estudantes são:

1. Observe o pote e dê um palpite para a proporção de bolas verdes. Registre seu palpite em uma ficha.
2. Retire uma amostra de balas, conte quantas bolas de cada cor, calcule a proporção de bolas verdes e registre na mesma ficha anterior o valor da sua estimativa.
3. Após todos os estudantes completarem as suas fichas, deve-se digitar os resultados em um planilha e apresentar um gráfico de pontos como na Figura 1.

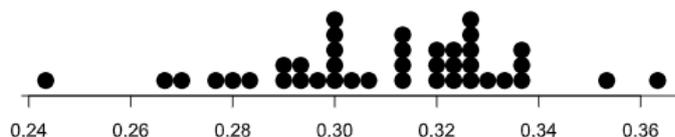


Figura 1. Gráfico de pontos das proporções de balas verdes obtidas nas amostras

**4. Discussões referentes à atividade:** Por meio dessa atividade é possível apresentar um dos conceitos mais importantes da Inferência Estatística, que é o do Teorema Central do Limite. A partir do gráfico é possível observar que os resultados obtidos em cada uma das amostras se concentraram em torno do verdadeiro valor. É possível também apresentar e discutir intuitivamente conceitos de probabilidade como medida de incerteza e de intervalo de confiança. Introduzindo a noção dos erros das estimativas, pode-se inclusive chamar a atenção para o fato dos valores extremos (muito maiores ou menores que o verdadeiro valor) terem tido menor probabilidade de acontecer, quando comparados aos valores mais próximos da verdadeira proporção. Ao se trabalhar com coletores de tamanhos distintos (por exemplo, com estudantes usando dois diferentes coletores) será possível também discutir o impacto do tamanho da amostra neste erro. Esta atividade

pode ser realizada sem computador e ao ar livre, onde cada aluno desenha um ponto em cima da proporção estimada pela sua amostra (Figura 2.)



Figura 2. Foto da atividade *Experimento de amostragem para estimar a proporção de bolas verdes* realizada em uma praça pública no Rio de Janeiro.

### 5. Atividade 2 – Experimento a respeito da diferença de paladar entre um refrigerante normal e sua versão sem açúcar (zero).

A atividade tem como objetivo permitir a discussão de conceitos estatísticos complexos por meio de uma pesquisa experimental simples. A atividade foi adaptada de Lopes (2014) e é iniciada com seguinte Questão de Pesquisa: “É possível diferenciar uma refrigerante zero da sua versão normal?”. Os desafios da atividade são: 1) planejamento de uma coleta de dados para responder a questão de pesquisa; 2) formulação das hipóteses a serem testadas; 3) elaboração do instrumento de coleta de dados, 4) apresentação dos resultados; 5) decisões a respeito das hipóteses formuladas a partir dos resultados.

O experimento proposto é dado pelas seguintes etapas:

1. Copos descartáveis são numerados de 1 a  $n$  ( $n$  é o número total a ser pesquisado);
2. Os copos numerados de 1 a 10 recebem o refrigerante normal, e os de 11 a  $n$  recebem refrigerante zero;
3. Os copos são dispostos de forma “aleatória” sobre a mesa sem a exposição dos seus números;
4. Os participantes escolhem um copo e registram no instrumento de coleta, o número do copo e se o refrigerante é zero ou normal;
5. Outras informações necessárias para as hipóteses formuladas serão coletadas neste instrumento, como por exemplo, informações sobre o sexo dos estudantes que poderão ser utilizadas para testar se a proporção de acertos entre meninos e meninas é a mesma.
6. Em paralelo ao experimento, pode-se realizar um outro onde a opinião de cada estudante será decidida através do lançamento de uma moeda, onde cada face seria associada a um tipo de refrigerante.

**6. Discussões referentes à esta atividade:** por meio deste experimento é possível apresentar de forma intuitiva questões referentes à realização de um experimento,

partindo de uma questão de pesquisa até a análise dos dados e interpretação dos resultados. A atividade permite a apresentação intuitiva de conceitos de probabilidade, além de conceitos gerais de testes de hipóteses, erros tipo I e II, para tanto, pode-se propor a comparação da proporção de acertos entre meninos e meninas, ou a comparação da proporção de acertos com a proporção, por exemplo, de caras se a decisão fosse tomada com um lançamento de moeda.

## 7. Conclusão e considerações Finais

As atividades apresentadas neste trabalho indicam uma maneira de trabalhar conceitos de Inferência Estatística de forma empírica e com pouco conhecimento teórico prévio sobre a Teoria da Probabilidade. Elas atendem ao que Makar et al (2011) discute a respeito dos elementos chaves destacados na literatura da educação estatística, como sendo uma inferência Informal, tais como: a aprendizagem baseada em um pergunta; conhecimento estatístico e o conflito entre o que os estudantes esperam e observam nos dados. Além disso, elas atendem às preocupações de Batanero et al (2016) por permitirem também o desenvolvimento do Raciocínio Probabilístico. Com isso, esperamos que os professores de Matemática da Educação básica não deixem de explorar esses conceitos tão importantes para o desenvolvimento do pensamento Estatístico e Probabilístico, ainda na Educação Básica, por acreditarem que para o aprendizado desses conceitos seriam necessários um conhecimento formal da Teoria das Probabilidades.

## Referências

- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez, E. (2016) *Research on Teaching and Learning Probability ICME-13 Topical Surveys*. New York: Springer. DOI 10.1007/978-3-319-31625-3\_1.
- Lopes, C. E. (2014). *Os movimentos da educação estatística na escola básica e no ensino superior*. Campinas, SP: Mercado de Letras.
- Makar, K. Bakker, A., & Ben-Zvi (2011). The reasoning behind informal statistical inference, *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173, DOI: 10.1080/10986065.2011.538301.



$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} \quad P(A, B) = \frac{n(A, B)}{n}$$

$$\hat{y} = a + bx \quad \mu = np \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \quad \mu = \frac{1}{n} \sum x_i$$



$$b = r \frac{s_y}{s_x} \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \hat{p} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad \bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$H_0: p = p_0$

$$SE = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad z = \frac{\hat{p} - p_0}{SE}$$

$$H_0: \mu = \mu_0$$



$$SE = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} \quad P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$CI = (\hat{p} \pm z \cdot SE)$$

$$S = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



$$\hat{y} = a + bx \quad \mu = np$$

$$b = r \frac{s_y}{s_x} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$\mu = np \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \quad \mu = \frac{1}{n} \sum x_i$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \hat{p} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad \bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$



$$H_0: \mu = \mu_0$$

