IACQV

Philo

3.

A
47
280

G-I-5 A 1 Jac.

Donado a la Biblioteca por
D. Ricardo Corzo.

12
1-25

BIBLIOTECA HOSPITAL REAL
GRANADA
Sala: A
Estante: 47
Número: 280

G-I-5 A 1 Jac.

Donado a la Biblioteca por
D. Ricardo Corzo.

12
1-25

BIBLIOTECA HOSPITAL REAL
GRANADA
Sala: A
Estante: 47
Número: 280

C. D. 1

INSTITVTIONES PHILOSOPHICAE

AD STVDIA THEOLOGICA POTISSIMVM ACCOMMODATAE

AVCTORE

FRANCISCO JACQVIER

Ex Minimorum Familia, Primariarum per Europam Academiarum Socio, in Lyceo Romano, et in Collegio Vrbano de Propaganda Fide Professore.

TOMVS III.

R
1326

SVPERIORVM PERMISSV.

VALENTIAE: APVD BENEDICTVM MONFORT

MDCCLXXXIII.

AVCTOR LECTORI.

PHysicam inter Geometricamque doctrinam tam arcta est necessitudo, vt apud omnes cultiores Viros tamquam vanissimum merito habeatur Physicae studium Geometriae praesidio destitutum. Quae cum ita sint, nemo mirari debet, quod à studiosis adolescentibus, sacrae licet Theologiae destinatis, Arithmeticae, & Geometriae elementa requiram; si enim his careant doctrinae Physicae adiumentis, satius est, eos huic praeclarissimo studio valedicere omnino; *melius est nihil scire, quam male scire.* Tale enim cognitionis, potius dicam ignorantiae genus mentis aciem hebetat, rectumque iudicium corrumpit, & omni studiorum generi nocet plurimum. Ad me fortasse reprehendent censores aliqui, quod noua elementa ediderim, cum nihil fere in orbe litterario frequentius sit elementorum libris. Neque talem me esse, quis sibi falso persuadeat, vt de aliis elementis minus laudabiliter sentiam, huncque meum libellum supra alios omnes extollam, quod tamen à plerisque elementorum Auctoribus nimis arroganter factum video. Et quidem variis elementis, ratione licet, & methodo diuersissimis, suam iustam laudem concedendam esse, facile quisque fatebitur; si varias attenderit adolescentum conditiones, atque voluntates. Alii sublimiorem Physicam, Mathesimque vniuersam addiscere, & funditus haurire, sibi proponunt; alii autem aliis studiis, grauioribusque negotiis nati institutiones Geometricas strictim, leuiterque tantum arripiunt, quantum scilicet expoliendo, perficiendoque ingenio satis est, alii vltra Geometriam, quam *practicam* vocant, nolunt progredi, illaque minus nobili Geometriae parte contenti sunt; alii tandem alios fines, aliaque consilia in animo habent. Quid ergo mirum, quod ego Arithmeticae, & Geometriae elementa ad meas Physicas institutiones accommodatissima proponam? At quaecumque sit elementorum ratio, demonstrationis seueritas religiose semper tenenda est, neque obscura multarum propositionum farragine iuuenum mens est obruenda, sed splendidiori accuratioris Geometriae lumine illustranda. Monendi ergo sunt studiosi adolescentes, vt ab iis caute abstineant elementis, quae nec satis accurata methodo conscripta sunt, nec firmissimo demonstrationum robore munita. Perniciosissima quidem sunt studiosae iuuentuti talia elementa, quae eos habent Auctores, quorum doctrina tota in elementis continetur. Verum si recto proportionum ordine, nexuque necessario colligatae fuerint demonstrationes omnes; ex hoc studio diligenter, &, vt par est, instituto, in quolibet scientiarum genere fructum maximum sine vlla dubitatione polliceor. Nec quidquam existimationis geometrico studio detrahi debet, si aliqui extiterint in rebus Geometricis etiam versatissimi, in vulgari tamen agendi ratione, & in rebus quoque familiarissimis omnino inepti. Id quidem, quod summa iniuria obiici solet, tribuendum est praecipiti quorumdam Geometrarum iudicio. Non de-

desunt, fateor, celeberrimi etiam viri, qui in rebus Mathematicis toti occupati, necessaria rerum tractandarum, vel gerendarum principia, & elementa non satis tenent; atque hinc mirum non est, quod aliquando errent grauiter, Geometrarum, non Geometriae visio. Et re quidem ipsa, si fons erroris probe attendatur, vitium in principiis, non vero in *consequentiis* latere deprehenditur; contra autem alii homines non pauci veris vtuntur principiis, errant autem in *consequentiis*. Itaque huc mihi maxime reducendum videtur geometrici studii pretium: si nempe duos fingere liceat homines eadem ingenii vi, eodemque cognitionum gradu praeditos, atque *ceteris*, vt vulgo dicunt, *paribus*, vnus autem sit Geometriae auxilio adiutus, alter autem destitutus, facile mihi persuadeo virum Geometram in quolibet scribendi genere, in tractanda etiam quaestione Theologica multo excellentiorem futurum: neque enim quae prima sunt, postrema dicet, & vicissim; nec quae perspicua sunt, & illustria, minus accurata methodo obscurabit; aut quae abstrusa sunt, & inuoluta, densiori caligine non obuoluet. Verum ne Geometriae studio nimis tribuere videar, & hanc, quam maxime amo, disciplinam magnificentius praedicare, de iis non loquor melioris ingenii viris, in quibus excellens iudicium meditatione, & experientia subactum, atque perfectum miramur, siue grauiora tractanda sit negotia, siue studiis quibuscumque danda sit opera. Has iustissimas Geometriae laudes attigisse satis sit ad excitandam adolescentum voluntatatem. Faxit D. O. M. vt hoc meo qualicumque labore vtantur, non in rebus Physicis tantum, sed etiam vt in studiis grauioribus, quem quidem fructum maxime exopto, ratiocinandi vim accuratiori methodo augeant, atque vrgeant, huius tamen sanctissimi dogmatis probe memores: *captiuare intellectum in obsequium fidei.*

Ceterum monendum superest, Scholia, & Appendices in his elementis praetermitti posse ab iis, qui minori pollent intelligendi facilitate; minus enim necessaria sunt haec additamenta.

INDEX.

Arithmetica, et Algebra.

GEOMETRIA.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICAE

TVM VVLGARIS, TVM SPECIOSAE.

CAPVT I.

De praecipuis vtriusque Arithmeticae operationibus generatim consideratis.

I.

ARithmetica generatim definitur *scientia computandi*. Computatio autem vel fit per vulgares numeros, ac proinde et determinatos 1. 2. 3. cet. vel per alphabeti litteras, a, b, c, cet. quae numerum quemlibet, aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio *Arithmetica* simpliciter dicitur: altera autem vocatur Arithmetica *speciosa*, vel *Algebra*, et conuenientius à Newtono Arithmetica *vniuersalis* appellatur. Has quidem definitiones iuxta vulgarem docendi consuetudinem praemittimus; monendum tamen est, scientias quasdam vix clare definiri posse, nisi earumdem scientiarum diligens praecedat analysis, atque accurata explicatio. Ita in praesenti casu, explicatis Arithmeticae, et Algebrae operationibus, recte iam dicere liceret. Haec, quam vobis explicauimus, scientia, ea est, quae *Arithmetica*, vel *Algebra* vocatur. Per *numerum* Arithmetici intelligunt *vnitatum multitudinem*; at accuratius á Newtono definitur numerus *relatio*, seu *ratio* quantitatis cuiusuis ad aliam eiusdem generis quantitatem. Quae quidem definitio, vt in bono lumine collocetur, obseruandum est, quantitatem quamlibet cum alia eiusdem generis quantitate comparatam vel ea minorem esse, vel maiorem, vel tandem ipsi aequalem; hoc est, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel hanc aliam certo modo continere; hic autem modus, quo magnitudo aliqua aliam continet, vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. G. numerus 3. exprimit rationem magnitudinis alicuius ad aliam minorem, quae pro vnitate assumitur, et in maiori ter continetur. Contra autem si quantitas maior 3. pro vnitate adhibeatur, erit quantitas 1. tertia pars quantitatis maioris, quae tamquam vnitas consideratur, siue 1. ter in quantitate maiori continetur. Inde autem intelligitur, quid sit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur, quem vnitas metitur; fractus, qui est pars vnitatis; ita 1. 2. 3. cet. sunt numeri integri; sed dimidia, tertia, quarta, cet. pars vnitatis sunt numeri fracti; ita autem exprimi solent numeri fracti $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. cet. Ratio, quam modo definiuimus, si nempe consideretur, quomodo quantitas vna alteram contineat, dicitur *geometrica*. Vocatur autem *arithmetica*, si excessum tantummodo quantitatis vnius supra aliam consideremus. Duarum rationum aequalitas *proportio* dicitur vel *geometrica*, vel *arithmetica* pro diuersa rationum qualilitate. Quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur; et prima ad secundam esse dicitur, vt tertia ad quartam.

II. Numeri omnes in vulgari Arithmetica decem notis, siue characteribus designantur; sunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quorum vltimus *cyphra*, siue *zero* appellatur. Harum notarum varia est significatio non solum ex diuersa illarum figura, sed etiam ex diuerso, quem occupant, loco. Quae ad sinistram postremae occurrunt, designant vnitates; quae proximae praecedunt, vnitatum decadas; exinde centenarii sequuntur, millenarii; et sic deinceps per decadas, et centenarios progrediendo. Huic autem vsui potissimum cyphra destinatur; cum nempe ipsa nullum designet numerum, auget tamen reliquarum notarum significationem, longius illas ab extremo versus sinistram numero remouens. Sic vnitatis nota, quae sola vnicam designaret vnitatem, beneficio vnius, vel duplicis cyphrae in secundum, aut tertium locum reiecta denas, vnitates, aut centenas significabit. Breuiores numeri facile leguntur; ita 247 exprimunt ducentas quadraginta septem vnitates: at in prolixioribus numeris aliquo opus est artificio; ita si legere oporteat longiorem numerum

. 3 . 2 . 1 .
3 247 578 562 914 020 467 212; hunc ita diuides à postremis numeris exorsus; nempe tres postremos diuides à praecedentibus puncto superius apposito, tribus sequentibus adscribes 1, et sic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim appones, vel numerum; ita tamen, vt numeri vnitate semper augeantur, quemadmodum hic factum vides. His peractis, quamlibet

 no-

notarum classem perinde leges, ac si sola esset; et vbi punctum inuenies, dic mille; vbi 1, dic decies centena millia, seu, vt vulgo lopuimur, *millionem*; vbi 2, dic milliones millionum, siue *billiones*; vbi 3, dic *trilliones*, et sic deinceps. Sic itaque legendus est numerus praecedens: ter mille, ac ducenti quadraginta duo trilliones, sequingenta septuaginta octo millia, ac quingenti sexaginta duo billiones, nongenta quatuordecim millia, ac viginti milliones, quadringenta sexaginta septem millia, bis centum, ac duodecim.

III. Vulgares explicauimus Arithmeticae characteres, quorum auctores feruntur Astronomi Arabes: aliquid iam dicendum est de notis, quae *Romanae* appellantur. Notae illae, quarum in Physicis Institutionibus vsus recurret, maiusculis alphabeti litteris exprimuntur. His characteribus *Romanorum* nomen factum fuisse creditur, quod eos in monetis publicisque monumentis vsurpauerint veteres Romani. Litterae, quae numeros Romanos componunt, sunt septem sequentes I. V. X. L. C. D. M. Harum notarum haec est significatio. I. vnitas: V. quinque: X. decem: L. quinquaginta: C. centum: D. quingenta: M. mille. Si duo I scribantur in hunc modum II, aequiualent binario; si tria scribantur III, significant ternarium; numerus quaternarius ita exprimitur IV; et numerus nouenarius hoc modo IX: nempe vnitas numeris V, X praefixa eos mulctat vnitate. Verum ad exprimendos numeros vulgares 6. 7. 8. scribi solet VI. VII. VIII. Si numero L, vel C praemittatur X; numeri illi decade minuuntur; ita XL significat 40, et XC 90: contra autem si

nu-

numerum L sequatur X in hunc modum LX; numerus praecedens augetur decade significans 60, cet. Aliquando numerus 400 expressus fuit litteris CD, sed raro. Praeter litteram D, quae exprimit 500, idem numerus significatur etiam hoc modo IƆ. Ita etiam loco M, aliquando scribitur CIƆ. Eodem modo exprimi potest 600 per IƆC; et 700 per IƆCC cet. Si litterae C, et Ɔ ante et post addantur, numerus CIƆ augetur in ratione decupla; ita CCIƆƆ significant 10000, CCCIƆƆƆ 100000, cet. Hi erant communes Arithmeticae characteres apud veteres Romanos, qui etiam numerum millenarium designare solebant adscripta numeris millenario minoribus lineola; hoc modo $\overline{V}$, et significat 5000; $\overline{LX}$, et designat 60000. Similiter $\overline{M}$ aequiualet 1000000, et $\overline{M}\,\overline{M}$ designat 2000000. A recentioribus nonnullis Scriptoribus variationes aliquae fuerunt adhibitae; ita litteris IIX designant 8, litteris IICIX exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes suas iniuerint veteres Romani, nos omnino latet. Aliquam procul dubio habuerunt Arithmeticam, quam quidem inuenire, aut aliam non multum dissimilem substituere, problema est à viris Arithmeticae et antiquitatis studiosis soluendum.

IIII. Quoniam numeri nihil aliud sunt, quam magnitudinum rationes quaedam certis signis distinctae, euidens est, Arithmeticam, siue scientiam numerorum esse artem diuersas illas rationes inter se combinandi, illasque certis characteribus distinguendi. Hinc nascuntur Arithmeticae operationes praecipuae. Etenim diuersae numerorum combinationes huc reuocari possunt, vt nempe mutuus eorum excessus, vel modus, quo se inuicem continent, expendatur, et assignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandae quatuor vulgares Arithmeticae operationes: *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, *Diuisio*.

V. Additio vocatur illa Arithmeticae operatio, qua plures numeri simul colliguntur; Subtractio autem dicitur operatio, qua numeri à se inuicem subtrahuntur; ita si addantur 2 et 3, vt efficiantur 5; vel minor numerus 2 à maiori 3 subtrahatur, vt remaneat 1; in primo casu dicitur additio, in altero autem subtractio. Patet, in additione, et subtractione considerari mutuum numerorum excessum; etenim in additione excessus summae ab altervtro numero innotescit; in subtractione autem mutua numerorum differentia inuestigatur. Multiplicatio appellatur illa Arithmeticae operatio, qua idem numerus sibimetipsi pluries additur; ita si 3 per 4 multiplicari debeat, idem est, ac si 4 sibi ipsi ter addatur, vel 3 sibi ipsi quater adiungatur; prodibitque 12. Diuisio est Arithmeticae operatio, in qua numerus vnus ab alio subtrahitur, quantum fieri potest; ita numerus 4 ex 12 ter subtrahi potest. Itaque patet, in multiplicatione, et diuisione considerari modum, quo numeri sese mutuo continent. Ita in praecedenti multiplicatione innotescit, numerum 12. ter continere numerum 4; per diuisionem autem demonstratur, numerum 4 ter contineri in 12. Ex his euidens est, multiplicationem nihil aliud esse, quam additionem compositam; atque etiam diuisio nihil aliud est, quam composita subtractio. Quare ad duas dumtaxat reuocari possunt quatuor vulgares Arithmeticae operationes. Hinc

Arith-

Arithmeticae operationes accurate omnino definiuit Newtonus: *compositionem*, *et resolutionem arithmeticam*; quae quidem definitio ex ipsa arithmeticarum operationum natura deriuatur. Quamuis autem numeri sint rationes geometricae, ex dictis tamen euidens est, additionem, et subtractionem proprie reuocari ad rationem arithmeticam; multiplicationem vero, et diuisionem ad rationem geometricam referri. Caeterum praeter vulgares quatuor enumeratas operationes, aliae sunt plurimae; sed hae omnes ad primas referuntur, vt ex dicendis manifestum fiet. Hic autem regulas Arithmeticae generatim considerasse satis sit, patet autem, hanc, quam tradidimus Arithmeticae notionem, Arithmeticae speciosae communem esse. Itaque licet Arithmeticae nomen generatim vsurpemus; illud tamen de Arithmetica speciosa intelligi quoque volumus. Iam vero vniuersam Arithmeticae vtriusque doctrinam breuiter, ac distincte explicemus, quantum postulant nostrarum Institutionum necessitas, atque iniuncta breuitas.

CAPVT II.

De quatuor primis Arithmeticae operationibus in numeris integris.

I. PRima Arithmeticae operatio dicitur *Additio*, quae ex praecedentibus satis intelligitur. Totam huius operationis praxim declarabimus, atque demonstrabimus.

PROBL.

PROBL. I.

Numeros integros addere, siue in vnam summam colligere.

Exempl.
23561
392
8768
49321
82042

II. **A**Ddendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. Quatuor numerorum columnas ita alias aliis adscribe serie descendente, vt vnitates vnitatibus subiiciantur, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola, et à postrema columna exorsus dic, 1 et 8 efficiunt 9; 9 et 2 efficiunt 11; 11 et 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna vnam decadem vnitatum, ac praeterea duas vnitates. Quare scribe 2 in columna vnitatum, et decadem reiice in sequentem decadum columnam dicens; 2 et 1 efficiunt 9; 9 et 9 efficiunt 18; 18 et 6 efficiunt 24: hoc est, duas decadas decadum, siue duo centenaria, et 4 decadas; scribe ergo 4 in loco decadum, et duo centenaria in sequentem columnam reiice: eodemque pacto in hac, et reliquis operare; et tandem inuenies summam quaesitam 82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in vnaquaque columna numeri ita colliguntur, tamquam si essent vnitates, ex eaque summa tot vnitates in columnam proxime sequentem reiiciuntur, quot decades collectae sunt: quod quidem faciendum esse euidens est, cum nota quaelibet ab vnitatum columna ad reliquas progrediendo valorem habeat in columna sequente decuplo maiorem, quam in praecedente.

te. Igitur in hac operatione adduntur singulae vnitates, singulae decades, singula centenaria. Quare patet huius operationis ratio, quae quidem vtpote per se euidens, nullo vulgarium axiomatum auxilio indigere videtur. Quamuis enim demonstrationis seueritati maxime studeamus; eorum tamen imitari nolumus obscuram diligentiam, qui res euidentes ita demonstrant, vt, perlecta demonstratione, de iis fere dubitare liceat, quae antea perspicue credebantur.

PROBL. II.

Numeros integros subtrahere.

III. SEcunda Arithmeticae operatio dicitur *Subtractio*, cuius totum hoc est artificium. Vt numerum datum à dato numero subtrahas, numerum subtrahendum alteri, à quo subtrahi debet, ita subiicies, vt vnitates vnitatibus respondeant, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum ab vnitatibus exorsus quamlibet inferiorem notam à superiori subtrahe, et residuum scribe infra lineolam, habebit numerum, qui sit datorum numerorum differentia. Si vero occurrat, inferiorem notam superiori maiorem esse, hanc augebis decem vnitatibus, easque mutuas accipies à proxime sequenti nota, quam proinde deinceps habebis tamquam vnitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 á numero 23897. Auferendo 5 et 7 relinquitur numerus 2; auferendo 4 ex 9 relinquitur 5, 2 ex 8 remanet 6. At cum numerus 4 ex 3 subduci nequeat; adiice huic denas vni-

Exempl.

$$\begin{array}{r} 23897 \\ 4245 \\ \hline 19652 \end{array}$$

vnitates, et auferendo 4 ex 13, residuum habebis 9. Tum vero notam superiorem proxime sequentem vnitate mulctabis; hanc enim ab ea mutuam accepisti, vt denis vnitatibus praecedentem augeres: habebis ergo residuum 1; ideoque residuum totum 19652.

Demonstratio satis per se constat; cum vnitates ab vnitatibus auferantur, decades à decadibus, cet. Nam, quod in hoc exemplo numerus 3 decem augeatur vnitatibus, et numerus sequens 2 vnitate mulctetur, ratio patet. Haec nempe vnitas in numero 3 decadi vnitatum aequalis est, earum scilicet, quibus constat idem numerus 3; quare etiamsi vnitatem dumtaxat ille amittat, huic tamen decem accedunt. Simili modo si plures sequerentur cyphrae, ex quibus proinde nulla fieri potest subtractio; ex numero proxime antecedenti mutua accipienda est vnitas, quae in cyphram sequentem translata decem vnitatibus aequiualet. Rursus ex illa decade vnitas in secundam cyphram transfertur, atque ita deinceps. Quare patet, cyphram vltimam decem vnitatibus aequalem esse, caeteras vero antecedentes aequari nouenario. Itaque euidens est huius operationis ratio, nec vulgarium axiomatum ope facilius intelligitur.

Ex additionis, et subtractionis natura manifestum est, duas illas operationes sibi mutuam probationem conferre, et sese inuicem confirmare. Etenim cum residuum in subtractione sit ipsa numerorum differentia; patet, minorem numerum residuo, siue differentiae additum maiori numero aequalem esse. Item cum additio sit plurium numerorum aggregatum, si ex aggregato altervter numerus auferatur; numerum alterum

rum remanere, necessum est. Si igitur explorare velis, vtrum additio rite peracta sit, subtractione vtendum est; contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

PROBL. III.

Numeros integros multiplicare.

IIII. Tertia Arithmeticae operatio vocatur *Multiplicatio*, in qua, vt patet ex capite praecedenti, toties sumitur numerus multiplicandus, quoties vnitas continetur in numero, per quem debet multiplicari. Singulae notae in singulas facile ducuntur, si numeri breuiores sint. Sic nemo non videt, 3 in 4 ductum, siue 4 ter sumptum 12 efficere. At si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum altervtrum infra alterum scribe, ita vt vnitates vnitatibus subiiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica, initio á postremis facto. Decadas, quae inter multiplicandum colliguntur, sepone adiiciuntur producto ex eadem numeri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta, quae emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris, infra lineolam seorsim notentur; ita vt vniuscuiusque vnitates subiiciantur numero, per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quaesitum.

Mul-

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43, sub 235; tum ducta lineola, dic 3 in 5 efficiunt 15, scribe 5 sub numero multiplicante 3, et vnam decadem sepone adiiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9; cui si addas 1 habebis vnam decadem, et nullas praeterea vnitates, scribe igitur	*Exempl.* 235 43 ——— 705 940 ——— 10105

0: et facto ex 3 in 2, quod est 6, adiiciens 1 scribe 7: rursus dic 4 in 5 efficiunt 20; scribe 0, ita vt multiplicatori 4 subiaceat, et facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adiiciens 2 habebis 14; scribe igitur 4: et seponens 1, dic 2 in 4 efficiunt 8, et adiecto 1, scribe 9. Demum ducta linea, collige in vnam summam hos numeros ita dispositos; eritque 10105 productum quaesitum.

Demonstratio euidens est ex ipsa notarum arithmeticarum natura, si nempe in memoriam reuocetur, numerorum characteres decuplo plus valere in locis anterioribus, quam in posterioribus; illico enim manifestum fiet, toties sumi in producto numerum multiplicandum, quoties vnitas continetur in numero, per quem fit multiplicatio.

PROBL. IIII.

Numeros integros diuidere.

V. QVarta Arithmeticae operatio vocatur *Diuisio*. Cum numerus datus per alium datum diuidendus proponitur, eo reducitur quaestio, vt inueniatur quoties in numero diuidendo contineatur diuisor, totiesque au-

auferatur: atque totidem vnitates scribantur in numero, qui idcirco *quotus* dicitur. Haec ergo genuina est diuisionis notio: nempe diuidendus est ad diuisorem, vt quotus est ad vnitatem; vel diuidendus est ad quotum, vt diuisor est ad vnitatem.

Exempl.

43 (10105) 235	
86	
——	
150	
129	
——	
215	
215	
——	
000	

Proponatur diuidendus numerus 10105 per 43. Numero diuidendo diuisorem praefige lineola interiecta; tum operationem instituens in primis notis diuidendi, quae exhibeant quantitatem diuisori aequalem, vel proxime maiorem; dic, quoties 43 continentur in 101, quotus erit 2. Scribe ergo 2, lineola pariter interiecta, ex altera parte diuidendi, et factum ex 2 in 43, sive 86 aufer ex 101 et residuo 15 notam appone 0, quae in diuidendo proxime sequitur quantitatem iam diuisam 101. Dic iterum, quoties 43 continentur 150, quotus est 3, quem scribe, vt ante; et factum ex 3 in 43, seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem notam diuidendi 5: et dic iterum quoties 43 continentur in 215, quotus erit 5, quem scribe cum aliis quoti notis, et aufer ex 215 factum ex 5 in 43, siue 215. Cum nihil ex ea diuisione supersit: patet, numerum 235 illum accurate esse, qui oritur ex diuisione 10105 per 43.

Tota operationis ratio facile patet, si animaduertamus, in huiusmodi operatione rem perinde se habere, ac si quaereretur, quota pars quantitatis alicuius singulis hominibus obueniret,

si

si eam ex aequo tot hominibus distribui oporteret, quot vnitates continet diuisor. Nam in tota operationis serie inquirimus, quot vnitates, decades, cet. singulis dari possint; iisque datis, quae dari possunt, quot adhuc distribuendae supersint. Facile autem intelligitur post quamlibet subtractionem peractam id, quod relinquitur, antequam vlteriorem diuidendi notam adiicias, diuisore minorem esse oportere; nam si residuum aequale foret, vel maius, diuisor in quantitate iam diuisa pluries contineretur, quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo sita est, quod in numeris longioribus statim non pateat, quoties diuisor in diuidendi notis contineatur, et tentamine vtendum est; diuisor nempe per numeros ab 1 ad 9 multiplicandus est, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum diuidendi notis, et explorandum est, quinam ex illis numeris sit proxime minor; pones in quoto numerum, in quem ductus diuisor hunc efficit numerum, ipsum vero numerum ex diuidendi notis subduces. Caeterum qui in Arithmetica satis fuerit exercitatus, facile coniiciet ex primis vtriusque numeri notis, diuidendi scilicet, et diuisoris, ipsum numerum pro quoto eligendum.

Probe autem obseruari debet in quoto notarum valor, vt in aliis Arithmeticae operationibus iam antea monuimus; at in praesenti operatione, quae est omnium difficillima, rem breui exemplo illustrabimus. Diuidendus proponatur numerus 416 per 2, statim patet, in quoto contineri centenarios, decadas, et vuitates. Diuidatur iam 4 per 2, quotus erit 2, qui per 2 multiplicatus producit 4, quo subtracto ex 4 fit

fit o. Patet ergo, diuisum fuisse 400 per 2. Progredior deinde ad notam sequentem 1, hoc est diuidi debet 10 per 2. Statim autem video, 2 in 10 decies non contineri; quare scribitur o in quoto; tum vt indicetur, quotum nullam decadem continere, tum vt primae quoti notae 2 suus seruetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad 6, qui numero praecedenti 1 apponitur, diuisoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus est 208. Hinc generatim intelligitur, qua de causa in quoto scribatur cyphra, imo et plures cyphras aliquando scribi oporteat. Hac diuisione peracta; nulla relinquitur in diuidendo nota; si autem aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adiicienda est fractio. Ita si in exemplo praecedenti haberetur numerus 417 per 2 diuidendus, ita vt numerum 417 ex aequo hominibus 2 partiri debeas, singuli acciperent nummos 208, et dimidiam partem nummi, quae ita scribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam, patet satis esse primam diuidendi notam per primam diuisoris notam diuidi, si in diuisore, et diuidendo idem sit notarum numerus. Verum si diuidendus plures contineat notas, persaepe necesse est duas primas diuidendi notas primae diuisoris notae subiici; idquid fieri debere euidens est, quoties datus notarum numerus in diuisore maiorem habet valorem, quam habeat aequalis notarum numerus in diuidendo: verum si duae adhibeantur diuidendi notae, per primam diuisoris notam diuisio semper fieri potest. Quare generatim ostenditur, sumptis in diuidendo tot notis, quot sunt in diuisore, vel etiam, quod

ali-

aliquando necesse est, nota vna insuper adiecta, notarum numerum in quoto vnitate excedere residuum notarum numerum in diuidendo. Inde autem facile colligitur, nullum in quoto numerum nouenario maiorem esse posse. Etenim diuisor decies aequalis esse non potest assumptae diuidendi parti. Nam si diuisor decies sumatur, nota vna augetur: at pars diuidendi assumpta habet notarum numerum notarum diuisoris numero aequalem, vel vnitate maiorem. In primo casu euidens est, diuidendi partem assumptam minorem esse diuisore decies sumpto, cum notarum numerum habeat vnitate minorem: in secundo casu pars diuidendi assumpta, si nota vna versus dextram minuatur, minor fit diuisore. Quare diuidendus hac nota iterum auctus minor est diuisore decies sumpto.

Diuisionis rite peractae argumentum habebis, si diuisorem in quotum ducas, redeatque diuisus numerus; nam si non redeat, manifestum est, alicubi errorem esse admissum; quod quidem patet ex ipsa diuisionis natura; cum diuidendus toties contineat diuisorem, quoties vnitas continetur in quoto: quare cum quotus exprimat, quoties diuisor continetur in diuidendo, si diuisor per quotum multiplicetur, diuidendum ipsum restitui necesse est. Caeterum patet, si diuisorem accuratum habere non licuit, facto ex diuisore in quotum addendum esse residuum ex vltima diuisionis subtractione, vt redeat diuisa quantitas. Contraria ratione euidens est, multiplicationis rite peractae haberi argumentum, si productum diuidatur per multiplicandum, aut per numerum multiplicatorem: in primo casu quotus fit multiplicator; in casu autem

tem altero quotus est multiplicandus. Cum enim diuisio sit multiplicationi contraria, per diuisionem resoluitur, quod in multiplicatione componitur, et contra. Caeterum in multiplicatione, & diuisione compendia plurima vsus docebit; hinc monere satis erit, multiplicationis per plures cyphras faciendae compendium haberi, si in producto scribantur tot cyphrae, quot occurrunt in multiplicando, & multiplicatore simul, multiplicatio autem aliarum notarum fiat secundum regulas praedictas. Item in diuisione, si diuisor, & diuidendus cyphras contineant: in diuidendo delendae sunt tot cyphrae, quot occurrunt in diuisore, quae etiam in ipso diuisore deleri debent, et reliqua operatio peragenda, vt antea. Notandum autem est, compendium illud valere dumtaxat, si cyphrae fuerint vltimae tum diuisoris, tum diuidendi notae; quod quidem manifestum est ex cyphrarum natura.

Scholium. In praesenti capite sermonem habuimus dumtaxat de numeris homogeneis, siue eiusdem speciei; at pari facilitate in numeris heterogeneis, seu diuersae speciei absoluuntur operationes arithmeticae. Antequam vero operationes illas explicemus, definiendum est, quid per numerum *concretum*, quid per *abstractum* intelligant Arithmetici. Numerus concretus dicitur, quo res aliqua determinata designatur, ita si dicas tres homines, tres horas, tres pedes, cet. At si numerum 3 generatim enunciaueris, nec rem aliquam designaueris, numerus vocatur abstractus. Iam in numeris diuersae speciei additio, & subtractio facile intelliguntur. Probe tenenda est diuersa numerorum species: ita si addi debeant lineae, pollices, pedes, exapedae, sciendum est, lineas 12 pollicem vnum aequare, pollices 12 pedem vnum, & exapedam ex pedibus 6 constare. Vbi autem in linearum additione summa efficitur, quae 12 excedit; tot vnitates inter pollices referri debent, quot sunt numeri duodenarii; quod vero reliquum est, seu quod duodenario minus est, in linearum columna scribi debet; & ita deinceps de alia qualibet numerorum specie. Similiter in subtractione tota patet operationis ratio, si quantitas subtrahenda E. G. linearum numerus, iusto maior sit; iam ex quantitate praecedenti, pollicum scilicet, mutuo accipienda est vnitas, quae duodenario numero aequiualet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud vnicum est discrimen inter operationes arithmeticas in numeris abstractis, atque heterogeneis peragendas, quod scilicet in numerorum abstractorum additione, vel subtractione vnitas mutuo accepta decadi aequiualeat; at in numeris heterogeneis vnitas, quae mutuo accipitur, eum retinet valorem, qui speciei suae respondeat. Haec de additione, & subtractione.

Quod multiplicationem spectat, impropriе omnino á quibusdam Arithmeticis proponi videtur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum est, quod faciunt aliqui, quaerere productum ex nummis 3, iuliis 3, assibus 3 in nummos 3, iulios, asses 3. Etenim in eo sita est multiplicatio, vt data quaedam quantitas datis vicibus sumatur, ac proinde multiplicator debet esse numerus abstractus. Qua ratione autem quantitates diuersae speciei per numerum abstractum multiplicentur, facile patet, si E. G. productum ex lineis in numerum abstractum maius sit numero duodenario, iam inter pollices reiici

iici debent tot vnitates, quod sunt numeri duodenarii; quod autem reliquum est, inter lineas scribendum. Porro quamuis in multiplicatione numerus abstractus esse debeat multiplicator, res tamen aliter se habet in diuisione; nam diuidendus semper censetur numerus concretus, diuisor autem vel concretus, vel abstractus esse potest. Ita diuidi possunt nummi 6 per nummos 2, hoc est, inuestigari potest, quoties 2 contineatur in 6; quotus 3 erit numerus abstractus. Potest etiam diuidi numerus concretus per numerum abstractum; ita nummos 6 diuidere possumus per 3, hoc est inuestigare possumus tertiam partem nummorum 6, & quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Iam vt perspicua habeatur diuisionis notio, ad ipsam definitionem redeamus. In diuisione scilicet diuidendus est ad diuisorem, vt quotus est ad vnitatem, vel diuidendus est ad quotum, vt diuisor ad vnitatem. Probe autem obseruari debent illae duae proportiones; licet vna, eademque videantur. Diuidendus tamquam numerus concretus semper habetur, concretus autem, vel abstractus esse potest numerus diuisor. In 1 casu quotus erit numerus abstractus, & locum habet prima proportio; in casu altero, vbi nempe diuisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus, & locum habet proportio altera: quidem omnia exemplo facile licebit intelligere. Si nummi 6. *numerus concretus*, diuidantur per nummos 2, *numerum* itidem *concretum*; quotus erit numerus abstractus 3; hic enim non indicabit numerum nummorum, sed exprimet, quoties diuisor continetur in diuidendo; erunt nempe 6 nummi ad 2 nummos, vt numerus abstractus 3 est ad vnitatem abstractum 1. Dici autem non posset, 6 nummi (*numerus* scilicet *diuidendus*, & *concretus*) sunt ad quotum 3 (*numerum abstractum*); vt nummi 2 (*numerus diuisor*, & *concretus*) ad 1 (*numerum abstractum*). Talis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem; cum enim numerus concretus, & numerus abstractus diuersi sint generis; nulla inter eos comparatio, & ratio proprie dicta institui potest.

Si diuisor sit numerus abstractus, vt in casu secundo, quotus est numerus concretus, & secunda valet proportio. Ita si diuidantur 6 nummi per numerum abstractum 3, quotus erit nummi 2, (numerus scilicet concretus); habebiturque haec proportio; numerus concretus, nempe 6 nummi, erit ad quotum, nummos 2; vt diuisor 3 ad 1. Id vero notandum est, in vtraque proportione vnitatem esse semper numerum abstractum. Quare diuisio sub duplici ratione considerari potest; vel enim quaeritur, quoties quantitas vna in altera eiusdem generis quantitate continetur, & hic est primus casus, vel quaeritur quantitas, quae certis vicibus in alia eiusdem generis quantitate contineatur, & hic est casus secundus. Facile autem patet ex demonstratis, quomodo numeri concreti per abstractos diuidantur, aut etiam concreti per concretos, etiamsi fuerint diuersae speciei. Etenim si concreti per abstractos diuidantur, initio sumpto ab iis, qui maiorem habent valorem, diuisio ex regulis praescriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. G. si residui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum diuisio de more fiat. Si concretos numeros diuersae speciei per concretos itidem diuersae speciei diuidi oporteat, iam numeri tum diuidendi, tum diuisoris ad minimam speciem deprimantur, quod per multiplicationem fieri manifestum est, atque diuisio fiat eodem modo, ac in numeris abstractis. Caeterum in multiplicatione, & diuisione quantitatum diuersae speciei varia adhiberi possunt operandi compendia, quae sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Diuisionis notionem ex genuinis principiis iam hausimus. In operationibus arithmeticis abstrahi solet á concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti, ad maiorem operationum facilitatem; verum ad formandam earumdem operationum ideam distinctam, necesse est, vt numeris sua deinde restituatur conueniens notio.

CAPVT III.

De quatuor praecedentibus operationibus in Arithmetica speciosa absoluendis.

PROBL. I.

Quantitates litterales addere.

I. QVantitatibus litteralibus praefiguntur signa, quorum significationem praemitti omnino necessum est. Signum additionis est $+$, signum autem subtractionis est $-$, aequalitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo $=$. Ita á $=$ a, a $+$ a $=$ 2a, a $-$ a $=$ o. Quantitas addenda dici solet quantitas *positiua*, quantitas autem subtrahenda vocatur *negatiua*. Si

Si quantitati litterali praefigatur numerus aliquis, hic *coefficiens* vocatur, ita in quantitate litterali 2a numerus 2 coefficiens appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum praefixum habeat, iam vnitas tamquam illius coefficiens censeri debet; ita a = 1a vt patet. Quantitates litterales dicuntur *similes*, si easdem contineant litteras, & eumdem earumdem litterarum numerum, etiamsi diuersis coefficientibus notentur, + 2a, & — 5a sunt quantitates similes; at *dissimiles* sunt quantitates a & b, atque etiam quantitates a & aa. Quantitas aliqua *ex pluribus terminis composita* dicitur, quae plures habet litteras signo + vel — connexas: Ita a + b constat ex duobus terminis & *binomium* dicitur; a + b + c ex tribus terminis, & *trinomium* vocatur. Quantitas ex vnico termino composita dicitur *quantitas simplex*, atque etiam *monomium*: ita a, ab, abc sunt quantitates simplices.

His praemissis definitionibus, quantitatum litteralium additio iam explicanda est. Si quantitates simplices fuerint, tota operationis ratio statim patet. Ita si a & a addi debeant, habebitur 2a; si addere oporteat a & 2a, summa erit 3a, & ita deinceps; satis nempe est in hoc casu addi coefficientes, & coefficientium summam quantitatibus litteralibus praefigi, eodem seruato signo + vel —, si quantitates eodem signo afficiantur. At si diuersa fuerint signa, iam coefficiens minor á maiori subtrahi debet & differentia cum maioris coefficientis signo scribenda.

Id quidem euidens est ex negatiuarum, & positiuarum quantitatum natura. Etenim quantitates positiuae quantitatibus negatiuis sunt directe contrariae. Quare si quantitates addendae simi-

les

les sint, signisque contrariis affectae, vel se omnino destruunt, vel aliqua ex parte tantum; nempe si quantitas vna sit altera maior, destruitur in maiori quantitate pars minori aequalis, & residuum est quantitatis vtriusque differentia, quae quidem differentia signo maiori quantitati praefixo affici debet. Ita euidens est, quantitates + 5df & — 3df reduci ad + 2df; nam + 5df est quantitas df quinquies sumpta, & — 3df est quantitas df ter subtracta; sed eadem quantitas quinquies sumpta, & ter subtracta reducitur ad quantitatem bis sumptam. Similiter + 5fm & — 6fm reducitur ad — 1fm, vel ad — fm. Nam — 6fm est quantitas fm sexies subtracta, & + 5fm est eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas fm semel subtrahitur, & remanet negatiua, seu fit — fm. Eadem ratione operandum est in aliis quantitatibus vtcumque compositis. Quantitates addendae ita disponuntur, vt similes termini sibi inuicem respondeant.

Exemplum.

$$
\begin{array}{r}
3ab - 5cs - 4dr + 2s \\
- ab + 4cs + 4dr - s \\
\hline
2ab - cs \quad * \quad + s
\end{array}
$$

Singulae partes seorsim considerantur, vt simplices, & additio fit, vt modo praescriptum est; summa autem infra lineolam scribitur. Sub terminis, qui sese mutuo destruunt, scribi solet stellula, vel zero. Tota operatio patet ex praesenti exemplo. Si quantitates aliquae fuerint dissimiles, eas signo + vel — connectendas esse euidens est. Ita si addi oporteat a & b, vel a & — b, scribendum est a + b, a — b.

PROBL.

PROBL. II.

Quantitates litterales subtrahere.

II. In subtractione considerantur quantitates singulae subtrahendae, tamquam si haberent signum ei, quod habent, contrarium, & fiat summa ex legibus iam praescriptis; nempe in quantitate subtrahenda mutetur signum $+$ in $-$, & $-$ in $+$, & additio de more fiat. Ita subtrahitur b ex a, scribendo $a - b$. Si $b - c$ ex $a + c$ subtrahi oporteat, scribitur $a + c - b + c = a - b + 2c$. Simili modo in quantitatibus vtcumque compositis operandum est.

Quantitas subtrahenda inferiori loco scribitur, alia autem ex qua subtractio fieri debet, supra apponitur, deinde mutatis signis, vt iam dictum est, tota quantitatum series scribitur, & postea reducitur, vt factum est in additione; habebitur quantitatum differentia infra lineolam scribenda.

Exemplum.

$$\begin{array}{l} ab + abb - dd \\ ab - bc + dd. \\ \hline ab + abb - dd - ab + bc - dd \\ = abb + bc - 2dd. \end{array}$$

Quod autem in quantitate subtrahenda signum $-$ mutetur in $+$, ratio facile patet. Si ex a subtrahi debeat $b - d$, scribaturque primo $a - b$, subtractio iusto maior est; subtrahenda enim non proponitur tota quantitas b, sed b mulctata quantitate d, quare iusto maior est subtractio, & excessus est ipsa quantitas d, quae proinde cum signo positiuo $+$ restitui debet, & scribendum est $a - b + d$. Id vero numerorum exemplo illustratur. Si ex nu-

numero 6 subtrahendus proponatur numerus 5 — 3, ex praescripta regula scribendum est 6 — 5 + 3, hoc est 4, reductione facta. Quod et idens est. Si enim scriberes 6 — 5 — 3; subtraheres 8 ex 6, quod quidem faciendum non proponitur; cum enim sit 5—3 = = 2, ex numero 6 subtrahi debet dumtaxat numerus 2. Caeterum patet, in calculo litterali non secus, ac in arithmetico additionem, & subtractionem sibi mutuam probationem praebere; ita vt operatio vna per alteram mutuo exploretur.

PROBL. III.

Quantitates litterales multiplicare.

III. SIgnum multiplicationes est X, quod tamen in multiplicatione facta per litteras omitti solet, & sola coniunctio litterarum sine signo multiplicationem significat. Sit a = = 2, b = = 10; erit ab = 2 X 10 = = 20. Si eadem quantitas per seipsam multiplicetur, apponitur post ipsum paulo supra numerus, qui exprimat, quoties scribenda esset. Ita aa = = a^2, aaa = a^3. Cauendum, ne confundatur a^2 cum 2a; sit a = = 5, erit a^2 = = 25, 2a = = 10; sit b = = 2, erit $(a + b)^2$ = = $\overline{a + b}^2$ = = 7 X 7 = = 49; parenthesis autem (), vel lineola — — producta designat, totam quantitatem a + b in seipsam multiplicari. Numerus supra positus est *index*, seu *exponens potentiae*, vt vocant, vel *potestatis*, seu *dignitatis* quantitatis ipsius, & ex-

exprimit, quot vicibus vnitas per illam quantitatem multiplicetur. Ita $1 \times a == a^1$; $1 \times a \times a == a^2$; $1 \times a \times a \times a == a^3$, cet.

In quantitatum compositarum multiplicatione, scribenda est altera quantitas sub altera, tum tota prima quantitas multiplicanda per vnum ex terminis secundae, scribendo productum in vna linea, deinde tota prima quantitas per aliam; & ita porro, scribendo singula producta in singulis lineis, ac notando similes terminos diuersorum huiusmodi productorum alios sub aliis; deinde omnium linearum colligenda summa. Omnium vero huiusmodi operationum patet ratio; multiplicatio enim fit per partes non secus, ac in quantitatibus simplicibus. Porro in multiplicatione quatuor operationis partes considerari debent, nempe signa, coefficientes, litterae, & exponentes; hinc quatuor praescribuntur regulae. 1. Si signa fuerint eadem, positiua scilicet, vel negatiua, productum fit positiuum: contra autem si fuerint diuersa, productum est negatiuum. Ita $+ \times + == +$; $+ \times - == -$; $- \times + == -$; & $- \times - == +$. 2. Coefficientes in se inuicem multiplicantur. 3. Litterae ordine alphabetico scribuntur, nullo interposito signo. 4. Si quantitas aliqua exponente afficiatur, eaque multiplicari debeat per eamdem litteram exponente itidem affectam, littera illa semel in producto scribenda est; ita vt tamen huius quantitatis exponens, aequalis fiat exponentium summae. Opera-ratio tota patet exemplo. Quantitas multiplicanda, superiori loco scribitur. Deinde multiplicatur per a, & producta singula infra lineolam scribuntur. Postea fit multiplicatio per — b, productaque infra apponuntur, & tandem productorum partes singulae, vt moris est, in summam colliguntur. Id vero, pro maiori additionis facilitate obseruandum est, vt scilicet similes productorum partes aliae sub aliis scribantur, & sibi inuicem respondeant, vt in additione praescripsimus. Quod spectat tres vltimas leges, hae satis patent ex antea demonstratis; verum quod attinet signorum doctrinam, in bono lumine collocari debet.

Exemplum.

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ac - bc \\ \quad\quad a - b \\ \hline a^3 + 2a^2c - abc \\ - a^2b - 2abc + b^2c \\ \hline a^3 - a^2b + 2ac^2 - 3abc + b^2c \end{array}$$

Signorum multiplicatio, quae tyronibus difficultatem afferre solet, ex ipsa quantitatum negatiuarum natura intelligi potest. Dum quantitas positiua + a multiplicatur per aliquem numerum positiuum + n, sensus est, quantitatem + a toties sumi, quoties vnitas continetur in n; atque proinde productum fit na. Si — a multiplicari debeat per + n, sensus est, — a quantitatem negatiuam toties sumi, quoties vnitas continetur in n, ideoque productum est — na. Simili modo si multiplicetur + a per — n, sensus est, quantitatem à toties subtrahi, quoties vnitas continetur in — n, ideoque productum est negatiuum, seu — na. Si — a multitiplicari oporteat per $-n$, sensus est, $-a$ toties subtrahendum esse, quoties vnitas est in $-n$, sed subtractio quantitatis negatiuae $-a$ aequiualet additioni $+a$; quare productum est $+na$. Nemo non videt; productum ex quantitate positiua in positiuam, fieri positiuum. Sed alii casus, hoc modo rursus illustrari possunt. Cum sit $+a-a==o$, si multiplicetur $+a-a$ per n, productum debet esse o. Iam vero primus producti terminus est $+na$, ergo terminus alter debet esse $-na$, qui destruat primum terminum $+na$, ita vt productum sit $+na-na==o$. Quare $-a \times +n==-na$. Simili modo, si multiplicetur $+a$, & $-a$ per $-n$, primus producti terminus est $-na$; quare terminus alter est $+na$; alioqui termini duo sese mutuo non destruerent, quod tamen fieri debet, cum sit $a-a==o$. Ergo $-a \times -n==+na$.

PROBL. IIII.

Quantitates litterales diuidere.

IIII. Signum diuisionis et lineola interposita, diuidendum separans a diuisore; ita $\frac{a}{b}$ designat, a diuidi per b; diuisio etiam designatur, interpositis binis punctis, hoc modo a : b. Verum his signis, vtendum est dumtaxat, si diuisio accurate fieri non possit; quod primum illustrabimus exemplo quantitatum, quae vnico constat termino. Si proponatur diuidenda quantititas a^2bc per a^2c, erit $\frac{a^2bc}{a^2c} = b$, ac proinde quotus erit b. Simili ratione $\frac{6a^2bc}{2a^2c} = 3b$. At $\frac{10a^2b}{6a^2c} = \frac{10b}{6c}$. In hoc sita est tota diuisionis operatio, vt ex diuidendo, & diuisore expunguntur litterae vtrique communes, reliquae autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coefficientibus afficiantur, euindens est, diuisionem institui debere non secus, ac in Arithmetica vulgari. Porro licet in diuidendo, & diuisore deleantur litterae communes; non tamen putandum est, quotum ex quantitate per se ipsam diuisa esse $= 0$; ita $\frac{abc}{abc}$ non est $= 0$; deleantur quidem litterae omnes, sed quantitati litterali praefixus semper intelligitur coefficiens 1;

sic $\frac{abc}{abc} = \frac{1abc}{1abc} = \frac{1}{1} = 1$. Et quidem

dum diuiditur abc per abc, quaeritur quoties abc continetur in abc. Sed quantitas quaelibet semel in seipsa continetur. Quare in hoc casu quotus est semper vnitas. Quod signorum leges spectat, eaedem omnino sunt, quae pro multiplicatione; nempe si + diuidatur per +, & — per —, quotus signo + afficitur; contra autem si diuidatur + per —, vel — per +, quotus afficicitur signo —. Tota explicatae operationis ratio euidens est ex ipsa diuisionis natura; cum enim productum ex diuisore in quotum, diuidendo aequale esse debeat; manifestum est, quotum ex diuisione quantitatis negatiuae per negatiuam, oportere esse positiuum. Ponamus enim, esse negatiuum, iam productum ex quoto negatiuo in diuisorem negatiuum, foret positiuum, ac proinde non rediret quantitas diuidenda, quae ponitur negatiua. Simili ratione demonstrantur aliae signorum leges.

Eodem plane modo operandum est in aliis diuisionibus vtcumque compositis. Ita si diuidi oporteat $9ab^2 - 15a^2 b + 6a^3$ per $- 3ab + 2a^2$. Singuli termini ita disponi debent, vt sumetur diuisionis initium ab illo termino, qui ad maximam euectus est potestatem, & ita per gradus progrediendo, vt hic factum vides.

Exemplum.

$$\begin{array}{l|l}
6a^3 - 15a^2b + 9ab^2 & 2a^2 - 3ab \\ \hline
6a^3 - 9a^2 b & 3a^1 - 3b \\ \hline
- 6a^2 b + 9ab^2 & \\
- 6a^2 b + 9ab^2 & \\ \hline
\quad * \qquad * & \\ \hline
\end{array}$$

Itaque diuidas $6a^3$ per $2a^2$: prodit quotus $3a^1$; per quem diuisor totus multiplicatur, productumque $6a^3 - 9a^2 b$ subtrahas ex diuidendo; residuum fit $- 6a^2 b$, cui addas $9ab^2$, & diuidere pergas, vt ante: quotus est $- 3b$; productumque ex hoc quoto, & diuisore $- 6a^2 b + 9ab^2$ ite-

iterum auferas ex diuidendo, nihilque remanet. Quare accurata est diuisio. Si autem peracta operatione aliquid supersit, ita vt diuisor, & reliqua pars diuidendi, nullas communes habeant quantitates, iam diuisio accurate fieri non potest, sed quoto inuento iungenda est fractio; de fractionibus autem, tractabitur in proximo capite.

Saepe contingit, diuisionem in infinitum continuari, et tunc quotus fit, vt vocant, *series infinita*. Exemplo sit vnitas diuidenda per $1 - a$. Operatio est huiusmodi.

1	quotus est
$1 - a$	$1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ cet.
$+ a$ $+ a - aa$	
$+ aa$ $+ aa - aaa$	
$+ aaa$ cet.	

Haec pauca exempla satis sint. Caeterum patet, multiplicationem, & diuisionem in quantitatibus litteralibus non secus, ac in numeris, sibi mutuam probationem conferre, ita vt multiplicatio per diuisionem, & vicecuersa diuisio per multiplicationem confirmetur.

Schol. In hoc capite frequens fit mentio de quantitatibus negatiuis, quarum genuinam notionem, paucis iterum explicare, non abs re erit. Si duae quantitates magnitudine aequales ad partes directe oppositas simul, et in eodem subiecto coniunctae intelligantur, sese mutuo destruunt, il-

illarumque effectus nihilo aequalis est. Ita si potentiae duae aequales, in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo, si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat, iam illi 100 nummi, si ad huius hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat, & 200 alteri debeat, iam possessio huius hominis negatiua est, & vt ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur; iam huius hominis iter tamquam negatiuum, & minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est, quid intelligatur per quantitatem negatiuam, & nihilo, vt dicunt, minorem. Quantitas negatiua non minus realis est, quam quantitas positiua; sed nihilo minor dicitur, quatenus positiuae quantitati opponitur; iuncta scilicet quantitati positiuae ipsam minuit, quem quidem effectum, hanc nempe diminutionem, ipsum *zero* non producit. Quare quantitas negatiua, ratione effectus tantum, & *relatiue*; non autem *absolute*, nihilo minor dicitur. Hunc loquendi modum à nonnullis vsurpatum ita explicauimus, vt nihil difficultatis tyronibus facessere possit.

CAPVT IIII.

De iisdem operationibus in numeris fractis.

I. NVmeri fracti definitionem, iam in primo Capite tradidimus. Si diuisor excedat diuidendum, duo numeri à se inuicem, interterposita lineola, separantur ita, vt diuidendus supra lineolam, & diuisor infra scribantur, in hunc modum $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ cet. Similiter: si quantitas aliqua litteralis, per aliam diuidenda proponatur, & diuisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duae quantitates: ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex a per b; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium, in quas totum aliquod diuisum fingitur; numerator autem designat, quot eiusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties vna ex illis partibus sumatur; ac proinde pars illa considerari potest tamquam vnitas aliqua. E. G. fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud, quam pars quarta alicuius totius ter sumpta; haec autem pars quarta, tamquam vnitas altera haberi etiam potest.

II. Ex fractionum natura intelligitur, qua ratione numerus integer ad fractum reducatur, atque etiam ad denominatorem datum. Ita si numerus 3 reducendus proponatur ad fractionem, cuius denominator sit 4; multiplicetur 3 per 4, scribaturque $\frac{12}{4}$, erit haec fractio aequiualens ternario, vt patet; cum numerus 3 multiplicetur, simulque diuidatur per 4. Sed tales fractiones, in quibus numerator maior est denominatore, pro veris fractionibus non habentur, atque *impropriae* dumtaxat ita appellantur. Pari ratio-

 ne,

ne, si quantitas a reduci debeat in fractionem litteralem, cuius denominator sit b; habebitur $\frac{ab}{b} = a$.

Ex his etiam patet, quomodo fractiones, quae diuersum habent denominatorem, ad eumdem redigantur. Sint fractiones duae $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$: multiplicetur fractio $\frac{a}{b}$ per d, simulque diuidatur per d, erit $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$. Simili modo multiplicetur fractio $\frac{c}{d}$ per b, simulque diuidatur, erit $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$. Itaque generatim fractiones ad eumdem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem vnius per denominatorem alterius, & viceuersa, scribendoque pro denominatore communi, productum ex vtroque denominatore. Euidens est, hanc operationem eamdem esse pro quolibet fractionum numero. Multiplicentur scilicet numeratores singuli, seorsim sumpti per denominatores singulos, proprio excepto denominatore; producta singula dabunt numeratores singulos quaesitos. Deinde denominatores singuli in seipsos ducuntur, habebitur denominator communis quaesitus: ita fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ reducuntur ad $\frac{acd}{bcd}$,

$\frac{bbd}{bcd}$, $\frac{ccb}{bcd}$. Patet, rem perinde se habere in numeris quibuslibet fractis; ita fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *respectiue* aequales sunt fractionibus $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$.

III. Hinc facile adduntur, et subtrahuntur fractiones; reducantur scilicet ad denominatorem communem, sumatur numeratorum summa, vel differentia, & subscribatur denominator communis. In illo casu habebitur additio, in hoc autem subtractio. Ita $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} = \frac{ade + bce + ddb}{bde}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$. Similiter, in numeris $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$: & $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$. Fractiones ex integris, & fractis compositae, qualis est $1\frac{5}{12}$, appellantur mixtae. Ex his autem statim intelligitur, quomodo numeri integri, & fracti simul addi possint, vel a se inuicem subtrahi. Integri ad fractos reducantur, & ad denominatorem communem, atque operatio fiat, vt ante. Quamuis autem additionis, & subtractionis operationes, ex dictis sint manifestae, demonstrari tamen possunt, hoc modo. Sint fractiones duae $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$ ad eumdem denominatorem reductae, erit $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{b} = n$; erit, facta multiplicatione per b. $a = mb$, $c = nb$, & $mb + nb = a + c$; ac proinde $m + n = \frac{a+c}{b}$, hoc est $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$. Simili modo patet, esse $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = m - n = \frac{a-c}{b}$.

IIII. Nulla reductione opus est, vbi fractiones multiplicare, & diuidere oportet. In multiplicatione, satis est numeratores, & denominatores inuicem ducere; habebitur numerator, & denominator fractionis quaesitae, quae erit productum ex datis fractionibus emergens. Contra vero, si fractio per aliam fractionem diuidenda sit, numerator diuiden-

dae

dae per alterius denominatorem est multiplicandus, & illius denominator in huius numeratorem ducendus est. Ita productum ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Quotus autem ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Etenim ponatur $\frac{a}{d} = m$; $\frac{c}{d} = n$; erit $c = dn$. Iam demonstrandum superest, esse $\frac{ac}{bd} = mn$, & $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$; quod quidem facile patet, substituendo loco a, & c illorum valores bm, & dn; erit enim in primo casu $\frac{bdmn}{bd} = mn$; in casu autem altero, fiat $\frac{bdm}{bdn} = \frac{m}{n}$. Demonstratio generalis est, ac proinde in numeris quibuslibet fractis, eadem est operatio. Sic productum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{4}{8} = \frac{8}{48}$. $\frac{3}{6}$: per $\frac{2}{16} = \frac{48}{12} = 4$. Manifesta quoque est operandi ratio, si numerus fractus per integrum multiplicari, aut diuidi debeat: considerari enim debet numerus integer tamquam fractio impropria, in qua denominator est vnitas, & reliqua peragenda, vt ante. Quare patet, in multiplicatione numerum integrum per numeratorem esse multiplicandum; contra autem in diuisione per denonominatorem. Nec mirum esse debet, si fractio per fractionem diuisa, praebeat numerum integrum; cum reuera vna fractio bis, ter, quater, cet. in alia contineri possit. Itaque fractionis valor per multiplicationem minuitur, augetur per diuisionem; quod quidem paradoxum videtur iis, qui multiplicationis, & diuisionis naturam non satis attendunt.

Ex dictis etiam facile patet, *fractiones fractionum* ad multiplicationem referri: *fractionem fractionis* appellant fractionis alicuius partem. Ita si sumantur $\frac{2}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, operatio illa ad diuisionem non pertinet, sed ad multiplicationem. Etenim si sumenda proponeretur dumtaxat pars $\frac{1}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, multiplicandus esset denominator per 3, habereturque $\frac{1}{12}$. At sumi non debet dumtaxat pars tertia, sed duae tertiae partes sumendae proponuntur, quare productum praecedens duplo maius fieri debet, hoc est, numerator multiplicandus est per 2. Eodem modo reduci debent aliae quotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores singulos, & singulos denominatores.

Ex fractionum doctrina, colligi possunt operationum arithmeticarum compendia plurima, si de quantitatibus variae speciei agatur. E.G. Quaeritur, quanti constiterint 35 mensurae mercis alicuius, si mensurae vnius pretium sit 24 nummorum & assium 15. Multiplicetur primo (35×24) erit productum 840. Quoad alteram multiplicationis partem; considerari

pot-

potest, esse 15 = = 10+-5. Iam si asses 10 nummo aequiualerent, productum foret 35. At sunt pars decima dumtaxat nummi vnius, quare 35 diuidi debet per 10. Simili modo operandum est in vltima multiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis, nummorumque partibus compositum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes autem aliquotae quantitatis alicuius appellantur, quae ipsam quantitatem accurate diuidunt; secus autem, partes *aliquantae* vocantur. Caeterum exercitatio, atque attentio multa docebunt, quae fusius explicare, superfluum esset.

V. Explicatis Arithmeticae operationibus in numeris fractis, iam superest, vt communes, si quos habeant, fractionum diuisores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem diuisorem praeter vnitatem, numeri illi inter se *primi* dicuntur, cuiusmodi sunt 1. 5. 7. 11. 19. quos sola vnitas metitur. At numeri *compositi* appellantur, quos praeter vnitatem, alii quoque numeri metiuntur; sic 12 componitur ex 2, & 6, itemque ex 3, & 4. Quare 2. 3. 4. 6. metiuntur 12, seu aliquoties sumpti, 12 adaequant; illi autem numeri dicuntur *factores* ipsius numeri 12. Si igitur fractionis alicuius denominator sit numerus compositus, & resolui possit in alterius fractionis denominatorem, instituta diuisione per numerum, qui sit etiam numeratoris diuisor communis; iam licebit fractionem hanc, ad minimos terminos deprimere, quod sic praestari potest. Diuidatur maior numerus per minorem; si nihil ex diuisione supersit, iam minor numerus, est maximus diuisor communis. Si autem residuum aliquod fuerit, diuisor datus per hoc residuum diuidatur; si diuisio accurate fiat, primum residuum

duum erit maximus diuisor communis. Si autem diuisio non sit accurata, sed alterum maneat residuum, per hoc secundum residuum diuidatur primum; si autem nullum supersit tertium residuum, iam residuum secundum, pro maximo diuisore communi haberi debet; atque ita progrediendum, donec nihil supersit, atque vltimus diuisor erit maxima, vt vocant, communis duorum numerorum mensura, qua inuenta, fractio ex his duobus numeris composita ad minimos terminos reducitur. Exemplo sit fractio $\frac{91}{294}$. Diuidatur 294 per 91, neglectoque quoto 3, residuum est 21. Rursus diuidatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto 4, residuum est. 7. Tandem residuum primum 21, per alterum 7 diuidatur; habetur quotus 3, & diuisio est accurata. Quare numerus 7, est maximus communis diuisor, per quem diuisis numerarore, & denominatore, fractio praecedens, in hanc simpliciorem abit $\frac{13}{42}$ $= \frac{91}{294}$. AEquales autem esse fractiones illas, ex natura diuisionis omnino patet. At, si diuisione instituta, ad vnitatem tandem, vltimum residuum, perueniatur; iam nulla est mensura communis, praeter vnitatem.

Eadem plane est operatio in quantitatibus litteralibus, in quibus tamen, nonnulla aduerti debent. Ordinatis, vt fieri solet, diuisoris, & diuidendi terminis, obseruandum est, an singuli termini diuisoris, & diuidendi possint diuidi per monomium aliquod commune: tunc enim, facta di-

diuisione, reponi debet diuisor ille, per quem deinde, facta operatione, multiplicabitur diuisor communis. Praeterea diuidi debet, si fieri possit, polynomium vtrumque per quantitates, quae pimum terminum accurate diuidunt: negligitur autem diuisor ille, nisi idem sit in duobus polynomiis. Tandem, si coefficiens primi termini in diuisore, non possit accurate diuidere primum terminum in diuidendo; ita multiplicari debet diuidendus per quantitatem hanc, vt accurata succedat diuisio: aut etiam, quod idem est, vt coefficiens simplicior fiat, quaeritur maximus communis diuisor vtriusque coefficientis, per quem diuisor ipse diuiditur, diuidendus autem per quotum diuisionis multiplicatur. Tota operationis ratio patet. Si enim multiplicetur, aut diuidatur polynomium altervtrum per quantitatem aliquam, quae accurate non diuidat polynomium alterum; euidens est, non mutari communem polynomiorum diuisorem. Sed res exemplo fiet magis manifesta. Sint polynomia duo

$(a^2 + bda + b^2 d - b^2 a - bd^2 - d^2 a)$

& $(a^3 + da^2 - b^2 a - b^2 d)$

Primum diuiditur per secundum, quotus 1 negligitur: residuum autem est

$$- da^2 + bda + 2b^2 d - d^2 a - bd^2$$

Quia vero singuli termini, sunt diuisibiles per d, fit diuisio; habeturque

$$- a^2 + ba + 2b^2 - da - bd$$

Per hanc quantitatem diuiditur primus diuisor, quotus sit $-a$; vt ante negligitur: & residuum

duum est $ba^2 + b^2 a - b^2 d - bda$; quod diuisum per b, fit $a^2 + ba - bd - da$; per quod residuum diuidatur vltimus diuisor, quotus est -1, & residuum $2ba + 2b^2 - 2da - 2bd$: quod diuiditur per $2b - 2d$, quotus est $a+b$, qui est vltimus diuisor sine vllo residuo ac proinde $a+b$, est maximus diuisor communis.

Tota operationis series facile demonstratur, paucis obseruatis. 1. Mensura quaelibet communis x quantitatum duarum a, & b metitur quoque illarum summam, vel differentiam $a \pm b$. Nam sit m quotus emergens ex diuisione a per x; & n quotus ex diuisione b per x; nempe $m = \frac{a}{x}$, & $n = \frac{b}{x}$; erit $a = mx$, & $b = nx$. Quare $a \pm b = mx \pm nx = (m \pm n)\,x$. 2. Si x sit mensura quantitatis alicuius, euidens est, eam fore mensuram eiusdem quantitatis vtcumque multiplae. 3. Si b contineatur in a, quoties vnitas continetur in m, sitque praeterea residuum aliquod c; quantitas quaelibet, quae metietur a, & b, metietur quoque residuum c. Nam (ex hyp.) $a = mb + c$; quare $a - mb = c$. Sed x metitur b, ergo metitur quoque mb eius multiplum: ac proinde metitur quoque $a - mb$; ideoque $c = a - mb$. Si residuum c contineatur in b, quoties n continet vnitatem; sitque praeterea aliud residuum d ita vt $b = nc + d$, & $b - nc = d$; x metietur etiam d. Nam (ex hyp.) x metitur b, atque etiam c (ex dem.), Ergo metitur etiam nc, & $b - nc = d$.

Qua-

Quare cum subtrahendo b ex a, quantum fieri potest, residuum c metiatur x; itemque subtrahendo c ex b, quantum fieri potest, residuum d metiatur x; & ita deinceps de quolibet residuo: quantitas x communis mensura ipsarum a, & b metietur residuum quodlibet; residuum vero vltimum, quod praecedens residuum metitur accurate, erit communis mensura ipsarum a, & b. Nam ponamus, residuum illud esse d, quod contineatur in c, quoties vnitas continetur in r: ergo c = rd. Praeterea a = mb + c, b = nc + d; sed d metitur c; quare metietur etiam nc; & nc + d = b. Quia vero metitur b & c, metietur etiam mb + c = a; ideoque erit mensura communis inter a, & b. Tandem erit maxima communis mensura; nam mensura quaelibet communis inter a, & b metitur aliam d (ex dem.): sed maxima mensura ipsius d, est ipsa quantitas d; ergo erit maxima communis mensura inter a, & b. Demonstrata ergo est vulgata maximi communis diuisoris regula.

VI. De fractionum communi diuisore, & numeris primis pauca addenda supersunt, quae deinde vtilitatis maximae futura sunt. 1. Si duo muneri a & b fuerint primi inter se, tertius autem nnmerus c metiatur primum a, hic erit primus respecto b. Nam si c, & b non essent numeri primi, haberent mensuram communem, quae cum metiatur c, foret quoque mensura ipsius a, quam metitur c. Quare a, & b haberent mensuram communem contra hypothesim. 2. Si duo numeri a, & b sint primi respectu c, productum ab erit quoque numerus primus respectu c. Nam productum ex duobus numeris

a

a & b nullos potest habere diuisores, nisi vel numeros ipsos a, & b, vel partes illorum aliquotas, vel altervtrius numeri multiplos. Sed numeri a, & b non possunt esse diuisores numeri c, cum respectu c sint numeri primi; ac proinde partes illorum aliquotae, diuisores esse non possunt. Tandem si c diuidi posset per numerum aliquem multiplum ipsius b, diuidi etiam posset per ipsum numerum b (contra hyp.). Quare si a, & b sint numeri primi respectu c, productum ab erit quoque numerus primus respectu c: pari ratione si a, & c sint numeri primi inter se, erit etiam a^2 numerus primus respectu c; nam ponatur a $=$ b, erit ab $= a^2$; ideoque a^2 erit numerus primus respectu c. Similiter c^2 erit numerus primus respectu a. 3. Si duo numeri a, & b sint primi respectu numerorum c, & d; producta ab, & cd erunt quoque numeri primi inter se. Nam ab est primus respectu c, & d; ergo cd erit primus respectu a^2. Quare etiam si a & c sint numeri primi, erit a numerus primus respectu c^2. Et generatim, productum ex numeris primis quibuscumque, diuisum per productum ex aliis quibuscumque numeris, itidem primis ad simpliciores terminos reduci non potest. Quare si $\frac{a}{b}$ sit fractio ad minimos terminos reducta; erunt quoque fra-

$\frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}, \frac{a^n}{b^n}$ fractiones ad simplicissimos terminos reductae; ac proinde fractio quaelibet siue pura, siue mixta ad potentiam quamliber euecta, semper manet fractio.

Schol. Praeter fractiones, in hoc Capite explicatas, considerari etiam debent fractiones, quae *decimales* appellantur. Illae scilicet fractiones pro denominatore habent vnitatem, cum tot sequentibus cyphris, quot sunt numeri in numeratore: atque eam ob causam non scribitur denominator, sed numerator dumtaxat, cuius numeris praefixa est virgula, alii punctum praefigunt, quod fit, vt numerator à numeris integris distinguatur. Ita ad exprimendum fractionem $19\frac{4}{10}$, scribi solet 19. 4. Ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{100}$, scribitur 19, 04; cyphra numero 4 praefixa indicat, denominatorem esse 100. Fractio $19\frac{4}{1000}$ ita exprimitur 19, 004. Ex fractionum decimalium significatione patet, primum numerum post virgulam designare decadas, secundum centenarios, & ita deinceps, per decadas semper progrediendo; sic $4, 217 = 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$. Fractionum decimalium vtilitas, maxima est ad obtinendum quotum pro-

proxime verum, si diuisio accurate fieri non possit. E. G. Si diuidendus proponatur numerus 147475 per 362, quotus inuenitur 407 cum residuo 141, cui addatur 0, diuidaturque 1410 per 362, quotus erit 3 cum nouo residuo 324, cui iterum addatur 0; diuidaturque 3240 per 362, quotus prodit 8 cum residuo 344, cui addatur 0; in noua tandem diuisione quotus emergit 9; quod autem remanet 182, iterum diuidi posset; sed operationis ordinem exhibuisse satis sit. Quare quotus est 407, 389, quem quidem accuratiorem esse, euidens est.

Eadem methodo fractio vulgaris, in fractionem decimalem reducitur. Si fractio $\frac{3}{4}$ in fractionem decimalem, reducenda proponatur, numeratori 3 addatur 0, diuidaturque 30 per 4, quotus est 7 cum residuo 2, cui addatur 0, rursusque 20 per 4 diuidatur, quotus est 5 sine vllo residuo; quare $\frac{3}{4} = 0,75$. Et re quidem ipsa, cum sit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit $\frac{3}{4}$ eiusdem numeri 100. Hinc generatim patet, quo artificio fractio vulgaris ad decimalem reduci possit; multiplicetur nempe numerator fractionis datae per 100, vel 1000, cet. productum illud diuisum per denominatorem erit numerator fractionis decimalis, cuius denominator est 100, vel 1000, cet. Saepe tamen contingit, fractiones ad decimales, accurate reduci non posse, etiamsi diuisionum residuis plures vtcumque cyphrae addantur. Id autem facile dignoscitur, si nempe ad idem residuum semper perueniamus, vel si iidem nume-

ri,

ri, eodem ordine redeant. Ita si fractionem $\frac{4}{7}$ ad decimalem reducere volueris, inuentes 0, 571428571428571428, cet. nec vmquam peruenies ad diuisionem accuratam. Pari modo ad reducendam fractionem $\frac{5}{12}$ in decimalem, inuenies 0, 416666, cet. In his autem casibus duas, vel tres primas decimales adhibere satis sit, reliquae autem negliguntur. Ita poni possunt $\frac{4}{12} = 0,57$, & $\frac{5}{7} = 0,416$.

Haec quidem pauca satis esse possunt iis, qui demonstrationis seueritatem non quaerunt; sed rem vtilissimam generatim, & omnino accurate ostendemus. Sit $\frac{p}{q}$ fractio vulgaris reducenda ad fractionem decimalem $\frac{r}{10^n}$ in qua n exprimit cyphrarum numerum, ponaturque r numerus integer, erit $r = \frac{p \times 10^n}{q}$. Sed est $10^n = 2^n, 5^n$; non potest autem $\frac{p \times 2^n \times 5^n}{q}$ abire in numerum integrum r, nisi q aequalis sit alicui potestati ipsius 2, vel 3, vel 2×5, vel tandem producto ex aliqua potestate ipsius 2 in aliquam potetestatem ipsius 5, quae tamen potestates sunt minores, quam n; ponitur enim, fractionem $\frac{p}{q}$ esse ad minimos terminos reductam, hoc est, p, &, q nullum habere diuisorem communem. In alio quolibet casu, fractio $\frac{p \times 10^n}{q}$ numquam fieri poterit numerus integer r. Attamen quo maior erit n, hoc est, quo plures erunt cyphrae in denominatore, eo magis fractio $\frac{1}{10^n}$ accedet ad fractionem $\frac{p}{q}$. Si enim $p \times 10^n$ per q diuidatur, inuentus r, qui minor erit; iusto maior fiet, si vnitate augeatur. Quare $\frac{1}{10^n}$ minor est, quam $\frac{p}{q}$, & $\frac{r+1}{10^n}$ maior.

Quatuor Arithmeticae operationes in fractionibus decimalibus, eadem omnino ratione, qua in numeris integris tractantur; sed habenda est maxime ratio virgulae, qua fractiones ab integris dirimuntur. Haec virgula in eadem linea verticali iacere debet, si plures quantitates vel in vnam summam colligendae sunt, vel ab inuicem subtrahendae. Si vero multiplicatio instituitur, eum locum in producto occupare debet virgula, vt totidem post se notas relinquat, quot erant

in

in vtraque fractione. Tandem si diuisio peragitur, diuidendi numeri decimales notae probe obseruandae sunt; nam in quoto, & diuisore simul, totidem esse debent post virgulam notae, quot erant in diuidendo. Quatuor illarum operationum exempla exhibebimus.

Additio.

```
 23, 304
  3, 6567
149, 86
---------
178, 8207
```

Multiplicatio.

```
 12, 35
  4, 2
---------
  24 70
 494 0
---------
 51,8 70
```

Subtractio.

```
49, 638
17, 16
---------
32, 478
```

Diuisio.

```
3, 22) 8, 445 (2, 6
       644
       -----
       2005
       1932
       -----
       0073
```

Vnum autem in diuisione notandnm est. Si nempe in diuisore plures occurrant notae decimales, quam in diuidendo, tunc decimalibus diuidendi adiunges, quot volueris cyphras; ita vt tamen, notae decimales in diuidendo plures sint, quam in diuisore, vt nempe in quoto, aliquae decimales notae haberi possint. Tota operationum illarum ratio, statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplo diuisionis praecedentis $8,445 = \frac{8445}{1000}$ per $3,22 = \frac{322}{100}$. Itaque diuidi debet fractio prior per

UNIVERSIDAD DE GRANADA Hospital Real

secundam; euidens autem est, cyphram vnam dumtaxat in quoto adesse, & hinc facile intelligitur, cyphrarum numerum in quoto esse semper aequalem cyphrarum in diuisore, & diuidendo differentiae. Generatim, quod multiplicationem spectat, si 10^n sit denominator fractionis vnius decimalis, & 10^m alterius; denominator producti erit $10^{m \dagger n}$. Quare, omisso denominatore, productum habere debet tot partes decimales, seu numeros post virgulam, quot sunt vnitates in m † n. Contraria ratione in diuisione denominator non erit 10^{m+n}, sed 10^{m-n}; ideoque m-n exprimit numerum cyphrarum, quae post virgulam, in quoto scribi debent.

CAPVT V.

De radicum extractione.

I. EXplicauimus iam in Capite 2^o quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicuius *potestas prima*, vel *primi gradus*, est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius a, est a. Productum ex quantitate aliqua in seipsam, dicitur *potestas secunda*, vel etiam *quadratum*, ita a^2 est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix*, quae vocatur *quadrata*, si potestas sit secunda, vel quadratum. Si quadratum in ipsam quantitatem ducatur, productum dicitur *potestas tertia*, vel *cubus*;

bus ; ita a^3 est cubus ipsius a ; quantitas autem, dicitur *radix cubica*. Et generatim, si quantitas euehatur ad potestatem, cuius index est n, habebitur potestas gradus n. In hoc autem Capite praesertim considerabimus radicum quadratae, & cubicae extractionem ; quod vt clare fiat, ipsam quadrati, & cubi formationem primum inuestigabimus, atque deinde ad operationes arithmeticas, recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis $a + b$ ad quadratum euehenda, prodit $aa + 2\,ab + bb$. Iam vero quadrati huius formationem, seu partes singulas expendamus. Quadratum binomii $a + b$ continet 1°. Quadratum aa primae partis a. 2°. Productum $2ab$, ex duplo primae partis, in secundam. 3°. Quadratum partis secundae, nempe bb. Simili modo si multiplicetur $a + b + c$ per $a + b + c$, orietur quadratum $a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$. In hoc quadrato, rursus considerandae sunt partes singulae; continet 1°. Quadratum $a^2 + 2ab + b^2$ ex duobus primis terminis $a + b$. 2°. Productum ex duplo duorum priorum terminorum in tertium terminum $= \overline{2a + 2b} \times c$. Tandem continet quadratum c^2 tertii termini. Simili modo progredi licet, pro alia qualibet quantitate ex pluribus, quam tribus terminis, composita; tales vero quantitates magis compositae appellari solent *polynomia*.

Eadem omnino ratione intelligitur cubi formatio. Binomium $a + b$ ad III potestatem euehatur, multiplicetur nempe quadratum $a^2 + 2ab + b$ per $a + b$, prodit cubus $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$. Cubi huius partes singulae sunt 1^o. Cubus primi termini, nempe a^3. 2^o. Productum ex quadrato a^2 primi termini, in triplum terminum secundum, scilicet $3a^2 b$. 3^o. Productum ex primo termino a, in triplum quadratum secundi termini, nempe $3ab^2$. 4^o. Cubus secundi termini, scilicet b^3.

Simili modo operandum est, pro trinomio $a + b + c$; inuenieturque cubus $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2 c + 6abc + 3b^2 c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. In hoc autem cubo praeter cubum $a^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + b^3$ duor. primor. terminor., habetur 1^o. factum ex quadrato summae duorum primorum terminorum in tertium terminum c ter sumptum, nempe $3a^2 c + 6abc + 3b^2 c = \overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3 \times c$. 2^o. Tripla summa duorum primorum terminorum per tertii termini quadratum multiplicata, scilicet $3ac^2 + 3bc^2 = \overline{a + b} \times 3c^2$. 3^o. Tandem tertii termini cubus, nempe ccc.

II. Ex potestatum compositione facile colligitur illarum resolutio, siue radicum extractio.

ctio. Sit quantitas litteralis $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, ex qua extrahenda sit radix quadrata. Sumatur primi termini radix quadrata x, cuius quadrato subtracto, remanent termini duo $- ax + \frac{1}{4} a^2$. Deinde sumatur duplum ipsius x, per quod diuidatur secundus terminus $- ax$, quotus fit $- \frac{1}{2} a$, qui multiplicetur per ax. Tandem fiat quadratum quoti $- \frac{1}{2} a$, atque producta illa ex residuo $- ax + \frac{1}{4} a^2$ subtrahantur, nihil remanet. Quare radix quadrata est $x - \frac{1}{2} a$. Tota operatio patet ex num praecedenti.

Caeterum, si radix plures habuerit quam duos terminos, iam duo primi termini post primam operationem, velvt vnicus terminus considerari debent, & reliqua peragenda, vt ante, quod quidem patet ex demonstratis.

Proponatur extrahenda radix cubica, ex quantitate litterali $c^3 - 3c^2 y + 3cy^2 - y^3$. Ex primo termino extrahatur radix cubica, quae est c, cuius cubus c^3 auferatur: remanent termini $- 3c^2 y + 3cy^2 - y^3$. Iam quia notum est, secundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, sumatur termini c triplum quadratum, per quod diuidatur secundus terminus $- 3c^2 y$, prodit quotus $- y$, qui erit se-

secunda pars radicis. Quia vero cubus quilibet, continet cubum ex duobus primis terminis radicis, sumatur cubus terminorum c — y, deinde a reliquis terminis auferatur, quo facto nihil remanet; ac proinde radix accurata est c — y.

III. Ex demonstrationibus praecedentibus, facile patet radicum extractio, in quantitatibus numericis

Extrahenda sit radix quadrata, vt in praesenti exemplo. Numerum datum in clases diuide, quarum singulae duas notas contineant, initio a postremis facto; nihil autem refert, siue vnica tantum nota constet prima classis, siue notis duabus. Quaere radicem veram, aut proxime veram numeri 38, quae in nostro casu est 6. Scribe 6 loco radicis, & eius quadratum 36 aufer et 38. Residuo 2 adiunge notas classis proxime sequentis 94, & huius noui numeri postrema nota neglecta, quaere quoties duplum radicis hactenus inuentae, siue 12, contineatur in 29, inuenietur 2; scribe ergo 2 in radice, & ex 294 aufer productum ex 2 in 122 nempe 244, remanet 50; huic autem residuo adnecte natas classis proxime sequen-

Exempl.

38. 94. 89. (624, 90
36
———
294
122
244
———
5089
1244
4976
———
11300
12480
0
———
1130000
124809
1123281
———
6719. cet.

quentis 89. Rursus, contempta noui numeri postrema nota, quaere quoties duplum radicis hactenus inuentae, scilicet 124, contineatur in 508, quotus erit 4, iterumque ex numero superiori aufer productum ex 1244 in 4, nempe 4976, residuum est 113. Quare radix proxime vera numeri propositi est 624; numerus autem ille foret perfecte quadratus, si numero 113 minueretur. Quamuis autem radix quadrata non sit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope, pro arbitrio licet accedere. Residuo 113 addantur cyphrae duae, vt hic factum vides; vt habeatur numerus 624 tamquam prima pars radicis, cuius duplum sumatur, nempe 1248; diuidaturque 1130 per 1248, quotus est 0, quare scribe 0 in radice, & multiplica 12480 per 0, productumque 0 aufer ex 11300, remanent 11300. Huic residuo iterum addantur cyphrae duae, sumaturque duplum radicis, nempe 12480, per quod diuidatur 1130000, scribaturque quotus 9 in radice, per quam multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, residuum fit 6719. Operatio rursus continuari posset; sed satis patet methodus, cuius ope radicem proxime veram obtinere licet, & ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifesta est, ex fractionum decimalium natura.

In huius operationis serie, idem notare oportet, quod in diuisione obseruatum est, nempe si post adiectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis, duplum radicis inuentae non contineatur in numero, qui per illud diuidendus est; postrema huius diuidendi nota neglecta, cyphra scribenda est in radice, & classis proximae

no-

notis duabus demissis, operatio continuanda. Euidens autem est, hanc operationem esse diuisioni similimam, in qua radix sit quotus, diuisor vero sit duplum radicis postremo inuentae auctum nota, quae deinceps inuestigatur. Hoc vnum interest, quod in diuisione diuisor semper est idem, hic autem semper augetur; in diuisione totus diuisor cognoscitur, hic autem ignota est noui diuisoris nota, quae inquiritur; atque id in causa est, cur in hac diuisione instituenda postrema diuidendae quantitatis nota praetereatur. Si contigeret, diuisorem esse maiorem: V. G. in praesenti exemplo, si productum est 2 in 122 subtrahi non posset ex 294, iam in radice scribendus esset numerus proxime minor, & tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro, id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Vnum tandem superest notandum, cur nempe post duplum radicis inuentae scribatur radix noua, & deinde numerus totus per radicem nouam multiplicetur. Ita in praesenti exemplo post duplum primae radicis 12 scribitur 2., totusque numerus 122 multiplicatur per nouam radicem 2. Operationis ratio manifesta est; cum enim numerus o in radice duas exprimat decadas, huius numeri quadratum versus sinistram promoueri debet, vt patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radicis cubicae extractionem iam veniendum est. Pro radice cubica methodus est admodum similis; & iisdem innititur principiis. Ex-

Exempl.

5. 305. 472. (174, 4
1

4305
300

2100
1470
343

3913

392472
86700

346800
8160
64

355024

37448000.

Extrahenda sit radix cubica, vt in praesenti exemplo. Diuiso numero in classes, per ternas notas, incipiendo a postremis notis; prima classis, quae poterat continere vel tres notas, vel duas, in hoc casu vnicam continet. Quaeratur radix cubica numeri 5 proxime minor, quae est 1. Huius cubus 1 subtrahatur a prima classe 5, residuum est 4, cui adnectatur classis sequens, vt hic factum vides. Deinde ita dicendum, prima pars radicis 1 pro decade haberi debet, si conferatur cum secunda parte. Sumatur itaque numeri 10 quadratum 100, & per illius triplum 300 diuidatur 4305, inuenietur quotus 7, quilibet enim alius foret iusto maior, si 7 excederet, vt patet operationem experiendo. Iam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100. Dic praeterea $7 \times 7 = 49$, & $49 \times 10 = 490$, postea $490 \times 3 = 1470$, quod scribe infra 2100. Tandem $7 \times 7 \times 7 = 343$, quod scribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470, & 343, & summa 3913 auferatur ex numero 4305; residuum est 392. Demittatur classis tertia 472, & duae primae partes radicis,

vel-

velvt pars vna, considerentur. Haec autem pars, quae est 17, aequiualet 170, si conferatur cum tertia parte quaesita. Sumatur huius numeri 170 triplum quadratum 86700, per quod diuidatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus 4, quem scribe in radice; multiplicetur diuisor 86700 per 4, productum fit 346800, quod infra scribitur. Dicas deinde $4 \times 4 == 16$; $16 \times 170 \times 3 == 8160$, quod productum scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4, nempe 64. Addantur tres illae quantitates; quarum summa 355024 ex reliqua cubi parte subtrahatur, residuum fit 37448. Quare numerus propositus, non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere, si residuo addantur tres cyphrae, vt in praesenti exemplo factum est; & eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inuenta; illud autem obseruandum est diligenter, inuentas radicis partes velvt partem vnicam tractandas esse, si pars alia inuestigari debeat.

In extractione radicis quadratae, & cubicae, diximus, tot esse radicis partes, quot sunt diuersae numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quaelibet ex duobus constans numeris vnicam dumtaxat in radice partem habere potest. Consideretur numerus 99 omnium, qui duabus constent notis, maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10 consideremus; quadratum erit 100, quod numero 99 maius est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima, quae tres habeat notas, est 100, cuius radix quadrata est 10, quae

pro-

proinde duas continet notas; ac quantitas omnium maxima, quae tres habeat notas est 999, cuius radix tres notas habere non potest; nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cuius quadratum fit 10000, quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione, ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo facile intelligitur, praescripta numerorum diuisio, in extrahenda radice quadrata: & huic numerorum diuisioni, partium numerum in radice respondere, euidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Euidens est, extractionem radicum, simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore, & ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione operationis ritae peractae facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, haec in se ipsam ducatur, productoque addatur residuum, si aliquod fuerit facta operatione, & restitui debet ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum euehatur; id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natu a.

IIII. Saepe ab extrahenda radice supersedemus, vbi veram inuenire non licet, & quantitati propositae praefigitur signum $\sqrt{}$ quod *radicale* appellant. Sic $\sqrt{3}$ significat radicem quadratam numeri 3. $\sqrt[3]{10}$ denotat radicem cubicam denarii; & hi sunt numeri, quos Arithmetici vocant numeros *surdos*, siue *irrationales*, aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus littereli-bus idem signum praefigitur, ita $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$ significant radicem quadratam ipsius ab, & ra-

di-

dicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix secunda, vel quadrata exprimi solet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$, ita $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{m}}$ significant radicem quadratam, cubicam, & radicem quamlibet indeterminatam m. Vt autem clara talium expressionum notio habeatur, meminisse oportet, quae antea de exponentibus breuiter dicta sunt. Ponamus $a = bb$ erit $a^{\frac{1}{2}} = (bb)^{\frac{1}{2}}$. Praeterea in quantitate $(bb)^3$ exponens 3 indicat, quantitatem bb ter scribendam esse, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur eadem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$ exponens $\frac{1}{2}$ designat, litteram b dimidio minus sumendam esse, quam in bb; ac proinde semel tantum, quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Idem patet de aliis quibuscumque exponentibus. Res autem tota magis illustrabitur, explicatis quatuor Arithmeticae operationibus in quantitatibus surdis.

Quantitates surdae adduntur, vel subtrahuntur facillime, si eiusdem sint exponentis, & eamdem habeant sub signo radicali quantitatem. Si

Si autem res non ita se habeat, saepissime contingit, quantitates surdas eiusdem ordinis, ad eamdem quantitatem sub signo radicali posse reuocari. Ita si addi, vel subtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, & $b\sqrt{75a}$, prima per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, altera autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in 1° casu, habebitur $9b\sqrt{3a}$; in altero autem $b\sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo consistit, vt numeri sub signo radicali positi, quaerantur diuisores, inter quos ille eligatur, si quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere, eiusdem ordinis, cuius est surda quantitas. Si aliquem eiusmodi diuisorem inuenias, eius radicem praefige signo radicali, quo includatur tantummodo alter dati numeri coefficiens. Si autem nullus talis diuisor inueniri possit, iam quantitates radicales in additione signo + connectendae, in subtractione autem signo — separandae.

Denum multiplicantur, & diuiduntur quantitates irrationales non secus, ac rationales, & producto, vel quoto idem, quod prius erat, signum radicale praefigitur, quod quidem in vtraque quantitate sit eiusdem ordinis. Ita si multiplicari debeat $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita si diuidi debeat $ac\sqrt{(bc)}$ per $a\sqrt{b}$, quotus erit $\dfrac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}$.

Patet autem, in multiplicatione delendum esse signum radicale, si aequales fuerint quantitates signo no nclusae: sic $\sqrt{(a^3 c)} \times \sqrt{(a^3 c)} = a^3 c$.

Quoniam saepe contingit, quantitates radicales ad eumdem exponentem reducendas esse, obseruandum est, id facile praestari posse ex hactenus demonstratis. Ita quantitates duae radicales $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}$, & $\sqrt[m]{\left(\frac{c}{d}\right)}$ mutantur in $\sqrt[nm]{\left(\frac{a^m}{b^m}\right)}$ & $\sqrt[nm]{\left(\frac{c^n}{d^n}\right)}$ quod patet; nam quantitates illae ad potestates n, m, respectiue euehuntur, & simul deprimuntur. Probe autem notandum est discrimen, inter quantitatum multiplicationem, illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeant a^3 per a^2, productum fit $a^{3+2} = a^5$. Si autem quantitas a^3 ad secundam potestatem euehi debeat, habetur $a^{3\times2} = a^6$; & generatim quantitas a^m ad potestatem n euecta, fit a^{mn}. Quare multiplicatio, fit per *indicis* additionem, potestas autem per multiplicationem. Contraria ratione, diuisio fit per *exponentis* subtractionem, & radicis extractio, per exponentis diuisionem. Ita $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2}$. At si ex a^6 extrahenda sit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$.

&

& generatim, pro diuisione $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; at pro radicis n extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. Si quantitatessint simplices, breuius per exponentes, quam per signum radicale, exprimuntur.

V. Quantitates irrationales, siue incommensurabiles, saepe in hoc Capite nominauimus; reuera autem, tales dari quantitates, euidens est ex Capite praecedenti, in quo demonstrauimus, fractionem siue puram, siue mixtam in fractionem semper abire, etiamsi ad potestatem quamlibet euehatur. Ergo numerus integer, cuius radix quadrata, cubica, cet. non est numerus integer, nullam fractionem, nequidem mixtam pro radice habere potest, ac proinde huius numeri radix, est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles, non sunt numeri proprie dicti. Et re quidem ipsa, cum per numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quantitatis cuiusuis, ad aliam eiusdem generis quantitatem; in omni ratione, vel numero existere necessum est partem aliquotam, quae sit vtrique quantitati communis; at quantitates inter se incommensurabiles, tali carent mensura; ita $\sqrt{2}$, non est numerus proprie dictus, quia talis quantitas proprie non existit, eaque inueniri non potest. Imo fractiones, proprie non dicuntur numeri, nisi quatenus ad numeros integros reuocantur. Et quidem fractio $\frac{3}{4}$, quae exprimit quartam partem totius alicuius ter sumplam, ipsa ad numeros in-

integros refertur ; haec enim quarta pars , velvt alia vnitas consideratur , vt antea obseruauimus. Rem arithmetico exemplo illustrabimus. Si ex numero 7, extrahenda proponatur radix quadrata , haec inuenitur minor quam 3 ; cum $3 \times 3 = = 9$, & maior quam 2 , cum sit $2 \times 2 = = 4$. Igitur radix quadrata numeri 7 , continetur intra limites 2 & 3; ac proinde si posset determinari , ea foret aequalis numero 2 , & alicui numero fracto , sed fieri non potest , vt fractio mixta per se ipsam multiplicata , producat numerum integrum , vt antea demonstrauimus. Ergo numerus 7 , pro radice habere non potest neque numerum integrum , neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro, cuius radix non est numerus integer.

Schol. Secundae dumtaxat , & tertiae potestatis compositionem , ac resolutionem in praesenti Capite explicauimus ; at rem generatim , & breuiter, quantum licet , pro alia qualibet dignitate considerabimus. Ex hactenus explicatis manifestum est , eodem modo formari , altiores cuiuslibet gradus potestates. Ita ad formandam quarti gradus potestatem , multiplicari debet cubus per suam radicem, & sic deinceps. Iam in singulis terminis exponentes, & coefficientes diligenter obseruemus. In potestatis cuiuslibet compositione , primus terminus a binomii cuiuslibet $a + b$, euehitur ad potestatem quaesitam, V. G. a^2 si potestas secunda fuerit. In aliis sequentibus terminis , exponens quantitatis a per vnitatem decrescit , & in vltimo termino euanescit. Ita in secunda potestate habetur $2ab + b^2$. Contra autem potestas termini b , in primo termino non re-

reperitur, sed in 2^o. termino illius exponens est vnitas, in 3^o. termino 2, & ita crescit per gradus, donec in vltimo termino exponenti potestatis quaesitae aequalis fiat. Quare iisdem gradibus, quibus decrescunt exponentes ipsius a, crescunt exponentes quantitatis b, atque in vtraque quantitate exponentium summa semper eadem est, & potestatis quaesitae exponenti aequalis; quod quidem in potestate qualibet experiri licet. Ita potestas 6 binomii $a + b$, inuenitur $a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$; in qua obseruare est, exponentes quantitatis a decrescere secundum seriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine crescere exponentes quantitatis b, nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; summaque exponentium in vtroque termino est semper 6. Iam superest, vt singulorum terminorum coefficientes obseruemus. Diuidatur coefficiens praecedentis termini per exponentem ipsius b in termino dato, & quotum multiplica per exponentem ipsius a in eodem termino auctum vnitate. Ita in praecedenti exemplo, vbi termini sunt a^6, $a^5 b$, $a^4 b^2$, $a^3 b^3$, $a^2 b^4$, ab^5, b^6, coefficiens primi termini est vnitas, coefficiens secundi est $\frac{1}{1} \times \overline{5+1}$ $= 6$, tertii termini coefficiens $\frac{6}{2} \times \overline{4+1}$ $= 3 \times 5 = 15$, coefficiens termini quarti est

est $\frac{15}{3} \times \overline{3-1} = 5 \times 4 = 20$. Et simili modo inuenientur coefficientes alii 15, 6, 1.

Ex hac constanti exponentium, & coefficientium serie, generatim exhiberi potest binomium $a + b$ ad potestatem quamlibet m euectum. Ita terminorum series se habebit, non consideratis coefficientibus, a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$, quae series continuari debet, donec exponens quantitatis b euadat m. Coefficientes autem ex praecedenti regula hoc ordine progredientur 1, m, $m \times \frac{m-1}{2}$, $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$, $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ & ita deinceps. Quare haec habetur generalis formula $\overline{(a+b)}^m = a^m + ma^{m-1}b + m \times \frac{m-1}{2} \times a^{m-2}b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^{m-3}b^3$; cet. Simili modo inuenitur formula pro binomio $\overline{a - b}^m$, hoc solum obseruato discrimine, quod terminus debeat esse negatiuus, si exponens quantitatis b sit numerus impar. Ita in cubo $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ secundus, & quartus termini sunt negatiui; ratio autem est euidens, cum negatiua existente quantitate, multiplicationum numerus impar, productum efficere debeat negatiuum. Formula, eadem omnino ratione componi posset pro trinomio $a +$

b

$b + c$, ponendo $a + b = n$, & ita deinceps pro polynomio quolibet. Praecedens formula, quae potestatum compositionem exhibet, earum quoque resolutionem repraesentare potest. Ita radix quadrata binomii $a + b$ nihil est aliud, quam potestas binomii $a + b$, cuius exponens $\frac{1}{2}$. Quare ponatur in formula praecedenti $m = \frac{1}{2}$, habebiturque $\overline{a + b}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times a^{\frac{1}{2} - 1} b + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 1) \times \frac{a^{\frac{1}{2} - 2} b^{2}}{2}$, cet. Si quantitas ex pluribus, quam duobus, constet terminis: E. G. si extrahenda sit radix quadrata ex quantitate $1 + 2c + 2^{c}$. Fiat $a = 2c + c^{2}$. Eadem adhibita formula, factisque debitis reductionibus per vulgares Algebrae regulas, inuenitur radix $1 + c$, vt oportet. Si autem quantitas proposita nullam habeat radicem accuratam, huius formulae ope ad radicem proxime veram licet accedere. Exempla duo breuiter proponemus. Sit $aa + b$ quadratum imperfectum, ex quo extrahenda sit radix quadrata, habebitur $(aa + b)^{\frac{1}{2}} = (aa)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times (aa)^{\frac{1}{2} - 1} b \times \frac{1}{2} \times \frac{(\frac{1}{2} - 1) \times (aa)^{\frac{1}{2} - 2} b^{2}}{2}$

 cet.

cet. $X\ a\ X\ \frac{b}{2a} - \frac{b2}{8a3}$ cet. Simili modo si ex cubo imperfecto (a^3 X b) extrahenda sit radix cubica, erit $(a^3\ X\ b)^{\frac{1}{3}}\ X\ a\ X\ \frac{b}{3a^3} - \frac{b^2}{6a^5}$ cet. Itaque ad radicem proxime veram accedere possumus per series infinitas, dummodo series illae sint *conuergentes*, hoc est, si termini perpetuo decrescant. Sit n ordo, quem terminus aliquis in praecedenti serie occupat, terminus ille inuenietur esse ad terminum proxime sequentem, vt 1 ad $\frac{b}{a}\ X\ \frac{m - n + 1}{n}$; ac proinde vt series sit conuergens, oportet b (X m-n + 1) esse semper minorem, quam na. Ita in exemplo proposito, ad habendam radicem quadratam proxime accuratam, terminus b X $(\frac{1}{2} - n + 1)$ positiue sumptus minor esse debet, quam naa, existente n numero integro. Simili modo ad habendam radicem cubicam quam proxime in exemplo praecedenti, oportet terminum b X $(\frac{1}{3} - n\ X\ 1)$ positiue sumptum semper minorem esse, quam na^3, quod quidem diligenter obseruandum est in praecedentis formulae vsu.

CA-

CAPVT VI.

De Proportionibus.

I. IN memoriam reuocanda est explicata cap. 10. rationis, & proportionis definitio. *Ratio* dicitur ea duarum quantitatum *habitudo* qua ad se inuicem referuntur; *geometrica* dicitur, si in ea relatione consideremus, quomodo quantitas vna alteram contineat; *arithmetica* vocatur, si excessum tantummodo vnius supra aliam spectemus. In omni ratione quantitas, quae ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, ea vero ad quam refertur, *consequens* appellatur. Ratio *geometrica* dicitur *dupla*, *tripla*, *decupla*, cet. si antecedens bis, ter, decies, cet. consequentem continet; contra vero *subdupla*, *subtripla*, *subdecupla*, cet. si bis, ter, decies, cet. antecedens in consequenti continetur. *Exponens* rationis geometricae dicitur quotus ex antecedenti per consequentem diuiso; exponens vero rationis arithmeticae est differentia consequentis ab antecedenti. Hinc ratio geometrica ad instar fractionis scribitur, arithmetica ad instar subtractionis. Duarum rationum aequalitas *proportio* dicitur, *geometrica* vel *arithmetica* pro rationum ipsarum qualitate. Igitur in omni proportione quatuor quantitates esse debent, & *prima ad secundam esse* dicitur, *vt tertia ad quartam*. Si vero eadem quantitas bis assumatur, ita vt primae rationis consequens idem sit cum antecedente secundae, proportio dicitur *continua*. Ita exprimi solet proportio geometrica a. b : : c. d,

vel

vel $a : b = c : d$, vel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; arithmetica vero $a - b = c - d$.

II. Si inter duas primas quantitates eadem sit differentia, quae inter duas vltimas, iam quantitates illae sunt *arithmetice proportionales*, vt patet ex praecedenti definitione; quare arithmetice proportionales sunt numeri 3, 7, 12, 16; atque etiam quantitates a, $a + b$, e, $e + b$. Si autem talis proportio continuetur, ita vt quantitates per eamdem constantem differentiam perpetuo crescant, vel decrescant, iam habetur series, vel *progressio arithmetica*, qualis est ita a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, cet. vel haec alia x, $x - b$, $x - 2b$, cet. aut etiam in numeris 1, 2, 3, 4, 5, cet. & 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8, cet. Ex ipsa proportionis arithmeticae natura euidens est, summam extremorum terminorum aequalem esse summae mediorum. Ita in proportione arithmetica $a - (a + b) = e - (e + b)$ manifestum est, summam extremorum $a + e + b$, aequalem esse summae mediorum $a + b + e$. Hinc datis tribus quantitatibus, facile inuenietur quarta arithmetice proportionalis: addantur scilicet secunda, & tertia, atque ex summa auferatur prima, differentia erit quartus terminus arithmetice proportionalis, vt patet.

Inde etiam colligitur, in progressione qualibet arithmetica, summam duorum extremorum aequalem esse summae duorum quorumlibet terminorum ab extremis aeque distantium. Sint priores termini a, $a + b$, $a + 2b$, cet. sitque vltimus terminus x, erit penultimus $x - b$, ante-

pe-

penultimus $x - 2b$, cet. Iam comparentur inter se termini, qui ab extremis aeque distant in hunc modum.

$$\begin{array}{l} a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ \text{cet.} \\ x,\ x-b,\ x-2b,\ x-3b,\ x-4b,\ \text{cet.} \\ \hline a+x,\ a+x,\ a+x,\ a+x,\ \text{cet.} \end{array}$$

Si nempe singuli termini correspondentes, et qui ab extremis aequaliter distant, sibi inuicem addantur, habebitur semper $a+x$, hoc est, summa primi termini a, & vltimi x, atque hinc etiam euidens est, summam omnium terminorum in progressione arithmetica aequalem esse producto ex summa primi, & vltimi in dimidium terminorum numerum. Ita si numerus terminorum dicatur n, erit omnium summa $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$.

IIII. Cum differentia communis terminorum in progressione arithmetica primum terminum non afficiat; patet, huius differentiae coefficientem in quolibet dato termino aequalem esse numero terminorum, qui terminum datum praecedunt. Quare in vltimo termino x habebitur $\overline{n-1} \times b$; nempe $x = a + \overline{n-1} \times b$. Igitur cum omnium terminorum summa sit $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$, ea quoque inuenitur $= \frac{2an + bn^2 - bn}{2} = \frac{(2a + bn - b) \times n}{2}$. E. G. Series arith- me-

metica $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, cet. ad 100 terminos producta $= \frac{2 \times 100 + 10000 - 100}{2}$
$= 5050$. At si progressionis primus terminus fuerit o, erit progressionis summa aequalis dimidio producto ex vltimo termino in numerum terminorum. Nam in hoc casu cum sit $a = o$, summa terminorum, quae generatim exprimitur per $\overline{a + x} \times \frac{n}{2}$ in hanc abit $\frac{nx}{2}$. Vnde patet, summam numeri cuiuslibet terminorum in progressione arithmetica, cuius primus terminus est o, aequalem esse dimidio producto ex terminorum numero in terminum maximum. E. G. Progressio Arithmetica.
$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

IIII. Si quotus ex duabus primis quantitatibus, aequalis sit quoto ex duabus vltimis, quatuor illae quantitates sunt *geometrice proportionales*, vt patet ex praecedenti definitione. Tales sunt numeri 2, 6, 3, 12, & quantitates a, ar, b, br. Ex ipsa proportionis geometricae natura euidens est, productum ex terminis extremis aequale esse producto ex mediis; sic $a \times br = ar \times b$, vt patet. Quare datis tribus terminis facile inuenitur quartus geometricae proportionalis: multiplicando scilicet duos medios ter-

terminos, productumque diuidendo per primum; quotus erit quartus terminus quaesitus; ita datis tribus quantitatibus a, ar, b, inuenitur quarta $\frac{ar \times b}{a} =$. At si proportio sit continua, ita vt secunda quantitas sit primae rationis consequens, & simul secundae rationis antecedens, simili ratiocinatione patet, sumendum esse huius quantitatis quadratum, illudque per primam quantitatem esse diuidendum. Haec autem quantitas, quae antecedentis, & consequentis vices gerit, vocatur *media proportianalis*, talisque proportio ita exprimitur ∺ a. b. c, nempe hoc scribendi modo significatur, b esse mediam proportionalem. At media proportionalis arithmetica ita designatur ÷ a. b. c. Patet autem, in hac proportione, summam extremorum aequalem esse termino medio bis sumpto.

Ex demonstratis de proportione geometrica pendet vulgatissima Arithmeticae operatio, quae *regula trium*, vel etiam *regula aurea* propter eximiam vtilitatem appellari solet. Per hanc regulam, datis tribus terminis, inuenitur quartus proportionalis. In hac autem operatione probe obseruari debet terminorum ordo. Et primo quidem consideranda est quantitas, quae est eiusdem generis cum quantitate quaesita. Ex quaestionis natura intelligitur, an quantitas data sit maior, vel minor quantitae quaesita; si maior sit, iam maxima ex aliis duabus quantitatibus in terminorum ordine ad sinistram scribi debet; at si minor sit, tunc duarum aliarum quantitatum minima ad sinistram, alia autem ad dexteram collocari debet. Constituto autem conuenienti terminorum ordine; iam ex praescripto regugulae, productum ex secundo termino in tertium, per primum terminum diuidi debet. Tota res exemplo perspicua fiet. Haec proponatur quaestio. Si triginta operarii dierum 12 spatio, opus aliquod absolvant; quaeritur necessarius operariorum numerus, vt idem opus 18 diebus absoluatur. Quoniam quaeritur operariorum numerus, primum considerandus est numerus 30; statim autem vides, numerum illum datum maiorem esse numero quaesito; quare numerus 18 ad sinistram collocari debet, numerus autem 12 ad dexteram, atque ita operatio peragitur hoc modo $18 : 30 = 12 : \frac{30 \times 12}{18} = 20$.

V. Pro varia terminorum ordinatione in proportione geometrica, diuersa ab Arithmeticis inuenta fuerunt nomina. At ex prima terminorum ordinatione aliae omnes facile inferuntur. Si primus terminus dicatur esse ad tertium, vt secundus ad quartum, argumentari dicimur *alternando*. Si dicatur secundus ad primum, vt quartus ad tertium, tunc dicitur *inuertendo*. Si summa terminorum primi, & secundi refertur ad secundum, vt summa terminorum tertii, & quarti ad quartum, inferre dicimur *componendo*; contra autem *diuidendo*, si terminorum primi, & secundi differentia ad secundum referatur, vt differentia tertii, & quarti refertur ad quartum. In his autem omnibus argumentandi modis proportionem manere patet, cum productum extremorum aequale semper inueniatur producto mediorum. Ex eadem productorum aequalitate facile colligitur, rationum compositione, proportionem non mutari. Ratio *composita* ex pluribus geometricis rationibus illa dicitur, quam habet pro-

productum ex earum antecedentibus ad productum ex consequentibus. Sint duae proportiones $a : b = c : d$ erit $af : bg = cm : ds$. Etenim pro-
$f : g = m : s$)
ductum extremorum $afds$ aequale est producto mediorum $bgcm$. Et quidem $a : b = c : d$, ac proinde $ad = bc$. Praeterea $f : g = m : s$, ideoque $fs = gm$, ergo $ad \times fs = bc \times gm$. Simili ratione patet $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$. Atque eadem valet demonstratio, pro alio quolibet proportionum numero. Ratio ex duabus aequalibus composita, dicitur *duplicata*, ex tribus *triplicata*, cet. Hinc ratio geometrica, quam habet quadratum vnius quantitatis ad quadratum alterius, est duplicata eius, quam habent ipsae quantitates ad inuicem; ratio cuborum, triplicata, cet. Et contra ratio, quam habent inter se radices quadratae, cubicae, cet. dicitur *subduplicata*, *subtriplicata*, cet. rationis potentiarum *respectiuarum*. At ratio, quae intercedit inter radices quadratas cuborum, hoc est ratio $a^{\frac{3}{2}}$ & $b^{\frac{3}{2}}$ dicitur *sesquiplicata*.

Si duae quantitates ita inter se connexae sint, vt si una sit dupla, tripla, cet. altera etiam dupla, tripla, cet. euadat, prima dicitur esse in *ratione directa simplici* alterius. At si prima in eadem ratione decrescit, in qua altera augetur, tunc illa esse dicitur in *ratione inuersa* siue *reciproca* istius. At si duae quantitates ita sint inuicem connexae, vt altera crescat in eadem ratione, qua primae quadratum, aut cubus, cet. tunc illa ad hanc esse di-

ce-

cetur in ratione duplicata, triplicata, cet. At si in eadem ratione vna decrescit, qua crescunt alterius quadrata, vel cubi, dicetur esse in ratione huius *reciproca* duplicata, aut triplicata, cet. Harum rationum frequentissimus vsus recurret in Physica.

VI. Ex mediorum, & extremorum producto pendet etiam vniuersa progressionum geometricarum doctrina. In progressione qualibet geometrica, productum ex primo in vltimum terminum, semper aequale est producto ex secundo, & penultimo, aut etiam alteri cuilibet producto ex duobus terminis a primo, & vltimo aequaliter distantibus. Sit progressio a, ar, ar^2, ar^3, in qua communis multiplicator, aut diuisor *ratio communis* dici solet, sitque y vltimus terminus; erunt quatuor vltimi termini y, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{y}{r^3}$, vt patet ex natura progressionis geometricae. Est autem $a \times y = ar \times \frac{y}{r} = ar^2 \times \frac{y}{r^2} = \frac{ar^3 \times y}{r^3}$ cet. Praeterea summa progressionis geometricae, dempto primo termino, aequalis est summae omnium terminorum, dempto vltimo per communem rationem multiplicato. Nam $ar + ar^2 + ar^3 +$ cet. $+ \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} +$

$+ \frac{y}{r} + y == r \times a + ar + ar^2$ cet. $+ \frac{y}{r^4} + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} \frac{y}{r}$. Quare si progressionis summa dicatur s; erit $s - a = s - y \times r$, hoc est $s - a == sr - yr$, vel $sr == y - a$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1}$.

Quamuis autem ex arithmeticarum operationum natura facile pateat, qua ratione ad hunc vltimum valorem perueniatur; res tamen magis fiet manifesta ex appendice, quam de aequationibus mox adiungemus. Porro cum exponens ipsius r ab ipso secundo termino perpetuo crescat, si numerus terminorum dicatur n, erit $n - 1$ exponens ipsius r in vltimo termino; ac proinde $y = ar^{n-1}$, & $yr = ar^{n-1+1} = ar^n$, & $s = \frac{yr-a}{r-1} = \frac{ar^n - a}{r-1}$. Quare datis in progressione geometrica primo termino, terminorum numero, & communi ratione; facile inuenietur omnium terminorum summa. Si inuenienda sit summa seriei decrescentis $y + \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r^3}$ cet. $+ ar^3 + ar^2 + ar + a$ posito terminorum nnmero infinito, vltimus terminus a fit $= 0$.

Cum

Cum enim n sit infinitus, ac proinde & infinitus r^{n-1}; erit $a = \frac{y}{r^{n-1}} = 0$. Quare summa talis seriei est $s = \frac{yr}{r-1}$ quae est summa finita, quamuis numerus terminorum sit infinitus; ita series infinita est $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} +$ cet. $= = 2$.

Schol. Ad progressiones arithmeticas & geometricas refertur logarithmorum doctrina, maximae quidem vtilitatis in Physica sublimiori, sed rem breuiter attingere nobis erit. Progressio quaelibet geometrica hac formula potest repraesentari $\div\!\!\div$ $aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^1 . aq^4 . aq^5$. cet. in qua a, & q exprimunt numeros quoslibet. Quare si fiat $a = 1$, praecedens series abit in hanc $\div\!\!\div$ $q^0 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5$. cet. Inde autem duo colliguntur; 1. Productum ex duobus quibuscumque huius progressionis terminis pro exponente habet ipsorum exponentium summam. Ita productum ex $q^4 \times q = q^5$. Quare si inueniendus proponatur in hac progressione terminus, qui sit duorum aliorum producto aequalis; quaeratur terminus, cuius exponens est ipsa duorum exponentium summa... 2°. Quotus ex duobus terminis emergens, ipse est terminus, cuius exponens est ipsa exponentium differentia. Ita si diuidatur q^2 per q^3, quotus

tus est $q^{2-3} = q^{-1}$. Quare si inueniendus proponatur terminus duorum aliorum quoto aequalis, quaeratur terminns, cuius exponens aequalis est exponentium differentiae.

Numeri alicuius *Logarithmus* appellatur exponens potestatis numeri denarii, qui sit numero dato aequalis. Ita si habeatur progressio geometrica $\div\div$ $10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4$. cet. & infra scribantur eorumdem terminorum valores $\div\div$ 10. 100. 1000. 10000. cet. exponens 0 est logarithmus vnitatis, exponens 1 est logarithmus numeri 10, & ita deinceps. Sed quia exponentes illi exhibent dumtaxat logarithmos numerorum integrorum in progressione decupla 1, 10, 100, 1000, cet., necessum est praeterea, haberi logarithmos numerorum intermediorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, cet. quare exponentibus praecedentibus, additae fuerunt decimales septem hoc modo. $\div\div$ $10^{0,0000000}.\ 10^{1,0000000}.\ 10^{2,0000000}.\ 10^{3,0000000}.$ cet. Iam vero quia exponentes illi, semper sunt in progressione arithmetica, ex dictis euidens est, valores numeri denarii ad illas potestates euecti, quarum indices sunt iidem exponentes, perpetuo manere in progressione geometrica, atque eosdem exponentes esse horum numerorum logarithmos. Quare si continuo augeantur decimales illae fractiones $\frac{1}{10000000}$ vel, quod idem est, si inter singulos primae progressionis exponentes inferantur termini medii

UNIVERSIDAD DE GRANADA Hospital Real Biblioteca

dii arithmetice proportionales 9999999, habetur nona progressio geometrica hoc modo ∺ $10^{0.}$ 000000. $10^{0.}$ 0000001. $10^{0.}$ 0000002. $10^{0.}$ 0000003, cet. in qua quidem progressione obseruandum est, numeros lentissime crescere, cum primus terminus sit 1, & 1000000, aus sit 10. Erit ergo terminus aliquis intermedius = 2, vel 3, vel 4, cet. Ita 2 inuentus est = termino $10^{0.}$ 3010300; 3 = = $10^{0.}$ 4771213; 4 = $10^{0.}$ 6020600. Quare exponentes illi sunt logarithmi numerorum 2, 3, 4, cet. Ex his principiis pendent vulgarium logarithmorum tabulae ab 1 vsque ad 100000; hae autem, maioribus numeris inuenieudis inseruiunt. Aliquae accuratiores tabulae logorithmos exhibent ex decem, imo & quindecim decimalibus constantes; sed vt plurimum septem sufficiunt, atque etiam quinque primae decimales, dumtaxat aliquando adhiberi solent. Ex hactenus demonstratis, & ex logarithmorum tabulis euidens est, logarithmos numerorum inter 1, & 10 incipere à 0; logarithmos numerorum inter 10, & 100 incipere ab 1, logarithmos numerorum inter 100, & 1000 incipere à 2; & ita deinceps. Primus ille terminus, qui est integer numerus exponentis, dici solet logarithmi *characteristica*, quo nomine appellatus fuit, quia indicat, quot notas contineat numerus dato logarithmo respondens. Manifestum enim est, numerum illum tot notas continere, quot vnitates habet characteristica vnitate aucta. Ita logarithmo 4, 8145605 respondet numerus quinque constans notis, cum characteristica sit 4.

Com-

Commodissimae sane sunt logarithmorum tabulae. Etenim cum demonstratum sit, productum ex duobus numeris logarithmorum summae respondere, eorum vero differentiae respondere numerorum quotum, per solam additionem, & subtractionem compendiose absolui possunt multiplicatio, & diuisio. Sumantur datorum numerorum logarithmi, simulque addantur, numerus summae respondens in logarithmorum tabulis, erit producti logarithmus; contra autem logarithmorum differentia erit logarithmus quoti, ac proinde inueniuntur numeri quaesiti. Simili ratione patet, numerum quemlibet ad datam potestatem euehi, si toties sumatur numeri dati logarithmus, quoties per seipsum numerus multiplicandus proponitur: hoc est, logarithmus per exponentem potestatis multiplicari debet, & productum erit quaesiti numeri logarithmus. Contra autem si numeri dati logarithmus per exponentem radicis diuidatur, quotus erit quaesitae radicis logarithmus. Quamuis autem eam dumtaxat explicauerim logarithmorum formam, in qua logarithmus vnitatis constituitur $= 0$; multipliciter tamen variari possunt logarithmi. Etenim si duae sint progressiones, quarum altera geometrica sit, altera arithmetica, & sub singulis primi terminis singuli secundae scribantur, vndecumque initium fiat, hi dicuntur illorum logarithmi. Sic termini progressionis inferioris sunt logarithmi superioris. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32, cet. — 4. — 2. 0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14, cet. Semel autem constituta progressione geometrica cum suis logarithmis, vtramque seriem licebit interiectis quotcumque terminis augere; si inter duos quoslibet progressionis geometricae terminos medium geometrice proportionale, & inter duos eorum logarithmos medium arithmetice proportionale constituas. Sic inter 2, & 4 medium proportionale est $\sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2.\ 289$, cet. cuius logarithmus est $\frac{6 + 8}{2} = 7$. Et eadem methodo semper inueniri poterunt infiniti alii logarithmi numerorum, qui vel integri sint, vel ex integris, & fractis compositi, medios terminos inter duos proximos semper inquirendo. Aliud exemplum in vulgaribus logarithmorum tabulis proponemus. Vt haberetur Log. 9. quaesitus est medius proportionalis inter 1, & 10, siue inter 1. 0000000. & 10. 0000000, extrahendo ex 10. 0, cet. radicem quadratam verae proximam 3. 1622777, cuius logarithmus est dimidius Log. 10. Et iste quidem numerus maior est aliquanto, quam 3, sed longe distat à 9. Itaque inter eum, & 10. 0, cet. iterum quaesitus est medius proportionalis, extrahendo rrdicem numeri, qui oritur ducendo 10. 00, cet. in 3. 16, cet. & inuenta est radix verae quam proxima 5. 6234132. Hic numerus paulo maior est, quam 5, & eius logarithmus habetur, si summa logarithmorum 10. 00, cet. & 3. 16, cet. bifariam diuidatur. Sic continua inuestigatione mediorum proportionalium inter duos numeros, qui sint proxime maiores, vel minores, quam 9, deuenitur tandem ad numerum, qui ne vna quidem millionesima differat à 9, eiusque logarithmus numero 9 attribuitur. Hoc artificio, & patientissimo mul-

multorum annorum labore supputatae sunt logarithmorum tabulae. Ceterum in tabulis supputandis necesse non est, eam, quam demonstrauimus, methodum adhibere, nisi in numeris, qui dicuntur *primi*. Nam in numeris, qui ex aliorum multiplicatione producuntur, satis est logarithmos coefficientium addere, vt habeatur logarithmus producti. Sic Log. 15. $=$ Log. 3. $+$ Log. 5, & Log. 27. $=$ Log. 2. $+$ Log. 9.

APPENDIX.

De AEquationibus.

I. AE*Quatio* dicitur propositio duarum quantitatum aequalitatem affirmans, interposito aequalitatis signo $=$. AEquatio valorem quantitatis alicuius repraesentat, si ex vna aequationis parte habeatur quantitas sola quaesita, in parte autem altera occurrant quantitates, quae omnes sint cognitae. Ita si habeatur

$$x = \frac{4 \times 6}{3} = 8,$$ notus est valor ipsius x. Itaque in omni resoluenda aequatione, id curandum est, vt nempe quantitas, cuius valor quaeritur, in vna aequationis parte sola contineatur, pars autem altera, solas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex dumtaxat aequationum genus considerabimus, eas scilicet, in quibus quantitas incognita vel vnius est dimensionis, seu primi gradus, vel ad secundam dimensionem, seu secundum gradum euehitur. Quod primi gradus aequationes spectat, totum artificium regulis quibusdam explicabimus, variisque

numeris distinguemus. 1^o. Ex vna aequationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta signorum permutatione, vt in hoc exemplo: $5x + 50 = 4x + 56$; $5x - 4x = 56 - 50$, & $x = 6$. 2^o. Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem, aut diuisionem permixta sit, ab iis liberari debet in primo casu per diuisionem, in casu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12 = 15$, & $x = \frac{15}{3} = 5$. Sit autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$; erit $x + 20 = 50$, & $x \times 6 = 50 - 20 = 30$. 3^o. Proportio quaelibet geometrica conuerti potest in aequationem, facta extremorum, & mediorum multiplicatione. Sit $12 - x : \frac{x}{2} = 4 : 1$, erit $12 - x = 2x$; quare $3x = 12$, & $x = 4$. Simili ratione proportio arithmetica in aequationem per additionem mutari potest. 4^o. Loco quantitatis cuiuslibet in aequatione, alia eiusdem valoris substitui potest. Sit $3x = y = 24$, & $y = 9$, erit $3x + 9 = 24$, $x = \frac{24 - 9}{3} = 5$. 5^o. Si pars aequationis quantitatem quaesitam continens, signo aliquo radicali afficiatur, delendum est signum radicale, & altera pars aequationis ad eam euehi debet potestatem, quam indicat ipsum sig-

signum radicale. Sit $= \overline{ax + b^2} - c = d$, erit $\sqrt{ax + b^2} = c + d$, & $ax + b^2 = d^2 + 2cd + c^2$; quare $x = \dfrac{d^2 + 2cd + c^2 - b^2}{a}$

II. His praemissis permutationum regulis, quae ex antea demonstratis facile intelliguntur, iam problema aliquod vnius dimensionis soluendum ponemus. Et primo quidem, quaestionis propositae distincta habeatur notio, & singulae conditiones attente considerentur. Si alicuius problematis conditiones ita exprimantur, vt tot habeantur incognitae, quot aequationes, poterit semper deueniri ad vnicam aequationem, quae vnicam incognitam habeat. Nam sint E. G. 20 aequationes, & totidem incognitae; poterit conferendo primam cum secunda, eliminari per regulas praescriptas vna ex iis incognitis, inueniendo nouam aequationem, quae illa careat, tum idem praestari poterit conferendo primam cum tertia, & ita porro, ac habebuntur iam nouem aequationes cum nouem incognitis, quae eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis; & ita porro, donec perueniatur ad vnicam aequationem cum vnica incognita. Hinc si habeantur tot aequationes, quot incognitae, problema dicitur *determinatum*; & vnicam, vel finitas numero solutiones admittit. Si fuerint plures incognitae, quam aequationes, problema dicitur *indeterminatum*, & solutiones habet infinitas: AEquatio $3x + \frac{1}{2}x = 20$ est aequatio determinata, sed $x + y = 12$ est indetermina-

na-

nata; etenim si ponatur $x = 1$, & $y = 11$, vel $x = 2$, & $y = 10$, & ita porro, semper inueniatur $x + y = 12$, ita vt infiniti sint valores, qui pro x & y positi numerum datum restituant. Regulas hactenus explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam nummos quotannis triente adauget, demptis 100 nummis, quos annuatim impendit in sumptus, & post tres annos sit duplo ditior, quaeruntur nummi. In hoc problemate plures latent conditiones sic euoluendae, & enuntiendae. Quantitates incognitae vltimis alphabeti litteris designari solent. Itaque mercator habet certam nummorum summam.

	x
Anno primo expendit nummos 100. Ergo.	$x - 100$
Reliquum adauget triente, quare	$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
Anno secundo expendit nummos 100. Ergo.	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
Reliquum adauget triente. Quare	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$
Anno tertio expendit 100. Ergo.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
Reliquum adauget triente. Quare	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$
Tandem sit duplo ditior. Ergo.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$,

Quae-

Quaestio itaque ad aequationem reducitur, ex qua erui debent x. Vtramque aequationis partem multiplica per 27, productum sit $64x - 14800 = 54x$; auferas $54x$, residuum est $10x - 14800 = 0$, seu $10x = 14800$; diuidas per 10, habetur $x = 1480$. Quare habentur nummi sub initio, & ipsum lucrum.

III. Si in aliquo soluendo problemate perueniatur ad aequationem, quae ipsum quantitatis incognitae quadratum, & praeterea productum ex ipsa quantitate incognita in aliquam datam quantitatem inuoluat, haec aequatio dicitur *secundi gradus*, vel *quadratica*. In talibus autem aequationibus, hac regula vtendum est. Singulos aequationis terminos, qui incognitam quantitatem continent, ad vnam partem transferas, ita vt singuli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognitae quadratum coefficiente aliquo afficiatur, per hunc coefficientem singuli aequationis termini diuidantur. Tandem dimidii coefficientis, quantitati incognitae praefixi sumatur quadratum, quod ex vtraque parte addatur. Iam pars aequationis, quae incognitam quantitatem continet, ad perfectum quadratum reducta habebitur; ex qua proinde radix quadrata extrahi poterit, & deinde per regulas praescriptas, quantitatis incognitae valor eruetur. Ponamus $y^2 + ay = b$: addatur hinc, & inde quadratum dimidii coefficientis a; erit $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = b + \frac{1}{4}a^2$; extractaque radice fiet $y + \frac{a}{2} = \pm$ $\sqrt{}$

$\sqrt{b + \frac{1}{4} a^2}$, & tandem $y = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4} a^2} - \frac{a}{2}$. Diligenter obseruandum est, radici quadratae praefixum fuisse signum $\pm$ hoc est $+$, vel $-$. Etenim radix quadrata cuiuslibet quantitatis, vt a^2, potest esse $+ a$, vel $- a$, ideoque $y + \frac{1}{2} = + \sqrt{b + \frac{1}{4} aa}$, vel $- \sqrt{b + \frac{1}{2} a^2}$ cum $- \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \times - \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$ restituat quadratum $b + \frac{a^2}{4}$; non secus ac facit $+ \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \times + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. Quare aequationes quadraticae duas admittunt solutiones. Sic in praesenti exemplo duo sunt valores radicis y, vnus nempe $+ = \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; alter autem $y = - \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}$. At quoniam positiua sunt omnium quantitatum quadrata, hinc patet, quantitatis negatiuae radicem esse impossibilem; seu assignàri non posse, quae ideo dicitur *imaginaria*. Aliquando contingit, aequationes nullam solutionem admittere. Exemplo sit $y^2 - ay - 3a^2 = 0$; erit $y^2 - ay = -3a^2$ & $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -3a^2 + \frac{a^2}{4} = -\frac{11a^2}{4}$; extractaque radice habebitur $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$, & $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$. Ex quibus manifestum est, duos valores radicis y esse imaginarios, cum assignari non possit radix quantitatis $-\frac{11a^2}{4}$. Si ergo in solutione problematum deueniatur ad quantitates imaginarias, signum est admodum manifestum, vel problema esse impossibile, vel adhibitam esse methodum, quae aliquid impossibile inuoluit, prorsus vt fit in argumentatione, dum res ad absurdum reducitur.

IIII. Radices imaginariae, quae eamdem sub signo radicali quantitatem habent, vt $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-a}$, per multiplicationem efficere possunt productum reale, in quo nullum supersit signum radicale, dummodo radices illae numero pari semper multiplicentur. Etenim euanescere non potest sig-

signum radicale, nisi terminus hoc signo affectus multiplicetur per alium terminum, qui idem signum radicale habeat, & eamdem quantitatem signo inclusam. Iam vero ita sublato signo radicali, si productum ex prima multiplicatione per idem signum radicale multiplicetur, nouum productum afficietur quoque signo radicali; at si rursus multiplicetur per idem signum radicale, iterum euanescet signum radicale, & ita deinceps. Si polynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale est polynomium $x - a - \sqrt{-b}$, euanescere non potest signum radicale, nisi polynomium datum multiplicetur per aliud, quod a primo differat, tantum quoad signum vinculo radicali praefixum. Ita in polynomio proposito solum productum ex $x - a - \sqrt{-b}$ in $x - a + \sqrt{-b}$ delere potest signum radicale, factaque multiplicatione habetur $xx - 2ax + aa + b$; in hoc enim solo casu producta singula ex vnoquoque termino reali $\sqrt{-b}$ sese mutuo signis contrariis elidunt, atque hinc patet, terminum b, qui continet productum ex duobus radicalibus $+ \sqrt{-b} \times - \sqrt{-b}$, esse necessario positiuum. Itaque quantitatum imaginariarum frequens vsus occurrere potest; ipsa enim impossibilitas non solum per multiplicationem aliquando tollitur, sed etiam summa binarum quantitatum, quae ex realibus, & imaginariis sunt mixtae, realis esse potest; ita quantitatum $3 + \sqrt{-1}$, & $8 - \sqrt{-1}$ summa est realis, nimirum 11, atque etiam realis est differentia, nempe 5.

V. AEquationes omnes secundi gradus re-

prae-

praesentari solent hac formula $x^2 - px = q$, in qua p, & q designant quantitates quaslibet vel positiuas, vel negatiuas. Inde autem statim concluditur $x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hinc autem difficultates aliquae suboriri possent ex praecedentibus facile explicandae. Quaeri etenim potest, cur quantitas positiua $x - \frac{p}{2}$ aequalis fiat negatiuae $- \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Re quidem vera duo quadrata aequalia praebent aequales radices, sed radices illae eiusdem signi esse debent. Etenim ex eo, quod $4 = 4$, concludi non potest $2 = - 2$. Praeterea $\frac{p}{2} - x$ tam est radix ipsius $xx - px + \frac{pp}{4}$, quam $x - \frac{p}{2}$. Quare scribendum videretur $+ x \pm \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Has difficultates facile soluemus, si obseruetur, hanc vltimam aequationem in quatuor sequentes resolui posse, $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$,

$x - \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x = -\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Duae vltimae aequationes conueniunt omnino cum duabus primis; quare satis est duplex signum $\pm$ in vna aequationis generalis parte adhibere, vt fieri solet. Praeterea aequationis resolutio hoc modo institui posset. Radix quadrata aequationis $xx - px + \frac{pp}{5}$ est $x - \frac{p}{2}$, si x sit maior quam $\frac{p}{2}$; fitque $\frac{p}{2} - x$, si x fit minor, quam $\frac{p}{2}$. In 1°. casu habetur $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$: in altero autem erit $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hi ergo sunt duo casus distincte expressi, qui duplici signo in formula generali *implicite*, & obscure enuntiantur hoc modo $x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Si haberetur $xx + px = q$, per ratiocinationem praecedentem inuenitur x +

$\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$, sola nempe radix positiua; tum vero invtilis est radix negatiua, cum problematis solutionem non praebeat. Haec tamen radix haberetur quoque, mutata aequatione per regulas explicatas: prodiret nempe $xx - px = q^2$ & $\frac{p}{2} - x$, vel $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hac igitur methodo radices positiuas necessarias, a superfluis, veras a falsis separare liceret.

AEquationum quadraticarum doctrinam facili exemplo illustrabimus. Itaque hoc sit problema, inuenire scilicet in linea, duo quaecumque luminaria coniungente, punctum tale, vt luminaria illa ex hoc puncto, aequali luce fulgeant. Distantia inter duo luminaria dicatur a, sitque illuminationis ratio, vt m ad n; praeterea dicatur x distantia minoris luminaris a puncto quaesito; erit distantia luminaris alterius ab eodem puncto $a - x$. Iam ponatur, luminarium effectus, seu lucis intensitatem esse in ratione reciproca duplicata distantiarum a puncto lucido, vt vulgo statuitur a Physicis; sumptis distantiarum quadratis, erunt intensitates lucis vt $\frac{1}{xx}$ & $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$. Res ita se haberet, si aequalia forent luminaria. At quia (ex hypoth.) lucis quantitates absolutae sunt, vt m ad n; erunt lu-

luminarium effectus, vt $\frac{m}{xx}$ ad $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$ Itaque vt habeatur punctum quaesitum, instituenda est aequatio inter $\frac{m}{xx}$ & $\frac{n}{xx - 2ax + a}$ ex qua per reductionum regulas, eruitur $xx + \frac{2amx}{n - m} = \frac{aam}{n \cdot m}$, & addito, vt moris est, dimidii coefficientis quadrato, habetur $x^2 + \frac{2amx}{n - m} + \frac{aamm}{(n\ m)^2} = \frac{aam}{n\ m} + \frac{aamm}{(n\ m)^2}$. Huius aequationis radices duae sequenti formula exprimuntur, vt patet, nempe $x = \frac{am}{n{-}m} \pm \frac{a}{n{-}m} \sqrt{\left(\frac{mn}{n \cdot m}\right)}$, vel $x = \frac{a}{n{-}m} \times - m \pm \sqrt{mn})$. Ex his euidens est, vnius radicis valorem esse negatiuum, alterius autem positiuum. Etenim si quantitas radicalis signo — afficiatur, iam quantitas tota fit negatiua; si autem afficiatur signo positiuo +, iam quantitas $- m + \sqrt{mn}$ erit positiua, cum sit (ex hypoth) n maior, quam m; ideoque $\sqrt{mn}$ maior quam m.

Superest vt radicis negatiuae vsum explicemus. In memoriam reuocanda sunt, quae de quantitatibus negatiuis iam dicta sunt, scilicet quantitates negatiuas

uas secundum directionem positiuis oppositam sumendas esse. In praesenti problemate quantitatis x valor negatiuus, facile intelligetur, si obseruabimus, punctum quaesitum, à nobis considerari tamquam inter duo luminaria constitutum. At si attendatur ad alterius casus possibilitatem, ponendo nempe punctum quaesitum in linea producta vltra luminaria, iam valor radicis prodit positiuus. Et quidem si distantia puncti a minori luminari dicatur x, vt ante, erit luminaris maioris distantia $a + x$; quadrata autem distantiarum erunt xx, & $aa + 2ax + xx$, quae per conditiones problematis in aequationem reducta praebent $maa + 2amx + mxx = nxx$; resoluta aequatione habetur $x = \frac{a \times m}{n - m} \pm \sqrt{mn}$, valor $a \frac{X m + \sqrt{mn}}{n - m}$ erit positiuus, hicque solus problemati satisfaciet in casu proposito. Alter autem valor negatiuus $a \frac{X m - \sqrt{mn}}{n - m}$ significat, sumendam esse directionem oppositam, punctumque non in linea producta vltra luminaria, sed in ipsa linea iungente constituendum esse. Problema ad casum particularem transferamus. Ponatur $n = 4m$: praecedens formula $x = \frac{a}{n-m} X (-m \mp \sqrt{mn})$ in hanc abit $x = \frac{a}{3} X (-1 \mp 2)$. Quare duplex valor radicis

x

x erit $+\frac{1}{3}a$ & $-\frac{1}{3}a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo, quae problemati aeque satisfaciunt. Punctum vnum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia á lumine viuidiori duplo maior erit, quam à debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque à lumine debiliori distantia aequalis erit ipsi luminarium distantiae. Facile autem sine vllo Algebrae auxilio intelligitur, vtrumque punctum problemati satisfacere; cum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam viuidiori, quae vim habent quadruplo maiorem. Hoc exemplo illustrantur, quae de quantitatibus negatiuis breuiter antea attigimus. Haec sunt Arithmeticae, & Algebrae elementa breuissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras Institutiones Physicas satis esse iudicauimus.

FINIS.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIAE

PROOEMIVM.

De definitione, & diuisione Geometriae.

I. G*Eometria* est scientia magnitudinum, *solidorum* nempe, *superficierum*, & *linearum*. Solidum est magnitudo in longum, latum, & profundum extensa. Quamuis autem nihil sit in rerum natura continuum, quod tres illas dimensiones simul non habeat; illae tamen seorsim considerari possunt, vel etiam duas tantum concipere possumus, de tertia minime cogitantes; atque hinc intelligitur notio superficiei, & lineae. Superficies est magnitudo tantum in longum, & latum extensa. Linea autem est magnitudo extensa tantum in longum. Et re quidem ipsa itineris longitudinem nobis repraesentamus, non attenta eius latitudine: & planitiei latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam considerantes. Denique si concipiamus lineae terminum, cuius nulla pars sit, nulla extensio, iam terminus ille *punctum* dicitur. Itaque ad explicandam Tyronibus Geometriae definitionem, id primum ostendi debet, quomodo per varios abstractionis gradus ex corporis *physici*, & provt est in se, consideratione ad corporis *geometrici*, & simpliciter extensi contemplationem perueniamus, ac deinde ad superficiei, & lineae notionem progrediamur, atque tandem notionem puncti formemus. Neque methodo satis philosophica vtuntur, qui statim superficiem definiunt terminum solidi, lineam terminum superficiei, & punctum terminum lineae. Ex praecedenti definitione nascitur diuisio Geometriae in Geometriam linearum, superficierum, & solidorum. Quare tres erunt Geometriae sectiones. 1. De lineis. 2. De superficiebus. 3. De solidis. In prima sectione linearum positionem, illarumque mutuam relationem expendemus. Porro linearum nomine non solum intelligimus lineam rectam, sed etiam lineam circularem, cuius vtilitas est maxima, in consideranda linearum rectarum mutua positione. Quare ad Geometrica Elementa pertinent quoque circuli proprietates. In secunda autem sectione superficierum proprietates, & mensuram considerabimus. In tertia tandem sectione proprietates solidorum, illorumque mensuram demonstrabimus. At recta methodus postulat, vt rerum demonstrandarum varietatem in vnaquaque sectione variis Capitibus distinguamus.

II. Lineam repraesentare solent Geometrae tamquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu descripta *recta* dicitur; *curua* autem appellatur, si punctum perpetuo mutet directionem. At fatendum est, ita simplicem esse lineae rectae, & curuae notionem, vt ad clariorem ideam, magisque *elementarem* reduci vix possit. Rectam definiunt alii linearum omnium inter duos terminos ductarum breuissimam. Ceterum inde euidens est, datis in linea recta punctis duobus, datam esse huius lineae positionem, ita vt vnica dumtaxat recta per haec duo puncta transire possit. Ex his etiam intelligitur, quid sit superficies plana, scilicet om-

nium

nium superficierum eosdem terminos habentium breuissima, vel cui linea recta vndequaque adaptari potest. Circulus definitur figura plana, vnica curua linea comprehensa, quae *peripheria* dicitur, siue *circumferentia*, ad quam omnes rectae lineae à puncto medio, quod *centrum* dicitur, ductae aequales sunt inter se; circumferentiae pars quaelibet *arcus* vocatur. Linea recta per centrum ducta, & vtrinque in peripheria terminata *diameter* dicitur; rectae autem à centro ad circumferentiam ductae *semidiametri*, vel *radii* appellantur.

III. *Anguli* notio ope circuli facillime concipitur. Duae lineae rectae in aliquo puncto concurrentes, angulum efficere dicuntur. Angulorum mensura est arcus, quem ipsorum latera comprehendunt, in peripheria circuli ex anguli vertice, tamquam centro, descripti. Porro dum dicitur, anguli mensuram esse arcum circuli, nihil aliud significatur, nisi aequales esse angulos, si aequales sint arcus ex angulorum vertice, & eodem radio descripti. Ita dum dicitur, angulum esse alterius duplum, nihil aliud intelligitur; nisi arcum vnum, altero esse duplo maiorem. Itaque anguli natura in maiori, aut minori inclinatione vnius lineae ad aliam consistit. Igitur angulus cum sit mera linearum inclinatio, & apertura; extensio vel quantitas proprie loquendo dici non potest; ac proinde, abstractione facta ab omni extensionis consideratione, angulum alterius duplum dicere non possumus, cum id dici possit dumtaxat de quantitate, comparata cum alia quantitate homogenea. Quia vero mera linearum apertura partes non habet, angulus non est quantitas proprie dicta; atque hinc factum est, vt anguli mensuram cum circuli arcu comparauerint Geometrae.

 Cir-

Circulus diuidi solet in partes aequales 360, quae *gradus* dicuntur; singuli gradus diuiduntur in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum diuiditur in 60 secunda, & sic in infinitum. Gradus per o designari solent, minuta autem per lineolas numeris superimpositas. Ita si forte occurrant

35^{o}, $25^{'}$, $36^{''}$, $42^{'''}$, lege 35 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda, 42 tertia.

IIII. Ex angulorum notione pendet linearum mutua positio. Linea dicitur alteri lineae *perpendicularis*, quando in ipsam incidens, facit angulos hinc & inde aequales; angulus huiusmodi dicitur *rectus*. At si recta vna super alteram cadens duos angulos efficiat, ita vt vnus sit recto maior, alter autem minor, primus dicitur *obtusus*, alius autem *acutus*. Si talis sit rectarum positio, vt eandem semper à se inuicem seruent distantiam, euidens est, nullam esse linearum illarum mutuam inclinationem: ac proinde in infinitum etiam protractae non concurrent, seu angulum non efficient; tales lineae dicuntur *parallelae*.

V. Ex lineae rectae definitione euidens est, duas lineas rectas, in vnico dumtaxat puncto concurrere posse: cum enim omni careant latitudine, communis intersectio in vnico tantum puncto fieri potest. Neque ad aliam deinde intersectionem transire possunt; altervtra enim linea directionem mutaret, ac proinde non forent ambae rectae, quod est contra hyp. Id pro axiomate habent Geometrae, & ita exprimi solet: *Duae rectae segmentum commune habere, nec spatium claudere possunt.* Itaque tres saltem lineae requiruntur, vt spatium vndique claudatur. Spatium vndique clausum *figura* dicitur. *Triangulum* est figura terminata tribus lineis, quae

eius-

eiusdem latera vocantur. Haec autem latera si fuerint aequalia, triangulum dicitur *aequilaterum*; si duo tantum latera sint aequalia, triangulum vocatur *isosceles*; demum si latera omnia fuerint inaequalia, triangulum *scalenum* dicitur. Rursus autem triangulum ratione angulorum considerari potest; si vnum habeat angulum rectum, triangulum *rectangulum* dicitur; *acutangulum*, si omnes habeat angulus acutos, & tandem *obtusangulum*, si angulum obtusum habuerit.

VI. Figura quatuor lateribus terminata, *quadrilaterum* generatim appellatur. Si autem aequalia sint figurae latera, & ad angulos rectos iuncta, *quadratum* dicitur; at simpliciter rectangulum vocatur, si latera duo opposita reliquis duobus maiora sint, manentibus tamen angulis rectis. *Parallelogrammum* appellatur figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt mutuo parallela, etiamsi anguli lateribus comprehensi non sint recti. Si figura quadrilatera sit aequilatera, non tamen rectangula, *Rhombus* dicitur; & *Rhomboides* vocatur, si latera opposita dumtaxat aequalia habuerit. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis, quae iam enumerauimus diuersum, *Trapezium* appellatur. Sed figura *polygona* dicitur, quae pluribus, quam quatuor, lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, sex, septem, cet. figura *pentagonum*, *hexagonum*, *heptagonum*, cet. dici solet. Figura autem polygona *regularis* est, quae aequilatera, & aequiangula est.

VII. Axiomata, & postulata plurima praemittere solent Geometrae, quae quidem nos omittimus. Quae enim est axiomatum de toto, & parte vtilitas, vt intelligamus, dimidiam lineam

to-

tota minorem esse? Ecquis statim non videt, rectam lineam produci posse; circulum dato interuallo posse describi, & reliqua huiusmodi? Verum inter axiomata vnum de figurarum *superpositione* legitur, simplicissimum quidem, & in vniuersa Geometria vtilissimum, quod sine aliqua explicatione praetermittere nolumus. Dicunt nempe, *ea esse aequalia, quae sibi mutuo super imposita, perfecte congruunt.* Principium illud *superpositionis*, non ita crasse intelligendum est, quasi in mutua figurarum applicatione consisteret, non secus, ac artifex mensuram aliquam datae longitudini applicat; vt inde veram longitudinem concludat: talis demonstrandi ratio minime foret geometrica. In eo positum est praedictum principium, vt figuram alteri impositam imaginemur, & deinde concludamus. 1°. Ex partium datarum aequalitate, ipsam earumdem partium convenientiam, siue *coincidentiam*... 2°. Ex hac coincidentia, ipsam reliquarum partium coincidentiam, ac proinde & perfectam duarum figurarum aequalitatem, & similitudinem. Itaque *superpositionis* principio, intelligenda non est dumtaxat mutua figurarum applicatio, sed partis vnius alteri parti impositio, vt deinde figuras illas inter se comparemus. Vnde euidens est, idem valere principium ad demonstrandam figurarum inaequalitatem. Ceterum hoc vnico principio cum angulorum mensura per arcus circulares coniuncto, demonstrari possunt propositiones omnes, quae ad elementarem linearum Geometriam pertinent.

SE-

SECTIO I.

De Geometria linearum.

CAPVT I.

De lineis rectis quoad mutuam positionem consideratis, nullum tamen spatium, seu nullam figuram terminantibus.

PROP. I. *Recta quaelibet in rectam cadens vel duos angulos efficit rectos, vel duobus rectis aequales.* Etenim recta insistat perpendiculariter, vt GE, vel oblique, vt RE (Fig. 1.) In 1. casu patet (ex def.) angulos GEF, GEC esse rectos; in casu altero anguli duo CER, REF simul sumpti aequales sunt duobus angulis CEG, GEF, hoc est duobus rectis.

COR. I. Producta linea RE in O, simili ratione patet, angulos FEO, OEC duobus rectis aequales esse; ac proinde duae rectae sese inuicem secantes efficiunt angulos, quatuor rectis aequales. Iam ex centro E describatur circulus; mensura angulorum quatuor erit integra circuli circumferentia, hoc est gradus 360. Igitur angulus rectus, erit quarta pars circumferentiae, nempe 90. graduum.

COR. II. Rectae GH, RO efficiunt angulos GER, HEO, qui dicuntur *ad verticem oppositi.* Illos autem angulos aequales esse, manifestum est, cum sit dimidium peripheriae RFO aequale dimidio peripheriae GFH: sublata autem communi parte GO, erunt arcus reliqui GR, HO aequales inter se.

COR.

COR. III. Recta GE ad alteram CF perpendicularis est, si puncta duo quaelibet G, E. á punctis duobus quibuslibet, vt C, F aequaliter distent, hoc est, si GC = GF, & CE = EF. Etenim puncta duo E & G non magis inclinant versus C, quam versus F; ac proinde, cum duo puncta lineae rectae positionem determinent (ex def.), aequalis est rectae totius GE hinc & inde ad rectam CF inclinatio; ideoque ob angulos vtrinque aequales recta GE perpendicularis est ad CF. Patet autem, puncta C & F sumi posse pro arbitrio CE, & EF.

COR. IIII. Ex puncto quolibet E in recta CF dato duci potest ad camdem rectam perpendicularis GE. Etenim centro E, & dato quolibet aequali interuallo Ec, Ef describantur arcus circuli sese inuicem secantes in g: recta per g, & E ducta erit perpendicularis quaesita ob distantias gc, gf, & Ec, Ef aequales.

Si punctum h extra rectam CF datum sit, simili ratione ducitur perpendicularis hE. Etenim ex puncto h sumantur aequalia interualla hc, hf, deinde ex punctis c & f, tamquam centris, & eodem interuallo describantur arcus circuli se mutuo secantes in g, ducaturque hg, haec erit perpendicularis ob aequales hc, hf, & gc, gf distantias. Euidens autem est, in vtroque casu vnicam perpendicularem duci posse. Vnica enim est recta transiens per punctum E, vel h, quae cum recta CF aequales hinc & inde efficiat angulos. Patet autem, lineam perpendicularem esse omnium, quae ex puncto dato ad lineam datam duci possunt, brevissimam, cum recta perpendicularis non magis pendeat ex vna parte, quam ex alia: ac proinde neque ad dexteram declinet, neque ad

si-

sinistram, ideoque breuissima est via á puncto dato ad lineam datam. Item euidens est, ex puncto dato ad lineam datam, vnicam perpendicularem duci posse.

Eadem omnino est operatio, si recta cf in duas partes aequales diuidenda proponatur. Ex punctis c & f tamquam centris, & eodem radio describantur arcus circuli, sese secantes in g; deinde ex iisdem punctis, & sumpto quolibet eodem interuallo describantur arcus, se inuicem secantes in h, recta hg diuidet cf aequaliter in E, vt patet; cum singula puncta rectae gh aequaliter distent á punctis c & f: ac proinde Ec = = Ef.

PROP. II. Si lineae AB, DC sint parallelae (Fig. 2.) erit I. *Angulus* OFD, *qui externus dicitur, aequalis angulo* OGB, *qui internus, & oppositus vocatur.* II. *AEquales erunt anguli* BGF, GFC, *qui dicuntur alterni.* III. *Anguli interni, & ad eamdem partem positi* DFG, FGB *aequales erunt duobus rectis.* Cum lineae parallelae eodem inter se vbique distent interuallo (ex def.), euidens est, eamdem fore parallelae vtriusque BA, DC inclinationem ad rectam EO, ac proinde angulus OFD aequalis est angulo OGB: quod erat primum. Praeterea cum angulus GFC aequetur angulo DFO ad verticem opposito (cor. 2. prop. 1.); erunt etiam aequales anguli BGF, GFC: quod erat secundum. Tandem cum anguli OFD, GFD aequentur duobus rectis (prop. 1.); aequales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB; quod erat tertium.

Viceuersa si angulus OFD aequalis sit interno, & opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO; ac proinde rectae illae parallelae sunt inter se. Rursus si aequa-

les

les sint anguli alterni BGF, GFC; vel si duobus rectis simul aequales sint interni ad eamdem partem positi BGF, OFD; angulus externus DEO semper aequalis erit angulo interno, & opposito BGF; ac proinde rectae AB, CD erunt parallelae. Itaque ex ipsa parallelismi notione, facile colliguntur tres primariae parallelarum affectiones, necessario nexu inter se coniunctae, ita vt ex vna qualibet inferre liceat, rectas illas esse parallelas. Porro in demonstrandis proprietatibus illis, nimis laborare videntur quidam Geometrae.

COR. I. Si duae rectae AB, HK parallelae sint eidem rectae CD, erunt etiam inter se parallelae. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit, ac inclinatio rectae CD ad eamdem.

COR. II. Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam rectae KH; ex quolibet huius puncto O ducatur recta GFO, & fiat angulus GFD aequalis angulo KOF, descriptis nempe ex punctis O, F, tamquam centris, & eodem radio arcubus aequalibus FM, GN; erit recta FD parallela ipsi KO.

CAPVT II.

De linearum rectarum respectu circuli positione.

PROP. I. *Ducta recta* FM, *ad circumferentiam vtrinque terminata, quae chorda dicitur* (Fig. 3.), *recta* EP *ex centro circuli ad chordam perpendiculariter ducta, eamdem secat*

cat in duas partes aequales. Cum enim recta EP e centro ducatur, punctum E aequaliter distat à punctis extremis chordae F & M (ex defin.). Praeterea cum recta EP sit perpendicularis ad chordam, singula alia puncta aequalem habent ab iisdem extremis distantiam (cor. 3. prop. 1.) Quare punctum P, aequaliter etiam distat à punctis F & M.

Et viceuersa recta quaelibet EP per centrum transiens, & chordam FM aequaliter diuidens, eam quoque perpendiculariter secat. Etenim cum recta EP chordam diuidat aequaliter, punctum P aequaliter distat ab extremis F & M: quia vero recta EP transit etiam per centrum; punctum E aequaliter distat ab extremis F & M. Quare puncta P & E aequaliter distant á punctis F & M; ac proinde EP perpendicularis est ad FM.

Rursus si recta EP perpendicularis sit ad chordam, eamque aequaliter diuidat, recta illa transit per centrum. Cum enim chordam diuidat aequaliter; punctum P aequaliter distat ab extremis F & M. Praeterea cum sit perpendicularis, singula illius puncta aequaliter etiam distant à punctis F & M. Erit ergo centrum E huius perpendicularis punctum aliquod.

PROP. II. *Si recta* EH *transiens per centrum diuidat aequaliter chordam* FM, *aequaliter quoque diuidet arcum* FHM. Etenim cum singula puncta rectae EH aequaliter distent à punctis F & M; aequalis erit puncti H ab extremis F & M distantia. Quare si semicirculus GMH semicirculo GFH imponatur, congruet punctum M cum puncto F, & ob punctum H

com-

commune congruent & chordae HM, FH, & arcus iisdem chordis subtensi.

COR. I. In eodem circulo, vel in circulis aequalibus, chordae aequales, aequalibus arcubus respondent; inaequales autem, arcubus inaequalibus. Praeterea chordae aequales, aequaliter distant à centro, chordae autem inaequales distant inaequaliter; quod euidens est, ex *superimpositionis* principio. Nam chorda aequalis cum aequali chorda semper congruet, nec cum chorda inaequali congruere vmquam poterit.

COR. II. In eodem semicirculo, vel in semicirculis aequalibus, quo maiores sunt, vel minores arcus, eo maiores, vel minores sunt chordae, & centro magis, vel minus proximae. Viceuersa quo maiores sunt, vel minores chordae, & centro magis, vel minus proximae, eo etiam maiores sunt, vel minores arcus subtensi.

COR. III. Ducta chorda FM diametro AB parallela, intercipit aequales arcus AF & BM. Etenim, ceteris manentibus vt ante, arcus AH == arcui BH, & arcus FH == arcui HM: quare demptis arcubus aequalibus, remanet AF == BM. Euidens est, eamdem esse demonstrationem, si parallela NQ ad oppositas diametri partes iaceat; erit nempe arcus FN == arcui MQ.

COR. IIII. Si ponatur, rectam NQ motu sibi semper parallelo à centro recedere, donec puncta duo N & Q coeant in G; chorda NQ abit in *tangentem*, quae nempe circulum in vnico puncto tangit; euidens autem est, in hoc etiam casu esse GN == GQ.

COR. V. Ex corollariis praecedentibus patet, qua ratione per tria data puncta, circulus describi bi possit, dummodo tamen puncta illa in eadem recta non iaceant. Agantur rectae duae, quae iungant tria puncta data, hae erunt chordae circuli quaesiti. Quare ductis perpendicularibus, quae chordas diuidant aequaliter, vtraque perpendicularis transit per centrum; quod proinde erit in communi vtriusque perpendicularis intersectione. Simili ratione, dato circuli arcu, centrum inuenitur, totaque circumferentia describitur.

COR. VI. Hinc arcus circuli datus, in duos aequales arcus diuidi potest. Ducatur enim chorda, arcum datum subtendens, haecque aequaliter per rectam perpendicularem diuidatur; eadem perpendicularis etiam angulum, quem arcus metitur, aequaliter in duas partes diuidet.

SCHOL. Ex hoc corollario patet, facile diuidi posse angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32, & ita deinceps, secundum terminos progressionis geometricae duplae: sed per Geometriam elementarem angulus in tres partes aequales diuidi non potest: atque haec est anguli *trisectio* á Geometris per *circinum*, & *regulam*, vt dicunt, hoc est, per lineae rectae, & circuli constructionem frustra quaesita. Demonstrant enim Geometrae, problema illud ad tertii gradus aequationem necessario pertinere, quae quidem aequationes, per solum circulum construi non possunt. Neque ob eamdem rationem per sola Geometriae elementa, angulus diuidi potest in partes 5, 6, 7, 9, cet. Talis enim diuisió pro diuerso partium aequalium numero ad altiores aequationum gradus assurgit. Id autem, quamuis ad elementa non pertineat, breuiter monuisse volumus.

PROP. III. *Radius* EG *in puncto contactus* G

ad

ad tangentem perpendicularis est. Etenim quoniam tangens circulum in vnico puncto tangit (ex cor. 4. prop. 2. huius), radius EG minima est tangentis á centro distantia, ac proinde ad tangentem perpendicularis (ex def.).

Viceuersa recta RT perpendicularis ad extremitatem radii G circulum tangit in vnico puncto G. Etenim cum sit EG minima rectae RT à centro E distantia, alia quaelibet puncta rectae RT magis distant à centro, quam punctum G; ergo singula puncta praeter G extra circumferentiam iacent.

COR. I. Recta circumferentiam tangit in vnico puncto, cum ex centro E ad rectam datam vnica perpendicularis duci possit (cor. 4. prop. 1. cap. 1.).

COR. II. Hinc facile ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto scilicet radio EG erectaque in G perpendiculari RT.

COR. III. Ad punctum datum in circumferentia vnica tangens duci potest (loc. cit.); ac proinde si per punctum contactus agatur recta quaelibet, haec coincidit cum tangente, vel circumferentiam secat.

COR. IIII. Si duo circuli GNA GOQ eandem habent tangentem: recta HG eidem perpendicularis per vtriusque centrum, puta E & P, transibit. Iam vero si ducatur ES, iungaturque PS, quae producta secabit in O circulum GOQ, & in R tangentem RT: erit semper in triangulo ESP latus PS minus duobus reliquis ES, EP (ex defin. lineae rectae). Quare cum radii ES, EG aequales sint, erit recta PS minor quam PG, siue PO. Ergo quodlibet punctum S circuli GSF

erit

erit intra circulum GOQ; ac propterea illi circuli se mutuo contingent in vnico puncto G, in quo scilicet rectam RT tangunt.

SCHOL. Cum inter tangentem, & circulum nulla duci possit linea recta, angulus, quem arcus circuli efficit cum tangente, minor est quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur. Huius propositionis vtilitas est in Physica, vbi agitur de diuisibilitate in infinitum. Id vero maximam admirationem, concertationesque maximas excitauit: nempe angulus contactus, quem facit arcus cum tangente, ab infinita circulorum serie in infinitas partes diuiditur, licet ipse quouis angulo rectilineo minor sit. Huius autem paradoxi geometrici causam, inde repetunt nonnulli, quod nempe anguli rectilinei natura diuersa omnino sit à natura anguli curuilinei, in puncto contactus. Etenim quemadmodum infinitae lineae numquam superficiem efficiunt, nec vlla inter has quantitates ratio potest assignari, licet in partes infinitas diuidi possint; ita etiam infiniti anguli contactus, quouis rectilineo minores sunt, licet sint diuisibiles in infinitum. Verum in hac lite geometrica, *Logomachia* aliqua latere videtur. Si anguli nomine intelligatur portio finita spatii curua, & tangente comprehensi; nullum dubium est, quin spatium illud comparari possit cum portione finita spatii rectarum duarum concursu intercepti. At si anguli rectilinei notio vulgaris adhibeatur, euidens est, notionem illam absolute consideratam angulo contactus conuenire non posse, cum in hoc angulo latus vnum sit curuilineum. Itaque huius anguli afferri debet propria definitio, atque hac definitione, quae arbitraria omnino est, semel constituta, & explicata, iam nihil difficultatis superesse potest. Et re quidem

dem ipsa de solo nomine hic litigari demonstrat summa Geometrarum consensio circa anguli huius proprietates. Sed quidquid sit, quicumque geometricarum demonstrationum vim percipiet, pro euidenti habebit, angulum contactus, & minorem esse quouis rectilineo, & in infinitos curuilineos diuidi pose.

PROP. IIII. *Angulus* BAD *tangente* BA, *&* *chorda* AD *comprehensus habet pro mensura dimidium arcum* AFD. Etenim ducta per centrum C diametro EG chordae AD parallela (Fig. 4.), ductaque alia diametro f F eidem chordae perpendiculari; rectus erit angulus BAC tangente, & radio comprehensus (prop. praec.), itemque rectus est angulus FCG, ac proinde vtriusque anguli mensura est arcus FG. Sed angulus BAD == BAC — DAC, vel — ACG ob parallelas DA, & EG; quare cum ACG pro mensura habeat arcum AG, erit angulus BAD == FAG — AG == FA == $\frac{1}{2}$ AD.

PROP. V. *Angulus* CAD (Fig. 5.) *ad circumferentiam habet pro mensura dimidium arcum* CD *lateribus* AC, & AD *interceptum.* Etenim ex anguli vertice A ducatur tangens EB, summa trium angulorum BAC + CAD + DAE == 180 == $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CD + $\frac{1}{2}$ DA. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}$ AC, & angulus EAD == $\frac{1}{2}$ AD (ex prop. praec.): ergo angulus CAD == $\frac{1}{2}$ CD.

COR.

COR. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam, eodem arcu CD subtensi.

COR. II. Angulus rectus in circumferentia circuli semicircumferentiam lateribus suis comprehendit, totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem maiorem intercipit, vterque chorda subtenditur.

COR. III. Angulus BAD (Fig. 6. 7.) vel intra, vel extra circulum pro mensura habet $\frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CE$ pro angulo intra circulum, vel $\frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}EC$ pro angulo extra. Per E agatur chorda EF (Fig. 6.) rectae AD parallela; erit angulus BEF $=$ BAD (ob parallelas). Sed mensura anguli BEF est $\frac{1}{2}BF$, & $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DF$, & DF $=$ CE (cor. 3. prop. 2.). Ergo $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CE$.

COR. IIII. Angulus bAD (Fig. 7.) tangente Ab & secante AD interceptus $= \frac{1}{2}Db - \frac{1}{2}bC$. Si enim circa punctum A reuolui intelligatur recta AB, donec tangens euadat in b, puncta b & B conuenient in b. Simili ratione angulus dAb inter duas tangentes Ad & Ab comprehensus pro mensura habet $\frac{1}{2}dFb - \frac{1}{2}dCb$.

CAPVT III.

De lineis rectis, quae spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

PROP. I. *In triangulo quolibet summa trium angulorum aequalis est duobus rectis.* Etenim per tres angulorum vertices describatur circulus, (cor. 5. prop. 2. cap. 2.), triangulum erit inscriptum circulo, cuius chordae erunt tria latera; anguli autem habent pro mensura dimidium arcum lateribus oppositis subtensum (prop. 5. cap. 2.) Quare trium angulorum summa aequalis est dimidiae trium arcuum summae, hoc est, dimidiae circumferentiae, seu gradibus 180.

COR. I. In triangulo vnicus esse potest angulus rectus, vel obtusus, reliqui duo sunt acuti. Quare in triangulo rectangulo, angulus acutus est *complementum* alterius ad rectum.

COR. II. Datis duobus angulis in triangulo, datur & tertius, qui est differentia inter datam duorum angulorum summam, & gradus 180. Si autem vnicus datus sit angulus, data est reliquorum duorum summa, quae est *complementum* ad duos rectos, & *supplementum* simpliciter appellari solet.

COR. III. In triangulo quolibet ABC (Fig.8.) producto latere CB in I, angulus externus ABI aequalis est duobus angulis internis oppositis ACB, CAB. Etenim summa anguli externi ABI, & interni contigui ABC aequalis est duobus rectis (prop. 1. cap. 1.): sed summa trium angulorum ACB, CAB, ABC aequalis etiam est duobus rectis: ergo angulus externus ABI aequalis est duobus internis oppositis ACB, & CAB, dempto scilicet communi angulo ABC.

PROP. II. *In omni triangulo maius latus opponitur maiori angulo, minus autem minori: & viceuersa angulus maior maiori lateri, & minor minori opponitur.* Triangulum circulo inscribatur, maiorem angulum metitur arcus maior, & maiorem arcum subtendit maior chorda, & contra (cor. 5. prop. 2. cap. 2.)

COR. I. In triangulo aequilatero singuli anguli aequales sunt inter se, & viceuersa si tres anguli sunt aequales inter se, triangulum est aequilaterum. Inscripto enim, vt ante, triangulo in circulo, tria latera aequalia sunt tres aequales circuli chordae, quae proinde tres arcus aequales subtendent, ideoque, & tres anguli aequales sunt. Euidens autem est, vnumquemque angulum esse tertiam partem grad. 180, hoc est grad. 60.

COR. II. In triangulo isoscele aequales sunt anguli lateribus aequalibus oppositi; & contra si duo anguli in triangulo aequales sunt, triangulum est isosceles. Patet vt in coroll. praec.

PROP. III. *Si in duobus triangulis tria latera aequalia sint, tota triangula erunt aequalia.* Sit AB = ab, AC = = ac, BC = = bc (Fig. 9.). Ex punctis A & B tamquam centris, describantur arcus FCG. DCE se inuicem secantes in C. Triangulum abc ita imponatur triangulo ABC, vt punctum A conueniat cum a, punctum b cadet etiam in B; ob AB = = ab, & ob ac = = AC, recta ac terminabitur in aliquo puncto arcus FCG. Similiter ob bc = = BC, recta ta bc terminabitur in aliquo puncto arcus DCE; quia vero rectae ac, bc se mutuo iungunt in c, vtraque terminabitur in puncto intursectionis C. Ergo ac congruet cum AC, bc cum BC, totumque triangulum abc cum triangulo ABC.

COR. I. Si sit angulus A $= =$ a, B $= =$ b, C $= =$ c, & latus AB $=$ ab; erit triamgulum ABC $=$ triangulo abc. Latus ab imponatur lateri AB; ob angulum a $=$ A, & b $=$ B, cadet ac in AC, & bc in BC; quare latera duo ac, bc, & AC, BC in eodem puncto iungentur, hoc est, c cadet in C, totumque triangulum abc congruet cum triangulo ABC. Eodem modo computari inter se possunt latera duo ac, AC, quae respondent angulis aequalibus, & dicuntur *homologa*. Quare aequalia sunt triangula duo, si anguli vnius aequales sint angulis alterius; & praeterea si triangula latus vnum homologum aequale habeant.

COR. II. Si duo triangula latera duo habuerit aequalia, & angulos his lateribus interceptos aequales, tota triangula erunt aequalia. Sit AC $=$ ac, AB $=$ ab, & angulus A $=$ a. Imponatur latus AB lateri ab, & latus AC lateri ac; ob angulos A, a aequales, latera illa congruent. Praeterea cum sit AC $=$ ac, & AB $=$ ab, punctum c cadet in C, & b in B; ac proinde bc congruet cum BC.

PROP. IIII. *Si duo triangula inaequalia aequales habent angulos, ponaturque angulus vnus supra alterum aequalem angulum, itemque sibi mutuo imponantur latera homologa, quae aequalem in vtroque triangulo angulum comprehendunt, erit tertium latus tertio lateri parallelum.* Ponatur angulus D (Fig. 10.) supra angulum aequalem

lem B, latus DF supra latus homologum BC, & latus DE supra latus BA itidem homologum; erit latus FE, vel fe parallelum lateri AC. Cum enim angulus feB aequalis sit angulo CAB, erit recta fe rectae AC parallela (prop. 2. cap. 1.). Si angulus F poneretur supra angulum aequalem C; simili modo demonstratur, rectam DE esse rectae AB parallelam. Idem dicendum de rectis FD & BC.

Viceuersa si per punctum f pro artibrio sumptum in latere trianguli agatur recta fe parallela rectae AC, aequales sunt anguli Bfe, BCA, & Bef, BAC (loc. cit.). Triangula illa, quae angulos habent respectiue aequales, dicuntur *similia.*

PROP. V. *Quodlibet polygonum resolui potest in tot triangula, quot sunt polygoni latera.* Etenim ex puncto C intra polygonum (Fig. 11.) ad singulos angulos duci possunt rectae; euidens autem est, tot esse triangula, quot polygoni latera.

Alia ratione in triangula diuidi possunt polygona (Fig. 12.): si nempe ex polygoni angulis ducantur tot rectae, quod duci possunt, quae tamen se mutuo non secent. Illae autem rectae, quae ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diagonales* vocatur; patet, in hoc casu tot esse triangula, quot latera polygoni, demptis duobus.

COR. I. Summa angulorum polygoni aequalis est producto ex 180. grad. in numerum laterum, demptis duobus, hoc est, demptis 360. grad. Etenim anguli polygoni simul sumpti aequales sunt angulis omnibus triangulorum, in quae reductum est polygonum, demptis angulis, quorum vertex est in C. Horum autem angulorum summa est 360. grad. (prop. 1. cap. 5.). Sed tot sunt

trian-

triangula, quot latera; quare summa omnium angulorum polygoni aequalis est producto ex 180. grad. in numerum laterum binario mulctatum. Ita si polygonum habuerit septem latera, summa angulorum

est $= 180\ \text{gr.} \times \overline{7-2} = 900\ \text{gr.}$

Idem quoque euidens est, si polygonum per diagonales in triangula diuidatur; erit enim in his triangulis angulorum summa angulis polygoni aequalis; ac proinde summa illa aequalis est producto ex 180 gr. in numerum triangulorum, hoc est, in numerum laterum polygoni, demptis duobus.

COR. II. Polygonum quolibet regulare circulo inscribi potest. Diuidantur in duas partes aequales anguli polygoni (Fig. 11.) per rectas AC, BC, DC, EC, cet. rectae illae se mutuo secabunt in C, & erunt inter se aequales. Etenim rectae AC & BC sibi occurrentes in puncto aliquo C efficiunt triangulum ACB, itemque rectae BC & DC aliud efformant triangulum BCD. Sed triangula illa sunt aequalia, nam cum anguli polygoni regularis aequales sint, & bifariam aequaliter diuidantur, aequales sunt anguli CAB, CBA inter se, & anguli CBD, CDB; praeterea aequalia sunt latera AB, BD; ergo isoscelia sunt; & aequalia triangula ACB, BCD (cor. 2. prop. 3.). Quare AC = DC = BC; & propter latus commune BC punctum intersectionis C rectarum AC, BC cadet in punctum intersectionis C rectarum BC, DC. Idem valet de aliis rectis EC, FC, cet.

COR. III. Radii è centro polygoni regularis ad angulos ducti polygonum diuidunt in tot triangula isoscelia & aequalia, quot sunt polygoni latera; & quodlibet polygoni latus fit chorda

ar-

arcus, qui aequalis est quoto ex gradibus 360. per numerum laterum diuisis. Ita latus decagoni est arcus grad. 36.

COR. IIII. Latus hexagoni regularis circulo inscripti aequale est circuli radio. Nam si ex centro C in sex triangula diuidatur hexagonum, aequilatera sunt triangula illa ob radios CA & CB aequales, & angulum ACB = = grad. 60. Quare singuli anguli CAB, ABC sunt etiam 60. grad., ac proinde CA = AB.

COR. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumscribi potest, hoc est, intra polygonum regulare describi potest circulus, qui singula tangat polygoni latera. Etenim cum latera polygoni regularis circulo inscripti totidem sint chordae aequales, chordae illae à centro aequaliter distant (cor. 1. prop. 2. cap. 1.). Quare si ex centro C agantur perpendiculares CI, CK, hae chordas aequaliter diuident, atque aequales erunt. Ergo per singulas perpendicularium extremitates describi poterit circulus, qui singula polygoni latera in puncto medio tanget (cor. 1. prop. 3. cap. 2.)

COR. VI. Hinc polygono regulari dato, circulus circumscribi potest. Quaeratur polygoni centrum: quo inuento, circulus facile circumscribitur. Item polygono regulari, circulus facile inscribitur inuento polygoni centro: ad latus aliquod demittatur perpendicularis, haec erit circuli radius.

Viceuersa polygonum regulare, circulo dato circumscribi potest. Diuidantur 360. grad. per duplum numerum laterum polygoni, sumptoque arcu iK, qui sit quoto aequalis, per extremitates K

&

& i ducatur radius CK; agaturque recta indeterminata CB, ad punctum K erigatur perpendicularis DKB occurrens CB in puncto B, transferatur KB in KD; erit BD latus polygoni quaesiti. Simili modo inueniuntur alia latera. Vel etiam radio CB describatur circulus, & per totam circumferentiam transferatur chorda DB, atque inscribatur polygonum DBACFE, quod erit circulo dato circumscriptum, vt patet; cum per constructionem tot habeantur tangentes aequales, & aequaliter diuisae in puncto contactus, quot sunt latera in polygono quaesito.

Simili constructione, circulo dato polygonum regulare inscribitur. Diuidatur numerus 360. grad. per numerum laterum polygoni quaesiti, sumatur in circulo dato arcus huic quoto aequalis; chorda huius arcus erit latus polygoni: transferatur chorda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quaesitum.

Hic autem diligenter obseruandum est, per Geometriam elementarem, circulo inscribi posse dumtaxat triangulum aequilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, hoc est, figuram quindecim laterum, & polygona regularia, in quibus numerus laterum, se habet in progressione geometrica dupla. Ita triangulum aequilaterum praebet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48, cet. quadratum praebet polygona laterum 8, 16, 32, 64, cet. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80, cet. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240, cet. Alia polygona, vt Eptagonum, Enneagonum, Endecagonum, cet. describi non possunt geometrice, nisi per constructionem

nem

nem aequationum, quae ad sublimiorem gradum assurgunt.

SCHOL. Cum polygonum regulare circulo inscribi, & circumscribi possit, quo maior est in polygono inscripto, vel circumscripto laterum numerus, eo magis polygonum ad circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum, ita vt differentia inter polygonum, & circulum sit data quauis differentia minor; iam circulus considerari potest tamquam polygonum regulare, ex lateribus numero infinitis, & infinite paruis compositum. Haec circuli consideratio, pendet ex principio omnino euidenti. Si nempe duarum quantitatum A & B differentia, sit qualibet assignabili minor, quantitates illae velvt aequales haberi debent. Etenim ponatur iter illas quantitates differentia aliqua data, iam quantitatum illarum differentia non est qualibet assignabili minor, quod est contra hyp. Quantitas autem, quae ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, huius alterius quantitatis limes appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus *Exhaustionum*, seu *primarum*, & *vltimarum* rationum. Hanc methodum, quam fusius explicabimus in prima parte Physices, vbi sermo erit de extensionis diuisibilitate, in proximo Capite, quantum hactenus nobis satis est, breuiter exponemus.

CA-

CAPVT IIII.

De linearum ratione, seu de lineis proportionalibus.

PROP. I. *In triangulis similibus* acb, ACB (Fig. 13. & 14.) *latera homologa sunt proportionalia.* Ponatur ab pars dimidia rectae AB; nempe sit Ab aequalis rectae ab, agaturque cg parallela rectae AB; erit cg = bA. Quod euidens est ex linearum parallelismo; ducta enim linea bg, erit ob angulos inter parallelas aequales, & ob latus commune bg, triangulum bcg aequale triangulo bgB, & latus cg = bB (cor. 1. prop. 3. cap. praec.). Ergo cg = bB = Ab. Praeterea triangulum Ccg aequale est triangulo cAb (loco cit.). Ergo Cc = Ac, & Cg = cb = gB. Quare Ac, vel Cc erit pars dimidia rectae AC; sicut cb est pars dimidia rectae CB.

Si ab sit tertia, vel quarta, aut quaelibet alia pars rectae AB, simili modo euidens est, rectas ac & cb esse tertiam, quartam, cet. partem rectarum AC, CB. Etenim ex diuisionum punctis b, f in recta AB ducantur bc, fh, cet. rectae BC parallelae, & eadem ratiocinatione patet, triangula Acb, chg, hCi, cet. aequalia esse triangulo acb, seu triangulo Acb.

Si recta ab accurate non contineatur in AB, sed cum fractione aliqua, E. G. bis cum dimidio; simili ratione ac bis cum dimidio continebitur in AC, & bc in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg aequalibus triangulo acb, inter parallelas hf, & Cb construi poterit triangu-

lum

lum hCi, cuius latera erunt dimidia pars laterum trianguli cAb; quod est euidens, cum sit fB pars dimidia rectae AB (per hyp.), & recta ih aequalis rectae fB ob parallelas hf & CB.

Tandem ponamus in triangulis ACB & hCi rectas AB & ih esse inter se *incommensurabiles*: diuisa intelligatur recta ih in partes 100, iam recta AB certum continebit partium numerum cum aliquo residuo, cum lineae illae sint incommensurabiles. Rursus recta ih diuisa fingatur in partes 1000, certum earumdem partium numerum continebit recta AB, sed cum residuo, quod priori residuo minus est: atque ita deinceps minus perpetuo fiet residuum, quo plures erunt partes. Quare ponatur partium numerus infinitus, iam residuum fit nullum. Ergo generatim triangula quaelibet similia, latera homologa habent proportionalia.

COR. Numerus quilibet partium in CB erit ad numerum partium in CA, inter easdem parallelas; vt numerus quilibet alius partium CB ad numerum partium in CA inter easdem parallelas. Etenim Ch : hc = Ci : im, & Ch : Ci = hc : im. Item hc : cA = im : mB, & hc : im = cA : mB. Ergo Ch : Ci = hc : im = cA : mB. Quare CA est ad CB, vt numerus quilibet partium in CA ad numerum, aequalium partium in CB.

PROP. II. *Duo triangula, in quibus latera homologa sunt proportionalia, aequiangula sunt.* Si (Fig. 10.) ponatur AC : BC = FE : FD, & AC : AB = FE : ED, aequiangula erunt triangula ABC & EDF. Nam si super EF construatur triangulum FGE triangulo ABC aequiangulum, facto scilicet angulo GEF = BAC,

&

& angulo GFE = ACB, & angulo FGE = CBA; erit AC : BC = FE : FG : sed (per Hyp.) AC: BC = FE: FD; ac proinde FD = FG. Similiter ob triangula ABC, FGE similia, erit AC: AB = FE : EG : sed (ex Hyp.) AC : AB = = FE : ED ; ergo FE, EG = = FE : ED ; ac proinde EG = ED. Quare triangula duo FED & FEG aequiangula sunt, & aequalia, ob latus commune FE, & latera FD, FG, & EG, ED aequalia (prop. 3. cap. praec.) Sed (per constr.) triangulum FGE triangulo ABC est aequiangulum; ergo triangulum FED ipsi quoque est aequiangulum.

COR. I. Si in triangulis ABC & EDF sit angulus D = = B, & praeterea DE : DF = BA: BC ; erit triangulum EDF triangulo ABC aequiangulum. Nam super AB capiatur Be = DE, ducaturque ef parallela rectae AC ; triangula ABC & eBf sunt aequiangula, cum ob parallelam ef angulus feB = A, efB = = C, & ob angulum B communem. Ergo Be : Bf = = BA : BC. Sed (ex Hyp.) DE : DF = = BA : BC, ergo Be : Bf = = DE : DF ; at Be = DE ; ergo Bf = = DF : ac proinde duo triangula Bef, DEF sunt aequalia, & similia ; sed Bef est triangulo BAC aequiangulum, ergo triangulum EDF est aequiangulum triangulo ABC, ac proinde generatim triangula, quorum latera duo homologa, circa aequalem angulum sunt proportionalia, sunt aequiangula.

COR. II. Si recta AD (Fig. 15.) angulum BAC bifariam, & aequaliter diuidat in triangulo BAC ; eadem recta latus oppositum BC diuidit quoque in duas partes BD & DC lateribus AB

&

& AC proportionales. Etenim producta recta CA in E, per punctum B agatur BE rectae AD parallela: triangula ECB, DAC erunt similia (prop. 1.) ac proinde $BD : DC == AE : AC$, sed ob parallelas angulus $BEA == DAC = DAB = ABE$; ergo triangulum BAE est isoscele (cor. 2. prop. 2. cap. praec.); quare $AE = AB$: ideoque $BD : DC = AB : AC$.

COR. III. Si ex angulo recto A trianguli rectanguli BAC demittatur perpendicularis AD in basim BC, quae angulo recto imminet, & *hypothenusa* dicitur; haec diuidet triangulum in duo alia triangula BAD, DAC inter se, & triangulo BAC similia. Et quidem triangula BAD, DAC praeter angulum rectum habent quoque cum triangulo BAC angulum communem: ac proinde similia sunt inter se, & toti triangulo. Hinc $BD : DA = DA : DC$, & $BD : BA = BA : BC$, ac tandem $DC : CA = CA : CB$.

COR. IIII. Dum fit $BD : BA = BA : BC$ erit $BA^2 = BD \times BC$ (ob productum mediorum aequale producto extremorum). Similiter cum sit $DC : AC = AC : CB$, erit $AC^2 = DC \times BC$: Ergo $CA^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times BC = \overline{BD + DC} \times BC = BC \times BC = BC^2$. Quare quadratum hypothenusae in triangulo rectangulo aequale est quadratis laterum.

COR. V. Diagonalis quadrati est lateri *incommensurabilis*. Cum enim diagonalis, sit hypothenusa trianguli rectanguli, cuius latera sunt aequalia, quadratum diagonalis aequale est duplo qua-

quadrato lateris. Sed numeris exprimi non potest radix quadrati dupli (ex demonstratis in Arithmetica). Ergo si latus quadrati numeris exprimatur, exprimi non poterit diagonalis, & contra.

COR. VI. Perpendicularis EO (Fig. 16.) ex circumferentiae circuli puncto quolibet in diametrum demissa, est media proportionalis inter duo segmenta CO & OL; nam si ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectae EC, EL; triangulum CEL est rectangulum in E, ac proinde

$$CO : EO = EO : OL \; ; \; \& \; EO^2 = CO \times OL.$$

Recta perpendicularis EO, dici solet *ordinata*; *abscissa* autem vocatur pars CO diametri inter perpendicularem, & circumferentiam comprehensa.

PROP. III. *Si ducantur in circulo chordae duae* BC & DA (Fig. 17.) *se mutuo secantes in* E, *chordarum segmenta erunt reciproce proportionalia.* Si enim ducantur BA & CD, triangula BEA & DEC sunt similia, ob angulos in E aequales, atque ob angulos C, A, & B, D iisdem arcubus subtensos. Quare AE : BE = CE: DE.

COR. I. Si duae lineae EB, EC (Fig 18.) ex eodem puncto extra circulum ductae, ad superficiem concauam terminentur, partes externae EA, ED rectis integris EB, EC sunt reciproce proportionales. Ductis enim chordis AC, DB, triangula EBD, EAC similia sunt ob angulum E communem, & angulos B, C eodem arcu AD subtensos: Ergo EA : ED = EC : EB.

COR. II. Si recta EB sit secans, altera autem Ed tangens; erit EB : Ed = Ed : EA. Nam du-

ductis dB, dA, similia erunt trangula EdB, EdA ob angulum E communem, & angulos EBd, AdE aequales, quorum communis mensura est dimidius arcus Ad (cor. 3. prop. 4. cap. 2.). Ergo angulus dAE = EdB, ac proinde EB : Ed = Ed: EA, hoc est, tangens est media proportionalis inter rectam totam EB, & partem externam EA.

COR. III. Hinc facile diuiditur recta data bifariam, ea conditione, vt maior pars sit media proportionalis inter totam rectam, & eiusdem rectae partem alteram. Nam (Fig. 19.) super datae rectae AB extremitatem erigatur perpendicularis AE dimidiae AB aequalis, & centro E, radio AE describatur circulus DAF. Deinde per B & E agatur recta BF, & centro B, radio BD describatur arcus DC; hic occurret rectae AB in puncto quaesito. Etenim ob tangentem BA erit BF : BA = BA : BD; ac proinde BF — BA: BA = = BA — BD : BD. Sed BE — BA = = BD = = BC; cum sit FD = BA vtpote duplae ipsius EA, quae est dimidia rectae AB Simili modo BA — BD = AC; ergo substitutione facta, BC : BA = AC : BC, vel BA: BC = = BC : AC. In hoc corollario continetur problema, quod his verbis proponere solent Geometrae: *rectam diuidere in media, & extrema ratione.*

Alia etiam problemata proponi solent, qualia sunt. *Tribus datis rectis, quartam proportionalem inuenire. Inter duos rectas, inuenire mediam proportionalem.* Sed haec manifesta sunt ex praecedentibus.

PROP. IIII. *Si duae figurae Similes in triangula vtcumque diuidantur per diagonales ex angu-*

gu-

gulis homologis ductas, triangula homologa erunt similia. Etenim sint duo polygona ABCDE & FGHIK (Fig. 20.) in quibus angulus A == F, B = G, C = H, D = I, E == K, sitque praeterea AB : FG == BC : GH == CD : HI = DE : IK == EA : KF : ductis diagonalibus AC, AD, FH, FI; similia erunt triangula ABC, FGH, & ACD, FHI, atque ADE, FIK. Nam cum anguli B & G aequales sint, & lateribus proportionalibus comprehensi, similia erunt triangula ABC, FGH, & ADE, FIK. Itaque angulus BAC = GFH, DAE == IFK. Ergo BAE — BAC — DAE == CAD == GFK — GFH — IFK — HFI. Igitur angulus CAD == angulo HFI. Simili modo ostenditur, augulos ACD, FHI, & ADC, HIF aequales esse. Quare triangula ACD & FHI sunt aequiangula.

Viceuersa duae figura quaelibet similes sunt, si in triangula aequiangula resolui possint. Nam ob angulos aequales in triangulis aequiangulis aequales sunt anguli homologi in vnaquaque figura. Quare cum latera figurarum sine triangulorum aequiangulorum latera proportionalia, figurae similes sunt.

COR. IIII. Si diuidatur BC in L, latusque homologum GH in M in eadem ratione; ita vt sit BC : GH = LC : MH. Deinde si ducantur rectae duae ad arbitrium LN & MO, quae angulos CLN, HMO aequales efficiant, vel quae diuidant latera homologa ED & KI in eadem ratione; ita vt sit ED : KI = DN : IO; erit LN : MO = CD : HI = BC : GH, cet. Nam ductis NC & OH, triangula NCD, OHI similia sunt ob angulos D, I aequales lateribus pro-

por-proportionalibus NC, DC, & OI, IH comprehensos. Quare CD : HI = CN : HO, & angulus DCN = IHO. Si ergo anguli illi auferantur ex angulis aequalibus DCL, IHM, remanebunt aequales anguli NCL, OHM: ac proinde triangula NCL, OHM similia sunt: ideoque LN : MO = LC : MH = BL : GH = CD : HI, cet. Quare generatim si in duobus polygonis similibus ducantur lineae, quae diuidant latera homologa, vel angulos homologos in eadem ratione, lineae illae erunt proportionales inter se, atque etiam eorumdem polygonorum lateribus quibuscumque homologis.

SCHOL. Linearum rationem iam considerauimus in quantitatibus finitis; superest, vt pauca, quantum nobis necesse est, explicemus de ratione quantitatum, quas *infinite magnas*, & *infinite paruas* appellant. Et in primis quidem obseruandum est, nullam quantitatem in se spectatam, & sine nostro cogitandi modo aut infinite paruam esse, aut infinite magnam, sed magnitudo quaelibet in se determinata est. Et quidem data quauis magnitudine, vtcumque parua, vel vtcumque magna, alia semper minor in primo casu, & alia semper maior in casu altero haberi potest. Nobis enim licet quantitatem exiguam, vel ingentem considerare, primamqne minuere, alteram augere, abstrahendo animum à quouis limite determinato; priorem quantitatem dicimus *infinitesimam*, vel *infinite paruam*; quantitatem alteram appellamus *infinitam*, vel *infinite magnam*; rationem, quam duae quantitates finitae habent ad se inuicem, *rationem finitam* vocamus. Patet autem, diuersos esse infinitorum, & infinitesimorum ordines; licet enim magnitudo aliqua concipiatur infinita, vel infinitesima: semper tamen quantitas manet, ac proinde vltra quoscumque limites augeri potest & minui. Si quantitatem aliquam finitam, vltra quoscumque limites minui concipiamus, hanc dicimus infinitesimam *ordinis primi*. Si autem quantitas alia ad hanc infinitesimam habeat rationem, quam ipsa infinitesima habet ad quantitatem hanc, dicimus infinitesimam *secundi ordinis*, & ita deinceps. Viceuersa, si quaedam quantitas sit ad finitam quantitatem, vt quantitas finita ad infinitesimam ordinis primi, eam dicimus infinitam *ordinis primi*; & ita deinceps superiores infinitorum ordines intelligere licet. Exemplum sit in circulo, cuius diameter est ad chordam, vt est chorda ipsa ad abscissam; ac proinde si fingatur chorda infinite parua primi ordinis, erit abscissa infinitesima ordinis secundi.

Ex his patet, calculo subiici posse quantitates infinitas & infinitesimas. Infinitum hac nota exprimi solet ∞. Quare numerorum series infinita hoc modo repraesentari potest 0. 1. 2. 3. 4. 5. . . . ∞. Pari modo quantitas quaelibet finita concipi potest diuisa in partes perpetuo decrescentes, donec perueniatur ad quantitatem infinitesimam. Talis est series, $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdots \frac{1}{\infty}$.

Euidens autem est, quantitatem infinitam finitae quantitatis additione, vel subtractione maiorem, vel minorem non fieri; cum finita quantitas ad quantitatem infinitam rationem habeat qualibet data minorem: simili ratione, quantitas infinite parua quantitatem finitam augere, vel minuere non potest. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, & $1 = 1 \pm$

1. Eodem modo si diuersi infinitorum ordines per $\overline{\infty}$.

diuersos exponentes designantur, erit $\infty^2 \pm a\infty = \infty^2$, & $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$. Verum si quantitates eiusdem generis considerentnr, siue infinitae, siue infinitesimae, ex notione quantitatum illarum manifestum est, eas non secus ac quantitates finitas tractari debere; probe enim recordandum est, quantitates illas non absolute, sed relatiue dumtaxat, & secundum nostrum concipiendi modum esse infinitas, vel infinitesimas. Quare $\infty + \infty = 2\infty$; $1 \times 3\infty = 3\infty$;

$$\frac{3^{\infty}}{3\infty} = 3;\ \times 2\infty \times \frac{a}{\infty} = \frac{2a}{\infty};\ \infty \times \infty = \infty^2;$$

$$\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty;\ \frac{\infty^2}{\infty_3} = \frac{1}{\infty};\ \frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} =$$

$$\frac{1}{\infty^2},\ \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty.$$

Ex his multa colligere est.

Quantitates infinitae vel infinitesimae eiusdem ordinis adduntur, vel subtrahuntur non secus, ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam eiusdem ordinis multiplicata producit quantitatem infinitam ordinis secundi. At qnantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantititatem infinitam eiusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cuiusuis ordinis per aliam quantitatem ordinis cuiuscumque multiplicata euehitur ad illum infiniti gradum, cuius exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione, si quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem infinitam ordinis cuiuslibet diuidatur, habetur quantitas, cuius gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitesima cuiuslibet gradus per quantitatem infinitesimam ordinis cuiuscumque multiplicetur, aut diuidatur; in primo casu quantitas infinitesima ad eum deprimetur gradum, qui per exponentium summam exhibetur: in casu autem altero quantitas infinitesima ad eum gradum euehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repraesentatur, ita vt quantitas infinitesima per diuisionem fieri possit finita, atque etiam infinita. Haec pauca dicta sint *de primarum, & vltimarum rationum* methodo, quam quidem ad methodum *exhaustionum* reuocari posse intelligitur.

APPENDIX.

De proportionum vsu in triangulorum resolutione, siue de Trigonometria.

I. EX linearum proportione tota pendet *Trigonometria*, quae est ars resoluendi triangula. In triangulo autem sex partes considerari possunt, nempe tres anguli, & tria latera. Huc autem refertur Trigonometriae praxis, vt datis tribus ex sex partibus trianguli, partes reliquae inuenianturniantur: ac proinde tres partes datae, constituere debent tres primos proportionis terminos, & terminus quartus erit pars quaesita. Verum quia latera trianguli expressam rationem non habent cum angulis, quorum mensura sunt arcus circuli; angulis, vel arcubus circuli substituuntur lineae rectae, quae arcus illos exhibeant, & trianguli lateribus proportionales sint. Harum linearum definitiones afferemus, & proprietates demonstrabimus.

Sit angulus quilibet ACB (Fig. 21.), ex cuius vertice C, tamquam centro, & radio ad arbitrium sumpto describatur circulus AHaG. Producatur AC in a, erigaturque in C perpendicularis CH; euidens est, angulum BCH, vel arcum HB esse *complementum* anguli ACB, vel arcus AB, angulus BCa, vel arcus Ba est *supplementum* anguli ACB, vel arcus AB, & viceuersa BA est *complementum* ipsius HB, & *supplementum* ipsius aB. Recta BD ex radii extremitate B ad radium CA perpendiculariter ducta dicitur *sinus* arcus AB, vel anguli ACB. Recta AE ex radii extremitate A perpendiculariter ducta & radio alteri occurrens in E vocatur *tangens* arcus AB; recta autem BE eiusdem arcus *secans* appellatur. Pars AD radii inter arcum, & sinum comprehensa dicitur *sinus versus* arcus AB. Perpendicularis BI dicitur *sinus complementi* arcus AB; perpendicularis HK *tangens complementi*, & HI *sinus versus complementi* arcus AB. Compendii ergo sinus complementi, tangens complementi, cet. dicuntur *Cosinus*, *Cotangens*, *Cosecans*, *Cosinus versus*. Breuitatis causa scribuntur R pro radio; sin. pro sinu; tang. pro tangente; sin. v. pro sinu verso.

II. Ex his definitionibus multa colliguntur

1°.

1°. Sinus, cosinus, tangens, cotangens, cet. anguli obtusi BCI sunt etiam sinus, cosinus, cet. anguli acuti ACB, qui est anguli obtusi supplementum. Nam ex radii altervtrius extremitatibus B, vel a demitti non potest perpendicularis, quae non cadat in radium alterum productum; tales sunt perpendiculares DB, ad; similiter tangens alia esse non potest, quam ae: sed ob triangula aCd, BCD, & Cae, CAE aequalia, habetur ad = BD, & ae = AE. Cum autem sit arcus BH complementum arcus AB, euidens est, BI esse cosinum arcus AB & HK illius cotangentem. 2. Sinus BD arcus AB est dimidium chordae BG, arcum duplum BAG subtendentis. (Prop. 1. cap. 2.)

3°. Sinus crescunt crescentibus angulis a 0° vsque ad 90 gr., & eodem modo decrescunt a 90. gr. vsque ad 180 gr. 4.° Sinus arcus 30. gr. dimidio radio aequalis est; est enim radius aequalis chordae arcus 60. gr. (cor. 4. prop. 5. cap. 3.) & eiusdem arcus sinus est dimidia chorda arcus dupli. Itaque in triangulo rectangulo latus oppositum angulo 30 gr. est dimidia hypothenusa huius trianguli. Nam si ACB = 30 gr., erit BG = BC, & BD = $\frac{1}{2}$ BC. 5°. Tangentes crescunt, crescentibus angulis a 0° vsque ad 90 gr., ita vt tangens arcus gr. 90 sit infinita; nam radius CH in angulo recto HCA non potest concurrere cum tangente. 6°. Tangens arcus 45 grad. aequalis est radio; nam si angulus ACB sit 45 grad. triangulum rectangulum CAE erit isosceles, & AE = AC. 7°. Sinus versus AD arcus, qui minor est 90.

90. gr. aequalis est differentiae inter radium CA, & cosinum CD = = BI Praeterea cosinus versus HI est differentia inter radium CH, & sinum CI = = BD, at sinus versus supplementi nempe Da aequalis est summae radii, & cosinus. 8°. Ob triangula rectangula similia CDB, CAE, CIB, CHK, erit CA : CD, vel BI = = AE : BD, nempe radius est ad cosinum, vt tangens ad sinum. Deinde haec alia habetur analogia CH : CI, vel BD = = HK : IB, hoc est, radius ad sinum, vt cotangens ad cosinum. Tandem AE: CA = = CH, vel CA : HK; hoc est tangens ad radium, vt radius ad cotangentem. 9°. Ex praecedentibus analogiis deriuantur formulae, quarum ope sinus substituuntur tangentibus, & viceuersa. Sit R = = 1; erit Sin. = = Cos. X Tang.

$$= = \frac{\text{Cos.}}{\text{Cot.}};\ \text{Cos.} = = \text{Sin.} \times \text{Cot.} = = \frac{\text{Sin.}}{\text{Tang.}};$$

$$\text{Tang.} = = \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} = = \frac{1}{\text{Cot.}};\ \text{Cot.} = \frac{\text{Cos.}}{\text{Sin.}}$$

$$= \frac{1}{\text{Tang.}};\ \text{Cot. A} \times \text{Tang. A} = 1 = \text{Cot. B} \times$$

Tang. B. 10. In omni triangulo sinus angulorum sunt, vt latera angulis opposita. Etenim triangulum circulo inscribatur: singula latera sunt chordae arcus dupli, qui est mensura anguli oppositi. Quare dimidium latus est sinus anguli oppositi. Sed semisses sunt inter se, vt tota;

ta ; ergo latera sunt, vt sinus angulorum oppositorum. Hinc cum sinus anguli recti sit radius, & latus oppositum sit hypothenusa, erit in triangulo rectangulo radius ad hypothenusam, vt sinus anguli vnius acuti ad latus eidem angulo oppositum. 11. In triangulo rectangulo cosinus anguli vnius acuti est sinus anguli alterius ; ergo sinus anguli vnius acuti est ad suum cosinum, vt latus huic angulo oppositum est ad latus alterum; sed sinus est ad cosinum, vt tangens ad radium; ergo in triangulo rectangulo tangens anguli vnius acuti est ad radium, vt latus huic angulo acuto oppositum est ad latus alterum. 12. In triangulo quolibet ABC (Fig. 22.) haec semper habetur analogia : maius latus AC est ad summam duorum aliorum laterum AB + BC, vt eorumdem laterum differentia AB — BC ad differentiam segmentorum AE, & CE, quae fiunt ducta ex angulo maiori B in maius latus AC perpendiculari BE. Nam si anguli vertice B tamquam centro, & radio; qui sit minori lateri aequalis BC, describatur circulus GCD, producto latere AB in G; erit $AG = AB + BC$, & $AP = AB - BC$; atque ob $CE = ED$, erit $EA - CE = AD$, ac tandem $AC : AG = AP : AD$.

III. Si in arcu quolibet AB (Fig. 21.) detur sinus, aut cosinus, sinusuersus, aut cosinusuersus, ex vno dumtaxat dato tria reliqua inueniuntur. Nam $CD = \sqrt{CB^2 - BD^2}$ & $\text{Cos.} = \sqrt{R.^2 - \text{Sin.}^2}$. Praeterea $DA = CA - CD$, & $\text{Sin. versus} = R - \text{Cos.}$ Tandem $HI = CH - CI$, & $\text{Cos. versus} = R - \text{Sin.}$ Initis calcuculis in arcu quolibet pro dimidio vel duplo arcu calculus facile institui potest. Nam (Fig. 23.) ducta chorda BA, & ex puncto C demissa perpendiculari CE, datisque BD, DA; erit BA $= \sqrt{BD^2 + DA^2}$. Quare FA, vel Sin. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{Sin.}^2 + \text{Sin. vers.}^2}$ Et CF $= \sqrt{CA^2 - AF^2}$. Ergo Cos. $\frac{1}{2} = \sqrt{RR - \text{Sin.}^2 \frac{1}{2}}$. Praeterea si habetur AE, tamquam arcus datus, similia erunt triangula FCA, DBA; quare CA : CF = AB : BD, vel R : Cos. arc = 2. Sin. arc : Sin. arcus dupli. Quod facile colligitur ex praecedentibus, sed tamen demonstratur. Datis enim sinubus BD, KL duorum arcuum AB, KB, habetur sinus KM illorum summae (Fig. 24.), vel illorum differentiae (Fig. 25.). Etenim datis CD, CL, erit CB : CL = BD : LP, vel OM; ergo OM $= \dfrac{\text{Sin. AB} \times \text{Cos. KB}}{R}$

Praeterea ob triangula rectangula similia KOL, OLQ, CMQ, CBD (Fig. 24.) & KOL, KMQ, CQL, CBD (Fig. 25.) in triangulis KOL, CBD erit CB : CD = KL : KO $= \dfrac{\text{Sin. KB} \times \text{Cos. AB}}{R}$. Hinc facto R = 1, erit KM, vel Sin. BK ± AB = Sin. BK X Cos. AB ± Sin. AB X Cos. KB. Sit arcus AB 30 gr.

gr. (Fig. 26.) & BF = BK; ob triangula rectangula similia SIF, SQG, erit angulus IFS = GQS = BCA = 30 gr. Ergo angulus KFS = 30 gr. Quare GK = $\frac{1}{2}$ FK = IK = FI. Sed $FK^2 - GK^2 = FG^2$ vel $4IK^2 - IK^2 = FG^2$. Ergo $3IK^2$ vel $IK^2 \times 3 = FG^2$. Quare IK $\times \sqrt{3}$ KM = FN, & IK $\times \sqrt{3}$ + KM = FN; hoc est, sinus MK arcus KA, minoris scilicet, quam 30 gr. & sinus KI, differentiae scilicet inter hunc arcum, & 30 gr. per $\sqrt{3}$ multiplicatus simul sunt aequales sinui FN arcus FA, qui tanto maior est arcu 30 gr. quanto arcus KA minor est. Ob arcum FI = GK, erit FT + GK = KO, nempe sinus FT arcus HF minoris, quam 60. gr. & sinus FI, differentiae scilicet inter hunc arcum, & 60 gr. simul aequantur sinui KO arcus HK, qui tanto maior est arcu 60 gr. quanto FK minor est. Ita Sin. 55 gr. + Sin. 5 gr. = Sin. 60 gr. Itaque demonstrauimus principia, quorum ope formari possunt sinuum, & tangentium tabulae. Illae autem tabulae commoditatis ergo per logarithmos construuntur, cuius quidem constructionis ratio ex logarithmorum doctrina iam explicata intelligitur.

III. In omni triangulo ABC (Fig. 22.) summa duorum laterum quorumcumque AB + BC est ad illorum differentiam AB — BC, vt tangens semisummae duorum angulorum A, & C, qui his lateribus opponuntur, ad tangentem semidifferentiae eorumdem angulorum. Etenim sit P semisumma angulorum A, & C: & Q illorum semidifferentia. Erit angulus maior C = P + Q,

&

& minor A $= P - Q$. Iam (ex dem.) $AB : BC = \text{Sin. } C : \text{Sin. } A = \text{Sin. } P + Q : \text{Sin. } P - Q = \text{Sin. } P \times \text{cos. } Q + \text{cos. } P + \text{Sin. } Q : \text{Sin. } P \times \text{cos. } Q - \text{cos. } P \times \text{Sin. } Q$. Ergo $AB \times \text{Sin. } P. \times \text{cos. } Q - AB \times \text{cos. } P \times \text{Sin. } Q = BC \times \text{Sin. } P \times \text{cos. } Q + BC \times \text{cos. } P \times \text{Sin. } Q$; vel $\overline{AB - BC} \times \text{Sin. } P \times \text{cos. } Q = \overline{AB + BC} \times \text{cos. } P \times \text{Sin. } Q$. Quare diuidendo per cos. $P \times$ cos. Q, factaque reductione, habebitur $\overline{AB - BC} \times \frac{\text{Sin.} P}{\text{cos.} P} = \overline{AB + BC} \times \frac{\text{Sin. } Q}{\text{Cos. } Q}$. Sed $\frac{\text{Sin.}}{\text{cos.}} = \text{tang.}$ Ergo $\overline{AB - BC} \times \text{tang. } P = \overline{AB + BC} \times \text{tang. } Q$. Quare $AB + BC : AB - BC = \text{tang. } P : \text{tang. } Q = \text{tang. } \frac{A + C}{2} : \text{tang. } \frac{A - C}{2}$.

IIII. His principiis vniuersa innititur Trigonometria. Et quidem in triangulorum resolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum, & angulus, vel duo anguli, & latus vnum. Porro datis in triangulo tribus, quae iam diximus, reliqua inueniuntur per hactenus demonstrata. At monendum est, datis tribus angulis dumtaxat, inueniri tantum rationem laterum, quae sunt, vt sinus angulorum oppositorum; minime autem inuenitur eorum valor, cum infinita possint construi triangula similia inaequalia. Neque etiam sine obseruatione praetermittendus est casus, in quo dantur duo latera, & angulus alter-

vtri

vtri lateri oppositus. Casus ille est ambiguus, & duas solutiones potest admittere; cum (ex dem.) sinus anguli acuti sit quoque sinus complementi ad duos rectos. Quare, vt tollatur ambiguitas, nota sit, oportet anguli species, hoc est, notum esse debet, an angulus sit acutus, vel obtusus.

In omnibus Trigonometriae libris reperiuntur sinuum, & tangentium tabulae. Quamuis autem ex hactenus demonstratis manifestum sit, quo artificio construantur: id tamen breuiter declarabimus. Dato sinu graduum 30 per antea demonstrata, inueniri possunt sinus gr. 15, deinde $7\frac{1}{7}$, postea $2\frac{1}{4}$, & ita sinum semisses, progrediendo vsque ad duodecimam operationem, nempe vsque ad $52^{\prime} 43^{\prime\prime\prime} 3^{\prime\prime} \frac{1}{4}$; qui quidem sinus sine errore sensibili cum arcu confunditur; quia vero sinus illi minimæ sunt arcubus proportionales, dici potest: vt arcus ille minimus est ad suum sinum; ita arcus $1^{\prime}$ est ad suum sinum. Dato autem sinu arcus $1^{\prime}$, inuenietur sinus arcuum $2^{\prime}\ 3^{\prime}\ 4^{\prime}$, cet. & ita deinceps vsque ad 30 gr. Tandem á 30 gr. vsque ad 60 gr., & á 60 gr. vsque ad 90 gr. progredi licebit: quo facto tangentes ad calculum reuocare iam facile erit.

SECTIO II.

De Geometria superficierum.

CAPUT I.

De praecipuis planarum superficierum proprietatibus.

PROP. I. *Tri a puncta, quae in eadem recta non iacent, plani positionem determinant.* Id patet ex diffinitione ipsius plani. Et quidem per tria puncta duci potest planum, quod euidens est; illud vero planum vnicum esse, manifestum est; ponamus enim, planum aliud, quod cum primo in tribus punctis congruat, in aliis autem ab ipso defectat: in eadem linea recta, quae primo in plano iaceret, alteri plano aptari perpetuo non posset, neque secunda superficies illa foret omnium intra eosdem terminos ductarum breuissima; quod est contra definitionem plani. Ergo per tria puncta vnicum planum duci potest; ac proinde constans est, ac determinata positio plani per data tria puncta transeuntis.

COR. I. Duae rectae se inuicem secantes sunt in eodem plano. Nam punctum intersectionis, & punctum quodlibet aliud in binis lineis pro arbitrio sumptum, tria sunt puncta in directum non posita, quae proinde determinant positionem plani, in quo iacent duo vtriusque lineae puncta ac proinde & totae binae lineae (ex def.)

COR. II. Si duae rectae iacentes in eodem pla-

plano tertia recta secentur, recta secans in eodem quoque iacebit plano. Nam duo eiusdem lineae puncta, duae scilicet intersectiones, sunt in eodem plano. Si autem ponamus, duas rectas se mutuo secare, patet, in hoc casu demonstrationem non valere, nisi tertia linea secans extra punctum intersectionis transeat; alioquin vnicum haberetur punctum, quod rectae positionem non determinat.

COR. III. Duorum planorum intersectio est linea, cuius singula puncta iacent in vtroque plano. Patet autem, tria puncta duobus planis communia esse non posse, nisi iaceant in directum. Cum enim tria puncta, quae non sunt in eadem recta, positionem plani determinent; si tria puncta in directum non posita duobus planis communia esse possunt, iam tria puncta positionem plani non determinarent. Quare planorum duorum intersectio est linea recta.

COR. IIII. Recta ad planum perpendicularis, insistit quoque perpendiculariter ad rectas singulas in eodem plano iacentes & per extremitatem perpendicularis transeuntes. Etenim ponamus, rectam illam ad planum perpendicularem, non insistere perpendiculariter ad aliquam ex praedictis lineis; iam linea illa infra planum deprimitur, vel attollitur supra idem planum; ac proinde non iaceret in eodem plano (quod est contra hypoth.)

COR. V. Duae rectae ad idem planum perpendiculares, vel aequaliter inclinatae, sunt inter se parallelae, & contra. Etenim rectarum illarum extremitates communi recta in plano iungantur; duae illae lineae ad planum perpendiculares, vel aequaliter inclinatae erunt quoque perpendiculares, vel aequaliter inclinatae ad eamdem lineam iun-

iungentem : est enim in eodem plano. Quare (ex parallelarum def.) rectae illae erunt parallelae, & viceuersa.

Prop. 2. Duo plana sibi mutuo inclinata easdem habent proprietates, quas de rectis ad se inuicem inclinatis demonstrauimus.

Ponamus, planum aliquod A immobile, in quo iaceat planum aliud B lineis rectis terminatum, qualia sunt polygona rectilinea : haec duo plana, vtpote omni crassitie destituta, in vnum coalescunt planum. At si planum B reuolui intelligatur circa latus aliquod plani A, fixum perpetuo manens, totum plani motum sibi facile quisque repraesentabit. Et quidem 1°. ab ipso motus initio nihil duobus planis manebit commune praeter rectam, circa quam planum B reuoluitur ; quae proinde est vtriusque plani intersectio. 2°. planum illud singulos percurret inclinationis gradus, si tamdiu conuertatur, donec ad oppositam plani A partem perueniat. 3°. Planum reuoluens plano immoto fiet perpendiculare, vbi ad eum perueneris situm, in quo non magis pendeat ex vna parte, quam ex alia. 4°. Singulos inclinationis gradus metietur arcus circuli, cuius centrum perpetuo manebit in communi planorum intersectione. Quia vero centrum in ipso circuli plano iacet, necessum est, huius arcus centrum esse in linea recta, cuius reuolutione generatur ipsum arcus planum. 5°. Si concipiapiatur linea quaedam sublimis, cui perpendiculariter affixa sit recta alia; haec recta planum describet, interea dum linea sublimis, circa seipsam conuertitur, in eodem perpetuo manens loco. Si autem duae lineae sibi inuicem non forent perpendiculares, iam figura reuoluendo descripta plana non foret; sed ex vna parte conuexa, & ex altera concaua, vt patet. Quare ex ipsa plani formatione euidens est, reuolutione rectae planum describi non posse, nisi recta reuoluens sit ad lineam,

in qua reuoluitur, perpendicularis. 6^o. Centrum arcus, in quo sumuntur gradus inclinationis plani vnius ad aliud, positum est in perpendiculari ex puncto quolibet arcus ad planorum intersectionem ducta. Quare si describatur semicirculus, cuius centrum sit in linea duobus planis communi, & cuius planum sit ad planum immotum perpendiculare; per huius semicirculi gradus metiri licebit omnes plani mobilis inclinationes. Quare generatim plana duo ad se inuicem inclinata easdem habent proprietates, quae in mutua linearum inclinatione demonstrantur.

COR. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit, vel duobus rectis aequales (Prop. 1. cap. 1.)

COR. II. In planorum intersectione aequales sunt anguli ad verticem oppositi. (Cor. 2. Prop. 1. cap. 1.)

COR. III. Si plana quotlibet eamdem habeant communem intersectionem, summae angulorum omnium est 360 gr. (Cor. 1. Prop. 1. cap. 1.)

COR. IIII. Ex puncto dato extra planum, vel intra planum, vnica perpendicularis ad planum duci potest. (Cor. 4. prop. 1. cap. 1.)

COR.

COR. V. Distantia puncti alicuius à plano dato, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (ex def.)

COR. VI. Planum secans duo, vel plura plana parallela, efficit angulos alternos externos aequales, item aequales angulos alternos internos. Praeterea angulus internus alterius interni supplementum est, atque etiam angulus externus est supplementum alterius (Prop. 2. cap. 1.)

COR. VII. Si duo, aut plura plana parallela alio plano secentur, communes intersectiones erunt parallelae. Si enim non sint parallelae, sibi occurrere possunt, ac proinde & plana ipsa, in quibus hae lineae iacent; ideoque plana non forent parallela, quod est contra hyp.

CAPVT II.

De superficierum mensura.

PROP. I. *Superficies parallelogrammi rectanguli aequalis est producto ex basi in altitudinem.* Sit parallelogramum rectangulum ABCD (Fig. 26.) cuius altitudo AD certum contineat pedum numerum: E. G. 7; basis autem AB contineat 8. Diuisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies, vt DM, quae singulae continent octo minores superficies quadratas, siue octo pedes *quadratos*, vt vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati, qui prima superficie continentur, toties sumantur, quot sunt aequales superficies, vt DM; ac proinde superficies tota parallelogrammi erit 7×8, nempe 56 pedum quadratorum. Euidens est, in hac demonstratione, fingi posse aliud quemlibet partium numerum, atque eadem valet demonstratio, etiamsi altitudo, & basis parallelogrammi ponantur *incommensurabiles*, vt patet ex Prop. 1. cap. 4.

COR. I. Si parallelogrammum BD per diagonalem diuidatur, habebuntur triangula duo rectangula aequalia, quorum proinde superficies, vtpote dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex basi in altitudinem.

Eadem est demonstratio pro triangulo quolibet, etiam non rectangulo. Si enim triangulum CAB (Fig. 27.) non rectangulum. Ex puncto A demittatur perpendicularis AD, compleaturque rectangulum FCBE, erit triangulum CAD dimidium rectanguli FACD, & triangulum DAB dimidium rectanguli DABE. Quare vt ante, superficies trianguli est dimidium productum ex basi in altitudinem.

Idem patet, etiamsi perpendicularis EB trianguli CED cadat extra basim. Nam triangulum DEB est dimidium rectanguli DAEB, & triangulum CEB est dimidium rectanguli CFEB; ergo triangulum

$$CED, \text{ seu } CEB - DEB = \frac{1}{2}\, CB\times AD - \frac{1}{2}\, DB\times AD \times \frac{CB - DB}{2} \times AD \times \frac{1}{2}\, CD\times AD;$$ ac

proinde trianguli cuiuslibet superficies, aequalis est dimidio producto ex basi in altitudinem.

COR. II. Cum parallelogrammum quodlibet diuidi possit in duo triangula aequalia, quae ipsam habeant parallelogrammi basim, eamdemque al-

altitudinem; patet generatim, superficiem parallelogrammi cuiuscumque esse productum ex basi in altitudinem.

COR. III. Quotlibet triangula, ideoque etiam quotlibet parallelogramma inter easdem parallelas, & super eadem vel aequali basi constituta sunt aequalia. Ergo etiam triangula inter easdem parallelas cum parallelogrammis constituta, & super eadem basi sunt parallelogrammorum dimidia, ac proinde etiam inter se aequalia. Ex hac propositione pendet vulgaris demonstratio theorematis, quod alio modo iam demonstrauimus; nempe *quadratum hypothenusae in triangulo rectangulo aequale esse quadratis laterum*. Hanc vero Geometriae foecunditatem, totiusque doctrinae geometricae coniunctionem, variis exemplis Tyronibus saepe ostendere debet peritus magister.

COR. IIII. Cum triangula sint, vt dimidium productum ex basi in altitudinem, erunt etiam, vt productum totum; hoc est, triangulorum superficies sunt in ratione composita basium, & altitudinum; ac proinde si bases fuerint aequales, triangula erunt inter se, vt altitudines; si autem altitudines fuerint aequales, erunt inter se, vt bases.

COR. V. Si altitudo trianguli vnius, sit ad trianguli alterius altitudinem, vt basis secundi trianguli ad basim primi, hoc est, si bases sint in ratione inuersa altitudinum, triangula sunt aequalia. In hoc enim casu habetur proportio, in qua productum extremorum aequale est producto mediorum, hoc est, productum ex altitudine primi trianguli in basim, aequale est producto ex altitudine secundi trianguli in suam basim, ideoque triangula sunt aequalia; & viceuersa si triangula sunt aequalia, erunt bases in ratione inuersa altitudinum.

COR. VI. In triangulis similibus, superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Etenim cum triangula sint in ratione composita basium, & altitudinum, atque (ex hyp.) sint similia, loco basis substitui poterit altitudo & contra. Quare triangula similia sunt, vt quadrata laterum homologorum.

Prop. 2. Superficies polygoni regularis aequalis est dimidio producto ex perpendiculari per centrum polygoni ad latus vnum demissa in polygoni circumferentiam. Etenim triangula omnia, in quae resoluitur polygonum regulare, sunt aequalia (Prop. 5. cap. 3.) ideoque eamdem habent altitudinem CI (Fig. 11.) Sed superficies polygoni regularis = CI

$$\times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE, \text{ cet.}$$

Quare cum AB + BD + DE, cet. sit tota polygoni peripheria; patet, superficiem totam polygoni aequalem esse producto ex altitudine CI in dimidiam polygoni peripheriam, vel dimidio producto ex peripheria polygoni in altitudinem.

COR. I. Superficies circuli, aequalis est dimidio producto ex radio in circumferentiam.

COR. II. Si ex centro circuli ad circumferentiam ducantur radii duo, pars circuli duobus radiis, & arcu comprehensa *Sector* dicitur. Euidens autem est, huius sectoris superficiem, aequalem esse dimidio producto ex arcu in radium.

Prop. 3. Figurarum similium superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Etenim triangula homologa, in quae reducuntur figurae similes, sunt earumdem figurarum partes similes (Prop.

(Prop. 4. cap. 4.) ac proinde triangula homologa erunt, vt polygona tota, sed triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum; ergo in eadem etiam ratione sunt figurae similes quaelibet.

COR. I. Superficies circulorum sunt, vt quadrata radiorum: vel diametrorum.

SCHOL. Ex propositionibus praecedentibus nota quidem est ratio, quam habent variae circulorum peripheriae, atque etiam illorum superficies ad suos radios. At ratio accurata inter circuli circumferentiam, illiusque diametrum nondum definiri potuit, ita vt magnitudine diametri numeris expressa, numeris accurate exprimi non possit circuli circumferentia, ac proinde nec ipsa circuli superficies. In hoc sensu intelligi debet, quod vulgo dicitur, nondum scilicet inuentam esse circuli *quadraturam*, quod quidem *quadraturae* nomen adhiberi solet, eo quod *quadratum* sit cuiuslibet superficiei communis mensura, vt iam demonstrauimus. Eo igitur reducti sunt Geometrarum conatus, vt ad illam quadraturam proxime, & quantum voluerint, accedant; hanc tamen accurate non attingant. Qua ratione autem hanc *approximationem* tentare soleant Geometrae, & ex ipsis elementis licebit intelligere. Diuisus concipiatur circulus primo in quatuor partes aequales, deinde in 8, in 16, in 32, in 64, in 128, cet. prout cuique libuerit: & concipiamus per ea diuisionum puncta, tangentes & chordas respectiue ductas: habebuntur polygona duo, quorum vnum *inscriptum* circulo, alterum autem *circumscriptum*; quae quidem ambo constant triangulis aequalibus. Porro per methodos explicatas, in his triangulis haberi semper

per poterunt bases, quae in primo casu sunt circulorum chordae, in altero autem tangentes; ac proinde omnium quoque chordarum, & tangentium summa innotescet, hoc est, perimeter polygoni inscripti, quae circuli circumferentia proxime minor est, & polygoni circumscripti perimeter, quae proxime maior est: ita vt defectus, vel excessus, quantum cuique placuerit, tenuis sit, & intra angustissimos limites contrahatur. Hac methodo Archimedes inuenit, diametrum ad peripheriam esse in ratione 7 ad 22; ita vt exiguus omnino sit peripheriae sic inuentae excessus supra veram. Haec eadem ratio subtilius ab aliis quaesita est, & statuitur, vt 1 ad 3. 14159265, cet. perductis decimalibus numeris vsque ad notas 127: quae quidem *approximatio* est fere infinita. Sed omnium vulgatissima ratio diametri ad peripheriam ea est, quam exprimunt numeri 113 & 355. Quare data circuli diametro habebitur peripheria, si haec fiat proportio 113 ad 355, vt diameter data ad peripheriam quaesitam, haec multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur superficies circuli, siue, vt vocant, *area*. Haec pauca dicta sint de ratione diametri ad peripheriam, siue de quadratura circuli, quam audacter se inuenisse non raro iactitant viri Geometriae imperiti, qui ipsum quidem quaestionis statum, vt plurimum, non intelligunt.

Simili methodo figura quaelibet curuilinea generatim diuidi potest in partes rectilineas. Aliquando, per Geometriam sublimiorem, figurae curuilineae area accurate haberi potest; sed commodissima, & generalis est praxis, qua figurae curuilineae circumferentia in minimas partes, & *physice* rectilineas diuiditur, & deinde figurae totius area in-

inuestigatur, vt fieri solet in polygonorum mensura.

Porro dum superficierum magnitudinem *pedibus quadratis*, aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet tamquam contrarium iis, quae de numerorum *concretorum* multiplicatione demonstrauimus in Arithmetica; non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies inuenitur, multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc vnum significant Geometrae; si nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quaelibet a pro communi basium, & altitudinem mensura, & sit B numerus integer, aut fractus, rationalis, vel irrationalis exprimens, quoties basis parallelogrammi vnius contineat quantitatem a; atque H exprimat, quoties altitudo eiusdem parallelogrammi eamdem contineat mensuram. Item sit b numerus exprimens, quoties mensura a contineatur in basi alterius parallelogrammi; h autem exponat, quoties altitudo parallelogrammi eiusdem contineat mensuram a; parallelogrammorum illorum superficies erunt inter se; vt productum ex duobus numeris B & H ad productum ex numeris duobus b & h. Haec est genuina huius operationis notio. Quare dum dicitur, parallelogrammi superficiem aequalem esse producto ex basi in altitudinem, *aequalitas* proprie dicta intelligi non debet; sed mera proportio. Haec eadem obseruatio ad Physicam saepe transferri debet, vbi de spatii, velocitatis, & temporis mensura sermo est.

SE-

SECTIO III.

De Geometria solidorum.

CAPUT I.

De Solidorum genesi, & proprietatibus.

PROP. I. *Solidorum rectilineorum genesim explicare.* Si figura rectilinea AGR supra immotam rectam AE (Fig. 28.) motu sibi semper parallelo feratur; solidum AGROFE inde genitum *prisma* dicitur; & *rectum* vocatur, si AE describenti plano recta fuerit, sin minus, *obliquum*. Si planum describens fuerit parallelogrammum, solidum inde genitum dicitur *parallepipedum*. Si autem planum describens sit quadratum, solidum *cubus* nuncupatur. Basis solidi, seu planum describens potest esse polygonum quodlibet, & solidum inde genitum *prismatis* nomen retinet, si e singulis polygoni angulis extra planum consurgant lineae aequales, & parallelae terminantes rectilineam solidi faciem, at si rectae lineae in apicem coeunt, solidum *pyramis* dicitur (Fig. 29.)

COR. I. Prisma igitur opposita latera AGR, EFO aequalia habet, similia, & parallela; cum AGR fluendo per AE motu sibi semper parallelo tandem congruat cum EFO. Praeterea dum planum AGR motu sibi parallelo describit prisma AGROFE, latera AG, GR, RA motu sibi semper parallelo describunt parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA; ac proinde prisma tot

pa-

parallelogrammis circumcirca terminatur, quot sunt latera plani describentis.

COR. II. Parallepipedum sex parallelogramis terminatur: cubus autem sex quadratis aequalibus. Nam praeter facies quatuor, parallelo laterum motu genitas, sunt etiam facies duae oppositae parallelo basis motu descriptae. Illa autem basis in primo casu est parallelogrammum, in altero autem quadratum.

COR. III. In pyramide si omnia latera basis sunt aequalia inter se, & latera rectilinea ipsius pyramidis, pariter inter se aequalia, erunt omnes facies triangula isoscelia aequalia.

COR. IIII. Quaeuis sectio prismatis, vel pyramidis facta plano basi parallelo est figura prorsus similis basi. Etenim sectionis parallelae singula latera sunt singulis lateribus basis parallela; cum sint intersectiones planorum parallelorum cum iisdem planis. Quare singuli anguli homologi erunt aequales (Prop. 2. cap. praec.); ac proinde sectio basi similis est.

COR. V. In prismate, sectio basi parallela ipsi basi aequalis est: in pyramide autem latera sectionis homologa sunt minora, in ratione distantiae sectionis á vertice, ad distantiam basis ab eodem. In prismate patet aequalitas, cum facies sint parallelogramma; ac proinde latera sectionis homologa aequalia sunt lateribus basis; ideoque sectio prorsus aequalis est basi. In pyramide proportio etiam patet: nam ob sectionem parallelam in vnaquaque facie habebuntur triangula duo similia.

COR. VI. Omnia prismata collata inter se, atque etiam omnes pyramides inter se comparatae, si super basibus aequalibus, inter eadem

pla-

plana parallela constituantur, solida respectiue aequalia comprehendunt. Secentur enim quotcumque plana, quae sint basibus parallela; sectiones vnius prismatis, vel pyramidis aequales semper erunt sectionibus respondentibus alterius. Nam in prismate omnes erunt aequales eidem basi; in pyramide erunt ipsi basi similes, & singula latera in vna pyramide erunt ad latera homologa in pyramide altera in eadem data ratione, nempe in ratione distantiae basis à vertice ad sectionis distantiam ab eodem vertice, quae quidem ratio eadem est, vt patet; cum pyramides terminentur plano basium, & sectionum planis paralleló. Porro solida illa concipi possunt, tamquam composita ex iis omnibus sectionibus, quarum singulae cum singulis aequales sint; ergo erunt & ipsa solida aequalia.

COR. VII. Pyramides basium aequalium in eumdem apicem desinentes, vel eamdem vtcumque altitudinem habentes sunt aequales. Nam per communem verticem ductum intelligitur planum basium planis parallelum; pyramides semper erunt super aequalibus basibus, & in iisdem planis parallelis. Similiter si bases in eodem plano constituantur, vertices in eadem altitudine, ad idem planum basibus parallelum terminabuntur.

COR. VIII. Si pyramides eamdem habeant altitudinem; erunt inter se, vt bases. Etenim basis maior diuisa intelligatur, si fieri possit, in partes basi minori aequales; concipi poterit pyramis maior tamquam composita ex diuersis pyramidibus, quae basim habeant basi minori aequalem; sed pyramides illae singulae erunt minori pyramidi aequales; ergo pyramis maior est ad minonorem, vt pyramidum aequalium numerus in maiori pyramide, ad pyramidem minorem, hoc est, pyramydes illae sunt inter se, vt bases.

At si basis maior minorem basim non contineret accurate, sed tamen habeant aliquam communem mensuram; diuidi fingantur bases in partes huic mensurae communi aequales: iam pyramides duae, tot alias continebunt pyramides aequales, quot sunt in vtraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides sunt etiam, vt bases.

Tandem si pyramidum bases forent incommensurabiles, adhibeatur aliqua mensura, quae minuatur in infinitum, donec fiat vtriusque basis mensura communis, quemadmodum dictum est de figurarum similitudine; eodem modo patet; in hoc etiam casu, pyramides esse inter se; vt bases.

PROP. II. *Solidorum curuilineorum genesim explicare.* Si recta sublimis motu sibi semper parallelo, circuli circumferentiam radat, figura solida hoc motu genita (Fig. 29.) *cylindrus* dicitur. At si recta per aliquod punctum fixum, & sublime perpetuo transiens, altera extremitate radat circuli circumferentiam, solidum AGM (Figur. 30.) hoc motu genitum, *conus* vocatur. Vtriusque autem figurae *basis* vocatur circulus, cuius circumferentiam recta percurrit. Patet, cylindrum duobus circulis, conum autem circulo vnico terminari. Recta per vtriusque circuli centrum in cylindro transiens, in cono autem per basis centrum, ipsumque coni verticem, *axis* dicitur. Si axis sit perpendicularis basi, cylindrus, vel conus *rectus*, solidum genitum appellatur; secus au-

autem, *obliquus* vocatur. Si autem basis fuerit quaeuis alia curua, solidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum*. Fig. 29. refert cylindrum rectum, figura autem 30. conum rectum repraesentat. Si semicirculus AHB (Fig. 31.) circa immotam diametrum AB in orbem ducatur, donec ad pristinum situm redeat, solidum inde genitum *sphaera* dicitur.

COR. I. Si basis prismatis, vel pyramidis, aucto numero laterum, & imminuta magnitudine in infinitum, abeat in curuam continuam, prisma abit in solidum cylindricum, pyramis in conoidicum. Item prisma, cuius latera sunt perpendicularia basi, mutatur in cylindrum rectum; pyramis vero, in qua basis latera sunt aequalia, & distantiae à vertice aequales, abit in conum rectum.

COR. II. Si sphaera plano quouis secetur, sectio erit circulus, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphaerae, ac deinde erit maior, vel minor, prout planum sectionis magis, vel minus recedet à centro sphaerae. Si enim sectio FIH, ad cuius planum ducatur diameter perpendicularis AB, quae plano secanti occurrat in E. Si punctum E congruat cum centro C: patet, rectas EI fore radios sphaerae. Si autem cadat extra in triangulis CEI, CEF, anguli ad E erunt recti, latus CE commune, & basis CI = = CF; quare quoduis latus EI = = EF, ac proinde in vtroque casu sectio erit circulus, cuius centrum E; illud vero centrum, in primo casu coincidet cum centro sphaerae. Patet autem, ob angulum rectum in E, radium circuli EF semper minorem fore radio sphaerae CF, ni-

nisi radii illi congruant; abeunte E in C. Euidens etiam est, eo minorem fore chordam HF, nempe circuli diametrum, quo maior fuerit distantia CE.

COR. III. Sphaera considerari potest tamquam composita ex pyramidulis aequalibus, numero infinitis, & infinite paruis, quarum bases sunt in ipsa sphaerae superficie, vertex autem communis est ipsum sphaerae centrum.

SCHOL. In Capite praecedenti, vbi prismata & pyramides inter se comparauimus, aliqua dubitatio suboriri posset, quod nempe solida è superficiebus composita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo superficiei; at linea non ex punctis, sed ex lineolis, superficies ex areolis, non ex lineis, solidum ex spatiolis solidis, non ex superficiebus componitur. Neque genuinam linearum, superficierum, & solidorum notionem Tyronibus proponunt nonnulli magistri, qui lineas tamquam è punctis, superficies ex lineis, solida ex superficiebus composita repraesentant. Itaque dum (in cor. 6. cap. praec.) ex sectionum aequalitate, prismatum, & pyramidum aequalitatem concludimus; id non debet intelligi, quasi prismata, & pyramides ex sectionibus planis componi velimus: nam loco sectionis vnius, considerari possent sectiones duae infinite proximae, quarum (in cit. coroll.) eadem foret distantia siue altitudo, vt patet ex planorum parallelismo. Igitur minima solida duabus sectionibus infinite vicinis comprehensa, forent aequalia in casu proposito; quare communem altitudinem negligere licuit, solamque sectionum aequalitatem considerare; id ve-

vero facere numquam licet, nisi praeter sectionum aequalitatem, ibi aequales etiam sint binarum quarumcumque indefinite proximarum distantiae. Porro euidens est, hanc methodum, ad *exhaustionum* methodum saepius explicatam reduci, ac proinde ad seueritatem geometricam esse omnino compositam.

CAPVT II.

De Solidorum mensura.

PROP. I. *Prismatis, cuius latera rectilinea sunt basi perpendicularia, superficiem metiri.* Singulae prismatis facies in hoc casu sunt rectangula sub singulis lateribus basis, singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta; ideoque omnium huiusmodi rectangulorum summa, est tota basis perimeter, in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demptis basibus, est productum ex perimetro basis in vnum ex lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies, habebitur superficies tota prismatis.

COR. I. Cum sex quadratis aequalibus terminetur cubus, habebitur tota cubi superficies, si quadrati vnius superficies sexies sumatur. Quia vero parallepipedum sex terminatur superficiebus, quarum duae quaelibet oppositae sunt aequales; inueniantur tres inaequales superficies, illarumque summa bis sumatur: habebitur tota parallepipedi superficies.

COR. II. Cum basis cylindri considerari possit tamquam polygonum regulare, ex lateribus nu-

me-

mero infinitis, & infinite paruis compositum; cylindrus haberi poterit, tamquam prisma *infinitilaterum*: cuius proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter, seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem, & producto addatur dupla basis, siue circuli superficies.

PROP. II. *Pyramidis, cuius latera omnia sunt aequalia, & basis latera sunt etiam aequalia, superficiem inuenire*: Cum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia aequalia; erit omnium triangulorum summa aequalis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet basis demissum; nam triangulum quodlibet aequatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Haec autem singula perpendicula sunt aequalia; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, dempta basi.

COR. I. Conus est pyramis *infinitilatera*, ac proinde coni recti superficies aequalis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem, siue latus coni, dempta tamen basi.

COR. II. Si pyramis plano basi parallelo *truncata* ponatur, facies omnes reliquae pyramidis versus basim abeunt in trapezia aequalia; haec autem trapezia singula diuidi possunt in triangula duo aequalia, quorum bases sunt sectionis, & basis latera, altitudo autem communis est ipsarum basium distantia perpendicularis. Quare singulorum triangulorum mensura est dimidium productum ex singulis basibus in ipsam basium distantiam, ac proinde superficies pyramidis truncatae aequatur dimidio producto ex summa perimetri basis, & sectionis, in distantiam perpendicularem basium.

COR.

COR. III. Si conus rectus plano basi parallelo truncatus ponatur, coni huius truncati versus basim superficies aequalis est dimidio producto ex peripheriarum summa, in coni truncati longitudinem, siue latus. Res autem facilius obtinetur, si inueniatur circulus DE (Fig. 30.), cuius peripheria aequalis sit semisummae peripheriarum BC, GM. Sumatur nempe punctum D medium inter B & G, ducaturque recta DE parallela sectioni BC, haec erit diameter circuli quaesiti. Etenim ductis perpendicularibus Bf, Dh; erit ob triangulorum DBf, DGh similitudinem Bf : Df = = Dh : Gh, ac proinde, ob Bf = Dh, erit etiam Df = Gh: quare eadem est differentia inter diametros BC & DE, quae est inter diametros DE & GM; illa nempe differientia est dupla rectae Df, vel Gh; ideoque recta DE est media proportionalis arithmetica inter BC, & GM, seu quod idem est, diameter DE aequalis est semisummae diametrorum BC, & GM. Sed circuli, vtpote figurae similes, suas habent peripherias diametris proportionales (Schol. cap. 3.); ergo circumferentia circuli, diametro DE descripti est media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC, & GM descriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM superficies, si multiplicetur circuli medii DE circumferentia per latus coni BG.

COR. IIII. Si concipiatur cylindrus rectus KQTM (Fig. 32.) circumscriptus sphaerae, habens pro axe diametrum AB, pro basi circulum sphaerae maximum; superficies segmenti sphaerae HAF aequalis erit superficiei cylindri QNRK, & area totius sphaerae aequalis areae totius cylindri, demptis basibus. Etenim concipiatur partiticula quaeuis Ff circuli *genitoris* ita parua, vt infinite accedat ad lineam rectam, productaque Ff vsque BA in G, recta FfG generabit superficiem coni recti, & Ff superficiem coni truncati, cuius mensura erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum, quarum radii sunt EF & ef; ducta autem PO, ita vt peripheria radio PO descripta aequalis sit semisummae peripheriarum praedictarum; erit coni truncati superficies, vt recta Ff ducta in circumferentiam, cuius radius est OP. Iam vero ob triangula similia rectangula Gef, GEF, GPO, OPC, erit Ee vel Nn : Ff = = GE : GF = = GP: GO = PO : CO, vel EN, ob EN = BT = = CO, ideoque Nn X BN = = fF X PO, atque ideo cum peripheriae sint, vt radii; erit productum ex Nn in peripheriam radio EN descriptam aequale producto ex Ff in peripheriam radio PO descriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn, alterum vero aream genitam ab Ff. Quare tota area genita à toto arcu AfF aequatur toti areae genitae á recta QN; & abeunte REN in MBT, tota sphaerae superficies totius cylindri superficiei aequalis est, demptis basibus.

COR. V. Superficies sphaerae aequalis est producto ex circumferentia circuli maximi in axem, siue diametrum sphaerae, ac proinde circuli maximi superficie quadruplo maior est (Cor. 1. Prop. 2. cap. 2.)

COR. VI. Superficies tota cylindri circumscripti, inclusis basibus, est ad totam sphaerae superficiem, vt 3. ad 2. Nam superficies sphaerae id hoc casu basi cylindri quadruplo maior est, superficies autem tota cylindri sua basi sexies maior est.

PROP. III. *Prismatis soliditatem metiri.* Polygonum, quod prismatis basis est, in ipsam prismatis altitudinem ducatur: habebitur soliditas tota prismatis, vt patet ex genesi ipsius solidi, quod producitur motu parallelo basis, ac proinde basis, siue polygoni superficies, per altitudinem multiplicari debet.

COR. I. Soliditas cubi habetur multiplicando faciem quadratam basis, per ipsum quadrati latus. Parallepipedi soliditas inuenitur, si parallelogrammi superficies per altitudinem multiplicetur; habetur autem soliditas cylindri, si basis circuli nempe superficies, in altitudinem cylindri ducatur.

COR. II. Eadem in solidorum mensura ratiocinatione instituta, quam in metiendis superficiebus adhibuimus, euidens est, cubum esse communem solidorum mensuram, non secus ac quadratum est mensura superficierum. Itaque pes solidus continet pollices cubicos 1728, nempe tres habet dimensiones, quarum singulae 1 pedi, sine 12 pollicibus aequantur; & ita dicendum de alia qualibet mensura.

PROP. IIII. *Pyramidis soliditatem inuenire.* Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis (Fig. 33.), cuius basis sit cubi facies quadrata; euidens est, totam cubi soliditatem diuidi in sex huiusmodi pyramides quadrilateras aeque altas & aequalium basium; ac proinde aequales. Igitur pyramis quaelibet erit sexta pars cubi; sed cubi mensura aequalis est producto ex basi in altitudinem; ergo illarum pyramidum quaelibet erit aequalis producto ex basi in sextam partem altitudinis HP, vel, quod idem est, tertiam partem altitudinis IP. Ergo huiusmodi pyramidis soliditas aequalis est pro-

du-

ducto ex basi in tertiam partem altitudinis, seu, quod idem est, aequatur tertiae parti cubi eiusdem basis, & eiusdem altitudinis.

Generatim pyramis quaelibet, aequalis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, siue pyramis quaelibet est tertia pars prismatis eamdem cum ipsa pyramide basim habentis, eamdemque altitudinem. Etenim sit pyramis quaelibet, fingaturque cubus, cuius altitudo sit altitudinis pyramidis dupla. Iam si ex centro cubi alia exeat pyramis, cuius basis sit facies quadrata cubi; euidens est, hanc pyramidem habere eamdem cum proposita pyramide altitudinem, ac proinde pyramides illae sunt inter se, vt bases (Cor.8. Prop.1. cap. praec.) Sed soliditas pyramidis cubi basi innixae aequalis est producto ex tertia parte altitudinis in basim; ergo ob altitudinem in vtraque pyramide erit soliditas propositae pyramidis aequalis producto ex tertia parte altitudinis in basim: ideoque generatim, pyramis quaelibet est tertia pars prismatis eiusdem basis, & altitudinis.

COR. I. Cum cylindrus tamquam prisma infinitilaterum, itidemque conus tamquam pyramis infinitilatera considerari possint; erit conus tertia pars cylindri eamdem habentis basim, & eamdem altitudinem.

COR. II. Cum sphaera haberi possit tamquam composita ex infinitis pyramidulis, quarum vertex communis est in centro sphaerae, bases autem omnes simul sumptae totam occupant sphaerae superficiem; singulae illae pyramides aequales sunt producto ex tertia parte radii in suas bases, ac proinde tota pyramidum summa aequalis est producto ex omnibus basibus simul sumptis, hoc est, ex superficie sphaerae in tertiam partem radii. Ergo tota sphaerae soliditas habebitur, multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi superficiem quater sumptam.

COR. III. Cum soliditas cylindri sit productum ex diametro in circulum maximum, soliditas sphaerae aequalis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

PROP. V. *Solida duo similia sunt in ratione triplicata laterum homologorum.* Ex solidorum definitione, & ex praecedentibus propositionibus euidens est, corporis cuiuslibet soliditatem esse semper, vt productum ex aliqua superficie in aliquem axem, vel aliquam altitudinem; superficies autem ex duabus dimensionibus componitur, ergo solidum quodlibet est in ratione composita trium dimensionum homologarum, seu eiusdem nominis: sed solida similia ea dicuntur, quae singulas dimensiones homologas habent proportionales; ergo solida similia sunt in ratione composita ex tribus dimensionibus proportionalibus; ac proinde in ratione triplicata vnius cuiuslibet dimensionis homologae.

COR. I. Sphaerae sunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim sphaerarum soliditates sunt inter se, vt circuli maximi superficies in radium ducta (Cor. 2. Prop. praec.) Sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata semidiametrorum (Cor. 1. Prop. 3. Sect. praec.): ergo sphaerae sunt in ratione triplicata semidiametrorum, vel diametrorum. Idem facile patet ex sphaerarum similitudine; cum enim sphaerarum soliditates per circuli maximi superficiem determinentur, sintque circuli figurae similes; euidens est sphaeras esse so-

li-

lida similia, ac proinde in ratione triplicata diametrorum.

COR. II. Cubi sunt solida similia, itemque similes sunt cylindri sphaeris circumscripti (Cor. 3. Prop. praec.) Ergo cubi sunt in ratione triplicata laterum, & cylindri sunt in ratione triplicata diametrorum.

COR. III. Prismata omnia, si inter se comparentur, ac pyramides omnes inter se; erunt vt producta ex basibus, & altitudinibus; quare si bases fuerunt aequales, erunt solida, vt solae altitudines, si autem altitudines fuerint aequales, erunt vt solae bases. Si ea solida fuerint aequalia, altitudines erunt basibus reciproce proportionales, & viceuersa, si bases fuerint altitudinibus reciproce proportionales, solida erunt aequalia. Tandem si bases fuerint similes, & altitudines lateribus basium homologis proportionales, solida erunt in ratione triplicata laterum homologorum, vel altitudinum.

SCHOL. De solidorum rectorum superficiebus in Capite praecedenti sermonem habuimus; verum si solida fuerint obliqua, superficierum mensura sublimiorem Geometriam aliquando postulat. Quod spectat solida superficiebus planis terminata, res est nullius difficultatis. Cum enim solidorum illorum facies, sint polygona rectilinea, ad triangulorum superficiem reduci semper poterit illorum mensura. Prismatis cuiusuis exemplo rem illustrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo prismatis latere, traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia omnia prismatis latera, vtpote parallela, perpendiculariter quoque secabit, atque sectio erit polygonum, cuius vnumquodque latus ad duo parallela prisma-

tis

tis latera erit perpendiculare. Quare superficies vniuscuiusque faciei aequabitur producto ex vnoquoque sectionis latere, in prismatis latus quodlibet ob laterum omnium aequalitatem; ac proinde prismatis superficies aequatur producto ex omnibus lateribus sectionis, hoc est, ex tota sectionis perimetro in prismatis latus quodlibet. Iam si prisma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum basi, ideoque superficies prismatis aequalis est producto ex perimetro basis in altitudinem, vt ante; quod idem valet in superficie cylindri, qui potest considerari tamquam prisma infinitilaterum. At si rectus non fuerit cylindrus, planum per cylindri axem, vel latus quodlibet perpendiculariter traductum, sectione sua cum cylindro obliquo generabit curuam, quae *Ellipsis* vocatur à Geometris, de qua in Appendice mox addenda pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui superficies aequalis producto ex Ellipsis circumferentia in latus cylindri. Quod spectat coni obliqui superficiem, patet, eam ad sectoris circularis superficiem, vt fit in cono recto, reduci non posse, cum in cono obliquo aequales non sint lineae omnes ductae ex vertice coni in basim. Sed haec pauca monuisse satis sit; haec enim ad Geometriae elementa non pertinent.

APPENDIX.

De lineis curuis.

Lineae curuae notionem ita simplicem esse iam obseruauimus; vt explicatione vlla vix clarior effici possit; quare praetermissa definitione, de de lineis curuis generatim, & deinde de Parabola, & Ellipsi pauca exponemus; alia deinde, vbi necessitas occurret, demonstraturi.

In curua qualibet (Fig. 34.) recta AD, lineas parallelas, vt MM, NP, aequaliter diuidens, *diameter* curuae appellatur; *axis* autem vocatur, si easdem parallelas ad angulos rectos secet. Punctum A in axe *vertex* curuae dicitur: rectae autem parallelae MM, NP dicuntur *ordinatae*: pars diametri, vel axis inter punctum A, & ordinatam comprehensa, dicitur *abscissa*. *AEquatio* curuae appellatur formula algebraica, quae relationem inter semiordinatas, & abscissas exprimit. Ita demonstratum est in circulo (Fig. 16.) quadratum rectae EO aequale esse producto ex CO in OL. Iam diameter CL dicatur a, sitque CO $= x$, & EO $= y$. Erit OL $= a - x$; ac proinde $y^2 = ax - x^2$ quae est aequatio ad circulum. Ex his euidens est, ordinatas, & abscissas curuae, esse quantitates indeterminatas; hae autem determinantur, sumptis pro arbitrio altervtrius quantitatis valoribus. Ita si in aequatione ad circulum fiat $x = 0, 2, 3, 4,$ cet. Et $a = 10$, inuenietur $y = 0, 3, 4, \sqrt{24}$, cet. Quare, si ex singulis punctis erigantur perpendiculares hoc modo determinatae, & per singulas perpendicularium extremitates ducatur curua, haec ad quaesitam curuam eo accuratius accedet, quo plures erunt huiusmodi perpendiculares. Ordinatae non solum ad axem, sed ad quamlibet diametrum referri possunt, atque etiam initium abscissarum non à solo diametri, aut axis vertice computari potest, sed etiam ab aliis punctis. Ita in circulo

abs-

abscissae computari possunt vel ab ipso diametri vertice, vel etiam á centro, atque ita prodeunt diuersae eiusdem curuae aequationes. Verum quocumque modo curua consideretur, probe distingui debent rectae ad dexteram, vel ad sinistram iacentes, & ideo di cuntur *positiuae*; vel *negatiuae*. Has quidem vel illas appellare licet positiuas, vel negatiuas; at vbi appellatio determinata est, haec semper retineri debet: quare semiordinatae, & abscissae possunt esse vel negatiuae, vel positiuae. Ratio autem facile patet ex iis, quae de quantitatibus positiuis, & negatiuis in Algebra obseruauimus.

II. Curua quaelibet considerari potest vel tamquam curua *polygona*, vel tamquam curua *accurata*. Primus considerandi modus nihil aliud significat, nisi curuam esse polygoni inscripti, & circumscripti *limitem*. Vnum autem probe obseruandum est in curuarum consideratione; si nempe curuam aliquam velut polygonam quis tractauerit, cauere deinde debet, ne eamdem curuam velut accuratam habeat, & viceuersa; atque etiam eadem regula tenenda est, in duarum curuarum consideratione, ambae scilicet vel tamquam polygonae, vel tamquam accuratae considerari debent; inde enim in rebus physicis orti sunt errores aliqui. Rem exemplo demonstrabimus. In circulo quocumque PQD (Fig. 35.) ducantur chordae aequales, & infinitesimae PD, DE, producaturque PD in O; donec DO = PD. Praeterea agatur per puncta O & E recta OQ, & per punctum D tangens DN rectae OQ occurrens in N; erit OE = 2NE. Etenim triangulum DOE est isoscele: praeterea anguli ODE mensura est dimidius arcus PDE;

an-

anguli autem NDE mensura est dimidius arcus DE; ergo recta DN aequaliter diuidit angulum ODE, ideoque ob DO = DE, erit OE = 2NE. Iam ponatur corpus aliquod describere arcum circuli infinitesimum PDE, vi aliqua vrgente secundum directionem datam, quae in loco D corpus à linea recta retrahat. Si consideratur circulus tamquam polygonum, chorda infinitesima PD erit spatiolum, tempore praecedenti infinitesimo percursum, eritque DO lineola aequalis & in directum posita spatiolum alterum, tempore subsequenti aequali descriptum. Quare si ducatur OE, directioni vis in D agentis parallela, erit haec lineola OE vis huius effectus: vi enim illa corpus ex O transit ad arcum circuli. At si consideretur circulus tamquam accuratus, tangens DN erit lineola vi vrgente descripta, ideoque NE vis huius effectus. Itaque in curua polygona vis effectus repraesentantur per OE, & in curua accurata per NE. Quare in virium mensura retinenda est eadem curuarum consideratio, alioqui effectus duplo maior aestimaretur. Verum quia in virium doctrina, ipsarum virium effectus dumtaxat comparamus, res perinde se habet, quaecumque adhibeatur curuarum consideratio; eadem enim prodit effectuum proportio. Haec autem, quae modo explicauimus, referuntur ad virium centralium doctrinam in Physica generali demonstrandam.

III. Haec eadem doctrina ad curuam quamlibet transferri potest; quod vt intelligatur, curuarum descriptionem generatim considerabimus. Curua quaelibet plana, considerari solet tamquam ex motu puncti, & perpetua directionis mutatione in plano genita: hic non agimus de

cur-

curuis, quarum puncti singula in eodem non sunt plano, & ideo dicuntur *duplicis curuaturae*. Itaque euidens est, curuam quamlibet ad lineas duas in plana positione datas, ordinatas nempe, & abscissas, referendam esse; ad determinandam nempe alicuius curuae naturam, oportet puncti mobilis vestigia, secundum certam, eamdemque legem ad rectis positione datas referri, ita vt punctum illud secundum eamdem omnino legem, in quolibet infinitesimo mutatae directionis angulo moueatur; alioqui non eamdem, sed plures curuas describeret (contra hyp.). Ex hac curuarum consideratione aliqua sane vtilissima colliguntur. 1.° Recta curuam quamlibet in vnico puncto tangit. Ponamus enim, rectam in duobus, tribusue punctis contiguis curuam tangere; iam punctum mobile directionem perpetuo non mutaret, quod repugnat. 2.° Si descriptus intelligatur circulus, qui communem cum data curua tangentem in aliquo puncto habeat, ita vt cuiuscumque circuli minoris, eamdem habentis tangentem, arcus aliquis vtrinque circa punctum contactus sit intra curuam, cuiuscumque vero circuli maioris arcus sit extra curuam; hunc circulum dicimus curuae *osculatorem* in dato puncto, & curuae ipsius *curuaturam* dicimus *circulari curuaturae analogam*. Euidens autem est, ex Geometriae elementis, circulis osculatoris centrum, positum esse in concursu duarum perpendicularium ad eamdem curuam, vbi puncti duo curuae ad se inuicem in infinitum accedunt; haec enim est circuli proprietas, vt rectae à centro ad peripheriam du-

ductae sint ipsi peripheriae perpendiculares; talis autem recta è centro circuli osculatoris ad curuam ducta vocatur *radius osculator*. 3.° Quamuis inter tangentem, & arcum circuli, transire possint alii circuli innumeri, attamen inter arcum curuae, & arcum circuli osculatoris nullus alius circulus transire potest; nam (ex def.) quicumque minor circulus est intra curuam; quicumque maior est extra ipsam. Tota circulorum osculatorum vtilitas eo reducitur, vt omnium curuarum arcus infinitesimus considerari possit tamquam circularis. Etenim arcus infinitesimus circuli osculatoris, & arcus infinitesimus curuae easdem habent proprietates, cum radius sit ad circulum osculatorem, & ad arcum infinitesimum curuae perpendicularis. 4.° Hinc definiri potest curuarum in quolibet puncto curuatura; satis enim erit diuersas circulorum osculatorum curuaturas inter se comparare; quod quidem facile fieri potest. Etenim euidens est, diuersorum circulorum curuaturas esse in ratione reciproca radiorum; quod vt intelligatur, fingamus, duas rectas aequales in circulum flecti, vnam quidem in totam circumferentiam, alteram vero in semicircumferentiam duplo minus curuam esse, quam semicircumferentiam integram; & duplo maior est radius circuli, ad quem circumferentia illa pertinet. Idem simili ratiocinatione patet, si recta eadem in arcum duplo, vel triplo maiorem incuruetur; & ita deinceps. Sed rem generatim demonstrauimus. Sint duo circuli inaequales C & c, quorum radii R & r, ponantur in data ratione m ad n. In his circulis capiantur arcus aequales, dicaturque A ar-

arcus in maiori circulo, & a arcus in minori; arcus A curuatura minor erit curuatura arcus aequalis a in ratione R ad r. Iam vero in circulo maiori capiatur arcus A, qui similis sit arcui a in minori circulo; erit A : a = C : c = R : r. Quare cum sit a = A, erit etiam A : a = R: r = m : n. Igitur si arcus A similis arcui a contineat partes vel gradus m; arcus A continebit partes vel gradus n; ac proinde curuatura arcus a est ad curuaturam arcus A, vt m ad n. Quare eadem manente arcuum A & a magnitudine, circulorum c & C curuaturae sunt in ratione m ad n, hoc est in ratione reciproca radiorum. Comparari ergo inter se possunt diuersae curuarum curuaturae, atque etiam variae eiusdem curuae in diuersis punctis curuaturae: inueniatur nempe in diuersis punctis radius circuli osculatoris, hoc est, circuli, qui curuam in dato puncto tangens cum ipsa curua ita congruat, vt inter curuam, & circulum nullus alius circulus transire possit. Et quidem quum aucto, vel diminuto circuli radio, minuatur, vel augeatur per gradus illius curuatura, si nullus sit circulus, qui proprius, quam circulus osculator, ad curuam accedat, concludendnm est, circulum cum ipsa curua in hoc puncto, eamdem habere curuaturam. Ex his patet, finitam esse curuae alicuius curuaturam, si finitus sit radius osculator; ac si radius osculator sit infinitus, curuatura est nulla; tandem si radius osculator = o, curuatura est infinita. Ceterum haec omnia facilius intelligentur, si reuocentur in memoriam, quae de methodo *exhaustionum*, & de *primis*, ac *vltimis rationibus* iam explicata sunt. Haec pauca, quorum

rum vsus in Physicis institutionibus recurret, ex sublimiori doctrina delibasse satis sit. Superest, vt Parabolae, & Ellipseos naturam breuiter exponamus.

IIII. Si axe AD (Fig. 34.) sumantur abscissae quotlibet, & ad singula puncta erigantur semiordinatae, ea lege; vt abscissae semper sint, vt quadrata ordinatarum; curua per singulas ordinatarum extremitates transiens, dicitur *Parabola.* Iam abscissa dicatur x, & ordinata y, erit semper x, vt y^2; ac proinde ratio ordinatarum ad abscissas constans, & eadem manet; quare si p sit quantitas constans, erit $\frac{yy}{x} = p$, ac proinde $y^2 = px$, quae est aequatio ad Parabolam; nempe in omni Parabola quadratum ordinatae aequale est producto ex abscissa in quantitatem constantem; haec autem quantitas constans *parameter* dicitur. Si in axe parabolae abscindatur recta AF, quae sit quartae parametri parti aequalis, punctum F Parabolae *focus* appellatur.

COR. I. Quoniam crescente abscissa, crescit etiam quadratum ordinatae, euidens est, Parabolam non esse curuam in se redeuntem, sed puncta illius singula, ab axe perpetuo recedere in infinitum.

COR. II. Data abscissa qualibet, eiusque ordinata, inueniri semper poterit parameter; cum sit tertia proportionalis ad ordinatam, & abscissam.

COR. III. Si abscissa ponatur = o, fit quo-

que

que ordinata perpendicularis $MM = O$, ac proinde puncta MM coeunt in A, nempe in axis vertice. Quare si per verticem Parabolae ducatur recta ordinatis parallela, haec erit tangens Parabolae in puncto A.

COR. IIII. Ducta intelligatur secans per punctum N; quae Parabolae accurrat in alio puncto t, ex quo demittatur perpendicularis tp, ad quam ex puncto N erigatur perpendicularis Nq axi parallela. Sit $PT = s$, $AP = x$, $PN = y$; erit $PT\ (s) : PN\ (y) = Nq\ (f) : \frac{fy}{s} = qt$; ac proinde $pt = PN + qt = y + \frac{fy}{s}$, & $Ap = x + f$. Iam sumatur aequatio ad curuam, in puncto t erit $pt^2 = Ap \times p = x^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2\ y^2}{s^2} = px + pf$: deletisque in hac aequatione terminis aequalibus $y^2 = px$, fiet $\frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2\ y^2}{s^2} = pf$ & diuidendo per f, erit $\frac{2y^2}{s} + \frac{fy^2}{s^2} = p$. Iam puncta N & t ad se inuicem ac-

accedant in infinitum, mutuoque coeant; secans abit in tangentem, fitque Nq, vel $Pp = o$: quare $f = o$, & $\frac{fy^2}{s} = o$, ac proinde aequatio praecedens abit in hanc $\frac{2y^2}{s} = p$, & $2y^2 = ps$, seu ob $px = y^2$ fiet $2px = ps$, $2x = s = PT$. Igitur in Parabola recta PT, quae *subtangens* dicitur, dupla est abscissae AP.

COR. V. Recta FN ducta ex foco Parabolae ad extremitatem ordinatae cuiuslibet, aequalis est abscissae AP, & quartae parti parametri. Nam cum sit $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$, vel $= \frac{1}{4}p - x$, prout ordinata iacet supra vel infra punctum F; erit $PF^2 = \overline{AP - AF}^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$. Praeterea $PN^2 = px$, ergo $FN^2 = PF^2 + PN^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}pp$, & $FN = x + \frac{1}{4}p = AP + AF$.

COR. VI. Si per punctum contactus ducatur recta QS axi parallela, angulus GNS aequalis est angulo FNT; nam angulus GNS aequatur angulo FTN; praeterea triangulum FTN est isosceles ob $FN = AP + AF = AT + AF = FT$, ac proinde angulus GNS aequalis est angulo FNT.

Haec

Haec est tangentis proprietas, quae in Physicis institutionibus erit vtilitatis maximae.

V. Si in axe HI sumantur abscissae quotlibet (Figur. 36.), & ad singula puncta erigantur ordinatae FN & PM, ea lege, vt sit semper FN X FN ad PM X PM in ratione LF X FI ad LP X PI, curua per singularum ordinatarum extremitates transiens vocatur *Ellipsis* quae in circulum abit, si quadrata ordinatarum sint aequalia producto ex segmentis abscissarum. Iam dicatur axis maior HI = a, ducaturque ex puncto axis medio C rect. BCD, quae dicitur axis minor, sitque BC = b, HP = x, PM = y, PI = a — x, erit $\overline{a - x} \times x : y^2 = a^2 : b^2$ & $y^2 = \dfrac{ab^2 x - b^2 x^2}{a^2}$,

quae est aequatio ad Ellipsim, in qua si ponatur $a = b$, fit $y^2 = ax - xx$ aequatio ad circulum. Si abscissae computentur a centro C, sit CP = x, PM = y, fiatque HI = 2a; erit in hoc casu $aa - xx$; $y^2 = aa : bb$, & $y^2 = b^2 - \dfrac{b^2 x^2}{a^2}$. Si ex minoris axis extremitate B, tamquam centro; & interuallo BF = CL, tamquam radio describatur arcus circuli, axi maiori occurrens in punctis F & f, puncta illa vocantur Ellipesos *foci*; euidens autem est, haec puncta a centro Ellipseos aequaliter distare, nam ob BC axi perpendicularem triangula CBF & CBf sunt aequalia.

COR. I. Cum duo Ellipseos axes sint constantes, constans etiam est recta iisdem duobus axi-

axibus tertia proportionalis; haec autem linea *parameter* dicitur. Quia autem duo sunt Ellipseos axes; duae etiam sunt parametri; si nempe axis maior sit primus proportionis terminus, tertia proportionalis parameter axis maioris dicitur, & contra. Iam si abscissae ab axis extremitate computentur, sit axis maior a, minor b, parameter p; erit $ap = b^2$. Si autem abscissae computentur a centro, sit 2a axis maior, & 2b axis minor, erit $2ap = 4b^2$, his autem valoribus in vtraque aequatione ad Ellipsim substitutis, aequatio Ellipseos in primo casu fit $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$;

in casu altero habetur $y^2 = \frac{1}{2} ap - \frac{px^2}{2a}$.

COR. II. Ex Ellipseos aequatione euidens est, eam esse curuam in se redeuntem, & vndique terminatam; crescentibus enim abscissis a centro, computatis decrescunt ordinatae; ac tandem omnino euanescunt, si abscissa semiaxi aequalis sumatur. Manifestum est, mutua axium in centro C intersectione Ellipsim in quatuor partes similes & aequales diuidi, quum eadem sit ad quamlibet partem curuae aequatio; omnesque proprietates perinde se habeant. Quia vero ordinata perpendiculari Nn perpetuo decrescente, puncta N & n coeunt in H; patet, tangentem in H esse perpendicularem.

COR. III. Distantia focorum a centro facile inuenitur, nam cum sit BF = HC, erit $FC^2 = HC^2 = BC^2 = \overline{HC - BC} \times \overline{HC + BC}$. Quare distantia foci a centro, est media proportionalis inter semiaxium summam; illorumque differentiam. Praeterea ob triangulum BCF rectangulum erit $BC^2 = HC^2 - FC^2$, ac proinde HC — FC : BC = BC : HC + FC, seu HF : BC = BC : FI, nempe semiaxis minor, est medius proportionalis; inter foci vnius distantias ab vtroque axis maioris vertice.

COR. IIII. Ex Ellipseos constructione, summa rectarum BF & Bf aequalis est axi maiori; at ponamus, eamdem manere summam in quolibet puncto, sitque RF + Rf = = HI. Dicatur HC = a, BC = b, ordinata RS = y, CS = x, fC = c; erit IS = a — x, HS = a + x, fS = c — x, FS = c + x, HF, vel If = a — c, Hf, vel IF = a + c. Iam vero cum sit (per hyp.) FR + fR = 2a, si differentia inter FR, & fR dicatur 2z, erit fR = a — z, & FR = a + z. Iam ob triangula FRS & fRS rectangula erit $fS^2 + SR^2 = = fR^2$, hoc est $cc - 2cx + x^2 + y^2 = = a^2 - 2az + z^2$. Praeterea $FS^2 + SR^2 = = FR^2$ hoc est, $c^2 + 2cx + xx + y^2 = a^2 + 2az + zz$, habentur ergo aequationes duae, quarum prima si a secunda subtrahatur, fiet 4cx = 4az, & $z = \frac{cx}{a}$, quo valore substituto in pri-

ma

ma aequatione loco z, ideoque & $\frac{c^2 x^2}{a^2}$ loco z^2

erlt $a - 2cx + xx + yy = aa - \frac{2xccc}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$,

factaque, vt moris est, reductione, habebitur $a^2 c^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2 = a^4 + c^2 x^2$ & $a^2 y^2 = a^4 - a^2\ {}^2 - a^2 x^2 + c^2 x^2$, factaque divisione per $a^2 - c^2$ habetur $\frac{a^2 y^2}{a^2 - c^2} = a^2 - x^2$; loco b^2 substituatur $a^2 - c^2$ fiet $\frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2 - x^2$ & tandem $y^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}$; quae est aequatio ad Ellipsim ante inuenta. Haec ergo est Ellipseos proprietas, vt ductis ex vtroque foco rectis, ad punctum perimetri quodlibet concurrentibus, rectarum illarum summa sit axi maiori semper aequalis. Hanc eamdem proprietatem, ex aequatione Ellipseos deriuare facile est; verum ex proprietate ipsa, aequationem elicere placuit, vt exemp'um esset Tyronibus, qua ratione ad aequationem curuae ex data aliqua proprietate peruenire liceat. Hinc euidens est, datis duobus Ellipseos axibus, Ellipsim facili manu des-

 cri-

cribi posse; sumptis nempe in axe maiori duobus punctis tamquam focis, his affixum retineatur filum, atque per fili longitudinem ita promoueatur arcus aliqua, vt filum perpetuo tensum maneat, arcus motu suo Ellipsis peripheriam percurret, vt patet ex perpetua partium fili, & axis aequalitate.

COR. V. Si ex pnncto R in Ellipseos perimetro ad vtrumque focum f, F ducantur rectae FR, fR, & in linea producta FR sumatur RT = Rf, ducaturque Tf, ad quam per punctum medium E, & per punctum R agatur ER; haec erit tangens in R. Etenim ponamus, rectam ER Ellipsi occurrere in alio puncto r. Ex hoc puncto r in recta RE agantur lineae rT, rf, rF. Quoniam (per constr.) TR = Rf, & fE = ET, erit RE perpendicularis ad fT, ac proinde singula puncta rectae ERr aequaliter distant a punctis f, T, ideoque rf = rT. Sed Fr + rT maior est, quam FT; ergo etiam Fr + rf maior est, quam FT; ideoque etiam maior, quam HI; cum (per const.) sit FT = HI: quare punctum r non pertinet ad Ellipsim; ergo recta RE tangit Ellipsim in vnico puncto R. Haec est vtilissima, in Physicis institutionibus, tangentis proprietas, quam quidem ex Ellipseos aequatione, non secus ac in Parabola fecimus, eruere licebat; sed diuersas veritatis inueniendae vias, Tyronibus demonstrare maxime conuenit.

SCHOL. Parabolae, & Ellipseos aequationem considerauimus, ordinatis ad axem relatis. At ex demonstratis facile erit curuarum illarum aequationes inuenire, si ordinatae ad diametrum quamlibet referantur; eadem est in singulis casibus curuarum illarum natura. Primarias dumtaxat proprietates demonstrasse satis sit, alias

enim,

enim, vbi necessitas postulauerit, in Physicis Institutionibus explicabimus. Praeterea etiam ad exercendum, cauendumque ingenium aliquid Tyronibus relinquere opportunissimum est, idque postulat recta docendi ratio. *Sectiones conicae* appellantur Parabola, & Ellipsis, quibus etiam annumerari debet *Hyperbola*, de qua nullum verbum fecimus, vtpote nullius fere vsus in nostris Physicis Institutionibus futura. Denominationis ratio facile patebit, si tres illas curuas in coni sectione consideremus.

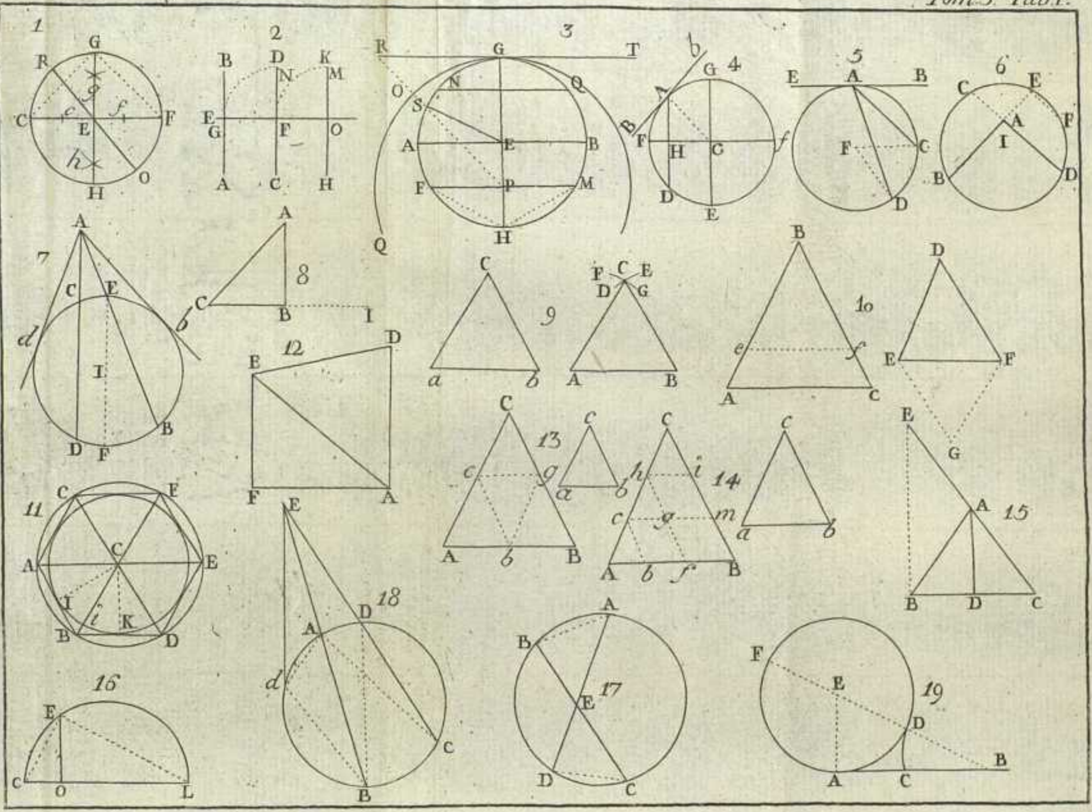
Sit ABC conus (Fig. 37.) circulari basi insistens, & secetur plano quolibet IEM. Ponatur sectio alia KILM parallela basi, & occurrens priori sectioni in HI, intelligaturque sectio tertia priores duas in EH, & KL perpendiculariter bisecans, atque etiam conum in triangulo ABC. Iam producto EH, donec ipsi AK occurrat in D, ductisque EF ac DG rectae KL parallelis, & occurrentibus sectioni triangulari in F, & G, dicatur $EF = a$, $DG = = b$, $ED = c$, $EH = = x$, & $HI = = y$, ob triangulorum EHL & EDG similitudinem, erit ED (c): DG (b) = = EH (x) : $HL = = \frac{bx}{c}$. Simili modo, ob triangulorum DEF & DHK similitudinem, erit DE (c) : EF (a) = DH (c--x) (Fig. 39,) vel c + x (Fig. 38.) : $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$. Tandem cum sectio KIL parallela basi sit circulus, vt patet ex genesi ipsius coni, erit $HK \times HL = HI^2$

hoc

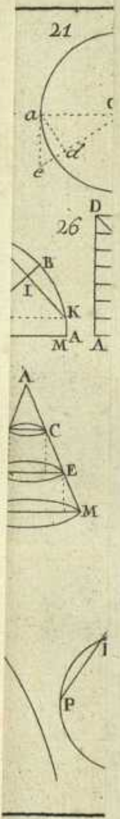
hoc est $\frac{abx}{c} \mp \frac{abxx}{cc} = yy$; at si ponatur, sectionem ita se habere, vt ED non occurrat lateri AK, sed sit ipsi parallela; tunc erit HK $= EF = a$, ideoque $HK \times HL = HI^2$, hoc est $\frac{abx}{c} = y^2$. Si aequationes illas seorsim consideremus, euidens est, figuram 37 Ellipsim referre, cum quadrata ordinatarum semper sint, vt productum ex segmentis abscissarum. Figura 38 refert curuam, quae *Hyperbola* dicitur, in hac autem curua non secus ac in Ellipsi, quadrata ordinatarum sunt, vt productum ex segmentis abscissarum; sed probe notandum est discrimen. Sectio conica est Ellipsis, si planum secans sectioni triangulari perpendiculare duobus coni lateribus occurrat; at sectio conica fit Hyperbola, si planum secans neque sit coni lateribus parallelum, neque duo secet coni latera: sed in hoc casu sectio ita se habet, vt planum secans productum cono ad verticem opposito occurrant in D, alteraque sectione generet Hyperbolam oppositam. Recta DE dicitur *axis transuersus*, punctum huius axis medium vocatur *centrum* Hyperbolarum, per quod si ducatur hinc & inde recta perpendicularis ea proportione, vt productum ex segmentis abscissarum sit ad quadratum ordinatae, sicut est quadratum axis transuersi ad quartum terminum proportionalem; habebitur quadratum axis, qui *coniugatus*, vel *secundus* axis appellatur. Igitur in aequatione ad Hyperbobolam, punctum D sumitur in Hyperbola opposita, & productum ex segmentis abscissarum est DH×EH (Fig. 38.). Tertiam aequationem $\frac{abx}{c} = y^2$ esse ad Parabolam, cuius parameter $\frac{ab}{c}$ ex antea demonstratis euidens est. In hac autem curua planum secans, est altervtri lateri coni parallelum. Itaque cum ex coni sectione natae sint tres illae curuae, patet cur illis factum sit *sectionum conicarum* nomen. Sed haec breuiter dicta sint, vt Algebrae vsus in Geometria Tyronibus ostendatur.

FINIS.

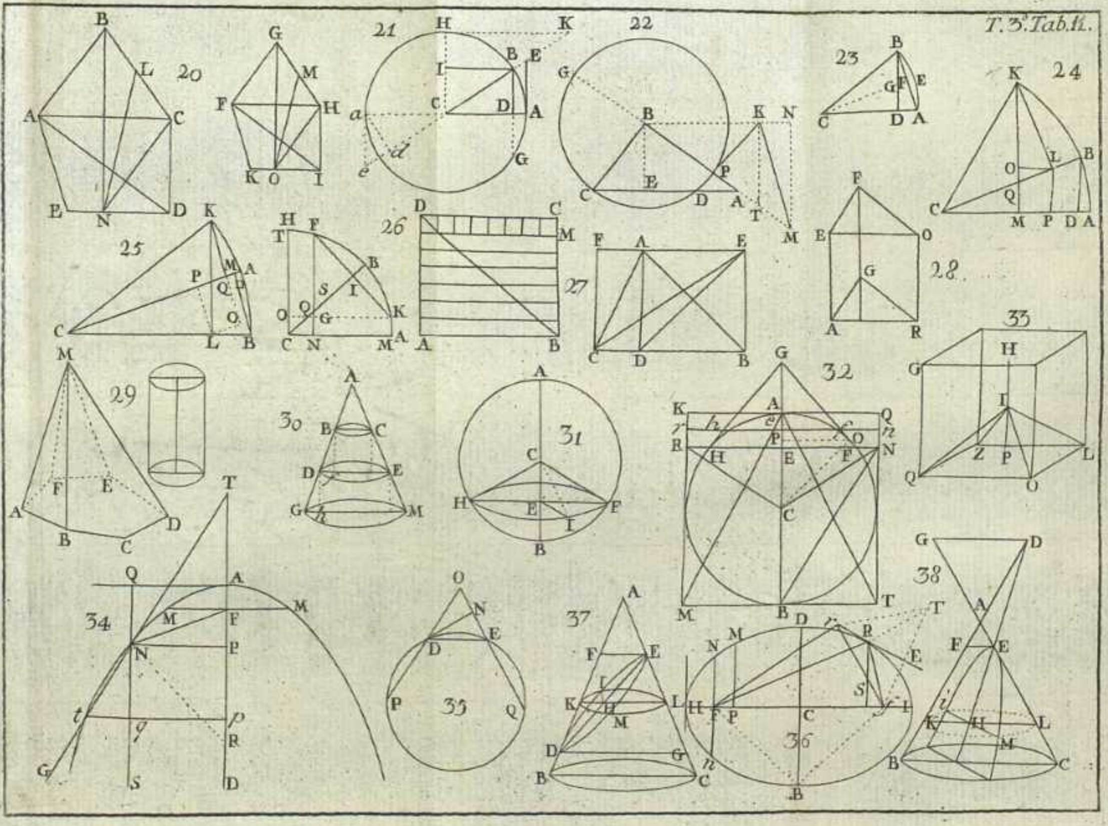

R
D
Q
I
A
M
D
B


1
G
R
C
E
F
O
H
2
B D K
N M
E G F O
A C H
3
R G T
O N Q
S
A E B
F P M
H
Q
4
b G
A
B F H C f
D E
5
E A B
F C
D
6
C E
A F
I
B D
7
A
C E
d b
I
D F B
8
A
C B I
9
C
a b
F C E
D G
A B
10
B
e f
A C
D
E F
G
11
C F
A C E
I i K
B D
12
D
E
F A
13
C
c g
A b B
c
a b
14
C
h i
c g m
A b f B
c
a b
15
E
A
B D C
16
E
C O L
17
A
B
E
D C
18
E
D
A
d
C
B
19
F
E
D
B
A C


O
S
A
F
D
a
A
8



21
a
d
e
26
D
B
I
K
M
A
A
A
C
E
M
P


T. 3. Tab. II.
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38