Tesis doctoral dirigida por el Prof. Pedro Martínez Amores, de la Universidad de Granada. Fué leida el 4 de Diciembre de 1.987 ante el tribunal formado por los profesores Rubio Segovia, Dominguez Benavides, Díaz Díaz, Ros Mulero y Ortega Rios, obteniendo la calificación de "apto cum laude".

PROBLEMAS DE CONTORNO SEMILINEALES.

METODOS SUGERIDOS POR EL PROBLEMA LINEAL A TROZOS

Por

Margarita Arias López

Memoria realizada en el Departamento de Matemática Aplicada y en el antiguo Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, bajo la dirección del profesor Dr. Pedro Martínez Amores, Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, para obtener el grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Granada.

Vº Bº del Director

Aspirante al grado de Doctora en Ciencias

A mi familia

I N D I C E

INTRODUCCION

Los problemas de contorno aparecen de forma natural al intentar modelar matematicamente diferentes fénomenos científicos o de la Naturaleza. Por esto, su estudio, a parte del interés matemático, tiene gran importancia de tipo práctico.

Un problema de contorno para una ecuación diferencial definida en un dominio Ω de R^N, $N \geq 1$, consiste, a groso modo, en el estudio de las soluciones de la ecuación verificando determinadas condiciones sobre la frontera o contorno del dominio de definición, $fr\Omega$.

Estos problemas presentan numerosas dificultades en su tratamiento matemático debido tanto a su carácter global como a que, en la mayor parte de los casos, se trata de problemas no lineales, y su estudio ha impulsado el desarrollo de otras muchas teorías dentro de la Matemática. (Sirvan como ejemplo los trabajos realizados por Leray y Schauder en la Teoría de Puntos Fijos en espacios de dimensión infinita, o el inicio de la Teoría de Series de Fourier para el estudio de la Ecuación del Calor)

Centramos esta memoria en el estudio de diferentes problemas de contorno para tres ecuaciones diferenciales semilineales de segundo orden:

- La ecuación ordinaria (ecuación de tipo elíptico)

(I) $\qquad u'' + \lambda u + g(u) = f(x),$

- La ecuacion del calor (ecuación de tipo parabólico)

(II) $u_t - u_{xx} - \lambda u - g(u) = f(t,x)$,

- La ecuación de ondas (ecuación de tipo hiperbólico)

(III) $u_{tt} - u_{xx} - \lambda u - g(u) = f(t,x)$.

La función f es una función dada en un determinado espacio y representa la fuerza externa, $g: R \longrightarrow R$ es, en general, una función no lineal y representa la perturbación no lineal del problema y λ es un número real.

Las condiciones de contorno que consideraremos son de tipo periódico ($u(0) - u(\pi) = 0$, $u'(0) - u'(\pi) = 0$) o Dirichlet ($u(0) = u(\pi) = 0$), para (I); de tipo periódico-Dirichlet ($u(t+T,x) - u(t,x) = 0$, $t \in R$, $x \in]0,\pi[$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $t \in R$), para (II) y de tipo doblemente periódico ($u(t+2\pi,x) - u(t,x) = u(t,x+2\pi) - u(t,x) = 0$, t, $x \in R$) para (III).

Estos problemas se pueden expresar como

(1) $Au - \lambda u - g(u) = f$, en Ω,

(2) $Bu = 0$, en $fr\Omega$,

donde $A := \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha D^\alpha$ es un polinomio diferencial de coeficientes constantes a_α y grado dos y $Bu = 0$ representa las condiciones de contorno.

La primera cuestión que surge al estudiar (1)-(2) es determinar la clase de solución que se va a considerar.

Una **solución clásica** de (1)-(2) es una función $u \in C(\bar{\Omega})$, tal que $Au \in C(\bar{\Omega})$, y u verifica (1)-(2).

*Este concepto de solución lleva implícito el que f sea una función continua; sin embargo, la experiencia indica que muchos problemas de contorno en los que la fuerza externa f no es continua tienen solución. Es necesario, por tanto, extender este concepto a otros "**más débiles**" (ampliar el espacio de las posibles soluciones) que permitan considerar una clase más general de términos independientes.*

La extensión inmediata lo constituye el concepto de ***solución débil casi por doquier o solución en el sentido de Caratheodory:***

Una función $u \in L^2(\Omega)$, se dice que es solución casi por doquier de (1)-(2) si $Au \in L^2(\Omega)$, (con derivadas en el sentido de las distribuciones) y u verifica (1) y (2) a.e. en Ω.

Este concepto de solución permite estudiar (1)-(2) con $f \in L^2(\Omega)$. Sin embargo, el espacio donde se buscan este tipo de soluciones puede resultar todavía "pequeño" y se podría pensar en generalizar aún más el concepto de solución ampliando este espacio. Una forma posible de hacerlo es la siguiente:

Sea $\mathcal{D}$ la clase de funciones test $\chi \in C^2(\bar{\Omega})$ que verifican $B\chi = 0$, entonces:

Si u es una solución clásica de (1)-(2) y $\chi \in \mathcal{D}$, $(Au,\chi) = (u,A^*\chi)$, donde A^* denota el operador adjunto de A junto con las condiciones de contorno, y $(.,.)$ es el producto escalar en $L^2(\Omega)$. Esta igualdad sugiere la siguiente definición:

Se dice que $u \in L^2(\Omega)$ es ***solución débil en el sentido de las distribuciones*** *de (1)-(2) si la aplicación $\chi \in \mathcal{D} \longrightarrow (u,A^*\chi)$ es L^2-continua y*

(3) $\quad (u, A^{*}\chi) - \lambda(u,\chi) - (g(u),\chi) = (f,\chi), \qquad \chi \in \mathcal{D}.$

Este concepto es el más débil de los anteriormente expuestos. De hecho, si u es solución clásica de (1)-(2), es solución débil casi por doquier y si u es solución casi por doquier tambien lo es en el sentido de las distribuciones.

Cuando el problema (1)-(2) tiene "estructura variacional", se puede hablar todavía de otro tipo de solución débil intermedio entre los anteriores. Para ello, se asocia al problema de contorno un funcional en un determinado espacio de Hilbert. Sus puntos críticos se definen como **solu-ciones débiles variacionales.**

En esta memoria consideraremos soluciones débiles en el sentido de las distribuciones de los diferentes problemas de contorno y mostraremos que, debido a las propiedades de regularización que poseen los operado-res elípticos y parabólicos, en el caso de las ecuaciones (I) y (II) es-te concepto de solución coincide con el de solución casi por doquier. Sin embargo, para la ecuación de ondas estos dos conceptos son distintos

Si definimos L: $\mathrm{dom}\, L \subset X \longrightarrow Y$ por:

$\mathrm{dom}\, L = \{ u \in Y \mid$ la aplicación $\chi \in \mathcal{D} \longmapsto (u, A^{*}\chi)$ es L^2-continua$\}$

$(Lu,\chi) = (u, A^{*}\chi), \quad u \in \mathrm{dom}\, L, \quad \chi \in \mathcal{D}$

donde X es un subespacio apropiado de $L^2(\Omega)$ e $Y = L^2(\Omega)$, el problema de contorno (1)-(2) es equivalente a la ecuación

(4) $\quad Lu - \lambda u - g(u) = f, \qquad u \in \mathrm{dom}\, L.$

(Denotaremos por g, indistintamente, una función $g: R \longrightarrow R$ y el operador de Nemistky u operador de sustitución asociado a ella, $g: X \longrightarrow Y$, $u \longmapsto g(u)$, con $g(u)(x) = g(u(x))$).

El estudio de (4) está íntimamente ligado al núcleo del operador lineal $L - \lambda I$, $\ker(L - \lambda I)$, y por tanto, al estudio de los valores propios del operador L (valores $\lambda \in C$ para los que $Lu - \lambda u = 0$ admite solución no trivial). En los casos que estudiamos, estos valores propios forman una sucesión (λ_n) de números reales con $|\lambda_n| \longrightarrow +\infty$, $n \longrightarrow +\infty$.

La Alternativa de Fredholm indica que

i) Si $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in N$, la ecuación lineal

(5) $$Lu - \lambda u = f, \qquad u \in \text{dom } L,$$

tiene solución única para toda $f \in Y$, esto es, $Im(L - \lambda I) = Y$,

ii) Si $\lambda = \lambda_n$ para algún n, entonces (5) tiene solución si y sólo si, f es ortogonal en Y a toda solución de la ecuación adjunta de (5), es decir, $Im(L - \lambda I) = \{ f \in Y \mid (f,\psi) = 0,\ \psi \in \ker(L - \lambda I)\}$. (En los casos estudiados, $\ker(L - \lambda I) = \ker(L^* - \lambda I)$, donde L^* denota el adjunto de L).

Consiguientemente, si $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in N$, (caso no resonante), el operador $L - \lambda I$ es invertible y (4) es equivalente a

(6) $$u = (L - \lambda I)^{-1}(f + g(u)), \qquad u \in \text{dom } L,$$

y el problema queda reducido a determinar la existencia o no de puntos fijos de un operador. La Teoría de puntos fijos en espacios de dimensión infinita desarrollada (principalmente) por Leray y Schauder permite estudiar (6). En particular, se puede obtener que si g es acotada, (6) tiene solución para toda f, esto es, $Im(L - \lambda I - g) = Im(L - \lambda I) = Y$.

Si $\lambda = \lambda_n$ para algún n, el operador $L - \lambda I$ no es invertible y el método anterior no se puede aplicar. La ecuación (4) se denomina ahora **resonante** y su estudio es más complicado.

Los primeros trabajos s... problemas en Resonancia, se deben a Lyapunov y Schmidt quienes hacen un estudio local de la ecuación por medio del Teorema de la Función Implícita. Posteriormente. Cesari (ver [C], [GM]), combinando los trabajos de Lyapunov y Schmidt con metodos globales, dió lugar al conocido Método Alternativa (ver Capítulo I).

Son muchos los resultados que se han obtenido, por este método, para diferentes problemas de contorno. Destacamos los de Landesman y Lazer, [LL], quienes estudian (4) con $\lambda = \lambda_n$ y g acotada, dando, para algunos problemas de contorno, una caracterización de $Im(L - \lambda I - g)$ que se puede considerar como una extensión al caso no lineal de la Alternativa de Fredholm. Estos resultados indican que cuando $Im(L - \lambda I) \neq Y$ y g es acotada, entonces $Im(L - \lambda I - g) \neq Y$.

De los resultados anteriores, tanto para el caso resonante como para el no resonante, se puede deducir que el carácter de sobreyectividad del operador $L - \lambda I$ no varía cuando se le suma una pequeña perturbación no lineal (g acotada).

Sin embargo, cuando al operador $L - \lambda_n I$ (caso resonate) se la suma una perturbación de la forma $g(u) = \gamma u$, $0<\gamma<\lambda_{n+1}-\lambda_n$, cambia el carácter de dicho operador y se obtiene un operador sobreyectivo. Esto hace pensar que si en lugar de γu sumamcs al operador de partida una perturbación no lineal g que se comporte de forma "parecida" a γu, el resultado va a ser el mismo, esto es, $Im(L - \lambda_n I - g) = Y$.

En efecto, Ahmad, [Ah], comparando con el problema lineal, obtiene un resultado de éste tipo. En concreto, demuestra que si $g(\pm\infty)=\lim_{u\to\pm\infty} g(u) = \pm\infty$ y $|g(u)| \leq \gamma|u| + K$, $u \in R$, con $0<\gamma<3$ $(=\lambda_2-\lambda_1)$, el problema $u'' + u + g(u) = f$, $u(0)=u(\pi)=0$, tiene solución para toda f.

Si en lugar de comparar con el problema lineal comparamos con problemas lineales a trozos de la forma $Lu - \mu u^+ + \sigma u^- = f$, $u \in$ dom L, donde μ, $\sigma \in R$, se pueden obtener resultados más generales que permiten estudiar perturbaciones no lineales g de crecimiento a lo más lineal pero no necesariamente con la misma pendiente en cada dirección.

Dancer, [D2], estudia el rango de los operadores $L - I_{\mu,\sigma}$, donde por $I_{\mu,\sigma}$ se denota el operdor $u \longmapsto \mu u^+ - \sigma u^-$.

El estudio del problema lineal a trozos efectuado en [D1] y [D2] nos ha permitido obtener resultados, en cierto sentido óptimos, sobre los problemas de contorno para las ecuaciones (I) y (II).

Concretamente, y después de exponer en el Capítulo I algunos resultados sobre el Método Alternativa, operadores de Fredholm de índice cero y la formulación débil de los problemas que consideramos, en el Capítulo II estudiamos los problemas de contorno periódico y de Dirichlet para la ecuación (I).

Así, en la Sección 1 exponemos los resultados que se conocen para el problema lineal a trozos y caracterizamos la existencia de solución no trivial de los problemas periódico y de Dirichlet para la ecuación

(7) $$u'' + \beta(x)u^+ - \delta(x)u^- = 0, \quad \text{a. e. }]0,\pi[,$$

donde β y δ son funciones en $L^2(0,\pi)$ verificando ciertas restricciones de crecimiento impuestas por el estudio del problema lineal a trozos, resultados que serán fundamentales en demostraciones posteriores.

En la Sección 2, estudiamos el caso del primer valor propio. Para el problema periódico demostramos la existencia de solución para toda f cuando $g(\pm\infty) = \pm\infty$ y $g(u) \geq -\gamma|u| + K$ para $u \leq 0$, con $0<\gamma<1$, permitiendo un crecimiento arbitrario de g en la dirección positiva.

De nuevo el problema lineal a trozos indica que no es posible la obtención de un resultado similar para el problema de Dirichlet (quedando así contestada negativamente la pregunta efectuada por Mawhin en [M2]). En este caso, es necesario imponer a g restricciones en las dos direcciones,

(8) $$g(u) \leq \alpha|u| + K, \quad u\geq 0, \qquad g(u) \geq -\beta|u| + k, \quad u\leq 0.$$

En la Sección 3, estudiamos el caso de valores propios superiores al primero, obteniendo resultados similares tanto para el problema periódico como para el de Dirichlet de los que se deduce la existencia de solución para toda f cuando $g(\pm\infty) = \pm\infty$ y g verifica (8) con ciertas restricciones sobre α y β.

Los resultados que se obtienen en las Secciones 2 y 3 son óptimos en el sentido de que las restricciones que se imponen a g permiten el mayor crecimiento que el término no lineal puede tener para asegurar la existencia de solución para cualquiera que sea f. Estos resultados generalizan algunos de los obtenidos en [D2].

En el Capítulo III obtenemos resultados similares a los anteriores sobre el problema periódico-Dirichlet para la ecuación (II).

Sin embargo, al no tener en este caso resultados análogos a los de los Lemas 1.3 y 1.4 del Capítulo II, los Teoremas obtenidos se limitan a perturbaciones no lineales verificando $|g(u)| \leq \gamma|u| + K$, $u \in R$. Así, en primer lugar caracterizamos la existencia de soluciones no triviales del problema periódico-Dirichlet para la ecuación $u_t = u_{xx} + c(t,x)u$, cuando $c \in L^2_T(R\times]0,\pi[)$ y $n^2 \leq c(t,x) < (n+1)^2$ y demostramos la existencia de solución para toda f cuando $g(\pm\infty) = \pm\infty$ y g verifica $|g(u)|\leq\gamma|u|+$ $+K$, $u \in R$, con $0 < \gamma < (n+1)^2 - n^2 (=\lambda_{n+1}-\lambda_n)$.

El último Capítulo de ésta memoria está dedicado al problema doblemente periódico para la ecuación (III). Este problema es esencialmente distinto a los estudiados en los capítulos anteriores. En efecto, mientras que los valores propios de los operadores lineales asociados a los problemas de los Capítulos II y III son de multiplicidad finita, el operador lineal asociado al problema que aquí se estudia tiene todos los valores propios de multiplicidad finita excepto $\lambda_0 = 0$, que es de multiplicidad infinita, esto es, ker L es infinito dimensional. Este hecho supone una gran dificultad en el estudio de la ecuación

$$(9) \qquad Lu + g(u) = f, \qquad u \in \operatorname{dom} L,$$

debido a la falta de compacidad que conlleva.

El problema se suele resolver usando técnicas de operadores monótonos. Por ello, se impone que g sea monótona.

Bahri y Brezis ([BBr], [Br2]), estudian el problema periódico-Dirichlet para la ecuación (III) con $\lambda = 0$ y $|g(u)| \leq \gamma|u| + K$, $u \in R$, $0 < \gamma < |\lambda_{-1}|$, donde λ_{-1} es el primer valor propio del operador lineal asociado.

Esta condición sobre g indica que no puede cruzar valores propios distintos de $\lambda_0 = 0$ y que su crecimiento debe de ser a lo más lineal.

Si observamos que las soluciones periódicas de (III) con $\lambda = 0$, independientes de x, son soluciones periódicas de la ecuación (I), los resultados obtenidos en el Capítulo II para esta última ecuación sugieren que la restricción de crecimiento de [BBr] puede ser mejorada. Esto se hace de forma parcial en este Capítulo.

Así, en la Sección 1 estudiamos el caso de g acotada, demostrando, por el Método Alternativa, la existencia de solución 2π-periódica de $Lu+\varepsilon u+g(u)=f$. Después, por un proceso de paso al límite similar al de [BBr], se obtiene la existencia de solución de (9) en este caso. Este resultado se puede obtener usando métodos variacionales, en lugar de los metodos alternativa, siguiendo las lineas de [BBr].

En la Sección 2 obtenemos el resultado deseado que muestra la existencia de solución cuando g es acotada en una dirección y crece arbitrariamente en la otra, pudiendo cruzar valores propios del operador L distintos de cero. La demostración está basada en la consideración de problemas truncados que tienen solución por los resultados de la Sección 1 y en la obtención de una cota uniforme para todas las soluciones de estos problemas.

Por último, y a lo largo de la memoria, se han incluido numerosas Notas que analizan los resultados obtenidos y algunas de las cuales son problemas en los que podríamos seguir trabajando.

Deseo hacer constar mi más sincero agradecimiento al Director de esta memoria, Prof. Pedro Martínez Amores, por su constante ayuda y estímulo durante la elaboración de la misma, así como a Rafael Ortega Rios por sus valiosos comentarios y sugerencias, sin los que no hubiese sido posible la realización de este trabajo.

También deseo expresar mi agradecimiento a Antonio, él ya sabe por qué.

C A P I T U L O   I

P R E L I M I N A R E S

Como hemos comentado en la Introducción, los problemas de contorno que estudiamos en esta memoria se pueden plantear en forma de una ecuación abstracta del tipo:

$$(0.1) \qquad Lu - \lambda u + g(u) = f, \qquad u \in \mathrm{dom}L,$$

donde $L : \mathrm{dom}L \subset X \longrightarrow Y$ es un operador lineal definido entre dos espacios de Banach X e Y, $X \subset Y$, λ es un valor propio del operador L, esto es, $\ker(L - \lambda I) \neq \{0\}$ (estudiamos problemas resonantes), $g: X \longrightarrow Y$ es un operador, que en nuestro caso será un operador de sustitución u operador de Nemistkii asociado a una función $g: R \longrightarrow R$, y f es un elemento de Y.

Para el estudio de la ecuación (0.1) utilizaremos el Método Alternativa (ver [C], [GM]): bajo determinadas hipótesis sobre L, la ecuación (0.1) se puede descomponer en un sistema de dos ecuaciones,

$$(0.2) \qquad u - Pu = K(I - Q)(f + g(u)),$$

$$(0.3) \qquad Q(f + g(u)) = 0, \qquad u \in \mathrm{dom}(L - \lambda I) = \mathrm{dom}L,$$

donde por I denotamos el operador identidad en Y, P y Q son proyecciones continuas, $P: X \longrightarrow X$ y $Q: Y \longrightarrow Y$, verificando:

$$\mathrm{Im}\, P = \ker(L - \lambda I), \quad \ker Q = \mathrm{Im}(L - \lambda I),$$

y $K: \mathrm{Im}(L - \lambda I) \longrightarrow \mathrm{dom}L \cap \ker P$ es la inversa por la derecha del operador $L - \lambda I$, esto es,

$$K(L - \lambda I)u = u - Pu, \quad u \in \mathrm{dom}L,$$

$$(L - \lambda I)Kf = f, \qquad f \in \mathrm{Im}(L - \lambda I).$$

La ecuación (0.2) recibe el nombre de <u>ecuación auxiliar</u> y la (0.3) el de <u>ecuación de bifurcación</u>. Si descomponemos toda solución de (0.1) o equivalentemente, de (0.2)-(0.3), en la forma $u = u_0 + u_1$, con $u_0 = Pu$ $u_1 = u - Pu$, la ecuación (0.3) se transforma en:

$$(0.4) \qquad QN(u_0 + u_1) = 0, \quad u_0 \in \mathrm{Im}\, P, \; u_1 \in \ker P \cap \mathrm{dom}L.$$

Fijada u_1, se resuelve (0,4) en Im P ($=\ker(L - \lambda I)$) y la solución $u_0(u_1)$ se sustituye en (0.2) obteniendo,

$$(0.5) \qquad u_1 = K(I - Q)(f + g(u_0(u_1) + u_1)), \quad u_1 \in \ker P \cap \mathrm{dom}L.$$

Una vez resuelta (0.5) la solución de (0.1) vendrá dada por $u = u_1 + u_0(u_1)$.

Entre los operadores para los que (0.1) se puede descomponer en (0.2)-(0.3) se encuentran los denominados operadores de Fredholm de índice cero. Estos operadores tienen su núcleo finito-dimensional por lo que, fijada u_1, la ecuación (0.4) es una ecuación en un espacio de dimensión finita.

En la Sección 1 exponemos algunos resultados sobre operadores de Fredholm de índice cero y en la Sección 2, los ejemplos de éstos operadores que aparecen en la memoria. En la Sección 3, estudiaremos el operador de ondas unidimensional. Este operador tiene el núcleo de dimensión infinita, sin embargo, bajo determinadas hipótesis sobre la no linealidad g, utilizaremos el Método Alternativa para resolver un problema de contorno asociado a dicho operador.

1.- Operadores de Fredholm de índice cero. Un teorema de Continuación.

Sea $\hat{L}$: dom $\hat{L} \subset X \longrightarrow Y$ un operador definido entre dos espacios de Banach reales X e Y. Se dice que $\hat{L}$ es un operador de Fredholm de índice cero si:

i) Im $\hat{L}$ es cerrado en Y,

ii) dim ker $\hat{L}$ = codim Im $\hat{L} < \infty$,

donde dom $\hat{L}$, Im $\hat{L}$ y ker $\hat{L}$ denotan el dominio, la imagen o rango y el núcleo del operador $\hat{L}$, respectivamente.

Si $\hat{L}$ es un operador de Fredholm de índice cero, es fácil demostrar (ver [M1]) que existen proyecciones continuas $P: X \longrightarrow X$ y $Q: Y \longrightarrow Y$ de forma que Im P = ker $\hat{L}$, ker Q = Im $\hat{L}$ y resolver la ecuación

$$(1.1) \qquad \hat{L}u = Nu, \qquad u \in \text{dom } \hat{L},$$

es equivalente a resolver el sistema

$$(1.2) \qquad u - Pu = K(I - Q)Nu,$$

$$(1.3) \qquad QNu = 0, \qquad u \in \text{dom } \hat{L},$$

donde $K: \operatorname{Im} \hat{L} \longrightarrow \ker P \cap \operatorname{dom} \hat{L}$ es la inversa por la derecha de $\hat{L}$.

Sea Ω un abierto acotado de X, se dice que el operador $N: X \longrightarrow Y$ es $\hat{L}$-compacto en $\bar{\Omega}$ si:

i) $QN(\bar{\Omega})$ es acotado en Y,

ii) $K(I - Q)N: \bar{\Omega} \longrightarrow X$ es compacta, esto es, es continua y transforma acotados en relativamente compactos.

Se demuestra el siguiente resultado.

TEOREMA 1.1.- (Teorema de Continuación, [GM],[C]) Sea $\hat{L}$ un operador de Fredholm de índice cero y N $\hat{L}$-compacto en $\bar{\Omega}$. Supongamos que:

a) Para cada $\lambda \in]0,1[$, toda solución u de $\hat{L}u = \lambda Nu$ es tal que $u \notin fr\Omega$ ($fr\Omega$ denota la frontera de Ω).

b) $QNu \neq 0$, para todo $u \in \ker \hat{L} \cap fr\Omega$ y $d(JQN, \Omega \cap \ker \hat{L}, 0) \neq 0$, donde $J: \operatorname{Im} Q \longrightarrow \ker \hat{L}$ es un isomorfismo y d denota el grado de Brouwer de la aplicación JQN en $\Omega \cap \ker \hat{L}$ respecto a cero

Entonces, la ecuación (1.1) (o equivalentemente, el sistema (1.2)-(1.3)) tiene al menos una solución en $\operatorname{dom} \hat{L} \cap \bar{\Omega}$.

(Para una definición del grado de Brouwer ver [L1], [M1]).

La hipótesis a) del Teorema anterior se verifica, por ejemplo, si existe una constante C de forma que toda solución u de $\hat{L}u = \lambda Nu$, $\lambda \in]0,1[$, cumpla $|u|_X < C$, ya que entonces basta tomar como Ω la bola en X de centro 0 y radio C. La obtención de tal constante es lo que se denomina <u>acotación a priori</u> de las soluciones de la ecuación.

Para comprobar la condición b) se utilizarán algunas propiedades del grado de Brouwer. Por ejemplo, si el ker $\hat{L}$ es de dimensión uno, basta con probar que la aplicación JQN cambia de signo. Si el ker $\hat{L}$ es de dimensión dos utilizaremos una homotopía con la identidad para comprobar que el grado es distinto de cero.

2.- Ejemplos de problemas de contorno con operadores de Fredholm de índice cero.

En esta sección vamos a exponer la formulación débil de algunos problemas de contorno que estudiamos en la memoria en los que aparecen de forma natural operadores de Fredholm de índice cero.

En adelante, por λ_n denotaremos el n-ésimo valor propio del operador lineal asociado al problema de contorno que se considere y $g: R \longrightarrow R$ y f serán funciones dadas.

EJEMPLO 2.1.- En el Capítulo II estudiamos la existencia de solución débil de la ecuación

(2.1.1) $$u'' + \lambda_n u + g(u) = f ,$$

verificando condiciones de contorno periódicas

(2.1.2) $$u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi).$$

Sean $X = C_\pi(R)$ el espacio de Banach de las funciones $u: R \longrightarrow R$ continuas y π-periódicas con la norma

$$|u|_\infty = \max_{x\in[0,\pi]} |u(x)|, \qquad u \in X,$$

e $Y = L^2_\pi(R)$ el espacio de Hilbert de las funciones $u: R \longrightarrow R$ π-periódicas de cuadrado integrable sobre $]0,\pi[$ con la norma

$$|u|_2 = (\int_0^\pi u^2)^{1/2}, \qquad u \in Y,$$

y el producto escalar

$$(u,v) = \int_0^\pi uv, \qquad u,v \in Y,$$

Sea $\mathcal{D}$ la clase de funciones test $\chi \in C^2_\pi(R)$. Definimos L: dom $L \longrightarrow Y$ como dom L = { $u \in X$ | la aplicación $\chi \in \mathcal{D} \longmapsto (u,\chi'')$ es L^2-continua} $(Lu,\chi) = -(u,\chi'')$, para cada $u \in$ dom L, $\chi \in \mathcal{D}$.

Como $(\phi_n)_{n\in Z}$, donde $\phi_n(x) = (1/\pi)e^{i2nx}$, constituye una base ortonormal en Y, toda $u \in Y$ se puede expresar

$$u(x) = \sum_n u_n \phi_n(x),$$

donde $u_n = (u,\phi_n)$, $n \in Z$ (por $\sum_n$ indicamos la suma desde $n=-\infty$ hasta $+\infty$)

LEMA 2.1.- dom $L = H^2_\pi(R)$,
donde $H^2_\pi(R)$ denota el espacio de las funciones $u \in Y$ tales que $u', u'' \in Y$ (u' y u'' son las derivadas en el sentido de las distribuciones de u) con la norma $|u|_{H^2} = (|u|_2^2 + |u'|_2^2 + |u''|_2^2)^{1/2}$.

<u>Demostración.-</u>

Se tiene que $H^2_\pi(R) = \{u \in Y \mid \sum_n n^4 |u_n|^2 < +\infty\}$ (ver [V]).

Como $\mathcal{D}$ es denso en Y, dado $u \in$ dom L, al ser $\chi \in \mathcal{D} \longmapsto (u,\chi'')$ L^2-continua, podemos extender dicho funcional de forma continua a todo Y, obteniendo así un funcional $F_u: Y \longrightarrow R$, continuo y tal que si $\chi \in \mathcal{D}$, $F_u \chi = (u, \chi'')$. Por el Teorema de representación de Riesz-Fréchet ([Br1]), existe $f \in Y$ tal que $F_u v = (f, v)$, $v \in Y$.

Puesto que $f \in Y$, f se puede expresar $f = \sum_n f_n \phi_n$, donde $(f, \phi_n) = f_n = F_u \phi = (u, \phi_n'') = (u, -(2n)^2 \phi_n) = -(2n)^2 u_n$, $n \in Z$.

Por tanto, $f = - \sum_n (2n)^2 u_n \phi_n$, y como $f \in Y$, $\sum_n n^4 |u|_\infty^2 < +\infty$. Consecuentemente, si $u \in$ dom L, entonces $u \in H_\pi^2(R)$.

En el transcurso de la demostración anterior hemos obtenido que:

$$Lu = \sum_n (2n)^2 u_n \phi_n, \qquad u \in \text{dom } L.$$

Recíprocamente, sea $u \in H_\pi^2(R)$, entonces dada $\chi \in \mathcal{D}$,

$$|(u, \chi'')| = |(u'', \chi)| \leq |u''|_2 |\chi|_2 \leq |u|_{H^2} |\chi|_2,$$

luego $u \in$ dom L.

Las propiedades de las series de Fourier indican que los valores propios de L, esto es, los $\lambda \in C$ para los que $Lu - \lambda u = 0$ admite solución no trivial, son:

$$\lambda_n = (2(n-1))^2, \qquad n \in N,$$

y una base de funciones propias asociada al valor propio λ_n la constituyen,

$$\psi_1(x) = 1/\sqrt{\pi}, \qquad n=1,$$

$$\psi_n^1(x) = (2/\pi)^{1/2} \text{sen } 2(n-1)x, \quad \psi_n^2(x) = (2/\pi)^{1/2} \cos 2(n-1)x, \quad n \geq 2,$$

(obsérvese que al ser u una función real ha de ser $\bar{u}_n = u_{-n}$, $n \in Z$).

La Alternativa de Fredholm (ver [BN]), indica que para λ de R, $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in R$, se tiene,

$$\ker(L - \lambda I) = \{0\}, \quad Im(L - \lambda I) = Y,$$

para $\lambda = \lambda_1 = 0$,

$$\ker L = \langle \psi_1 \rangle, \quad Im\, L = (\ker L)^{\perp} = \{f \in Y \mid (f, \psi_1) = 0\},$$

y para $\lambda = \lambda_n$, $n \geq 2$,

$$\ker(L - \lambda_n I) = \langle \psi_n^1, \psi_n^2 \rangle, \quad Im(L - \lambda_n I) = (\ker(L - \lambda_n I))^{\perp} =$$

$$= \{ f \in Y \mid (f, \psi_n^1) = (f, \psi_n^2) = 0 \}.$$

Así, $L - \lambda I$, $\lambda \in R$, es un operador de Fredholm de índice cero y en los casos resonantes, esto es, cuando $\lambda \neq \lambda_n$ para algún n, las proyecciones naturales P y Q se definen para cada n como

$$Q_1 f = (f, \psi_1)\psi_1, \qquad n = 1,$$

$$Q_n f = (f, \psi_n^1)\psi_n^1 + (f, \psi_n^2)\psi_n^2, \qquad n \geq 2, \qquad f \in Y,$$

$$P_n f = Q_n u, \qquad u \in X.$$

Además, puesto que dom $L = H_\pi^2(R)$ que está compactamente embebido en X, esto es, $i: H_\pi^2(R) \longrightarrow X$ es compacta (ver [A], [Br1]), la inversa por la derecha de $L - \lambda_n I$, $K_n: Im(L - \lambda_n I) \longrightarrow \mathrm{dom}\, L \cap \ker P_n$ es compacta, ($K_n = i \circ \tilde{K}_n$, donde $\tilde{K}_n: Im(L - \lambda_n I) \longrightarrow H_\pi^2(R) \cap \ker P_n$, es continua).

Si $g: R \longrightarrow R$ es una función continua (ó $g:]0, \pi[\times R \longrightarrow R$ satisface las condiciones de Caratheodory, ver [F], [FK]) y $f \in Y$, definiendo $N: X \longrightarrow Y$ como $Nu(x) = g(u(x)) - f(x)$ (ó $Nu(x) = g(x,u(x)) - f(x)$), N está bien definido, es continuo y transforma acotados en acotados ([F] [FK]). Por consiguiente, al ser K_n compacta y $\dim(\operatorname{Im} Q_n) < +\infty$, N es $(L - \lambda_n I)$-compacta en subconjuntos acotados de X.

En resumen, estudiar la existencia de solución débil del problema periódico (2.1.1)-(2.1.2), esto es, la existencia de $u \in H^2_\pi(R)$ tal que

$$(u,\chi'') + \lambda_n(u,\chi) + (g(u),\chi) = (f,\chi), \qquad \text{para cada } \chi \in \mathcal{D},$$

es equivalente a estudiar la existencia de solución de

$$Lu - \lambda_n u = g(u) - f, \qquad u \in \operatorname{dom} L, \tag{2.1.3}$$

donde $(L - \lambda_n I)$ es un operador de Fredholm de índice cero y el operador N definido por $Nu = g(u) - f$ es $(L - \lambda_n I)$-compacto en subconjuntos acotados de X.

EJEMPLO 2.2.- También en el Capítulo II se estudia la existencia de solución débil de la ecuación

$$u'' + \lambda_n u + g(u) = f, \tag{2.2.1}$$

verificando condiciones de contorno de Dirichlet

$$u(0) = u(\pi) = 0. \tag{2.2.2}$$

Sean $X = C[0,\pi]$ el espacio de Banach de las funciones $u: [0,\pi] \longrightarrow R$ continuas, con la norma uniforme e $Y = L^2(0,\pi)$ el espacio de Hilbert de las funciones $u:]0,\pi[\longrightarrow R$ de cuadrado integrable sobre $]0,\pi[$, con la norma y el producto escalar usuales.

Sea $\mathcal{D}$ la clase de funciones test $\chi \in C^2[0,\pi]$, verificando $\chi(0)= =\chi(\pi) = 0$. Definimos $L: \text{dom } L \quad X \longrightarrow Y$ como

$\text{dom } L = \{ u \in X \mid \text{la aplicación } \chi \in \mathcal{D} \longmapsto (u,\chi'') \text{ es } L^2\text{-continua}\}$

$(Lu,\chi) = -(u,\chi'')$, para cada $u \in \text{dom } L$, $\chi \in \mathcal{D}$.

Utilizando, como en el Ejemplo anterior, series de Fourier, se demuestra

LEMA 2.2.- $\text{dom } L = H^2(0,\pi) \cap \mathring{H}^1(0,\pi)$

donde $H^2(0,\pi) \cap \mathring{H}^1(0,\pi)$ denota el espacio de las funciones $u \in Y$ tales que $u', u'' \in Y$ y verifican $u(0) = u(\pi) = 0$, con la norma $| \; |_{H^2}$.

Los valores propios de L son

$$\lambda_n = n^2, \; n \in N,$$

y una base de funciones propias asociadas al valor propio λ_n la constituye

$$\psi_n(x) = \text{sen } nx, \qquad n \in N.$$

La Alternativa de Fredholm indica que para $\lambda \in R$, $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in N$, se tiene

$$\ker(L - \lambda I) = \{0\}, \qquad \text{Im}(L - \lambda I) = Y,$$

y para $\lambda = \lambda_n$, $n \in N$

$$\ker(L - \lambda_n I) = \langle \psi_n \rangle, \quad \text{Im}(L - \lambda_n I) = (\ker(L - \lambda_n I))^{\perp} =$$

$$= \{ f \in Y \mid (f,\psi_n) = 0 \}.$$

En consecuencia, $L - \lambda I$, $\lambda \in R$, es un operador de Fredholm de índice cero y si $\lambda = \lambda_n$, las proyecciones naturales P y Q se definen:

$$Q_n f = (f, \psi_n)\psi_n, \quad f \in Y, \qquad P_n u = Q_n u, \quad u \in X, \ n \in N.$$

Además, al estar $H^2(0,\pi) \cap \mathring{H}^1(0,\pi)$ compactamente embebido en X ([A], [Br1]), la inversa por la derecha de $L - \lambda_n I$, $K_n : \operatorname{im}(L - \lambda_n I) \longrightarrow$ $\longrightarrow \operatorname{dom} L \cap \ker P$ es compacta. Si $g: R \longrightarrow R$ es una función continua y $f \in Y$, el operador $N: X \longrightarrow Y$ definido como $Nu(x) = g(u(x)) - f(x)$, está bien definido, es continuo y transforma acotados en acotados, por lo que dicho operador es $(L - \lambda_n I)$-compacto en subconjuntos acotados de X.

Estudiar la existencia de solución débil del problema de Dirichlet (2.2.1)-(2.2.2) es equivalente a estudiar la existencia de solución de

(2.2.3) $$Lu - \lambda_n u = g(u) - f, \qquad u \in \operatorname{dom} L,$$

donde $(L - \lambda_n I)$ es un operador de Fredholm de índice cero y N, definido por $Nu = g(u) - f$, es $(L - \lambda_n I)$-compacto en subconjuntos acotados de X.

EJEMPLO 2.3.- En el Capítulo III estudiamos la existencia de solución débil de la ecuación del calor unidimensional

(2.3.1) $$u_t - u_{xx} - \lambda_n u - g(u) = f,$$

que verifica condiciones de contorno T-periódicas en t, $T > 0$,

(2.3.2) $$u(t + T, x) = u(t,x), \qquad t \in R, \quad x \in [0,\pi],$$

y de Dirichlet en x

(2.3.3) $$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \in R.$$

Sea $Q = R\times]0,\pi[$ y sean $X = C_T(\bar{Q})$ el espacio de las funciones $u: \bar{Q} \longrightarrow R$, continuas y T-periódicas en la primera variable t, con la norma

$$|u|_\infty = \max_{(t,x)\in\bar{Q}_T} |u(t,x)|, \qquad \text{donde } Q_T =]0,T[\times]0,\pi[,$$

e $Y = L^2_T(Q)$ el espacio de Hilbert de las funciones $u: Q \longrightarrow R$, T-periódicas en t y de cuadrado integrable en Q_T, con la norma

$$|u|_2 = \left(\int_{Q_T} u^2\right)^{1/2}, \qquad u \in Y,$$

y el producto escalar

$$(u,v) = \int_{Q_T} uv\ , \qquad u,v \in Y.$$

Sea $\mathcal{D}$ la clase de funciones test $\chi \in C^{1,2}_T(\bar{Q})$ verificando $\chi(t,0) = \chi(t,\pi) = 0$ para cada $t \in R$ (denotamos por $C^{1,2}_T(\bar{Q})$ el espacio de las funciones $\chi(t,x)$ de clase C^1 en $\bar{Q}$ y que admiten derivada segunda continua con respecto a x en $\bar{Q}$, ver [V]).

Definimos $L: \text{dom } L \subset X \longrightarrow Y$ como

$\text{dom } L = \{ u \in X \mid$ la aplicación $\chi \in \mathcal{D} \longmapsto (u,\chi_t + \chi_{xx})$ es L^2-continua$\}$

$(Lu,\chi) = -(u,\chi_t + \chi_{xx})$, para cada $u \in \text{dom } L$, $\chi \in \mathcal{D}$.

Sean $\phi_{jn}(t,x) = (2/\pi T)^{1/2} e^{ijwt}$ sen nx, con $w = 2\pi/T$, $j \in Z$, $n \in N$.

El conjunto $\{ \phi_{jn} \mid j \in Z, n \in N \}$ constituye una base ortonormal en Y y, por tanto, toda $u \in Y$ se puede expresar

$$u(t,x) = \sum_{j,n} u_{jn}\phi_{jn}(t,x),$$

donde $u_{jn} = (u, \phi_{jn}) = \int_0^T\int_0^\pi u(t,x)\phi_{jn}(t,x)dxdt$ ($\sum_{j,n}$ indica $\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}$)

Como en los ejemplos anteriores, se demuestra

LEMA 2.3.- dom $L = H_T^{1,2}(Q) \cap \mathring{H}_T^1(Q)$ y $Lu(t,x) = \sum_{j,n}(ijw + n^2)u_{jn}\phi_{jn}$, donde $H_T^{1,2}(Q) \cap \mathring{H}_T^1(Q)$ es el espacio de las funciones $u \in Y$ tales que u_t, u_x, $u_{xx} \in Y$ y $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $t \in R$ (observar que $H_T^{1,2}(Q) \subset C_T(Q)$), y

$$|u|_{H^{1,2}} = (|u|_2^2 + |u_t|_2^2 + |u_x|_2^2 + |u_{xx}|_2^2)^{½}.$$

Observar que $H_T^{1,2}(Q) \cap \mathring{H}_T^1(Q) = \{ u \in Y \mid \sum_{j,n}(j^2+n^4)|u_{jn}|^2 < +\infty \}$, ver [V], [LSV].

Teniendo en cuenta que estamos considerando funciones reales, con lo que $u_{jn} = \bar{u}_{-jn}$ y utilizando las propiedades de las series de Fourier, se obtiene fácilmente que los valores propios de L son

$$\lambda_n = n^2, \qquad n \in N,$$

y una base de funciones propias asociada al valor propio λ_n la constituye

$$\psi_n(t,x) = \phi_{0n}(t,x) = (2/\pi T)^{½}\text{sen } nx, \qquad n \in N.$$

La Alternativa de Fredholm indica que si $\lambda \in R$ no es un valor propio esto es, $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in N$, se tiene

$$\ker(L - \lambda I) = \{0\}, \quad \text{Im}(L - \lambda I) = Y,$$

y para $\lambda = \lambda_n$, $n \in N$,

$$\ker(L - \lambda_n I) = \langle\psi_n\rangle, \quad \text{Im}(L - \lambda_n I) = (\ker(L - \lambda_n I)) =$$

$= \{ f \in Y \mid (f,\psi_n) = 0 \}.$

Los operadores $L - \lambda_n I$ son pues, operadores de Fredholm de índice cero. Las proyecciones naturales P y Q se definen para cada $n \in N$ como

$$Q_n f = (f,\psi_n)\psi_n, \quad f \in Y, \qquad P_n u = Q_n u, \quad u \in X, \ n \in N$$

Como $H_T^{1,2}(Q) \cap \mathring{H}_T^1(Q)$ está compactamente embebido en X (ver [V], [LSU]) la inversa por la derecha de $(L - \lambda_n I)$, K_n: $Im(L - \lambda_n I) \longrightarrow domL \cap ker P_n$ es compacta. Entonces, si $g: R \longrightarrow R$ es una función continua, el operador de Nemystkii, $N: X \longrightarrow Y$, $Nu(x) = f(x) - g(u(x))$, está bien definido, es continuo y transforma acotados en acotados y, por tanto, es $(L - \lambda_n I)$-compacto en subconjuntos acotados de X.

Estudiar la solución débil del problema (2.3.1)-(2.3.2)-(2.3.3), esto es, la existencia de $u \in$ dom L tal que

$$-(u,\chi_t + \chi_{xx}) - \lambda_n(u,\chi) - (g(u),\chi) = (f,\chi), \qquad \chi \in \mathcal{D},$$

es equivalente a estudiar la existencia de solución de

$$(2.3.4) \qquad Lu - \lambda_n u = f + g(u), \qquad u \in \text{dom } L,$$

donde $(L - \lambda_n I)$ es un operador de Fredholm de índice cero y $Nu = f+g(u)$, $(L - \lambda_n I)$-compacto en subconjuntos acotados de X.

3. El operador de ondas unidimensional.

En el Capítulo IV estudiamos la existencia de solución débil de la ecuación de ondas

(3.1) $$u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f,$$

verificando condiciones de contorno 2π-periódicas en t y en x, esto es,

(3.2) $$u(t+2\pi, x) = u(t,x) = u(t, x+2\pi), \qquad t, x \in R$$

Sea $J =]0,2\pi[\times]0,2\pi[$ y sean $X = Y = L^2(J)$, el espacio de Hilbert de las funciones $u: J \longrightarrow R$ de cuadrado integrable en J, con la norma y el producto escalar usuales. En adelante, identificaremos una función u con su extensión 2π-periódica en t y en x, cuando sea necesario.

Sea $\mathcal{D}$ la clase de funciones test $\chi \in C^2(\bar{J})$ verificando

$$\chi(t,0) - \chi(t,2\pi) = \chi_x(t,0) - \chi_x(t,2\pi) = 0,$$

$$\chi(0,x) - \chi(2\pi,x) = \chi_t(0,x) - \chi_t(2\pi,x) = 0, \qquad t,x \in [0,2\pi]$$

Definimos L: dom $L \subset X \longrightarrow X$ por:

dom $L = \{ u \in X \mid$ la aplicación $\chi \in \mathcal{D} \longrightarrow (u, \Box\chi)$ es L^2-continua $\}$

$(Lu, \chi) = (u, \Box\chi)$, para cada $u \in$ dom L, $\chi \in \mathcal{D}$,

donde $\Box$ denota el operador de ondas u operador de d'Alembert,

$$\Box\chi = \chi_{tt} - \chi_{xx} .$$

Sean $\phi_{mn}(t,x) = (1/2\pi)e^{i(mt+nx)}$, $m, n \in Z$. Como $\{ \phi_{mn} \mid m, n \in Z \}$ constituye una base ortonormal en X, $u \in X$ se puede representar de la forma

$$u(t,x) = \sum_{m,n} u_{mn} \phi_{mn}(t,x),$$

donde $u_{mn} = (u, \phi_{mn})$, $m, n \in Z$ (por $\sum_{m,n}$ denotamos $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}$)

De forma análoga a lo efectuado en los ejemplos de la Sección 2, se demuestra que

$$\mathrm{dom}L = \{ u \in X \mid \sum_{m,n} (n^2 - m^2)^2 |u_{mn}|^2 < +\infty \}.$$

y que dada $u \in \mathrm{dom}\, L$,

$$Lu = \sum_{m,n} (n^2 - m^2) u_{mn} \phi_{mn},$$

En consecuencia los valores propios del operador L son

$$\lambda = n^2 - m^2, \qquad n, m \in Z,$$

esto es, L tiene una sucesión de valores propios reales, todos ellos de multiplicidad finita, excepto $\lambda_0 = 0$ que tiene multiplicidad infinita.

A diferencia de los ejemplos anteriores, $\ker(L - \lambda_0 I) = \ker L$ es de dimensión infinita y, por consiguiente, L no es un operador de Fredholm de índice cero.

El ker L está formado por el cierre de todos los polinomios trigonométricos generados por ϕ_{mn} con $m = \pm n$, esto es, denotando por

$$\phi_m(s) = (1/2\pi)e^{ims},$$

se tiene que ker L está generado por $\phi_m(t+x)$, $\phi_m(t-x)$, con $m \in Z$ y por sus límites en X. Por tanto, $\psi \in \ker L$ si y sólo si,

$$\psi(t,x) = \sum_m (\psi_m^1 \phi_m(t+x) + \psi_m^2 \phi_m(t-x)),$$

donde $\psi_m^1 = (\psi(t,x), \phi_m(t+x))$ y $\psi_m^2 = (\psi(t,x), \phi_m(t-x))$.

Definiendo $p_1(s) = \sum_m \psi_m^1 \phi_m(s)$, $q_1(s) = \sum_m \psi_m^2 \phi_m(s)$, se tiene que $q_1, p_1 \in L^2_{2\pi}(R)$ y $\psi(t,x) = p_1(t+x) + q_1(t-x)$.

Recíprocamente, si p_1, $q_1 \in L^2_{2\pi}(R)$ entonces la función $\psi(t,x) = p_1(t+x) + q_1(t-x)$ pertenece a Ker L. En efecto:

Si expresamos $\psi(t,x) = \sum_{m,n}\psi_{mn}\phi_{mn}(t,x)$, entonces,

$$\psi_{mn} = (\psi,\phi_{mn}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} p_1(t+x)\phi_{mn}(t,x)dtdx +$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} q_1(t-x)\phi_{mn}(t,x)dtdx = \int_0^{2\pi}\int_x^{2\pi+x} p_1(s)\phi_{mn}(s-x,x)dsdx +$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} q_1(s)\phi_{mn}(s+x,x)dsdx = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} p_1(s)e^{ims}\int_x^{2\pi+x} e^{ix(-m+n)}dxds +$$

$$+ (1/2\pi)\int_0^{2\pi} q_1(s)e^{ims}\int_{-x}^{2\pi-x} e^{ix(m+n)}dxds = 0, \quad \text{si } m\neq\pm n.$$

Por tanto $\psi \in$ dom L y $L\psi = 0$.

De lo anterior,

$$\ker L = \{ \psi \in X \mid \psi(t,x) = p_1(t+x) + q_1(t-x),\ p_1,\ q_1 \in L^2_{2\pi}(R)\},$$

y definiendo el valor medio $\bar{\psi}$ de ψ como

$$\bar{\psi} = (1/2\pi)^2 \int_J \psi$$

$$\ker L = \{ \psi \in X \mid \psi(t,x) = \bar{\psi} + p(t+x) + q(t-x),\ \bar{\psi} \in R,\ p,\ q \in L^2_{2\pi}(R)$$

$$\text{con} \int_0^{2\pi} p = \int_0^{2\pi} q = 0\}$$

Nótese que las funciones constantes pertenecen al ker L.

La Alternativa de Fredholm indica que $f \in$ Im L si y sólo si $(f,\psi) = 0$, $\psi \in$ ker L, esto es, si y sólo si,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t,x)p_1(t+x)dtdx + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t,x)q_1(t-x)dtdx = 0,$$

para cualesquiera p_1, $q_1 \in L^2_{2\pi}(R)$

Haciendo s=t+x en la primera integral y s=t-x en la segunda y teniendo en cuenta la periodicidad, se obtiene que

$$\mathrm{Im}\, L = \{ f\in X \mid \int_0^{2\pi} f(t-x,x)dx = \int_0^{2\pi} f(t+x,x)dx = 0, \text{ a.e. } t \in]0,2\pi[\}$$

Observese que Im L = $(\ker L)^{\perp}$, que L es un operador cerrado y que X= = Im L $\oplus$ ker L

El siguiente resultado puede verse en [ChH]:

LEMA 3.1.- Dada $f \in$ Im L, si $u\in$ Im L es la única solución de Lu = f en Im L, entonces $u \in L^{\infty}(J)$, $|u|_{L^{\infty}} \leq C|f|_{L^1}$, para alguna constante C independiente de u y f.

La proyección natural P=Q sobre el núcleo se define

$$Pu(t,x) = \bar{u} + p(t+x) + q(t-x),\ u \in X,$$

donde

$$\bar{u} = (1/2\pi)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)dtdx,$$

$$p(s) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} u(s-x,x)dx - \bar{u},$$

$$q(s) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} u(s+x,x)dx - \bar{u}.$$

Dadas $g: R \longrightarrow R$ y $f \in X$, una función $u \in \operatorname{dom} L$ es solución débil del problema (3.1)-(3.2), esto es, satisface

$$(u, \Box\chi) + (g(u), \chi) = (f, \chi), \qquad \chi \in \mathfrak{D},$$

si y sólo si, u verifica

$$(3.3) \qquad Lu + g(u) = f.$$

Para aplicar el Método Alternativa a la ecuación (3.3) y tratar de resolver el sistema

$$(3.4) \qquad u - Pu = K(I - Q)(f - g(u)),$$

$$(3.5) \qquad Q(f - g(u)) = 0, \qquad u \in \operatorname{dom} L,$$

existe una diferencia esencial entre este problema y los estudiados en los ejemplos anteriores ya que ahora el ker L es infinito dimensional. Aunque la inversa por la derecha K de L es compacta, la dimensión infinita del núcleo hace que sea necesario imponer algún tipo de condiciones, tales como la monotonía a la no linealidad g, para poder aplicar algún método (p.e. la técnica de operadores monótonos) que permita suplir la falta de compacidad que produce dicha dimensión infinita.

NOTA.-

Obsérvese que mientras que en los operadores definidos en los Ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3, el dom L coincide con $H^2_\pi(R)$, $H^2(0,\pi) \cap \mathring{H}^1(0,\pi)$ y $H^{1,2}_T(Q) \cap \mathring{H}^1_T(Q)$, respectivamente, con lo que el concepto de solución débil coincide en esos casos con el de solución casi por doquier, en el operador de ondas unidimensional dom L contiene estrictamente a $H^2(J)$ (piénsese, en que si $p, q \in L^2_{2\pi}(R)$ y $\psi(t,x) = p(t+x) + q(t-x)$, entonces $\psi \in$ dom L y, en general, $\psi \notin H^2(J)$), por lo que estos dos conceptos de solución son diferentes. Este hecho pone de manifiesto la menor regularidad del operador de ondas (hiperbólico) frente al operador del calor (parabólico) o los operadores elípticos de los Ejemplos 2.1 y 2.2.

CAPITULO II

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS: LOS PROBLEMAS PERIODICO Y DE DIRICHLET

En este Capítulo vamos a estudiar la existencia de soluciones débiles de la ecuación

$$(0.1)_n \qquad u'' + \lambda_n u + g(u) = f,$$

junto con las condiciones de contorno periódicas,

$$(0.2) \qquad u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi),$$

o de Dirichlet,

$$(0.3) \qquad u(0) = u(\pi) = 0,$$

donde $g: R \longrightarrow R$ es una función continua y $f \in L^2(0,\pi)$.

De acuerdo con el Capítulo I, Sección 2, estos problemas son equivalentes a la existencia de solución de la ecuación

$$(0.4) \qquad Lu - \lambda_n u = g(u) - f, \qquad u \in \text{dom } L.$$

Para cada $n \in N$, λ_n es el n-ésimo valor propio del operador L, es decir, $\lambda_n = (2(n-1))^2$, cuando se consideran las condiciones periódicas (0.2), y $\lambda_n = n^2$, cuando se consideran las de Dirichlet (0.3).

De ahora en adelante, el problema periódico $(0.1)_n$ - (0.2) lo representaremos por P_n y el problema de Dirichlet $(0.1)_n$ - (0.3) por D_n.

Si consideramos

$$\text{(A)} \qquad \lim_{u\to\pm\infty} g(u) = \pm\infty$$

es lógico observar, en primer lugar, lo que ocurre en el caso lineal, es decir, cuando $g(u) = \lambda u$, $\lambda \in R^+$, en $(0.1)_n$, puesto que ésta es la estructura más sencilla que puede tener la función g verificando la condición (A).

Así, si $g(u) = \lambda u$ en (0.4), la Alternativa de Fredholm indica que los problemas P_n y D_n tienen solución para toda f siempre que $0 < \lambda < \lambda_{n+1} - \lambda_n$, mientras que si $g(u) = (\lambda_{n+1} - \lambda_n)u$, existen funciones f para las que dichos problemas no admiten solución.

Por tanto, el estudio del problema lineal sugiere que si g verifica (A) y

(B) "Existen $\lambda \in R^+$, $k \in R$ tales que $|g(u)| \leq \lambda|u| + k$, $u \in R$",

solo podremos asegurar la existencia de solución de P_n ó D_n para toda f, cuando $0 < \lambda < \lambda_{n+1} - \lambda_n$.

Usando como modelo el problema lineal, Ahmad, [Ah], demuestra que cuando g verifica (A) y (B) con $0 < \lambda < 3 (= \lambda_2 - \lambda_1)$, el problema D_1 (resonancia en el primer valor propio) admite solución para toda f y, con una demostración análoga, se puede obtener un resultado similar para el problema P_1 cuando g verifica (A) y (B) con $0 < \lambda < 4 (= \lambda_2 - \lambda_1$, en este caso)

Sin embargo, el problema lineal no es el modelo óptimo par el estudio de este tipo de problemas ya que, por ejemplo, se puede demostrar que si g verifica (A) y

(C) "Existen $0 < \sigma < 1$ y $k \in R$ de forma que $g(u) \geq -\sigma|u| + k$, $u \leq 0$",

el problema P_1 admite solución cualquiera que sea f ([MW]) y la condición (C), al contrario de (B), no impone ninguna restricción de crecimiento a g para $u \geq 0$.

Puesto que las no linealidades g más sencillas que verifican (A) son las lineales a trozos, esto es, $g(u) = \alpha u^+ - \beta u^-$, $\alpha, \beta > 0$, tomamos como modelo en este Capítulo problemas lineales a trozos de la forma

$$(0.5) \qquad u'' + \mu u^+ - \sigma u^- = f, \qquad \text{a.e. }]0,\pi[, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R},$$

junto con las condiciones (0.2) ó (0.3). Este tipo de problemas, ademas de poner de manifiesto las diferencias existentes entre P_n y D_n, nos ha permitido obtener resultados optimos en un cierto sentido tanto en el caso del primer valor propio, λ_1, como en el resto de los valores propios, λ_n, $n > 1$.

Comenzamos, por tanto, este Capítulo exponiendo algunos resultados conocidos para los problemas lineales a trozos (0.5)-(0.2) y (0.5)-(0.3) y demostrando ciertos Lemas para una ecuación lineal a trozos más general que (0.5), que serán fundamentales en demostraciones posteriores.

En la Sección 2 estudiaremos los problemas P_1 y D_1 (caso del primer valor propio). Para el problema de P_1 damos una nueva demostración de un resultado demostrado ya, aunque por métodos totalmente diferentes, por Mawhin y Ward, [MW], del que se deduce que si g verifica (A) y (C), entonces P_1 admite solución cualquiera que sea f, y para el problema D_1, demostramos un resultado que generaliza el de [Ah] y permite afirmar la existencia de solución cuando g verifica (A) y

(B') "Existen γ, $\tau \in \mathbb{R}^+$, K, $k \in \mathbb{R}$ tales que

$$g(u) \leq \gamma|u| + K, \qquad u \geq 0,$$

$$g(u) \geq -\tau|u| + k, \qquad u \leq 0 \text{''},$$

con γ y τ satisfaciendo ciertas condiciones sugeridas por el estudio del problema lineal a trozos.

La condición (B') permitirá que la perturbación no lineal g tenga un crecimiento lineal muy grande en una dirección ($u \geq 0$ ó $u \leq 0$) siempre que en la otra sea suficientemente pequeña.

Por último en la Sección 3 expondremos los resultados obtenidos para los problemas P_n y D_n, $n>1$, es decir, cuando consideramos valores propios superiores al primero. Este tipo de problemas en resonancia no ha sido estudiado por muchos autores hasta el momento. Como consecuencia de los resultados que aquí se exponen, se obtiene la existencia de solución de estos problemas siempre que g verifique (A) y (B') con γ y τ satisfaciendo ciertas condiciones en función de n que, como en el caso anterior vienen sugeridas por el problema lineal a trozos. Los resultados que se exponen en estas dos últimas secciones son óptimos en cierto sentido que precisaremos más adelante y, generalizan algunos de los resultados de Dancer, [D1].

1. El caso lineal a trozos.-

En esta sección vamos a estudiar la ecuación

$$(1.1) \qquad u'' + \tilde{\mu}(x)u^{+} - \tilde{\nu}(x)u^{-} = f, \qquad \text{a.e. }]0,\pi[$$

donde $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$, $f \in L^2(0,\pi)$, $u^{+} = \text{máx}\,(u,0)$, $u^{-} = \text{máx}\,(-u,0)$, junto con las condiciones de contorno (0.2) ó (0.3).

Para estos problemas se conocen los siguientes resultados (ver [D1], [D2], [F], [FK])

TEOREMA 1.1.- Sean $\tilde{\mu}(x) = \mu$, $\tilde{\sigma}(x) = \sigma$, $\mu, \sigma \in R$. Entonces:

a) El problema (1.1)-(0.2) con $f \equiv 0$, admite solución no trivial si y sólo si, $\mu = 0$, $\sigma = 0$ y existe un natural k tal que $k(\frac{1}{\mu^{1/2}} + \frac{1}{\sigma^{1/2}}) = 1$.

b) El problema (1.1)-(0.2) admite solución para toda f si $\mu, \sigma > 0$ y, $\frac{\mu^{1/2}\sigma^{1/2}}{\mu^{1/2}+\sigma^{1/2}}$ no es un número entero. (ver figura 1)

TEOREMA 1.2.- Sean $\tilde{\mu}(x) = \mu$, $\tilde{\sigma}(x) = \sigma$, $\mu, \sigma \in R$. Entonces,

a) El problema (1.1)-(0.3) con $f \equiv 0$, admite solución no trivial si y sólo si, $\mu = 1$ ó $\sigma = 1$ ó $\mu, \sigma > 1$ y $(\mu, \sigma) \in A_0$, donde

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\{(x,y) \in R_+^2 \mid k(\frac{1}{x^{1/2}} + \frac{1}{y^{1/2}}) = 1\} \cup \{(x,y) \in R_+^2 \mid \frac{k-1}{x^{1/2}} + \frac{k}{y^{1/2}} = 1\} \cup \{(x,y) \in R_+^2 \mid \frac{k}{x^{1/2}} + \frac{k-1}{y^{1/2}} = 1\} \right]$$

b) Si $\mu, \sigma < 1$ ó $\mu, \sigma > 1$ y $(\mu^{1/2}, \sigma^{1/2}) \in A_1$, donde A_1 es el subconjunto de R_+^2 sombreado en la figura 2, el problema (1.1)-(0.3) admite solución para toda f, mientras que si $(\mu^{1/2}, \sigma^{1/2}) \in R_+^2 \setminus A_1$, existe $f \in C^2[0,\pi]$ para la que (1.1)-(0.3) no tiene solución.

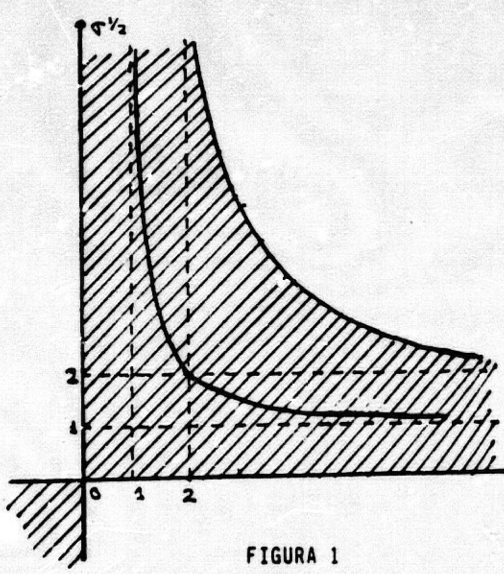


FIGURA 1

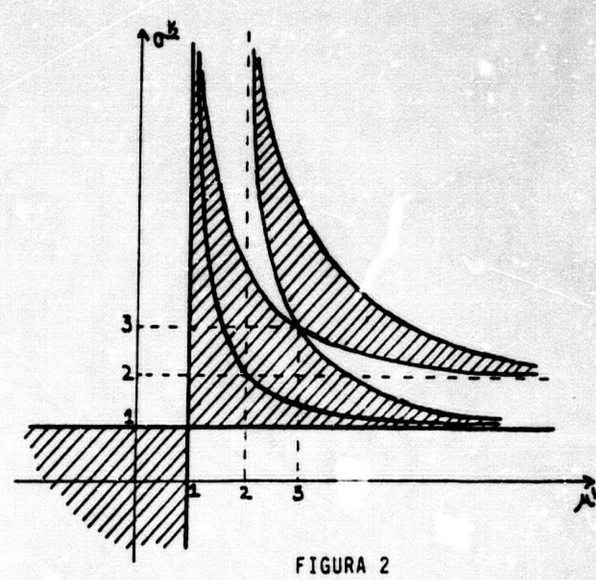


FIGURA 2

Los Teoremas 1.1 y 1.2 ponen ya de manifiesto las diferencias esenciales existentes entre el problema periódico y el de Dirichlet.

Si suponemos que μ, $\sigma > \lambda_n$ y reescribimos (1.1) como

$$(1.2)_n \qquad u'' + \lambda_n u + (\mu - \lambda_n)u^+ - (\sigma - \lambda_n)u^- = f,$$

el Teorema 1.1 indica, por ejemplo, que para el primer valor propio $\lambda_1=0$ (ya que este se refiere al problema periódico), si $0 < \sigma < 1$, el problema $(1.2)_1$-(0.2), admite solución <u>cualquiera que sea</u> $\mu > 0$ y f. Mientras que el Teorema 1.2 indica que para el primer valor propio $\lambda_1 = 1$ (este Teorema se refiere al problema de Dirichlet), dado <u>$\mu > 1$, existe $\sigma > 1$</u> de forma que $(\mu,\sigma) \in A_0$, por lo que el problema $u'' + u + (\mu-1)u^+ - (\sigma-1)u^- = 0$, $u(0) = u(\pi) = 0$, admite solución no trivial y no podemos asegurar la existencia de solución de $(1.2)_1$-(0.3) para toda f.

De hecho, (ver [D1]), se puede demostrar que dado <u>$\mu>1$ existe, $\sigma>1$ y $f \in C^\infty[0,\pi]$</u> tales que $(1.2)_1$-(0.3) no tiene solución.

Del estudio del problema lineal a trozos se deduce que si queremos obtener resultados generales de existencia de solución de D_1 para g verificando (A), necesariamente hemos de imponer a g una restricción del tipo (B') con γ y τ verificando $(1/(1+\gamma))^{1/2} + (1/(1+\tau))^{1/2} > 1$.

Así, observando el problema lineal a trozos, queda contestada negativamente la pregunta que Mawhin hace en [M2] sobre la existencia de un τ_0 tal que si g verifica (A) y

$$(C') \qquad g(u) \geq -\tau|u| + k, \quad \text{con } u\leq 0 \quad \text{y con} \quad 0 < \tau < \tau_0,$$

el problema D_1 admita solución para toda f.

Sin embargo, el Teorema 1.1 sugiere que dicho resultado es cierto para P_1 con $\tau_0=1$.

Los Teoremas 1.1 y 1.2 indican también que si queremos establecer resultados generales de existencia de solución de P_n y D_n, $n > 1$, con g verificando (A), g ha de verificar además una restricción de crecimiento del tipo (B'), con γ y τ satisfaciendo ciertas relaciones dependientes de n

Antes de pasar a la siguiente sección, vamos a establecer aquí algunos resultados sobre problemas lineales a trozos más generales, que serán esenciales en demostraciones posteriores.

LEMA 1.3.- Sean β, $\delta \in L^2(0,\pi)$. Supongamos que existen constantes μ, σ y $n = 2k$, $k\in N$, verificando

a) $n^2 \leq \beta(x) \leq \mu$, $\qquad n^2 \leq \delta(x) \leq \sigma$, $\quad$ a.e. $]0,\pi[$,

b) $\dfrac{k+1}{\mu^{1/2}} + \dfrac{k+1}{\sigma^{1/2}} > 1.$

Entonces, el problema

$$
(1.5)\qquad \begin{aligned} &u'' + \beta(x)u^+ - \delta(x)u^- = 0, \quad \text{a.e.}\ ]0,\pi[,\\ &u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi), \end{aligned}
$$

tiene solución no trivial si y sólo si, existe $\theta \in [0,2\pi[$ tal que

$$
(1.6)\qquad \begin{aligned} &(\mathrm{sen}(nx+\theta))^+\beta(x) = (\mathrm{sen}(nx+\theta))^+n^2,\\ &(\mathrm{sen}(nx+\theta))^-\delta(x) = (\mathrm{sen}(nx+\theta))^-n^2, \end{aligned} \qquad \text{a.e.}\ ]0,\pi[
$$

en cuyo caso, si ϕ es solución no trivial de (1.5), $\phi(x) = C\mathrm{sen}(nx+\theta)$, con $C>0$.

LEMA 1.4.- Sean β, $\delta \in L^2(0,\pi)$. Supongamos que existen constantes μ, σ y un número natural n, verificando

a) $n^2 \le \tilde\mu(x) \le \mu, \qquad n^2 \le \tilde\sigma(x) \le \sigma, \qquad$ a. e. $]0,\pi[$,

b) $\dfrac{n}{2\mu^{1/2}} + \dfrac{n+2}{2\sigma^{1/2}} > 1, \qquad \dfrac{n+2}{2\mu^{1/2}} + \dfrac{n}{2\sigma^{1/2}} > 1,$ si n es par

$\dfrac{n+1}{2\mu^{1/2}} + \dfrac{n+1}{2\sigma^{1/2}} > 1,$ si n es impar.

Entonces, el problema

$$\text{(1.7)} \qquad \begin{aligned} & u'' + \tilde\mu(x)u^+ - \tilde\sigma(x)u^- = 0, \qquad \text{a.e. }]0,\pi[, \\ & u(0) = u(\pi) = 0, \end{aligned}$$

tiene solución no trivial si y sólo si,

$$\text{(1.8)} \qquad \begin{aligned} & (\epsilon \operatorname{sen} n)^+(x)\tilde\mu(x) = (\epsilon \operatorname{sen} n)^+(x)n^2, \text{ a.e. }]0,\pi[, \\ & (\epsilon \operatorname{sen} n)^-(x)\tilde\sigma(x) = (\epsilon \operatorname{sen} n)^-(x)n^2, \text{ a.e. }]0,\pi[, \end{aligned}$$

con $\epsilon=\pm1$. En este caso, si ϕ es solución no trivial de (1.7), $\phi(x) = C\epsilon \operatorname{sen} nx$, $C>0$.

NOTA.- Las condiciones b) de los Lemas 1.3 y 1.4 vienen sugeridas por los Teoremas 1.1 y 1.2 e implican (ver figuras 1 y 2) que la ecuación $u'' + \mu u^+ - \sigma u^- = 0$ con las condiciones (0.2) ó (0.3) no admite solución distinta de la trivial excepto cuando $\mu = \sigma = n^2$.

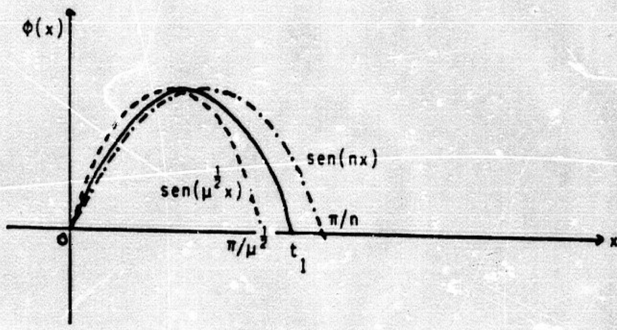
Las demostraciones de estos dos Lemas son semejantes. Aquí, vamos a demostrar únicamente el Lema 1.3; una demostración del Lema 1.4 puede encontrarse en [Ar1].

<u>Demostración del Lema 1.3:</u>

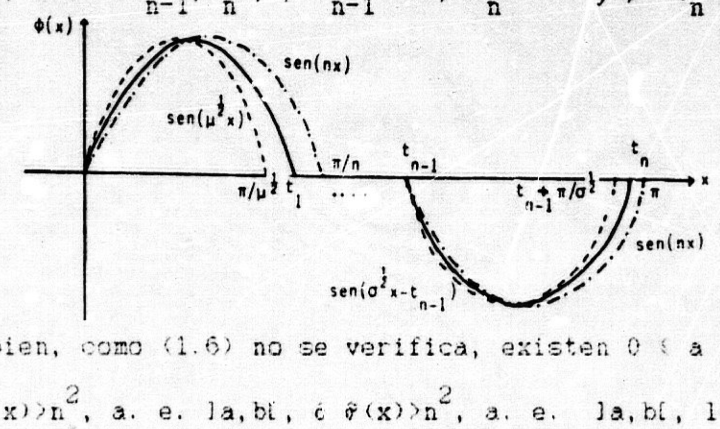
Supongamos que (1.6) no se verifica y sea ϕ una solución no trivial de (1.5).

Si $\phi(0) = 0$, entonces $\phi'(0) \neq 0$ (pues si no, ϕ sería la solución trivial). Supongamos, por ejemplo, que $\phi'(0)>0$. Si $\phi'(0)<0$, la demostración es análoga.

Al ser $\phi'(0)>0$, $\phi(x)>0$ en un entorno de 0, luego ϕ verifica $\phi'' + \tilde{\beta}(x)\phi = 0$, a. e. $]0,a[$, con $a>0$. Por el Teorema de Comparación de Sturm (T.C.S.) (ver [CL]), como $n^2 \le \tilde{\beta}(x) \le \mu$, existe $t_1 \in [\frac{\pi}{\mu^{1/2}}, \frac{\pi}{n}]$ tal que ϕ verifica $\phi'' + \tilde{\beta}(x)\phi = 0$, $\phi(0) = \phi(t_1) = 0$, y $\phi'(t_1) < 0$. Ahora, $\phi(x) < 0$



para $x \in]t_1,t_1+\delta[$, luego ϕ verifica $\phi'' + \tilde{\sigma}(x)\phi = 0$, a. e. $]t_1,t_1+\delta[$; volviendo a aplicar el T.C.S., existe $t_2 \in [\frac{\pi}{\mu^{1/2}} + \frac{\pi}{\sigma^{1/2}}, \frac{2\pi}{n}]$ tal que ϕ verifica $\phi'' + \tilde{\sigma}(x)\phi = 0$, a. e. $]t_1,t_2[$, $\phi(t_1) = \phi(t_2) = 0$. Reiterando el proceso llegamos a la existencia de $t_n \in [\frac{n\pi}{\mu^{1/2}} + \frac{n\pi}{\sigma^{1/2}}, \pi]$ tal que $\phi'' + \tilde{\sigma}(x)\phi = 0$, a.e. $]t_{n-1},t_n[$, $\phi(t_{n-1}) = \phi(t_n) = 0$ y $\phi'(t_n)>0$.



Ahora bien, como (1.6) no se verifica, existen $0 \le a < b \le \pi$ de forma que ó $\tilde{\beta}(x)>n^2$, a. e. $]a,b[$, ó $\tilde{\sigma}(x)>n^2$, a. e. $]a,b[$, luego por el T.C.S., podemos asegurar que $t_n < \pi$ y como $\phi(\pi)=0$, necesariamente ha de existir $t_{n+1} \in]t_n,\pi]$ de forma que $\phi'' + \tilde{\beta}(x)\phi = 0$, a. e. $]t_n,t_{n+1}[$,

$\phi(t_n) = \phi(t_{n+1}) = 0$ y, por el T.C.S., $t_{n+1} \geq t_n + \frac{\pi}{\mu^{1/2}} \geq \frac{(n+2)\pi}{2\mu^{1/2}} + \frac{n\pi}{2\sigma^{1/2}}$. Pero $\phi'(t_{n+1}) < 0$ y $\phi'(\pi) > 0$, luego existe $t_{n+2} \in]t_{n+1},\pi]$ tal que $\phi'' + \tilde{\sigma}(x)\phi = 0$, a. e. $]t_{n+1},t_{n+2}[$, $\phi(t_{n+1}) = \phi(t_{n+2}) = 0$. De nuevo por el T.C.S, $t_{n+2} \geq t_{n+1} + \frac{\pi}{\sigma^{1/2}} \geq \frac{(n+2)\pi}{2\mu^{1/2}} + \frac{(n+2)\pi}{2\sigma^{1/2}} = (\frac{k+1}{\mu^{1/2}} + \frac{k+1}{\sigma^{1/2}})\pi > \pi$, lo que contradice que $t_{n+2} \leq \pi$. Por tanto, si $\phi(0) = 0$, ϕ es la solución trivial.

Si $\phi(0)\neq 0$, al ser ϕ solución de $\phi'' + \tilde{\mu}(x)\phi^+ - \tilde{\sigma}(x)\phi^- = 0$, a.e. $]0,\pi[$ entonces, por el T.C.S., necesariamente existe $x_0 \in]0,\pi[$ tal que $\phi(x_0) = 0$.

Sea $a = \min \{ x \in]0,\pi[\mid \phi(x) = 0 \}$ y definimos

$$\phi^*(x) = \phi(x+a-l\pi) \qquad \text{si} \quad x \in [l\pi-a,(l+1)\pi-a],$$

$$\mu^*(x) = \tilde{\mu}(x+a-l\pi) \qquad \text{a. e.} \quad x \in]l\pi-a,(l+1)\pi-a[,$$

$$\sigma^*(x) = \tilde{\sigma}(x+a-l\pi) \qquad \text{a. e.} \quad x \in]l\pi-a,(l+1)\pi-a[,$$

$l\in Z$. Entonces, μ^*, $\sigma^* \in L^2_\pi(R)$, ϕ^* es derivable con derivada absolutamente continua y verifican

$$(\phi^*)'' + \mu^*(x)(\phi^*)^+ - \sigma^*(x)(\phi^*)^- = 0, \qquad \text{a. e.} \ ]0,\pi[,$$

$$\phi^*(0) = \phi^*(\pi) = 0 \quad \text{y} \quad (\phi^*)'(0) = (\phi^*)'(\pi),$$

Aplicando el razonamiento anterior a ϕ^*, se tiene $\phi^*\equiv 0$ y ϕ es la solución trivial.

El recíproco es evidente.

2. El primer valor propio.-

En esta sección vamos a centrar nuestro estudio en el caso del primer valor propio; concretamente, estudiamos los problemas P_1 y D_1, esto es, la ecuación

$$(2.1) \qquad u'' + \lambda_1 u + g(u) = f, \quad \text{a. e. }]0,\pi[,$$

junto con las condiciones de contorno, (0.2) ó (0.3).

Muchos autores han estudiado este tipo de problemas en resonancia para diferentes perturbaciones no lineales. Por ejemplo, cuando la perturbación no lineal g es acotada, se conocen resultados bastante satisfactorios que establecen la existencia de solución, tanto del problema P_1 (ver, p. e. [GM], [LLe]), como del problema D_1 (ver p. e. [LL], [Br1] [AAM]), bajo determinadas hipótesis sobre f.

Como ya hemos dicho, consideraremos no linealidades que verifican la condición (A). Para este tipo de términos no lineales, Ward, en [W1], demostró que existe τ_0 $(= \frac{1}{2\pi^2})$ de forma que si g verifica la condición (C'), el problema P_1 admite solución.

En el estudio del problema lineal a trozos el Teorema 1.1 nos indica que la cota óptima para τ_0 en la condición (C') es $\tau_0 = 1$. En efecto, Mawhin y Ward, en [MW], demuestran este resultado. La demostración en [MW] se basa en la coercividad de cierta forma bilineal asociada a un problema de Dirichlet y en la desigualdad de Wirtinger. Nosotros demostramos a continuación un resultado similar al de [MW] pero con una técnica totalmente diferente que, al contrario que la suya, permite también abordar el problema de Dirichlet.

En cuanto a este último problema, el estudio del problema lineal a trozos (Teorema 1.2), indicaba que no es posible demostrar un resultado similar al del problema periódico.

Varios autores han estudiado el problema D_1 con g de crecimiento a lo más lineal. Por ejemplo, en [SSS], se demuestra la existencia de solución si g es impar, monótona y verifica (A) y (B), con $0<\lambda<0.24347$; en [CK] se mejora este resultado a $0 < \lambda < 0.443$ y sin la hipótesis de imparidad. Recientemente, Ahmad extiende aún más este resultado a $0<\lambda<3$ sin las hipótesis de monotonía e imparidad. Mawhin, Ward y Willen [MWW], demuestran un resultado similar al de [Ah] por métodos variacionales pero imponiendo a g la condición de monotonía.

Para demostrar los resultados de esta sección, haremos uso del Teorema 1.1 del Capítulo I con algunas ideas de [Ah] y [W1].

Sean $g:]0,\pi[\times R \longrightarrow R$ una función verificando la condición de Caratheodory (e. d., $g(x,.): R \longrightarrow R$ continua a.e. $x \in]0,\pi[$, $g(.,u): R \longrightarrow R$ medible, $u \in R$ y para cada $R>0$, existe $\gamma_R \in L^2(0,\pi)$/ $|g(t,u)| \leq \gamma_R(t)$, a.e.$]0,\pi[$, para cada u, $|u|\leq R$) y $f \in L^2(0,\pi)$.

TEOREMA 2.1.- Supongamos que

i) Existen $\Gamma,\gamma \in L^2(0,\pi)$ con $0 \leq \Gamma \leq 1$, a.e. $]0,\pi[$ y $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Gamma(x)dx < 1$, tales que

$$g(x,u) \geq -\Gamma(x)|u| + \gamma(x), \quad \text{a. e. } x \in]0,\pi[,\ u \leq 0.$$

ii) Existen $\alpha,\beta \in L^2(0,\pi)$ tales que

$$g(x,u) \geq \alpha(x), \quad \text{a. e. }]0,\pi[, \quad u \geq 0, \text{ y}$$

$$g(x,u) \leq \beta(x), \quad \text{a. e. }]0,\pi[, \quad u \leq 0.$$

iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \bar{g}(x,-\infty)dx < \int_0^{\pi} f(x)dx < \int_0^{\pi} \underline{g}(x,+\infty)dx,$

donde $\bar{g}(x,-\infty) = \limsup_{u\to-\infty} g(x,u)$, $\qquad \underline{g}(x,+\infty) = \liminf_{u\to+\infty} g(x,u)$.

Entonces, el problema periódico

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} &u'' + g(x,u) = f(x), \quad \text{a. e. }]0,\pi[, \\ &u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi), \end{aligned}$$

admite solución.

<u>Demostración.-</u>

Consideramos la familia de problemas,

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} &u'' + \lambda g(x,u) = \lambda f(x), \text{ a.e. }]0,\pi[, \\ &u(0) = u(\pi), \ u'(0) = u'(\pi), \end{aligned}$$

con $\lambda \in]0,1[$.

Es suficiente demostrar (ver Teorema 1.1 y Ejemplo 1.1 del Capítulo I) que

(I) Existe $R_0 \geq 0$ tal que

$$\left[\int_0^{\pi} (g(x,R) - f(x))dx \right]\left[\int_0^{\pi} (g(x,-R) - f(x))dx \right] < 0,$$

para todo $R \geq R_0$.

(II) Existe $C \geq 0$ tal que $|u|_{\infty} \leq C$ para todo (λ,μ) solución de (2.3).

(En toda la memoria C indicará diferentes constantes)

La condición (I) es consecuencia de las hipótesis ii) y iii); en efecto, por ii), $g(x,u) - f(x) \leq \beta(x) - f(x)$, $u \leq 0$, luego, por el Lema de Fatou

$$\limsup_{u \to -\infty} \int_0^\pi (g(x,u) - f(x))dx \leq \int_0^\pi (\bar{g}(x,-\infty) - f(x))dx.$$

Pero, por la hipótesis iii), esta última integral es negativa, luego

$$\limsup_{u \to -\infty} \int_0^\pi (g(x,u) - f(x))dx < 0.$$

Existe pues un $R_1 > 0$ tal que si $u < -R_1$,

$$\int_0^\pi (g(x,u) - f(x))dx < 0.$$

De forma análoga, existe un $R_2 > 0$, tal que si $u > R_2$,

$$\int_0^\pi (g(x,u) - f(x))dx > 0.$$

Tomando $R_0 = \text{máx}\ \{R_1, R_2\}$, se verifica (I).

Para demostrar (II) vamos a proceder por reducción al absurdo. Supongamos que (II) no es cierta. Entonces, existe una sucesión $\{\lambda_n, u_n\}$ de soluciones de (2.3) tales que $|u_n|_\infty \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definamos $v_n = \dfrac{u_n}{|u_n|_\infty}$; entonces , $|v_n|_\infty = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y v_n verifica:

$$\text{(2.4)} \quad \begin{cases} v_n'' + \dfrac{\lambda_n}{|u_n|_\infty} g(x, u_n(x)) = \dfrac{\lambda_n}{|u_n|_\infty} f(x), \quad \text{a. e. } x \in]0,\pi[, \\ v_n(0) = v_n(\pi),\ v_n'(0) = v_n'(\pi). \end{cases}$$

De i) y ii), se deduce que,

(2.5) $\quad |g(x,u)| \leq g(x,u) + 2\Gamma(x)u^- + \omega(x)$, a. e. $x \in]0,\pi[$, $u \in R$,

donde $\omega = 2|\alpha| + 2|\gamma|$, luego,

$$(2.6) \quad \frac{\lambda_n}{|u_n|_\infty}\int_0^\pi |g(x,u_n(x))|dx \leq \frac{\lambda_n}{|u_n|_\infty}\Big(\int_0^\pi g(x,u_n(x))dx +$$

$$+ 2\int_0^\pi \Gamma(x)u^-(x)dx + \int_0^\pi \omega(x)dx\Big) \leq \frac{\lambda_n}{|u_n|_\infty}\int_0^\pi f(x)dx +$$

$$+ 2\lambda_n\int_0^\pi \Gamma(x)dx + \frac{\lambda_n}{|u_n|_\infty}\int_0^\pi \omega(x)dx,$$

ya que, integrando entre 0 y π,

$$\frac{\lambda_n}{|u_n|_\infty}\int_0^\pi g(x,u_n(x))dx = \frac{\lambda_n}{|u_n|_\infty}\int_0^\pi f(x)dx, \text{ y } \frac{u_n^-(x)}{|u_n|_\infty} \leq 1.$$

Ahora bien,

$$\int_0^\pi |v_n''(x)|dx \leq \frac{\lambda_n}{|u_n|_\infty}\int_0^\pi |g(x,u_n(x))|dx + \frac{\lambda_n}{|u_n|_\infty}\int_0^\pi |f(x)|dx,$$

luego de (2.6), se deduce que $\int_0^\pi |v_n''(x)|dx$ está uniformemente acotada, digamos por una constante C.

Pero

$$v_n'(x) = \int_0^x v_n''(s)ds + v_n'(0),$$

y por la periodicidad, $\int_0^\pi v_n'(x)dx = 0$, luego

$$v_n'(0)\pi = -\int_0^\pi\int_0^x v_n''(s)dsdx,$$

es decir,

$$|v_n'(0)|\pi \leq \int_0^\pi\int_0^x |v_n''(s)|dsdx \leq \int_0^\pi\int_0^\pi |v_n''(s)|dsdx \leq C\pi.$$

Por tanto,

$$|v'_n(x)| \leq \int_0^x |v''_n(s)|ds + |v'_n(0)| \leq 2C, \quad x \in [0,\pi].$$

Así, (v'_n) está uniformemente acotada, y, consiguientemente, (v_n) está uniformemente acotada y es equicontinua (basta poner $v_n(x)=v_n(0) + \int_0^x v'_n(s)ds$).

Por tanto, por el Teorema de Ascoli-Arzelá, existe una subsucesión, que seguimos denotando por v_n, de forma que $v_n \longrightarrow v$ uniformemente en $[0,\pi]$. Además, $v(0) = v(\pi)$ y $|v|_\infty = 1$.

El resto de la demostración la vamos a dividir en varias etapas.

ETAPA 1. Probaremos que:

Si $v < 0$, sobre $]a,b[$, $0\leq a<b\leq\pi$, entonces, v tiene derivada absolutamente continua en $[a,b]$ y $v'' \in L^2(a,b)$. Además, existe $\sigma \in L^2(a,b)$, $0 \leq \sigma \leq \Gamma$, a. e., tal que v es solución de la ecuación lineal $v'' + \sigma(x)v = 0$, a. e. $x \in]a,b[$.

Supongamos en primer lugar que $v < 0$ sobre $[a,b]$. Entonces la sucesión $u_n = v_n|u_n|_\infty \longrightarrow -\infty$ uniformemente en $[a,b]$ y podemos suponer $u_n < 0$ en $[a,b]$ para todo n.

Definimos $\sigma_n(x) = \dfrac{\lambda_n g(x,u_n(x))}{u_n(x)}$, $x \in [a,b]$; por i) y ii), se tiene

(2.7) $\quad -|(\beta(x)/u_n(x))| \leq \sigma_n(x) \leq \Gamma(x) + |(\gamma(x)/u_n(x))|$, a. e. $]a,b[$.

Entonces $|\sigma_n|_\infty$ está acotada independientemente de n ($u_n(x) \longrightarrow -\infty$ uniformemente en $[a,b]$), luego existe $\sigma \in L^2(a,b)$ y una subsucesión, que seguiremos denotando por σ_n tal que $\sigma_n \longrightarrow \sigma$. Además, Por el Teorema de Mazur, $0 \leq \sigma \leq \Gamma$, a. e. $]a,b[$.

Por otra parte, como v_n verifica (2.4), v_n es solución de

$$(2.8) \qquad v_n'' + \sigma_n(x)v_n = f_n(x), \quad \text{a. e. }]a,b[,$$

donde $f_n(x) = \dfrac{\lambda_n}{|u_n|_\infty} f(x)$, luego $|v_n''|_2$ está uniformemente acotada (pues (σ_n) lo está, $|v_n|_\infty = 1$ y $f_n \longrightarrow 0$ en $L^2(a,b)$), por tanto, (v_n') es equicontinua sobre $[a,b]$ ya que si $x,y \in [a,b]$,

$$|v_n'(x) - v_n'(y)| \leq \left| \int_x^y |v_n''(s)|ds \right| \leq |x-y|^{1/2} \left(\int_a^b |v_n''(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq C_2|x-y|^{1/2},$$

donde C_2 es la cota de $|v_n''|_2$. Como (v_n') es uniformemente acotada sobre $[a,b]$, existe una subsucesión, que seguiremos denotando por v_n', convergiendo uniformemente en $[a,b]$ a v'.

Integrando (2.8) entre a y x,

$$(2.9) \qquad v_n'(x) - v_n'(a) + \int_a^x \sigma_n(t)v_n(t)dt = \int_a^x f_n(t)dt,$$

y haciendo $n \longrightarrow \infty$, se tiene ,

$$(2.10) \qquad v'(x) - v'(a) + \int_a^x \sigma(t)v(t)dt = 0.$$

Por tanto, v' es absolutamente continua en $[a,b]$ y $v'' + \sigma(x)v = 0$ a. e. $]a,b[$.

Si $v < 0$ en $]a,b[$, basta tomar una sucesión de intervalos $I_j =]a_j,b_j[$ con $a < a_j < b_j < b$ y $a_j \uparrow a$, $b_j \downarrow b$. Para cada I_j, $v < 0$ en $\bar{I}_j$, luego v' es absolutamente continua en $\bar{I}_j$, $v'' \in L^2(I_j)$ y existe $\sigma_j \in L^2(I_j)$ con $0 \leq \sigma_j \leq \Gamma$ a.e., tal que v es solución de $v'' + \sigma_j(x)v = 0$, a. e. $x \in I_j$.

Basta definir $\sigma(x) = \sigma_j(x)$, si $x \in I_j$ para obtener el resultado.

Hacemos notar que de la prueba en la Etapa 1 se deduce que si $v(0) = v(\pi) < 0$, entonces $v'(0) = v'(\pi)$ ($v'_n(0) = v'_n(\pi)$, para todo $n \in N$).

ETAPA 2. Probaremos que:

Si $v(0) \geq 0$, entonces $v(x) \geq 0$, para todo $x \in [0,\pi]$.

En efecto, si v es negativa en algún punto, como $v(0) = v(\pi) \geq 0$, podemos encontrar dos puntos $0 \leq a < b \leq \pi$ tales que $v(a) = v(b) = 0$ y $v(x) < 0$, $x \in]a,b[$. Por la Etapa 1, v es una solución no trivial del problema $v'' + \sigma(x)v = 0$, $v(a) = v(b) = 0$, con $\sigma \in L^2(a,b)$ satisfaciendo $0 \leq \sigma \leq \Gamma \leq 1$, a. e..

Denotemos por $\lambda_1(\sigma;a,b)$ el primer valor propio de

(2.11) $$v'' + \lambda\sigma(x)v = 0, \qquad v(a) = v(b) = 0,$$

entonces, al ser $\sigma \leq \Gamma$, a. e., $\lambda_1(\sigma;a,b) \geq \lambda_1(\Gamma;a,b)$, siendo $\lambda_1(\Gamma;a,b)$ el primer valor propio del problema $v'' + \lambda\Gamma(x)v = 0$, $v(a) = v(b) = 0$ (ver [CL]). Pero $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Gamma(x)dx < 1$, luego $\Gamma(x) < 1$ sobre un subconjunto de $]0,\pi[$ de medida positiva, por tanto $1 = \lambda_1(1;0,\pi) < \lambda_1(\Gamma;0,\pi) \leq \lambda_1(\Gamma;a,b)$, lo que contradice el que 1 sea valor propio del problema (2.11).

ETAPA 3. Probaremos que:

Si $v(0) < 0$, entonces $v(x) < 0$ para todo $x \in [0,\pi]$.

En este caso, sabemos que $v(0) = v(\pi)$, $v'(0) = v'(\pi)$.

Si v es no negativa en algún punto, podemos encontrar $0 < a \leq b < \pi$, tales que $v(a) = v(b) = 0$ y $v(x) < 0$, $x \in [0,a[$ ó $x \in]b,\pi]$. De nuevo, por la Etapa 1, existen $\sigma_1 \in L^2(0,a)$ y $\sigma_2 \in L^2(b,\pi)$ con σ_1, $\sigma_2 \in [0,\Gamma]$, a. e., de forma que v es solución de $v'' + \sigma_1(x)v = 0$, a. e. $]0,a[$ y $v'' + \sigma_2(x)v = 0$, a. e. $]b,\pi[$.

Sean ϕ y ψ las soluciones de $u'' + u = 0$, que verifican $\phi(0) = v(0) = \psi(\pi)$, $\phi'(0) = v'(0) = \psi'(\pi)$. Entonces, $\phi(x) = -\rho\operatorname{sen}(x+\theta)$ con $\rho>0$ ($v(0) < 0$) y $\theta \in]0,\pi[$, y $\psi(x) = \phi(x-\pi)$.

Como $\phi(0) = v(0)$ y $\sigma_1(x) \leqslant \Gamma(x) \leqslant 1$, a. e. $]0,a[$, por el T. C. S., se tiene que $\phi(x) \geqslant v(x)$ en $]0,a]$, luego $\phi(a) \geqslant v(a) = 0$, por lo que $\pi - \theta \leqslant a$.

Análogamente, al ser $\psi(\pi) = v(\pi)$ y $\sigma_2(x) \leqslant \Gamma(x) \leqslant 1$, a. e. $]b,\pi[$, $\psi(x) \geqslant v(x)$ en $[b,\pi[$ por lo que $\pi - \theta \geqslant b$. Como $a \leqslant b$, se deduce que $a = b = \pi - \theta$.

Extendiendo v periódicamente a todo R y definiendo

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_2(x+\pi), & x \in]-\theta,0[\\ \sigma_1(x), & x \in]0,\pi-\theta[, \end{cases}$$

$\sigma \in L^2(-\theta,\pi-\theta)$ y $\sigma(x) \leqslant \Gamma(x) \leqslant 1$, a. e. $]-\theta.\pi-\theta[$. De nuevo por el T.C.S., al ser v solución de $v'' + \sigma(x)v = 0$, a. e. $]-\theta,\pi-\theta[$, $v(\theta)=v(\pi-\theta)=0$ y $v(x) < 0$ en $]-\theta,\pi-\theta[$, $\sigma(x) = 1$, a. e. $]-\theta,\pi-\theta[$, con lo que $\sigma_1(x) = 1$, a. e. $]0,\pi-\theta[$ y $\sigma_2(x) = 1$, a. e. $]\pi-\theta,\pi[$ y, por tanto, $\Gamma(x) = 1$ a. e. $]0,\pi[$, lo que contradice la hipótesis i).

ETAPA 4. Probaremos que:

Si $v(0) \geqslant 0$ (respectivamente, $v(0) < 0$), entonces $u_n \longrightarrow +\infty$ (respectivamente, $u_n \longrightarrow -\infty$) uniformemente en $[0,\pi]$.

El caso $v(0) < 0$ es consecuencia inmediata de la Etapa 3. Supongamos que $v(0) \geq 0$; por la Etapa 2, $v(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,\pi]$.

Como $|v|_\infty = 1$, el conjunto $A_r = \{ x \in [0,\pi] \mid v(x) \geq r \}$ tiene medida positiva para todo r, $r \in]0,1[$.

Sea $\bar{u}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_n(x)dx$ y sea $k > 0$, tal que

$$|u_n - \bar{u}_n|_\infty \leq k \int_0^\pi |u''_n(x)|dx$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

De (2.4) y (2.5) se deduce

$$(2.12) \qquad |u_n - \bar{u}_n|_\infty \leq 2k \int_0^\pi u_n^-(x)dx + C,$$

donde $C = k \int_0^\pi (|f| + \omega)$.

Tomamos $r>0$ con $\epsilon=4k\pi r < 1/2$, y fijamos n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ $|u_n(x)| \leq 2r|u_n|_\infty$, $x \in [0,\pi] - A_r$, y $u_n(x) \geq 0$, $x \in A_r$ (si $x \in A_r$, $v(x) \geq r$ y, al ser A_r cerrado, $u_n \longrightarrow +\infty$ uniformemente en A_r, por tanto, existe un n_1 tal que si $n \geq n_1$, $u_n(x) \geq 0$, $x \in A_r$; por otra parte, si $x \in [0,\pi] - A_r$, $0 \leq v(x) < r$ y existirá un n_2 tal que $\left|\frac{u_n(x)}{|u_n|_\infty} - v(x)\right| < r$, si $n \geq n_2$, luego , si $x \in [0,\pi] - A_r$, $\frac{|u_n(x)|}{|u_n|_\infty} < r + v(x) < 2r$, si $n \geq n_2$).

Entonces,

$$\int_0^\pi u_n^-(x)dx \leq \int_{[0,\pi]-A_r} |u_n(x)|dx \leq 2\pi r|u_n|_\infty.$$

De esta última desigualdad junto con (2.12) se deduce que

$$|u_n - \bar{u}_n|_\infty \leq \epsilon |u_n|_\infty + C \leq \epsilon |u_n - \bar{u}_n|_\infty + \epsilon |\bar{u}_n|_\infty + C,$$

esto es,

$$(2.13) \qquad |u_n - \bar{u}_n|_\infty \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon} |\bar{u}_n| + C, \quad C \geq 0,$$

y como $\bar{v} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v(x)dx > 0$ y $\bar{v} = \lim_{n\to\infty} \frac{\bar{u}_n}{|u_n|_\infty}$, $\bar{u}_n \longrightarrow +\infty$, de (2.13) se tiene que

$$u_n(x) \geq \bar{u}_n - |u_n(x) - \bar{u}_n| \geq \bar{u}_n - |u_n - \bar{u}_n|_\infty \geq (1 - \frac{\epsilon}{1-\epsilon})\bar{u}_n - C \longrightarrow +\infty.$$

Finalmente, la demostración del Teorema se obtiene de la Etapa 4 junto con el Lema de Fatou.

En efecto, por ser (λ_n, u_n) solución de (2.3),

$$\int_0^\pi g(x, u_n(x))dx = \int_0^\pi f(x)dx,$$

de donde, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi (g(x, u_n(x)) - f(x))dx = 0$

Si $u_n \longrightarrow +\infty$ uniformemente en $[0,\pi]$; podemos suponer que $u_n(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $g(x, u_n(x)) - f(x) \geq \alpha(x) - f(x)$, a. e., $n \in \mathbb{N}$ y

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi (g(x, u_n(x)) - f(x))dx \geq \int_0^\pi (g(x, +\infty) - f(x))dx,$$

lo que contradice iii). Si $u_n \longrightarrow -\infty$ uniformemente en $[0,\pi]$, el razonamiento es análogo.

NOTAS.-

1) Si $g(x,u) = g(u)$, la hipótesis i) se reduce a la condición (C) comentada anteriormente. Esta hipótesis restringe únicamente el crecimiento de g en la dirección $u \leq 0$.

2) La hipótesis ii) indica que, si g es no acotada, g es del tipo de las no linealidades que verifican (A). En cuanto a la hipótesis iii), indica la clase de términos independientes admisibles, es decir, es una condición para que f pertenezca al rango del operador semilineal $L - \lambda_n I - g$. Esta hipótesis es una típica condición de Landesman-Lazer. Este tipo de condiciones fue utilizada por primera vez en [LL] (ver también [C]), y se puede considerar como una generalización al caso no lineal de la Alternativa de Fredholm.

3) Es posible demostrar un Teorema dual al anterior en el siguiente sentido.

"Si f y g satisfacen ii) y iii) del Teorema 2.1 y

i') Existen $\Gamma, \gamma \in L^2(0,\pi)$ con $0 \leq \Gamma \leq 1$ a. e. y $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Gamma(x)dx < 1$ tales

que $g(x,u) \leq \Gamma(x)|u| + \gamma(x)$, a. e. $]0,\pi[$, $u \geq 0$

(2.2) tiene al menos una solución".

4) La condición $\Gamma \leq 1$ en la hipótesis i) del Teorema 2.1 es óptima puesto que si tomamos $g(x,u) = \mu u^+ - \sigma u^-$, $\mu, \sigma \in R^+$, ii) y iii) se verifican cualquiera que sea $f \in L^2(0,\pi)$. Sin embargo, si $\sigma > 1$ y μ es tal que $\frac{1}{\mu^{1/2}} + \frac{1}{\sigma^{1/2}} = 1$, Dancer, [D2], demuestra que existe $f \in C^\infty[0,\pi]$ para la que

(2.2) no tiene solución. Por tanto, si $\sigma > 1$ es necesario restringir el crecimiento de μ y el Teorema 2.1 no puede mejorarse de manera esencial. Cabe preguntarse si será posible suprimir la condición $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Gamma(x)dx < 1$, es decir, si se puede demostrar el Teorema 2.1 sustituyendo i) por

i") "Existe $\gamma \in L^2(0,\pi)$ tal que $g(x,u) \geq -|u| + \gamma(x)$, a. e. $]0,\pi[$, $u\leq 0$".

Parece que como se comenta en [D2], en este caso el conjunto de soluciones de (2.2) puede no estar acotado, por lo que, de ser posible tal extensión, el método de demostración debe de ser esencialmente diferente.

5) En [W1], se demuestra la existencia de soluciones T-periódicas para una clase de ecuaciones ordinarias de la forma

$$u^{(m)} + a_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + a_1u' + g(x,u) = f(x),$$

bajo las hipótesis ii) y iii) del Teorema 2.1 y

(C.2) $\qquad |g(x,u)| \leq g(x,u) + \alpha|u| + \beta$, con $\beta \geq 0$ y $\alpha \leq \alpha_0$,

para un cierto $\alpha_0 > 0$.

EL Teorema 2.1 establece que cuando $m=2$, $a_1=0$ y $T=\pi$, la cota óptima para α_0 es 2. Un problema que queda abierto es determinar la cota óptima para α_0 en el caso general $m>2$.

Por último, vamos a exponer los resultados obtenidos en relación con el problema D_1.

Aunque parece posible establecer estos resultados con $g:]0,\pi[\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,

$(x,u) \longrightarrow g(x,u)$, verificando la condición de Caratheodory, por simplicidad en la exposición, vamos a considerar únicamente no linealidades independientes de x.

Sean $g: R \longrightarrow R$ continua y $f \in L^2(0,\pi)$,

TEOREMA 2.2.- Supongamos que:

i) Existen $\mu,\sigma > 1$, con $\frac{1}{\mu^{½}} + \frac{1}{\sigma^{½}} > 1$ y $\alpha,\beta,k,K, \in R$, tales que

$$\alpha \leq g(u) \leq (\mu - 1)|u| + k, \quad u \geq 0,$$

$$\beta \geq g(u) \geq -(\sigma - 1)|u| + k, \quad u \leq 0,$$

ii) $$\bar{g}(-\infty) < (1/2)\int_0^\pi f(x)\operatorname{senx}\,dx < \underline{g}(+\infty),$$

donde $\bar{g}(-\infty) = \limsup_{u\to-\infty} g(u)$, $\underline{g}(+\infty) = \liminf_{u\to+\infty} g(u)$.

Entonces, el problema D_1,

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} &u'' + u + g(u) = f(x), \quad a.\ e.\ ]0,\pi[,\\ &u(0) = u(\pi) = 0, \end{aligned}$$

admite al menos una solución.

La demostración de este resultado es análoga a la del Teorema 3.2 sobre el problema D_n, $n > 1$, y puede verse en [Ar1].

NOTAS.-

1) Si g verifica (A), la hipótesis i) es la condición (B') con $\gamma = \mu - 1$ y $\tau = \sigma - 1$. Esta hipótesis viene sugerida por la b) del Lema 1.4.

La hipótesis ii), como en el Teorema 2.1, es una típica condición de Landesman-Lazer.

2) Si ponemos $\mu = \sigma = \gamma$ en la hipótesis i) y llamamos $\lambda = \gamma - 1$, ésta condición se reduce a

(B) $\qquad |g(u)| \leq \lambda|u| + k, \; u \in R, \quad$ con $0 < \lambda < 3$.

Por tanto, el Teorema 2.2 generaliza el resultado en [Ah].

3) Como ya hemos dicho anteriormente, la condición i) de este Teorema es óptima. Si ponemos $g(u) = (\mu - 1)u^+ - (\sigma - 1)u^-$, con $\mu, \sigma > 1$ y verificando $\frac{1}{\mu^{1/2}} + \frac{1}{\sigma^{1/2}} = 1$, Dancer, en [D2], prueba que existe $f \in C^\infty[0,\pi]$ para la cual (2.14) no tiene solución.

3. Valores propios superiores al primero.-

En esta sección vamos a exponer los resultados obtenidos para los problemas P_n y D_n, con $n>1$.

No son muchos los resultados que se conocen para este tipo de problemas en resonancia en valores propios superiores al primero (ver [D1])

De nuevo, utilizando como modelo el problema lineal a trozos correspondiente, vamos a demostrar resultados para estos problemas.

Sea $g\colon R \longrightarrow R$ una función continua y $f \in L^2(0,\pi)$.

TEOREMA 3.1.- Supongamos que:

a) Fijado $n \in N$, existen $\mu, \sigma \geq (2n)^2$ verificando

$$\frac{n+1}{\mu^{1/2}} + \frac{n+1}{\sigma^{1/2}} > 1$$

y existen α, β, k, K $\in$ R, tales que

$$\alpha \leq g(u) \leq (\mu - (2n)^2)|u| + K, \quad u \geq 0,$$

$$\beta \geq g(u) \geq -(\sigma - (2n)^2)|u| + k, \quad u \leq 0.$$

b) $$\left(\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\, dx\right)^2 + \left(\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} 2nx\, dx\right)^2 <$$

$$< \max\{\underline{g}(+\infty)-\bar{g}(-\infty),\ \underline{g}(-\infty) - \bar{g}(+\infty)\}$$

c) Si $\max\{\underline{g}(+\infty) - \bar{g}(-\infty), \underline{g}(-\infty) - \bar{g}(+\infty)\} = \underline{g}(+\infty) - \bar{g}(-\infty)$, existen s>0 y L$\in$R tales que $g(u) \leq g(v) + L$, si $v - u \geq s$.

Entonces el problema P_{n+1}

$$(3.1)\quad \begin{cases} u'' + (2n)^2 u + g(u) = f, \text{ a. e. }]0,\pi[, \\ u(0) = u(\pi),\ u'(0) = u'(\pi), \end{cases}$$

tiene al menos una solución.

TEOREMA 3.2.- Sea $n \in N$, $n > 1$. Supongamos que:

a) Existen μ, $\sigma \geq n^2$ verificando

$$\frac{n}{2\mu^{1/2}} + \frac{n+2}{2\sigma^{1/2}} > 1, \quad \frac{n+2}{2\mu^{1/2}} + \frac{n}{2\sigma^{1/2}} > 1, \quad \text{si n es par,}$$

$$\frac{n+1}{2\mu^{1/2}} + \frac{n+1}{2\sigma^{1/2}} > 1, \text{ si n es impar,}$$

y existen α, β, k, K $\in$ R, tales que

$$\alpha \leq g(u) \leq (\mu - n^2)|u| + K, \quad u \geq 0,$$

$$\beta \geq g(u) \geq -(\sigma - n^2)|u| + k, \quad u \leq 0.$$

b) $$\bar{g}(-\infty)\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^+ nx\,dx \;-\; \underline{g}(+\infty)\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^- nx\,dx \;<\; \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nx\,dx \;<$$

$$< \underline{g}(+\infty)\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^+ nx\,dx \;-\; \bar{g}(-\infty)\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^- nx\,dx.$$

c) Existen $s > 0$ y $L \in R$, tales que, $g(u) \leq g(v) + L$, si $v - u \geq s$.

Entonces, el problema D_n,

$$(3.2)\qquad \begin{cases} u'' + n^2 u + g(u) = f, \text{ a. e. }]0,\pi[, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

tiene al menos una solución.

NOTAS.-

1) Como en los Teoremas de la sección anterior, las condiciones a) de los Teoremas 3.1 y 3.2 vienen sugeridas por los respectivos problemas lineales a trozos (ver Lemas 1.3 y 1.4).

2) La condición b) del Teorema 3.2 vuelve a ser la típica de Landesman-Lazer. La condición b) del Teorema 3.1 es ahora del tipo de las usadas en [Le]; esta condición viene determinada por el hecho de que el núcleo del operador $L - \lambda_{n+1} I$ con las condiciones (0.2) está generado por las funciones sen2nx y cos2nx, mientras que el núcleo del operador $L - \lambda_n I$ con las condiciones (0.3) es unidimensional (está generado por sen nx).

3) La condición c) tanto del Teorema 3.1 como del Teorema 3.2 es una hipótesis técnica que no es necesaria para el primer valor propio (n=1). Esta condición se verifica, por ejemplo, si g es monótona no decreciente. Una condición similar, aunque en otro contexto, fue usada en [W3].

En la demostración de los Teoremas 3.1 y 3.2 usaremos el siguiente resultado:

LEMA 3.3.- Sean $n \in N$ y $g: R \longrightarrow R$ una función continua que verifica la condición c) de los Teoremas 3.1 y 3.2 (y si n=1, $g(u) \geq \alpha$, $u \geq 0$, $g(u) \leq \beta$, $u \leq 0$). Sea (u_k) una sucesión en $C^1[0,\pi]$ con $|u_k|_\infty \longrightarrow \infty$ y $\frac{u_k}{|u_k|_\infty} \longrightarrow \mathrm{sen}(n.+\theta)$ en $C^1[0,\pi]$ cuando $k \longrightarrow \infty$ (es decir, $\frac{u_k(x)}{|u_k|_\infty} \longrightarrow \mathrm{sen}(nx+\theta)$ y $\frac{u_k'(x)}{|u_k|_\infty} \longrightarrow n\cos(nx+\theta)$, uniformemente en $[0,\pi]$), donde $\theta \in (0,\pi)$ si n es impar y $\theta \in [0,2\pi[$ si n es par. Supongamos además que u_k es π-periódica si θ no es ni 0 ni π. Entonces,

$$(3.3) \qquad \liminf_{k\to\infty} \int_0^\pi g(u_k(x))\,\mathrm{sen}(nx+\theta)\,dx \geq$$

$$\geq \underline{g}(+\infty) \int_0^\pi \mathrm{sen}^+(nx+\theta)\,dx - \bar{g}(-\infty) \int_0^\pi \mathrm{sen}^-(nx+\theta)\,dx.$$

<u>Demostración</u>.-

Sea (u_k) una sucesión en las condiciones del Lema. Si $\theta \in (0,\pi)$, entonces $\frac{u_k}{|u_k|_\infty} \longrightarrow \pm\mathrm{sen}\, n(.)$, en $C^1[0.\pi]$. Si n es par y $\theta \in (0,\pi)$, como las funciones u_k son π-periódicas, $k \in N$, podemos identificar u_k con su extensión π-periódica a todo R y definir

$$\tilde{u}_k(x) = u_k(x-(\theta/n)), \quad x \in R.$$

Pero, entonces, $\dfrac{\tilde{u}_k}{|\tilde{u}_k|_\infty} \longrightarrow$ sen $n(.)$ en $C^1[0,\pi]$, ya que, por periodicidad, $|\tilde{u}_k|_\infty = |u_k|_\infty$. Además,

$$\int_0^\pi g(\tilde{u}_k(x))\text{sen } nx\, dx = \int_{\theta/n}^{\pi+\frac{\theta}{n}} g(u_k(x))\text{sen}(nx+\theta)dx = \int_0^\pi g(u_k(x))\text{sen}(nx+\theta)dx,$$

ya que la función integrando es π-periódica (n es par).

Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\theta \in \langle 0,\pi\rangle$, para todo $n \in N$, esto es, que $\dfrac{u_k}{|u_k|_\infty} \longrightarrow \pm$ sen $n(.)$ en $C^1[0,\pi]$.

Por simplicidad en la exposición, demostraremos únicamente los casos n=1 y n=2.

Supongamos que $\dfrac{u_k}{|u_k|_\infty} \longrightarrow$ sen $n(.)$, (si converge a $-$sen $n(.)$ la prueba es similar).

Si n=1, entonces para cada $\epsilon > 0$, $u_k(x) \longrightarrow +\infty$ uniformemente en $[\epsilon,\pi-\epsilon]$, luego existe $k(\epsilon) \in N$, tal que $g(u_k(x)) \geq \underline{g}(+\infty) - \epsilon$, $x \in [\epsilon,\pi-\epsilon]$, y $u_k(x) > 0$, $x \in]0,\pi[$, $k \geq k(\epsilon)$ ($u_k'/|u_k|_\infty \to$cos, uniformemente en $[0,\pi]$). Por tanto, para $k \geq k(\epsilon)$,

$$\int_0^\pi g(u_k(x))\text{senx}\, dx \geq \alpha\int_0^\epsilon \text{senx}\, dx + \underline{g}(+\infty)\int_\epsilon^{\pi-\epsilon}\text{senx}\, dx -$$

$$- \epsilon\int_\epsilon^{\pi-\epsilon}\text{senx}\, dx + \alpha\int_{\pi-\epsilon}^\pi \text{senx}\, dx,$$

y haciendo $\epsilon \longrightarrow 0$, obtenemos (3.3) en este caso.

Supongamos ahora que n=2. Para cada $\epsilon > 0$, existe $k(\epsilon) \in N$ de forma que si $k \geq k(\epsilon)$, $g(u_k(x)) > \underline{g}(+\infty) - \epsilon$, $x \in [\epsilon,\frac{\pi}{2}-\epsilon]$, $u\,(x) > 0$, $x \in]0,\frac{\pi}{2}-\epsilon[$

$g(u_k(x)) < \bar{g}(-\infty) + \epsilon$, $x \in [\frac{\pi}{2}+\epsilon, \pi-\epsilon]$, $u_k(x) < 0$, $x \in]\frac{\pi}{2}+\epsilon, \pi[$ ($\frac{u_k(x)}{|u_k|_\infty} \longrightarrow$ $\longrightarrow \operatorname{sen}2x$, $\frac{u_k'(x)}{|u_k|_\infty} \longrightarrow 2\cos 2x$ uniformemente en $[0,\pi]$). Además existe un único $x_k \in]\frac{\pi}{2}-\epsilon, \frac{\pi}{2}+\epsilon[$ tal que $u_k(x_k) = 0$; si $k \geq k(\epsilon)$ (en efecto, por continuidad existe un $x_k \in]\frac{\pi}{2}-\epsilon, \frac{\pi}{2}+\epsilon[$ tal que $u_k(x_k) = 0$; la unicidad se deduce de que $\frac{u_k'(x)}{|u_k|_\infty} \longrightarrow 2\cos 2x$ uniformemente en $[0,\pi]$, luego $u_k'(x) < 0$ si $x \in [\frac{\pi}{2}-\epsilon, \frac{\pi}{2}+\epsilon]$ y $k \geq k(\epsilon)$). Podemos suponer, tomando una subsucesión, si es necesario, que $x_k \geq \pi/2$, $k \geq k(\epsilon)$ ó $x_k \leq \pi/2$, $k \geq k(\epsilon)$. Consideremos, por ejemplo el primer caso ya que el otro es totalmente análogo.

Para cada $\delta > 0$, existe $0 < \epsilon(\delta) < \delta$ y $k(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que

$|u_k(x)| \leq \delta |u_k|_\infty$, $x \in]\frac{\pi}{2}-\epsilon, \frac{\pi}{2}+\epsilon[$, y $u_k(x) > (1-\delta)|u_k|_\infty$, $x \in]\frac{\pi}{4}-\epsilon, \frac{\pi}{4}+\epsilon[$

si $k \geq k(\delta)$ (Si k es suficientemente grande $\left|\frac{u_k(x)}{|u_k|_\infty} - \operatorname{sen}2x\right| < \frac{\delta}{2}$, basta tomar ϵ de forma que $|\operatorname{sen}2x| \leq \frac{\delta}{2}$ si $x \in [\frac{\pi}{2}-\epsilon, \frac{\pi}{2}+\epsilon]$ y $\operatorname{sen}2x \geq 1 - \frac{\delta}{2}$, si $x \in [\frac{\pi}{4}-\epsilon, \frac{\pi}{4}+\epsilon]$).

Sean $m_k = \inf \{g(u) |\ u > (1-\delta)|u_k|_\infty\}$ y $M_k = \sup \{g(u) |\ 0 < u < \delta|u_k|_\infty\}$; entonces, para $k \geq \max \{ k(\epsilon(\delta)), k(\delta) \}$, y puesto que $g(u) \geq g(-s) - L$, $u \geq 0$ y $g(u) \leq g(s) + L$, $u \leq 0$, se tiene,

$$\int_0^\pi g(u_k(x))\operatorname{sen}2x\,dx \geq (g(-s)-L)\int_0^\epsilon \operatorname{sen}2x\,dx +$$

$$+ (\underline{g}(+\infty)-\epsilon)\int_\epsilon^{\frac{\pi}{4}-\epsilon} \operatorname{sen}2x\,dx + m_k \int_{\frac{\pi}{4}-\epsilon}^{\frac{\pi}{4}+\epsilon} \operatorname{sen}2x\,dx +$$

$$+ (\underline{g}(+\infty)-\epsilon)\int_{\frac{\pi}{4}+\epsilon}^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \operatorname{sen}2x\,dx + (g(-s)-L)\int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}2x\,dx + \tag{3.4}$$

$$(3.4)\quad \begin{aligned} &+ M_i \int_{\pi/2}^{x_k} \operatorname{sen}2x\,dx + (g(s)+L) \int_{x_k}^{\pi/2} \operatorname{sen}2x\,dx \;+ \\ &+ (\bar{g}(-\infty)+\epsilon) \int_{\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \operatorname{sen}2x\,dx + (g(s)+L) \int_{\pi-\epsilon}^{\pi} \operatorname{sen}2x\,dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, por la hipótesis c), $M_k \leq m_k + L$, si $\delta < \frac{1}{2}$ y k es suficientemente grande (ya que si $u > (1-\delta)|u_k|_\infty$, entonces $0 < v < \delta|u_k|_\infty$ y $u - v > (1-2\delta)|u_k|_\infty > s$, siempre que $\delta < \frac{1}{2}$ y k suficientemente grande).

Según ésto,

$$\begin{aligned} &m_k \int_{\frac{\pi}{4}-\epsilon}^{\frac{\pi}{4}+\epsilon} \operatorname{sen}2x\,dx + M_k \int_{\pi/2}^{x_k} \operatorname{sen}2x\,dx \geq \\ (3.5)\qquad &\geq m_k \left(\int_{\frac{\pi}{4}-\epsilon}^{\frac{\pi}{4}+\epsilon} \operatorname{sen}2x\,dx + \int_{\pi/2}^{x_k} \operatorname{sen}2x\,dx \right) + L \int_{\pi/2}^{x_k} \operatorname{sen}2x\,dx \geq \\ &\geq (g(-s)-L) \left(\int_{\frac{\pi}{4}-\epsilon}^{\frac{\pi}{4}+\epsilon} \operatorname{sen}2x\,dx + \int_{\pi/2}^{x_k} \operatorname{sen}2x\,dx \right) + L \int_{\pi/2}^{x_k} \operatorname{sen}2x\,dx\,. \end{aligned}$$

Haciendo que $\epsilon \longrightarrow 0$ en (3.4) y teniendo en cuenta (3.5), se obtiene (3.3) en este caso.

NOTA.-

Una demostración análoga permite probar que bajo las hipótesis del Lema 3.3, (3.6) $$\liminf_{k\to\infty} \int_0^\pi g(u_k(x))(-\mathrm{sen}(nx+\theta))dx \geq$$

$$\geq \underline{g}(-\infty) \int_0^\pi \mathrm{sen}^+(nx+\theta)dx - \bar{g}(+\infty) \int_0^\pi \mathrm{sen}^-(nx+\theta)dx.$$

En este caso, la hipótesis c) no es necesaria, basta tomar $g(u)\geq\alpha$, $u\geq 0$ y $g(u)\leq\beta$, $u\leq 0$.

<u>Demostración del Teorema 3.1</u>.-

De nuevo vamos a basarnos en el Teorema 1.1 del Capítulo I.

Consideremos la familia de problemas

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} &u'' + (2n)^2 u + \lambda g(u) = \lambda f, \quad \text{a. e. }]0,\pi[, \\ &u(0) = u(\pi),\ u'(0) = u'(\pi), \quad \lambda \in]0.1[. \end{aligned}$$

Es suficiente probar que con las notaciones del Ejemplo 2.1 del Capítulo I, se cumplen las siguientes condiciones:

(I) "Existe $R_0 > 0$ tal que $d\,[Q_{n+1}N|_{B_R(0)\cap \ker L_{n+1}}, B_R(0)\cap\ker L_{n+1}, 0\,] \neq 0$, para cada $R > R_0$, donde $B_R(0)$ es la bola en $L^2(0,\pi)$ de centro 0 y radio R, y por L_{n+1} se denota el operador $L - \lambda_{n+1}I$ ".

(II) "Existe una constante $C > 0$ tal que si (λ,u) es solución de (3.7), entonces, $|u|_\infty \leq C$".

Vamos a demostrar en primer lugar la condición (II).

Supongamos que (II) no es cierta; entonces, existirá una sucesión $\{(\lambda_k,u_k)\}$ de soluciones de (3.7), de forma que $|u_k|_\infty \geq k$, para todo $k\in N$

Definimos $v_k = \dfrac{u_k}{|u_k|_\infty}$. Entonces, $|v_k|_\infty = 1$ y v_k verifica:

$$\text{(3.8)}\qquad \begin{aligned} &v_k'' + (2n)^2 v_k + \lambda_k \frac{g(u_k)}{|u_k|_\infty} = \lambda_k \frac{f}{|u_k|_\infty}, \text{ a. e. }]0,\pi[, \\ &v_k(0) = v_k(\pi),\ v_k'(0) = v_k'(\pi). \end{aligned}$$

De la hipótesis a) se deduce que $|g(u)| \leq r|u| + \tau$, donde $r = \text{máx}\ \{\{\mu - (2n)^2, \sigma - (2n)^2\}$ y $\tau = \text{máx}\ \{|\alpha|, |\beta|, |k|, |K|\}$. Por tanto, $\{ \dfrac{g(u_k)}{|u_k|_\infty} \}$, está uniformemente acotada en $L^2(0,\pi)$, y , puesto que v_k verifica (3.8), la sucesión (v_k'') está uniformemente acotada en $L^2(0,\pi)$. Análogamente a la demostración del Teorema 2.1, se tiene que (v_k') y (v_k) son sucesiones uniformemente acotadas y equicontinuas. Por tanto, existe una subsucesión, que seguiremos denotando por (v_k), y una función $v \in C^1[0,\pi]$, de forma que $v_k \longrightarrow v$ en $C^1[0\ \pi]$, es decir, $v_k(x) \longrightarrow v(x)$ y $v_k'(x) \longrightarrow v'(x)$ uniformemente en $[0,\pi]$, cuando $k \longrightarrow \infty$.

Para continuar la demostración usaremos el Lema 1.3, por lo que vamos a probar la existencia de $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma} \in L^2(0,\pi)$, con $(2n)^2 \leq \tilde{\mu}(x) \leq \mu$ y $(2n)^2 \leq \tilde{\sigma}(x) \leq \sigma$, a. e. $]0,\pi[$, tal que v satisface:

$$\text{(3.9)}\qquad \begin{aligned} &v'' + \tilde{\mu}(x)v^+ - \tilde{\sigma}(x)v^- = 0, \quad \text{a. e. }]0,\pi[, \\ &v(0) = v(\pi),\ v'(0) = v'(\pi). \end{aligned}$$

En efecto, supongamos que $v(x) > 0$, $x \in]a,b[$, con $0 \leq a < b \leq \pi$ y sea $I_j =]a_j,b_j[\subset]a,b[$, $a_j < b_j$, $a_j \downarrow a$ y $b_j \uparrow b$, una sucesión de intervalos encajados con $\bigcup_{j\in N} I_j =]a,b[$.

Fijado $j \in N$, como $v(x) > 0$ en $\bar{I}_j$, se tiene, $v_k(x) > 0$ en $\bar{I}_j$, para k suficientemente grande, por lo que $u_k(x) \longrightarrow +\infty$, uniformemente en $\bar{I}_j$.

Podemos suponer $u_k(x) > 0$, $x \in \bar{I}_j$. Así, por la hipótesis a),

$$(3.10) \qquad -\left|\frac{\alpha}{u_k(x)}\right| \leq \frac{\lambda_k g(u_k(x))}{u_k(x)} \leq (\mu - (2n)^2) + \left|\frac{K}{u_k(x)}\right|, \quad x \in \bar{I}_j,$$

luego, la sucesión $\{\frac{\lambda_k g(u_k)}{u_k}\}$ está uniformemente acotada en $L^2(I_j)$ ($\alpha/u_k(x)$, $K/u_k(x)$ tienden a cero uniformemente en $\bar{I}_j$). Por tanto, existe una subsucesión, que seguimos denotando por $\{\frac{\lambda_k g(u_k)}{u}\}$, y $\mu_j \in L^2(I_j)$, de forma que $\frac{\lambda_k g(u_k)}{u_k}$ converge débilmente a μ_j en $L^2(I_j)$. Además, de (3.10) y por el Teorema de Mazur, se tiene que $0 \leq \mu_j \leq \mu - (2n)^2$, a. e. I_j.

Integrando (3.8) entre a_j y x

$$(3.11) \qquad v_k'(x) - v_k'(a_j) + \int_{a_j}^{x} [(2n)^2 + \frac{\lambda_k g(u_k(s))}{u_k(s)} -]v_k(s)ds =$$

$$= \frac{\lambda_k}{|u_k|_\infty} \int_{a_j}^{x} f(s)ds.$$

Como $v_k \longrightarrow v$ en $C^1[0,\pi]$, $\int_{a_j}^{x} f(s)ds$ está acotada independientemente de x y $\frac{\lambda_k g(u_k)}{u_k} \rightharpoonup \mu_j$ en $L^2(I_j)$, entonces, si hacemos que $k \longrightarrow \infty$ en (3.11), obtenemos,

$$(3.12) \qquad v'(x) - v'(a_j) + \int_{a_j}^{x} [(2n)^2 + \mu_j(s)]v(s)ds = 0.$$

Así, v' es absolutamente continua en I_j y v satisface,

$$v'' + ((2n)^2 + \mu_j(x))v = 0, \quad \text{a. e. } I_j.$$

Evidentemente, si $l \neq j$, $\mu_j(x) = \mu_l(x)$, a. e. $x \in I_j \cap I_l$. Definimos $\tilde{\mu} \in L^2(a,b)$ por $\tilde{\mu}(x) = (2n)^2 + \mu_j(x)$, si $x \in I_j$; entonces $(2n)^2 \leq \tilde{\mu}(x) \leq \mu_j$, a. e. $]a,b[$ y v satisface

$$v'' + \tilde{\mu}(x)v^+ = 0, \text{ a. e. }]a,b[.$$

De forma análoga, si $v(x) < 0$, $x \in]a,b[$, existe $\tilde{\sigma} \in L^2(a,b)$ con $(2n)^2 \leq \tilde{\sigma}(x) \leq \sigma$, a. e. $]a,b[$ tal que

$$v'' + \tilde{\sigma}(x)v^- = 0, \text{ a. e. }]a,b[,$$

con lo que se concluye la demostración de (3.9).

Así, por el Lema 1.3, tenemos que $v(x) = 0$, $x \in [0,\pi]$ ó $v(x) = C\text{sen}(2nx+\theta)$ para algún $\theta \in [0,2\pi[$, $C > 0$. Como $|v|_\infty = 1$ (ya que v es límite uniforme de la v_k y $|v_k|_\infty = 1$), ha de ser $v(x) = \text{sen}(2nx+\theta)$ para algún $\theta \in [0,2\pi[$.

Por tanto, $\dfrac{u_k(x)}{|u_k|_\infty} \longrightarrow \text{sen}(2nx+\theta)$ en $C^1[0,\pi]$.

Supongamos, en primer lugar, que máx $\{\underline{g}(+\infty) - \bar{g}(-\infty), \underline{g}(-\infty) - \bar{g}(+\infty)\} = \underline{g}(+\infty) - \bar{g}(-\infty) \geq 0$. Entonces, por el Lema 3.3,

$$\text{(3.13)} \qquad \liminf \int_0^\pi g(u_k(x))\text{sen}(2nx+\theta)dx \geq \underline{g}(+\infty) - \bar{g}(-\infty).$$

Ahora bien, como (λ_k, u_k) es solución de (3.7), multiplicando (3.7) por $\text{sen}(2nx+\theta)$ e integrando entre 0 y π,

$$\int_0^\pi f(x)\text{sen}(2nx+\theta)dx = \int_0^\pi g(u_k(x))\text{sen}(2nx+\theta)dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

y de (3.13), se obtiene,

$$(3.14) \qquad \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(2nx+\theta)dx \geq \underline{g}(+\infty) - \bar{g}(-\infty).$$

Por otro lado,

$$(3.15) \quad \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(2nx+\theta)dx = \cos\theta \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}2nx\, dx + \mathrm{sen}\theta \int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\, dx \leq$$

$$\leq \max_{C_1^2+C_2^2=1} \{ \langle (C_1,C_2), (\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}2nx\, dx, \int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\, dx) \rangle \} =$$

$$= \sqrt{ (\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}2nx\, dx)^2 + (\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\, dx)^2 },$$

donde, aquí, $\langle .,. \rangle$ denota el producto escalar usual de R^2.

(3.14) junto con (3.15) contradicen la hipótesis b).

Si $\max \{\underline{g}(+\infty) - \bar{g}(-\infty), \underline{g}(-\infty) - \bar{g}(+\infty)\} = \underline{g}(-\infty) - \bar{g}(+\infty)$, utilizando (3.6) en lugar de (3.3), se obtiene de forma análoga una contradicción con la hipótesis b).

Así, la condición (II) queda demostrada.

Para demostrar (I), vamos a comprobar que para R suficientemente grande, la aplicación $QN_{|B_R(0)\cap \ker L_{n+1}}$, $\lambda_{n+1}=(2n)^2$ es homotópica a la identidad, por lo que,

$$d(QN_{|B_R(0)\cap \ker L_{n+1}}, B_R(0)\cap \ker L_{n+1}, 0) = 1.$$

Sea ϕ: $[0,1] \times \ker L_{n+1} \longrightarrow \ker L_{n+1}$, definida por

$$\phi(\lambda,u) = \lambda u + (1-\lambda)QNu.$$

Será suficiente probar que existe $R_0 > 0$ tal que si (λ,u) es solución de $\phi(\lambda,u) = 0$, entonces, $|u|_2 < R_0$.

Supongamos que existe una sucesión $\{(\lambda_k,\omega_k)\} \subset [0,1] \times \ker L_{n+1}$, solución de $\phi(\lambda,u) = 0$, con $|\omega_k|_2 \longrightarrow \infty$. Como $\left|\frac{\omega_k}{|\omega_k|_2}\right|_2 = 1$ y $\lambda_k \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{(\lambda_k, \omega_k)\}$ y existen $\lambda_0 \in [0,1]$ y $\psi \in \ker L_{n+1}$, con $|\psi|_2 = 1$, tales que, $\frac{\omega_k}{|\omega_k|_2} \longrightarrow \psi$ en $L^2(0,\pi)$ y $\lambda_k \longrightarrow \lambda_0$, cuando $k \longrightarrow \infty$. Además, $\psi(x) = (2/\pi)^{1/2}\operatorname{sen}(2nx+\theta)$, con $\theta \in [0,2\pi[$.

Suponemos que máx $\{\underline{g}(+\infty) - \bar{g}(-\infty), \underline{g}(-\infty) - \bar{g}(+\infty)\} = \underline{g}(+\infty) - \bar{g}(-\infty)$. Entonces, multiplicando la ecuación $\phi(\lambda_k,\omega_k) = 0$ por ψ, y teniendo en cuenta la definición de QN, se obtiene,

$$(3.16) \qquad 0 = \lambda_k\langle\omega_k,\psi\rangle + (1-\lambda_k)\langle QN\omega_k,\psi\rangle = \lambda_k\langle\omega_k,\psi\rangle + $$
$$+ (1-\lambda_k)(2/\pi)^{1/2}\left[\int_0^\pi g(\omega_k(x))\operatorname{sen}(2nx+\theta)dx - \int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(2nx+\theta)dx\right]$$

Como $\langle\omega_k,\psi\rangle = |\omega_k|_2 \left\langle\frac{\omega_k}{|\omega_k|_2},\psi\right\rangle \longrightarrow +\infty$, $k \longrightarrow \infty$, de (3.16), se tiene que $\lambda_0 \neq 1$. Por tanto, tomando k suficientemente grande, $(1-\lambda_k) > 0$ y por (3.16), teniendo en cuenta (3.3), se obtiene,

$$0 > (1-\lambda_k)(2/\pi)^{1/2}\left[\int_0^\pi g(\omega_k(x))\operatorname{sen}(2nx+\theta)dx - \underline{g}(+\infty) + \bar{g}(-\infty)\right] > 0,$$

lo cual es absurdo.

Si el máx $\{\underline{g}(+\infty) - \bar{g}(-\infty), \underline{g}(-\infty) - \bar{g}(+\infty)\} = \underline{g}(-\infty) - \bar{g}(+\infty)$, multiplicando $\phi(\lambda_k,\omega_k) = 0$ por $-\psi$ y teniendo en cuenta (3.6), se llega a una contradicción de forma análoga. Así, la condición (I) queda demostrada, con lo que se concluye la prueba del Teorema.

Demostración del Teorema 3.2.-

Como en el caso del primer valor propio (problema D_1), la demostración de este Teorema es parecida a la anterior y puede verse en [Ar].

NOTAS -

1) Podemos probar los Teoremas anteriores sustituyendo la hipótesis c) por:

"Existen $r, d > 0$ tales que $|g(su)| \geq r|g(u)| - d$, si $|u| \geq d$ y $s \geq d$".

Esta condición es la propiedad $\mathcal{P}$ en [D2].

2) Los Teoremas 3.1 y 3.2 generalizan algunos de los resultados obtenidos en [D1], donde el autor demuestra resultados semejantes pero suponiendo que existe $\lim\limits_{u \to \pm\infty} \frac{g(u)}{u}$.

3) Como ya hemos comentado, las condiciones a) de los Teoremas 3.1 y 3.2 son óptimas en el sentido de que si $g(u) = (\mu - k^2)u^+ - (\sigma - k^2)u^-$, $k=2n$ para el problema periódico ó $k=n$ para el problema de Dirichlet, y μ, σ satisfacen alguna igualdad en lugar de las desigualdades estrictas que aparecen en a), entonces, Dancer, en [D1], demuestra que existen funciones en $L^2(0,\pi)$ para las que éstos problemas no tienen solución.,

4) Se pueden probar resultados análogos a los anteriores substituyendo las condiciones a) por:

"Existen $\mu, \sigma < (2n)^2$, α, β, k, $K \in R$, tales que,

$$\alpha \geq g(u) \geq (\mu - (2n)^2)|u| + K, \quad u \geq 0,$$

$$\beta \leq g(u) \leq -(\sigma - (2n)^2)|u| + k, \quad u \leq 0,$$

con $\frac{n}{\mu^{1/2}} + \frac{n}{\sigma^{1/2}} < 1$",

en el Teorema 3.1, y por

"Existen $\mu,\ \sigma < n^2,\ \ \alpha,\ \beta,\ k,\ K \in R$, tales que,

$$\alpha \geq g(u) \geq (\mu - n^2)|u| + K, \quad u \geq 0,$$

$$\beta \leq g(u) \leq -(\sigma - n^2)|u| + k, \quad u \leq 0,$$

con $\frac{n}{2\mu^{1/2}} + \frac{n-2}{2\sigma^{1/2}} < 1,\ \ \frac{n-2}{2\mu^{1/2}} + \frac{n}{2\sigma^{1/2}} < 1$, si n es par,

$\frac{n-1}{2\mu^{1/2}} + \frac{n-1}{2\sigma^{1/2}} < 1$, si n es impar ($\mu,\ \sigma < 1$, para $n=1$)",

en el Teorema 3.2, e invirtiendo el sentido de las desigualdades en las condiciones b) y c) de estos Teoremas.,

5) La condición a) de los Teoremas 3.1 y 3.2 impone a la perturbación no lineal g una restricción de crecimiento a lo más lineal en las dos direcciones, en contraste con la condición i) del Teorema 2.1 (para el problema P_1) que sólo impone a g crecer linealmente en una dirección pudiendo crecer arbitrariamente en la otra. Por ejemplo $g(u) = \alpha u + e^u$, $0<$ $<\alpha<1$.

Aunque la condición i) del Teorema 2.2 (para el problema D_1) impone también a g un crecimiento a lo más lineal en ambas direcciones, se puede demostrar, ver [KO1], la existencia de solución de D_1 cuando g crece arbitrariamente en una dirección pero permanece acotada en la otra, como por ejemplo, $g(u) = e^u$.

Este tipo de resultados se basan en la existencia de una función positiva en el $\ker(L - \lambda_1 I)$ y, por tanto, no se pueden extender, al menos de forma sencilla, a los problemas P_n y D_n, $n>1$. Por ejemplo, un problema abierto es la existencia de soluciones para los problemas P_n y D_n,

$n > 1$, cuando $g(u) = e^{u}$.

6) En dimensiones mayores que uno, por ejemplo, $\Delta u + \mu u^{+} - \sigma u^{-} = 0$, en un dominio acotado Ω de R^{n}, $n>1$, no existen resultados tan explícitos como los de los Teoremas 1.1 y 1.2 para las correspondientes ecuaciones lineales a trozos. Consiguientemente, no podemos obtener resultados análogos a los de los Teoremas 3.1 y 3.2 en dimensiones superiores.

CAPITULO III

ALGUNOS RESULTADOS PARCIALES SOBRE EL PROBLEMA PERIODICO-DIRICHLET PARA LA ECUACION DEL CALOR.

En este Capítulo estudiamos la existencia de soluciones débiles del problema periódico-Dirichlet para una ecuación del calor unidimensional semilineal. En concreto, se considera el problema

$$(0.1) \qquad u_t - u_{xx} - \lambda_n u - g(u) = f(t,x), \qquad \text{a. e. } (t,x) \in Q = R\times]0,\pi[,$$

$$(0.2) \qquad \begin{aligned} &u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in R, \\ &u(t+T,x) = u(t,x), \quad (t,x) \in \bar{Q}, \end{aligned}$$

donde $T>0$ es un número real fijo, $g:R \longrightarrow R$ es una función continua, $f \in L^q_T(Q)$, $q>3$, y $\lambda_n = n^2$, $n \in N$ es el n-ésimo valor propio del operador L definido en el Ejemplo 2.3 del Capítulo I. Estamos considerando pues, un problema resonante en el n-ésimo valor propio.

Como en el Capítulo II, consideraremos perturbaciones no lineales g que verifiquen la condición

$$(A) \qquad \lim_{u\to\pm\infty} g(u) = \pm\infty.$$

Por tanto, empezaremos observando el problema lineal a trozos, esto es, la ecuación

$$(0.3) \qquad u_t - u_{xx} - \mu u^+ + \sigma u^- = f(t,x), \qquad \text{a. e. } (t,x) \in Q,$$

junto con las condiciones (0.2).

Se puede demostrar (ver [F]) que cuando $f(t,x)$ es independiente de t, toda solución de este problema es independiente de t. Así, toda solución de (0.3)-(0.2) con f independiente de t, es solución de $u'' + \mu u^+ - \sigma u^- = -f$, a. e. $]0,\pi[$, $u(0) = u(\pi) = 0$.

Por tanto, para poder asegurar la existencia de solución de (0.3)-(0.2) para toda f en $L^2_T(Q)$, es necesario que el par $(\mu^{1/2},\sigma^{1/2}) \in A_1$, donde A_1 es el mismo subconjunto de R^2 considerado en la Sección 1 del Capítulo II.

En consecuencia, igual que para el problema de Dirichlet estudiado en el Capítulo anterior, sólo podemos esperar resultados generales de existencia de solución para el problema (0.1)-(0.2) con g verificando (A), cuando g tenga un crecimiento a lo más lineal.

Sin embargo, los resultados que se exponen en la siguiente sección para el problema (0.1)-(0.2), a diferencia de los obtenidos en el Capítulo II en los que la no linealidad g verificaba la condición (B'), se obtienen únicamente para g verificando la condición (B) (ver Capítulo II).

1. El Problema periódico-Dirichlet.-

En lo que sigue usaremos los siguientes resultados:

LEMA 1.1.- Supongamos que $c \in L^2_T(Q)$ y $n^2 \leq c(t,x) < (n+1)^2$, a.e. $(t,x) \in Q$. Entonces el problema lineal

$$
(1.1) \qquad \begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + c(t,x)u, \quad \text{a. e. } Q, \\
&u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in R, \\
&u(t+T,x) = u(t,x), \quad (t,x) \in \bar{Q}.
\end{aligned}
$$

tiene solución no trivial si y sólo si $c(t,x) = n^2$, a. e. Q. En este caso, toda solución de (1.1) es de la forma $u(t,x) = C\,\text{sen}\, nx$, $C \in \mathbb{R}$.

Demostración.-

El problema (1.1) es equivalente (ver Ejemplo 2.3 del Capítulo I) a la ecuación:

$$(1.2) \qquad Lu = cu, \qquad u \in \text{dom}\, L.$$

Sea $r = \dfrac{(n+1)^2+n^2}{2}$ y $\gamma = \text{dist}(r,\sigma(L)) = \dfrac{(n+1)^2-n^2}{2}$, donde por $\sigma(L)$ se denota el espectro del operador L. Entonces, (1.2) es equivalente a

$$(L - rI)u = (c-r)u,$$

ó,

$$(1.3) \qquad u = (L - rI)^{-1}(c-r)u,$$

ya que como $r \notin \sigma(L)$, $L - rI$ es invertible.

Veamos que

$$(1.4) \qquad |(L - rI)^{-1}| = \frac{1}{\gamma},$$ donde $|.|$ denota la norma de un operador de $L^2 \longrightarrow L^2$.

En efecto, si $f \in L^2_T(Q)$,

$$f(t,x) = \sum_{j\in Z,\, k\in N} (2/\pi T)^{1/2} f_{jk} e^{ijwt}\text{senkx},$$

y,

$$(L - rI)^{-1}f(t,x) = \sum_{j\in Z,\, k\in N} (2/\pi T)^{1/2} \frac{f_{jk}}{ijw+k^2-r} e^{ijwt}\text{senkx}.$$

Por la igualdad de Parseval, se obtiene,

$$|(L - rI)^{-1}| \leq \frac{1}{\gamma},$$

donde $\gamma = \mathrm{dist}(r,\sigma(L))$; y, haciendo $(L - rI)^{-1}f_0$, donde $f_0(t,x) =$ $= \mathrm{signo}(k_0^2 - r)\mathrm{sen}\, k_0x$, con $k_0 \in N$ tal que $|k_0^2 - r| = \gamma$, se obtiene (1.4).

De (1.3), se tiene

(1.5) $$|u|_2 \leq \frac{1}{\gamma} |(c - r)u|_2.$$

Supongamos que u es solución no trivial de (1.1) y que existe $Q_0 \subset Q_T$ de medida positiva tal que $c(t,x)|u(t,x)| > n^2|u(t,x)|$, a. e. $(t,x)\in Q_0$, entonces,

$$|(c - r)u|_2^2 = \int_{Q_0} |c(t,x) - r|^2 |u(t,x)|^2 dx\, dt +$$

$$+ \int_{Q_T - Q_0} |c(t,x) - r|^2 |u(t,x)|^2 dx\, dt < \gamma^2 |u|_2^2,$$

ya que $|c(t,x) - r| \leq \gamma$, a. e. Q_T y $|c(t,x) - r| < \gamma$, a. e. Q_0 (pues en Q_0, $n^2 < c(t,x) < (n+1)^2$). Pero entonces, (1.5) se transforma en

$$|u|_2 \leq \frac{1}{\gamma} |(c - r)u|_2 < \frac{1}{\gamma} \gamma |u|_2 = |u|_2,$$

que es absurdo.

Por tanto, $(n^2-c(t,x))u(t,x) = 0$, a.e. Q, luego si u es solución no trivial de (1.1) u verifica $u_t-u_{xx}-n^2u = 0$ $(u_t-u_{xx}-n^2u+(n^2-c(t,x))u=0)$.

Así, $u(t,x) = C\mathrm{sen}\, nx$ y $c(t,x)=n^2$, a.e. Q. El recíproco es evidente.

LEMA 1.2.- Sean $q > 1$, $f \in L^q(Q_M)$, $(Q_M =]0,M[\times]0,\pi[)$ y sea z solución del problema,

$$z_t - z_{xx} = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_M,$$

$$z(0,x) = 0, \quad x \in]0,\pi[,$$

$$z(t,0) = z(t,\pi) = 0, \quad t \in]0,M[.$$

Entonces, $|z|_{W_q^{1,2}(Q_M)} \leq C|f|_{L^q(Q_M)}$.

Además, si $q > 3$, $W_q^{1,2}(Q_M) \longrightarrow C^{\alpha/2,1+\alpha}(\bar{Q}_M)$ con $\alpha = 1 - 3/q$. Con lo que,

$$|z|_{C^{\alpha/2,1+\alpha}(Q_M)} \leq C|f|_{L^q(\bar{Q}_M)}.$$

Para la demostración del Lema 1.2 ver [LSV, Teorema 91, p. 342 y Lema 3.3, p. 80].

Consideramos ya el problema periódico-Dirichlet

$$u_t - u_{xx} - n^2u - g(u) = f(t,x), \qquad (t,x) \in Q,$$

(1.6) $$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \in R,$$

$$u(t+T,x) = u(t,x), \qquad (t,x) \in \bar{Q},$$

donde $g: R \longrightarrow R$ es continua y $f \in L^q(Q)$, $q>3$.

TEOREMA 1.3.- Supongamos que:

a) Existen α, β, γ, $K \in R$, con $0 \leq \gamma < (n+1)^2 - n^2$, tales que

$$g(u) \geq \alpha, \quad u \geq 0, \quad g(u) \leq \beta, \quad u \leq 0,$$

$$|g(u)| \leq \gamma|u| + K, \qquad u \in R.$$

b) $\bar{g}(-\infty) \int_0^\pi \text{sen}^- nx\, dx - \underline{g}(+\infty) \int_0^\pi \text{sen}^+ nx\, dx < -(1/T) \int_0^T\int_0^\pi f(t,x) \text{sen}\, nx\, dxdt <$

$$\leq \underline{g}(+\infty) \int_0^\pi \text{sen}^- nx\, dx - \bar{g}(-\infty) \int_0^\pi \text{sen}^+ nx\, dx,$$

c) Para $n>1$, existen $s > 0$ y $L \in R$ tales que $g(u) \leq g(v) + L$, si $v-u \geq s$.

Entonces, (1.6) tiene al menos una solución.

Demostración.-

Por los resultados del Capítulo I, el problema (1.6) es equivalente a

$$Lu - \lambda_n u = f + g(u), \qquad u \in \text{dom } L.$$

Vamos a aplicar el Teorema 1.1. del Capítulo I a esta ecuación. Como la comprobación de la hipótesis b) de ese Teorema es similar a los Teoremas del Capítulo anterior, nos limitaremos a exponer la obtención de las cotas a priori, tomando algunas ideas de [CaL], de las posibles soluciones de la familia de problemas

$$(1.7) \qquad Lu - n^2 u = \lambda g(u) + \lambda f.$$

Supongamos que para cada $k \in N$, existe (λ_k, u^k) solución de (1.7) con $|u^k|_\infty \geq k$.

Definimos $v^k = \dfrac{\lambda_k u^k}{|u^k|_\infty}$. Entonces, $v^k \in \text{dom } L$ y,

$$(1.8) \qquad Lv^k = n^2 v^k + \frac{\lambda_k}{|u^k|_\infty} (g(u^k) + f), \; k \in N.$$

Por la hipótesis a), $\dfrac{\lambda_k |g(u^k)|}{|u^k|_\infty} \leq \gamma + \dfrac{K}{|u^k|_\infty}$, y, como $|v^k|_\infty = 1$, $k \in N$,

$|Lv^k|_{L^q} \leq C$, independientemente de k.

Sea $\theta \in C^2([0,+\infty[)$, verificando $\theta(t) = 0$, $t \in [0,T/2]$, $\theta(t) = 1$, si $t \in [T,+\infty[$, $0 \leq \theta(t) \leq 1$, $t \in [0,\infty[$. Sea $z^k = v^k\theta$, entonces, para cada k de N, z^k verifica:

$$z_t^k - z_{xx}^k = \theta' v^k + \theta L v^k$$

$$z^k(0,x) = 0,$$

$$z^k(t,0) = z^k(t,\pi) = 0, \quad t \geq 0,$$

pero, por la elección de θ, $|\theta' v^k + \theta L v^k|_{L^\infty(Q_{2T})} \leq C$, independiente de $k \in N$. Como $q > 3$, el Lema 1.2 implica que

$$|z^k|_{C^{\alpha/2,1+\alpha}(\bar{Q}_{2T})} \leq C, \text{ independiente de } k, \ 0 < \alpha < 1.$$

Ahora bien,

$$|v^k|_{C^{\alpha/2,1+\alpha}(\bar{Q}_T)} = |z^k|_{C^{\alpha/2,1+\alpha}([T,2T]x[o,\pi])} \leq |z^k|_{C^{\alpha/2,1+\alpha}(\bar{Q}_{2T})},$$

luego (v^k) es una sucesión acotada en $C^{\alpha/2,1+\alpha}(\bar{Q}_T)$ y existen $v \in C^{0,1}(\bar{Q}_T)$ y una subsucesión que seguieremos denotando por v^k, tal que $v^k \longrightarrow v$ uniformemente en $\bar{Q}_T$ y $v_x^k \longrightarrow v_x$ uniformemente en $\bar{Q}_T$, cuando $k \longrightarrow \infty$.

Dado $z \in \operatorname{dom} L^*$, donde L^* indica el operador adjunto de L, se tiene

$$(1.9) \qquad (L^*z - n^2 z, v) = \lim_{k\to\infty} (L^*z - n^2 z, v^k) = \lim_{k\to\infty} (z, Lv^k - n^2 v^k) =$$

$$= \lim \left(z, \frac{\lambda_k g(u^k)}{|u^k|_\infty} + \frac{\lambda_k}{|u^k|_\infty} f\right).$$

Por la hipótesis a), existen $r > 0$ y $\tilde{\gamma} < (n+1)^2 - n^2$ tales que

$$0 \leq \frac{g(u) - \alpha}{u} \leq \tilde{\gamma}, \qquad u > r,$$

$$0 \leq \frac{g(u) - \beta}{u} \leq \tilde{\gamma}, \qquad u < -r.$$

Sea $\omega \in C(R)$, con $0 \leq \omega(s) \leq 1$, $s \in R$, $\omega(s) = 0$ si $|s| < r$ y $\omega(s) = 1$ si $|s| > 2r$, y sean

$$g_1(u) = \begin{cases} \omega(u)(g(u) - \alpha), & u \geq 0, \\ \omega(u)(g(u) - \beta), & u \leq 0, \end{cases}$$

$$g_2(u) = g(u) - g_1(u),$$

entonces, g_2 está acotada (es continua y $g_2(u) = \alpha$ si $u > 2r$, $g_2(u) = \beta$, $u < -2r$), g_1 verifica $0 \leq \frac{g_1(u)}{u} \leq \tilde{\gamma}$, $u \in R$ (definiendo $\frac{g_1(u)}{u} = 0$ cuando $u = 0$) y $g(u) = g_1(u) + g_2(u)$, $u \in R$. Además, como $0 \leq \frac{\lambda_k g_1(u^k(t,x))}{u^k(t,x)} \leq \tilde{\gamma}$, $(t,x) \in \bar{Q}_T$, existen una subsucesión que seguiremos denotando igual y $\mu \in L^2(Q_T)$, con $0 \leq \mu \leq \tilde{\gamma}$, a. e. Q_T, de forma que

$$\frac{\lambda_k g_1(u^k)}{u^k} \longrightarrow \mu \text{ en } L^2(Q_T), \quad k \longrightarrow \infty.$$

Volviendo a la ecuación (1.9) y teniendo en cuenta la definición de v,

$$(1.10) \qquad (L^* z - n^2 z, v) = \lim_{k\to\infty} [(z, \frac{\lambda_k g_1(u^k)}{u^k} v^k) + \frac{\lambda_k}{|u^k|_\infty}(z, g_2(u^k) + f)] =$$

$$= (z, \mu v),$$

ya que, $\frac{\lambda_k}{|u^k|_\infty}(z, g_2(u^k) + f) \longrightarrow 0$ pues $|g_2(u^k) + f|_{L^q} \leq C$ independiente de k, $v^k \longrightarrow v$ uniformemente en $\bar{Q}_T$ y $\frac{\lambda_k g_1(u^k)}{u^k} \longrightarrow \mu$ en $L^2(Q_T)$, $k \longrightarrow \infty$.

Por tanto, (ver [V]), $v \in \operatorname{dom} L$ y

$$Lv - n^2 v = \mu v.$$

Del Lema 1.1, si definimos $c(t,x) = n^2 + \mu(t,x)$, se deduce que $v(t,x) = \pm \operatorname{sen} nx$ ($|v|_\infty = 1$, ya que $|v^k|_\infty = 1$, $k \in \mathbb{N}$).

Hemos obtenido pues una sucesión de soluciones (λ_k, u^k) de (1.7) que verifican

$$\frac{u^k(t,x)}{|u^k|_\infty} \longrightarrow \pm \operatorname{sen} nx, \qquad \frac{u^k_x(t,x)}{|u^k|_\infty} \longrightarrow \pm\, n\cos nx,$$

uniformemente en $\bar{Q}_T$, $k \longrightarrow \infty$.

Fijado $t \in R$, la sucesión $\left(\frac{u^k(t,.)}{|u^k|_\infty}\right)$ está en las condiciones del Lema 3.3 del Capítulo II, luego,

$$\liminf_{k\to\infty} \pm \int_0^\pi g(u^k(t,x)) \operatorname{sen} nx\, dx \geq \underline{g}(+\infty) \int_0^\pi (\pm \operatorname{sen} n)^+(x)\, dx - \bar{g}(-\infty) \int_0^\pi (\pm \operatorname{sen} n)^-(x)\, dx,$$

y por tanto,

$$(1/T)\int_0^T \liminf_{k\to\infty} \pm \int_0^\pi g(u^k(t,x)) \operatorname{sen} nx\, dx \geq \underline{g}(+\infty) \int_0^\pi (\pm \operatorname{sen} n)^+(x) dx - \bar{g}(-\infty) \int_0^\pi (\pm \operatorname{sen} n)^-(x) dx$$

Pero (λ_k, u^k) es solución de (1.7), por lo que

$$\int_0^T\int_0^\pi g(u^k(t,x))\text{sen } nx\, dx\, dt = -\int_0^T\int_0^\pi f(t,x)\text{sen } nx\, dx\, dt, \quad k\in\mathbb{N}.$$

El Lema de Fatou junto con la desigualdad anterior implica,

$$-(\pm 1/T)\int_0^T\int_0^\pi f(t,x)\text{sen } nx\, dx\, dt \geq \underline{g}(+\infty)\int_0^\pi (\pm\text{sen } n)^+(x)dx -$$

$$- \bar{g}(-\infty)\int_0^\pi (\pm\text{sen } n)^-(x)dx,$$

que contradice la hipótesis b).

NOTAS.-

1) La condición de que $f \in L^q_T(Q)$, $q > 3$, viene impuesta por el método de obtención de las cotas a priori. Dada la regularidad que posee el operador del calor, es lógico pensar que el Teorema anterior es cierto para $f \in L^2_T(Q)$. Parece posible la demostración del tal resultado variando apropiadamente el Lema 3.3 del Capítulo II.

2) La hipótesis a) del Teorema 1.3 es óptima en el sentido de que si $g(u) = [(n+1)^2 - n^2]u$, las hipótesis b) y c) se verifican para toda f en $L^2_T(Q)$; sin embargo, si $f(t,x) = \text{sen}(n+1)x$, entonces (1.6) no tiene solución en este caso.

3) En la demostración del Teorema 1.3 es esencial el Lema 1.1 sobre el problema lineal. Sería interesante extender los resultados de este Lema

al problema lineal a trozos, esto es, estudiar la existencia de soluciones no triviales del problema,

$$u_t = u_{xx} + \tilde{\mu}(t,x)u^+ - \tilde{\sigma}(t,x)u^-, \quad \text{a. e. } \tilde{Q},$$

$$(1.11) \qquad u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in R,$$

$$u(t+T,x) = u(t,x), \quad (t,x) \in \bar{Q},$$

con el fin de poder obtener resultados similares a los del Capítulo II.

Cuando $\tilde{\mu}(t,x) \equiv \mu$, $\tilde{\sigma}(t,x) \equiv \sigma$, ya hemos comentado que toda solución de (1.11) es independiente de t, con lo que este problema tiene solución no trivial si y sólo si $\mu = 1$ ó $\sigma = 1$ ó $\mu, \sigma > 1$ y $(\mu,\sigma) \in A_0$, donde A_0 es el subconjunto de R^2 descrito en la Sección 1 del Capítulo II. Este resultado permite demostrar de forma análoga a como se demuestra el Teorema 1.3, el siguiente

TEOREMA 1.4 ([SF]).- Supongamos que $g(u) = (\mu - n^2)u^+ - (\sigma - n^2)u^- + \psi(u)$, donde $\psi: R \longrightarrow R$ es una función continua y acotada y $\mu, \sigma > n^2$, con

i) $\dfrac{n}{2\mu^{1/2}} + \dfrac{n+2}{2\sigma^{1/2}} > 1$, $\dfrac{n+2}{2\mu^{1/2}} + \dfrac{n}{2\sigma^{1/2}} > 1$, si n es par, ó

ii) $\dfrac{n+1}{2\mu^{1/2}} + \dfrac{n+1}{2\sigma^{1/2}} > 1$, si n es impar,

y supongamos que se verifican las hipóteisis ii) y iii) del Teorema 2.2, entonces el problema

$$u_t = u_{xx} + \mu u^+ - \sigma u^- + \psi(u) + f(t,x), \quad \text{a. e. } Q,$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in R,$$

$$u(t+T,x) = u(t,x), \quad (t,x) \in \bar{Q},$$

tiene solución.

El Teorema 1.3 generaliza el Teorema 1.4 en el caso particular de que $\mu = \sigma$, ya que entonces a) y b) se reducen a $n^2 \leq \mu = \sigma < (n+1)^2$ y, las condiciones del Teorema 1. 3 no implican la existencia de $\lim_{u \to \pm\infty} \frac{g(u)}{u}$.

4) Brezis y Niremberg, [BrN1], obtienen resultados similares a los del Teorema 1.3 pero cuando $g(\pm\infty) = \mp\infty$. La técnica de demostración, basada en la monotonía del operador, no les permite el estudio de (1.6) con g verficando (A) ($g(\pm\infty) = \pm\infty$).

CAPITULO IV

SOLUCIONES DOBLEMENTE PERIODICAS DE LA ECUACION DE ONDAS

En este Capítulo estudiamos la existencia de solución débil doblemente 2π-periódica de la ecuación de ondas unidimensional semilineal

$$(0.1) \qquad u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(t,x), \qquad (t,x) \in R^2,$$

donde f es una función 2π-periódica en t y en x y $g: R \longrightarrow R$ es una función continua.

Por la Sección 3 del Capítulo I, este problema es equivalente a

$$Lu + g(u) = f, \qquad u \in \text{dom } L,$$

donde L es el operador definido en dicha Sección.

Al ser el núcleo del operador L de dimensión infinita, este operador no es de Fredholm y, consiguientemente, la resolución de este problema no puede hacerse utilizando el Teorema 1.1 del Capítulo I como en los Capítulos anteriores. Para suplir la falta de compacidad en el núcleo se impone a la no linealidad g que sea monótona. Son pocos los resultados que se conocen sin esta hipótesis de monotonía (ver [Co], [H], [Vi]) y todos ellos se limitan a una determinada clase de funciones f.

Si se consideran soluciones periódicas espacialmente homogéneas, esto es, independientes de x, de la ecuación (0.1), entonces el problema se reduce a estudiar soluciones periódicas de la ecuación diferencial ordinaria

$$(0.2) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + g(u) = f(t).$$

Para este problema, los resultados del Capítulo II indican que g puede crecer arbitrariamente en una dirección, digamos $u \geq 0$, mientras que el crecimiento en la dirección $u \leq 0$ debe de ser a lo más lineal y con pendiente acotada. Sin embargo, los resultados que hemos obtenido para (0.1) exigen a g el estar acotada en la dirección $u \leq 0$. Concretando, los términos no lineales que estudiamos en este Capítulo han de verificar

(H-1) g monótona no decreciente y $g(-\infty) > -\infty$.

El problema periódico-Dirichlet para la ecuación (0.1) ha sido estudiado por Bahri y Brezis, [BBr], (ver también [Br2], [BrN2]) imponiendo a g la condición

(H-2) g monótona no decreciente y $|g(u)| \leq \gamma|u| + C$, $u \in \mathbb{R}$,

donde γ y C son constantes positivas con $\gamma < |\lambda_{-1}|$ y λ_{-1} es el primer valor propio negativo del operador de ondas cuando actúa sobre funciones que satisfacen las respectivas condiciones de contorno.

El resultado de [BBr] se puede extender fácilmente al caso doblemente periódico y permite estudiar perturbaciones no lineales de crecimiento a lo más lineal que atraviesen únicamente el valor propio $\lambda_0 = 0$ del operador L.

La condición (H-1) es de otro tipo; de hecho, si g satisface (H-1), puede cruzar valores propios de L diferentes de $\lambda_0 = 0$ y crecer arbitrariamente en la dirección positiva, siempre que permanezca acotada en la negativa, lo que no es necesario cuando g verifica (H-2).

En la Sección 1 establecemos la existencia de solución doblemente 2π-periódica de (0.1) cuando g es acotada. Para ello, demostramos primero la existencia de solución doblemente 2π-periódica de la ecuación perturbada $u_{tt} - u_{xx} + \epsilon u + g(u) = f$ mediante el método Alternativa combinado con la monotonía de g y luego hacemos $\epsilon \longrightarrow 0$.

En la Sección 2, demostramos el resultado general con g verificando (H-1). La demostración se basa en una idea sencilla. Consideramos una sucesión de ecuaciones truncadas para las que es posible asegurar la existencia de solución por los resultados de la Sección 1 y obtenemos una cota uniforme en L^∞ de las soluciones de los problemas truncados. La solución de alguno de estos problemas truncados es también solución del problema original. La técnica usada para la obtención de las cotas está basada en [BBr] combinada con algunas estimaciones adicionales similares a las de [W1].

1. El caso acotado.-

Vamos a estudiar la existencia de solución de la ecuación

$$(1.1) \qquad Lu + g(u) = f, \qquad u \in \text{dom } L,$$

cuando g es acotada.

Para ello necesitamos los siguientes Lemas:

LEMA 1.1.- Supongamos que:

i) g es continua, acotada y monótona no decreciente.

Entonces, la ecuación

(1.2) $\qquad Lu + \epsilon u + g(u) = f, \quad u \in \text{dom } L,$

tiene solución para toda f en $L^2(J)$ y ϵ suficientemente pequeño.

Demostración.-

Con las notaciones de la Sección 3 del Capítulo I, (1.2) es equivalente a

(1.3) $\qquad \epsilon u_0 + Pg(u_0+u_1) = Pf^{**},$

(1.4) $\qquad u_1 + K(I - P)[\epsilon u_1 + g(u_0+u_1) - f] = 0,$

donde $u_0 = Pu$, $u_1 = u - Pu$.

Fijado $u_1 \in \text{Im } L$, estudiaremos en primer lugar la existencia de solución de la ecuación de bifurcación (1.3) en $u_0 \in \ker L$.

Definimos $\phi_{u_1} : \ker L \longrightarrow \ker L$, $u_0 \longrightarrow \epsilon u_0 + Pg(u_0 + u_1)$.

Si u_0 y $v_0 \in \ker L$,

$$(\phi_{u_1}(u_0) - \phi_{u_1}(v_0), u_0 - v_0) = \epsilon|u_0-v_0|_2^2 + (P[g(u_0+u_1)-g(v_0+u_1)], u_0-v_0) =$$

$$= \epsilon|u_0-v_0|_2^2 + (g(u_0+u_1) - g(v_0+u_1), u_0+u_1 - (v_0+u_1)) \geq \epsilon|u_0 - v_0|_2^2,$$

ya que $u_0 - v_0 \in \ker L$ y P es la proyección ortogonal sobre ker L, y g es monótona.

Consiguientemente, ϕ_{u_1} es un operador estrictamente monótono y coercivo, luego (Teorema de Minty-Brouwer, [Bri]), dado $Pf \in \ker L$, existe un único $u_0 \in \ker L$ tal que $\phi_{u_1}(u_0) = Pf$.

Definimos $\psi : \text{Im } L \longrightarrow \ker L$, $u_1 \longrightarrow \psi(u_1) = u_0$, donde u_0 es el único elemento de ker L que verifica $\phi_{u_1}(u_0) = Pf$.

ψ está bien definida; además, si u_1 y $v_1 \in \operatorname{Im} L$,

$$\epsilon\psi(u_1) + Pg(\psi(u_1) + u_1) = Pf,$$

$$\epsilon\psi(v_1) + Pg(\psi(v_1) + v_1) = Pf,$$

luego,

$$\epsilon(\psi(u_1) - \psi(v_1)) + P[g(\psi(u_1) + u_1) - g(\psi(v_1) + v_1)] = 0,$$

y, multiplicando por $\psi(u_1) - \psi(v_1) \in \ker L$, obtenemos

$$0 = \epsilon|\psi(u_1) - \psi(v_1)|_2^2 + (g(\psi(u_1)+u_1)-g(\psi(v_1)+v_1), \psi(u_1)+u_1-(\psi(v_1)+v_1))-$$

$$- (g(\psi(u_1)+u_1)-g(\psi(v_1)+v_1), u_1-v_1) \geq \epsilon|\psi(u_1)-\psi(v_1)|_2^2 - 4\pi G|u_1-v_1|_2,$$

donde $G = \sup_{u\in R} |g(u)| < +\infty$. (De nuevo hemos utilizado la monotonía de g para obtener la última desigualdad).

Así,

$$|\psi(u_1) - \psi(v_1)|_2^2 \leq \frac{4\pi G}{\epsilon}|u_1 - v_1|_2,$$

y el operador ψ es continuo y acotado.

Consideremos ahora (1.4).

Sea T: $\operatorname{Im} L \longrightarrow \operatorname{Im} L$, definido por

$$Tu_1 = -K(I - P)[g(\psi(u_1) + u_1) - f + \epsilon u_1].$$

Puesto que K es compacta (ver [CK2]), g es continua y acotada y ψ es continuo, T también es compacto y

$$(1.5) \qquad |Tu_1|_2 \leq C_1 + \epsilon C_2|u_1|_2.$$

Tomando $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon C_2 < 1$ y $R > \frac{C_1}{1-\epsilon C_2}$, por (1.5), $T(B_R(0) \cap \mathrm{Im}\, L)$ $B_R(0) \cap \mathrm{Im}\, L$, donde $B_R(0)$ denota la bola en $L^2(J)$ de centro 0 y radio R. El Teorema del punto fijo de Schauder implica la existencia de $u_{\epsilon 1} \in$ $\in B_R(0) \cap \mathrm{Im}\, L$ tal que $u_{\epsilon 1} = Tu_{\epsilon 1}$, con lo que el par $(\psi(u_{\epsilon 1}), u_{\epsilon 1})$ es solución de (1.3)-(1.4), es decir, $u_\epsilon = \psi(u_{\epsilon 1}) + u_{\epsilon 1}$ es solución de (1.2).

NOTA.-

Bahri y Brezis, [BBr], demuestran un resultado similar al anterior para el problema periódico-Dirichlet para la ecuación de ondas utilizando métodos variacionales en lugar de los métodos topológicos usados aquí.

LEMA 1.2.- Supongamos que g verifica i) del Lema 1.1 y que

ii) $f \in L^\infty(J)$ admite una descomposición en la forma $f = f^* + f^{**}$, con $f^* \in \mathrm{Im}\, L$ y

$$g(-\infty) + \delta \leq f^{**}(t,x) \leq g(+\infty) - \delta, \quad \text{a. e. } (t,x) \in J, \text{ para algún } \delta > 0.$$

Entonces, (1.1) tiene solución $u \in L^\infty(J)$.

<u>Demostración</u>.-

La demostración de este Lema consiste en probar que si u_ϵ es solución de (1.2), bajo las hipótesis anteriores, $u_\epsilon \in L^\infty(J)$ y $|u_\epsilon|_{L^\infty} \leq C$.

Así, una subsucesión de $\{u_\epsilon\}$, que seguiremos denotando igual, convergerá débilmente en $L^2(J)$ a una función u, $\epsilon \longrightarrow 0$. Se demuestra que $u \in L^\infty(J)$ y que u es solución de (1.1).

Dado que esta demostración se efectua siguiendo los pasos en [BBr], no vamos a detallarla aquí y remitimos a [BBr] para su comprobación.

2. El caso no acotado.-

TEOREMA 2.1.- Supongamos que g verifica (H-1) y se satisface la siguiente condición:

$$
(2.1) \qquad \begin{array}{l} f \in L^{\infty}(J) \text{ admite una descomposición en la forma } f = f^{*} + f^{**} \text{ con} \\ f^{*} \in \operatorname{Im} L \cap L^{\infty}(J),\ g(-\infty)+\delta \leq f^{**}(t,x) \leq g(+\infty)-\delta,\ \text{a.e. } (t,x) \in J, \end{array}
$$

para algún $\delta > 0$.

Entonces, existe al menos una solución $u \in L^{\infty}(J)$ doblemente 2π-periódica de (0.1).

Demostración.-

Dado que $g(-\infty) < -\infty$, podemos suponer que $g(-\infty)=0$ (si no es así, trabajamos con $\tilde{g}(u) = g(u) - g(-\infty)$ y $\tilde{f}(t,x) = f(t,x) - g(-\infty)$).

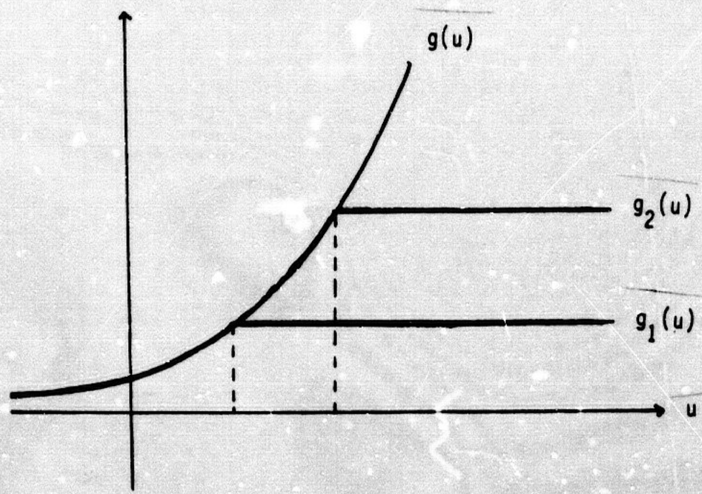
Por tanto, $g(u) \geq 0$, $u \in R$. Además, supondremos que $g(+\infty) = +\infty$ (de otra forma el resultado se obtiene del Lema 1.2).

Como hemos visto en la introducción, el problema doblemente 2π-periódico para la ecuación (0.1) es equivalente a la ecuación

$$
(2.2) \qquad Lu + g(u) = f, \quad u \in \operatorname{dom} L.
$$

Consideremos la sucesión de funciones truncadas

$$
g_n(u) = \min \{g(u), g(n)\}, \quad n = 1, 2, \ldots
$$



y los correspondientes problemas

(2.3) $\qquad Lu + g_n(u) = f.$

Es evidente, que g_n verifica la hipóteis i) del Lema 1.1. Además, como $g_n(+\infty) = g(n)$ y $g(+\infty) = +\infty$, ii) del Lema 1.2 se verifica para algún n suficientemente grande. Entonces, por el Lema 1.2, (2.3) admite una solución $u_n \in L^\infty(J)$, para n suficientemente grande. Concluiremos la demostración probando que existen cotas en L^∞ de u_n independientes de n, es decir, que existe $C > 0$ tal que $|u_n|_{L^\infty} \leq C$, independiente de n. Tomando entonces $n_0 > C$, si $n \geq n_0$, $g_n(u_n) = g(u_n)$ y u_n es solución de (2.2).

Denotaremos por C_i, i=1,2,..., constantes positivas independientes de n. Cada u_n se puede descomponer como $u_n = u_{0n} + u_{1n}$, con $u_{0n} = Pu_n$, $u_{1n} = (I - P)u_n$.

Puesto que las funciones constantes pertenecen al ker L y $g_n(u_n) - f$ está en Im L, se tiene que $(g_n(u_n) - f, 1) = 0$, es decir,

$$\int_J g_n(u_n) = \int_J f,$$

pero como $g_n \geq 0$, $\int_J g_n(u_n) = |g_n(u_n)|_{L^1}$, es decir, (2.4) $\quad |g_n(u_n)|_{L^1} = \int_J f,$

y de (2.3),

(2.5) $\quad |Lu_n|_{L^1} = |g_n(u_n) - f|_{L^1} \leq \int_J f + |f|_{L^1}.$

Del Lema 3.1 del Capítulo I se concluye que

(2.6) $\quad |u_{1n}|_{L^\infty} \leq C|Lu_n|_{L^1} \leq C_1.$

Por otra parte, la condición (2.1) junto con (H-1) implican que existen constantes positivas γ y k tales que

(2.7) $\quad [g(u + \chi) - f^{**}(t,x)]u \geq \gamma|u| - k,$

para $u \in R$, $|\chi| \leq C$, $(t,x) \in J$ y n suficientemente grande. Usando el hecho de que $u_{0n} \in \ker L$, $g_n(u_n) - f^{**} \in \operatorname{Im} L$ y aplicando (2.7) se obtiene

(2.8) $\quad 0 = (g_n(u_n) - f^{**}, u_{0n}) \geq \gamma \int_J |u_{0n}| - (2\pi)^2 k,$

de donde,

(2.9) $\quad |u_{0n}|_{L^1} \leq C_2.$

Ahora bien, $u_{0n} \in \ker L$, luego,

$$u_{0n}(t,x) = \bar{u}_{0n} + p_n(t+x) + q_n(t-x),$$

con p_n, q_n esencialmente acotadas, 2π-periódicas y con valor medio cero,

$$\bar{u}_{0n} = \int_J u_{0n},$$

$$p_n(t) = \int_0^{2\pi} u_{0n}(t-x,x)dx - \bar{u}_{0n},$$

$$q_n(t) = \int_0^{2\pi} u_{0n}(t+x,x)dx - \bar{u}_{0n},$$

luego (2.9) implica

$$(2.10) \qquad |\bar{u}_{0n}|,\ |p_n|_{L^1},\ |q_n|_{L^1} \leq C_3.$$

Por tanto, es suficiente encontrar estimaciones en L^∞ de p_n y q_n independientes de n para concluir la demostración.

Utilizando de nuevo que $g_n(u_n) - f^{**} \in \mathrm{Im}\, L$, se tiene,

$$(2.11) \qquad \int_0^{2\pi} g_n(u_n(t-x,x))dx = \int_0^{2\pi} f^{**}(t-x,x)dx, \quad \text{a. e. } t \in \,]0,2\pi[.$$

y

$$(2.12) \qquad \int_0^{2\pi} g_n(u_n(t+x,x))dx = \int_0^{2\pi} f^{**}(t+x,x)dx, \quad \text{a. e. } t \in \,]0,2\pi[.$$

De (2.6) y (2.10), se tiene

$$(2.13) \qquad u_n(t,x) \geq -C_4 + p_n(t+x) + q_n(t-x), \text{ a. e. } J, \ (C_4=C_1+C_3),$$

y (2.11) junto con la monotonía de g implican

$$\int_0^{2\pi} g_n(-C_4 + p_n(t) + q_n(t-2x))dx \leq 2\pi |f^{**}|_{L^\infty}.$$

Sea $M_n = \sup\operatorname{ess}_{]0,2\pi[} p_n$, ($M_n \geq 0$ ya que $\int_0^{2\pi} p = 0$) y

$$\Sigma_n = \{ x \in \,]0,2\pi[\mid |q_n(x)| \geq \frac{M_n}{2} \}.$$

De (2.10) se deduce que $|\Sigma_n| \leq \frac{2C_3}{M_n}$, donde $|\Sigma_n|$ denota la medida del conjunto Σ_n, y por (2.14),

$$2\pi |f^{**}|_{L^\infty} \geq \int_{\Sigma_n} g_n + \int_{[0,2\pi]-\Sigma_n} g_n \geq g_n(-C_4 + p_n(t) - \frac{M_n}{2})(2\pi - \frac{2C_3}{M_n}),$$

a. e. $t \in]0,2\pi[$, ya que $\int_{\Sigma_n} g \geq 0$.

Por tanto,

$$\min \{ g(n),\ g(-C_4 + \frac{M_n}{2}) \} (2\pi - \frac{2C_3}{M_n}) \leq 2\pi |f^{**}|_{L^\infty},$$

lo que hace que M_n deba permanecer acotado (si no $g(+\infty) \leq 2\pi |f^{**}|_{L^\infty}$ lo cual es absurdo).

Cambiando los papeles de p_n y q_n y trabajando con (2.12) se obtiene también una cota superior independiente de n para q_n. Pongamos pues, $p_n(t),\ q_n(t) \leq C_5$, a. e. t.

Volviendo de nuevo a (2.12) y usando ahora que $u_n(t,x) \leq C_4 + p_n(t+x) + C_5$ se obtiene que $g_n(C_4 + C_5 + p_n(t)) \geq \delta > 0$, a. e. t.

Sea $N_n = \operatorname*{inf\,ess}_{]0,2\pi[} p_n$, $N_n \leq 0$, pues $\int_0^{2\pi} p_n = 0$ y $g_n(C_4 + C_5 + N_n) \geq \delta > 0$, de donde se deduce que N_n ha de permanecer acotado, puesto que $g(-\infty) = 0$, y $|p_n|_{L^\infty} \leq C_6$. Usando un razonamiento similar se deduce la acotación de q_n, con lo que se termina la demostración.

NOTAS.-

1) Cambiando la condición (2.1) apropiadamente, se puede demostrar un teorema similar al anterior con g verificando

(H-3) "g monótona y al menos uno de los límites $g(+\infty)$, $g(-\infty)$ es finito".

2) La hipótesis (2.1) fue formulada por primer vez en [BBr] y [Br2], y, como se menciona allí en un contexto similar, es una condición óptima para la solubilidad de (2.2). En efecto, cuando $g(-\infty) < g(u) < g(+\infty)$,

$u \in R$ (esto es, cuando g es creciente) es fácil ver que (2.1) caracteriza la solubilidad de (2.2).

Sin embargo, cuando $g(-\infty) = g(u)$, $u \leq c$, para algún c (o $g(+\infty)=g(u)$, $u \geq c$), (2.1) es sólo suficiente. Una condición necesaria para la solubilidad en este caso es:

"$f \in L^{\infty}(J)$ admite una descomposición en la forma $f^{*} + f^{**}$ con f^{*} en $\mathrm{Im}^{\dagger}\ L^{\infty}(J)$, $g(-\infty) \leq f^{**}(t,x) \leq g(+\infty)$, a. e. $(t,x) \in J$ ".

3) Ward, [W2], obtiene un resultado relacionado con el Teorema 2.1 pero para términos no lineales que no crucen el valor propio $\lambda_0 = 0$ y de crecimiento a lo más lineal, aunque con pendiente arbitraria.

4) Algunos ejemplos de no linealidades verificando (H-1) son αu^{+}, $\alpha > 1$, u^2u^{+}, e^u, ... Los resultados obtenidos en [BBr], [W2] no se pueden aplicar a estos ejemplos. Sin embargo, el Teorema 2.1 no abarca términos no lineales del tipo $\alpha u^{+} - \beta u^{-}$ $(0 < \alpha, \beta < 1)$, que pueden ser estudiados por los resultados de [BBr] ó [W2].

5) Un hecho fundamental en la demostración del Teorema 2.1 es la existencia de una función positiva en el núcleo de L, esto hace que no sea posible adaptar la prueba a un problema periódico-Dirichlet para la ecuación (0.1) del tipo estudiado en [BBr]. Suponiendo que el problema periódico-Dirichlet se plantee sobre $]0,2\pi[\times]0,\pi[$, la función sen x pertenece al núcleo de $L - \lambda_1 I$, $\lambda_1 = 1$. Parece posible entonces obtener algunos resultados cuando la resonancia es en el primer valor propio positivo, usando la positividad de la función sen x.

6) Aparentemente, la obtención de cotas de la solución está íntimamento ligada con la estructura del núcleo del operador de ondas L. Sería interesante obtener resultados similares para otros problemas semilineales con núcleo infinito dimensional como, por ejemplo, el problema inducido por la ecuación de la viga, $\frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}$; una representación del núcleo de este operador puede verse en [KV]. Recientemente, Bahri y Sánchez, [BS], han obtenido algunos resultados en este sentido.

B I B L I O G R A F I A

[A] R. A. ADAMS, Sobolev spaces. Academic Press, 1975.

[Ah] S. AHMAD, " A resonance problem in which the nonlinearity may grow linearly", Proc. Amer. Math. Soc., 92 (1984), 381-284.

[AAM] H. AMANN, A. AMBROSETTI, G. MANCINI, "Eliptic equations with non-invertible Fredholm linear part and bounded nonlinearities", Math. Z., 158(1978), 179-194.

[Ar1] M. ARIAS, "Existence results on the one-dimensional Dirichlet problem suggested by the piecewise linear case". Proc. Amer. Math. Soc., 97, 1(1986), 121-127.

[Ar2] ----- , "Un problema periódico-Dirichlet para la ecuación $u_t - u_{xx} + n^2 u + g(u) + f(t,x)$", X CEDYA, Univ. Valencia, 1987.

[AMO1] M. ARIAS, P. MARTINEZ AMORES, R. ORTEGA, "Doubly periodic solutions of a forced semilinear wave equation", Proc. Amer. Math. Soc., 101, 1(1987).

[AMO2] ----- . "Some notes on a forced semilinear wave equation". Contributions to nonlinear partial differential equations, vol. II, Díaz and Lions eds., Longman Scientific and Technical. 1987.

[AO] M. ARIAS, R. ORTEGA, "Un problema periódico en el cual la no linealidad crece linealmente en una dirección", Actas X J.H.L.M. (1986).

[BN] G. BACHMAN, N. NARICI, Functional Analysis, Academic Press, 1966.

[BBr] A. BAHRI, H. BREZIS, "Periodic solutions of a nonlinear wave equation", Proc. Roy. Soc. of Edimburg, 85(1980), 313-320.

[BS] A. BAHRI, SANCHEZ, "Periodic solutions of a nonlinear Telegraph equation on one dimesion", Boll. Un Mat. Ital. 5, 18-B (1981), 709-720.

[Br1] H. BREZIS, Análisis Funcional, Alianza editorial, 1984.

[Br2] -----, "Periodic solutions of nonlinear vibrating strings and duality principles", Bull. Amer. Math. Soc, 8(1983), 409-426.

[BrN1] H. BREZIS, L. NIREMBERG, "Charecterizations of ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems" Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, V(1978), 225-326.

[BrN2] ----- , "Forced vibrations for a nonlinear wave equation", Comm. Pure Appl. Math., 31(1978), 1-30.

[CaL] A. CASTRO, A.C. LAZER, "Results on periodic solutions of parabolic equations suggested by elliptic theory", Boll. Un. Mat. Ital., 6 1-B(1982), 1089-1104.

[C] L. CESARI, "Functional analysis, nonlinear differential equations and the alternative method", Nonlinear Functional Analysis and Differential Equations, (L. Cesari, R. Kannan and J. D. Schuur eds.) M. Dekker Inc. New-York, (1977), 1- 197.

[CK] L. CESARI, R. KANNAN,"Existence of solutions of a nonlinear differential equation", Proc. Amer. Math. Soc., 88(1983), 605-613.

[CK2] ----- , "Solutions of nonlinear hyperbolic equations at resonace", Nonlinear Analysis, Th. Meth. and Appl., V6, N8(1982), 605-613.

[CL] E. A. CODINTONG, N. LEVINSONN, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[Co] J. M. CORON, "Periodic solutions of a nonlinear wave equation without assumption of monotonicity", Math. Ann., (1983), 272-285.

[ChH] S.N. CHOW, J. HALE, Methods of bifurcation theory, Springer, 1982.

[D1] E. N. DANCER, "Boundary value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations", Bull. Austral. Math. Soc., 15 (1976), 321-328.

[D2] ----- , "On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differential equations". Proc. Roy. Soc. Edimburg, A76 (1977), 283-300.

[F] S. FUCIK, Solvability of nonlinear equations and boundary value problems, D. Reidel Publishing Company, 1980.

[FK] S. FUCIK, A. KUFNER, Nonlinear Differential equations, Elvesier, 1980.

[GM] R. W. GAINES, J. L. MAWHIN, Coincidence degree and nonlinear differential equations, Lecture Notes in Math., 568, Springer Verlag, 1977.

[H] H. HOFER, "On the range of a wave operator with nonmonotone nonlinearity, Math. Nachr., 106(1982), 327-340.

[KO1] R. KANNAN, R. ORTEGA, "Existence of solutions of $x'' + x + g(x) = p(t)$, $x(0) = x(\pi) = 0$", Proc. Amer. Math. Soc., V. 96, 1(1986), 67-70.

[KO2] ----- , "Periodic solutions of pendulum-type equations", Journal of Differential equations, 59, 1(1985), 123-144.

[KV] N. KRYLOVA, O. VEJVODA, "A linear and weakly nonlinear equation of a beam: The boundary-value problem for free extremities and its periodic solutions", Czechoslovak Math. J., 21, 96(1971), 535--566.

[LSV] O. A. LADYZENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV, N. N. URAL'CEVA, Linear and quasilinear equations of parabolic type, Translations of Math. Monographs, V. 23, A.M.S., 1968.

[LL] E. M. LANDESMAN, A. C. LAZER, "Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance", J. Math. Mech., 19(1970), 609-623.

[LLe] A. C. LAZER, D. E. LEACH, "On a nonlinear two-point boundary value problem", J. Mth. Anal. Appl., 26(1969), 20-27.

[Le] D. E. LEACH, "On Poincaré's perturbation theorem and a Theorem of W. S. Loud", Journal of Differential equation, 7(1970), 34-35.

[Lo] W. S. LOUD, " Periodic solutions of nonlinear differential equations of Dufing type", Proc. U. S. Japan Seminar on Differential and Functional Equations, Benjamin, New York, 1967, 199-224.

[Ll] N. G. LLOYD, Degree theory, Cambridge Univ. Press, 1978.

[Ml] J. L. MAWHIN, Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, CBMS Regional Conf. Series in Math., 40, A.M.S., 1978.

[M2] ----- , "Boundary value problems with nonlinearities having infinite jumps", Comm. Math. Univ. Calorinae, 25, 3(1984), 401-414.

[MW] J. L. MAWHIN, J. R. WARD, "Periodic solutions of some forced Lienard differential equations at resonance", Arch. Math., 41(1983) 337-351.

[MWW] J. L. MAWHIN, J. R. WARD, M. WILLEM, "Necessary and sufficient conditions for the solvability of nonlinear two-point boundary value problems", Proc. Amer. Math. Soc., 93, N4 (1985), 667-674.

[SF] V. STASTNOVA, S. FUCIK, "Weak periodic solutions of the boundary value problem for nonlinear heat equation", Apl. Mat., 24(1979), 284-303.

[SSS] M. SCHECHTER, J. SHAPIRO, M. SHOW, "Solutions of the nonlinear problem Au = N(u) in a Banach space" Trans. A. M. S., 241(1978) 69-78.

[V] O. VEJVODA y alumnos, Partial Differential equations: Time-periodic solutions, Martinus Nijhoff Publishers, 1982.

[W1] J. R. WARD, "Asymptotic conditions for periodic solutions of ordinary differential equations", Proc. Amer. Math. Soc., 81, 3-(1981), 415-420.

[W2] -----, "A wave equation with a possibly jumping nonlinearty" Proc. Amer. Math. Soc., 92(1984), 209-214.

[W3] -----, "Perturbations with some superlinear growth for a classs of second order elliptic boundary value problems", J. Nonlinear Anal., 6(1982), 367-374.

[Wi] M. WILLEM, "Density of the range of potencial operators" Proc. Amer. Math. Soc., 83(1981), 341-344.