FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO

H*-ALGEBRAS NO ASOCIATIVAS REALES.

H*-ALGEBRAS DE MALCEV COMPLEJAS Y REALES.

MIGUEL CABRERA GARCIA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1987

UNIVERSIDAD DE GRANADA

ACTA DEL GRADO DE DOCTOR EN Ciencias Matemáticas

Curso de 1986 a 1987 **Folio 17** **Número 724**

Reunido en el día de la fecha el Tribunal nombrado para el Grado de Doctor de D. Miguel Cabrera García, el aspirante leyó un discurso sobre el siguiente tema, que libremente había elegido: H*-álgebras no asociativas reales. H*-álgebras de Malcev complejas y reales.

Terminada la lectura y contestadas la objecciones formuladas por los Jueces del Tribunal, éste le calificó de APTO "CUM LAUDE"

Granada 2 de Junio de 1987

EL PRESIDENTE,

ARTIBANO MICALI

El Secretario del Tribunal,

JUAN FRANCISCO MENA JURADO

El Vocal,

JOSE ANTONIO CUENCA MIRA

El Vocal,

JAVIER PEREZ GONZALEZ

El Vocal,

JOSE Mª ISIDRO GOMEZ

Firma del Graduando.

INVESTIDURA . . { En el día de la fecha se ha conferido a D. .... el Grado de Doctor en la Facultad de .... conforme a lo prevenido en las disposiciones vigentes.

Granada ...... de .... de 19....

EL DECANO,

CERTIFICO : Que el Acta que antecede concuerda con la del expediente del interesado remitida a la Secretaría de la Universidad.

Granada ...... de .... de 19....

El Catedrático Secretario,

Vº. Bº.
EL DECANO

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Secretaría General

La presente fotocopia corresponde al original a que se refiere, quedando COMPULSADA Y CONFORME.

Granada 25 de 11 de 1988

Por El Secretario General

UNIVERSIDAD DE GRANADA - Sección de Personal -

Tesis Doctoral dirigida por los Doctores Juan Martinez Moreno y Angel Rodriguez Palacios, Profesores del Departamento de Análisis Matemático, defendida por D. Miguel Cabrera García el día 2 de Junio de 1987, ante el Tribunal formado por los Profesores: Presidente, D. M. Artibano Micali; Vocales, D. Jose María Isidro Gomez, D. Javier Pérez Gonzalez, D. Jose Antonio Cuenca Mira; Secretario, Juan Francisco Mena Jurado. Obtuvo la calificación de Apto "cum laude".

A Ana Mari

I N D I C E

INTRODUCCION

INTRODUCCION

Un poco de Historia de las H*-álgebras.

Un álgebra no asociativa real o compleja A cuyo espacio vectorial subyacente es un espacio de Hilbert, cuyo producto escalar notaremos $(\,/\,)$, dotada de una involución de álgebra $*$ verificando

$$(xy\,/\,z) = (x\,/\,zy^*) = (y\,/\,x^*z)$$

para cualesquiera que sean x, y, z elementos de A, diremos que es una *H*-álgebra*.

Una H*-álgebra A se dirá de *anulador cero* si el conjunto

$$An(A) := \{\, x \in A \;:\; xA = Ax = 0 \,\}$$

llamado *el anulador de* A, se reduce a cero.

Una H*-álgebra A se dirá *topológicamente simple* si A no es de producto cero y 0 y A son los únicos ideales cerrados de A.

El concepto de H*-álgebra asociativa compleja fue introducido por Ambrose en [2] y el desarrollo de su Teoría constituye una pequeña pero clásica parcela de la Teoría General de las álgebras de Banach (ver [38], [12] y [34]).

Ambrose determina completamente la estructura de las H*-álgebras asociativas complejas estableciendo los siguientes tres teoremas de Wedderburn:

a) Toda H-álgebra asociativa compleja A es la suma directa ortogonal de su anulador An(A) y de su complemento ortogonal el cual es una H*-álgebra asociativa compleja de anulador cero.*

b) Toda H-álgebra asociativa compleja de anulador cero es el cierre de la suma directa ortogonal de ideales que son H*-álgebras asociativas complejas topológicamente simples.*

c) Toda H-álgebra asociativa compleja topológicamente simple es, salvo un múltiplo positivo del producto escalar, la H*-álgebra de los operadores de Hilbert-Schmidt en un conveniente espacio de Hilbert complejo.*

Es de notar que la prueba de Ambrose de los dos primeros teoremas de Wedderburn es válida para H*-álgebras asociativas reales, por lo que quedaba como problema abierto la determinación de las H*-álgebras asociativas reales topológicamente simples. Dicho problema ha sido resuelto recientemente por Balachandran y Swaminathan [11] estableciendo que *una tal álgebra no es otra que la H*-álgebra de los operadores de Hilbert-Schmidt en un espacio de Hilbert real, complejo o cuaterniónico.*

Con mayor o menor éxito se ha intentado extender la Teoría de Ambrose a las más familiares clases de álgebras no asociativas. En esta dirección los primeros trabajos que aparecen se dedican al estudio de las H*-álgebras de Lie (ver [45 y 46], [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10], [23, 24 y 25], [47], [1]). Para ellas se demuestran los análogos a los Teoremas a) y b) de Ambrose (ver [45] para el caso complejo y [9] para el caso real). Schue [45 y 46] establece un teorema análogo al c) suponiendo que la H*-álgebra de Lie compleja topológicamente simple sea separable. El análogo real se debe a Balachandran [9] y Unsain [47].

La Teoría de estructura de las H*-álgebras de Jordan complejas fue iniciada por Viola y Rema [48 y 49] quienes consiguen teoremas análogos al a) y al b) e inician la descripción de las H*-álgebras de Jordan complejas topológicamente simples.

El estudio de las H*-álgebras alternativas complejas fue llevado a cabo por Pérez de Guzman [36 y 37] estableciendo los teoremas a) y b) en su nuevo contexto, y probando que, *salvo un múltiplo positivo del producto escalar, no existe más H*-álgebra alternativa no-asociativa compleja topológicamente simple que la H*-álgebra de los octoniones complejos.*

Cuenca y Rodríguez [15, 16 y 18] extienden los Teoremas a) y b) a H*-álgebras no asociativas complejas arbitrarias. Ellos dan también una total descripción de las H*-álgebras de Jordan complejas topológicamente simples, con lo que terminan la Teoría de estructura de tales álgebras, y obtienen un teorema de clasificación para H*-álgebras de Jordan no conmutativas complejas topológicamente simples. El estudio de las H*-álgebras reales de Jordan no conmutativas ha sido hecho muy recientemente por Cuenca y Sánchez [19].

Los argumentos empleados por Cuenca y Rodríguez en la demostración de los Teoremas de estructura a) y b) para H*-álgebras complejas no dependen de que el cuerpo base sea $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, por lo que se puede afirmar que el problema de la descripción de las H*-álgebras queda reducido al caso topológicamente simple. Un grán avance en esta línea lo constituye la prueba de la "unicidad esencial" de esta estructura llevada a cabo por Cuenca y Rodríguez en [17]. En concreto, ellos prueban que:

Una vez que un álgebra compleja A haya sido dotada de estructura de H-álgebra compleja topológicamente simple, entonces cualquier otra estructura de H*-álgebra sobre A es *-isomorfa y, salvo un múltiplo escalar positivo, isométrica a la de partida.*

Nuestra aportación al estudio de las H*-álgebras reales no asociativas.

El objetivo prioritario del Capítulo I de la presente Memoria es establecer la unicidad esencial de la estructura de H*-álgebra real topológicamente simple. Este problema viene motivado no solamente por lo anteriormente expuesto, sino también por precedentes muy particulares que aparecen en la literatura (a título de ejemplo vease [11 ; Proposición 2]) .

En la Sección 1 recopilamos los resultados básicos sobre H*-álgebras complejas conseguidos en [15 , 17 y 18] que nos van a ser de utilidad en nuestro desarrollo. Algunos de dichos resultados son válidos, sin cambio en la demostración, en el caso real, por lo que se enuncian sin alusión al cuerpo base. Sin embargo no es este el caso del Teorema de estructura de isomorfismos entre H*-álgebras complejas y sus consecuencias cuya demostración utiliza esencialmente técnicas complejas. Nosotros presentamos aquí dicho teorema y sus consecuencias con algunos perfeccionamientos no triviales, que nos van a ser de utilidad para la consecución del objetivo prioritario en este Capítulo.

Si A es una H*-álgebra real, entonces su complexificación $A_{\mathbb{C}}$ se puede dotar de manera natural de estructura de H*-álgebra compleja (ver Sección 3) y la aplicación τ de $A_{\mathbb{C}}$ en $A_{\mathbb{C}}$ definida por

$$\tau(x+iy) := x^* + iy^*$$

es un antiisomorfismo lineal de cuadrado la identidad. A una tal aplicación sobre una H*-álgebra compleja B la llamaremos *involución lineal* y diremos que B es τ-*topológicamente simple* si B no es de producto cero y 0 y B son los únicos ideales cerrados de B invariantes por τ. No es dificil probar (Proposición 3.1) que:

Si A es una H-álgebra real topológicamente simple su complexificación, dotada de la involución lineal τ anteriormente definida, es τ-topológicamente simple. Además τ es isométrica y conmuta con la involución de H*-álgebra $*$.*

Recíprocamente (Proposición 3.2) :

Si B es una H-álgebra compleja dotada de una involución lineal isométrica τ que conmuta con $*$, tal que B es τ-topológicamente simple, entonces*

$$A := \{ x \in B : \tau(x) = x^* \}$$

es una H-álgebra real topológicamente simple para la restricción de las operaciones de B y $B = A_{\mathbb{C}}$.*

Estos últimos resultados prueban la existencia de una correspondencia biyectiva entre H*-álgebras reales topológicamente simples y H*-álgebras complejas dotadas de una involución lineal isométrica τ conmutando con la involución de H*-álgebra para la que son τ-topológicamente simples. Este hecho pone de manifiesto el interés que para nosotros tiene el estudio de las H*-álgebras complejas con una involución lineal y muy particularmente la descripción de las parejas (B,τ) donde B es una H*-álgebra compleja y τ es una involución lineal en B tal que B es τ-topológicamente simple. Este es el objetivo de la Sección 2 donde se prueba (Teorema 2.6) que:

Si B es una H-álgebra compleja dotada de una involución lineal τ tal que B es τ-topológicamente simple, entonces o bien B es una H*-álgebra compleja topológicamente simple o bien existen una H*-álgebra compleja topológicamente simple C, un automorfismo "particularmente bueno" de C y un número real positivo λ a partir de los cuales la H*-álgebra compleja B con involución lineal τ es perfectamente descriptible.*

Los hechos hasta aquí referidos nos permiten obtener el siguiente resultado (Teorema 3.4 y Corolario 3.6) que era previamente conocido en el caso particular de H*-álgebras de Lie ([9; Corolario 1.2], [23; Teorema 2] o [47; Teorema 1.3.1]).

Sea A una H-álgebra real topológicamente simple. Entonces el centroide de A es isomorfo a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. En el primer caso la complexificación de A es una H*-álgebra compleja topológicamente simple. En el segundo caso A es ella misma una H*-álgebra compleja topológicamente simple vista como H*-álgebra real.*

De lo dicho hasta ahora se deduce que, si se fija una clase de álgebras no asociativas definida por identidades multilineales, el problema de la descripción de las H*-álgebras reales topológicamente simples de la clase fijada se reduce a la descripción de las H*-álgebras complejas topológicamente simples de dicha clase y a la determinación de las involuciones lineales sobre estas últimas que conmutan con la involución de H*-álgebra. Basandonos en este hecho nosotros damos una nueva y simple demostración de los resultados de Balachandran y Swaminathan anteriormente citados sobre la descripción de las H*-álgebras asociativas reales topológicamente simples (Sección 5).

Concluimos nuestros comentarios al Capítulo I reseñando el contenido de la Sección 4 donde se cubre el objetivo fundamental de dicho capítulo, el establecimiento de la unicidad esencial de la estructura de H*-álgebra real topológicamente simple (Teorema 4.1):

Sea A una H-álgebra real topológicamente simple. Cualquier otra estructura de H*-álgebra real sobre A es *-isomorfa y, salvo un múltiplo real positivo, isométrica a la de partida.*

Al igual que en el caso complejo (vease la Sección 1) la demostración del Teorema anterior se basa en los siguientes hechos:

1) (Teorema 4.2) *Dos H*-álgebras reales de anulador cero isomorfas son *-isomorfas.*

2) (Corolario 4.5) *Todo *-isomorfismo entre H*-álgebras reales topológicamente simples es, salvo un múltiplo real positivo, una isometría.*

Un poco de Historia de las álgebras de Malcev.

Malcev en 1955 observa que si A es un álgebra alternativa entonces el *álgebra artisimetrizada* A^- (el álgebra obtenida usando el conmutador de dos elementos de A como nuevo producto) satisface las siguientes identidades

i) $xy = -yx$

ii) $J(x, y, xz) = J(x, y, z)x$

donde

$$J(x, y, z) := (xy)z + (yz)x + (zx)y$$

Las álgebras que satisfacen las identidades i) y ii) se conocen con el nombre de *álgebras de Malcev*. Tal y como aparece motivado el nacimiento de las álgebras de Malcev, es claro que las subálgebras del álgebra antisimetrizada de cualquier álgebra alternativa están englobadas en la clase de las álgebras de Malcev. El problema, ya planteado por Malcev, de si toda álgebra de esta clase puede ser vista como una subálgebra del álgebra antisimetrizada de un álgebra alternativa, hasta el momento, solo ha sido resuelto en casos particulares [21]. Por lo que no se cuenta en la actualidad con un resultado para álgebras de Malcev análogo al Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt que asegura que la clase de las álgebras de Lie está constituida única y exclusivamente por aquellas álgebras que pueden ser vistas como subálgebras del álgebra antisimetrizada de un álgebra asociativa.

Ya que toda álgebra asociativa es un álgebra alternativa, la clase de las álgebra de Malcev aparece como una extensión natural de la clase de las álgebras de Lie.

Unas álgebras alternativas muy particulares, cuyo estudio fué motivado por un problema clásico de Hurwitz, son las *álgebras de composición*: álgebras no asociativas con unidad sobre un cuerpo de característica distinta de dos, dotadas de una forma cuadrática no degenerada n que verifica, para cualesquiera x, y elementos del álgebra

$$n(xy) = n(x)\, n(y)$$

Una excelente exposición de la Teoría de las álgebras de composición, las cuales constituyen hoy en día un capítulo importante dentro de la Teoría de las álgebras no asociativas, puede verse en [50]. La descripción de las álgebras de composición es debida fundamentalmente a los trabajos de Albert, Kaplansky y Jacobson; todas las álgebras de composición son alternativas y finito-dimensionales, concretamente responden a las dimensiones: 1, 2, 4 y 8. Las álgebras de composición ocho-dimensionales se conocen con el nombre de *álgebras de Cayley-Dickson*, ya que fue Cayley en 1945 el primero en presentar un álgebra de composición real ocho-dimensional con división, cuyo prototipo fue posteriormente generalizado por Dickson.

Las álgebras de Cayley-Dickson son álgebras alternativas no-asociativas centrales simples y, salvo isomorfismo, únicamente existe un álgebra de Cayley-Dickson compleja $C(\mathbb{C})$ y dos álgebras de Cayley-Dickson reales $C(\mathbb{R})$ y $\mathbb{O}$ (los octoniones de división reales). Damos en la Sección 6 una concreta materialización de éstas álgebras utilizando la forma matricial de Zorn, lo que aprovechamos para mostrar de una forma vistosa como pueden ser dotadas de estructura de H*-álgebra.

Zorn [43 ; Teorema 3.17] obtiene la descripción de las álgebras alternativas finito-dimensionales centrales simples probando el siguiente resultado que evidencia el carácter exclusivo que tienen las álgebras de Cayley-Dickson, al menos en el contexto finito-dimensional.

Toda álgebra alternativa no-asociativa finito-dimensional central simple es un álgebra de Cayley-Dickson.

El primer estudio sistemático de las álgebras de Malcev fué llevado a cabo por Sagle en [41], donde hace notar que el álgebra antisimetrizada C^- de un álgebra de Cayley-Dickson C sobre $\mathbb{K}$ es un álgebra de Malcev no-Lie y el álgebra cociente de C^- por su ideal anulador $\mathbb{K}1$ es un álgebra de Malcev no-Lie simple (nos referiremos a tal álgebra $C^-/\mathbb{K}1$ como *el álgebra de Malcev asociada al álgebra de Cayley-Dickson* C). Sagle conjetura que toda álgebra finito-dimensional de Malcev no-Lie simple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero $\mathbb{K}$ es isomorfa al álgebra de Malcev asociada a la única álgebra de Cayley-Dickson sobre $\mathbb{K}$. Sagle responde afirmativamente a su conjetura en [42] bajo la hipótesis adicional de que el álgebra contenga un elemento cuyo operador de multiplicación sea no nilpotente. Loos en [33] prueba que esta hipótesis es innecesaria, quedando probada así la validez de la conjetura de Sagle. El problema de la descripción de las álgebras de Malcev finito-dimensionales centrales simples sobre un cuerpo de característica cero fue resuelto por Kuz'min en [31], quien posteriormente extiende sus resultados a cuerpos de característica distinta de dos y tres en [32] estableciendo el siguiente resultado (Teorema 6.8)

Las únicas álgebras de Malcev no-Lie finito-dimensionales centrales simples sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ *de característica distinta de dos y tres son, salvo isomorfismo, las álgebras de Malcev asociadas a las álgebras de Cayley-Dickson sobre* $\mathbb{K}$.

Aprovechando la concreta descripción que damos de las álgebras de Cayley-Dickson compleja y reales, presentamos, en la Sección 6, las álgebras de Malcev asociadas a las álgebras de Cayley-Dickson compleja y reales dotadas de su estructura natural de H*-álgebra.

Nuestra aportación a las H*-álgebras de Malcev.

El principal resultado del Capítulo II es la determinación de las H*-álgebras de Malcev no-Lie complejas topológicamente simples, problema éste que está lo suficientemente motivado, por una parte por el conocimiento actual de las H*-álgebras de Lie y de las H*-álgebras alternativas anteriormente comentado y por otra por el hecho de contar con la descripción de las álgebras de Malcev finito-dimensionales simples.

Nuestro resultado principal (Teorema 7.1) afirma que:

Esencialmente, la única H-álgebra compleja de Malcev no-Lie topológicamente simple es la H*-álgebra de Malcev asociada a la H*-álgebra de Cayley-Dickson compleja* $C(\mathbb{C})$.

La estrategia que seguimos para la demostración de nuestro resultado principal consiste en probar que toda H*-álgebra compleja de Malcev no-Lie topológicamente simple A (salvo un múltiplo positivo del producto escalar, si fuese necesario) satisface la identidad

$$(1) \qquad L_x^2 = (x / x^*)\, I - x \otimes x^* \qquad \forall\, x \in A,$$

donde L_x denota el operador de multiplicación izquierda por x en el álgebra A , I denota el operador identidad en A y, como es usual, $x\otimes x^*$ denota el operador lineal de A definido para todo elemento y de A por

$$(x\otimes x^*)(y) = (y/x^*)x .$$

El camino que recorremos para la obtención de este resultado tiene como pilar básico la descomponibilidad de Cartan de las H*-álgebras complejas de Lie probada por Schue en [45 y 46], hecho que nos ha permitido demostrar (Proposición 7.6) :

Sea A una H-álgebra compleja de Malcev con involución de H*-álgebra continua y sea u un elemento simétrico de A. Entonces A es la suma hilbertiana de los autoespacios del operador L_u.*

La demostración de que esta descomposición, en el caso de ser A una H*-álgebra compleja de Malcev no-Lie topológicamente simple y u un elemento simétrico no nulo de A , se reduce (Lema 7.7) a tres autoespacios de la forma

$$A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \qquad (\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0 \text{ conveniente})$$

se lleva a cabo mediante una laboriosa adaptación a nuestro ambiente, apriorísticamente infinito-dimensional, de los argumentos utilizados por Sagle en [42] en el caso finito-dimensional, con respecto a los cuales contamos sin embargo con la ventaja de que los subespacios que intervienen en nuestra descomposición son de naturaleza más sencilla que los que aparecen en la descomposición algebráica de [42].

La deseada identidad (1) se obtiene ahora sin excesiva dificultad una vez que probamos que A_0 es unidimensional (Lema 7.9) para lo que utilizamos la Teoría de Gelfand así como el hecho de que la única posibilidad de desconexión de las esferas en los espacios normados reales se presenta en dimensión uno.

Considerando el espacio vectorial $\mathbb{C}\times A$ con producto, involución y producto escalar definidos por

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta + (x/y^*), \beta x + \alpha y + xy)$$

$$(\alpha, x)^* = (\bar{\alpha}, x^*)$$

$$((\alpha, x)/(\beta, y)) = \alpha\bar{\beta} + (x/y) ,$$

$\mathbb{C}\times A$ se nos convierte en una H*-álgebra que en vista de la identidad (1) resulta ser alternativa no-asociativa y de composición, de donde fácilmente se sigue nuestro resultado principal.

Una muestra de la potencia de nuestro resultado principal es el hecho de que nos permite dar una nueva y fácil demostración del Teorema de estructura de las H*-álgebras complejas alternativas topológicamente simples (Teorema 8.2).

Finalizamos el Capítulo II aprovechando nuestro resultado principal y la Teoría desarrollada en el Capítulo I de las H*-álgebras reales para dar una descripción de las H*-álgebras reales de Malcev no-Lie topológicamente simples y de las H*-álgebras reales alternativas topológicamente simples:

(Teorema 8.3) *Toda H^*-álgebra real de Malcev no-Lie topológicamente simple es, esencialmente una de las siguientes:*

i) La realización de la H^*-álgebra compleja de Malcev asociada a $C(\mathbb{C})$.

ii) La H^*-álgebra real de Malcev asociada a $C(\mathbb{R})$.

iii) La H^*-álgebra real de Malcev asociada a $\mathbb{O}$.

(Teorema 8.4) *Toda H^*-álgebra real alternativa no-asociativa topológicamente simple es, esencialmente:*

i) La realización de la H^*-álgebra compleja $C(\mathbb{C})$.

ii) La H^*-álgebra real $C(\mathbb{R})$.

iii) La H^*-álgebra real $\mathbb{O}$.

Agradecimientos.

Deseo finalmente hacer constar mi más profundo agradecimiento:

Al profesor Angel Rodríguez Palacios cuyas brillantes y certeras orientaciones, así como su abnegada y paciente dirección, han hecho posible la realización de este trabajo.

Al profesor Juan Martínez Moreno por su constante labor de dirección así como por las innumerables horas de trabajo compartido a lo largo de muchos años.

Al profesor Juan Francisco Mena Jurado que, aparte de leer con gran cuidado la presente Memoria contribuyendo con útiles sugerencias al perfeccionamiento de ella, ha estado siempre dispuesto a escuchar cualquier resultado positivo (o no) en el período de realización de la misma.

A los restantes compañeros y amigos del Departamento de Análisis Matemático por su ayuda y estímulo.

Granada, Abril de 1987

Miguel Cabrera García.

C A P I T U L O I

H*-ALGEBRAS COMPLEJAS CON INVOLUCION LINEAL

Y

H*-ALGEBRAS REALES

CAPITULO I

H*-ALGEBRAS COMPLEJAS CON UNA INVOLUCION LINEAL Y H*-ALGEBRAS REALES

1. PRELIMINARES.

En esta Sección recopilamos los principales resultados sobre H*-álgebras no asociativas complejas conseguidos por Cuenca y Rodriguez (ver [15, 17 y 18]). Algunos de ellos son válidos, sin cambio en la demostración, también en el caso real, por lo que se enunciarán sin alusión al cuerpo base. No es este el caso del Teorema de estructura de isomorfismos entre H*-álgebras complejas y sus consecuencias (cuya demostración utiliza esencialmente técnicas complejas) y que aquí referimos con algunos perfeccionamientos novedosos que se necesitarán en la Sección 4.

1. DEFINICION. Una *involución de espacio vectorial* sobre un espacio vectorial real o complejo A es una aplicación $*: x \to x^*$ de A en A verificando

i) $(x+y)^* = x^* + y^*$

ii) $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$

iii) $x^{**} = x$

para cualesquiera que sean el escalar α y $x, y \in A$, donde $\bar{\alpha}$ denota el escalar conjugado de α. Si además A es un álgebra y $*$ verifica

iv) $(xy)^* = y^* x^*$

diremos que $*$ es una *involución de álgebra* en A.

2. DEFINICION. Una *H*-álgebra* es un álgebra no asociativa real o compleja A, cuyo espacio vectorial subyacente es un espacio de Hilbert, junto con una involución de álgebra $*$ tal que

$$(xy/z) = (x/zy^*) = (y/x^*z)$$

para x, y, z elementos de A.

3. DEFINICION. El *anulador* de un subconjunto S de un álgebra no asociativa A es definido por

$$An(S) := \{ x \in A \ : \ xS = 0 = Sx \}$$

4. PROPOSICION ([18 ; Proposición 2]). *Sea A una H*-álgebra. Entonces:*

i) *A es un álgebra normada, es decir, el producto de A es continuo.*

ii) *Para todo ideal cerrado M de A se verifica que $M^{\perp}$ es un ideal cerrado de A.*

iii) *Para todo ideal cerrado $*$-invariante M de A, se verifica que $An(M) = \overline{M^2}^{\perp}$.*

Si además A es de anulador cero, entonces:

iv) *Los ideales cerrados de A son $*$-invariantes.*

v) *Los ideales cerrados de A son H*-álgebras con anulador cero.*

vi) *Para todo ideal cerrado M de A se verifica que $An(M) = M^{\perp}$.*

vii) *$*$ es isométrica: $(x/y) = (y^*/x^*)$ $\forall x, y \in A$.*

El siguiente Teorema de estructura permite reducir el estudio de las H*-álgebras a la clase de las H*-álgebras de anulador cero.

5. TEOREMA ([15 ; Primer Teorema de Estructura 1-2-40]). *Toda H^*-álgebra A es expresable como suma directa ortogonal*

$$A = A_1 \oplus A_2$$

donde

a) $A_1 = \overline{A^2}$ *y* $A_2 = An(A)$ *son ideales cerrados de* A *.*

b) A_2 *es de producto cero y* $*$*-invariante.*

c) A_1 *con el producto escalar inducido por el de* A *y conveniente involución es una H^*-álgebra de anulador cero.*

d) Si la involución de A *es continua entonces* A_1 *es* $*$*-invariante y consiguientemente una H^*-subálgebra de A.*

Un segundo teorema de estructura se puede establecer permitiendonos concentrar nuestro estudio en un tipo muy particular de H*-álgebras de anulador cero, que como veremos reconstruyen a éstas.

6. DEFINICION. Una H*-álgebra A es una *H^*-álgebra topológicamente simple* si A no es de producto cero y 0 y A son los únicos ideales cerrados de A . Claramente toda H*-álgebra topológicamente simple tiene anulador cero.

7. TEOREMA ([15 ; Segundo Teorema de Estructura] ó [18 ; Teorema 1]). *Sea A una H^*-álgebra no nula de anulador cero. Se tiene entonces*

$$A = \overline{\oplus M_\lambda}$$

donde $\{M_\lambda\}_\lambda$ *es la familia de los ideales cerrados minimales de A. Estos ideales con H^*-subálgebras topológicamente simples.*

Si A y B son dos H*-álgebras con anulador cero notaremos $BL(A,B)$ al espacio normado de todas las aplicaciones lineales y continuas de A en B. Si $F \in BL(A,B)$ entonces $F^* \in BL(A,B)$ denotará la aplicación definida por

$$F^*(x) := (F(x^*))^* \qquad \forall x \in A$$

mientras que $F^\bullet \in BL(B,A)$ denotará el operador adjunto de F, esto es, $F^\bullet$ viene determinado por la condición

$$(F(x) / y) = (x / F^\bullet(y)) \qquad \forall x \in A \quad , \quad y \in B$$

El mismo argumento que usaremos en la demostración de la Proposición 2.3 prueba que los isomorfismos (antiisomorfismos) entre H*-álgebras complejas de anulador cero son automáticamente continuos. Hecho que utilizaremos en lo sucesivo sin comentario alguno.

8. DEFINICION. Sean A y B dos H*-álgebras de anulador cero. Un isomorfismo (antiisomorfismo) F de A en B se dirá ser un *$*$-isomorfismo* (*$*$-antiisomorfismo*) cuando $F^* = F$, esto es

$$F(x^*) = (F(x))^* \qquad \forall x \in A$$

9. DEFINICION. Un automorfismo Ψ de una H*-álgebra compleja con anulador cero A es un *automorfismo $\cdot$-positivo* si verifica:

$$\Psi = (\Psi^{-1})^* \qquad \text{y} \qquad sp(\Psi) \subset \mathbb{R}^+$$

Es claro que si Ψ es un automorfismo $\cdot$-positivo de A, también Ψ^{-1} es un automorfismo $\cdot$-positivo de A. Si $F: A \to B$ es un $*$-isomorfismo entre las H*-álgebras complejas de anulador cero A y B, y Ψ es un automorfismo $\cdot$-positivo de B, entonces, es también claro que $F^{-1}\Psi F$ es un automorfismo $\cdot$-positivo de A. La siguiente proposición resume las propiedades de los automorfismo $\cdot$-positivos que utilizaremos.

10. PROPOSICION. ([17 ; Corolarios 2.3 y 2.5]). *Sea* A *una H*-álgebra compleja con anulador cero, entonces:*

i) La aplicación $D \to \exp(D)$ *es un homeomorfismo del conjunto de todas las derivaciones continuas* D *de* A *tales que* $D^* = -D$ *en el conjunto de los automorfismos* $\cdot$*-positivos de* A .

ii) Si Ψ *es un automorfismo* $\cdot$*-positivo de* A *, entonces* $\Psi^{\cdot} = \Psi$.

Si A es una H*-álgebra notaremos A^0 a la *H*-álgebra revertida*, ésta se diferencia de A únicamente en el producto, que es el *producto revertido* del producto de A

$$x_{\star} y := y x \qquad\qquad \forall x , y \in A$$

Es claro que A^0 es de anulador cero ó topológicamente simple si, y sólo si, A lo es.

Puesto que todo antiisomorfismo de A sobre B puede ser considerado como un isomorfismo de A sobre B^0 , podemos cambiar en el Teorema 3.3 de [17] la palabra "isomorfismo" por la palabra "antiisomorfismo", por lo que podemos enunciar el siguiente *Teorema de descomposición para isomorfismos (antiisomorfismos) de H*-álgebras complejas con anulador cero.*

11. TEOREMA. *Sean* A *y* B *H*-álgebras complejas con anulador cero. Si* F *es un isomorfismo (antiisomorfismo) de* A *sobre* B *, entonces existe una única terna* (G, Ψ_1, Ψ_2) *, con* G **-isomorfismo (*-antiisomorfismo) de* A *sobre* B *y* Ψ_1 Ψ_2 *automorfismos* $\cdot$*-positivos de* A *y* B *respectivamente, tal que*

$$F = G\,\Psi_1 = \Psi_2\, G$$

Para un isomorfismo F, la primera descomposición $F=G\Psi_1$ se prueba en [17 ; Teorema 3.3], y la segunda es una consecuencia fácil de la primera. En efecto, aplicando la primera descomposición al isomorfismo F^{-1} de B sobre A, se sigue que F se escribe de forma única como $F=\Psi_2 G'$, donde G' es un $*$- isomorfismo de A sobre B y Ψ_2 es un automorfismo $*$-positivo de B. Ahora bien, como $F=G'(G'^{-1}\Psi_2 G')$, la unicidad de la primera descomposición implica que $G=G'$.

Notemos que la existencia de isomorfismos (antiisomorfismos) entre H*-álgebras complejas de anulador cero que no son $*$- isomorfismos ($*$- antiisomorfismos) se puede presentar. Así, en la H*-álgebra compleja topológicamente simple $M_2(\mathbb{C})$ de las matrices complejas de orden dos, el isomorfismo determinado por

$$F\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

no es un $*$- isomorfismo.

El siguiente resultado obtenido en [17 ; Corolario 3.4] para isomorfismos puede enunciarse incluyendo a los antiisomorfismos como sigue

12. **PROPOSICION.** *Sean A y B H*-álgebras complejas topológicamente simples. Existe un número real positivo K ($K=1$ si $A=B$) tal que para todo isomorfismo o antiisomorfismo F de A sobre B se verifica que*

$$F^{*} = K(F*)^{-1}$$

Demostración. Sea K el número real positivo que hace cierto el enunciado para isomorfismos. Teniendo en cuenta que los antiisomorfismos de A sobre B pueden ser vistos como isomorfismos de A sobre B^0, podemos asegurar la existencia de un número real K' que hace válido el enunciado para antiisomorfismos. Para verificar la igualdad $K = K'$, hagamos notar que si A, B y C son H*-álgebras complejas topológicamente simples y $G \in BL(A,B)$, $H \in BL(B,C)$ son tales que, para convenientes números reales positivos $\lambda(G)$ y $\lambda(H)$, verifican

$$G^{\bullet} = \lambda(G)\,(G^*)^{-1} \quad \text{y} \quad H^{\bullet} = \lambda(H)\,(H^*)^{-1}$$

entonces tenemos que

$$(HG)^{\bullet} = G^{\bullet}H^{\bullet} = \lambda(G)\,\lambda(H)\,(G^*)^{-1}(H^*)^{-1} =$$

$$= \lambda(G)\,\lambda(H)\,(H^*G^*)^{-1} = \lambda(G)\,\lambda(H)\,((HG)^*)^{-1}$$

y por consiguiente, existe un número real positivo $\lambda(HG)$ tal que

$$(HG)^{\bullet} = \lambda(HG)\,((HG)^*)^{-1}$$

verificandose además la relacción

$$\lambda(HG) = \lambda(G)\,\lambda(H)$$

Ahora, si F es un antiautomorfismo de A, tomando $B = C = A$ y $G = H = F$ se deduce de la igualdad anterior que $1 = K'^2$, y por consiguiente, $K' = 1$ si $A = B$. Finalmente, si A y B son simultáneamente isomorfas y antiisomorfas, entonces tomando G un isomorfismo de A sobre B y H un antiautomorfismo de B obtenemos $K = K'$.

13. COROLARIO. *Sean A y B H*-álgebras complejas topológicamente simples. Existe un número real positivo L tal que para todo *-isomorfismo o *-antiisomorfismo F de A sobre B se verifica que LF es una isometría.*

Demostración. Tomese $L = K^{-1/2}$, donde K es el número real positivo que aparece en la proposición anterior.

El Teorema 11 junto con el Corolario anterior permiten afirmar:

Si A es una H-álgebra compleja topológicamente simple entonces cualquier otra estructura de H*-álgebra compleja sobre A es *-isomorfa y, salvo un múltiplo real positivo, isométrica a la de partida.*

2. H*-ALGEBRAS COMPLEJAS CON UNA INVOLUCION LINEAL.

1. DEFINICION. Una *involución lineal* sobre un álgebra A es una aplicación $\tau : x \to \tau(x)$ de A en A que es lineal y verifica:

$$\tau^2 = I \quad \text{y} \quad \tau(xy) = \tau(y)\,\tau(x) \qquad \forall\, x\,,\, y \in A$$

2. DEFINICION. Sea A una H*-álgebra compleja. Si τ es una involución lineal en A, diremos que A es τ-*topológicamente simple* si A no es de producto cero y 0 y A son los únicos ideales cerrados τ-invariantes de A.

Nuestro objetivo en esta Sección es describir las parejas (A, τ) donde A es una H*álgebra compleja y τ es una involución lineal en A tal que A es τ-topológicamente simple.

3. PROPOSICION. *Sea A una H*-álgebra compleja con anulador cero. Toda involución lineal en A es continua.*

Demostración. Sea τ una involución lineal en A, si definimos para todo elemento x de A

$$|||x||| := \|\tau(x)\|$$

entonces, $(A, |||.|||)$ es un álgebra normada completa. Por la unicidad de la topología de la norma completa en las H*-álgebras complejas de anulador cero ([15 ; Teorema 1-2-36] o [39 ; Nota 2.8.(i)]) se obtiene que las normas $\|.\|$ y $|||.|||$ son equivalentes, lo que equivale a la continuidad de τ.

4. NOTA. Si A es una H*-álgebra compleja y τ es una involución lineal en A entonces el ideal anulador $An(A)$ es un ideal cerrado τ-invariante de A, luego si A es τ-topológicamente simple, entonces A tiene anulador cero y por tanto, en virtud de la proposición anterior, τ es continua.

5. LEMA. *Sean A una H*-álgebra compleja y τ una involución lineal en A tales que A es τ-topológicamente simple. Entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones*

i) A es una H-álgebra compleja topológicamente simple.*

ii) $A = B \oplus \tau(B)$, donde B y $\tau(B)$ son los únicos ideales cerrados propios de A. Ambos son H-álgebras complejas topológicamente simples.*

Demostración. Supongamos que A no es topológicamente simple y sea B un ideal cerrado propio no nulo de A. Por la Proposición 3, también $\tau(B)$ es un ideal cerrado propio no nulo de A. Ya que por hipótesis A es τ-topológicamente simple y $B\cap\tau(B)$ es un ideal cerrado propio τ-invariante de A, tenemos que $B\cap\tau(B)=0$, y por tanto $B\tau(B)=0$, luego B y $\tau(B)$ son ortogonales en virtud de la Proposición 1.4.vi). Por consiguiente $B+\tau(B)$ es un ideal cerrado τ-invariante de A, de nuevo por la simplicidad τ-topológica de A tenemos que $A=B\oplus\tau(B)$.

Si M es un ideal cerrado propio no nulo de A, consideremos el ideal cerrado propio $B\cap M$. Si $B\cap M$ es no nulo, el argumento anterior prueba que $A=(B\cap M)\oplus\tau(B\cap M)$. Esto, junto con la descomposición $A=B\oplus\tau(B)$ nos lleva a $B\cap M=B$, y por tanto $M\subset B$, de aquí se deduce que $M=B$ sin más que observar que los papeles de M y B pueden intercambiarse. Por otra parte, si $B\cap M=0$, de nuevo la Proposición 1.4.vi), nos da que $M\subset\tau(B)$. Luego $M\cap\tau(B)=M$ es no nulo y un razonamiento similar prueba que $M=\tau(B)$.

Finalmente, ya que todos los ideales cerrados de B o $\tau(B)$ son ideales cerrados de A y ya que $An(A)=0$ se sigue, en virtud de la Proposición 1.4.v), que B y $\tau(B)$ son H*-álgebras topológicamente simples.

En vista del Lema anterior, para dar una descripción de las H*-álgebras complejas con involución lineal (A,τ) tales que A es τ-topológicamente simple, nuestra atención debe dirigirse al caso en que A no es topológicamente simple y τ intercambia los únicos ideales cerrados propios no nulos de A. A continuación daremos un procedimiento constructivo que agotará esta situación.

Sea B una H*-álgebra compleja topológicamente simple, sea Ψ un automorfismo de B y sea λ un número real positivo. Consideramos el álgebra producto $A=B\times B^0$ y definimos en A un producto escalar, una involución de álgebra y una involución lineal mediante

$$((x,y)/(z,t)) := (x/z)+\lambda(y/t)$$

$$(x,y)^* := (x^*,y^*)$$

$$\tau_\Psi(x,y) := (\Psi^{-1}(y),\Psi(x)).$$

Es fácil comprobar que A es una H*-álgebra compleja con anulador cero y τ_Ψ es una involución lineal en A. Probemos que A es τ_Ψ-topológicamente simple.

En efecto: Sea M un ideal cerrado τ_Ψ-invariante de A, entonces en virtud de la simplicidad topológica de B tenemos que $M\cap B=0$ ó B. Si $M\cap B=0$ entonces $M\cap B^0=\tau_\Psi(M\cap B)=0$, luego $MB=0=BM$ y $MB^0=0=B^0M$, por tanto $MA=0=AM$, de donde $M\subset An(A)=0$. Si $M\cap B=B$ entonces $M\cap B^0=\tau_\Psi(M\cap B)=B^0$, luego B y B^0 están contenidos en M y por tanto $A=M$.

Esta H*-álgebra compleja con involución lineal (A, τ_Ψ) que hemos construido, la denotaremos $H^*(B,\Psi,\lambda)$ y nos referiremos a ella como la *H^*-álgebra compleja con involución lineal obtenida a partir de la H^*-álgebra compleja topológicamente simple B, el automorfismo Ψ de B y el número real positivo λ.*

Si (A, τ) y (B, τ') son H*-álgebras complejas con involución lineal diremos que son *totalmente isomorfas* si existe F $*$- isomorfismo isométrico de A sobre B tal que $F\tau = \tau' F$.

6. TEOREMA. *Sean A una H^*-álgebra compleja y τ una involución lineal en A, tales que A es τ-topológicamente simple. Entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

i) A es una H^*-álgebra compleja topológicamente simple.

ii) Existen B H^*-álgebra compleja topológicamente simple, Ψ automorfismo $\cdot$-positivo de B y λ número real positivo, tales que (A, τ) es totalmente isomorfa a $H^*(B,\Psi,\lambda)$.

Demostración. Por el Lema 5, si A no es topológicamente simple entonces $A = B \oplus \tau(B)$, donde B y $\tau(B)$ son los únicos ideales cerrados propios no nulos de A, siendo ambos H*-álgebras complejas topológicamente simples. Si llamamos F a la aplicación de B sobre $\tau(B)$ dada por $F(x) = \tau(x)$, entonces por el Teorema 1.11 tenemos que $F = G\Psi$, donde Ψ es un automorfismo $\cdot$-positivo de B y G es un $*$- antiisomorfismo de B sobre $\tau(B)$. Además, por el Corolario 1.13, existe un número real positivo λ tal que $\lambda^{-1/2}G$ es una aplicación isométrica. Consideremos la H*-álgebra compleja con involución lineal $H^*(B,\Psi,\lambda)$ para los B, Ψ, λ anteriores.

La aplicación de A sobre $H^*(B,\Psi,\lambda)$ definida por

$$H(x+\tau(y)) := (x\,,\,\Psi(y)) \quad \forall x\,,\,y\in B$$

es un isomorfismo isométrico que respeta las involuciones lineales, esto es $H\tau=\tau_\Psi H$. Además es un $*$- isomorfismo

$$H((x+\tau(y))^*) = H(x^*+\tau^*(y^*)) = H(x^*+G\Psi^{-1}(y^*)) = H(x^*+\tau\Psi^{-1}\Psi^{-1}(y^*)) =$$

$$= (x^*\,,\,\Psi^{-1}(y^*)) = (x^*\,,\,\Psi(y)^*) = (x\,,\,\Psi(y))^* = (H(x+\tau(y)))^*$$

De donde se deduce que $(A\,,\,\tau)$ es totalmente isomorfa a $H^*(B,\Psi,\lambda)$.

7. NOTA. También podríamos haber elegido, en el supuesto ii) del Teorema anterior, el ideal cerrado propio no nulo $\tau(B)$ para la descripción de A . En tal caso, no es difícil darse cuenta que la H*-álgebra compleja con involución lineal $(A\,,\,\tau)$ es totalmente isomorfa a la H*-álgebra compleja con involución lineal $H^*(\tau(B),G\Psi^{-1}G^{-1},\lambda^{-1})$. Mostrar la "unicidad" de estas dos descripciones es el objetivo del siguiente enunciado.

8. PROPOSICION. *Sean* $H^*(B,\Psi,\lambda)$ *y* $H^*(B',\Psi',\lambda')$ *las H*-álgebras complejas con involución lineal obtenidas respectivamente a partir de las H*-álgebras complejas topológicamente simples* B *y* B', *los automorfismos $*$-positivos* Ψ *de* B *y* Ψ' *de* B' *y los números reales positivos* λ *y* λ'. *Si las H*-álgebras complejas con involución lineal* $H^*(B,\Psi,\lambda)$ *y* $H^*(B',\Psi',\lambda')$ *son totalmente isomorfas, entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones*

i) $\lambda=\lambda'$ *y existe un $*$-isomorfismo* G *de* B *sobre* B' *tal que* $G\Psi=\Psi' G$.

ii) $\lambda\lambda'=1$ *y existe un $*$-antiisomorfismo* G *de* B *sobre* B' *tal que* $G\Psi^{-1}=\Psi' G$.

Demostración. Sea F un isomorfismo total de $H^*(B,\Psi,\lambda)$ sobre $H^*(B',\Psi',\lambda')$. Puesto que los únicos ideales cerrados de $H^*(B',\Psi',\lambda')$ son B' y B'^0 , se sigue que, necesariamente F aplica B y B^0 de una de las aiguientes formas:

i) $F(B)=B'$ y $F(B^0)=B'^0$.

ii) $F(B)=B'^0$ y $F(B^0)=B'$.

Si se verifica i), definimos F_1 y F_2 de B sobre B' por

$$F_1(x):=F(x\,,0) \qquad \text{y} \qquad F_2(x):=F(0\,,x)$$

Es fácil comprobar que F_1 y F_2 son $*$- isomorfismos. Como F es un isomorfismo de álgebras con involución lineal, esto es $\tau_{\Psi'}F=F\tau_{\Psi}$, tenemos que

$$(\Psi'^{-1}F_2(y)\,,\Psi'F_1(x))=(F_1\Psi^{-1}(y)\,,\;F_2\Psi(x)) \qquad \forall x\,,y\in B$$

Por tanto $F_2\Psi=\Psi'F_1$. Ahora, por el Teorema 1.11 de descomposición de isomorfismos de H*-álgebras complejas de anulador cero, podemos asegurar que $F_1=F_2$, y por tanto $G:=F_1=F_2$ satisface el enunciado. Además

$$F(x\,,y)=(G(x)\,,G(y)) \qquad \forall x\,,y\in B$$

Por tanto, por ser F isométrico

$$\|(G(x)\,,G(y))\|^2=\|(x\,,y)\|^2$$

O equivalentemente

$$\|G(x)\|^2+\lambda'\|G(y)\|^2=\|x\|^2+\lambda\|y\|^2$$

De la arbitrariedad de x e y en B , deducimos que $\lambda=\lambda'$.

Un tratamiento análogo para el caso ii) termina la demostración del enunciado.

3. H*-ALGEBRAS REALES TOPOLOGICAMENTE SIMPLES.

La *complexificación* de un álgebra real A es el álgebra compleja $A_{\mathbb{C}} := A \oplus iA$ con las operaciones, suma, producto por un número complejo y multiplicación, definidas por

$$(x+iy)+(z+it) := (x+z)+i(y+t)$$

$$(\alpha+i\beta)(x+iy) := (\alpha x-\beta y)+i(\alpha y+\beta x)$$

$$(x+iy)(z+it) := (xz-yt)+i(xt+yz)$$

para x, y, z, t elementos de A y α, β números reales. El álgebra compleja $A_{\mathbb{C}}$ es de anulador cero si, y sólo si, A es de anulador cero.

Si, además, A es una H*-álgebra real, entonces $A_{\mathbb{C}}$ con el producto escalar y la involución de álgebra definidos por

$$(x+iy/z+it) := (x/z)+(y/t)+i\left[(y/z)-(x/t)\right]$$

$$(x+iy)^* := x^*-iy^*$$

es una H*-álgebra compleja. Además

$$\tau(x+iy) := x^*+iy^*$$

define una involución lineal en $A_{\mathbb{C}}$, que llamaremos la *involución lineal canónica* de $A_{\mathbb{C}}$.

1. PROPOSICION. *Sea A una H*-álgebra real topológicamente simple. Entonces, la involución lineal canónica τ de $A_{\mathbb{C}}$ es isométrica $(\tau=\tau^{\bullet})$, conmuta con la involución de H*-álgebra $(\tau=\tau^*)$ y es tal que $A_{\mathbb{C}}$ es τ-topológicamente simple.*

Demostración. Es rutina el verificar que τ es una involución lineal en $A_{\mathbb{C}}$ que conmuta con $*$. Por la Proposición 1.4.vii) la involución de H*-álgebra de A es isométrica, de donde fácilmente se deduce que τ es isométrica. Veamos que $A_{\mathbb{C}}$ es τ-topológicamente simple. Si M es un ideal cerrado τ-invariante de $A_{\mathbb{C}}$, entonces $M \cap A$ es un ideal cerrado de A, luego $M \cap A = 0$ ó A, en virtud de la simplicidad topológica de A. Si $M \cap A = A$, entonces A, y por tanto iA, están contenidos en M, luego $M = A_{\mathbb{C}}$. En el otro caso $M \cap A = 0$, puesto que M es τ-invariante y $*$- invariante (Proposición 1.4.iv)), se sigue que

$$a + \tau(a)^* \ , \ i(a - \tau(a)^*) \in A \cap M \quad \forall a \in M.$$

Luego, para todo elemento a de M

$$a = \frac{1}{2}(a + \tau(a)^*) + \frac{1}{2i}\, i(a - \tau(a)^*)$$

se tiene que $a = 0$ y por tanto $M = 0$.

2. PROPOSICION. *Sea* A *una H*-álgebra compleja y sea* τ *una involución lineal en* A *tal que* $\tau = \tau^* = \tau^\circ$ *y* A *es* τ*-topológicamente simple. Entonces*

$$B := \{ a \in A \ : \ \tau(a) = a^* \}$$

es una H-álgebra real topológicamente simple para las restricciones de las operaciones de* A. *Además* B *reconstruye, vía el proceso de complexificación anteriormente descrito, la H*-álgebra compleja con involución lineal* (A, τ).

Demostración. Cláramente B es una subálgebra real de A, cerrada en virtud de la continuidad de τ y $*$. Como además τ y $*$ son isométricas, se sigue que

$$(x / y) = (\tau(x)^* / \tau(y)^*) = (\tau(y) / \tau(x)) = (y / x) \quad \forall x, y \in B$$

Por tanto el producto escalar de A toma valores reales sobre B, luego B es un espacio de Hilbert real, sin necesidad de tomar la parte real del producto escalar de A como nuevo producto escalar en B. Para todo x en B se verifica que $\tau(x^*) = \tau(x)^* = (x^*)^*$, luego $B^* = B$ y por tanto B es una H*-álgebra real.

De la linealidad de τ y la antilinealidad de $*$ se sigue que $B \cap iB = 0$, por lo que, como para todo elemento a en A

$$a = \frac{1}{2}(a + \tau(a)^*) + \frac{1}{2i}\, i\,(a - \tau(a)^*)$$

se verifica que $A = B \oplus iB$. Puesto que para cualesquiera x, y, z, t elementos de B, se verifica que

$$(x + iy / z + it) = (x / z) + (y / t) + i\left[(y / z) - (x / t)\right]$$

$$(x + iy)^* = x^* - iy^*$$

$$\tau(x + iy) = \tau(x) + i\,\tau(y) = x^* + iy^*$$

tenemos que la H*-álgebra compleja con involución lineal construida a partir de B vía la Proposición 1 es totalmente isomorfa a (A, τ).

Finalmente, si I es un ideal cerrado de B, entonces $I + iI$ es un ideal cerrado de A, luego $*$-invariante (Proposición 1.4.iv)) y por consiguiente τ-invariante. Ya que A es τ-topológicamente simple, tenemos que $I + iI = 0$, en tal caso $I = 0$; o $I + iI = A$, en cuyo caso $I = B$.

Los anteriores resultados muestran la existencia de una correspondencia biyectiva entre H*-álgebras reales topológicamente simples y H*-álgebras complejas con una involución lineal isométrica τ conmutando con la involución de H*-álgebra y tal que la H*-álgebra compleja es τ-topológicamente simple. Es evidente además que esta correspondencia mantiene los isomorfismos totales, concretamente:

3. PROPOSICION. *Sean* B *y* B' *dos H*-álgebras reales topológicamente simples y sean* (A,τ) *y* (A',τ') *las H*-álgebras complejas con involución lineal asociadas respectivamente a* B *y* B'. *Entonces* B *y* B' *son totalmente isomorfas si, y sólo si,* (A,τ) *y* (A',τ') *son totalmente isomorfas.*

Esta correspondencia biyectiva junto con el Teorema 2.6 nos van a permitir establecer la clasificación de las H*-álgebras reales topológicamente simples.

Si A es una H*-álgebra compleja topológicamente simple, denotaremos $A_{\mathbb{R}}$ la *realización* de A, esto es, $A_{\mathbb{R}}$ es el álgebra obtenida restingiendo el producto por escalares de elementos de A a los números reales. Dotada de la misma involución de álgebra que A y con el producto escalar real $Re(/)$, $A_{\mathbb{R}}$ trivialmente es una H*-álgebra real. Veamos que además es topológicamente simple. Si M es un ideal cerrado de $A_{\mathbb{R}}$, entonces $M\cap iM$ es un ideal cerrado de A. Ya que A es topológicamente simple tenemos que $M\cap iM=0$ ó A. En el primer caso $MA=M(iA)=i(MA)$ está contenido en $M\cap iM=0$, luego $MA=0$. Analogamente se prueba que $AM=0$. Por consiguiente M está contenido en el ideal anulador de A, y $M=0$. En el segundo caso es claro que $M=A$.

El siguiente resultado constituye una extensión a H*-álgebras de un hecho conocido para H*-álgebras de Lie [9 ; Corolario 1.2], [23 ; Teorema 2] o [47 ; Teorema 1.3.1].

4. TEOREMA. *Sea* A *una H*-álgebra real topológicamente simple. Entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

i) $A_{\mathbb{C}}$ *es una H*-álgebra compleja topológicamente simple.*

ii) A *es la realización de una H*-álgebra compleja topológicamente simple.*

Demostración. Sea τ la involución lineal canónica de $A_{\mathbb{C}}$. Ya que, por la Proposición 3.1, $A_{\mathbb{C}}$ es τ-topológicamente simple, si suponemos que $A_{\mathbb{C}}$ no es topológicamente simple, en virtud del Teorema 2.6, existe un $*$-isomorfismo isométrico F de $A_{\mathbb{C}}$ sobre $H^*(B,\Psi,\lambda)$ tal que $F\tau = \tau_\Psi F$, para convenientes B H*-álgebra compleja topológicamente simple, Ψ automorfismo $\cdot$-positivo de B y λ número real positivo. Por la Proposición 3.1 tenemos que $\tau = \tau^{\bullet} = \tau^*$, luego también $\tau_\Psi = \tau_\Psi^{\bullet} = \tau_\Psi^*$. Atendiendo a la definición de τ_Ψ es elemental el comprobar que $\tau_\Psi = \tau_\Psi^*$ equivale a $\Psi = \Psi^*$. Luego por la Proposición 1.10.ii) tenemos que

$$\Psi^{\bullet} = \Psi = \Psi^* = \Psi^{-1}$$

La condición $\tau_\Psi = \tau_\Psi^{\bullet}$ es equivalente a

$$(\tau_\Psi(x,y)\,/\,(x,y)) \in \mathbb{R} \qquad \forall (x,y) \in H^*(B,\Psi,\lambda)$$

Esto es

$$(\Psi^{-1}(y)\,/\,x) + \lambda(\Psi(x)\,/\,y) \in \mathbb{R} \qquad \forall x, y \in B$$

O equivalentemente

$$(y\,/\,\Psi(x)) + \lambda(\Psi(x)\,/\,y) \in \mathbb{R} \qquad \forall x, y \in B$$

Luego la condición $\tau_\Psi = \tau_\Psi^{\bullet}$ es equivalente a $\lambda = 1$.

Denotemos por B_Ψ la H*-álgebra real topológicamente simple asociada por el procedimiento descrito en la Proposición 2 a la H*-álgebra compleja con involución lineal $H^*(B,\Psi,1)$. Ya que $\Psi = \Psi^{-1} = \Psi^*$, se deduce fácilmente que

$$B_\Psi = \{\, (x, \Psi(x)^*) \;:\; x \in B \,\}$$

Si denotamos por G la restricción de F a las H*-álgebras reales asociadas a su dominio y su codominio, tenemos que G es un $*$-isomorfismo de A sobre B_Ψ.

La aplicación π de B_Ψ sobre $B_{\mathbb{R}}$ (la realización de B) definida por

$$\pi(x, \Psi(x)^*) = x$$

es un $*$- isomorfismo real, y ya que $*$ y Ψ son isométricos se deduce que

$$((x, \Psi(x)^*) / (y, \Psi(y)^*) = 2 \, Re \, (x/y)$$

Luego $H = \pi G$ es un $*$- isomorfismo real de A sobre $B_{\mathbb{R}}$ tal que

$$(a/b) = 2 \, Re \, (H(a) / H(b)) \qquad \forall a, b \in A$$

Por consiguiente, si consideramos la H*-álgebra compleja topológicamente simple B', cuya diferencia con la H*-álgebra compleja topológicamente simple B es que su producto escalar es el doble del de B, tenemos que A es la realización de B'.

Terminamos esta Sección estudiando el centroide de las H*-álgebras reales topológicamente simples. Como consecuencia del resultado que obtenemos queda patente que las alternativas dadas por el Teorema anterior son excluyentes.

Sea A un álgebra no asociativa sobre el cuerpo F. El *centro* $Z(A)$ de A, es el conjunto formado por los elementos $c \in A$ que asocian y conmutan con todos los elementos de A, esto es, cualesquiera que sean $x, y \in A$ se verifica que

$$c x = x c \qquad \text{y} \qquad (c, x, y) = (x, c, y) = (x, y, c) = 0$$

El *centroide* $C(A)$ de A es el conjunto de aplicaciones lineales T de A en A tales que

$$T(xy) = x\,T(y) = T(x)\,y \tag{1}$$

para cualesquiera x, y elementos de A. Es bien conocido ([27 ; p.290-293], [43 ; p. 14-17]) que si A es un álgebra no asociativa *simple* ($A^2 \neq 0$ y los únicos ideales de A son 0 y A) entonces $C(A)$ es un cuerpo y

F puede identificarse con un subcuerpo de $C(A)$, mientras que $Z(A)$ ó bien, se reduce a cero, ó bien es un cuerpo isomorfo a $C(A)$ (en tal caso A tiene unidad). Un álgebra no asociativa A sobre el cuerpo F se dirá *central* si su centroide $C(A)$ se reduce a FI_A, donde I_A es el operador identidad en A ($Z(A) = F$ si A tiene unidad).

Si A es un álgebra normada completa con anulador cero, los argumentos dados en [29; Teorema 2.1] prueban que el conjunto de las aplicaciones (a priori, no necesariamente lineales) de A en A verificando (1) coincide con $C(A)$ y que $C(A)$ es una subálgebra cerrada conmutativa de $BL(A)$ que contiene al operador identidad en A.

5. TEOREMA ([17 ; Teorema 1.2]). *El centroide de una H*-álgebra compleja topológicamente simple es isomorfo a* $\mathbb{C}$.

6. COROLARIO. *Sea* A *una H*-álgebra real topológicamente simple. Entonces* $C(A)$ *es isomorfo a* $\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ *según que* $A_{\mathbb{C}}$ *sea topológicamente simple ó* A *sea la realización de una H*-álgebra compleja.*

Demostración. Si A es una H*-álgebra compleja topológicamente simple vista como real, en virtud de la independencia del centroide del cuerpo base y del Teorema 5, tenemos que $C(A)$ es isomorfo a $\mathbb{C}$. En otro caso, si $T \in C(A)$ entonces su extensión a $A_{\mathbb{C}}$ definida por

$$T_{\mathbb{C}}(x + iy) := T(x) + iT(y)$$

es un centralizador de $A_{\mathbb{C}}$ (verifica (1)). Luego por el Teorema 5, existe un número complejo λ tal que $T_{\mathbb{C}} = \lambda I_{A_{\mathbb{C}}}$, de donde se sigue que λ es real.

7. NOTA. Los resultados anteriores ponen de manifiesto que el problema de la descripción de una clase de H*-álgebras reales topológicamente simples queda resuelto una vez conocida la descripción de las H*-álgebras complejas topológicamente simples de dicha clase y determinadas las involuciones lineales sobre éstas que conmutan con la involución de H*-álgebra (observar que en virtud del Corolario 1.13, tales involuciones son automáticamente isométricas).

4. ISOMORFISMOS DE H*-ALGEBRAS REALES

El principal propósito de esta Sección es establecer la *"unicidad esencial"* de la estructura de H*-álgebra real topológicamente simple, es decir, probar el siguiente resultado

1. TEOREMA. *Sea A una H*-álgebra real topológicamente simple. Cualquier otra estructura de H*-álgebra real sobre A es $*$-isomorfa y, salvo un múltiplo real positivo, isométrica a la de partida.*

Este Teorema se motiva perfectamente, a parte de por su análogo en el caso complejo (ver final de la Sección primera), por la Proposición 2 de [11] donde se demuestra parcialmente en el caso particular asociativo y finito-dimensional.

Con sustantivas variantes el camino que vamos a seguir en la demostración del Teorema 1 es análogo al que hemos visto para el caso complejo en la Sección 1. Por consiguiente en primer lugar probamos: *Si dos H*-álgebras reales de anulador cero son isomorfas entonces son $*$-isomorfas.* Esta afirmación es consecuencia del siguiente *Teorema de descomposición de isomorfismos entre H*-álgebras reales de anulador cero.*

2. TEOREMA. *Sean A y B H*-álgebras reales de anulador cero y sea F un isomorfismo de A sobre B. Entonces F admite una única descomposición de la forma*

$$F = G\,exp(D)$$

donde G es un $*$-isomorfismo de A sobre B y D es una derivación continua de A tal que $D^* = -D$.

Demostración. El isomorfismo F lo podemos extender a un isomorfismo algebraico $F_{\mathbb{C}}$ de $A_{\mathbb{C}}$ sobre $B_{\mathbb{C}}$ definiendo

$$F_{\mathbb{C}}(x+iy)=F(x)+iF(y) \tag{2}$$

En virtud del Teorema de descomposición de isomorfismos de H*-álgebras complejas de anulador cero (Teorema 1.11) y de la Proposición 1.10, $F_{\mathbb{C}}$ se descompone de forma única como

$$F_{\mathbb{C}}=G_0\ exp(D_0)$$

donde G_0 es un $*$- isomorfismo de $A_{\mathbb{C}}$ sobre $B_{\mathbb{C}}$ y D_0 es una derivación continua de $A_{\mathbb{C}}$ tal que $D_0{}^*=-D_0$. Es fácil comprobar que

$$F_{\mathbb{C}}=\tau(F_{\mathbb{C}})^*\tau$$

donde τ denota simultaneamente las involuciones canónicas de las H*-álgebras complejas $A_{\mathbb{C}}$ y $B_{\mathbb{C}}$. Luego

$$F_{\mathbb{C}}=\tau(G_0\ exp(D_0))^*\tau=\tau G_0\ exp(-D_0)\tau=$$

$$=\tau G_0\tau\ \tau\, exp(-D_0)\tau=(\tau G_0\tau)\ exp(-\tau D_0\tau)$$

donde se ha utilizado la continuidad de τ y $*$.

Ya que $\tau G_0\tau$ es un $*$- isomorfismo de $A_{\mathbb{C}}$ sobre $B_{\mathbb{C}}$ y $-\tau D_0\tau$ es una derivación continua de $A_{\mathbb{C}}$ tal que $(-\tau D_0\tau)^*=\tau D_0\tau$, la unicidad de la descomposición fuerza

$$G_0=\tau G_0\tau \qquad \text{y} \qquad D_0=-\tau D_0\tau$$

Por consiguiente G_0 aplica A sobre B y A es invariante por D_0. Sea G (resp. D) la aplicación de A sobre B (resp. de A en A) dada por $G(x)=G_0(x)$ (respect. $D(x)=D_0(x)$) para todo x de A. Claramente G es un $*$- isomorfimo de A sobre B, D es una derivación continua de A tal que $D^*=-D$ y $F=G\,exp(D)$.

Finalmente, la complexificación de cualquier descomposición real de F

nos lleva a una descomposición compleja de $F_{\mathbb{C}}$, que sabemos es única, de donde se deduce también la unicidad en el caso real.

Al igual que en el caso complejo (Teorema 1.11), G es también el único $*$- isomorfismo de A sobre B tal que

$$F = exp(D') G$$

para una conveniente (única) derivación continua D' de B .

El siguiente resultado es una adaptación a nuestro ambiente de la primera parte del Teorema X.5 de [17].

3. LEMA. *Sean A y B H^*-álgebras complejas topológicamente simples. Todo isomorfismo real de A sobre B es o bien un isomorfismo lineal--complejo o bien un isomorfismo lineal-complejo-conjugado.*

Demostración. Sea F un isomorfismo real de A sobre B . Para cada centralizador T de A se verifica que

$$u(T) := F T F^{-1}$$

es un centralizador de B y además u es un isomorfismo de $C(A)$ sobre $C(B)$, en nuestro caso u es un automorfismo de $\mathbb{C}$ (Teorema 3.5), tal que

$$F(\lambda x) = u(\lambda) F(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ x \in A$$

Ya que $u(\lambda) = \lambda$ para λ número real, deducimos que u es necesariamente la identidad en $\mathbb{C}$ ó la conjugación en $\mathbb{C}$.

4. PROPOSICION. *Sean A y B H*-álgebras reales topológicamente simples. Existe un número real positivo K ($K=1$ si $A=B$) tal que para todo isomorfismo F de A sobre B se verifica que*

$$F^\bullet = K(F^*)^{-1}$$

Demostración. Si F es un isomorfismo de A sobre B y $A_{\mathbb{C}}$ (y por tanto también $B_{\mathbb{C}}$) es topológicamente simple, entonces, por la Proposición 1.12, existe un número real positivo K ($K=1$ si $A=B$) tal que

$$F_{\mathbb{C}}^\bullet = K(F_{\mathbb{C}}^*)^{-1}$$

de donde se deduce claramente

$$F^\bullet = K(F^*)^{-1}$$

En otro caso, por el Teorema 3.4, A y B pueden ser vistas como realizaciones de sendas H*-álgebras complejas topológicamente simples. Ahora, por el Lema anterior, o bien F es un isomorfismo lineal-complejo, o bien F es un isomorfismo lineal-complejo-conjugado en cuyo caso la aplicación $G: x \to F(x)^*$ es un antiisomorfismo. Por la Proposición 1.12, existe K número real positivo ($K=1$ si $A=B$) tal que

$$F^\bullet = K(F^*)^{-1} \qquad \text{o} \qquad G^\bullet = K(G^*)^{-1}$$

según el caso (estas igualdades entendidas para los productos escalares complejos). En el primer caso obviamente

$$F^\bullet = K(F^*)^{-1}$$

también para los productos escalares reales. En el segundo caso, de $G^\bullet = K(G^*)^{-1}$ se obtiene $F^\bullet = K(F^*)^{-1}$ para los productos escalares reales sin más que tener en cuenta la isometría de las involuciones de H*-álgebra (Proposición 1.4.vii)).

5. COROLARIO. *Sean A y B H^*-álgebras reales topológicamente simples. Existe un número real positivo L tal que para todo $*$-isomorfismo F de A sobre B se verifica que LF es una aplicación isométrica.*

Demostración. Tómese $L = K^{-1/2}$, donde K es el número real positivo que aparece en la Proposición 4.

Este resultado, junto con el Teorema 2, muestra la unicidad esencial de la estructura de H*-álgebra real topológicamente simple, quedando así probado el Teorema 1.

Notemos para terminar esta sección que, los resultados obtenidos para isomorfismos pueden ser enunciados incluyendo a los antiisomorfismos, en los mismos términos que en el caso complejo (vease la Sección 1).

5. H*-ALGEBRAS REALES ASOCIATIVAS.

Concluimos este Capítulo dando una nueva y simple prueba de la descripción de las H*-álgebras reales asociativas obtenida recientemente por Balachandran y Swaminathan en [11]. Ambrose, en [2], determina las H*-álgebras complejas asociativas topológicamente simples como las álgebras de operadores Hilbert-Schmidt sobre un espacio de Hilbert complejo. Por consiguiente, de nuestros resultados de la Sección 3 (vease la Nota 3.7) se deduce que el problema de la descripción de las H*-álgebras reales asociativas queda resuelto, una vez descritas las involuciones lineales, que conmutan con la operación de adjunción, en el álgebra de los operadores de Hilbert-Schmidt sobre un espacio de Hilbert complejo.

Si H es un espacio de Hilbert complejo, siguiendo la notación de [38 ; p. 262], para x e y elementos de H designaremos $x\otimes y$ al operador lineal sobre H definido por

$$(x\otimes y)(z) = (z/y)x$$

El siguiente enunciado recoge las propiedades elementales de la operación que acabamos de introducir.

1. PROPOSICION.([44 ; Lemas I.1 y I.2]). *Sean* x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 *elementos de un espacio de Hilbert complejo* H , λ *un número complejo y* T *un operador lineal continuo sobre* H , *entonces:*

i) $x\otimes y$ *es un operador lineal continuo en* H *y* $\|x\otimes y\| = \|x\|\,\|y\|$.

ii) $(x\otimes y)^* = y\otimes x$

iii) $(\lambda x)\otimes y = \lambda(x\otimes y)$

iv) $x \otimes (\lambda y) = \bar{\lambda}(x \otimes y)$

v) $(x_1 + x_2) \otimes y = (x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y)$

vi) $x \otimes (y_1 + y_2) = (x \otimes y_1) + (x \otimes y_2)$

vii) $(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = (x_2 / y_1)\, x_1 \otimes y_2$

viii) $T(x \otimes y) = T(x) \otimes y$

ix) $(x \otimes y) T = x \otimes T^*(y)$

Es bien conocido que si H es un espacio de Hilbert complejo entonces $FBL(H)$, el conjunto de todos los *operadores lineales continuos de rango finito* en H, es un ideal del álgebra $BL(H)$ de todos los operadores lineales y continuos en H, tal que cualquier ideal de $BL(H)$ necesariamente contiene a $FBL(H)$ ([44 ; Lemas I.10 y I.11]). Así como que los elementos de $FBL(H)$ son los operadores que se pueden escribir de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i \otimes y_i$$

para $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in H$.

Si bien, en general, sumas infinitas de la anterior forma no tienen sentido, sin embargo se puede asegurar lo siguiente

2. TEOREMA ([44 ; Teorema I.1]). *Sean* $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *dos familias ortonormales de vectores en el espacio de Hilbert complejo* H *y sea* $\{\lambda_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *una familia de números complejos. Entonces la familia*

$$\{\lambda_\gamma (x / y_\gamma) x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

es sumable para todo elemento x *de* H *si, y sólo si, la familia de números* *complejos* $\{\lambda_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *es acotada. En tal caso* $\sum_{\gamma\in\Gamma}\lambda_\gamma(x/y_\gamma)x_\gamma$ *define un operador lineal continuo en* H *de norma* $\operatorname{Sup}_{\gamma\in\Gamma}|\lambda_\gamma|$ *que notaremos*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\lambda_\gamma x_\gamma \otimes y_\gamma$$

Una *proyección* de $BL(H)$ es un elemento p de $BL(H)$ tal que

$$p^2 = p = p^*$$

Las proyecciones de $BL(H)$ están en correspondencia biyectiva (vía su rango) con los subespacios cerrados de H. El orden de inclusión entre los subespacios cerrados de H se traslada, vía esta correspondencia, a un orden $\leq$ en el conjunto de las proyecciones de $BL(H)$ que queda caracterizado algebraícamente por

$$p \leq q \iff pq = p$$

Las proyecciones de $BL(H)$ pueden ser representadas en términos de los operadores definidos en el Teorema 2 de la siguiente forma

3. PROPOSICION ([44 ; Teorema I.3.i)]). *Un operador lineal continuo sobre un espacio de Hilbert complejo* H *es una proyección si, y sólo si, es de la forma*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma \otimes x_\gamma$$

donde $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *es una familia ortonormal de elementos de* H. *En tal caso el rango de la proyección es el subespacio cerrado engendrado por la familia* $\{x_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$.

Una consecuencia inmediata es que, en particular, las proyecciones minimales (las proyecciones de rango uno-dimensional) son los operadores de la forma

$$x \otimes x \quad \text{para} \quad x \in H, \; \| x \| = 1$$

4. DEFINICION. Sea H un espacio de Hilbert complejo. Si $f \in BL(H)$ y $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ son sistemas ortonormales completos de H se tiene que

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \| f(x_\gamma) \|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \| f(y_\gamma) \|^2 \qquad ([44\ ;\ \text{Lema II.1}]).$$

Así, un operador lineal continuo f sobre H diremos que es un *operador de Hilbert-Schmidt* de H si para algún sistema ortonormal completo $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ (y en consecuencia para todo sistema ortonormal completo) se tiene

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \| f(x_\gamma) \|^2 < +\infty$$

Nos remitimos a [44 ; Capítulo II] y a [38 ; A.1.3] para un estudio detallado del álgebra $\mathrm{H}(H)$ de los operadores Hilbert-Schmidt sobre H. Dicha álgebra es un $*$- ideal de $BL(H)$ que contiene a los operadores de rango finito y que está incluida en el ideal de los operadores compactos. Además

$$\sigma(f) = \Big[\sum_{\gamma\in\Gamma} \| f(x_\gamma) \|^2 \Big]^{1/2} \qquad \forall f \in \mathrm{H}(H)$$

es una norma completa en $\mathrm{H}(H)$ que viene inducida por el producto escalar

$$(f / g) = \sum_{\gamma\in\Gamma} (f(x_\gamma) / g(x_\gamma))$$

Para dicho producto escalar y para la involución de álgebra determinada por la adjunción en $BL(H)$, el álgebra $H(H)$ es una H*-álgebra asociativa topológicamente simple.

Una teoría análoga a la conocida de los espacios prehilbertianos reales o complejos puede ser llevada a cabo para los espacios prehilbertianos cuaterniónicos ([20 ; p. 74]) teniendo siempre en cuenta la no conmutatividad del cuerpo. Así mismo, para un espacio de Hilbert real o cuaterniónico se puede definir, al igual que en la Definición 4, la clase de los operadores Hilbert-Schmidt. Un amplia nota sobre tales álgebras de operadores puede encontrarse en [15 ; § 2.8].

Para la mejor comprensión de la siguiente definición recordamos que el *casiproducto* en un álgebra asociativa B, definido por

$$x \circ y = x + y - xy \qquad \forall\, x, y \in B$$

es una operación asociativa en B con cero como elemento neutro y que un elemento x de B es llamado *casiinversible* con *casiinverso* (necesariamente único) $x^{o} \in A$ si:

$$x \circ x^{o} = x^{o} \circ x = 0$$

5. DEFINICION. Una subálgebra A de un álgebra asociativa B es llamada una *subálgebra plena* de B si A contiene a los casiinversos de todos sus elementos que son casiinversibles en B.

Ejemplos triviales de subálgebras plenas son los ideales. También es claro que si A es una subálgebra plena de un álgebra asociativa compleja B y x es un elemento de A entonces los espectros de x relativos a A y a B coinciden.

El argumento usual que se utiliza en la demostración de que todo $*$- automorfismo de una C*-álgebra es isométrico, junto con los comentarios anteriores nos van a permitir conseguir el mismo resultado para todo $*$- automorfismo de una subálgebra plena y autoadjunta de una C*-álgebra.

6. LEMA ([38 ; Lema 4.8.1.ii)]). *Para todo elemento x de una C*-álgebra B se verifica que*

$$\| x \|^2 = Max \{ | \lambda | \ : \lambda \in sp(x^*x) \}$$

7. COROLARIO. *Sea A una subálgebra plena y autoadjunta de una C*-álgebra B. Todo $*$- automorfismo F de A es isométrico.*

Demostración. En virtud del Lema 6, los comentarios anteriores y el hecho de que los isomorfismos conservan los espectros tenemos para todo elemento x de A que

$$\| F(x) \|^2 = Max \{ | \lambda | \ : \lambda \in sp_B(F(x)^*F(x)) \} = Max \{ | \lambda | \ : \lambda \in sp_B(F(x^*x)) \} =$$

$$= Max \{ | \lambda | \ : \lambda \in sp_A(F(x^*x)) \} = Max \{ | \lambda | \ : \lambda \in sp_A(x^*x) \} =$$

$$= Max \{ | \lambda | \ : \lambda \in sp_B(x^*x) \} = \| x \|^2 .$$

El resultado que obtenemos a continuación está inspirado en [22 ; Lema 7.5.3].

8. **LEMA.** *Sea H un espacio de Hilbert complejo y sea A una subálgebra plena y autoadjunta de $BL(H)$ tal que contiene a los operadores de rango finito. Si F es un $\star$-automorfismo de A entonces existe un operador unitario $U \in BL(H)$ tal que*

$$F(f) = U f U^* \qquad \forall f \in A$$

Demostración. Ya que F es un $\star$-automorfismo aplica proyecciones minimales en proyecciones minimales. Sean $x, y \in H$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ tales que

$$F(x \otimes x) = y \otimes y$$

Definimos U como el operador lineal en H determinado por

$$U(z) := F(z \otimes x)(y) \qquad \forall z \in H$$

U es inversible, ya que el operador lineal V sobre H determinado por

$$V(t) := F^{-1}(t \otimes y)(x) \qquad \forall t \in H$$

es tal que $UV = VU = I$. En efecto, en virtud de la simetría existente en la definición de U y V nos bastará probar que $UV = I$

$$UV(t) = U(F^{-1}(t \otimes y)(x)) = F(F^{-1}(t \otimes y)(x) \otimes x)(y) =$$

$$= F(F^{-1}(t \otimes y)(x \otimes x))(y) = (t \otimes y)F(x \otimes x)(y) = (t \otimes y)(y \otimes y)(y) = t$$

Veamos que U es isométrico (unitario)

$$\|U(z)\|^2 = \|U(z) \otimes U(z)\| = \|F(z \otimes x)(y) \otimes F(z \otimes x)(y)\| =$$

$$= \|F(z \otimes x)(y \otimes y)F(z \otimes x)^*\| = \|F(z \otimes x)F(x \otimes x)F(x \otimes z)\| =$$

$$= \|F[(z \otimes x)(x \otimes x)(x \otimes z)]\| = \|F(z \otimes z)\| = \|z \otimes z\| = \|z\|^2$$

Donde hemos utilizado la Proposición 1 y el Corolario 7.

Por último, veamos que para todo elemento f de A se verifica que

$$U f U^* = F(f)$$

En efecto, para todo elemento t de H

$$U f U^*(t) = U f F^{-1}(t \otimes y)(x) = F(f F^{-1}(t \otimes y)(x) \otimes x)(y) =$$

$$= F(f F^{-1}(t \otimes y)(x \otimes x))(y) = F(f)(t \otimes y)(y \otimes y)(y) = F(f)(t) .$$

9. NOTA. Resaltamos que, sin variación alguna en la demostración, si en el enunciado del Lema 8, la linealidad de F es sustituida por conjungado-linealidad, entonces U es un operador conjugado-lineal isométrico, hecho que utilizaremos posteriormente.

10. COROLARIO. *Sea H un espacio de Hilbert complejo. Si F es un $*$-automorfismo del álgebra $\mathsf{H}(H)$ de los operadores Hilbert-Schmidt sobre H, entonces existe un operador unitario $U \in BL(H)$ tal que*

$$F(f) = U f U^* \qquad \forall f \in \mathsf{H}(H)$$

11. NOTA. Puesto que el álgebra de los operadores de Hilbert-Schmidt $\mathsf{H}(H)$ sobre un espacio de Hilbert complejo H contiene a los operadores de rango finito $FBL(H)$, $\mathsf{H}(H)$ actúa irreduciblemente sobre H y tiene ideales unilaterales minimales. Como además $\mathsf{H}(H)$ es un álgebra de Banach para la norma σ, se sigue que el Corolario 10 podría haberse obtenido también de [38 ; Teorema 4.10.1]. Hemos preferido la demostración expuesta dado el interés intrínseco que tiene, a nuestro juicio, el Lema 8.

12. DEFINICION. Sea H un espacio de Hilbert complejo. Un operador lineal--conjugado e isométrico J de H en H es llamado una *conjugación* (resp. *anticonjugación*) si $J^2 = I$ (resp. $J^2 = -I$).

13. LEMA. *Sea* τ *una involución lineal en el álgebra de los operadores de Hilbert-Schmidt* $\mathsf{H}(H)$ *tal que* τ *conmuta con* $*$. *Entonces existe una conjugación o anticonjugación* J *de* H *tal que*

$$\tau(f) = J f^* J^{-1} \qquad \forall f \in \mathsf{H}(H)$$

Demostración. Si definimos $F(f) := \tau(f^*)$, entonces F determina un $*$- automorfismo lineal-conjugado de $\mathsf{H}(H)$, luego por la Nota 9 y el Corolario 10, existe U operador lineal-conjugado e isométrico en H tal que

$$F(f) = U f U^{-1} \qquad \forall f \in \mathsf{H}(H)$$

esto es

$$\tau(f) = U f^* U^{-1} \qquad \forall f \in \mathsf{H}(H)$$

Veamos ahora que $U^2 = \pm I$. Para todo elemento f de $\mathsf{H}(H)$

$$f = \tau^2(f) = U(U f^* U^{-1})^* U^{-1} = U^2 f (U^{-1})^2$$

Luego $f U^2 = U^2 f$, esto es U^2 pertenece al conmutador en $BL(H)$ de $\mathsf{H}(H)$, que es $\mathbb{C} I$, luego $U^2 = \lambda I$ para conveniente $\lambda \in \mathbb{C}$. De la conmutatividad de U y U^2 se sigue que $U(\lambda I) = (\lambda I) U$, de donde $\lambda \in \mathbb{R}$ en virtud de la conjugado-linealidad de U. Ahora, como $\| U^2 \| = 1$ se tiene que $\lambda = \pm 1$.

14. LEMA ([22 ; Lema 7.5.6]). *Sea* H *un espacio de Hilbert complejo. Si* J *y* J' *son simultáneamente dos conjugaciones o dos anticonjugaciones de* H, *entonces existe un operador unitario* U *sobre* H, *tal que*

$$J' = U J U^{-1}$$

Además, siempre existe una conjugación en H *y, existe una anticonjugación sobre* H *si y sólo si la dimensión de* H *es par o infinita.*

15. LEMA. *Sea* H *un espacio de Hilbert complejo y sean* τ_1 *y* τ_2 *dos involuciones lineales en* $\mathsf{H}(H)$ *que conmutan con* $*$. *Si* J_1 *y* J_2 *son las conjugaciones o anticonjugaciones asociadas respectivamente a* τ_1 *y* τ_2 *vía el Lema 13, entonces las H*-álgebras con involución lineal* $(\mathsf{H}(H), \tau_1)$ *y* $(\mathsf{H}(H), \tau_2)$ *son totalmente isomorfas si, y sólo si,* J_1 *y* J_2 *son simultáneamente conjugaciones o anticonjugaciones.*

Demostración. Sea F un $*$-automorfismo de $\mathsf{H}(H)$ tal que $F\tau_1 = \tau_2 F$. Por el Corolario 10, existe un operador unitario $U \in BL(H)$ tal que $F(f) = UfU^{-1}$. Por tanto, para todo elemento $f \in \mathsf{H}(H)$, de la igualdad $F\tau_1 = \tau_2 F$ se sigue que

$$U J_1 f^* J_1^{-1} U^{-1} = J_2 U f^* U^{-1} J_2^{-1}$$

esto es

$$U^{-1} J_2^{-1} U J_1 f^* = f^* U^{-1} J_2^{-1} U J_1$$

Luego $U^{-1} J_2^{-1} U J_1$ está en el conmutador de $\mathsf{H}(H)$ y por tanto es un múltiplo de la unidad. Como además es isométrico

$$U^{-1} J_2^{-1} U J_1 = \lambda I \;, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \;, \quad |\lambda| = 1$$

Luego

$$J_1^2 = (\lambda U^{-1} J_2 U)^2 = |\lambda|^2 U^{-1} J_2^2 U = J_2^2$$

donde hemos utilizado que $|\lambda| = 1$ y que $J^2 = \pm I$ y por tanto conmuta con U.

Recíprocamente, si J_1 y J_2 son simultáneamente conjugaciones o anticonjugaciones, sea U un operador unitario en H (Lema 14) tal que $J_2 = U J_1 U^{-1}$. Si se define

$$F(f) = U f U^{-1} \qquad \forall f \in \mathrm{H}(H)$$

es rutina el comprobar que F es un $*$-automorfismo de $\mathrm{H}(H)$ tal que $F\tau_1 = \tau_2 F$.

Este resultado pone de manifiesto que solo hay dos tipos no isomorfos de involuciones lineales que conmutan con $*$ en el álgebra $\mathrm{H}(H)$ de los operadores de Hilbert-Schmidt sobre un espacio de Hilbert complejo H .

16. TEOREMA DE AMBROSE ([2]). *Toda H^*-álgebra compleja asociativa topológicamente simple es esencialmente la H^*-álgebra de los operadores de Hilbert-Schmidt de un conveniente espacio de Hilbert complejo H .*

Luego, a la vista de los resultados anteriores y de la Teoría de estructura desarrollada en este Capítulo, podemos concluir que únicamente existen tres tipos no isomorfos de H*-álgebras reales asociativas topológicamente simples que son: La H*-álgebra compleja $\mathrm{H}(H)$ vista como real, la H*-álgebra real topológicamente simple asociada a $(\mathrm{H}(H), \tau_J)$ donde $\tau_J(f) = J f^* J$ y J es una conjugación en H y la H*-álgebra real topológicamente simple asociada a $(\mathrm{H}(H), \tau_{J'})$ donde $\tau_{J'}(f) = -J' f^* J'$ y J' es una anticonjugación en H . Estas dos últimas son las que pasamos a describir.

Si H es un espacio de Hilbert complejo y J es una conjugación en H, es inmediato que

$$K := \{ x \in H \ : \ J(x) = x \}$$

es un subespacio real cerrado de H sobre el que el producto escalar de H toma valores reales, por lo que K es un espacio de Hilbert real. Además también es claro que $H = K \oplus iK$, esto es H es la complexificación del espacio de Hilbert real K.

Si f es un elemento de $\mathrm{H}(H)$ entonces $\tau_J(f) = f^*$ si, y sólo si, $J f^* J = f^*$, esto es f^* conmuta con J, lo que equivale, por ser J isométrico, a decir que f conmuta con J, luego la H*-álgebra real asociada a $(\mathrm{H}(H), \tau_J)$ es

$$A := \{ f \in \mathrm{H}(H) \ : \ Jf = fJ \}$$

esto es, el conjunto de los operadores Hilbert-Schmidt sobre H que dejan invariante a K.

Ya que todo sistema ortonormal completo del espacio de Hilbert real K es un sistema ortonormal completo del espacio de Hilbert complejo H se sigue, claramente, que si $f \in A$, entonces f/K es un operador Hilbert--Schmidt sobre el espacio de Hilbert real K y además

$$\sigma_H(f) = \sigma_K(f/K)$$

donde σ_H y σ_K representan las normas en $\mathrm{H}(H)$ y $\mathrm{H}(K)$. Por consiguiente, la aplicación $f \to f/K$ es un homomorfismo isométrico de A en $\mathrm{H}(K)$. Puesto que si $f \in A$ también $f^* \in A$ y además $(f/K)^* = f^*/K$, y ya que todo operador Hilbert-Schmidt sobre K puede ser visto como la restricción a K de su complexificación en H, se sigue que la aplicación $f \to f/K$ de la H*-álgebra real topológicamente simple A en la H*-álgebra real topológicamente simple $\mathrm{H}(K)$ es un $*$-isomorfismo isométrico.

Sea ahora H un espacio de Hilbert complejo y sea J' una anticonjugación en H. Sean $\{1, i, j, k\}$ tales que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ una base de los cuaterniones $\mathbb{H}$. Vía la inmersión canónica de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{H}$, el espacio vectorial complejo H se convierte en un espacio vectorial cuaterniónico por la izquierda, que notaremos $H_{\mathbb{H}}$, definiendo

$$jx := J'(x) \qquad kx := iJ'(x) \qquad \forall x \in H$$

Además podemos definir un producto escalar cuaterniónico sobre H definiendo

$$(x/y)_{\mathbb{H}} = (x/y) - j(J'(x)/y) \qquad \forall x, y \in H$$

para el que la norma asociada es la inicial de H

$$\|x\|_{\mathbb{H}}^2 = \|x\|^2 \qquad \forall x \in H$$

por lo que $\mathsf{H}(H)$ se convierte en un espacio de Hilbert cuaterniónico.

La H*-álgebra real asociada a $(\mathsf{H}(H), \tau_{J'})$ es

$$B := \{ f \in \mathsf{H}(H) \ : \ J'f = fJ' \}$$

que no es otra cosa que el conjunto de los operadores Hilbert-Schmidt sobre H que son $\mathbb{H}$-lineales.

Si $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es un sistema ortonormal completo de $H_{\mathbb{H}}$, entonces $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ $\{J'(x_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ es un sistema ortonormal completo de H, por lo que si $f \in B$ entonces

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \|f(x_\gamma)\|_{\mathbb{H}}^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \|f(x_\gamma)\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \|f(J'(x_\gamma))\|^2 < +\infty$$

y por tanto f es un operador Hilbert-Schmidt sobre $H_{\mathbb{H}}$. Por [14 ; 9.12] se tiene que todo operador f Hilbert-Schmidt sobre $H_{\mathbb{H}}$ pertenece a B y además

$$\sigma_H(f)^2 = 2\,\sigma_{H_{\mathbb{H}}}(f)^2$$

Es claro también que se conserva la adjunción respecto de ambos productos escalares, por lo que podemos asegurar que la aplicación identidad de B en $\mathsf{H}(H_{\mathbb{H}})$ es, salvo un factor positivo, un $*$- isomorfismo isométrico.

Como conclusión podemos enunciar:

17. TEOREMA. *Las únicas H*-álgebras reales asociativas topológicamente simples son las H*-álgebras de los operadores de Hilbert-Schmidt* $\mathsf{H}(H)$ *, donde* H *es un espacio de Hilbert real, complejo o cuaterniónico.*

18. NOTA. El Teorema anterior ha sido probado recientemente, con técnicas muy diferentes a las aquí empleadas, por Balachandran y Swaminatan ([11 ; Teorema 4]. En [19] se lleva a cabo un estudio sistemático de las H*-álgebras reales de Jordan no conmutativas semisimples y topológicamente simples del que, como cabe esperar, también puede obtenerse sin notable esfuerzo adicional el mencionado resultado de Balachandran y Swaminatan (ver [19 ; Nota 3.3]).

C A P I T U L O II

H*-ALGEBRAS DE MALCEV

CAPITULO II

H*-ALGEBRAS DE MALCEV

6. ALGEBRAS ALTERNATIVAS Y DE MALCEV

Sea A un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se define el *jacobiano* de tres elementos x, y, z en A mediante

$$J(x, y, z) := (xy)z + (yz)x + (zx)y$$

Un *álgebra de Lie* es un álgebra A sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ verificando las identidades

i) $xy = -yx$

ii) $J(x, y, z) = 0$

En toda álgebra A sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se puede considerar un nuevo producto, definido por el conmutador de dos elementos x, y en A

$$[x, y] := xy - yx$$

Al espacio vectorial subyacente de A con este nuevo producto se le llama el *álgebra antisimetrizada* de A, que se acostumbra a denotar A^-. Si A es un álgebra asociativa, es bien conocido que su álgebra antisimetrizada A^- es un álgebra de Lie.

La variedad de álgebras en la que nosotros estamos interesados, nace en 1955 a raiz del estudio llevado a cabo por A. Malcev de las identidades satisfechas por las álgebras antisimetrizadas de las álgebras alternativas.

Si x, y, z son elementos de un álgebra, notaremos

$$(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$$

1. DEFINICION. Sea A un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. El álgebra A es un *álgebra alternativa* si para x e y elementos cualesquiera de A se verifica:

$$(x, x, y) = 0 \quad \text{y} \quad (y, x, x) = 0$$

La clase de las álgebras alternativas contiene a la clase de las álgebras asociativas y además toda álgebra alternativa es "próxima" a la clase de las álgebras asociativas en el siguiente sentido

2. TEOREMA DE ARTIN ([43 ; Teorema 3.1], [50 ; Teorema 2.2]). *Un álgebra es alternativa si, y sólamente si, la subálgebra engendrada por dos elementos cualesquiera es asociativa.*

3. DEFINICION. Sea A un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de caracteristica distinta de dos. A es un *álgebra de Malcev* si para x, y, z elementos de A se verifica

$$i) \quad xy = -yx \tag{1}$$

$$ii) \quad J(x, y, xz) = J(x, y, z)x \tag{2}$$

Es rutinario el verificar que el álgebra antisimetrizada de toda álgebra alternativa es un álgebra de Malcev. Es bien conocido (Teorema de Poincare-Birkoff-Witt) que toda álgebra de Lie puede ser vista como una subálgebra del álgebra antisimetrizada de un álgebra asociativa. Sin embargo el problema de si toda álgebra de Malcev puede ser vista como una subálgebra de la antisimetrizada de un álgebra alternativa permanece abierto [21].

Es claro que toda álgebra de Lie es un álgebra de Malcev. También se cuenta con un resultado parcial, análogo al Teorema de Artin, que nos asegura que toda álgebra de Malcev es "próxima" a la clase de las álgebras de Lie.

4. TEOREMA ([41 ; Corolario 4.4]). *La subálgebra engendrada por dos elementos cualesquiera de un álgebra de Malcev es un álgebra de Lie.*

La descripción de las álgebras alternativas centrales simples finito dimensionales llevada a cabo por Zorn [43 ; Teorema 3.17], cuyo resultado fué extendido sin la restricción de finito-dimensionalidad por Kleinfeld (vease el Teorema 7), y la descripción de las álgebras de Malcev centrales simples finito dimensionales llevada a cabo por Kuz'min (vease el Teorema 8), han de ser puntos de referencia para la solución del problema de la descripción de las H*-álgebras alternativas topológicamente simples y de las H*-álgebras de Malcev topológicamente simples.

La presentación de estos resultados es la tarea que emprendemos ahora. Ya que se cuenta en la actualidad con una amplia bibliografía sobre álgebras no asociativas ([50], [28], [43], etc.) donde se puede encontrar una excelente exposición de la Teoría de las álgebras alternativas, sólo vamos a entresacar algunos resultados de interes para nuestro desarrollo. Comenzamos recordando unas álgebras alternativas particulares y con una importante relevancia histórica, las *álgebras de composición.*

5. DEFINICION. Un *álgebra de Cayley* sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un álgebra con unidad sobre $\mathbb{K}$, poseyendo una involución lineal s, llamada *involución cayleyana*, tal que para todo elemento x de A se verifica que

$$x + s(x) \in \mathbb{K}1 \qquad \text{y} \qquad x\,s(x) \in \mathbb{K}1$$

Si (A, s) es un álgebra de Cayley, las aplicaciones t y n de A en $\mathbb{K}$ definidas por

$$t(x)\,1 := x + s(x) \qquad \text{y} \qquad n(x)\,1 := x\,s(x)$$

se llaman respectivamente *traza y norma cayleyanas de* (A, s). Se demuestra sin dificultad que t es lineal, s es una forma cuadrática y para todo elemento x de A se verifica que

$$x^2 - t(x)\,x + n(x)\,1 = 0 \qquad (3)$$

6. DEFINICION. ([26]). Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de dos. Un *álgebra de composición* sobre $\mathbb{K}$ es un álgebra de Cayley sobre $\mathbb{K}$, que es alternativa, y cuya norma cayleyana es una forma cuadrática no degenerada.

El *proceso de Cayley-Dickson* [50 ; p. 28] permite construir a partir de un álgebra de Cayley (A, s) y un escalar no nulo, una nueva álgebra de Cayley con espacio vectorial subyacente $A \times A$. Por tanto, considerando el álgebra de Cayley $(\mathbb{K}, I)$, el cuerpo y la aplicación identidad como involución cayleyana, mediante sucesivas aplicaciones del proceso de Cayley--Dickson, tenemos garantizada la obtención de un álgebra de Cayley de dimensión 2^n para todo número natural n. El *Teorema Generalizado de Hurwitz* [50 ; Teorema 2.1] asegura que, salvo isomorfismo, las álgebras de composición sobre $\mathbb{K}$ son $(\mathbb{K}, I)$ y las obtenidas en las tres primeras aplicaciones del proceso de Cayley-Dickson. Las álgebras ocho-dimensionales así obtenidas son las que se conocen con el nombre de *álgebras de Cayley--Dickson*. Estas álgebras son centrales simples [50 ; Lema 2.3 y Teorema 2.5] y son las únicas álgebras de composición no asociativas [50 ; Lema 2.5].

Si bien posteriormente daremos una materialización concreta de las álgebras de Cayley-Dickson compleja y reales, hemos de hacer notar que distintas elecciones de los escalares no nulos en la aplicación del proceso de Cayley-Dickson no revierten necesariamente en la obtención de álgebras no isomorfas. Así, ya que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, salvo isomorfismo, existe una única álgebra de Cayley-Dickson $C(\mathbb{C})$ [50 ; Teorema 2.6 y Corolario], que es "split", esto es, satisface las siguientes dos condiciones equivalentes [50 ; Lema 2.9]

a) Existen elementos no nulos sobre los que se anula la norma cayleyana.

b) Existen divisores de cero.

En $\mathbb{R}$, sin embargo, salvo isomorfismo, hay dos álgebras de Cayley-Dickson, una "split" $C(\mathbb{R})$ y otra no "split" $\mathcal{O}$ (los octoniones reales de división).

7. TEOREMA DE KLEINFELD ([30] ó [50 ; p. 151]). *Sea A un álgebra alternativa simple que no es asociativa. Entonces el centro del álgebra A es un cuerpo y A es un álgebra de Cayley-Dickson sobre su centro.*

El problema de la determinación de las álgebras de Malcev simples finito-dimensionales es tratado ya en 1962 por Sagle en [41], donde se lleva a cabo el primer estudio sistemático de las álgebras de Malcev. Sagle prueba que si C es un álgebra de Cayley-Dickson sobre $\mathbb{K}$, entonces el álgebra cociente $C^-/\mathbb{K}1$ del álgebra antisimétrizada de C por su centro $\mathbb{K}1$, es

un álgebra de Malcev no-Lie simple sobre $\mathbb{K}$ ([41 ; Ejemplo 3.2] que llamaremos el *álgebra de Malcev asociada al álgebra de composición* C .
Sagle conjetura también que si A es un álgebra de Malcev no-Lie simple finito-dimensional sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{K}$ de característica cero, entonces A es, salvo isomorfismo, el álgebra de Malcev asociada a la única álgebra de Cayley-Dickson sobre $\mathbb{K}$. Sagle da una respuesta afirmativa a su conjetura bajo la hipótesis adicional de que el álgebra contenga un elemento cuyo operador de multiplicación es no nilpotente [42]. Más tarde, Loos en [33] demuestra que esta hipótesis es superflua, terminando así la descripción de las álgebras de Malcev simples finito-dimensionales sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero. El problema de determinar las álgebras de Malcev finito-dimensionales centrales simples sobre un cuerpo arbitrario de característica cero fue resuelto por Kuz'min [31] en 1968. En el mismo año, Kuz'min [32] extiende su resultado a la misma clase de álgebras sobre cuerpos de característica distinta de dos y tres. En concreto obtiene el siguiente teorema.

8. TEOREMA ([32 ; Teoremas 11 y 13]). *Toda álgebra de Malcev central simple finito-dimensional sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ *de característica distinta de dos y tres es ó un álgebra de Lie ó isomorfa al álgebra de Malcev asociada a un álgebra de Cayley-Dickson sobre* $\mathbb{K}$ *. Dos álgebras de este tipo son isomorfas si, y sólo si, las correspondientes álgebras de Cayley-Dickson son isomorfas.*

A tenor de los resultados de Kuz'min y de lo expuesto sobre las álgebras de Cayley-Dickson, sólo hay un álgebra de Malcev no-Lie central simple compleja finito-dimensional y dos álgebras de Malcev no-Lie centrales simples reales finito-dimensionales. Ellas aparecen mediante antisimetrización y posterior cociente por su centro de, repectivamente, la única álgebra de Cayley-Dickson compleja y de las dos álgebras de Cayley-Dickson reales, respectivamente.

Ahora queremos hacer notar que cada álgebra de Cayley-Dickson es reconstruible a partir de su álgebra de Malcev asociada, y de una forma bilineal simétrica en esta. Este proceso inverso es el proceso de "extensión cuadrática", que vamos a ver a continuación.

9. DEFINICION. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de dos. Un álgebra A con unidad 1 sobre $\mathbb{K}$ se dice que es un *álgebra cuadrática* si para todo elemento x de A se verifica que los elementos $1, x$ y x^2 son linealmente dependientes, esto es, existen λ y μ escalares tales que

$$x^2 + \lambda x + \mu 1 = 0$$

Una importante caracterización de las álgebras cuadráticas es la siguiente:

10. TEOREMA ([35 ; Teorema 1]). *Sea W un álgebra anticonmutativa sobre $\mathbb{K}$, cuyo producto notaremos $\wedge$, y sea f una forma bilineal sobre W. Entonces el espacio vectorial $A := \mathbb{K}1 \oplus W$ con el producto definido por*

$$(\alpha 1 + x)(\beta 1 + y) = [\alpha\beta + f(x,y)]1 + [\alpha y + \beta x + x \wedge y]$$

es un álgebra cuadrática sobre $\mathbb{K}$. Recíprocamente, toda álgebra cuadrática sobre $\mathbb{K}$ se obtiene de esta forma.

Es fácil de ver y bien conocido por otra parte que un álgebra cuadrática $A = \mathbb{K} \oplus W$ es de Cayley si, y sólamente si, la forma bilineal f sobre W es simétrica. Así si C es un álgebra de Cayley-Dickson, C es cuadrática (recuerdese (3)). Luego por el Teorema anterior $C = \mathbb{K} I \oplus W$, donde $(W, \wedge)$ es un álgebra anticonmutativa y f una forma bilineal simétrica sobre W lo que hace que W sea un ideal de C^-. Ahora es claro que el álgebra de Malcev asociada a C es isomorfa al álgebra anticonmutativa $(W, \wedge)$.

Vamos ahora a presentar las álgebras de Cayley-Dickson compleja y reales a las que además vamos a dotar de una estructura de H*-álgebra.

Las álgebras de Cayley-Dickson "split" $C(\mathbb{K})$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ pueden ser representadas en la *forma matricial de Zorn* ([50 ; Teorema 2.7]) como sigue:

Los elementos de $C(\mathbb{K})$ son las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{bmatrix} \quad \text{donde } \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ y } x = (x_1, x_2, x_3), \; y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{K}^3$$

La suma de elementos de $C(\mathbb{K})$ y la multiplicación por elementos del cuerpo son las usuales. Sin embargo, la multiplicación viene dada por

$$\begin{bmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & z \\ t & \delta \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha\gamma + (x, t) & \alpha z + \delta x - y \times t \\ \gamma y + \beta t + x \times z & \beta\delta + (y, z) \end{bmatrix}$$

donde, para $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ en $\mathbb{K}^3$, denotamos

$$(x, y) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$x \times y := (x_2 y_3 - x_3 y_2, \; x_3 y_1 - x_1 y_3, \; x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad \textit{(producto vectorial)}$$

En esta concreta materialización, la involución cayleyana viene dada por

$$\varepsilon\begin{bmatrix}\alpha & x\\ y & \beta\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}\beta & -x\\ -y & \alpha\end{bmatrix}$$

y por consiguiente la norma y la traza cayleyanas vienen dadas por

$$t\begin{bmatrix}\alpha & x\\ y & \beta\end{bmatrix} = \alpha+\beta \qquad\qquad n\begin{bmatrix}\alpha & x\\ y & \beta\end{bmatrix} = \alpha\beta-(x\,,\,y)$$

Para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, podemos estructurar $C(\mathbb{K})$ como una H*-álgebra definiendo la involución de H*-álgebra y el producto escalar como sigue

$$\begin{bmatrix}\alpha & x\\ y & \beta\end{bmatrix}^{*} := \begin{bmatrix}\overline{\alpha} & \overline{y}\\ \overline{x} & \overline{\beta}\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}\alpha & x\\ y & \beta\end{bmatrix} / \begin{bmatrix}\gamma & z\\ t & \delta\end{bmatrix}\right) := \alpha\overline{\gamma}+\beta\overline{\delta}+(x/z)+(y/t)$$

donde estamos denotando

$\overline{x} := (\overline{x}_1\,,\overline{x}_2\,,\overline{x}_3)$ la conjugación en cada componente

$(x/y) := x_1\overline{y}_1+x_2\overline{y}_2+x_3\overline{y}_3$ el *producto escalar* en $\mathbb{K}^3$.

Si aplicamos la Proposición 3.2 a la H*-álgebra compleja simple $C(\mathbb{C})$ con la involución lineal transposición

$$\tau\begin{bmatrix}\alpha & x\\ y & \beta\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}\alpha & y\\ x & \beta\end{bmatrix}$$

que claramente es isométrica y conmuta con la involución de H*-álgebra, es inmediato que obtenemos otra vez la H*-álgebra de Cayley-Dickson "split" real $C(\mathbb{R})$. Sin embargo, si aplicamos la Proposición 3.2 a la H*-álgebra compleja simple $C(\mathbb{C})$ con la involución cayleyana, que claramente es isométrica y conmuta con la involución de H*-álgebra obtenemos los octoniones de división reales

$$\mathbb{O} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & x \\ -\bar{x} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \, , \, x \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

los cuales aparecen como una H*-álgebra real topológicamente simple. Así $\mathbb{O} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3$, donde la suma y el producto por números reales de elementos de $\mathbb{O}$ son los usuales, mientras que el producto, la involución de H*-álgebra y el producto escalar vienen dados por

$$(\alpha , x)(\beta , y) = (\alpha\beta - (x/y) \, , \, \alpha y + \bar{\beta} x - \bar{x} \times \bar{y})$$

$$(\alpha , x)^* = (\bar{\alpha} , -x)$$

$$((\alpha , x) / (\beta , y)) = 2 \, Re\left[\alpha\bar{\beta} + (x/y)\right]$$

Ya que el álgebra antisimetrizada A^- de una H*-álgebra A sigue siendo una H*-álgebra para el mismo producto escalar y la misma involución de H*-álgebra de A, tenemos que el cociente de A^- por su ideal anulador tiene una estructura natural de H*-álgebra, isomorfa al complemento ortogonal de $An(A^-)$ en la H*-álgebra A^- (Teorema 1.5). Por consiguiente, las álgebras finito-dimensionales compleja de Malcev no-Lie central simple y reales de Malcev no-Lie centrales simples aparecen de manera natural dotadas de estructura de H*-álgebra. En vista del comentario que acabamos de hacer y de la concreta materialización dada anteriormente de las álgebras de Cayley-Dickson compleja y reales, estas pueden describirse de la siguiente forma:

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, la H*-álgebra de Malcev no-Lie central simple sobre $\mathbb{K}$ asociada al álgebra de Cayley-Dickson "split" $C(\mathbb{K})$ esta formada por los elementos con representación matricial

$$\begin{bmatrix} \alpha & x \\ y & -\alpha \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{K} \quad , \quad x, y \in \mathbb{K}^3$$

La suma y el producto por un escalar son los usuales, mientras que el producto, la involución de H*-álgebra y el producto escalar vienen dados por

$$\left[\begin{bmatrix} \alpha & x \\ y & -\alpha \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} \beta & z \\ t & -\beta \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} (x/\bar{t})-(z/\bar{y}) & 2(\alpha z-\beta x-y\times t) \\ 2(\beta y-\alpha t+x\times z) & -((x/\bar{t})-(z/\bar{y})) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & x \\ y & -\alpha \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{y} \\ \bar{x} & -\bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} \alpha & x \\ y & -\alpha \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} \beta & z \\ t & -\beta \end{bmatrix}\right) = 2\,\alpha\bar{\beta} + (x/z) + (y/t)$$

Así mismo, la H*-álgebra real de Malcev no-Lie central simple asociada a los octoniones de división se identifica con $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^3$.
La suma y el producto por números reales son los usuales. El producto, la involución de H*-álgebra y el producto escalar

$$[(\lambda, x), (\mu, y)] = (2\,Im(x/y),\ i\lambda y - i\mu x - \bar{x}\times\bar{y})$$

$$(\lambda, x)^* = (-\lambda, -x)$$

$$((\lambda, x)/(\mu, y)) = 2(\lambda\mu + Re\,(x/y))$$

Terminamos esta Sección viendo algunos otros resultados que nos serán de utilidad en el desarrollo de las Secciones posteriores.

11. TEOREMA ([15 ; Teorema 2.3.13]). *Sea W una H^*-álgebra compleja anticonmutativa cuya involución de H^*-álgebra es isométrica y cuyo producto notaremos por $\wedge$. El espacio vectorial complejo $A = \mathbb{C} \oplus W$ dotado del producto, la involución y el producto escalar*

$$(\alpha + x)(\beta + y) = [\alpha\beta + (x / y^*)] + [\alpha x + \beta y + x \wedge y]$$

$$(\alpha + x)^* = \overline{\alpha} + x^*$$

$$(\alpha + x / \beta + y) = \alpha\overline{\beta} + (x / y)$$

constituye una H^*-álgebra compleja cuadrática (llamada, la H^*-álgebra cuadrática asociada a la H^*-álgebra anticonmutativa W) topológicamente simple (de hecho simple) si la dimensión de A es distinta de dos.

Recíprocamente, si A es una H^*-álgebra compleja cuadrática de dimensión distinta de dos tal que $\| 1 \| = 1$, entonces A es una H^*-álgebra compleja del tipo anteriormente descrito.

12. PROPOSICION. *Sea W una H^*-álgebra compleja anticonmutativa con involución de H^*-álgebra isométrica y sea A su H^*-álgebra cuadrática asociada. Son equivalentes:*

i) A es alternativa.

ii) Para todo elemento x de W se verifica que

$$L_x^{\,2} = (x / x^*) I - x \otimes x^* \qquad (4)$$

donde L_x denota el operador de multiplicación izquierda por x en la H^*-álgebra anticonmutativa W e I el operador identidad en W.

Demostración. Ya que para cualesquiera tres elementos a, b, c de A se verifica que

$$(a, b, c)^* = -(c^*, b^*, a^*)$$

se deduce que A es alternativa si, y sólo si, $(a, a, b) = 0$. Además, puesto que el asociador es lineal en cada variable y la unidad siempre asocia con cualesquiera dos elementos, se sigue que A es alternativa si, y sólo si, para cualesquiera dos elementos x e y de W se verifica en A que

$$(x, x, y) = 0$$

o lo que es equivalente

$$(x / x^*)\, y - (x / y^*) x - (x / (x \wedge y)^*) - x \wedge (x \wedge y) = 0$$

Ya que W es una H*-álgebra anticonmutativa, tenemos que

$$(x / (x \wedge y)^*) = (x / y^* \wedge x^*) = (x \wedge x / y^*) = 0$$

Además por ser la involución de W isométrica

$$(x / y^*) = (y / x^*)$$

Luego A es alternativa si, y sólo si, para cualesquiera x e y en W se verifica que

$$x \wedge (x \wedge y) = (x / x^*)\, y - (y / x^*)\, x$$

esto es, A verifica (4).

Las siguientes identidades son válidas en toda álgebra de Malcev de caracteristica distinta de dos y tres, su demostración puede verse en [41].

[41 ; (2.5)], $J(x\,,\,xy\,,\,z) = J(x\,,\,y\,,\,z)\,x$ (5)

[41 ; (2.7)], $J(x\,,\,y\,,\,wz) + J(w\,,\,y\,,\,xz) = J(x\,,\,y\,,\,z)\,w + J(w\,,\,y\,,\,z)\,x$ (6)

[41 ; (2.14)], $2\,w\,J(x\,,\,y\,,\,z) = J(w\,,\,x\,,\,yz) + J(w\,,\,y\,,\,zx) + J(w\,,\,z\,,\,xy)$ (7)

[41 ; (2.26)], $J(wx\,,\,y\,,\,z) = w\,J(x\,,\,y\,,\,z) + J(w\,,\,y\,,\,z)\,x - 2\,J(yz\,,\,w\,,\,x)$ (8)

El papel jugado en un álgebra alternativa por el núcleo y el ideal asociador es análogo al de los siguientes dos subconjuntos de un álgebra de Malcev A , que responden a la idea de medir lo "cercana" que está el álgebra A de ser un álgebra de Lie.

$N := \{x \in A : J(x\,,\,A\,,\,A) = 0\}$ llamado el *J-núcleo* de A

$J(A\,,\,A\,,\,A)$ la envolvente lineal de $J(x\,,\,y\,,\,z)$ para $x\,,\,y\,,\,z$ en A.

El siguiente enunciado recoge la información con que se cuenta acerca de ambos subconjuntos. La demostración de estos resultados se lleva a cabo utilizando las identidades (7) y (8) y puede verse en [41 ; Corolario 3.6, Proposición 5.11, Corolario 5.13 y Teorema 5.14].

13. PROPOSICION. *Si* A *es un álgebra de Malcev de característica distinta de dos y tres, entonces:*

i) $J(A\,,\,A\,,\,A)$ *es un ideal de* A .

ii) Si $J(x\,,\,y\,,\,A) = 0$ *, entonces* $xy \in N$.

iii) N *es un ideal de* A .

iv) $N\,J(A\,,\,A\,,\,A) = 0$

v) Si A *es simple, entonces* $A = N$ *ó* $A = J(A\,,\,A\,,\,A)$.

14. COROLARIO. *Sea* A *una* H^**-álgebra de Malcev no-Lie topológicamente simple, entonces*

$$A = \overline{J(A, A, A)} \qquad y \qquad N = 0$$

Demostración. Ya que A es no-Lie tenemos que $J(A, A, A)$ es no nulo, luego su cierre es un ideal cerrado no nulo de A, por tanto coincide con A, en virtud de la simplicidad topológica de ésta. Ahora por el apartado iv) anterior y la continuidad del producto, se sigue que $NA = 0$, y por tanto N esta contenido en el ideal anulador de A, que se reduce a cero por ser A topológicamente simple, luego $N = 0$.

7. H*-ALGEBRAS DE MALCEV COMPLEJAS

Nuestro principal resultado en este Capítulo es el siguiente

1. TEOREMA. *Sea A una H*-álgebra compleja de Malcev no-Lie topológicamente simple. Entonces A es, salvo un múltiplo positivo de su producto escalar, la H*-álgebra de Malcev no-Lie simple asociada al álgebra de Cayley-Dickson compleja $C(\mathbb{C})$* .

La estrategia que seguimos para su demostración es probar que el álgebra cuadrática asociada al álgebra A de nuestro teorema es un álgebra alternativa. Para llegar a esta meta, una de las herramientas claves y en la que nos vamos a centrar para iniciar esta Sección, es la teoría desarrollada por Schue en [45] y [46] para H*-álgebras complejas de Lie.

2. DEFINICION. Sea A una H*-álgebra compleja de Lie de anulador cero. Una subálgebra H de A es una *subálgebra de Cartan* de A si H es una subálgebra conmutativa autoadjunta maximal de A .

Es claro que una subálgebra de Cartan es necesariamente cerrada. También, puesto que el conjunto de todas las subálgebras conmutativas y autoadjuntas de A es inductivo, por el Lema de Zorn, todo elemento x de A tal que $xx^* = 0$ (en particular, todo elemento autoadjunto) está contenido en una subálgebra de Cartan de A .

3. DEFINICION ([46]). Sean A una H*-álgebra compleja de Lie con anulador cero y H una subálgebra de Cartan de A. Para cada funcional lineal f de H notaremos A_f al siguiente subespacio cerrado de A

$$A_f := \{ x \in A : \ hx = f(h)x \quad para\ todo \quad h \quad en \quad H \}$$

Diremos que f es una *raiz de A relativa a* H cuando A_f no se reduzca al cero.

4. TEOREMA. ([46]). *Sea* A *una H*-álgebra compleja de Lie con anulador cero. Si* H *es una subálgebra de Cartan de* A, *entonces* A *tiene una descomposición de Cartan relativa a* H, *esto es*

$$A = \overline{\oplus A_f}$$

donde f *se mueve en el conjunto de las raices de* A *relativas a* H.

Si A es un álgebra compleja y u es un elemento fijo de A notaremos para cada número complejo α

$$A_\alpha := \{ x \in A : \ ux = \alpha x \}$$

Si A_α no se reduce a cero, entonces A_α es el *autoespacio* relativo al *autovalor* α del operador L_u. Se comprueba fácilmente que A_α es un subespacio L_u-invariante de A, cerrado si A es normada. Además, si $\alpha \neq \beta$ entonces $A_\alpha \cap A_\beta = 0$.

El siguiente enunciado recoge algunos resultados de elemental demostración que nos serán útiles.

5. LEMA. *Sea* A *una H*-álgebra compleja y sea* $u=u^*$ *un elemento simetrico de* A, *entonces*

i) L_u *sólo posee autovalores reales.*

ii) $A_\alpha \perp A_\beta$ *si* $\alpha \neq \beta$ *autovalores.*

iii) $A_\alpha^* = A_{-\alpha}$ *si* A *es anticonmutativa.*

Demostración. i) Puesto que para todo elemento u de una H*-álgebra A se verifica que $L_{u^*} = L_u^*$, tenemos que L_u es un elemento autoadjunto de la C*-álgebra $BL(A)$ cuando u es un elemento autoadjunto de A. Luego en tal caso, los valores espectrales, y en particular los autovalores, de L_u son reales.

ii) Si $x \in A_\alpha$ e $y \in A_\beta$, siendo α y β dos autovalores distintos de L_u, entonces

$$(\alpha-\beta)(x/y) = \alpha(x/y) - \beta(x/y) = (\alpha x/y) - (x/\beta y) = (ux/y) - (x/uy) = 0$$

luego $(x/y)=0$.

iii) Ya que $ux = -xu = -(ux^*)^*$, se sigue que $x \in A_\alpha^*$, equivalentemente $ux^* = \alpha x^*$, si, y sólo si, $ux = -\alpha x$, equivalentemente $x \in A_{-\alpha}$.

6. PROPOSICION. *Sea* A *una H*-álgebra compleja de Malcev con involución continua y sea* u *un elemento simétrico de* A. *Entonces* A *es el cierre de la suma ortogonal de los autoespacios del operador* L_u

$$A = \overline{\oplus A_\alpha}$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que A es un álgebra de Lie. Por el Teorema 1.5, $A = An(A) \oplus B$, donde $B = \overline{A^2}$ es una H*-subálgebra de A

con anulador cero. Si $u=a+b$, donde $a\in An(A)$ y $b\in B$, por ser u simétrico, b también lo es, luego existe una subálgebra de Cartan H de B conteniendo a b. Por el Teorema 4, B tiene descomposición de Cartan relativa a H, esto es

$$B=\overline{\oplus B_f}$$

Ahora bien, si $x\in B_f$, entonces

$$ux=(a+b)x=bx=f(b)x$$

lo que prueba que para toda raiz f de B relativa a H se verifica que $B_f\subset A_{f(b)}$, luego

$$B=\overline{\oplus B_f}\subset\overline{\oplus A_{f(b)}}\subset\overline{\oplus A_\alpha}$$

Ya que $L_u(An(A))=0$ se sigue que $An(A)\subset A_0$ y por tanto

$$A=An(A)\oplus B=\overline{\oplus A_\alpha}$$

Sea ahora A una H*-álgebra de Malcev. Si v es un elemento simétrico de A, entonces por el Teorema 6.4, la subálgebra cerrada C engendrada por u y v es una subálgebra de Lie de A. Puesto que C es claramente una H*-álgebra, tenemos, por lo anteriormente demostrado, que

$$v\in\overline{\oplus C_\alpha}\ ,\quad \text{donde}\quad C_\alpha=\{\,x\in C:\ ux=\alpha x\,\}$$

Ya que C_α está contenido en A_α, se sigue que $\overline{\oplus A_\alpha}$ contiene a todos los elementos simétricos de A y por tanto a la totalidad de A.

El siguiente Lema prueba que la descomposición del álgebra en suma hilbertiana de los autoespacios del operador de multiplicación de un elemento simétrico que acabamos de obtener, se reduce en el caso Malcev no-Lie topológicamente simple a tres sumandos particulares. La demostración que damos es una adaptación de la Proposición 3.13 de [42], con respecto a la cual, contamos con la ventaja de que en nuestro caso los subespacios de la descomposición son de naturaleza más sencilla, si bien contamos con la desventaja de la aprioristica eventual infinita dimensión, que será una dificultad a superar.

7. LEMA. *Sea* A *una H*-álgebra compleja de Malcev no-Lie topológicamente simple y sea* u *un elemento simétrico no nulo de* A *. Entonces existe un número real no nulo* α *tal que*

$$A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$$

Para la demostración de este enunciado nos serán necesarias algunas relaciones que ligan a los autoespacios de L_u en la descomposición de la H*-álgebra compleja Malcev no-Lie topológicamente simple A . Dada la excesiva longitud del desarrollo que vamos a llevar a cabo, hemos creido necesaria la subdivisión en etapas, en las que se destacan las relaciones entre los autoespacios de L_u , que nos serán de utilidad tanto para la obtención de nuevas relaciones como para la demostración de los Lemas 7 y 9. Las etapas son:

$$\text{(I)}\begin{cases}\text{(I.1)} & J(u, A_\alpha, A_\alpha) \subset A_{-\alpha} \\ \text{(I.2)} & J(u, A_\alpha, A_\beta) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta\end{cases}$$

(II) $A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$ si $\alpha \neq \beta$

(III) JACOBIANOS DE AUTOESPACIOS

(III.1) $J(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = 0$ si $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$

(III.2) $J(A_\alpha, A_\alpha, A_\beta) = 0$ si $\beta \neq 0, \pm\alpha$

(III.3) $J(A_0, A_0, A_0) = 0$

(IV) PRODUCTOS DE AUTOESPACIOS

(IV.1) $A_\alpha A_\beta = 0$ si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0, \pm\alpha$

(IV.2) $A_0^2 = 0$

(IV.3) $A_\alpha^2 \subset A_{-\alpha}$

(IV.4) $(A_\alpha A_{-\alpha})A_\beta = 0$ si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0, \pm\alpha$

(IV.5) $(A_\alpha A_{-\alpha})A_0 \subset A_\alpha A_{-\alpha}$ si $\alpha \neq 0$

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}(\mathrm{I.1}) & J(u, A_\alpha, A_\alpha) \subset A_{-\alpha} \\ (\mathrm{I.2}) & J(u, A_\alpha, A_\beta) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta\end{cases}
$$

Si α y β son dos autovalores de L_u y $x \in A_\alpha$ e $y \in A_\beta$, entonces por la anticonmutatividad del producto y la identidad (5)

$$
uJ(u, x, y) = -J(u, x, y)u = -J(u, x, uy) = -J(u, x, \beta y) = -\beta J(u, x, y)
$$

Luego

$$
J(u, A_\alpha, A_\beta) \subset A_{-\beta}
$$

Por la antisimetría de J se pueden intercambiar los papeles de α y β obteniendose por tanto

$$
J(u, A_\alpha, A_\beta) \subset A_{-\alpha} \cap A_{-\beta}
$$

De donde se sigue (I.1) y, por el Lema 5.ii), (I.2).

(II) $\quad A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha+\beta} \quad$ si $\quad \alpha \neq \beta$

Si α y β son dos autovalores distintos de L_u, entonces por (I.2) y la definición de jacobiano tenemos

$$
0 = J(u, x, y) = (ux)y + (yu)x + (xy)u =
$$

$$
= \alpha xy + \beta xy - u(xy)
$$

Luego

$$
u(xy) = (\alpha + \beta)(xy)
$$

es decir $xy \in A_{\alpha+\beta}$.

(III) JACOBIANOS DE AUTOESPACIOS

A partir de las identidades (6) y (8) vamos previamente a deducir dos fórmulas que nos serán de utilidad

$$J(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) \subset A_{-\gamma} \quad \text{si} \quad \beta \neq \gamma \neq \alpha \quad \text{y} \quad \alpha + \gamma \neq \beta \tag{9}$$

Si $x \in A_\alpha$, $y \in A_\beta$ y $z \in A_\gamma$, por la identidad (6) tenemos

$$J(x, y, uz) + J(u, y, xz) = J(x, y, z)u + J(u, y, z)x$$

Como $\alpha \neq \gamma$, por (II), $xz \in A_{\alpha+\gamma}$, luego, como $\alpha + \gamma \neq \beta$, por (I.2), $J(u, y, xz) = 0$; también, como $\beta \neq \gamma$, por (I.2), $J(u, y, z) = 0$.. Por tanto la igualdad anterior queda reducida a

$J(x, y, uz) = J(x, y, z)u$ ó equivalentemente $\gamma J(x, y, z) = -uJ(x, y, z)$

lo que prueba la inclusión (9).

$$J(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) \subset A_\alpha \quad \text{si} \quad \beta \neq \gamma \quad \text{y} \quad \beta + \gamma \neq \alpha \tag{10}$$

Si $x \in A_\alpha$, $y \in A_\beta$ y $z \in A_\gamma$, por la identidad (8) tenemos

$$J(xu, y, z) = xJ(u, y, z) + J(x, y, z)u - 2J(yz, x, u)$$

Como $\beta \neq \gamma$, por (II), $yz \in A_{\beta+\gamma}$, luego, por (I.2), como $\beta + \gamma \neq \alpha$ se sigue que $J(yz, x, u) = 0$. Análogamente, por ser $\beta \neq \gamma$ se sigue, por (I.2), que $J(u, y, z) = 0$. Por tanto nos queda

$J(xu, y, z) = J(x, y, z)u$ ó equivalentemente $\alpha J(x, y, z) = uJ(x, y, z)$

lo que concluye la demostración de (10).

(III.1) $J(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = 0$ si $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$

En primer lugar observemos que ya que $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, de las expresiones

$$\beta + \gamma = \alpha \qquad \alpha + \gamma = \beta \qquad \beta + \alpha = \gamma$$

a lo más una sola de ellas puede verificarse. Debido a la antisimetría de J , podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\beta + \gamma \neq \alpha \qquad \alpha + \gamma \neq \beta$$

Ahora, la demostración se concluye, teniendo en cuenta que por la inclusión (10)

$$J(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) \subset A_\alpha \cap A_\beta = 0$$

(III.2) $J(A_\alpha, A_\alpha, A_\beta) = 0$ si $\beta \neq 0, \pm\alpha$

Como $\beta \neq 0$ y $\beta \neq \alpha$, aplicando (9) y (10) obtenemos

$$J(A_\alpha, A_\alpha, A_\beta) \subset A_{-\beta} \cap A_\alpha$$

Como además $\beta \neq -\alpha$ se sigue que $J(A_\alpha, A_\alpha, A_\beta) = 0$.

(III.3) $J(A_0, A_0, A_0) = 0$

Si x_0, y_0, z_0 son elementos de A_0 , entonces

$$J(u, x_0, y_0) = (u x_0) y_0 + (y_0 u) x_0 + (x_0 y_0) u = -u (x_0 y_0)$$

Esta igualdad, junto con la identidad (5) nos da

$$0 = J(u\,,x_o\,,uy_o) = J(u\,,x_o\,,y_o)\,u = (-u\,(x_oy_o))\,u = u\,(u\,(x_oy_o))$$

Por tanto $u\,(x_oy_o) \in A_o$. Pero, por otra parte

$$(u\,(x_oy_o)\,/\,z_o) = (x_oy_o\,/\,uz_o) = 0$$

luego $u\,(x_oy_o) \in A_o^{\perp}$. Así, concluimos que $u\,(x_oy_o) \in A_o \cap A_o^{\perp} = 0$, esto es $x_oy_o \in A_o$: Hemos probado por tanto que

$$A_o^{\,2} \subset A_o \qquad (11)$$

Sea α un autovalor arbitrario de L_u y sea $x_\alpha \in A_\alpha$, por la identidad (7) tenemos

$$2\,x_\alpha J(x_o\,,y_o\,,z_o) = J(x_\alpha\,,x_o\,,y_oz_o) + J(x_\alpha\,,y_o\,,z_ox_o) + J(x_\alpha\,,z_o\,,x_oy_o)$$

por lo que podemos afirmar

$$A_\alpha\,J(A_o\,,A_o\,,A_o) \subset J(A_\alpha\,,A_o\,,A_o^2)$$

que junto con (11) nos lleva a

$$A_\alpha J(A_o\,,A_o\,,A_o) \subset J(A_\alpha\,,A_o\,,A_o) \qquad (12)$$

Puesto que por (III.2) $J(A_\alpha\,,A_o\,,A_o) = 0$ para todo autovalor α no nulo, se sigue de la continuidad del producto y de la descomposición $A = \overline{\oplus A_\alpha}$ (Proposición 6) que

$$A\,J(A_o\,,A_o\,,A_o) = A_o\,J(A_o\,,A_o\,,A_o)$$

De nuevo utilizando (12) obtenemos

$$A\,J(A_o\,,A_o\,,A_o) \subset J(A_o\,,A_o\,,A_o)$$

Por consiguiente $J(A_o\,,A_o\,,A_o)$ es un ideal de A. Como A_o es un subespacio cerrado propio (u es no nulo y A es de anulador cero) de A y, por (11) $J(A_0, A_0, A_0)$ esta incluido en A_0 , se sigue que $\overline{J(A_0, A_0, A_0)}$ es un ideal cerrado propio de A . Ahora la simplicidad topológica de A prueba que

$$J(A_0, A_0, A_0) = 0$$

(IV) PRODUCTO DE AUTOESPACIOS

(IV.1) $A_\alpha A_\beta = 0$ si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0, \pm\alpha$

Veamos previamente que

$$J(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0 \quad \text{y} \quad \beta \neq 0, \pm\alpha$$

Si $\gamma \neq \alpha$ y $\gamma \neq \beta$ se obtiene por (III.1)

Si $\gamma = \alpha$ se obtiene por (III.2)

Si $\gamma = \beta$,entonces, ya que $\alpha \neq 0, \pm\beta$, de nuevo el resultado se deduce de (III.2).

Ahora, la descomposición $A = \overline{\oplus A_\alpha}$ y la continuidad del producto prueban que

$$J(A_\alpha, A_\beta, A) = 0$$

Luego por la Proposición 6.13.ii), $A_\alpha A_\beta$ está incluido en el J-núcleo N de A , el cual se reduce a cero (Corolario 6.14). Luego $A_\alpha A_\beta = 0$, concluyendo la demostración.

(IV.2) $A_o^2 = 0$

Veamos que para todo autovalor α de L_u se verifica que

$$J(A_o, A_o, A_\alpha) = 0$$

Si $\alpha \neq o$, el resultado se sigue de (III.2)

Si $\alpha = o$, el resultado se sigue de (III.3)

Ahora para terminar la demostración, se procede como en el final de la prueba de (IV.1).

(IV.3) $A_\alpha^2 \subset A_{-\alpha}$ si $\alpha \neq o$

Si $x, y \in A_\alpha$, entonces

$$J(u, x, y) = (ux)y + (yu)x + (xy)u = 2\alpha xy + (xy)u$$

Por (I.1), $J(u, x, y) \in A_{-\alpha}$, luego de lo anterior se deduce

$$(L_u - 2\alpha I)(xy) \in A_{-\alpha} \tag{13}$$

O equivalentemente

$$(L_u + \alpha I)(L_u - 2\alpha I)(xy) = 0$$

Ya que los operadores $L_u + \alpha I$ y $L_u - 2\alpha I$ conmutan, podemos escribir

$$(L_u - 2\alpha I)(L_u + \alpha I)(xy) = 0$$

o lo que es equivalente

$$(L_u + \alpha I)(xy) \in A_{2\alpha} \tag{14}$$

De la diferencia de (13) y (14) se deduce que

$$xy \in A_{2\alpha} + A_{-\alpha}$$

con lo que hemos probado

$$A_\alpha^2 \subset A_{2\alpha} + A_{-\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0 \tag{15}$$

Por la linealidad del jacobiano

$$J(u, A_\alpha^2, A_{2\alpha}) \subset J(u, A_{2\alpha}, A_{2\alpha}) + J(u, A_{-\alpha}, A_{2\alpha})$$

Como

$$J(u, A_{2\alpha}, A_{2\alpha}) \subset A_{-2\alpha} \quad \text{y} \quad J(u, A_{-\alpha}, A_{2\alpha}) = 0$$

en virtud de (I.1) y (I.2), respectivamente; tenemos

$$J(u, A_\alpha^2, A_{2\alpha}) \subset A_{-2\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0 \tag{16}$$

Por otra parte para todo elemento $z \in A_{2\alpha}$ tenemos por la identidad (6)

$$J(z, u, xy) + J(x, u, zy) = J(z, u, y)x + J(x, u, y)z$$

Por (II) $zy \in A_{3\alpha}$, luego por (I.2) $J(x, u, zy) = 0$, así como también $J(z, u, y) = 0$, quedando por tanto la anterior igualdad reducida a

$$J(z, u, xy) = J(x, u, y)z$$

Por (I.1) $J(x, u, y) \in A_{-\alpha}$, luego por (II)

$$J(z, u, xy) \in A_\alpha$$

lo que prueba que

$$J(u, A_\alpha^2, A_{2\alpha}) \subset A_\alpha$$

inclusión que comparada con (16) nos da

$$J(u\,,A_\alpha^2\,,A_{2\alpha})=0 \qquad \text{si} \qquad \alpha\neq o \tag{17}$$

Por (15), para $x\,,y\in A_\alpha$ existen $z\in A_{2\alpha}$ y $t\in A_{-\alpha}$ tales que $xy=z+t$.

Para probar (IV.3) nos bastará con demostrar que $z=0$.

Por (17), para w arbitrariamente elegido en $A_{2\alpha}$ se verifica

$$0=J(u\,,xy\,,w)=J(u\,,z+t\,,w)=J(u\,,z\,,w)+J(u\,,t\,,w)$$

Por (I.2) $J(u\,,t\,,w)=0$, luego

$$0=J(u\,,z\,,w)$$

y dada la arbitrariedad de w se tiene

$$J(u\,,z\,,A_{2\alpha})=0$$

Como, por otra parte, por (I.2)

$$J(u\,,z\,,A_\beta)=0 \qquad \text{si} \qquad \beta\neq 2\alpha$$

un razonamiento análogo al llevado a cabo en el final de la demostración de (IV.1) nos lleva a $uz=0$, y por consiguiente $z\in A_o$. Como también $z\in A_{2\alpha}$ y $\alpha\neq o$, se sigue que $z=0$.

(IV.4) $(A_\alpha A_{-\alpha})A_\beta=0$ si $\alpha\neq o$ y $\beta\neq o\,,\pm\alpha$

Si $x\in A_\alpha\,,y\in A_{-\alpha}\,,z\in A_\beta$ entonces por (III.1) $J(x\,,y\,,z)=0$. Esto es

$$(xy)z+(zx)y+(yz)x=0$$

Como, por (IV.1) $zx=0$ e $yz=0$, se sigue que

$$(xy)z=0$$

(IV.5) $(A_\alpha A_{-\alpha})A_0 \subset A_\alpha A_{-\alpha}$ si $\alpha \neq 0$.

Por (III.1)

$$J(A_\alpha, A_{-\alpha}, A_0)=0$$

luego de la definición de jacobiano se obtiene

$$(A_\alpha A_{-\alpha})A_0 \subset (A_0 A_\alpha)A_{-\alpha} + (A_{-\alpha}A_0)A_\alpha$$

Por (II)

$$A_0 A_\alpha \subset A_\alpha \quad \text{y} \quad A_{-\alpha}A_0 \subset A_{-\alpha}$$

de donde se deduce (IV.5).

DEMOSTRACION DEL LEMA 7. La existencia de un autovalor no nulo α de L_u se sigue de la Proposición 6 y el hecho de que u es no nulo y A tiene anulador cero. Como además u es simétrico y A es anticonmutativa, por el Lema 5, se sigue que α es real y $A_{-\alpha}=A_\alpha{}^*$, por lo que $-\alpha$ también es un autovalor de A. Definimos

$$\mathcal{A}_\alpha := A_\alpha A_{-\alpha} + A_\alpha + A_{-\alpha}$$

En virtud de la continuidad del producto y la descomposición de A (Proposición 6) si sigue que $\mathcal{A}_\alpha$ es un ideal de A si, y sólo si, para todo autovalor β de L_u se verifica que

$$\mathcal{A}_\alpha A_\beta \subset \mathcal{A}_\alpha$$

Ello es consecuencia de las siguientes relaciones

$A_\alpha A_\beta = 0$ si $\beta \neq 0, \pm\alpha$ por (IV.1)

$A_0 A_\alpha \subset A_\alpha$ por (II)

$A_\alpha^2 \subset A_{-\alpha}$ por(IV.3)

las obtenidas a partir de las anteriore intercambiando α y $-\alpha$, y

$(A_\alpha A_{-\alpha}) A_\beta = 0$ si $\beta \neq 0, \pm\alpha$ por (IV.4)

$(A_\alpha A_{-\alpha}) A_0 \subset A_\alpha A_{-\alpha}$ por (IV.5)

$(A_\alpha A_{-\alpha}) A_\alpha \subset A_0 A_\alpha \subset A_\alpha$ por (II)

$(A_\alpha A_{-\alpha}) A_{-\alpha} \subset A_0 A_{-\alpha} \subset A_{-\alpha}$ por (II)

Por tanto $\mathcal{A}_\alpha$ es un ideal de A , no nulo ya que contiene a A_α . Ya que A es topológicamente simple se tiene que $A = \overline{\mathcal{A}_\alpha}$. Como además $A_\alpha A_{-\alpha} \subset A_0$ por (II), se sigue del Lema 5.ii) que los tres subespacios cuya suma define $\mathcal{A}_\alpha$ son ortogonales. Ahora, como la suma finita de subespacios ortogonales cerrados de un espacio de Hilbert es un subespacio cerrado, se tiene que

$$A = \overline{\mathcal{A}_\alpha} = \overline{A_\alpha A_{-\alpha}} \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha} \subset A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$$

Luego

$$A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$$

8. COROLARIO. *Si* A *es una* H^**-álgebra compleja Malcev no-Lie topológicamente simple y* u *es un elemento simétrico de* A *, entonces*

$$sp(L_u) = \{ 0 , \| L_u \| , -\| L_u \| \}$$

donde $sp(L_u)$ *denota el espectro del operador* L_u *en la* C^**-álgebra* $BL(A)$.

Demostración. Por ser $A = A_0 \oplus A_\alpha \oplus A_{-\alpha}$ se tiene que

$$sp(L_u) = \{ 0 , \alpha , -\alpha \}$$

Puesto que u es simétrico y $L_u^* = L_{u^*}$ se sigue que L_u es también simétrico, luego

$$|\alpha| = r(L_u) = \| L_u \|$$

donde $r(L_u)$ denota el radio espectral de L_u .

Si X es un espacio normado real y $x_0 , x_1 \varepsilon X$ son elementos linealmente independientes y tales que $\| x_0 \| = \| x_1 \| = 1$, entonces la función f de $[0 , 1]$ en $S(X)$, la esfera unidad de X , definida por

$$f(\lambda) := \frac{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_0}{\| \lambda x_1 + (1-\lambda) x_0 \|}$$

es una función continua que conecta x_0 con x_1 . Esto prueba que la esfera unidad de los espacios reales normados de dimensión mayor o igual que dos es conexa, hecho que utilizaremos en el siguiente resultado, junto con la Teoría de Gelfand ([12 ; § 17]).

9. LEMA. *Sea A una H*-álgebra compleja de Malcev no-Lie topológicamente simple y sea u un elemento simétrico no nulo de A. Entonces $A_0 = \mathbb{C}u$.*

Demostración. Sean $x \in A_\alpha$, $y_0, z_0 \in A_0$. Por (III.2)

$$0 = J(x, y_0, z_0) = (xy_0)z_0 + (z_0 x)y_0 + (y_0 z_0)x$$

Ahora, por (IV.2) $y_0 z_0 = 0$. Luego:

$$(xy_0)z_0 + (z_0 x)y_0 = 0$$

igualdad que en términos de los operadores de multiplicación izquierda de los elementos de A_0 se expresa

$$(L_{z_0} L_{y_0} - L_{y_0} L_{z_0})(A_\alpha) = 0$$

La correspondiente identidad para $A_{-\alpha}$, (IV.2) y el Lema 7 permiten concluir que el conjunto

$$L_{A_0} := \{ L_x : x \in A_0 \}$$

es un subconjunto conmutativo de $BL(A)$. Sea C un subconjunto conmutativo maximal de $BL(A)$ que contiene a L_{A_0}, entonces C es una subálgebra conmutativa cerrada plena de $BL(A)$ que contiene a L_{A_0}. Por el Corolario 8 existe ψ carácter de C tal que

$$\psi(L_u) = \| L_u \|$$

La función F de $Sim(A_0)$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$F(x) := \psi(L_x)$$

es una función lineal, y además, si definimos

$$|x| := \| L_x \| \quad \text{para todo } x \text{ en } Sim(A_0)$$

entonces $Sim(A_0)$ se convierte en un espacio normado real y F es una aplicación continua

$$|F(x)| = |\psi(L_x)| \leq \| L_x \| = |x|$$

Por el Corolario 8, para todo elemento $x \in Sim(A_0)$ tal que $|x| = 1$ se verifica que

$$F(x) = \psi(L_x) \in \{-1, 0, 1\}$$

Por lo tanto, la restricción de F a la esfera unidad del espacio normado $(Sim(A_0), |\ |)$ es una función continua con valores en el conjunto $\{-1, 0, 1\}$, y ya que

$$F\left(\frac{u}{|u|}\right) = 1 \qquad \text{y} \qquad F\left(-\frac{u}{|u|}\right) = -1$$

se tiene que su imagen es no-conexa. Ya que la imagen por una función continua de un conexo es un conexo, obtenemos que la esfera unidad de $(Sim(A_0), |\ |)$ es no-conexa, y por tanto $Sim(A_0)$ es unidimensional, de donde $A_0 = \mathbb{C}u$.

10. COROLARIO. *Si A es una H^*-álgebra compleja de Malcev no-Lie topológicamente simple y u es un elemento simétrico en A, entonces*

$$\| u \|^2 L_u^2 = \| L_u \|^2 (\| u \|^2 I - u \otimes u) \tag{18}$$

Demostración. Si $u = 0$, los dos miembros de la igualdad son nulos. En otro caso, $u \neq 0$, para todo elemento z de A, por los Lemas 7 y 9 y el Corolario 8, se verifica que

$$z = \lambda u + x + y$$

donde

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad , \quad u x = \| L_u \| x \quad \text{y} \quad u y = - \| L_u \| y$$

Por consiguiente

$$L_u^2(z) = \| L_u \|^2 (x + y) = \| L_u \|^2 (z - \lambda u) \tag{19}$$

Como consecuencia de la ortogonalidad en la descomposición de A tenemos que

$$(z / u) = \lambda \| u \|^2$$

y por tanto

$$\lambda u = \frac{(z / u)}{\| u \|^2} u = \frac{u \otimes u}{\| u \|^2} (z)$$

que sustituido en (19) prueba (18).

Para todo espacio de Banach X y para cualesquiera $x, y \in X$ fijos, la función $\alpha \to \| x + \alpha y \|$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es una función convexa por lo que tiene derivadas laterales en todo punto $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Este hecho lo utilizaremos en la demostración del siguiente resultado.

11. LEMA. *Sea A una H*-álgebra compleja de Malcev no-Lie topológicamente simple. Existe un número real positivo l tal que*

$$\| L_u \| = l \| u \|$$

para todo elemento simétrico u de A.

Demostración. Nos bastará con demostrar que

$$\frac{\| L_u \|}{\| u \|} = \frac{\| L_v \|}{\| v \|} \tag{20}$$

para cualesquiera que sean u y v elementos simétricos no nulos de A. Si u y v son linealmente dependientes esto es trivial. Si u y v son linealmente independientes. Sustituyendo u por $u+\alpha v$ en (18), donde α es un número real obtenemos

$$(\| u \|^2 + 2\alpha (u/v) + \alpha^2 \| v \|^2)(L_u^2 + 2\alpha L_u . L_v + \alpha^2 L_v^2) =$$

$$= \| L_u + \alpha L_v \|^2 \{ \| u \|^2 I + 2\alpha (u/v) I + \alpha^2 \| v \|^2 I - u \otimes u -$$

$$- \alpha (u \otimes v + v \otimes u) - \alpha^2 (v \otimes v) \}$$

(donde hemos notado $L_u . L_v = \frac{1}{2} (L_u L_v + L_v L_u)$ (el producto Jordan))

Esto es

$$\| u \|^2 L_u^2 + 2\alpha \left[(u/v) L_u^2 + \| u \|^2 L_u . L_v \right] + F(\alpha) =$$

$$= \| L_u + \alpha L_v \|^2 (\| u \|^2 I - u \otimes u) + \alpha \| L_u + \alpha L_v \|^2 (2 (u/v) I -$$

$$- u \otimes v - v \otimes u) + \| L_u + \alpha L_v \|^2 G(\alpha)$$

donde F y G son funciones de $\mathbb{R}$ en $BL(A)$ tales que

$$\lim_{\alpha\to o^+} \frac{F(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to o^+} \frac{G(\alpha)}{\alpha} = 0 ,$$

por lo que derivando por la derecha en $\alpha = o$ los dos miembros de la igualdad obtenemos

$$2(u/v)L_u^2 + 2\|u\|^2 L_u \cdot L_v =$$

$$= \|L_u\|^2 (2(u/v)I - u \otimes v - v \otimes u) + \mu(\|u\|^2 I - u \otimes u)$$

donde μ es el número real dado por

$$\mu = \lim_{\alpha\to o^+} \frac{\|L_u + \alpha L_v\|^2 - \|L_u\|^2}{\alpha} = 2\|L_u\| \lim_{\alpha\to o^+} \frac{\|L_u + \alpha L_v\| - \|L_u\|}{\alpha}$$

Ahora, sustituyendo L_u^2 , vía la identidad (18), obtenemos

$$2L_u \cdot L_v = \frac{\|L_u\|^2}{\|u\|^2}\left[2(u/v)I - u\otimes v - v\otimes u\right] + \tag{21}$$

$$+ \frac{1}{\|u\|^2}\left[\mu - \frac{2(u/v)\|L_u\|^2}{\|u\|^2}\right]\left[\|u\|^2 I - u\otimes u\right]$$

Intercambiando u y v tendremos que para conveniente número real μ' se verifica que

$$2L_u \cdot L_v = \frac{\|L_v\|^2}{\|v\|^2}\left[2(u/v)I - u\otimes v - v\otimes u\right] + \tag{22}$$

$$+ \frac{1}{\|v\|^2}\left[\mu' - \frac{2(u/v)\|L_v\|^2}{\|v\|^2}\right]\left[\|v\|^2 I - v\otimes v\right]$$

Puesto que u y v son linealmente independientes, se comprueba fácilmente que también los operadores $\{u \otimes u, u \otimes v, v \otimes u, v \otimes v\}$ son linealmente independientes. Además, si el operador identidad I dependiera linealmente de los operadores $\{u \otimes u, u \otimes v, v \otimes u, v \otimes v\}$ entonces existirían escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tales que

$$I = \lambda_1 (u \otimes u) + \lambda_2 (u \otimes v) + \lambda_3 (v \otimes u) + \lambda_4 (v \otimes v)$$

por lo que para todo elemento x de A se verifica que

$$x = \left[\lambda_1 (x / u) + \lambda_2 (x / v)\right] u + \left[\lambda_3 (x / u) + \lambda_4 (x / v)\right] v$$

esto es, la dimensión de A sería dos. Puesto que nuestra álgebra A es de Malcev no-Lie, por el Teorema 6.4, es de dimensión mayor que dos. Luego el conjunto de operadores $\{I, u \otimes u, u \otimes v, v \otimes u, v \otimes v\}$ es también linealmente independiente. Por consiguiente, los coeficientes de $u \otimes v$ en (21) y (22) coinciden, lo que concluye la demostración.

12. COROLARIO. *Si A es una H^*-álgebra compleja de Malcev no-Lie topológicamente simple, entonces existe un número real positivo l tal que para todo x de A se verifica*

$$L_x^2 = l^2 \left[(x / x^*) I - x \otimes x^*\right] \tag{23}$$

Demostración. Por el Lema 11 y el Corolario 10, existe un número real l tal que

$$L_u^2 = l^2 \left[(u / u) I - u \otimes u\right] \tag{24}$$

para todo elemento simétrico u de A. Linealizando (sustituyendo u por

$u+v$) obtenemos que para cualesquiera que sean u y v elementos simétricos de A se verifica la siguiente identidad

$$2L_u \cdot L_v = l^2\left[2(u/v)I - u\otimes v - v\otimes u\right] \qquad (25)$$

Finalmente, ya que todo elemento x de A puede escribirse como $x = u+iv$, donde u y v son elementos simétricos de A, se tiene que

$$L_x^2 = (L_u + iL_v)^2 = L_u^2 - L_v^2 + 2iL_u \cdot L_v$$

Ahora, sustituyendo según (24) y (25), tenemos

$$L_x^2 = l^2\{\left[(u/u) - (v/v) + 2i(u/v)\right]I - \left[u\otimes u - v\otimes u +\right.$$

$$\left.+ i(u\otimes v + v\otimes u)\right]\} = l^2\left[(x/x^*)I - x\otimes x^*\right]$$

FINAL DE LA DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.

Sea B la H*-álgebra obtenida a partir de nuestra H*-álgebra compleja de Malcev no-Lie A multiplicando el producto escalar por el número real positivo l^2, esto es, el producto escalar en B viene dado por

$$[x/y] := l^2(x/y)$$

para cualesquiera x, y elementos de A.

Por el Corolario 12, B satisface la identidad

$$L_x^2 = [x/x^*]I - x\otimes x^*$$

donde ahora $\otimes$ se entiende referido al nuevo producto escalar. Por tanto por la Proposición 6.12 la H*-álgebra cuadrática C asociada a la H*-álgebra compleja anticonmutativa con involución isométrica B, es una

H*-álgebra alternativa. Ya que B no es unidimensional se tiene que la dimensión de C no es dos y por tanto, por el Teorema 6.11, C es una H*-álgebra compleja simple. Puesto que B es una subálgebra Malcev no-Lie del álgebra de Malcev C^- se tiene que C es no-asociativa. Claramente C es un álgebra de composición (con involución cayleyana $s(\lambda+x)=\lambda-x$, para λ en $\mathbb{C}$ y x en B). Luego C es un álgebra de composición no-asociativa, por lo que C tiene que ser el álgebra de Cayley-Dickson compleja $C(\mathbb{C})$ (ver el comentario anterior al Teorema 6.7). Finalmente B (igual al ortogonal de $\mathbb{C}1=An(C^-)$ en C) es la H*-álgebra de Malcev no-Lie asociada a la H*-álgebra $C(\mathbb{C})$.

8. H*-ALGEBRAS ALTERNATIVAS Y DE MALCEV REALES

Una vez cubierto el principal objetivo de este Capítulo, la determinación de las H*-álgebras complejas de Malcev no-Lie (Teorema 7.1), pretendemos en esta Sección aprovechar este resultado, junto con la Teoría sobre H*-álgebras reales desarrollada en el Capítulo I, para determinar las H*-álgebras reales alternativas y de Malcev topológicamente simples. El Teorema 7.1 permite también dar una nueva y fácil demostración del Teorema de Estructura de las H*-álgebras complejas alternativas topológicamente simples (ver Teorema 2), que es lo que hacemos en primer lugar.

En toda álgebra alternativa A es válida la siguiente identidad (ver [50 ; p. 136, (7)])

$$[xy, z] - x[y, z] - [x, z]y = 3(x, y, z) \tag{26}$$

Si restamos de (26) la identidad obtenida intercambiando x e y obtenemos la identidad

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 6(x, y, z) \tag{27}$$

Como una consecuencia inmediata de la identidad (27) se deduce que, para toda álgebra alternativa A, el centro coincide con el anulador de su antisimetrizada

$$Z(A) = An(A^-) \tag{28}$$

1. LEMA. *Sea A una H*-álgebra alternativa con centro cero. Entonces los ideales cerrados de A y de A^- coinciden.*

Demostración. Puesto que todo ideal cerrado de A lo es trivialmente de A^-, veamos el recíproco. Sea M un ideal cerrado de la H*-álgebra de Malcev A^-. Por la Proposición 1.4.ii) se tiene que $M^{\perp}$ es un ideal cerrado de A^- tal que

$$[M, M^{\perp}] = 0$$

Ahora de la identidad (27) se deduce que

$$(A, M, M^{\perp}) = 0$$

Por tanto, por (26), para $x, y \in M$ y $z \in M^{\perp}$ se verifica que

$$[xy, z] = 0$$

Es decir: $M^2 \subset An_{A^-}(M^{\perp})$. En vista de (28) A^- es de anulador cero, con lo que por la Proposición 1.4.vi) se tiene $An_{A^-}(M^{\perp}) = M^{\perp\perp} = M$. Así $M^2 \subset M$, es decir M es una subálgebra de A. Puesto que $M^{\perp}$ está en las mismas condiciones que M, también podemos afirmar que $M^{\perp}$ es una subálgebra de A. Como $A = M \oplus M^{\perp}$, para probar que $AM \subset M$ nos bastará verificar que $MM^{\perp} = 0$. Ya que M y $M^{\perp}$ son subálgebras de A *- invariantes (Proposición 1.4.iv) aplicada a A^-) se sigue para $x, y \in M$ y $z \in M^{\perp}$ que

$$(xz / y) = (z / x^* y) = 0$$

lo que prueba que $MM^{\perp} \subset M^{\perp}$. Un argumento análogo prueba que $MM^{\perp} \subset M$ y por tanto $MM^{\perp} \subset M^{\perp} \cap M = 0$, lo que concluye la demostración.

Este resultado prueba directamente que las H*-álgebras de Lie antisimetrizadas de las H*-álgebras asociativas de los operadores de Hilbert-Schmidt sobre un espacio de Hilbert infinito-dimensional son H*-álgebras topológicamente simples [7 ; § 3].

El siguiente resultado para H*-álgebras complejas alternativas es conocido ([36 ; Teorema 7.12], [37 ; Teorema 5.10], [40 ; Teorema 6.3]). Las demostraciones dadas en [36 y 37] y [40] utilizan técnicas distintas de las nuestras.

2. TEOREMA. *La H*-álgebra de Cayley-Dickson compleja $C(\mathbb{C})$ es, salvo un múltiplo positivo del producto escalar, la única H*-álgebra compleja alternativa no-asociativa topológicamente simple.*

Demostración. Sea A una H*-álgebra compleja alternativa no-asociativa topológicamente simple. Entonces A^- es una H*-álgebra compleja de Malcev no-Lie en virtud de la identidad (27).

Si $Z(A)=0$, se tiene que A^- es una H*-álgebra compleja de Malcev no-Lie topológicamente simple en virtud del Lema 1. Por tanto, por el Teorema 7.1, A^- es siete-dimensional y por consiguiente A es un álgebra compleja alternativa no-asociativa simple siete-dimensional, lo que constituye una flagrante contradicción.

Si $Z(A)\neq 0$, como $C(A)=\mathbb{C}I$ (Teorema 3.5), A debe tener unidad 1, lo que convierte la simplicidad topológica de A en simplicidad algebraica [40 ; Lema 5.2]. Por el Teorema 6.7, A es el álgebra de Cayley-Dickson compleja $C(\mathbb{C})$. La unicidad esencial de la estructura de H*-álgebra topológicamente simple prueba que A es esencialmente la H*-álgebra $C(\mathbb{C})$.

3. TEOREMA. *Sea A una H*-álgebra real de Malcev no-Lie topológicamente simple. Entonces A es, salvo un múltiplo positivo de su producto escalar, una de las siguientes:*

i) La realización de la H-álgebra compleja de Malcev no-Lie simple asociada a la H*-álgebra de Cayley-Dickson compleja $C(\mathbb{C})$.*

ii) La H-álgebra real de Malcev no-Lie simple asociada a la H*-álgebra de Cayley-Dickson "split" real $C(\mathbb{R})$.*

iii) La H-álgebra real de Malcev no-Lie simple asociada a la H*-álgebra de los octoniones reales de división $\mathbb{O}$.*

Demostración. Si A es la realización de una H*-álgebra compleja topológicamente simple entonces por el Teorema de Estructura para el caso complejo (Teorema 7.1) se sigue que A se encuentra en la situación i). En otro caso, por el Teorema 3.4, $A_{\mathbb{C}}$ es una H*-álgebra compleja topológicamente simple. Luego de nuevo por el Teorema de Estructura para el caso complejo, $A_{\mathbb{C}}$ es esencialmente la H*-álgebra compleja de Malcev no-Lie simple asociada a la H*-álgebra compleja de Cayley-Dickson $C(\mathbb{C})$. Por tanto, A es una H*-álgebra real de Malcev no-Lie central (Corolario 3.6) simple finito-dimensional. Ahora el Teorema de Kuz'min (Teorema 6.8) y la unicidad esencial (Sección 4) nos llevan a que A se encuentra en las situaciones ii) ó iii).

4. TEOREMA. *Sea A una H*-álgebra real alternativa no-asociativa topológicamente simple. Entonces A es, salvo un multiplo positivo de su producto escalar, una de las siguientes:*

i) La realización de la H-álgebra de Cayley-Dickson compleja $C(\mathbb{C})$.*

ii) La H-álgebra de Cayley-Dickson "split" real $C(\mathbb{R})$.*

iii) La H-álgebra de los octoniones reales de división $\mathbb{O}$.*

Demostración. Si A es la realización de una H*-álgebra compleja (alternativa no-asociativa) topológicamente simple, entonces por el Teorema de Estructura para H*-álgebras complejas alternativas (Teorema 2) se sigue que A es esencialmente la realización de $C(\mathbb{C})$. En otro caso, A es una H*-álgebra real alternativa no-asociativa central topológicamente simple, pudiendose concluir la demostración como se ha hecho en el caso complejo (Teorema 2).

B I B L I O G R A F I A

BIBLIOGRAFIA

[1] F. R. ALAGIA : *Cartan subalgebras of Banach-Lie algebras of operators*. Pacific J. Math. 98 (1982), 1-15 .

[2] W. AMBROSE : *Structure theorems for a special class of Banach algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 364-386 .

[3] V. K. BALACHANDRAN : *The Weyl group of an L*-algebra*. Math. Ann. 154 (1964), 157-165.

[4] V. K. BALACHANDRAN : *Regular elements of L*-algebras*. Math. Z. 93 (1966), 161-163 .

[5] V. K. BALACHANDRAN : *Simple system of roots in L*-algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 513-524 .

[6] V. K. BALACHANDRAN : *On the uniqueness of the inner product topology in a semi-simple L*-algebra*. Topology 7 (1968), 305-309 .

[7] V. K. BALACHANDRAN : *Simple L*-algebras of classical type*. Math. Ann. 180 (1969), 205-219 .

[8] V. K. BALACHANDRAN : *Automorphisms of L*-algebras*. Tôhoku Math. Journ. 22 (1970), 163-173 .

[9] V. K. BALACHANDRAN : *Real L*-algebras*. Indian J. Pure Appl. Math. 3 (1972), 1224-1246 .

[10] V. K. BALACHANDRAN and P. R. PARTHASARATHY : *Cartan subalgebras of an L*-algebra*. Math. Annalen 166 (1966), 300-301 .

[11] V. K. BALACHANDRAN and N. SWAMINATHAN: *Real H*-algebras*. J. Funct. Anal. 65 (1986), 64-75 .

[12] F. F. BONSALL and J. DUNCAN : *Complete normed algebras*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1973 .

[13] H. BRAUN and M. KOECHER : *Jordan-Algebren*. Springer-Verlag, New York, 1966 .

[14] G. CHOQUET : *Cours d'analyse. Tome II. Topologie*. Masson et C^{ie}, Editeurs. Paris 1969 .

[15] J. A. CUENCA M. : *Sobre H*-álgebras no asociativas. Teoría de estructura de las H*-álgebras de Jordan no conmutativas semisimples*. Tesis Doctoral (Universidad de Granada). Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Málaga. 1984 .

[16] J. A. CUENCA M. *Sur la theorie de structure des H*-algebres de Jordan non conmutatives*. Colloque sur les algebres de Jordan, Montpellier, October 1985.

[17] J. A. CUENCA and A. RODRIGUEZ : *Isomorphisms of H*-algebras* . Math. Proc. Phil. Soc. 97 (1985), 93-99 .

[18] J. A. CUENCA and A. RODRIGUEZ : *Structure theory for noncommutative Jordan H*-algebras*. J. Algebra 106 (1987), 1-14 .

[19] J. A. CUENCA and A. SANCHEZ : *Structure theory for real noncommutative Jordan H*-algebras*. Por aparecer .

[20] J. DIEUDONNE : *Sur les groupes classiques*. 3rd ed., Act. Sci. Ind., No. 1040, Hermann, Paris, 1973 .

[21] V. T. FILIPPOV : *Imbedding of Mal'tsev algebras into alternative algebras*. Algebra Logic 22 (1984), 321-338 .

[22] H. HANCHE-OLSEN and E. STØRMER : *Jordan operator algebras*. Pitman advanced publishing program, Boston-London-Melbourne, 1984 .

[23] P. DE LA HARPE : *Classification des L*-algèbres semi-simples réelles séparables*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 272 (1971), 1559-1561 .

[24] P. DE LA HARPE : *Dérivations des L*-algèbres semi-simples complexes et des algèbres de Lie classiques d'opérateurs compacts*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 273 (1971), 806-809 .

[25] P. DE LA HARPE : *L*-algèbres simples et algèbres de Lie classiques d'opérateurs dans l'espace hilbertien*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 274 (1972), 1096-1098 .

[26] N. JACOBSON : *Composition algebras and their automorphisms*. Rend. Circ. Mat. Palermo 7 (1958), 55-80 .

[27] N. JACOBSON : *Lie algebras*. Dover publication inc., New York, 1962 .

[28] N. JACOBSON : *Structure and representations of Jordan algebras.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol XXXIX, 1969 .

[29] C. N. KELLOG : *Centralizers and H*-algebras.* Pacific J. Math. 17 (1966), 121-129 .

[30] E. KLEINFELD : *Simple alternative rings.* Annals of Math. 58 (1953), 544-547 .

[31] E. N. KUZ'MIN : *Simple Mal'cev algebras over a field of characteristic zero.* Soviet Math. Dolkl. 9 (1968), 1034-1036.

[32] E. N. KUZ'MIN : *Mal'tsev algebras and their representations.* Algebra and logic 7 (1968), 233-244 .

[33] O. LOOS : *Über eine bezeiehung zwischen Malcev-algebren und Lie-tripelsystemen.* Pacific J. Math. 18 (1966), 553-562 .

[34] M. A. NAIMARK : *Normed algebras.* Wolters-noordhoff publishing, Groninger, 1972 .

[35] J. M. OSBORN : *Quadratic division algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 202-221 .

[36] I. PEREZ DE GUZMAN : *Algebras alternativas normadas. Teorema de estructura para H*-álgebras alternativas.* Tesis doctorales de la Universidad de Granada 266. Granada, 1980 .

[37] I. PEREZ DE GUZMAN : *Structure theorem for alternative H*-algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 94 (1983), 437-446 .

[38] C. E. RICKART : *General theory of Banach algebras*. Van Nostrand. New York, 1960 .

[39] A. RODRIGUEZ P. : *The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras*. J. Funct. Anal. 60 (1985), 1-15.

[40] A. RODRIGUEZ P. : *An approach to Jordan-Banach algebras from the theory of nonassociative complete normed algebras*. Colloque sur les algebres de Jordan. Montpellier, October 1985.

[41] A. A. SAGLE : *Malcev algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 426-458 .

[42] A. A. SAGLE : *Simple Malcev algebras over fields of characteristic zero*. Pacific. J. Math. 12 (1962), 1057-1078 .

[43] R. D. SCHAFER : *An introduction to nonassociative algebras*. Academic Press, New York, 1966 .

[44] R. SCHATTEN : *Norm ideals of completely continuous operators*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970 .

[45] J. R. SCHUE : *Hilbert space methods in the theory of Lie algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 69-80 .

[46] J. R. SCHUE : *Cartan decomposition for L*-algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961), 334-349 .

[47] I. UNSAIN : *Classification of the simple separable real L*-algebras*. J. Differential Geometry 7 (1972), 423-451 .

[48] C. VIOLA DEVAPAKKIAN : *Hilbert space methods in the theory of Jordan algebras I*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78 (1975), 293-300.

[49] C. VIOLA DEVAPAKKIAN and P. S. REMA : *Hilbert space methods in the theory of Jordan algebras II*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 307-319 .

[50] K. A. ZHEVLAKOV, A. M. SLIN'KO, I. P. SHESTAKOV and A. I. SHIRSHOV : *Rings that are nearly associative*. Academic Press, New York, 1982 .