

Universidad de Granada  
Departamento de Estadística e I.O



---

**DIFUSIONES ESTOCÁSTICAS NO  
HOMOGÉNEAS LOGNORMALES Y  
GOMPERTZ. PROCESO DE RAYLEIGH.  
APLICACIONES.**

---

**Tesis Doctoral**

**Ramón Gutiérrez Sánchez  
Granada. 2005**

Editor: Editorial de la Universidad de Granada  
Autor: Ramón Gutiérrez Sánchez  
D.L.: Gr. 890 - 2005  
ISBN: 84-338-3405-3

**Universidad de Granada**  
Departamento de Estadística e I.O



**DIFUSIONES ESTOCÁSTICAS NO  
HOMOGÉNEAS LOGNORMALES Y  
GOMPERTZ. PROCESO DE RAYLEIGH.  
APLICACIONES.**

**Tesis Doctoral**

**Ramón Gutiérrez Sánchez**  
Granada. 2005



Ramón Gutiérrez Sánchez

**DIFUSIONES ESTOCÁSTICAS NO  
HOMOGÉNEAS LOGNORMALES Y  
GOMPERTZ. PROCESO DE RAYLEIGH.  
APLICACIONES.**

Memoria de Tesis presentada por Ramón  
Gutiérrez Sánchez para optar al grado de  
Doctor por la Universidad de Granada.

Vº Bº  
Director de Tesis

Fdo. Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez Dr. D. Francisco Torres Ruiz



# Índice general

Introducción ix

## I Procesos Lognormales multivariantes no homogéneos con factores exógenos. 1

<b>1. Proceso Lognormal multivariante no homogéneo con factores exógenos comunes</b>	<b>3</b>
1.1. Definición del Modelo . . . . .	3
1.2. Cálculo de los momentos . . . . .	5
1.2.1. Tendencia . . . . .	7
1.2.2. Varianza . . . . .	8
1.2.3. Covarianza en un mismo instante de tiempo . . . . .	9
1.2.4. Función de covarianzas en general . . . . .	10
1.3. Cálculo de los estimadores máximo-verosímiles . . . . .	14
1.4. Distribución de los estimadores . . . . .	17
1.4.1. Distribución de $z$ y $\text{Vec}(z)$ . . . . .	17
1.4.2. Distribución $\hat{\beta}$ . . . . .	18
1.4.3. Distribución de $\hat{A}$ . . . . .	19
1.5. Contrastes de hipótesis . . . . .	20
<b>2. Proceso Lognormal multivariante no homogéneo con factores exógenos distintos para cada variable</b>	<b>21</b>
2.1. Definición del modelo . . . . .	21
2.2. Cálculo de los momentos . . . . .	24
2.2.1. Tendencia . . . . .	24
2.2.2. Varianza . . . . .	26
2.2.3. Covarianza en un mismo instante de tiempo . . . . .	27
2.2.4. Función de covarianzas en general . . . . .	30
2.3. Estimación máximo-verosímil de los parámetros del proceso . . . . .	34
2.3.1. . . . .	34
2.3.2. . . . .	35
2.3.3. . . . .	36

---

2.4.	Cálculo de la matriz de información de Fisher . . . . .	42
2.5.	Distribución de los estimadores . . . . .	45
2.5.1.	Distribución de $Z$ y del $\text{Vec}(Z)$ . . . . .	45
2.5.2.	Distribución del $\text{Vec}(\hat{\Delta}')$ . . . . .	46
2.5.3.	Distribución de $\hat{A}$ . . . . .	47
2.5.4.	Comparación con el modelo sin ceros . . . . .	48
2.6.	Contrastes de hipótesis . . . . .	49
<b>3.</b>	<b>Modelo con un vector exógeno concreto y caso bidimensional</b>	<b>51</b>
3.1.	Modelo con un vector exógeno concreto funcional . . . . .	51
3.1.1.	Cálculo de la tendencia y la varianza . . . . .	51
3.1.2.	Estimación máximo-verosímil . . . . .	53
3.1.3.	Matriz de información de Fisher . . . . .	55
3.2.	Caso bidimensional con un factor exógeno distinto para cada variable endógena . . . . .	56
3.2.1.	Cálculo de $B$ . . . . .	57
3.2.2.	Construcción de la verosimilitud . . . . .	59
<b>4.</b>	<b>Estudio de una extensión no homogénea en el Modelo de Di- fusión Lognormal unidimensional y bidimensional</b>	<b>61</b>
4.1.	Estudio de una extensión no homogénea en el Modelo de Difu- sión Lognormal unidimensional. . . . .	61
4.1.1.	Ecuaciones de Kolmogorov . . . . .	62
4.1.2.	Estudio de un caso particular . . . . .	62
4.1.3.	Estimación máximo-verosímil . . . . .	64
4.2.	Estudio de una extensión no Homogénea en el Modelo de Difu- sión Lognormal bidimensional . . . . .	68
4.2.1.	Modelo y caracterización . . . . .	68
4.2.2.	Estudio de un caso particular . . . . .	74
4.2.3.	Estimación máximo-verosímil de los parámetros . . . . .	76
<b>5.</b>	<b>Modelo Lognormal bidimensional con factores exógenos distin- tos para cada proceso componente: El Producto Interior Bruto y el Precio de la Vivienda en España</b>	<b>87</b>
5.1.	Introducción: Problema real considerado . . . . .	87
5.1.1.	. . . . .	87
5.1.2.	. . . . .	88
5.1.3.	. . . . .	89
5.2.	Resultados . . . . .	89
5.2.1.	Comparación de las estimaciones de los parámetros corres- pondientes a ambos modelos . . . . .	89
5.2.2.	Comparación de las funciones tendencias con y sin con- dicionar ajustadas . . . . .	90



---

5.2.3. Conclusiones . . . . .	91
-------------------------------	----

## **II Otros procesos: Proceso Gompertz homogéneo y no homogéneo y Proceso de Rayleigh 97**

<b>6. Proceso de Difusión de Gompertz Univariante homogéneo y no homogéneo. Modelización del Parque Total de Vehículos en España 99</b>	<b>99</b>
6.1. Proceso de difusión de Gompertz univariante . . . . .	99
6.1.1. Transformación de difusiones al proceso de Wiener. Método de la transformación de Ricciardi . . . . .	99
6.1.2. El modelo de Gompertz . . . . .	100
6.1.3. Momentos . . . . .	102
6.1.4. Inferencia en el proceso Gompertz: Estimación de parámetros . . . . .	102
6.2. Proceso de Gompertz con factores exógenos . . . . .	105
6.2.1. Concepto y caracterización . . . . .	105
6.2.2. Momentos de las variables endógenas . . . . .	107
6.2.3. Estimación de los parámetros . . . . .	108
6.3. Proceso de difusión Gompertz no homogéneo con factores exógenos particulares . . . . .	109
6.3.1. Modelo . . . . .	109
6.3.2. Densidad de transición y funciones tendencia . . . . .	109
6.3.3. Inferencia en el modelo: estimación de parámetros y de funciones tendencia . . . . .	110
6.4. Aplicación del modelo Gompertz al estudio del parque de vehículos en España . . . . .	113
<b>7. Rayleigh diffusion process: statistical inference and applications. The life expectancy at birth in Andalusia 133</b>	<b>133</b>
7.1. Introduction . . . . .	133
7.2. The model and its trend functions . . . . .	135
7.2.1. Rayleigh diffusion process model . . . . .	135
7.2.2. Computation of the trend function . . . . .	136
7.3. Parameter estimation . . . . .	138
7.3.1. Estimation of drift parameters . . . . .	138
7.3.2. Estimation of the diffusion coefficient . . . . .	140
7.4. Applications and simulation . . . . .	141
7.4.1. Applications . . . . .	141
7.4.2. Simulation . . . . .	157
7.4.3. Conclusion and discussion . . . . .	157

---

<b>A. Anexos</b>	<b>161</b>
A.1. Estudio del cambio de variable . . . . .	161
A.2. Operaciones matriciales . . . . .	163
A.3. Notas sobre la normal matricial . . . . .	167
<b>B. Bibliografía</b>	<b>169</b>

# Índice de gráficos

5.1. Tendencia estimadas condicionadas con factores exógenos comunes para $X_1$ . . . . .	94
5.2. Tendencia estimadas condicionadas con factores exógenos comunes para $X_2$ . . . . .	94
5.3. Tendencias estimadas no condicionadas para $X_1$ con factores distintos . . . . .	95
5.4. Tendencias estimadas no condicionadas para $X_2$ con factores distintos . . . . .	95
5.5. Tendencias estimadas condicionadas para $X_1$ con factores distintos	96
5.6. Tendencias estimadas condicionadas para $X_2$ con factores distintos	96
6.1. Tendencia estimada para la variable “Parque Total de Vehículos” según la distribución Gompertz . . . . .	117
6.2. Tendencia estimada para la variable “Parque Total de Turismos” según la distribución Gompertz . . . . .	119
6.3. Tendencias estimada para a variable “Parque Total de Turismos de Gasolina” según la distribución Gompertz . . . . .	121
6.4. Tendencias estimadas para la variable “Parque Total de Turismos de Gasoil” según la distribución Gompertz . . . . .	123
6.5. Tendencia estimada para la variable “Parque Total de Vehículos” según una distribución lognormal . . . . .	125
6.6. Tendencia estimada para la variable “Parque Total de Turismos” según una distribución lognormal . . . . .	127
6.7. Tendencias estimadas para la variable “Parque Total de Turismos de Gasolina” según una distribución lognormal . . . . .	129
6.8. Tendencias estimadas para la variable “Parque de Turismos Gasoil” según una distribución lognormal . . . . .	131
7.1. Fit and forecast of $X(t)$ , using ECTF . . . . .	144
7.2. Fit and forecast of $Y(t)$ , using ECTF . . . . .	146
7.3. Fit and forecast of $X_1(t)$ , using ECTF . . . . .	148
7.4. Fit and forecast of $X_2(t)$ , using ECTF . . . . .	150
7.5. Fit and forecast of $Z_1(t)$ , using ECTF . . . . .	153

---

7.6. Fit and forecast of $Z_2(t)$ , using ECTF . . . . .	156
7.7. A simulation of the trajectory of SRDP . . . . .	158
7.8. A simulation of the trajectory of SRDP . . . . .	158

# Índice de tablas

5.1. Tendencias en el modelo lognormal con factores iguales . . . . .	92
5.2. Tendencias en el modelo lognormal con factores distintos para cada variable . . . . .	93
6.1. Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Vehículos” según la distribución Gompertz . . . . .	116
6.2. Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Turismos” según la distribución Gompertz . . . . .	118
6.3. Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Turismos de Gasolina” según la distribución Gompertz . . .	120
6.4. Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Turismos de Gasoil” según una distribución Gompertz . . .	122
6.5. Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Vehículos” según una distribución lognormal . . . . .	124
6.6. Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Turismos” según una distribución lognormal . . . . .	126
6.7. Valores observados y predichos para la variable “Total de Turismos de Gasolina” según una distribución lognormal . . . . .	128
6.8. Valores observados y predichos para la variable “Parque Total de Turismos Gasoil” según una distribución lognormal . . . . .	130
6.9. Estimaciones de los parámetros de la distribución Gompertz . .	131
6.10. Estimaciones de los parámetros para la distribución lognormal .	131
7.1. Observed values and Predicted values of $X(t)$ . . . . .	143
7.2. Observed values and Predicted values of $Y(t)$ . . . . .	145
7.3. Observed values and Predicted values of $X_1(t)$ . . . . .	147
7.4. Observed values and Predicted values of $X_2(t)$ . . . . .	149
7.5. Observed values and Predicted values of $Z_1(t)$ . . . . .	151
7.5. continuation . . . . .	152
7.6. Observed values and Predicted values of $Z_2(t)$ . . . . .	154
7.6. continuation . . . . .	155
7.7. Estimation of Parameters . . . . .	156



# Introducción

## Objetivo de la Tesis

Esta tesis tiene como objetivo proponer y estudiar diversos procesos estocásticos de difusión, homogéneos y no homogéneos, en sus aspectos probabilístico y estadístico. Y, también, pretende probar la capacidad que dichos procesos tienen para la modelización, ajuste y predicción de fenómenos estocásticos reales de muy distintos campos científicos (Economía, Energía, Demografía Estadística, Crecimiento de Poblaciones, Física Teórica, etc).

Concretamente en la Tesis se estudian los siguientes procesos:

- a) Un proceso de la familia Lognormal multivariante, no homogéneo, cuya no homogeneidad viene determinada por un conjunto de variables temporales exógenas que afectan al parámetro vectorial de tendencia del proceso, de tal manera que cada variable endógena está afectada por uno y sólo uno de los factores exógenos (Capítulo 2 de la tesis).
- b) Distintos procesos Lognormales, univariantes y bivariantes, no homogéneos, ligados a la Teoría de tiempos de primer paso en procesos de difusión no homogéneos (Capítulos 3 y 4 de la Tesis).
- c) Proceso tipo Gompertz univariante, homogéneo y no homogéneo, y el proceso de Rayleigh, univariante y homogéneo (Capítulo 6 y 7)

Por otra parte, en la Bibliografía existen pocos casos de aplicación de procesos de difusión a datos reales experimentales, siendo lo usual utilizarlos para modelización teórica, por ejemplo, en Neurociencias. En esta Tesis todos los modelos estudiados son aplicados al análisis de la evolución y predicción en casos reales concretos de interés en diversos campos científicos: el estudio bivariable del “PIB y Precio de Vivienda nueva en España”; el estudio del “Parque de Vehículos, según carburante utilizado, en España”; y el estudio de la “Esperanza de vida al nacer en Andalucía, según sexo”. En estos ejemplos de aplicación se ajustan estadísticamente los procesos estudiados en esta Tesis a los correspondientes datos reales, de modo que no son, solamente, nuevos casos

de modelización teórica, sino que son también una muestra de cómo estos procesos constituyen una importante herramienta de modelización, alternativa y complementaria, a otros métodos de modelización determinísticos o estadísticos (curvas de crecimiento, series cronológicas, métodos econométricos, etc).

Los objetivos de esta Tesis se inscriben en los de la Línea de Investigación que, sobre Procesos Estocásticos de Difusión, se desarrolla en el Departamento de Estadística e I.O. de la Universidad de Granada desde 1987 (Grupo FQM-147 del Plan Andaluz de Investigación), y dichos objetivos están estrechamente relacionados con objetivos y resultados de los Proyectos Nacionales de Investigación PB94-1041; PB97-0855; BFM2000-0602 y BFM2002-03636, desarrollados por miembros del mencionado Grupo.

## Antecedentes del tema

### Sobre el proceso Lognormal

El proceso lognormal univariante y multivariante y sus extensiones no homogéneas obtenidas introduciendo factores exógenos (véase Capítulo 1 de esta Tesis), han sido estudiados y aplicados ampliamente. La investigación de estos modelos, desde los puntos de vista de las ecuaciones adelantadas y atrasadas de Kolmogorov y de las EDE de Itô han sido establecidas en **Gutiérrez et al. (1991)**, **Gutiérrez, González, and Torres (1997)** y **Torres (1993)**. También han sido investigados distintos problemas de índoles probabilístico y estadístico. Por ejemplo, el problema de “tiempo de primer paso” por determinados tipos de barreras fue abordado en **Gutiérrez, Juan, and Román (1991)**, **Gutiérrez, Román, and Torres (1995)** y **Gutiérrez et al. (1997)**. Y problemas relativos a la inferencia estadística (estimación y contrastes de hipótesis, bandas de confianza, etc.) son abordados, por ejemplo, en **Gutiérrez, Román, and Torres (1999)** y **Gutiérrez, Román, and Torres (2001)**.

Desde el punto de vista de las aplicaciones a datos reales, se han considerado, por ejemplo, problemas de descripción y predicción de distintas variables macroeconómicas como el “Producto Interior Bruto” (GNP) en España o estudios sobre la evolución de consumos energéticos (gasolinas, gas natural, etc) en España. En estos casos se consiguieron buenas predicciones a corto y medio plazo de las variables consideradas, utilizando las tendencias estimadas de los procesos lognormales ajustados (ver Capítulo 5 de esta Tesis para más detalles al respecto).



## Sobre el proceso Gompertz

En las últimas décadas, se han desarrollado modelos determinísticos de difusión (“S-shaped curved”) que han sido aplicados con éxito para el ajuste de fenómenos de crecimiento en muchos campos científicos y en particular al estudio de la difusión de innovaciones técnicas o de nuevos productos comerciales. Por ejemplo, modelo de crecimiento determinísticos tales como el Logístico, Bass, Richard o Gompertz, entre otros, están basados sobre hipótesis de crecimiento que, en principio son válidas para modelizar la evolución de ciertos fenómenos reales. En particular, el modelo de crecimiento Gompertz, ha sido aplicado con éxito para describir el crecimiento de poblaciones animales o celulares, así como para estudiar niveles de stocks de productos manufacturados, por ejemplo en **Franses (2002)**. Estos modelos determinísticos han sido extendidos a sus respectivas versiones estocásticas, formuladas a partir de las ecuaciones diferenciales estocásticas que recogen las respectivas hipótesis de crecimiento en términos aleatorios. Por ejemplo **Giovanis and Skiadas (1999)** utilizan un proceso logístico para estudiar el consumo de electricidad en Grecia y EE.UU. y **Skiadas and Giovani (1997)** utilizan un proceso estocástico de Bass para estudiar, también, el consumo de electricidad en Grecia.

En particular, un proceso estocástico de Gompertz, ha sido estudiado como modelo teórico en **Ricciardi (1977)** y aplicado al crecimiento celular en **Ferrante et al. (2000)**, utilizando muestreo continuo. Otros procesos de tipo Gompertz también han sido introducidos en la Bibliografía, por ejemplo, el modelo de Tan (**Tan 1986**) construido a partir de un proceso de nacimiento y muerte, y aplicado a datos reales, por ejemplo en **Troynikov and Gorfine (1998)**. En referencia al proceso de Gompertz introducido por **Ricciardi (1977)** y aplicado también, por ejemplo por **Capocelli and Ricciardi (1974b)**, cabe indicar que se trata de un proceso Gompertz homogéneo y univariante y que su utilización es fundamentalmente a nivel de modelización teórica, no realizándose inferencia estadística alguna. Lo mismo cabe decir de las recientes aplicaciones del proceso Gompertz aplicado a la Física teórica, en la teoría de sistemas estocásticos con retraso, como puede verse, por ejemplo en **Frank (2002)**.

Simultáneamente al desarrollo de este Capítulo de la Tesis, también se ha considerado la inferencia de tipo continuo sobre el proceso Gompertz, en **Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi (2003a)** y **Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi (2004)**, metodología que ha sido utilizada con éxito en la modelización y análisis del consumo de gas natural en España (**Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi 2005b**), línea de trabajo en la que participa también el autor de esta Tesis y que no ha sido incluida en la misma al estar ésta dedicada al estudio de problemas de inferencia estadística basada

en muestreo discreto.

El estudio del proceso Gompertz, según la definición de **Ricciardi (1977)**, que en el caso homogéneo y no homogéneo se trata en el Capítulo 6 de esta Tesis, fue abordado inicialmente en **Nafidi (1997)**, de manera parcial. Y otra aplicación real distinta de la desarrollada de manera original en dicho Capítulo 6, sobre el estudio del “Parque de vehículos en España” y con la misma metodología del modelo Gompertz no homogéneo con inferencia basada en muestreo discreto, ha sido realizada en **Gutiérrez et al. (2005a)**, en el que se modeliza la evolución del precio de la vivienda nueva en España.

Por tanto se deduce de lo anterior, que el modelo estocástico Gompertz necesita ser completado en dos aspectos, uno obtener versiones no homogéneas del mismo y otro construir una inferencia estadística basada en muestreo discreto en el tiempo. Ambas cuestiones son objeto de esta Tesis (véase Capítulo 6).

### Sobre el proceso de Rayleigh

El proceso de difusión de Rayleigh, desde sus orígenes (**Rayleigh 1902**), ha sido utilizado ampliamente en la Física. Por ejemplo “el radial Ornstein-Uhlenbeck process” un caso especial del proceso de Rayleigh general, aparece de manera natural relacionado con la descripción del “optical field” mediante un par de procesos Ornstein-Uhlenbeck, que a su vez describen los comportamientos real e imaginaria de un campo eléctrico, de tal manera que la ecuación diferencial estocástica de Itô de la amplitud correspondiente, coincide con la ecuación diferencial estocástica de una difusión de Rayleigh (ver por ejemplo, **Gardiner (1990)**).

En las últimas décadas el proceso de Rayleigh, o alguno de sus casos particulares, aparece involucrado en importantes problemas teóricos y prácticos de la Modelización Estocástica en campos diversos. Así por ejemplo, en la teoría de los Procesos Puntuales, concretamente en la modelización mediante el proceso de **Cox (1955)**, un proceso estacionario radial de Ornstein-Uhlenbeck, desempeña un importante papel a partir del trabajo de **Clifford and Wei (1993)**, en el que se demuestra que si un proceso de Cox tiene una intensidad que es el cuadrado de un tal proceso, entonces es equivalente a un proceso de muerte en un “simple stationary immigration, birth and death process”, con las ventajas que ello lleva consigo, por ejemplo, en cuanto a su simulación.

Recientemente, por ejemplo en **Davidov and Linetsky (2001)**, el proceso de difusión de Rayleigh ha sido considerado también en el contexto de los modelos de “path-dependent options” de la Economía y Finanzas estocásticas.

Concretamente, el proceso de Rayleigh (proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck) es utilizado en relación con importantes modelos formulados bajo la hipótesis de que la volatilidad no sea constante, sino que sea función del “the underlying asset price”. A partir de las difusiones estocásticas CEV (Constant elasticity of variance) o procesos de Cox (**Cox 1955**), que incluyen como casos particulares las difusiones, lognormales del modelo de Black and Scholes (**Black and Scholes 1973**), la de Merton, (**Merton 1973**), la de Cox-Ross (**Cox and Ross 1976**) y otras, se puede demostrar que existe una cierta transformación funcional entre dichas difusiones CEV y la difusión de Rayleigh y sus casos particulares. Los modelos CEV, y en particular el de Rayleigh, se muestran hoy día como modelos idóneos en caso reales, en los que el modelo Black-Scholes y otros citados, resultan ser insuficientes para obtener buenos ajustes. En el artículo citado de **Davidov and Linetsky (2001)** se recogen diversas simulaciones de las difusiones citadas y algunos ajustes a situaciones reales de aplicación en la Teoría de Opciones y Riesgo. En otros campos científicos, y en particular en Ciencias Biomédicas y otras relacionadas (Demografía Estadística, Crecimiento de poblaciones celulares), no conocemos aplicaciones del proceso Rayleigh a la modelización teórica o a ajustes estadísticos de datos reales observados.

Por otra parte, **Giorno et al. (1986)**, tomando como base la definición, en sentido amplio, de difusión de Rayleigh (ver Sección 7.2.1 de esta Tesis), establecen la teoría básica probabilística de dicho proceso, obteniendo su “función de densidad de transición” y la “densidad de tiempo de primer paso por barreras constantes arbitrarias”, todo ello en base a las ecuaciones de Kolmogorov correspondientes. En cuanto a la Inferencia Estadística en el Proceso Rayleigh, particularmente en lo que a estimación de sus parámetros se refiere (drift and difusión parameters), hay que decir que no ha sido tratada en la Bibliografía de una manera completa e integrada (estimación de ambos tipos de parámetros). Respecto de los parámetros drift y en el caso de un proceso Rayleigh (radial Ornstein-Uhlenbeck) con coeficiente de difusión la unidad, por tanto un modelo Rayleigh muy particular con volatilidad constante la unidad, **Prakasa Rao (1999)** considera la estimación basada en “eigenfunctions”.

En todos los trabajos citados y en otros similares, el proceso de Rayleigh ha sido estudiado teóricamente desde diversos punto de vista y aplicado a la modelización estructural teórica de los fenómenos antes citados, pero no se ha realizado un estudio, que permita obtener estimadores de sus parámetros por métodos generales de la Inferencia Estadística paramétrica, de tal manera que el modelo de Rayleigh pueda ser estadísticamente ajustado a datos reales obtenidos por muestreo continuo en el tiempo (trayectorias muestrales) o por muestreo discreto (observaciones en una discretización del tiempo).

## Organización de la presente memoria de Tesis Doctoral y principales aportaciones realizadas.

Esta tesis se ha organizado en dos partes, una primera sobre procesos de difusión Lognormales, univariantes y multivariantes, no homogéneos con factores exógenos, y una segunda parte sobre otros procesos de difusión, concretamente sobre el proceso Gompertz homogéneo y no homogéneo univariante y sobre el proceso de Rayleigh univariante homogéneo.

A continuación resumimos el contenido de cada Capítulo haciendo hincapié en las aportaciones originales contenidas en cada uno de ellos.

- i) En el **Capítulo 1**, a manera de introducción a los temas principales de esta Tesis, se recopilan los resultados conocidos sobre el Modelo de Difusión Lognormal Multivariante no homogéneo, cuyo parámetro tendencia depende de un conjunto de factores exógenos (variables que dependen del tiempo y que son controlables en su comportamiento al margen de las variables endógenas del proceso) que afectan de manera común a todas las variables endógenas componentes del proceso multivariante. Los resultados que se recogen, se refieren al estudio probabilístico básico del Modelo (Momentos, Tendencias y Tendencias Condicionadas, funciones covarianzas, etc) realizado en base a las ecuaciones de Kolmogorov correspondientes, por un lado; y por otro la Estimación de los parámetros del Modelo y de las funciones momento con las distribuciones correspondientes en el muestreo como base para las construcciones de los Test de Hipótesis sobre dichos parámetros. En el caso de muestreo discreto, a partir de la verosimilitud condicionada asociada, **Torres (1993)**, desarrolló los resultados básicos aquí expuestos; y en el caso de muestreo continuo, **Gutiérrez et al. (1991)** obtuvieron los correspondientes resultados a partir de la ecuación estocástica de Itô asociada al proceso correspondiente.
- ii) En el **Capítulo 2** se estudia un Modelo de Proceso Lognormal multivariante no homogéneo en el que cada variable endógena es afectada por un factor exógeno diferente a los que afectan a las restantes componentes endógenas del proceso multivariante. La experiencia de aplicación a datos reales, especialmente de tipo económico, conduce al hecho de que en muchas situaciones reales, en efecto, cada variable endógena es afectada significativamente por factores diferentes, es decir por factores exógenos no comunes a las variables endógenas. La situación es similar a la que se plantearía en un Modelo Lineal de Regresión múltiple multivariante en el que el conjunto de regresores para cada variable dependiente es distinto para cada una de ellas o en Análisis Factorial confirmatorio con

“ceros estructurales”. Técnicamente hablando, este Modelo que proponemos podría interpretarse como un caso particular del Modelo Lognormal Multivariante con factores comunes para todas las variables (Capítulo 1) tomando coeficientes teóricos nulos de los factores exógenos, de tal manera que únicamente el respectivo coeficiente de un factor distinto para cada variable, fuese no nulo.

Evidentemente, este Modelo “con ceros” estructurales no puede estudiarse en general, y en particular desde el punto de vista de la Inferencia Estadística (estimación de parámetros, contrastes de hipótesis), como un caso particular del Modelo General (Capítulo 1) en el que se hicieran, por ejemplo, nulos los estimadores de los coeficientes teóricos nulos, a la hora de obtener los estimadores. A este respecto, en este Capítulo 2 de la Tesis se hace, en primer lugar, un completo estudio desde el punto de vista probabilístico del mismo.

En este Capítulo 2 se desarrollan secuencialmente los siguientes tópicos: definición del modelo y características probabilísticas básicas (en especial las Tendencias); estimación máximo-verosímil en base a muestreo discreto, con la verosimilitud construida con la función de densidad de transición; el cálculo de la matriz de información de Fisher; el estudio de la distribución de los estimadores conducentes a las distribuciones normales matriciales y distribución de Wishart correspondientes. Con todo ello quedan establecidas las bases para desarrollar los contrastes de hipótesis de interés práctico relacionados con este Modelo. Algunos resultados previos de la materia desarrollada en este Capítulo han sido publicados últimamente en **Gutiérrez and Gutiérrez-Sánchez (2003)** y **Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi (2003b)**.

iii) En el **Capítulo 3** de la Tesis, se estudian dos ejemplos concretos, en relación con el modelo propuesto en el Capítulo 2 anterior. El objetivo e interés de este Capítulo, reside en que, ante la evidente complejidad de los resultados obtenidos respecto de los estimadores máximo-verosímiles (tanto en sus expresiones como en las distribuciones en el muestreo correspondientes) obtenidos para el caso general de un proceso  $k$ -dimensional, conviene, en efecto, disponer de ejemplos concretos aplicables a casos reales, en los que:

- o bien los factores exógenos, como funciones de  $t$ , son de expresión funcional conocida
- o bien, nos situemos en el caso general, con factores generales, pero con dimensión  $k = 2$ , suficiente en muchos casos reales (ver Capítulo 5 de esta Tesis)

En ambos casos estudiados, queda visible la operatividad de las expresiones generales del Capítulo 2, con vistas a una implementación del cálculo en ordenador, y en particular, el primer ejemplo (Sección 3.1) pone de manifiesto la posibilidad de utilizar los resultados del Capítulo 2 con factores exógenos funcionales distintos que pueden relacionarse con ejemplos tratados a nivel unidimensional en trabajos previos (ver por ejemplo **Gutiérrez et al. (1997)** y **Gutiérrez, Román, and Torres (1995)**)

- iv) En el **Capítulo 4** se parte del el trabajo de **Gutiérrez et al. (1997)** en el que se consideran los tiempos de primer paso para difusiones no homogéneas en el tiempo, con momentos infinitesimales del tipo:

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= xq(x, t); \\ A_2(x, t) &= \sigma x^2, \sigma > 0 \end{aligned}$$

que incluyen factores exógenos en la tendencia. En particular consideran familias de difusiones con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= xg(t) + \frac{a\sigma x^{a+1}h(t)}{1 + x^a h(t)} \quad a \in \mathbb{R} \\ A_2(x, t) &= \sigma x^2, \sigma > 0 \end{aligned}$$

en donde  $g(t)$  es una función continua y  $h(t)$  vienen dado en la forma

$$h(t) = \exp \left\{ -a \left\{ \frac{a-1}{2} \sigma t + \int_{t_0}^t g(r) dr \right\} \right\} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Estos procesos están definidos en  $\mathbb{R}^+$  e incluyen como casos particulares el lognormal homogéneo y el lognormal no homogéneo con factores exógenos del tipo  $q(x, t) = g(t)$ .

El interés de esta familia de difusiones reside en que es un ejemplo, de la metodología alternativa presentada en el citado **Gutiérrez et al. (1997)**, de tal manera que en dicha familia se puede evitar resolver la conocida integral de Volterra para calcular la densidad de primer paso por barreras continuas ( $S(t)$ ), cuyo cálculo es sustituido por la solución de una ecuación diferencial ordinaria.

En el Capítulo 4 de esta Tesis, abordamos el estudio de la familia de difusiones no homogéneas mencionada, tanto en el caso univariante como bivariante, desarrollándose de manera completa una subfamilia de dichas difusiones con funciones  $g(t)$  y  $h(t)$  concretas. Se calculan las funciones momento y en particular las tendencias (condicionadas y sin condicionar),

y se establecen los resultados básicos de estimación máximo-verosímil por muestreo discreto. Con todo ello, quedan establecidas las bases para los ajustes de estas difusiones no homogéneas y para la Inferencia sobre las densidades de tiempo de primer paso en relación con el mencionada trabajo de **Gutiérrez et al. (1997)**.

- v) En el **Capítulo 5** se realiza una aplicación original a un ejemplo real con datos procedentes del campo económico, de carácter bidimensional, y se pretende poner de manifiesto la potencialidad de esta aplicación del Modelo bidimensional Lognormal no homogéneo, con un factor exógeno distinto para cada variable (Capítulo 2 de esta Tesis), para la modelización de los casos reales.

En concreto, se plantean dos objetivos:

- a) Ajustar el mencionado Modelo, estimando, en base a un muestreo discreto, equidistante y con factores exógenos dados por los incrementos relativos de dos variables exógenas, las distintas características del modelo (tendencias condicionadas y no condicionadas; función de varianzas-covarianzas y correlación; etc) basadas en las estimaciones máximo-verosímiles de los parámetros que intervienen en dicho modelo.
- b) Realizar una comparación entre los resultados obtenidos con el modelo con factores exógenos comunes, Capítulo 1, y los correspondientes resultados obtenidos según el modelo descrito en el Capítulo 2 precedente.

Las variables endógenas consideradas son:

- $X_1(t)$ : Producto Interior Bruto en España, en el tiempo  $t$ .
- $X_2(t)$ : Precio de la Vivienda Nueva en España, en el tiempo  $t$ .

Cada variable endógena que consideramos ha sido estudiada marginalmente, desde el punto de vista de su modelización por proceso de difusión univariantes de crecimiento (lognormal, Gompertz).

En particular la variable  $X_1(t)$  ha sido analizada en el periodo [1971-1994] en **Gutiérrez, Román, and Torres (1999)**, en donde se modeliza, mediante una difusión lognormal univariante con factores exógenos, su evolución y la predicción a medio plazo correspondiente. Los factores exógenos seleccionados en dicho trabajo fueron el “Gasto del Consumidor” y “Gross Domestic Fixed Capital”, que son utilizados a través de

sus incrementos relativos para los ajustes del citado modelo.

Posteriormente, **Gutiérrez et al. (2003b)** ampliaron el estudio para la evolución del Producto Interior Bruto de España al periodo [1970-2001], utilizando un modelo lognormal univariante con los mismos factores exógenos antes indicados y utilizando, además, otros perfeccionamientos en cuanto a los métodos de estimación de parámetros (consideración de estimadores U.M.V.U.)

Por otra parte, la variable endógena  $X_2(t)$ , Precio de la Vivienda Nueva en España, también ha sido considerada marginalmente en **Gutiérrez et al. (2005a)** y en **Gutiérrez et al. (2003a)**. En este trabajo se ajusta, sobre el periodo [1976-2001], la variable “Precio de la Vivienda Nueva en España”, ajustando un modelo de difusión Gompertz univariante, con factores exógenos, en base a un muestreo discreto y con estimación máximo-verosímil. Los tres factores exógenos utilizados fueron el “Producto Interior Bruto”, la “Tasa de Interés Oficial” y el “Índice de Precios al Consumo”. Las predicciones en base a las tendencias con y sin condicionar resultan ser muy ajustadas a los datos observados.

En el presente estudio consideramos, conjuntamente, ambas variables  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$ , modelizándolas mediante un proceso lognormal bivariante y considerando dos factores exógenos, uno para cada variable. De entre el conjunto de factores exógenos utilizados en los trabajos citados anteriormente, hemos seleccionado los siguientes:

- a) Para  $X_1(t)$ , el factor “Gross Domestic Fixed Capital Formation” (uno de los considerados para  $X_1(t)$  en el trabajo citado de **Gutiérrez et al. (2003b)**).
- b) Para  $X_2(t)$ , el factor “Tasa de Interés Bancario” (uno de los considerados para  $X_2(t)$  en el trabajo citado de **Gutiérrez et al. (2005a)**).

Los datos considerados son los correspondientes al periodo [1976-2001]

- vi) En el **Capítulo 6**, se desarrollan los aspectos teóricos, de tipo probabilístico y de tipo estadístico, correspondientes al modelo de Gompertz. Y se incluye una aplicación original de dicho modelo para el estudio del “Parque de Vehículos en España, según tipo de carburante utilizado”.

Sucesivamente se desarrollan las siguiente cuestiones:

- a) El modelo de difusión Gompertz univariante homogéneo, calculándose sus funciones momento, y estableciéndose la inferencia, por mues-



treo discreto, para dicho modelo, obteniéndose las expresiones de los estimadores de sus parámetros.

- b) El modelo de difusión Gompertz, no homogéneo, con factores exógenos, tanto en el caso de factores exógenos generales (Sección 6.2.1), como con factores exógenos de tipo particular (Sección 6.3). En ambos casos se supone un muestreo de tipo discreto, construyéndose la estimación de parámetros mediante la correspondiente verosimilitud condicionada.
  - c) El modelo Gompertz con factores exógenos de tipo particular estudiado en la Sección 6.3, se aplica al estudio, original, del “Parque Total de vehículos en España” en función del tipo de carburante utilizado (gasolinas, gasoil), en el periodo [1978-2002]. En la Sección 6.4 se desarrolla detalladamente esta aplicación real, analizándose, además, la comparación con los ajustes realizados mediante modelos Lognormales con factores exógenos. Este último análisis constituye, por otra parte, un objetivo importante que completa los capítulos anteriores de esta Tesis, puesto que el proceso Gompertz, homogéneo y no homogéneo, son extensiones de los respectivos modelo Lognormales.
- vii) En el contexto teórico-práctico relativo al Modelo Rayleigh brevemente sintetizado en el punto anterior de Antecedentes de esta Tesis, desarrollamos el **Capítulo 7**, cuyos objetivos son los siguientes:
- a) En primer lugar, con vistas a la metodología de ajuste y predicción que posteriormente se empleará, en la Sección 7.2.1 se completa el estudio probabilístico del Modelo Rayleigh desarrollado en **Giorno et al. (1986)**, obteniéndose las funciones media (trend function) y media condicionada (conditioned trend function), así como sus comportamientos asintóticos en el tiempo.
  - b) En segundo lugar, en la Sección 7.3, se realiza un estudio integrado de la estimación de los parámetros drift y difusión. Los primeros se estiman por la metodología de máxima verosimilitud y utilizando muestreo continuo, proponiéndose también el cálculo aproximado por procedimientos numéricos de los mismos mediante discretización de las integrales Riemann que aparecen en las correspondientes expresiones. En cuanto al coeficiente de difusión, se propone una metodología de estimación aproximada que es una variante del método de **Chesney and Elliot (1995)**. Finalmente proponemos las estimaciones de las tendencias condicionada y no condicionada.
  - c) En tercer lugar, en la Sección 7.4 de la Tesis, se incluyen resultados sobre simulación del proceso Rayleigh estudiado y se aplica la metodología propuesta al estudio de la evolución y predicción de los

siguientes casos reales: “Mortalidad Infantil por mil nacimientos, para ambos sexos, en España”, “Número Total de Fallecimientos por Cáncer en Andalucía”, “Tasa de Mortalidad Infantil por mil nacidos para Hombres en España”, “Tasa de Mortalidad Infantil por mil nacidos para Mujeres en España”, y finalmente, la “Esperanza de Vida al Nacer, para cada sexo, en Andalucía”.

- viii) Finalmente se incluye un **Apéndice**, en el que se recogen algunos resultados sobre el cambio de variable ampliamente utilizado en los Capítulos 1 y 2 en relación con el manejo de las funciones de verosimilitud condicionadas por muestreo discreto, (Anexo A.1); sobre cálculo diferencial Matricial, (**Magnus and Neudecker 1988**), y productos Kronecker (Anexo A.2); y finalmente algunas cuestiones relativas a la distribución Normal Matricial (Anexo A.3).
- ix) La Tesis incluye concluye con una **Bibliografía**, en la que se incluyen todos los textos y artículos de revistas que han sido utilizados para el desarrollo de esta Tesis Doctoral.

## Líneas futuras de investigación

Señalamos a continuación algunos problemas abiertos inmediatos de desarrollar y aplicar, en base a los resultados obtenidos en esta Tesis.

- Estudio de un Sistema Estocástico con retraso (Stochastic Systems with delays) asociado al proceso Gompertz no homogéneo estudiado en el Capítulo 6 de la Tesis, que extienda el precedente de **Frank (2002)** para el caso homogéneo.
- Extensión del modelo Lognormal estudiado en el Capítulo 2, en el que un solo factor exógeno afecta individualmente a cada variable endógena, a un modelo en el que sean conjuntos diferentes de factores exógenos los que afecten “individualmente” a cada variable endógena. Ello permitiría modelizar, por ejemplo, el caso real, PIB-Precio Vivienda estudiado en el Capítulo 5 a la situación en la que dos conjuntos distintos, multidimensionales, afectasen a cada variable por separado. Este problema ya está prácticamente desarrollado en la actualidad.
- Complementos teóricos, probabilísticos y estadísticos, sobre los procesos estudiados en la Tesis, especialmente, los referentes a “tiempos de primer paso” y a las mejoras técnicas que puedan afectar a la fase de predicción en base a los procesos ajustados.

- Aplicación de los resultados obtenidos en el Capítulo 4 de la tesis para estimar las densidades de tiempo de primer paso por barreras variables en el tiempo con la metodología teórica desarrollada en **Gutiérrez et al. (1997)**.
- Definición y estudio de un campo aleatorio de difusión tipo Gompertz no homogéneo, mediante una metodología similar a la ya utilizada en el caso de un campo aleatorio Lognormal no homogéneo en **Gutiérrez et al. (2005b)**.



# Parte I

## Procesos Lognormales multivariantes no homogéneos con factores exógenos.



# Capítulo 1

## Proceso Lognormal multivariante no homogéneo con factores exógenos comunes

En este Capítulo se desarrolla el Modelo de Difusión Lognormal Multivariante no homogéneo, afectado de un conjunto multidimensional de factores exógenos (Modelo Básico). Sucesivamente se obtienen los siguientes resultados sobre el Modelo:

- Definición del Modelo, ecuaciones de Kolmogorov y densidad de transición.
- Funciones tendencia, varianzas y covarianzas.
- Estimación máximo-verosímil, basada en un esquema de muestreo discreto y con la verosimilitud construida con la densidad de transición del proceso.
- Distribución en el muestreo de los estimadores máximo-verosímiles.

### 1.1. Definición del Modelo

Sea  $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$  un proceso de Markov con valores en  $(0, \infty)^k$ , con trayectorias continuas casi seguro y con probabilidad de transición dada por:

$$P(y, t/x, s) = P[X(t) = y/X(s) = x]$$

con  $X(t) = (X_{t1}, \dots, X_{tk})'$  y  $X(s) = (X_{s1}, \dots, X_{sk})'$ , donde  $x$  e  $y$  son vectores  $k$ -dimensionales. Supuestas las siguientes condiciones:

i)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x|>\epsilon} P(dy, t+h/x, t) = 0.$$

ii)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)P(dy, t+h/x, t) = f(x, t), \quad \text{con}$$

$$f(x, t) = \begin{pmatrix} \left( f_{10} + \sum_{j=1}^q f_{1j} F_j(t) \right) x_1 \\ \vdots \\ \left( f_{k0} + \sum_{j=1}^q f_{kj} F_j(t) \right) x_k \end{pmatrix},$$

donde  $F_j(t)$  son funciones continuas en  $[t_0, T]$ .

iii)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)(y-x)'P(dy, t+h/x, t) = xAx',$$

donde  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  es una matriz simétrica y definida positiva con  $a_{ij} > 0$ , para  $i, j=1, 2, \dots, k$ .

iv) Los momentos infinitesimales de orden superior son nulos.

Bajo tales condiciones, así como bajo ciertas propiedades de diferenciabilidad de  $P(y, t/x, s)$ , se pueden obtener las ecuaciones adelantada y atrasada de Kolmogorov:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k a_{ij} \frac{\partial^2 (y_i y_j p)}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^k \left( f_{i0} + \sum_{l=1}^q f_{il} F_l(t) \right) \frac{\partial (y_i p)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial p}{\partial s} &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k a_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^k \left( f_{i0} + \sum_{l=1}^q f_{il} F_l(t) \right) x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \end{aligned}$$

en las que  $p = P(y, t/x, s)$ , es la densidad de transición condicionada, con la solución inicial

$$P(y, t/x, t) = \delta(y-x).$$

La solución común a estas ecuaciones es

$$P(y, t/x, s) = \left[ \left( \prod_{i=1}^k y_i \right) (2\pi)^{k/2} (t-s)^{k/2} |A|^{1/2} \right]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t-s)} Q \right\}$$

siendo

$$Q = \left( \lg y - \lg x - \beta_0(t-s) - \sum_{l=1}^q \beta_l \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right)' A^{-1} \times$$



$$\left( \lg y - \lg x - \beta_0(t-s) - \sum_{l=1}^q \beta_l \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right)$$

denotando

$$\beta_0 = f_0 - \frac{1}{2} \text{diag}(A)$$

y

$$\beta_j = f_j; \quad j = 1, \dots, q.$$

Por lo que la distribución de transición condicionada sigue una distribución lognormal de la forma:

$$X(t)/X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_k \left[ \lg x_s + \beta_0(t-s) - \sum_{l=1}^q \beta_l \int_s^t F_l(\tau) d\tau; (t-s)A \right].$$

Si llamamos  $\tilde{u}_t = \left( t-s, \int_s^t F_1(\tau) d\tau, \dots, \int_s^t F_q(\tau) d\tau \right)'$ , entonces

$$X(t)/X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_k \left( \lg x_s + \beta \tilde{u}_t; (t-s)A \right)$$

donde  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q)$

## 1.2. Cálculo de los momentos

Considerando

$$Z(t) = (X(t)/X(s) = x_s) \rightsquigarrow \mathcal{N}_k \left( \lg x_s + \beta \tilde{u}_t; (t-s)A \right)$$

con función generatriz de momentos dada por:

$$M_{Z(t)}(\gamma) = \exp \left\{ \gamma' \lg x_s + \gamma' \beta \tilde{u}_t + \frac{1}{2} (t-s) \gamma' A \gamma \right\}; \quad \gamma \in \mathbb{R}^k.$$

- Si tomamos  $\gamma = (0, \dots, \overset{i}{r}, \dots, 0)'$  con  $r \in \mathbb{R}$ , tendremos la función generatriz de momentos en la variable  $i$ -ésima:

$$M_{Z(t)}(\gamma) = E [\exp\{r' Z(t)\}] = E [X_i^r(t)/X(s) = x_s] = x_{is}^r \exp \left\{ r \beta_{io} (t-s) + r \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(\tau) d\tau + \frac{r^2}{2} a_{ii} (t-s) \right\}.$$

Pudiendo calcular los momentos no centrados condicionadas de primer y segundo orden con respecto a la variable  $i$ -ésima, de forma, que:

- a) Si  $r = 1$  obtendremos el momento no centrado de primer orden o tendencia:

$$\begin{aligned} E[X_i(t)/X(s)] &= \\ x_{is} \exp \left\{ \beta_{i0}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(\tau) d\tau + \frac{a_{ii}}{2}(t-s) \right\} &= \\ x_{is} \exp \left\{ f_{i0}(t-s) + \sum_{l=1}^t F_l(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Nota:  $\beta_{i0} = f_{i0} - \frac{1}{2}A_{ii} \implies f_{i0} = \beta_{i0} + \frac{1}{2}A_{ii}$ .

- b) Si  $r = 2$ , resultará el momento no centrado de segundo orden:

$$\begin{aligned} E[X_i^2(t)/X(s)] &= \\ x_{is}^2 \exp \left\{ 2\beta_{i0}(t-s) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(\tau) d\tau + 2a_{ii}(t-s) \right\} &= \\ x_{is}^2 \exp \left\{ 2f_{i0}(t-s) + 2 \sum_{l=1}^t \beta_{il} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Pudiendo calcular de forma inmediata la varianza condicionada para la componente  $i$ -ésima, resultando:

$$\begin{aligned} Var[X_i(t)/X(s)] &= \\ x_{is}^2 \exp \left\{ 2f_{i0}(t-s) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} & \left[ \exp\{a_{ii}(t-s)\} - 1 \right]. \end{aligned}$$

- Si tomamos  $\gamma = (0, \dots, 0, r_1^i, 0, \dots, 0, r_2^j, 0, \dots, 0)$  con  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ , de igual forma podremos calcular la función generatriz de momentos para dos variables componentes,  $i$  y  $j$ , obteniendo:

$$\begin{aligned} M_{Z(t)}(\gamma) &= E[\exp\{\gamma'Z(t)\}] = \\ E[\exp\{r_1 Z_i(t) + r_2 Z_j(t)\}] &= E[X_i^{r_1}(t) X_j^{r_2}(t)/X(s) = x_s] = \\ x_{is}^{r_1} x_{js}^{r_2} \exp \left\{ r_1 \beta_{i0}(t-s) + r_1 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(\tau) d\tau + \frac{r_1^2}{2} a_{ii}(t-s) + \right. \\ \left. r_2 \beta_{j0}(t-s) + r_2 \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_s^t F_l(\tau) d\tau + \frac{r_2^2}{2} a_{jj}(t-s) + r_1 r_2 a_{ij}(t-s) \right\}. \end{aligned}$$

Y en particular si  $r_1 = r_2 = 1$ , resulta la esperanza condicionada conjunta:

$$E[X_i(t)X_j(t)/X(s)] = x_{is}x_{js} \exp \left\{ (f_{i0} + f_{j0})(t-s) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_s^t F_l(\tau) d\tau + a_{ij}(t-s) \right\}.$$

Obteniendo de forma inmediata la covarianza de la forma:

$$Cov [X_i(t), X_j(t)/X(s)] = x_{is}x_{js} \exp \left\{ (f_{i0} + f_{j0})(t-s) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} [\exp\{a_{ij}(t-s)\} - 1].$$

### 1.2.1. Tendencia

A continuación se calcula la tendencia unidimensional a partir de la esperanza condicionada.

$$\begin{aligned} E[X_i(t)] &= E[E[X_i(t)/X(t_0)]] = \\ &E \left[ X_i(t_0) \exp \left\{ f_{i0}(t-t_0) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau \right\} \right] = \\ &E[X_i(t_0)] \exp \left\{ (\beta_{i0} + \frac{1}{2}a_{ii})(t-t_0) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Denotando como

$$u(t) = \left( t - t_0, \int_{t_0}^t F_1(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_0}^t F_q(\tau) d\tau \right)'$$

entonces:

$$E[X_i(t)] = E[X_i(t_0)] \exp \left\{ e_i' \beta u(t) + \frac{t-t_0}{2} e_i' A e_i \right\}$$

con

$$e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)'$$

Operando, resulta:

$$E[X_i(t)] = E[X_i(t_0)] \exp \left\{ e_i' \beta u(t) + (t-t_0) tr[MA] \right\}$$

donde

$$M = \frac{1}{2}e_i e_i'$$

para  $i = 1, \dots, k$  y si  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ , entonces la tendencia de la variable  $i$ -ésima no condicionada toma la forma:

$$E[X_i(t)] = x_{i0} \exp \left\{ e_i' \beta u(t) + (t - t_0) \text{tr}[MA] \right\}.$$

### 1.2.2. Varianza

En primer lugar se calcula el momento no centrado de segundo orden que, siguiendo la misma metodología del caso anterior, toma la expresión:

$$\begin{aligned} E[X_i^2(t)] &= E[E[X_i^2(t)/X(t_0)]] = \\ E \left[ X_i^2(t_0) \exp \left\{ 2f_{i0}(t - t_0) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + a_{ii}(t - t_0) \right\} \right] &= \\ E[X_i^2(t_0)] \exp \left\{ 2f_{i0}(t - t_0) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + a_{ii}(t - t_0) \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión de la varianza, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_i(t)] &= \\ E[X_i^2(t_0)] \exp \left\{ 2f_{i0}(t - t_0) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + a_{ii}(t - t_0) \right\} - \\ [E[X_i(t_0)]^2 \exp \left\{ 2f_{i0}(t - t_0) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau \right\}] &= \\ E[X_i^2(t_0)] \exp \left\{ 2 \left( \beta_{i0} + \frac{a_{ii}}{2} \right) (t - t_0) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + a_{ii}(t - t_0) \right\} - \\ E[X_i(t_0)]^2 \exp \left\{ 2 \left( \beta_{i0} + \frac{a_{ii}}{2} \right) (t - t_0) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau \right\} &= \\ E[X_i^2(t_0)] \exp \left\{ 2e_i' \beta u(t) + 2(t - t_0)e_i' A e_i \right\} - E[X_i(t_0)]^2 \exp \left\{ 2e_i' \beta u(t) + (t - t_0)e_i' A e_i \right\} &= \\ E[X_i^2(t_0)] \exp \left\{ 2e_i' \beta u(t) + (t - t_0) \text{tr}[M_1 A] \right\} - E[X_i(t_0)]^2 \exp \left\{ 2e_i' \beta u(t) + (t - t_0) \text{tr}[M_2 A] \right\}. \end{aligned}$$

Denotando como

$$M_1 = 2e'_i e_i \quad \text{y} \quad M_2 = e'_i e_i$$

para  $i, j = 1, \dots, k$ . Si  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_i(t)] = x_{i0}^2 & \left[ \exp\left\{2e'_i \beta u(t) + (t - t_0) \text{tr}[M_1 A]\right\} - \right. \\ & \left. \exp\left\{2e'_i \beta u(t) + (t - t_0) \text{tr}[M_2 A]\right\} \right]. \end{aligned}$$

### 1.2.3. Covarianza en un mismo instante de tiempo

Para el cálculo de la covarianza el primer paso es calcular el momento conjunto bidimensional no condicionado. Para ello se realiza:

$$\begin{aligned} E[X_i(t)X_j(t)] &= E[E[X_i(t)X_j(t)/X(t_0)]] = \\ E & \left[ X_i(t_0)X_j(t_0) \exp \left\{ (f_{i0} + f_{j0})(t - t_0) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + a_{ij}(t - t_0) \right\} \right] = \\ E & [X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ (f_{i0} + f_{j0})(t - t_0) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + a_{ij}(t - t_0) \right\}. \end{aligned}$$

Por lo que sin más que aplicar la expresión de la covarianza, esta tomará la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_i(t), X_j(t)] &= \\ E[X_i(t_0)X_j(t_0)] & \exp \left\{ (f_{i0} + f_{j0})(t - t_0) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + a_{ij}(t - t_0) \right\} - \\ E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] & \exp \left\{ (f_{i0} + f_{j0})(t - t_0) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau \right\} = \\ E[X_i(t_0)X_j(t_0)] & \exp \left\{ \left( \beta_{i0} + \beta_{j0} + \frac{a_{ii}}{2} + \frac{a_{jj}}{2} \right) (t - t_0) + \right. \\ & \left. \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + a_{ij}(t - t_0) \right\} - \\ E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] & \exp \left\{ \left( \beta_{i0} + \beta_{j0} + \frac{a_{ii}}{2} + \frac{a_{jj}}{2} \right) (t - t_0) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ \gamma'_1 \beta u(t) + \frac{t-t_0}{2} \gamma'_1 A \gamma_1 \right\} - \\
 & E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ \gamma'_1 \beta u(t) + \frac{t-t_0}{2} e'_i A e_i + \frac{t-t_0}{2} e'_j A e_j \right\} = \\
 & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ \gamma'_1 \beta u(t) + (t-t_0) \text{tr}[M_1 A] \right\} - \\
 & E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ \gamma'_1 \beta u(t) + (t-t_0) \text{tr}[M_2 A] \right\}.
 \end{aligned}$$

Denotando como

$$M_1 = \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma'_1, \quad M_2 = \frac{1}{2} e_i e'_i + \frac{1}{2} e_j e'_j \quad \text{y} \quad \gamma_1 = e_i + e_j$$

para  $i, j = 1, \dots, k$ . Y si  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ , entonces

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov}[X_i(t), X_j(t)] = \\
 & x_{i0} x_{j0} \left[ \exp \left\{ \gamma'_1 \beta u(t) + (t-t_0) \text{tr}[M_1 A] \right\} - \exp \left\{ \gamma'_1 \beta u(t) + (t-t_0) \text{tr}[M_2 A] \right\} \right].
 \end{aligned}$$

#### 1.2.4. Función de covarianzas en general

En este apartado calculamos la función de covarianzas en dos circunstancias distintas,  $s < t$  y  $s > t$  y posteriormente el caso conjunto.

**a) Caso  $s < t$ .**

En primer lugar se calcula el momento conjunto de primer orden;

$$\begin{aligned}
 & E[X_i(t)X_j(s)] = \\
 & E[E[X_i(t)X_j(s)/X(s)]] = E[X_j(s)E[X_i(t)/X(s)]] = \\
 & E[X_j(s)X_i(s)] \exp \left\{ f_{i0}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} = \\
 & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ f_{i0}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(\tau) d\tau + (f_{i0} + f_{j0})(s-t_0) + \right. \\
 & \left. \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_t^s F_l(\tau) d\tau + a_{ij}(s-t_0) \right\}.
 \end{aligned}$$

Una vez calculado el momento de primer orden, aplicaremos la formula de la covarianza:

$$\begin{aligned}
 & Cov[X_i(t), X_j(s)] = \\
 & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ f_{i0}(t - t_0) - f_{i0}(s - t_0) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau - \right. \\
 & \left. \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^s F_l(\tau) d\tau + (f_{i0} + f_{j0})(s - t_0) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_{t_0}^s F_l(\tau) d\tau + a_{ij}(s - t_0) \right\} - \\
 & E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ f_{i0}(t - t_0) + f_{j0}(s - t_0) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + \right. \\
 & \left. \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_{t_0}^s F_l(\tau) d\tau \right\} = \\
 & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ \beta_{i0}(t - t_0) + \beta_{j0}(s - t_0) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + \right. \\
 & \left. \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_{t_0}^s F_l(\tau) d\tau + \frac{t - t_0}{2} a_{ii} + \frac{s - t_0}{2} a_{jj} + a_{ij}(s - t_0) \right\} - \\
 & E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ \beta_{i0}(t - t_0) + \beta_{j0}(s - t_0) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + \right. \\
 & \left. \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_{t_0}^s F_l(\tau) d\tau + \frac{t - t_0}{2} a_{ii} + \frac{s - t_0}{2} a_{jj} \right\} = \\
 & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ e'_i \beta u(t) + e'_j \beta u(s) + \frac{t - t_0}{2} e'_i A e_i + \frac{s - t_0}{2} e'_j A e_j + (s - t_0) e'_i A e_j \right\} - \\
 & E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ e'_i \beta u(t) + e'_j \beta u(s) + \frac{t - t_0}{2} e'_i A e_i + \frac{s - t_0}{2} e'_j A e_j \right\} =
 \end{aligned}$$

$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ \text{tr}[(u(t)e'_i + u(s)e'_j)\beta] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e'_i + \frac{s-t_0}{2} e_j e'_j + (s-t_0)e_j e'_j \right) A \right] \right\} -$$

$$E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ \text{tr}[(u(t)e'_i + u(s)e'_j)\beta] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e'_i + \frac{s-t_0}{2} e_j e'_j \right) A \right] \right\}.$$

**b) Caso  $t < s$ .**

El momento conjunto no condicionado de primer orden sigue la expresión:

$$E[X_i(t)X_j(t)] =$$

$$E[E[X_i(t)X_j(s)/X(t)]] = E[X_i(t)E[X_j(s)/X(t)]] =$$

$$E[X_i(t)X_j(t)] \exp \left\{ f_{j0}(s-t) + \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_t^s F_l(\tau) d\tau \right\} =$$

$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ f_{j0}(s-t) + \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_t^s F_l(\tau) d\tau + (f_{i0} + f_{j0})(t-t_0) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + a_{ij}(t-t_0) \right\}$$

por lo tanto, la covarianza será:

$$\text{Cov}[X_i(t), X_j(s)] =$$

$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ f_{j0}(s-t_0) - f_{j0}(t-t_0) + \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_{t_0}^s F_l(\tau) d\tau - \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + (f_{i0} + f_{j0})(t-t_0) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + a_{ij}(t-t_0) \right\} -$$

$$E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ f_{i0}(t-t_0) + f_{j0}(s-t_0) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_{t_0}^s F_l(\tau) d\tau \right\} =$$



$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ \beta_{i0}(t - t_0) + \beta_{j0}(s - t_0) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_{t_0}^s F_l(\tau) d\tau + \frac{t - t_0}{2} a_{ii} + \frac{s - t_0}{2} a_{jj} + a_{ij}(t - t_0) \right\} -$$

$$E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ \beta_{i0}(t - t_0) + \beta_{j0}(s - t_0) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_{t_0}^t F_l(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_{t_0}^s F_l(\tau) d\tau + \frac{t - t_0}{2} a_{ii} + \frac{s - t_0}{2} a_{jj} \right\} =$$

$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ e'_i \beta u(t) + e'_j \beta u(s) + \frac{t - t_0}{2} e'_i A e'_i + \frac{s - t_0}{2} e'_j A e'_j + (t - t_0) e'_i A e'_j \right\} -$$

$$E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ e'_i \beta u(t) + e'_j \beta u(s) + \frac{t - t_0}{2} e'_i A e'_i + \frac{s - t_0}{2} e'_j A e'_j \right\} =$$

$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ \text{tr}[(u(t)e'_i + u(s)e'_j)\beta] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t - t_0}{2} e_i e'_i + \frac{s - t_0}{2} e_j e'_j + (t - t_0) e_j e'_i \right) A \right] \right\} -$$

$$E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ \text{tr}[(u(t)e'_i + u(s)e'_j)\beta] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t - t_0}{2} e_i e'_i + \frac{s - t_0}{2} e_j e'_j \right) A \right] \right\}.$$

**c) Función conjunta.**

La función conjunta será la intersección entre los dos casos anteriores, resultando de la forma:

$$\begin{aligned} Cov[X_i(t), X_j(s)] = \\ E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left\{ \text{tr}[(u(t)e'_i + u(s)e'_j)\beta] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t - t_0}{2} e_i e'_i + \frac{s - t_0}{2} e_j e'_j + (t \cap s - t_0) e_j e'_i \right) A \right] \right\} - \end{aligned}$$

$$E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left\{ \text{tr}[(u(t)e'_i + u(s)e'_j)\beta] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t - t_0}{2} e_i e'_i + \frac{s - t_0}{2} e_j e'_j \right) A \right] \right\}$$

y si  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ ; entonces

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_i(t), X_j(s)] = & \\ x_{i0}x_{j0} \left[ \exp \left\{ \text{tr}[(u(t)e'_i + u(s)e'_j)\beta] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e'_i + \right. \right. \right. \right. & \\ \left. \left. \left. \frac{s-t_0}{2} e'_j e'_j + (t \cap s - t_0) e_j e'_i \right) A \right] \right\} - & \\ \exp \left\{ \text{tr}[(u(t)e'_i + u(s)e'_j)\beta] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e'_i + \frac{s-t_0}{2} e_j e'_j \right) A \right] \right\} \right] & \end{aligned}$$

### 1.3. Cálculo de los estimadores máximo-verosímiles

Sea

$$X(t)/X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_k(\lg x_s + \beta \tilde{u}_t; (t-s)A).$$

Si tomamos  $Z(t)$  como el logaritmo de transición entre dos tiempos;  $Z(t)$  sigue una distribución normal  $k$ -dimensional de la forma:

$$Z(t) = \lg(X(t)/X(s) = x_s) \rightsquigarrow \mathcal{N}_k(\lg x_s + \beta \tilde{u}_t; (t-s)A).$$

Consideramos  $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$  un muestreo discreto del proceso en instantes  $t_1, t_2, \dots, t_n$  donde cada  $X_{t_\alpha}$  representa el vector  $k$ -dimensional  $X_{t_\alpha} = (X_{t_\alpha,1}, \dots, X_{t_\alpha,k})'$  denotando  $X_\alpha = (X_{\alpha,1}, \dots, X_{\alpha,k})'$ ; y tomamos como condición inicial  $P[X_{t_1} = x_1] = 1$ .

Aplicando la propiedad de markov, la función de verosimilitud queda de la forma:

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n / \beta, A) = & P[x_1, t_1] \cdot P[x_2, t_2 / x_1, t_1] \cdots P[x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}] = \\ & (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \left( \prod_{i=1}^k x_{\alpha,i}^{-1} \right) (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{k}{2}} \times \\ \exp \left\{ \frac{1}{2} \left( \lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1} - \beta \tilde{u}_\alpha \right)' \frac{A^{-1}}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left( \lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1} - \beta \tilde{u}_\alpha \right) \right\} = & \\ & (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \left( \prod_{i=1}^k x_{\alpha,i}^{-1} \right) (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{k}{2}} \times \end{aligned}$$

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \left( (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{1/2} (\lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1}) - \beta u_\alpha \right)' A^{-1} \left( (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{1/2} (\lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1}) - \beta u_\alpha \right) \right\}$$

donde

$$u_t = (t - s)^{-1/2} \tilde{u}_t$$

y por lo tanto

$$u_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \tilde{u}_\alpha,$$

siempre que los  $u_\alpha$  sean linealmente independientes.

Realizando el cambio de variable detallado en el Anexo A.1, quedará:

$$\begin{aligned} L(z_1, \dots, z_n / \beta, A) = \\ (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \left( \prod_{i=1}^k z_{1,i}^{-1} \exp \left\{ - \sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_{ji} \right\} \right) (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{k/2} \times \\ \exp \left\{ - \frac{1}{2} (z_\alpha - \beta u_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - \beta u_\alpha) \right\} \prod_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{k/2} \prod_{i=1}^k z_{1,i} \exp \left\{ \sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_{ji} \right\} = \\ (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \exp \left\{ - \frac{1}{2} (z_\alpha - \beta u_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - \beta u_\alpha) \right\} \end{aligned}$$

y ya que la densidad de  $z_1$  es una delta de dirac, la función de verosimilitud del cambio realizado, resulta:

$$\begin{aligned} L(z_2, \dots, z_n / \beta, A) = \\ (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \exp \left\{ - \frac{1}{2} (z_\alpha - \beta u_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - \beta u_\alpha) \right\} = \\ (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - \beta u_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - \beta u_\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Definiendo  $z$  como

$$z = [z_2, \dots, z_n]_{k \times (n-1)}$$

y  $u$  como

$$u = [u_2, \dots, u_n]_{(g+1) \times (n-1)}.$$

Entonces resulta:

$$\begin{aligned}
 z - \beta u &= (z_2 - \beta u_2, \dots, z_n - \beta u_n), \\
 A^{-1}(z - \beta u) &= (A^{-1}(z_2 - \beta u_2), \dots, A^{-1}(z_n - \beta u_n)); \\
 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha}^n (z_{\alpha} - \beta u_{\alpha})' A^{-1} (z_{\alpha} - \beta u_{\alpha}) \right\} &= \\
 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Vec}'(z - \beta u) \text{Vec}(A^{-1}(z - \beta u)) \right\} &= \\
 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Vec}'[(z' - u'\beta)'](I_{n-1} \otimes A^{-1}) \text{Vec}[(z' - u'\beta)'] \right\}. &
 \end{aligned}$$

Por lo que la función de verosimilitud definitiva será de la forma:

$$\begin{aligned}
 L(z_2, \dots, z_n / \beta, A) &= \\
 (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Vec}'[(z' - u'\beta)'](I_{n-1} \otimes A^{-1}) \text{Vec}[(z' - u'\beta)'] \right\} &= \\
 (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ \text{tr} \left[ -\frac{1}{2} (z - \beta u)' A^{-1} (z - \beta u) \right] \right\} &= \\
 (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ \text{tr} \left[ -\frac{1}{2} A^{-1} (z - \beta u) (z - \beta u)' \right] \right\}. &
 \end{aligned}$$

Tomando logaritmos

$$\begin{aligned}
 \lg L(z_2, \dots, z_n / \beta, A) &= \\
 \frac{(n-1)k}{2} \lg(2\pi) - \frac{n-1}{2} \lg |A| - \frac{1}{2} \text{tr} \left[ A^{-1} (z - \beta u) (z - \beta u)' \right]. &
 \end{aligned}$$

Derivando utilizando las reglas de derivación matricial dadas en el Anexo A.2, queda:

$$\begin{aligned}
 d \lg L(z_2, \dots, z_n / \beta, A) &= \\
 -\frac{n-1}{2} \text{tr} \left[ A^{-1} (dA) \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ A^{-1} (dA) A^{-1} (z - \beta u) (z - \beta u)' \right] - & \\
 \frac{1}{2} \text{tr} \left[ A^{-1} (-d\beta) u (z - \beta u)' - A^{-1} (z - \beta u) u' (d\beta)' \right] &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{n-1}{2} \text{tr} \left[ A^{-1}(dA) \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ A^{-1}(z-\beta u)(z-\beta u)' A^{-1}(d\beta) \right] + \text{tr} \left[ u(z'-u'\beta') A^{-1} d\beta \right] = \\
 & \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (A^{-1}(z-\beta u)(z-\beta u)' - (n-1)I_n) A^{-1}(d\beta) \right] + \text{tr} \left[ u(z'-u'\beta') A^{-1} d\beta \right] = \\
 & \frac{1}{2} \text{Vec}' \left[ A^{-1}((z-\beta u)(z-\beta u)' - (n-1)I_k) \right] d\text{Vec}(A) + \text{Vec}' \left[ A^{-1}(z-\beta u)u' \right] d\text{Vec}(\beta)
 \end{aligned}$$

donde igualando a cero y siendo  $A > 0$ , queda:

$$i) A^{-1}(z-\beta u)u' = 0 \Leftrightarrow zu' = \beta uu' \Leftrightarrow$$

$$\hat{\beta} = zu'(uu')^{-1}$$

$$ii) A^{-1}((z-\beta u)(z-\beta u)' A^{-1} - (n-1)I_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(n-1)A = (z-\beta u)(z-\beta u)' \Leftrightarrow$$

$$\hat{A} = \frac{1}{n-1} (z-\hat{\beta}u)'(z-\hat{\beta}u).$$

Ahora bien

$$z - \hat{\beta}u = z - zu'(uu')^{-1}u = z[I_{n-1} - u'(uu')^{-1}u]$$

y  $I_{n-1} - u'(uu')^{-1}u$  es simétrica e idempotente, ya que

$$[I_{n-1} - u'(uu')^{-1}u][I_{n-1} - u'(uu')^{-1}u] = I_{n-1} - u'(uu')^{-1}u$$

por lo tanto

$$\hat{A} = \frac{1}{n-1} z [I_{n-1} - u'(uu')^{-1}u] z'.$$

## 1.4. Distribución de los estimadores

### 1.4.1. Distribución de $z$ y $\text{Vec}(z)$

Sea la función de verosimilitud

$$L(z_2, \dots, z_n/\beta, A) =$$

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - \beta u_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - \beta u_\alpha) \right\} = \\
 & (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Vec}'(z - \beta u) \text{Vec}(A^{-1}(z - \beta u)) \right\} = \\
 & (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Vec}'[z' - u'\beta'](I_{n-1} \otimes A^{-1}) \text{Vec}[(z' - u'\beta)'] \right\}.
 \end{aligned}$$

de donde por las propiedades de la función Vec y de la Normal, al ser la densidad anterior la del  $\text{vez}(z)$ , se obtiene que

$$z' \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(n-1) \times k}(u'\beta'; I_{n-1} \otimes A)$$

siempre que  $z_2, \dots, z_n$  sean independientes.

A continuación calcularemos la distribución de  $z$ , para lo cual hace falta la del  $\text{Vec}(z')$ . Por las propiedades del Vec, se sabe que

$$\text{Vec}(z') = I_{n-1;k} \text{Vec}(z)$$

pudiendo concluir que

$$\begin{aligned}
 \text{Vec}(z') & \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(n-1)} \left( I_{n-1;k} \text{Vec}(\beta u); I_{n-1;k} (I_{n-1} \otimes A) I_{k,n-1} \right) \\
 & \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(n-1)} \left( \text{Vec}(u'\beta'); (B \otimes I_{n-1}) \right)
 \end{aligned}$$

por lo que

$$z \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k \times (n-1)}(\beta u; A \otimes I_{n-1}).$$

### 1.4.2. Distribución $\hat{\beta}$

Una vez conocida la distribución de  $z$ , y la relación entre  $\beta$  y  $z$ , se puede calcular la distribución de  $\beta$  sin más que sustituir en la expresión del parámetro  $\beta$ .

$$\text{Vec}(\hat{\beta}) = \text{Vec}(zu'(uu')^{-1}) = ((uu')^{-1}u \otimes I_k) \text{Vec}(z)$$

al ser

$$\text{Vec}(z) \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(n-1)}(\text{Vec}(\beta u); I_{n-1} \otimes A)$$

se tiene que :

$$\begin{aligned}
 \text{Vec}(\hat{\beta}) &\rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(q+1)}\left(\left[(uu')u \otimes I_k\right] \text{Vec}(\beta u); \left[(uu')^{-1}u \otimes I_k\right] \left[I_{n-1} \otimes A'\right] \left[u'(uu')^{-1} \otimes I_k\right]\right) \\
 &\rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(q+1)}\left(\text{Vec}[\beta uu'(uu')^{-1}]; \left[(uu')^{-1}uu'(uu')^{-1} \otimes A'\right]\right) \\
 &\rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(q+1)}\left(\text{Vec}[\beta]; (uu')^{-1} \otimes A^{-1}\right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \hat{\beta}' \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k \times (q+1)}\left(\beta'; (uu')^{-1} \otimes A\right).
 \end{aligned}$$

Para calcular la distribución del  $\hat{\beta}$ , hay que calcular previamente la del  $\text{Vec}(\hat{\beta}')$ , para ello siguiendo los pasos anteriores, resulta:

$$\text{Vec}(\hat{\beta}') = \text{Vec}((uu')^{-1}uz') = [I_k \otimes (uu')^{-1}] \text{Vec}(z')$$

Ya que la distribución del  $\text{Vec}(z')$  es conocida y de la forma:

$$\text{Vec}(z') \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(n-1)}\left(\text{Vec}(u'\beta'); (A \otimes I_{n-1})\right).$$

se puede obtener fácilmente la distribución de  $\text{Vec}(\hat{\beta}')$  como:

$$\begin{aligned}
 \text{Vec}(\hat{\beta}') &\rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(q+1)}\left(\left[[I_k \otimes (uu')^{-1}u] \text{Vec}(u'\beta'); [I_k \otimes (uu')^{-1}u] (A \otimes I_{n-1}) [I_k \otimes u'(uu')^{-1}]\right)\right) \\
 &\rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(q+1)}\left(\text{Vec}[(uu')^{-1}uu'\beta']; (A \otimes (uu')^{-1}uu'(uu')^{-1})\right) \\
 &\rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(q+1)}\left(\text{Vec}(\beta'); (A \otimes (uu')^{-1})\right) \\
 &\Rightarrow \hat{\beta}' \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k \times (q+1)}\left(\beta; A \otimes (uu')^{-1}\right).
 \end{aligned}$$

### 1.4.3. Distribución de $\hat{A}$

Sea

$$(n-1)\hat{A} = z [I_{n-1} - u'(uu')^{-1}u] z'.$$

Independientemente de considerar  $z$  o  $z'$ , se tiene una forma cuadrática normal matricial. Partiendo de la distribución de  $z'$ , se obtiene una forma cuadrática normal matricial en la que la matriz de esta es simétrica e idempotente y por lo tanto su rango es igual a su traza y

$$\text{tr} [I_{n-1} - u'(uu')^{-1}u] = \text{tr} [I_{n-1} - (uu')(uu')^{-1}] = \text{tr} [I_{n-1} - I_{q+1}] = (n-1) - (q+1) =$$

$$n - q - 2$$

por lo tanto

$$(n - 1)\hat{A} \rightsquigarrow W_k(n - q - 2; A)$$

y

$$E[(n - 1)\hat{A}] = (n - q - 2)A,$$

por lo que un estimador insesgado para  $A$  es

$$\hat{\hat{A}} = \frac{(n - 1)\hat{A}}{n - q - 2}.$$

Al ser

$$u[I_{n-1} - u'(uu')^{-1}u] = 0$$

se tiene que  $\hat{\beta}'$  y  $\hat{A}$  son independientes y también lo son  $\hat{\hat{\beta}}$  y  $\hat{\hat{A}}$ .

## 1.5. Contrastes de hipótesis

Es posible resolver diversos contrastes de hipótesis en el Modelo Lognormal Multivariante no homogéneo con factores exógenos, y en relación con la matriz paramétrica  $\beta$ , por ejemplo, contrastes sobre que un parámetro  $\beta_i$ ,  $i = 0, \dots, q$ , sea igual a un vector determinado, que un subconjunto de ellos sean vectores nulos, o que determinados componentes de los vectores  $\beta_i$  paramétricos sean nulas. Torres (1993) desarrollo una metodología al respecto, basada en el criterio de la razón de verosimilitud, estudiando detalladamente la invarianza, distribuciones exactas y asintóticas, momentos del criterio, etc, (ver Apéndices A y B y Capítulo II de Torres (1993)) que viene aplicándose desde entonces de manera sistemática para la construcción de los contrastes en el Modelo Lognormal mencionado, así como, con las debidas adaptaciones a otros modelos de difusión.



# Capítulo 2

## Proceso Lognormal multivariante no homogéneo con factores exógenos distintos para cada variable

En este Capítulo se estudia el Modelo de Difusión Lognormal no homogéneo, multivariante, afectado de un factor exógeno múltiple, de tal manera que cada factor exógeno afecta sólo a una variable endógena del proceso. Se obtienen sucesivamente los siguientes resultados:

- Definición del Modelo, ecuaciones de Kolmogorov y densidad de probabilidad de transición del mismo.
- Estimación máximo-verosímil de los parámetros del Modelo, basada en un muestreo discreto y con la verosimilitud condicionada obtenida a partir de las densidades de transición.

### 2.1. Definición del modelo

A través de las ecuaciones de Kolmogorov, se define un modelo de proceso de difusión lognormal multidimensional con dos parámetros y con un vector exógeno, de manera que cada componente de dicho vector exógeno afecte a la correspondiente variable endógena de la tendencia infinitesimal del proceso.

Sea  $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$  un proceso de Markov con valores en  $\mathbb{R}^k$ , con trayectorias continuas casi seguramente y con probabilidad de transición dada por

$$P(y, t/x, s) = P[X(t) = y/X(s) = x] \quad x, y \in (\mathbb{R}^k)$$

con  $X(t) = (X_{t1}, \dots, X_{tk})'$ ,  $X(s) = (X_{s1}, \dots, X_{sk})'$  y  $x$  e  $y$  dos vectores  $k$ -dimensionales.

Se suponen las siguientes condiciones:

i)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \epsilon} P(dy, t + h/x, t) = 0.$$

ii)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)P(dy, t + h/x, t) = b(x, t), \quad \text{con}$$

$$b(x, t) = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \gamma_1 g_1(t))x_1 \\ (\alpha_2 + \gamma_2 g_2(t))x_2 \\ \vdots \\ (\alpha_k + \gamma_k g_k(t))x_k \end{pmatrix},$$

donde, para  $i = 1, \dots, k$ ,  $g_i(t)$  es un función continua en  $[t_0, T]$ .

iii)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)(y-x)'P(dy, t + h/x, t) = [Diag(X)]A[Diag(X)]',$$

donde  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  es una matriz simétrica y definida positiva con  $a_{ij} > 0$ , para  $i, j=1, 2, \dots, k$ ; y

$$Diag(X) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_k \end{pmatrix}.$$

iv) Los momentos infinitesimales de orden superior son nulos

En las condiciones anteriores y bajo ciertas propiedades de diferenciabilidad de  $p = P(y, t/x, s)$ , se obtienen las ecuaciones adelantada y atrasada de Kolmogorov que son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k a_{ij} \frac{\partial^2 (y_i y_j p)}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \gamma_i g_i(t)) \frac{\partial (y_i p)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial p}{\partial s} &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k a_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \gamma_i g_i(s)) x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \end{aligned}$$

en las que  $p = P(y, t/x, s)$ , es la densidad de transición condicionada, con la solución inicial

$$P(y, t/x, t) = \delta(y - x).$$

La solución común a estas ecuaciones es

$$P(y, t/x, s) = \left[ \left( \prod_{i=1}^k y_i \right) (2\pi)^{k/2} (t-s)^{k/2} |A|^{1/2} \right]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t-s)} Q \right\}$$

donde

$$Q = \left( \lg y - \lg x - \beta(t-s) - \Gamma G(t; s) \right)' A^{-1} \left( \lg y - \lg x - \beta(t-s) - \Gamma G(t; s) \right)$$

siendo

$$\beta = \left( \alpha_1 - \frac{1}{2} a_{11}, \dots, \alpha_k - \frac{1}{2} a_{kk} \right)' = \alpha - \frac{1}{2} \text{dig}(A),$$

$$G(t; s) = \left( \int_s^t g_1(\tau) d\tau, \dots, \int_s^t g_k(\tau) d\tau \right)',$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_k \end{pmatrix},$$

$$x = (x_1, \dots, x_k)'; y = (y_1, \dots, y_k)'.$$

Denotando

$$B = (\beta; \Gamma) \text{ y } \bar{v}_{t,s} = \begin{pmatrix} t-s \\ G(t,s) \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \beta_k & 0 & 0 & \gamma_k \end{pmatrix}.$$

En términos de B y  $\bar{v}_{t,s}$  la densidad de transición se escribe así:

$$P(y, t/x, s) = \left[ \left( \prod_{i=1}^k y_i \right) (2\pi)^{k/2} (t-s)^{k/2} |A|^{1/2} \right]^{-1} \exp \left\{ \frac{-Q}{2(t-s)} \right\}$$

donde

$$Q = (\lg y - \lg x - B\bar{v}_{t,s})' A^{-1} (\lg y - \lg x - B\bar{v}_{t,s}).$$

Por tanto esta densidad de transición corresponde a una lognormal k-dimensional de media  $(\lg x - B\bar{v}_{t,s})$  y varianza  $(t-s)A$ , es decir:

$$X_t/X_s = x \rightarrow \Lambda_k \left[ \lg x - B\bar{v}_{t,s}; (t-s)A \right].$$

## 2.2. Cálculo de los momentos

En esta sección se calculan los momentos, tendencia, varianza y covarianza, tanto centrados como no centrados para el Modelo. Para ello se parte de la densidad de transición correspondiente a una lognormal k-dimensional de parámetros  $(\lg x - B\bar{v}_{t,s})$  y  $(t-s)A$ , es decir:

$$X_t/X_s = x \rightarrow \Lambda_k \left( \lg x + B\bar{v}_{t,s}; (t-s)A \right).$$

### 2.2.1. Tendencia

Sea

$$Z(t) = \lg \left[ X(t)/X(s) = x_s \right] \rightarrow \mathcal{N}_k \left( \lg x_s + B\bar{v}_{s,t}; (t-s)A \right)$$

su función generatriz de momentos es de la forma

$$M_{Z(t)}(\gamma) = \exp \left\{ \gamma' \lg x_s + \gamma' B\bar{v}_{s,t} + \frac{1}{2} (t-s) \gamma' A \gamma \right\} \text{ con } \gamma \in \mathbb{R}^k$$

y

$$E[X_i(t)] = E[E[X_i(t)/X(t_0)]]$$

#### Tendencia condicionada

Si tomamos  $\gamma = (0, \dots, \overset{i}{r}, \dots, 0)$  con  $r \in \mathbb{R}$ , obtendremos la tendencia de la i-ésima componente:

$$M_{Z(t)}(\gamma) = E[\exp\{\gamma' Z(t)\}] = E[X_i^r(t)/X(s) = x_s] = x_{is}^r \exp \left\{ r B_i \bar{v}_{s,t} + \frac{r^2}{2} (t-s) a_{ii} \right\}.$$

Nota:

$$r B_i = (r B_i, \dots, \gamma_i, \dots, 0); (0, \dots, r, \dots, 0) B = r \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \beta_k & 0 & \cdots & \gamma_k \end{pmatrix} \text{ si}$$

r=1, queda:

$$E[X_i(t)/X_s = x_s] = x_{is} \exp \left[ B_i \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{ii} \right]$$

como  $B = \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j$ , resulta;

$$E[X_i(t)/X_s = x_s] = x_{is} \exp \left[ e'_i \left( \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j \right) \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{ii} \right]$$

donde  $x_{is}$  es el elemento  $i$ -ésimo de  $x_s$

### Tendencia

Para calcular la tendencia no condicionada unidimensional, se toma:

$$\begin{aligned} E[X_i(t)] &= E[E[X_i(t)/X(t_0)]] = \\ &E \left[ X_i(t_0) \exp \left[ B_i \bar{v}_{t_0,t} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} \right] \right] = \\ &E[X_i(t_0)] \exp \left[ B_i \bar{v}_{t_0,t} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} \right] = \\ &E[X_i(t_0)] \exp \left[ e'_i B \bar{v}_{t_0,t} + \frac{t-t_0}{2} e'_i A e_i \right] = \\ &E[X_i(t_0)] \exp \left[ e'_i B \bar{v}_{t_0,t} + (t-t_0) \text{tr} \left[ \frac{1}{2} e_i e'_i A \right] \right] \end{aligned}$$

llamando

$$M = \frac{1}{2} e_i e'_i$$

resulta:

$$E[X_i(t_0)] \exp \left[ e'_i B \bar{v}_{t_0,t} + (t-t_0) \text{tr}[MA] \right]$$

asumiendo que  $P[X(t_0) = x_0] = 1$

$$\begin{aligned} E[X_i(t)] &= x_{i0} \exp \left[ e'_i B \bar{v}_{t_0,t} + (t-t_0) \text{tr}[MA] \right] = \\ &x_{i0} \exp \left[ e'_i \left( \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j \right) \bar{v}_{t_0,t} + (t-t_0) \text{tr}[MA] \right]. \end{aligned}$$

Nota2:

$$e'_i B \bar{v}_{t_0,t} = (\beta_i, 0, \dots, \gamma_i, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} t-t_0 \\ G(t-t_0) \end{pmatrix} = \beta_i(t-t_0) + \gamma_i \int_{t_0}^t g_i(\tau) d\tau.$$

### 2.2.2. Varianza

#### Varianza condicionada

Si se toma la función generatriz de momentos  $M_z(t)$  para  $r = 2$ , se obtiene el momento condicionado no centrado de segundo orden para la  $i$ -ésima componente, que será de la forma:

$$E[X_i^2(t)/X(s) = x_s] = x_{is}^2 \exp\left[2B_i\bar{v}_{s,t} + 2(t-s)a_{ii}\right].$$

Por lo tanto, la varianza condicional será:

$$\begin{aligned} Var[X_i(t)/X(s)] &= E[X_i^2(t)/X(s)] - (E[X_i(t)/X(s)])^2 = \\ &= x_{is}^2 \exp\left[2e'_i \left(\sum_{j=1}^k E_{jj}\Delta H'_j\right) \bar{v}_{s,t} + 2(t-s)a_{ii}\right] - \\ &= x_{is}^2 \exp\left[2e'_i \left(\sum_{j=1}^k E_{jj}\Delta H'_j\right) \bar{v}_{s,t} + (t-s)a_{ii}\right] = \\ &= x_{is}^2 \exp\left[2e'_i \left(\sum_{j=1}^k E_{jj}\Delta H'_j\right) \bar{v}_{s,t} + (t-s)a_{ii}\right] \left[\exp[(t-s)a_{ii}] - 1\right]. \end{aligned}$$

#### Varianza

Para calcular la varianza no condicionada, realizamos los mismos pasos pero con los momentos no condicionados. En primer lugar se calcula el momento no centrado de segundo orden

$$\begin{aligned} E[X_i^2(t)] &= \\ E[E[X_i^2(t)/X(s)]] &= E\left[X_{is}^2 \exp[2B_i\bar{v}_{s,t} + 2(t-s)a_{ii}]\right] = \\ E[X_i^2(s)] \exp[2B_i\bar{v}_{s,t} + 2(t-s)a_{ii}] &. \end{aligned}$$

Aplicando la formula de la varianza

$$\begin{aligned} Var[X_i(t)] &= \\ E[X_i^2(s)] \exp[2B_i\bar{v}_{s,t} + 2(t-s)a_{ii}] - E[X_i(s)]^2 \exp[2B_i\bar{v}_{s,t} + (t-s)a_{ii}] &= \end{aligned}$$

$$E[X_i^2(s)] \exp\left[2e_i' B \bar{v}_{s,t} + 2(t-s)e_i' A e_i\right] - E[X_i(s)]^2 \exp\left[2e_i' B \bar{v}_{s,t} + (t-s)e_i' A e_i\right] =$$

$$E[X_i^2(s)] \exp\left[2e_i' B \bar{v}_{s,t} + (t-s)\text{tr}[2e_i e_i' A]\right] -$$

$$E[X_i(s)]^2 \exp\left[2e_i' B \bar{v}_{s,t} + (t-s)\text{tr}[e_i e_i' A]\right],$$

llamando

$$M_1 = 2e_i e_i' \quad \text{y} \quad M_2 = e_i e_i',$$

queda:

$$E[X_i^2(s)] \exp\left[2e_i' B \bar{v}_{s,t} + (t-s)\text{tr}[M_1 A]\right] - E[X_i(s)]^2 \exp\left[2e_i' B \bar{v}_{s,t} + (t-s)\text{tr}[M_2 A]\right].$$

Si se toma como condición inicial  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ , la varianza tomará la expresión:

$$\text{Var}[X_i(t)] =$$

$$x_{i0}^2 \left[ \exp\left[2e_i' B \bar{v}_{t_0,t} + (t-t_0)\text{tr}[M_1 A]\right] - \exp\left[2e_i' B \bar{v}_{t_0,t} + (t-t_0)\text{tr}[M_2 A]\right] \right] =$$

$$x_{i0}^2 \left[ \exp\left[2e_i' \left(\sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H_j'\right) \bar{v}_{t_0,t} + (t-t_0)\text{tr}[M_1 A]\right] - \right.$$

$$\left. \exp\left[2e_i' \left(\sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H_j'\right) \bar{v}_{t_0,t} + (t-t_0)\text{tr}[M_2 A]\right] \right]$$

### 2.2.3. Covarianza en un mismo instante de tiempo

#### Covarianza condicionada

Para calcular la covarianza condicionada, lo primero es calcular el momento conjunto bidimensional de primer orden condicionado

$$E[X_i(t)X_j(t)] = E[E[X_i(t), X_j(t)/X(t_0)]]$$

tomando  $\gamma = (0, \dots, r_1^i, \dots, r_2^j, \dots, 0)$ . La función generatriz de momentos será:

$$M_{Z(t)} = E[\exp\{\gamma' Z(t)\}] =$$

$$E[\exp\{r_1 Z_i(t) + r_2 Z_j(t)\}] = E[X_i^{r_1}(t) X_j^{r_2}(t) / X(s) = x_s] =$$

$$x_{is}^{r_1} x_{js}^{r_2} \exp \left[ r_1 B_i \bar{v}_{s,t} + r_2 B_j \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} r_1^2 a_{ii} + \frac{t-s}{2} r_2^2 a_{jj} + r_1 r_2 a_{ij} (t-s) \right]$$

en el caso de  $r_1 = r_2 = 1$

$$E[X_i(t)X_j(t)/X(s) = x_s] = x_{is} x_{js} \exp \left[ B_i \bar{v}_{s,t} + B_j \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{ii} + \frac{t-s}{2} a_{jj} + a_{ij} (t-s) \right]$$

$$E[X_i(t)X_j(t)/X(s) = x_s] =$$

$$x_{is} x_{js} \exp \left[ e'_i \left( \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j \right) \bar{v}_{s,t} + e'_j \left( \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j \right) \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{ii} + \frac{t-s}{2} a_{jj} + a_{ij} (t-s) \right].$$

Aplicando la definición de covarianza

$$Cov[X_i(t), X_j(t)/X(s)] =$$

$$\begin{aligned} & x_{is} x_{js} \exp \left[ B_i \bar{v}_{s,t} + B_j \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{ii} + \frac{t-s}{2} a_{jj} + a_{ij} (t-s) \right] - \\ & - x_{is} \exp \left[ B_i \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{ii} \right] x_{js} \exp \left[ B_j \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{jj} \right] = \\ & x_{is} x_{is} \exp \left[ B_i \bar{v}_{s,t} + B_j \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{ii} + \frac{t-s}{2} a_{jj} \right] \left[ \exp[(t-s)a_{ij}] - 1 \right] = \\ & x_{is} x_{is} \exp \left[ e'_i \left( \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j \right) \bar{v}_{s,t} + e'_j \left( \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j \right) \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{ii} + \right. \\ & \left. \frac{t-s}{2} a_{jj} \right] \left[ \exp[(t-s)a_{ij}] - 1 \right]. \end{aligned}$$



### Covarianza sin condicionar

Al igual que en el caso anterior el primer paso es calcular el momento de primer orden bidimensional no condicionado.

$$\begin{aligned}
 E[X_i(t)X_j(t)] &= E[E[X_i(t), X_j(t)/X(t_0)]] = \\
 E \left[ X_i(t_0)X_j(t_0) \exp \left[ B_i \bar{v}_{t_0,t} + B_j \bar{v}_{t_0,t} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} + \frac{t-t_0}{2} a_{jj} + (t-t_0) a_{ij} \right] \right] &= \\
 E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ e'_i \left( \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j \right) \bar{v}_{t_0,t} + e'_j \left( \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j \right) \bar{v}_{t_0,t} + \right. \\
 \left. \frac{t-t_0}{2} a_{ii} + \frac{t-t_0}{2} a_{jj} + (t-t_0) a_{ij} \right].
 \end{aligned}$$

Para en segundo lugar aplicar la expresión de covarianza

$$\begin{aligned}
 Cov[X_i(t), X_j(t)] &= \\
 E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ B_i \bar{v}_{t_0,t} + B_j \bar{v}_{t_0,t} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} + \frac{t-t_0}{2} a_{jj} + (t-t_0) a_{ij} \right] - \\
 - E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left[ B_i \bar{v}_{t_0,t} + B_j \bar{v}_{t_0,t} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} + \frac{t-t_0}{2} a_{jj} \right].
 \end{aligned}$$

Llamando

$$\gamma_1 = e_i + e_j,$$

la expresión anterior será igual a :

$$\begin{aligned}
 E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ \gamma'_1 B \bar{v}_{t_0,t} + \frac{t-t_0}{2} \gamma'_1 A \gamma_1 \right] - \\
 E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left[ \gamma'_1 B \bar{v}_{t_0,t} + \frac{t-t_0}{2} e'_i A e_i + \frac{t-t_0}{2} e'_j A e_j \right].
 \end{aligned}$$

Si denotamos

$$M_1 = \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma'_1 \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{1}{2} e_i e'_i + \frac{1}{2} e_j e'_j$$

tenemos

$$\begin{aligned}
 Cov[X_i(t), X_j(t)] &= \\
 E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ \gamma'_1 B \bar{v}_{t_0,t} + (t-t_0) tr[M_1 A] \right] -
 \end{aligned}$$

$$E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp\left[\gamma'_1 B \bar{v}_{t_0,t} + (t - t_0) \text{tr}[M_2 A]\right],$$

si  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_i(t), X_j(t)] = \\ x_{i0}x_{j0} \left[ \exp\left[\gamma'_1 \left(\sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j\right) \bar{v}_{t_0,t} + (t - t_0) \text{tr}[M_1 A]\right] - \right. \\ \left. \exp\left[\gamma'_1 \left(\sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H'_j\right) \bar{v}_{t_0,t} + (t - t_0) \text{tr}[M_2 A]\right] \right]. \end{aligned}$$

#### 2.2.4. Función de covarianzas en general

**Caso**  $s < t$

El momento bidimensional de primer orden es:

$$\begin{aligned} E[X_i(t)X_j(s)] = \\ E[E[X_i(t)X_j(s)/X(s)]] = E[X_j(s)E[X_i(t)/X_j(s)]] = \\ E[X_j(s)X_i(s)] \exp\left[B_i \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{ii}\right] = \\ E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp\left[B_i \bar{v}_{s,t} + \frac{t-s}{2} a_{ii}\right] \times \\ \exp\left[B_i \bar{v}_{t_0,s} + B_j \bar{v}_{t_0,s} + \frac{s-t_0}{2} a_{ii} + \frac{s-t_0}{2} a_{jj} + (s-t_0) a_{ij}\right]. \end{aligned}$$

A continuación aplicando la expresión de covarianza,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_i(t), X_j(s)] = \\ E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp\left[B_i(\bar{v}_{s,t} + \bar{v}_{t_0,s}) + B_j \bar{v}_{t_0,s} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} + \frac{s-t_0}{2} a_{jj} + (s-t_0) a_{ij}\right] - \\ E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp\left[B_i \bar{v}_{t_0,t} + B_j \bar{v}_{t_0,s} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} + \frac{s-t_0}{2} a_{jj}\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ e'_i B \bar{v}_{t_0,t} + e'_j B \bar{v}_{t_0,s} + \frac{t-t_0}{2} e'_i A e_i + \frac{s-t_0}{2} e'_j A e_j + (s-t_0) e'_i A e_j \right] - \\
 & E[X_i(t_0)] E[X_j(t_0)] \exp \left[ e'_i B \bar{v}_{t_0,t} + e'_j B \bar{v}_{t_0,s} + \frac{t-t_0}{2} e'_i A e_i + \frac{s-t_0}{2} e'_j A e_j \right] = \\
 & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ \text{tr}[(\bar{v}_{t_0,t} e'_i + \bar{v}_{t_0,s} e'_j) B] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e'_i + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{s-t_0}{2} e_j e'_j + (s-t_0) e_j e'_i \right) A \right] \right] - \\
 & E[X_i(t_0)] E[X_j(t_0)] \exp \left[ \text{tr}[(\bar{v}_{t_0,t} e'_i + \bar{v}_{t_0,s} e'_j) B] + \right. \\
 & \quad \left. \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e'_i + \frac{s-t_0}{2} e_j e'_j \right) A \right] \right].
 \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de la traza de  $\text{tr}[CB] = \text{Vec}'(C)\text{Vec}(D)$  y sabiendo que el  $\text{Vec}(B) = T\text{Vec}(\Delta)$ , queda;

$$\begin{aligned}
 & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ \text{Vec}'[(\bar{v}_{t_0,t} e'_i + \bar{v}_{t_0,s} e'_j)'] T\text{Vec}(\Delta) + \right. \\
 & \quad \left. \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e'_i + \frac{s-t_0}{2} e_j e'_j + (s-t_0) e_j e'_i \right) A \right] \right] - \\
 & E[X_i(t_0)] E[X_j(t_0)] \exp \left[ \text{Vec}'[(\bar{v}_{t_0,t} e'_i + \bar{v}_{t_0,s} e'_j)'] T\text{Vec}(\Delta) + \right. \\
 & \quad \left. \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e'_i + \frac{s-t_0}{2} e_j e'_j \right) A \right] \right]
 \end{aligned}$$

**Caso**  $s > t$

El momento conjunto bidimensional toma la forma:

$$\begin{aligned}
 & E[X_i(t)X_j(s)] = \\
 & E[E[X_i(t)X_j(s)/X(t)]] = E[X_i(t)E[X_j(s)/X(t)]] = \\
 & E[X_i(t)X_j(t)] \exp \left[ B_j \bar{v}_{t,s} + \frac{s-t}{2} a_{jj} \right] =
 \end{aligned}$$

$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ B_j \bar{v}_{t,s} + \frac{s-t}{2} a_{jj} \right] \exp \left[ B_i \bar{v}_{t_0,t} + B_j \bar{v}_{t_0,t} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} + \frac{t-t_0}{2} a_{jj} + (t-t_0) a_{ij} \right].$$

Por lo tanto la covarianza será:

$$Cov[X_i(t), X_j(s)] =$$

$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ B_j \bar{v}_{t,s} + \frac{s-t_0}{2} a_{jj} \right] \exp \left[ B_i \bar{v}_{t_0,t} + B_j \bar{v}_{t_0,s} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} + \frac{t-t_0}{2} a_{jj} + (t-t_0) a_{ij} \right] -$$

$$E[X_i(t_0)] \exp \left[ B_i \bar{v}_{t_0,t} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} \right] E[X_j(t_0)] \exp \left[ B_j \bar{v}_{t_0,s} + \frac{s-t_0}{2} a_{jj} \right] =$$

$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ B_i \bar{v}_{t_0,t} + B_j (\bar{v}_{t,s} + \bar{v}_{t_0,t}) + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} + a_{jj} \left( \frac{t-t_0+s-t}{2} \right) + (t-t_0) a_{ij} \right] -$$

$$E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left[ B_i \bar{v}_{t_0,t} + B_j \bar{v}_{t_0,s} + \frac{t-t_0}{2} a_{ii} + \frac{s-t_0}{2} a_{jj} \right] =$$

$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ e'_i B \bar{v}_{t_0,t} + e'_j B \bar{v}_{t_0,s} + \frac{t-t_0}{2} e'_i A e_i + \frac{s-t_0}{2} e'_j A e_j + (t-t_0) e'_i A e_j \right] -$$

$$E[X_i(t_0)]E[X_j(t_0)] \exp \left[ e'_i B \bar{v}_{t_0,t} + e'_j B \bar{v}_{t_0,s} + \frac{t-t_0}{2} e'_i A e_i + \frac{s-t_0}{2} e'_j A e_j \right] =$$

$$E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ tr \left[ (\bar{v}_{t_0,t} e'_i + \bar{v}_{t_0,s} e'_j) B \right] + tr \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e'_i + \right. \right. \right]$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{s-t_0}{2} e_j e_j' + (t-t_0) e_j e_i' \right) A \Big] \Big] - \\ & E[X_i(t_0)] E[X_j(t_0)] \exp \left[ \text{tr} [(\bar{v}_{t_0,t} e_i' + \bar{v}_{t_0,s} e_j') B] + \right. \\ & \left. \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e_i' + \frac{s-t_0}{2} e_j e_j' \right) A \right] \right]. \end{aligned}$$

Aplicando las mismas propiedades anteriores sobre la traza y de la operación  $\text{Vec}(\text{tr}[CB] = \text{Vec}'(C)\text{Vec}(D)$  y  $\text{Vec}(B) = \text{TVec}(\Delta)$ ), resulta:

$$\begin{aligned} & \text{Cov}[X_i(t), X_j(s)] = \\ & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ \text{Vec}' [(\bar{v}_{t_0,t} e_i' + \bar{v}_{t_0,s} e_j')'] \text{TVec}(\Delta) + \right. \\ & \left. \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e_i' + \frac{s-t_0}{2} e_j e_j' + (t-t_0) e_j e_i' \right) A \right] \right] - \\ & E[X_i(t_0)] E[X_j(t_0)] \exp \left[ \text{Vec}' [(\bar{v}_{t_0,t} e_i' + \bar{v}_{t_0,s} e_j')'] \text{TVec}(\Delta) + \right. \\ & \left. \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e_i' + \frac{s-t_0}{2} e_j e_j' \right) A \right] \right]. \end{aligned}$$

### Caso general

La función de covarianzas en general será la intersección entre los dos caso anteriores. De tal manera que resulta

$$\begin{aligned} & \text{Cov}[X_i(t), X_j(t)] = \\ & E[X_i(t_0)X_j(t_0)] \exp \left[ \text{tr} [(\bar{v}_{t_0,t} e_i' + \bar{v}_{t_0,s} e_j') B] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e_i' + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{s-t_0}{2} e_j e_j' + (t \cap s - t_0) e_j e_i' \right) A \right] \right] - \end{aligned}$$

$$E[X_i(t_0)] E[X_j(t_0)] \exp \left[ \text{tr} [(\bar{v}_{t_0,t} e_i' + \bar{v}_{t_0,s} e_j') B] + \text{tr} \left[ \left( \frac{t-t_0}{2} e_i e_i' + \frac{s-t_0}{2} e_j e_j' \right) A \right] \right],$$

si tomamos como condición inicial  $P[X(t_0) = x_1] = 1$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 & Cov[X_i(t), X_j(t)] = \\
 & x_{i0}x_{j0} \left\{ \exp \left[ tr \left[ (\bar{v}_{t_0,t}e'_i + \bar{v}_{t_0,s}e'_j)B \right] + tr \left[ \left( \frac{t-t_0}{2}e_i e'_i + \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{s-t_0}{2}e_j e'_j + (t \cap s - t_0)e_j e'_i \right) A \right] \right] - \\
 & \exp \left[ tr \left[ (\bar{v}_{t_0,t}e'_i + \bar{v}_{t_0,s}e'_j)B \right] + tr \left[ \left( \frac{t-t_0}{2}e_i e'_i + \frac{s-t_0}{2}e_j e'_j \right) A \right] \right] \right\}
 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que  $tr[CB] = Vec'(C)Vec(D)$  y sabiendo que el  $Vec(B) = TVec(\Delta)$ , nos queda;

$$\begin{aligned}
 & Cov[X_i(t), X_j(t)] = \\
 & x_{i0}x_{j0} \left\{ \exp \left[ Vec \left[ (\bar{v}_{t_0,t}e'_i + \bar{v}_{t_0,s}e'_j)' \right] TVec(\Delta) + tr \left[ \left( \frac{t-t_0}{2}e_i e'_i + \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \frac{s-t_0}{2}e_j e'_j + (t \cap s - t_0)e_j e'_i \right) A \right] \right] - \\
 & \exp \left[ Vec \left[ (\bar{v}_{t_0,t}e'_i + \bar{v}_{t_0,s}e'_j)' \right] TVec(\Delta) + tr \left[ \left( \frac{t-t_0}{2}e_i e'_i + \frac{s-t_0}{2}e_j e'_j \right) A \right] \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

## 2.3. Estimación máximo-verosímil de los parámetros del proceso

### 2.3.1.

Los parámetros a estimar son  $\beta, \Gamma y A$  ó en términos matriciales A y B. El problema que se presenta es que la matriz B tiene ceros estructurales. Para obviar esta dificultad en el posterior cálculo de los estimadores máximo-verosímiles, es preciso introducir una matriz paramétrica que no contenga ceros.

Sean:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix};$$

$$\Delta = (\beta; \gamma) = \begin{pmatrix} \beta_1, & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots \\ \beta_k, & \gamma_k \end{pmatrix}$$

de tal manera que  $\Delta$  contiene todos los parámetros no nulos de la matriz  $B$  y no contiene ceros estructurales.

### 2.3.2.

Es interesante obtener una relación entre las matrices  $B$  y  $\Delta$  que será ampliamente utilizada en el cálculo de los estimadores. Puede probarse que:

$$B = \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H_j'$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \text{Vec}(B) &= \begin{pmatrix} \beta \\ \text{Vec}(\Gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & D_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & D_{ik} \end{pmatrix} \text{Vec}(\Delta) \end{aligned}$$

donde

$$D_{ik} = \sum_{j=1}^k u_j \otimes E_{jj}; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & D_{ik} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^k (e_1; e_{j+1}) \otimes E_{jj}$$

llamando

$$H_j = (e_1; e_{j+1})$$

queda:

$$\text{Vec}(B) = \sum_{j=1}^k (H_j \otimes E_{jj}) \text{Vec}(\Delta) = \sum_{j=1}^k \text{Vec}(E_{jj} \Delta H_j') = \text{Vec} \left( \sum_{j=1}^k E_{jj} \Delta H_j' \right)$$

lo que prueba la relación anterior.

Por otra parte, sea:

$$T = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & D_{ik} \end{pmatrix},$$

matriz por cajas de dimensiones  $(k \times k)$  para las dos de la primera fila y  $(k^2 \times k)$  para las de la segunda fila, y con rango completo por columnas, por lo que:

$$T_g = (T'T)^{-1}T' = T'$$

y T se puede expresar como:

$$T = \left( \begin{array}{c|c} \sum_{j=1}^k E_{jj} & 0 \\ \hline 0 & \sum_{j=1}^k u_j \otimes E_{jj} \end{array} \right) = \sum_{j=1}^k \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & u_j \end{array} \right) \otimes E_{jj} = \sum_{j=1}^k H_j \otimes E_{jj}.$$

### 2.3.3.

El siguiente paso es estimar por máxima verosimilitud los parámetros B y A del proceso.

Para ello se construye la verosimilitud asociada al proceso de difusión, lo cual se hace, en procesos markovianos, a través de las densidades de transición.

1. Se considera observado el proceso por un muestreo discreto, es decir, observamos el proceso en tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  obteniendo la muestra  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$  de valores del proceso en dichos tiempos.

El proceso es k-dimensional, por lo tanto,  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$  son vectores k-dimensionales:

$$X_{t_i} = \begin{pmatrix} X_{t_i,1} \\ \vdots \\ X_{t_i,k} \end{pmatrix}$$

y se escriben  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y en general  $x_\alpha$ , para  $\alpha = 1, \dots, n$  con  $x_\alpha$  el vector k-dimensional de valores observados.

2. Se consideran los valores de la densidad de transición del proceso entre cada dos tiempos consecutivos, y se supone que, con probabilidad 1, el valor en  $t_1$  es  $X_{t_1} = x_1$ , es decir:

$$\begin{aligned} P[X_{t_1} = x_1] &= 1; \\ P[X_{t_2} = x_2 / X_{t_1} = x_1]; \\ P[X_{t_3} = x_3 / X_{t_2} = x_2]; \\ &\vdots \\ P[X_{t_\alpha} = x_\alpha / X_{t_{\alpha-1}} = x_{\alpha-1}]; \\ &\vdots \\ P[X_{t_n} = x_n / X_{t_{n-1}} = x_{n-1}]. \end{aligned}$$



La función de verosimilitud condicionada toma la forma

$$L(x_1, \dots, x_n/B, A) = P[X_{t_1} = x_1] \cdot P[X_{t_2} = x_2/X_{t_1} = x_1] \cdots P[X_{t_n} = x_n/X_{t_{n-1}} = x_{n-1}] = \prod_{\alpha=2}^n \left[ \left( \prod_{i=1}^k x_{\alpha i} \right) (2\pi)^{k/2} (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{k/2} |A|^{1/2} \right]^{-1} \times \exp \left[ -\frac{1}{2(t_\alpha - t_{\alpha-1})} [\lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1} - B\bar{v}_\alpha]' A^{-1} [\lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1} - B\bar{v}_\alpha] \right].$$

Nota:

$P[X_{t_\alpha} = x_\alpha/X_{t_{\alpha-1}} = x_{\alpha-1}]$  se obtiene de  $P[X_t = y/X_s = x]$  con  $t \rightarrow t_\alpha$ ,  $s \rightarrow t_{\alpha-1}$ ;  $y \rightarrow x_\alpha$ ,  $x \rightarrow x_{\alpha-1}$  y además  $\bar{v}_\alpha = \bar{v}_{\alpha, \alpha-1}$  y  $x_{\alpha i}$  es la  $i$ -ésima componente de  $x_\alpha$ ,

$$x_\alpha = \begin{pmatrix} x_{1\alpha} \\ \vdots \\ x_{k\alpha} \end{pmatrix}.$$

La verosimilitud condicionada anterior puede a su vez escribirse así:

$$L(x_1, \dots, x_n/B, A) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \left[ \left( \prod_{i=1}^k x_{\alpha i} \right) (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{k/2} \right]^{-1} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} [(t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} (\lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1}) - Bv_\alpha]' A^{-1} [(t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} (\lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1}) - Bv_\alpha] \right]$$

siendo  $v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \bar{v}_\alpha$ , para  $\alpha = 2, \dots, n$ .

Realizando el cambio de variable expuesto en el ver Anexo A.1

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1; \\ z_2 &= (t_2 - t_1)^{-1/2} (\lg x_2 - \lg x_1); \\ &\vdots \\ z_n &= (t_n - t_{n-1})^{-1/2} (\lg x_n - \lg x_{n-1}); \end{aligned}$$

y aplicando el teorema del cambio de variable:

$$L(x_1, \dots, x_n/B, A) \Rightarrow L(z_1, \dots, z_n/B, A)$$

la función de verosimilitud resultante, toma la forma:

$$\begin{aligned} L(z_1, \dots, z_n/B, A) &= \\ (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - Bv_\alpha) \right] &= \\ (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \text{tr} \sum_{\alpha=2}^n A^{-1} (z_\alpha - Bv_\alpha) (z_\alpha - Bv_\alpha)' \right] &= \\ (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[ A^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha) (z_\alpha - Bv_\alpha)' \right] \right] & \end{aligned}$$

y como

$$\sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha) (z_\alpha - Bv_\alpha)' = (Z - Bv)(Z - Bv)'$$

tomando  $Z = (z_2, \dots, z_n)$  de dimensión  $k \times (n-1)$  y  $v = (v_2, \dots, v_n)$  de dimensión  $(k+1) \times (n-1)$ ; resulta:

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n/B, A) \Rightarrow L(z_1, \dots, z_n/B, A) &= \\ (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \text{tr} [A^{-1} (Z - Bv)(Z - Bv)'] \right] & \end{aligned}$$

El siguiente paso será diferenciar respecto de los parámetros B y A. Para ello se calcula el diferencial del logaritmo de la función de verosimilitud. El logaritmo de la función de verosimilitud queda:

$$\begin{aligned} \lg L(z_2, \dots, z_n/B, A) &= \\ -\frac{(n-1)k}{2} \lg(2\pi) - \frac{n-1}{2} \lg |A| - \frac{1}{2} \text{tr} [A^{-1} (Z - Bv)(Z - Bv)'] & \end{aligned}$$

y su diferencial

$$\begin{aligned} d \lg L(z_2, \dots, z_n/B, A) &= \\ -\frac{n-1}{2} \text{tr} [A^{-1} (dA)] - \frac{1}{2} \text{tr} [-A^{-1} (dA) A^{-1} (Z - Bv)(Z - Bv)'] - & \\ -\frac{1}{2} \text{tr} [-A^{-1} (dB)v(Z - Bv)' - A^{-1} (Z - Bv)v'(dB)'] & \end{aligned}$$

Estas expresiones han sido obtenidas aplicando las siguientes reglas de derivación (desarrolladas en el Anexo A.2):

1.  $d_A \lg |A| = \text{tr} [A^{-1}(dA)]$ .
2.  $d_A \text{tr} [A^{-1}(Z - Bv)(Z - Bv)'] = \text{tr} [-A^{-1}(dA)A^{-1}(Z - Bv)(Z - Bv)']$ .
3.  $d_B \text{tr} [A^{-1}(Z - Bv)(Z - Bv)'] = \text{tr} [-A^{-1}(dB)v(z - Bv)'] + \text{tr} [-A^{-1}(Z - Bv)v'(dB)']$ .

Tendremos:

$$\begin{aligned}
 & d \lg L(z_2, \dots, z_n / B, A) = \\
 & \frac{1}{2} \text{tr} \left[ A^{-1}(dA)A^{-1}(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n-1)A^{-1}(dA) \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ 2v(Z - Bv)'A^{-1}(dB) \right] = \\
 & \frac{1}{2} \text{tr} \left[ A^{-1}(dA)A^{-1} [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n-1)A] \right] + \text{tr} \left[ v(Z - Bv)'A^{-1}(dB) \right] = \\
 & \quad \downarrow \text{tr} CD = \text{tr} DC \\
 & \frac{1}{2} \text{tr} \left[ A^{-1} [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n-1)A] A^{-1}(dA) \right] + \text{tr} \left[ v(Z - Bv)'A^{-1}(dB) \right] = \\
 & \quad \downarrow \text{tr} CD = \text{Vec}'(C')\text{Vec}(D) \\
 & \frac{1}{2} \text{Vec}' \left[ (A^{-1} [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n-1)A] A^{-1})' \right] d\text{Vec}(A) + \\
 & \quad + \text{Vec}' \left[ A^{-1}(Z - Bv)v' \right] d\text{Vec}(B) = \\
 & \frac{1}{2} \text{Vec}' \left[ A^{-1} [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n-1)A] A^{-1} \right] d\text{Vec}(A) + \\
 & \quad + \text{Vec}' \left[ A^{-1}(Z - Bv)v' \right] T d\text{Vec}(\Delta)
 \end{aligned}$$

ya que  $\text{Vec}(B) = T\text{Vec}(\Delta)$ , y siendo

$$T = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{I} & 0 \\ \hline 0 & D_{ik} \end{array} \right)$$

según se vio anteriormente.

Finalmente el método de máxima verosimilitud, exige,  $d \lg L = 0$ , lo que implica:

$$\text{Vec}' \left[ A^{-1} [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n-1)A] A^{-1} \right] d\text{Vec}(A) = 0$$

$$Vec' \left[ A^{-1}(Z - Bv)v' \right] T dVec(\Delta) = 0.$$

A continuación se analizan las soluciones de estas ecuaciones. Comenzando por la segunda de ellas:

$$\begin{aligned} Vec' \left[ A^{-1}(Z - Bv)v' \right] T &= 0; \\ T' Vec \left[ A^{-1}(Z - Bv)v' \right] &= 0; \\ \sum_{j=1}^k (H_j \otimes E_{jj}) Vec \left( A^{-1}(Z - Bv)v' \right) &= 0; \\ \sum_{j=1}^k Vec \left[ E_{jj}(A^{-1}(Z - Bv)v')H_j \right] &= 0; \\ Vec \left[ \sum_{j=1}^k E_{jj}(A^{-1}(Z - Bv)v')H_j \right] &= 0; \\ \sum_{j=1}^k E_{jj}A^{-1}Zv'H_j &= \sum_{j=1}^k E_{jj}A^{-1}Bvv'H_j. \end{aligned}$$

La última expresión implica que:

$$E_{ll} \sum_{j=1}^k E_{jj}A^{-1}Zv'H_j = E_{ll} \sum_{j=1}^k E_{jj}A^{-1}Bvv'H_j$$

y sólo queda el sumando de  $j=l$ , por las propiedades de  $E_{ll}E_{jj}$ . Por tanto

$$E_{ll}A^{-1}Zv'H_l = E_{ll}A^{-1}Bvv'H_l; \quad l = 1, \dots, k \quad y$$

Teniendo en cuenta la relación dada antes entre  $B$  y  $\Delta$

$$B = \sum_{n=1}^k E_{nn}\Delta H'_n$$

se tiene:

$$E_{ll}A^{-1} \left( \sum_{n=1}^k E_{nn} \right) Zv'H_l = E_{ll}A^{-1} \left( \sum_{n=1}^k E_{nn}\Delta H'_n \right) vv'H_l; \quad l = 1, \dots, k$$

lo que implica

$$\sum_{n=1}^k u_l u_l' A^{-1} u_n u_n' Z v' H_l = \sum_{n=1}^k u_l u_l' A^{-1} u_n u_n' \Delta H_n' v v' H_l; \quad l = 1, \dots, k$$

de donde

$$\sum_{n=1}^k a'_{lg} E_{lg} Z v' H_l = \sum_{n=1}^k a'_{lg} E_{lg} \Delta H_n' v v' H_l$$

es decir

$$a'_{ll} E_{ll} Z v' H_l = a'_{ll} E_{ll} \Delta H_l' v v' H_l$$

donde  $H_l' v v' H_l$  es  $2 \times 2$  y de rango completo.

Por tanto se verifica:

$$E_{ll} Z v' H_l (H_l' v v' H_l)^{-1} = E_{ll} \Delta; \quad u_l' E_{ll} Z v' H_l (H_l' v v' H_l)^{-1} = u_l' E_{ll} \Delta.$$

De donde se deduce que considerando todos los  $l = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta} &= \sum_{l=1}^k E_{ll} Z v' H_l (H_l' v v' H_l)^{-1}; \\ \widehat{\Delta}' &= \sum_{l=1}^k (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v Z' E_{ll}; \\ \text{Vec}(\widehat{\Delta}') &= \sum_{l=1}^k [E_{ll} \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v] \text{Vec}(Z'). \end{aligned}$$

Es decir, que para anularse la diferencial tiene que cumplirse la relación anterior, que es independiente de A (sólo depende de Z y v; y Z depende de las observaciones y v no depende de los valores aleatorios observados sino de los factores exógenos). Siendo lo único aleatorio el  $\text{Vec}(Z')$ . Por lo tanto esta expresión abre la posibilidad de estudiar la distribución de los estimadores.

En cuanto a la primera ecuación, se tiene:

$$\text{Vec}' \left[ A^{-1} [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A] A^{-1} \right] d\text{Vec}(A) = 0$$

y al ser  $d\text{Vec}(A) \neq 0$ , implica sucesivamente que:

$$A^{-1} \left[ (Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A \right] A^{-1} = 0;$$

$$A^{-1} \left[ (Z - Bv)(Z - Bv)' A^{-1} - (n - 1)I_k \right] = 0;$$

$$(Z - Bv)(Z - Bv)' = (n - 1)A;$$

$$\hat{A} = \frac{1}{n - 1} (Z - Bv)(Z - Bv)'.$$

En definitiva los estimadores de máxima-verosimilitud calculados son:

$$\hat{A} = \frac{1}{n - 1} (Z - Bv)(Z - Bv)'$$

$$Vec(\hat{\Delta}') = \sum_{l=1}^k [E_{ll} \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v] Vec(Z')$$

## 2.4. Cálculo de la matriz de información de Fisher

Para calcular la matriz de información de Fisher, el primer paso es calcular la primera derivada de la función de verosimilitud

$$d \lg(z_2, \dots, z_n / B, A) =$$

$$\frac{1}{2} tr \left[ (dA)(A^{-1}) [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A] A^{-1} \right] + tr \left[ A^{-1} (dB)v(Z - Bv)' \right].$$

A continuación calcularemos las segundas derivadas para cada uno de los sumandos de la primera derivada respecto a los dos parámetros.

- Derivada del primer sumando respecto de A

$$d_A \frac{1}{2} tr \left[ (dA) A^{-1} [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A] A^{-1} \right] =$$

$$\frac{1}{2} tr \left[ (dA)(dA^{-1}) [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A] A^{-1} \right] +$$

$$\frac{1}{2} tr \left[ (-dA) A^{-1} [(n - 1)dA] A^{-1} \right] +$$

$$\frac{1}{2} tr \left[ (dA) A^{-1} [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A] A^{-1} (dA) A^{-1} \right] =$$

$$-\frac{n - 1}{2} tr \left[ (dA) A^{-1} (dA) A^{-1} \right] + tr \left[ (dA)(dA^{-1}) [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A] A^{-1} \right].$$

- Derivada del segundo sumando respecto de A

$$d_A tr \left[ A^{-1} dB v (Z - Bv)' \right] = tr \left[ (dA^{-1}) (dB) v (Z - Bv)' \right].$$

- Derivada del primer sumando respecto de B

$$\begin{aligned} d_B \frac{1}{2} tr \left[ (dA) (A^{-1}) [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A] A^{-1} \right] = \\ \frac{1}{2} tr \left[ (dA) A^{-1} [-(dB) v (Z - Bv)'] A^{-1} \right] + \\ \frac{1}{2} tr \left[ (dA) A^{-1} [-(Z - Bv) v' (dB)'] A^{-1} \right] = \\ \frac{1}{2} tr \left[ (dA^{-1}) [(dB) v (Z - Bv)'] \right] + \frac{1}{2} tr \left[ (dA^{-1}) (Z - Bv) v' (dB)' \right] = \\ tr \left[ (dA^{-1}) (dB) v (Z - Bv)' \right]. \end{aligned}$$

- Derivada del segundo sumando respecto de B

$$d_B tr \left[ A^{-1} (dB) v (Z - Bv)' \right] = tr \left[ -A^{-1} dB v v' (dB)' \right].$$

Por lo tanto la segundo derivada global (unión de todos los términos anteriores) resulta:

$$\begin{aligned} d^2 \lg(z_2, \dots, z_n / B, A) = \\ -\frac{n-1}{2} tr \left[ (dA) A^{-1} (dA) A^{-1} \right] + tr \left[ (dA) (dA^{-1}) [(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n-1)A] A^{-1} \right] + \\ tr \left[ (dA^{-1}) (dB) v (Z - Bv) \right] - tr \left[ A^{-1} (dB) v v' (dB)' \right]. \end{aligned}$$

Dada la definición de la función de información de fisher

$$-E[d^2 \lg(z_2, \dots, z_n / B, A)]$$

y teniendo en cuenta que

$$E[Z] = Bv$$

y que

$$E[(Z - Bv)(Z - Bv)'] = (n - 1)A.$$

Entonces la función de información de Fisher será:

$$-E[d^2 \lg(z_2, \dots, z_n/B, A)] =$$

$$\begin{aligned} & \frac{n-1}{2} \text{tr} \left[ (dA)A^{-1}(dA)A^{-1} \right] - \text{tr} \left[ (dA)(dA^{-1})[(n-1)A - (n-1)A]A^{-1} \right] - \\ & \text{tr} \left[ (dA^{-1})(dB)v(Z - Bv)' \right] + \text{tr} \left[ A^{-1}(dB)vv'(dB)' \right] = \\ & \frac{n-1}{2} \text{tr} \left[ (dA)A^{-1}(dA)A^{-1} \right] + \text{tr} \left[ A^{-1}(dB)vv'(dB)' \right] = \\ & \frac{n-1}{2} \text{tr} \left[ (dA)A^{-1}(dA)A^{-1} \right] + \text{tr} \left[ (dB)'A^{-1}dBvv' \right] \end{aligned}$$

según la propiedad de la Operación Vec (ver Anexo A.2), tal que sean  $C_{n \times q}$  y  $D_{q \times n}$  dos matrices cualesquiera, entonces,  $\text{tr}(CD) = \text{Vec}'(C')\text{Vec}(D)$ , queda;

$$\frac{n-1}{2} \text{Vec}'((dA)')\text{Vec}[A^{-1}(dA)A^{-1}] + \text{Vec}'((dB)')\text{Vec}(A^{-1}(dB)vv')$$

y ya que si  $C_{n \times q}$ ,  $D_{q \times p}$  y  $E_{p \times r}$ , son tres matrices cualesquiera, entonces  $\text{Vec}(CDE) = (E' \otimes C)\text{Vec}(D)$ ,

$$\frac{n-1}{2} \text{Vec}'((dA)')(A^{-1} \otimes A^{-1})\text{Vec}(dA) + \text{Vec}'((dB)')(vv' \otimes A^{-1})\text{Vec}(dB) =$$

$$\frac{n-1}{2} [d\text{Vec}(A)]'(A^{-1} \otimes A^{-1})[d\text{Vec}(A)] + [d\text{Vec}(B)]'(vv' \otimes A^{-1})[d\text{Vec}(B)]$$

pasando al Vech(A),

$$\frac{n-1}{2} [d\text{Vech}(A)]'D'_k(A^{-1} \otimes A^{-1})D_k[d\text{Vech}(A)] + [d\text{Vec}(B)]'(vv' \otimes A^{-1})[d\text{Vec}(B)]$$

al ser  $\text{Vec}(B) = T\text{Vec}(\Delta)$

$$\frac{n-1}{2} [d\text{Vech}(A)]'D'_k(A^{-1} \otimes A^{-1})D_k[d\text{Vech}(A)] + [d\text{Vec}(\Delta)]'T'(vv' \otimes A^{-1})T[d\text{Vec}(\Delta)].$$

Por lo tanto la matriz de información de Fisher para los parámetros Vech(A) y  $\text{Vec}(\Delta)$  es:

$$\begin{pmatrix} T'(vv' \otimes A^{-1})T & 0 \\ 0 & (D'_k(A^{-1} \otimes A^{-1})D_k) \end{pmatrix}.$$



## 2.5. Distribución de los estimadores

### 2.5.1. Distribución de $\mathbf{Z}$ y del $\text{Vec}(\mathbf{Z})$

Sea la función de verosimilitud, dada por:

$$\begin{aligned} L(z_2, \dots, z_n/B, A) &= \\ (2\pi)^{-\frac{k(n-1)}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - Bv_\alpha) \right\} &= \\ (2\pi)^{-\frac{k(n-1)}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - Bv)' A^{-1} (Z - Bv) \right\} &= \\ (2\pi)^{-\frac{k(n-1)}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} [(Z - Bv)' A^{-1} (Z - Bv)] \right\} \end{aligned}$$

ya que según las propiedades de la operación traza,  $\text{tr}(CD) = \text{tr}(DC)$

$$(2\pi)^{-\frac{k(n-1)}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} [A^{-1} (Z - Bv)(Z - Bv)'] \right\}$$

y como hemos visto anteriormente,  $\text{tr}(CD) = \text{Vec}'(D')\text{Vec}(C)$ , tenemos que la expresión anterior es igual a:

$$(2\pi)^{-\frac{k(n-1)}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Vec}'[(Z - Bv)'] \text{Vec}[A^{-1}(Z - Bv)] \right\}$$

y ya que si tenemos  $C_{m \times n}$  y  $D_{n \times p}$ ; entonces  $\text{Vec}(CD) = (D' \otimes I_m)\text{Vec}(C) = (I_p \otimes C)\text{Vec}(D)$ , resultando:

$$(2\pi)^{-\frac{k(n-1)}{2}} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Vec}'(Z - Bv)(I_{n-1} \otimes A^{-1})\text{Vec}(Z - Bv) \right\}$$

lo cual implica que

$$\text{Vec}(Z) \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(n-1)k} \left( \text{Vec}(Bv); I_{n-1} \otimes A \right)$$

por lo tanto

$$Z' \rightsquigarrow \mathcal{N}_{(n-1) \times k} \left( v' B'; I_{n-1} \otimes A \right).$$

Para obtener la distribución del  $\text{Vec}(Z')$ , se utiliza la relación de la matriz permutación (Anexo A.2)

$$\text{Vec}(Z') = I_{(n-1),k} \text{Vec}(Z).$$

Resultando que

$$\begin{aligned} \text{Vec}(Z') &\rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(n-1)} \left( I_{n-1,k} \text{Vec}(Bv); I_{n-1,k} (I_{n-1} \otimes A) I_{k,n-1} \right) \\ \text{Vec}(Z') &\rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(n-1)} \left( \text{Vec}(v'B'); A \otimes I_{n-1} \right) \end{aligned}$$

siguiendo  $Z$  la distribución

$$Z \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k \times (n-1)} \left( Bv; A \otimes I_{n-1} \right).$$

### 2.5.2. Distribución del $\text{Vec}(\hat{\Delta}')$

Sea la expresión del  $\text{Vec}(\hat{\Delta}')$

$$\text{Vec}(\hat{\Delta}') = \sum_{l=1}^k [E_{ul} \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v] \text{Vec}(Z').$$

Al estar en función del  $\text{Vec}(Z')$ , y conocer su distribución, se puede calcular la distribución del  $\text{Vec}(Z')$  de la forma

$$\begin{aligned} \text{Vec}(\hat{\Delta}') &\rightsquigarrow \mathcal{N}_{2k} \left( \sum_{l=1}^k (E_{ul} \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v) \text{Vec}(v'B'); \right. \\ &\left. \left( \sum_{l=1}^k E_{ul} \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v \right) [A \otimes I_{n-1}] \left( \sum_{l=1}^k E_{ul} \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v \right) \right) \end{aligned}$$

siendo  $v_2, \dots, v_n$  linealmente independientes.

Aplicando las propiedades del  $\text{Vec}$  y del producto de Kronecker para tres matrices cualquiera  $C_{n \times q}$ ,  $D_{q \times p}$  y  $E_{p \times r}$ :

$$\begin{aligned} \text{Vec}(CDE) &= (E' \otimes C) \text{Vec}(D); \\ (C \otimes D)(E \otimes F) &= CE \otimes DF. \end{aligned}$$

Resulta:

$$\begin{aligned} \text{Vec}(\hat{\Delta}') &\rightsquigarrow \mathcal{N}_{2k} \left( \text{Vec} \left( \sum_{l=1}^k (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v (v'B') E_{ul} \right); \right. \\ &\left. \left( \sum_{l=1}^k E_{ul} A \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v \right) \left( \sum_{l=1}^k E_{ul} \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v \right) \right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$Vec(\hat{\Delta}') \rightsquigarrow \mathcal{N}_{2k} \left( Vec \left( \sum_{l=1}^k (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v (v' B') E_{ll} \right); \left( \sum_{l=1}^k E_{ll} A E_{ll} \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} \right) \right).$$

### 2.5.3. Distribución de $\hat{A}$

Para obtener la distribución de  $\hat{A}$  es preciso apoyarse en las siguientes propiedades de la distribución de Wishart y de la distribución normal matricial:

1. Si  $A_{m \times m} \rightsquigarrow W_m(n; \Sigma)$  y  $M \in \mathbb{R}^{k \times m}$  con  $\text{rg}(M)=k$ , entonces

$$M A M' \rightsquigarrow W_k(n; M \Sigma M').$$

(ver por ejemplo Gutiérrez and González (1991) pág. 146 o Muirhead (1982) pág. 95, Th. 3.2.11)

2. Si  $Z_{n \times m} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{n \times m}(0; I_n \otimes I_m)$ , entonces

$$A_{n \times n} = Z Z' \rightsquigarrow W_n(m; I_n).$$

(ver por ejemplo Srivastava and Khatri (1979) Th 3.2.1)

3. Sea  $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}_{n \times p}(\mu; \Theta \otimes \Sigma)$  y  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;  $D \in \mathbb{R}^{p \times q}$  y  $E \in \mathbb{R}^{m \times q}$ , entonces:

$$C Y D + E \rightsquigarrow \mathcal{N}_{m \times q}(C \mu D + E; C' \Theta C \otimes D \Sigma D).$$

Nota: Téngase en cuenta, que la notación utilizada en el enunciado de estas tres propiedades, es genérica, no coincidiendo con la empleada en lo que sigue.

A continuación pasamos a calcular la distribución de  $\hat{A}$ .

Sea

$$\hat{A} = \frac{1}{n-1} (Z - Bv)(Z - Bv)'$$

con

$$Z \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k \times (n-1)}(Bv; A \otimes I_{n-1}).$$

Por lo tanto

$$(Z - Bv) \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k \times (n-1)}(0; A \otimes I_{n-1}).$$

Si notamos  $A^{\frac{1}{2}}$  a la raíz cuadrada definida positiva de A, tal que  $(A^{\frac{1}{2}})^2 = A$ , con  $A$  ( $k \times k$ ) la matriz simétrica definida positiva, del Modelo (ver 2.1, hipótesis iii) y aplicando la propiedad tercera, tendremos:

$$A^{-\frac{1}{2}}(Z - Bv) \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k \times (n-1)}(0; I_k \otimes I_{n-1}).$$

Si llamamos U a:

$$U = A^{-\frac{1}{2}}(Z - Bv) \left[ A^{-\frac{1}{2}}(Z - Bv) \right]'$$

y aplicamos la segunda de las propiedades de la distribución de Wishart, nos queda:

$$U \rightsquigarrow W_k(n-1; I_k).$$

Además por la primera propiedad, resulta:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} A^{\frac{1}{2}} \right) U \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} A^{\frac{1}{2}} \right) \rightsquigarrow W_k \left( n-1; \frac{1}{n-1} A \right).$$

De esta expresión, podemos obtener fácilmente:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} A^{\frac{1}{2}} \right) U \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} A^{\frac{1}{2}} \right) &= \frac{1}{n-1} A^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} (Z - Bv)(Z - Bv)' A^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{n-1} (Z - Bv)(Z - Bv)' = \hat{A} \end{aligned}$$

llegando a la conclusión de que

$$\hat{A} \rightsquigarrow W_k \left( n-1; \frac{1}{n-1} A \right)$$

siendo dependiente de A e independiente de v y B.

#### 2.5.4. Comparación con el modelo sin ceros

Para el proceso lognormal multidimensional con factor exógeno sin ceros, es decir, afectando por igual los factores a todas las componentes, visto en el Capítulo 1, obtuvimos que (denotamos a la matriz A de este modelo como  $\mathbf{A}$ )

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{n-1} (z - \hat{\beta}u)'(z - \hat{\beta}u) = \frac{1}{n-1} z[I_{n-1} - u'(uu')^{-1}u]z'$$

la cual seguía la distribución

$$\hat{\mathbf{A}} \rightsquigarrow W_k \left( n - (q+1) - 1; \frac{1}{n-1} A \right).$$

Mientras que en el Modelo con ceros (Capítulo actual), se obtiene:

$$\hat{A} \rightsquigarrow W_k \left( n - 1; \frac{1}{n - 1} A \right).$$

Por lo tanto, en el caso de  $\hat{\mathbf{A}}$ , se pierden  $(q+1)$  grados de libertad respecto al Modelo estudiado en el presente Capítulo.

## 2.6. Contrastes de hipótesis

Siguiendo la metodología de Torres (1993) en el Modelo Lognormal Multivariante con factores exógenos comunes para todas las variables endógenas, y teniendo en cuenta las distribuciones obtenidas en los párrafos precedentes, para los estimadores en el Modelo propuesto en esta Tesis, pueden establecerse contrastes de hipótesis análogos a aquellos (ver Sección 1.5).



# Capítulo 3

## Modelo con un vector exógeno concreto y caso bidimensional

En este Capítulo se desarrolla para el Modelo de Difusión Lognormal Multivariante no homogéneo con un vector de factores exógenos distintos para cada variable en dos casos particulares.

- Aplicación del Modelo con un vector exógeno concreto perteneciente a un familia de funciones concreta.
- Desarrollo del Modelo bidimensional

### 3.1. Modelo con un vector exógeno concreto funcional

A continuación vamos a trabajar con un vector exógeno formado por dos familias concretas de funciones, estas son:

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2t^2)e^{-t^2} \\ 1/t \end{pmatrix}.$$

#### 3.1.1. Cálculo de la tendencia y la varianza

Para  $X_s = (X_{1s}, X_{2s})$ , los momentos de primer orden para ambas variables exógenas son:

$$E[X_i(t_0)] = x_{i0} \exp \left[ e_i' B \bar{v}_{t_0} + (t - t_0) \text{tr}[MA] \right]$$

tomando

$$M = \frac{1}{2} e_i e_i'$$

queda como tendencia marginal de  $X_1(s)$

$$\begin{aligned}
 E[X_1(s)] &= \\
 x_{1s} \exp \left[ (\beta_1, \gamma_1, 0) \left( \begin{array}{c} t-s \\ \int_s^t (1-2t^2)e^{-t^2} \\ \int_s^t 1/t \end{array} \right) + (t-s)tr[MA] \right] &= \\
 x_{1s} \exp \left[ \beta_1(t-s) + \gamma_1 \int_s^t (1-2t^2)e^{-t^2} + (t-s)tr[MA] \right] &= \\
 x_{1s} \exp \left[ \beta_1(t-s) + \gamma_1 \left( te^{-t^2} - s \exp(-s^2) \right) + \frac{(t-s)}{2} a_{11} \right] &
 \end{aligned}$$

y la tendencia marginal de  $X_2(s)$

$$\begin{aligned}
 E[X_2(s)] &= \\
 x_{2s} \exp \left[ (\beta_2, 0, \gamma_2) \left( \begin{array}{c} t-s \\ \int_s^t (1-2t^2)e^{-t^2} \\ \int_s^t 1/t \end{array} \right) + (t-s)tr[MA] \right] &= \\
 x_{2s} \exp \left[ \beta_2(t-s) + \gamma_2 \left( \int_s^t 1/t \right) - (t-s)tr[MA] \right] &= \\
 x_{2s} \exp \left[ \beta_2(t-s) + \gamma_2(\lg t - \lg s) - \frac{(t-s)}{2} a_{22} \right] &.
 \end{aligned}$$

Las varianzas son

$$\begin{aligned}
 Var[X_1(s)] &= \\
 x_{1s}^2 \left[ \exp 2\beta_1(t-s) + 2\gamma_1(te^{-t^2} - se^{-s^2}) + (t-s)2a_{11} \right] &- \\
 \exp \left[ 2\beta_1(t-s) + 2\gamma_1(te^{-t^2} - se^{-s^2}) + (t-s)a_{11} \right] &
 \end{aligned}$$

para  $X_1(s)$ , y

$$\begin{aligned}
 Var[X_2(s)] &= \\
 x_{2s}^2 \left[ \exp [2\beta_2(t-s) + 2\gamma_2(\lg t - \lg s) + (t-s)2a_{22}] \right] &- \\
 \exp \left[ 2\beta_2(t-s) + 2\gamma_2(\lg t - \lg s) + (t-s)a_{22} \right] &
 \end{aligned}$$



para  $X_2(s)$ .

La covarianza toma la expresión:

$$\begin{aligned} Cov[X_1(s), X_2(s)] = \\ x_{1s}x_{2s} \left[ \exp[\gamma'_1 B \bar{v}_{s,t} + (t-s)\gamma_1 A \gamma_1] - \right. \\ \left. \exp[\gamma'_1 B \bar{v}_{s,t} + (t-s)tr[M_2 A]] \right] \end{aligned}$$

y si

$$\gamma_1 = (1, 0) + (0, 1)$$

resulta

$$\begin{aligned} Cov[X_1(s), X_2(s)] = \\ x_{1s}x_{2s} \left[ \exp \left[ (\beta_1 + \beta_2)(t-s) + \gamma_1(te^{-t^2} - se^{-s^2}) + \right. \right. \\ \left. \left. \gamma_2(\lg t - \lg s) + \frac{t-s}{2}a_{11} + \frac{t-s}{2}a_{22} + (t-s)a_{12} \right] - \right. \\ \left. \exp \left[ (\beta_1 + \beta_2) + (t-s)\gamma_1(te^{-t^2} - se^{-s^2}) + \gamma_2(\lg t - \lg s) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{t-s}{2}a_{11} + \frac{t-s}{2}a_{22} \right] \right]. \end{aligned}$$

### 3.1.2. Estimación máximo-verosímil

Sea un muestreo discreto del proceso  $\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}$  en los instantes  $\{t_1, \dots, t_n\}$  donde para  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} X_{t_i} &= \begin{pmatrix} X_{1t_i} \\ X_{2t_i} \end{pmatrix}; \\ x_i &= \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y tomando como condición inicial

$$P[X_{t_1} = x_1] = 1$$

por lo tanto

$$X = \begin{pmatrix} X_{1t_1} & X_{1t_2} & \dots & X_{1t_n} \\ X_{2t_1} & X_{2t_2} & \dots & X_{2t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \end{pmatrix}.$$

Para  $\alpha = 2, \dots, n$ ;

$$Z_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \lg X_{1\alpha} - \lg X_{1\alpha-1} \\ \lg X_{2\alpha} - \lg X_{2\alpha-1} \end{pmatrix} = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \lg \left( \frac{X_{1\alpha}}{X_{1\alpha-1}} \right) \\ \lg \left( \frac{X_{2\alpha}}{X_{2\alpha-1}} \right) \end{pmatrix}$$

y

$$v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} t_\alpha - t_{\alpha-1} \\ t_\alpha e^{-t_\alpha^2} - t_{\alpha-1} e^{-t_{\alpha-1}^2} \\ \lg \left( \frac{t_\alpha}{t_{\alpha-1}} \right) \end{pmatrix}$$

y siendo:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Los estimadores máximo-verosímiles son:

$$\hat{A} = \frac{1}{n-1} (Z - Bv)(Z - Bv)';$$

$$Vec(\hat{\Delta}) = \sum_{l=2}^2 [E_{ll} \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l v] Vec(Z) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{pmatrix} Vec(Z),$$

donde cada una de las cajas de la matriz anterior toman los siguientes valores:

$$\Delta_{11} = \begin{pmatrix} (t_n - t_1) & t_n e^{-t_n^2} - t_1 e^{-t_1^2} \\ t_n e^{-t_n^2} - t_1 e^{-t_1^2} & \sum_{\alpha=2}^n \frac{(t_\alpha e^{-t_\alpha^2} - t_{\alpha-1} e^{-t_{\alpha-1}^2})^2}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (t_n - t_1) \\ t_n e^{-t_n^2} - t_1 e^{-t_1^2} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = 0_{2 \times 1},$$

$$\Delta_{22} = \begin{pmatrix} (t_n - t_1) & \lg \left( \frac{t_n}{t_1} \right) \\ \lg \frac{t_n}{t_1} & \sum_{\alpha=2}^n \frac{(\lg \left( \frac{t_\alpha}{t_{\alpha-1}} \right))^2}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (t_n - t_1) \\ \lg \left( \frac{t_n}{t_1} \right) \end{pmatrix};$$

$$Vec(Z) = Vec \left( \sum_{\alpha=2}^n Z_\alpha \right) = Vec \begin{pmatrix} \lg \left( \frac{x_{1n}}{x_{11}} \right) \\ \lg \left( \frac{x_{2n}}{x_{21}} \right) \end{pmatrix}.$$

Por lo que el  $Vec(\widehat{\Delta})$  será:

$$Vec(\widehat{\Delta}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} \lg \left( \frac{x_{1n}}{x_{11}} \right) & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \lg \left( \frac{x_{2n}}{x_{21}} \right) \end{pmatrix}.$$

### 3.1.3. Matriz de información de Fisher

La matriz de información será la correspondiente a los parámetros  $Vech(A)$  y  $Vec(B)$ .

La matriz de información toma la siguiente forma:

$$F = \begin{pmatrix} T'(vv' \otimes A^{-1})T & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & \frac{n-1}{2} D'_k (A^{-1} \otimes A^{-1}) D_k \end{pmatrix}_{7 \times 7}.$$

Si se desarrolla la matriz F de la forma

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{17} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{27} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{71} & f_{72} & \cdots & f_{77} \end{pmatrix}$$

cada uno de los elementos toma la forma:

$$\begin{aligned} f_{11} &= (t_n - t_1) \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \\ f_{22} &= (t_n - t_1) \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \\ f_{33} &= \sum_{\alpha=2}^n \frac{t_\alpha e^{-t_\alpha^2} - t_{\alpha-1} e^{-t_{\alpha-1}^2}}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \\ f_{44} &= \sum_{\alpha=2}^n \frac{\left( \lg \left( \frac{t_\alpha}{t_{\alpha-1}} \right) \right)^2}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \\ f_{12} = f_{21} &= -(t_n - t_1) \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \\ f_{13} = f_{31} &= (t_n e^{-t_n^2} - t_1 e^{-t_1^2}) \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \\ f_{14} = f_{41} &= -\lg \left( \frac{t_n}{t_{n-1}} \right)^2 \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \\ f_{23} = f_{32} &= -(t_n e^{-t_n^2} - t_1 e^{-t_1^2}) \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{24} = f_{42} &= \lg \left( \frac{t_n}{t_{n-1}} \right)^2 \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \\
 f_{34} = f_{43} &= \sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha e^{-t_\alpha^2} - t_{\alpha-1} e^{-t_{\alpha-1}^2}) \lg \left( \frac{t_\alpha}{t_{\alpha-1}} \right) \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}; \\
 f_{55} &= \frac{n-1}{2} \frac{a_{22}^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2}; \\
 f_{66} &= (n-1) \frac{(a_{21}^2 + a_{22}a_{11})}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2}; \\
 f_{77} &= \frac{n-1}{2} \frac{a_1^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2}; \\
 f_{56} = f_{65} &= (n-1) \frac{-a_{22}a_{21}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2}; \\
 f_{57} = f_{75} &= \frac{n-1}{2} \frac{a_{12}^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2}; \\
 f_{67} = f_{76} &= (n-1) \frac{-a_{11}a_{12}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2}.
 \end{aligned}$$

### 3.2. Caso bidimensional con un factor exógeno distinto para cada variable endógena

Consideremos a continuación el caso bidimensional del proceso ( $k=2$ ). La función de densidad de transición del proceso de difusión considerado viene dada por:

$$P(y, t/x, s) = \left[ (yx)(2\pi)(t-s)|A|^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} \exp \left\{ \frac{-Q}{2(t-s)} \right\}$$

con

$$Q = (\lg y - \lg x - \beta(t-s) - \Gamma G(t; s))' A^{-1} (\lg y - \lg x - \beta(t-s) - \Gamma G(t; s))$$

siendo

$$\beta = \left( \alpha_1 - \frac{1}{2}a_{11}, \alpha_2 - \frac{1}{2}a_{22} \right)' = (\beta_1, \beta_2);$$

$$G(t; s) = \left( \int_s^t g_1(\tau) d\tau, \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right)';$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$x = (x_1, x_2)'; y = (y_1, y_2)'$$

teniendo  $\lg y$ ;  $\lg x$ ;  $\beta(t-s)$  y  $G(t; s)$  dimensión  $(2 \times 1)$ ;  $\Gamma G(t; s)$  es  $((2 \times 1) \times (2 \times 1))$ , por lo tanto,  $(\lg y - \lg x - \beta(t-s) - \Gamma G(t; s))'$  es de dimensión  $(1 \times 2)$  y  $A^{-1}$  es de  $(2 \times 2)$ . Lo que hace que  $Q$  sea de dimensión  $(1 \times 2)$ .

Notando

$$B = (\beta; \Gamma) = \left( \begin{array}{c|cc} \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_2 \end{array} \right)$$

y

$$\bar{v}_{t,s} = \begin{pmatrix} t-s \\ G(t-s) \end{pmatrix};$$

con  $B$  de dimensión  $(2 \times 3)$  y  $\bar{v}_{t,s}$  de  $(3 \times 1)$ .

Si llamamos a  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$  resultará

$$\Delta = (\beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

### 3.2.1. Cálculo de B

Sea el  $\text{Vec}(B)$  de dimensión  $(6 \times 1)$  de la forma:

$$\text{Vec}(B) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}_{6 \times 1} = \left( \begin{array}{c|cc} I_2 & 0_{2 \times 2} \\ \hline 0_{4 \times 2} & D_{ik} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{6 \times 4} \text{Vec}(\Delta)$$

donde

$$D_{ik} = \sum_{j=1}^2 u_j \otimes E_{jj} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 2}$$

y

$$\left( \begin{array}{c|c} I_2 & 0_{2 \times 2} \\ \hline 0_{4 \times 2} & D_{ik} \end{array} \right) = \sum_{j=1}^2 (e_1, e_{j+1}) \otimes E_{jj} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con  $e_1$  y  $e_{j+1}$  de  $(3 \times 1)$ , y por lo tanto  $(e_1, e_{j+1})$  de  $(3 \times 2)$  y  $E_{jj}$  de  $(2 \times 2)$ .

Siendo  $E_{jj}$  la matriz que tiene un 1 en la posición  $jj$  y 0 en el resto, y

$$\Delta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

y  $H_j$  la matriz de dimensión  $(2 \times (2+1))$  formada por la suma desde uno hasta  $k$  de  $(e_1, e_{j+1})$  con

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)_{(2+1) \times 1};$$

$$e_{j+1} = (0, \dots, 1, \dots, 0)_{(2+1) \times 1}.$$

Entonces

$$Vec(B) = \sum_{i=1}^2 (H_j \otimes E_{jj}) Vec(\Delta) = Vec \left( \sum_{i=1}^2 E_{jj} \Delta H'_{jj} \right);$$

$$B_{2 \times 3} = \sum_{j=2}^2 E_{jj} \Delta H'_{jj}$$

que en este caso particular tienen dimensiones  $(2 \times 2)$ ,  $(2 \times 2)$  y  $(2 \times 3)$  respectivamente.

Por lo tanto; B será:

$$B = E_{11} \Delta H'_1 + E_{22} \Delta H'_2 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

### 3.2.2. Construcción de la verosimilitud

Sean los tiempos  $\{t_1, \dots, t_n\}$  en donde tomamos un muestreo discreto  $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ . Al ser el proceso bidimensional:

$$X_{t_i} = \begin{pmatrix} X_{1t_i} \\ X_{2t_i} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto  $X_1, X_2, \dots, X_n$  serán cada uno de dimensión (2 x 1).

La función de verosimilitud será de la forma

$$L(x_1, \dots, x_n/B, A) = \prod_{\alpha=1}^n \left[ (x_{1\alpha} x_{2\alpha}) (2\pi) (t_\alpha - t_{\alpha-1}) |A|^{1/2} \right]^{-1} \times \\ \exp \left[ -\frac{1}{2(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[ \lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1} - B\bar{v}_\alpha \right]' A^{-1} \left[ \lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1} - B\bar{v}_\alpha \right] \right]$$

llamando

$$v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \bar{v}_\alpha$$

y

$$z_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} (\lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1})$$

y aplicando el teorema del cambio de variable (Anexo A.1), resulta:

$$L(z_1, \dots, z_n/B, A) = \\ (2\pi)^{-(n-1)} |A|^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - Bv_\alpha) \right]$$

siendo las dimensiones de  $(z_\alpha - Bv_\alpha)$  (2 x 1) y de  $A^{-1}$  (2 x 2).

Y siguiendo los mismos pasos que para el caso general se llega a que

$$Vec(\widehat{\Delta}') = \sum_{l=1}^2 \left[ E_{ll} \otimes (H_l' v v' H_l)^{-1} H_l' v \right] Vec(Z')$$

donde  $E_{ll}$  es la matriz de (2 x 2) que tiene un 1 en la posición ll y cero en el resto; la matriz  $H_l$  toma la forma  $(e_1, e_{l+1})$ , con  $e_1 = (1, 0, 0)$  y  $e_{l+1}$  el vector que tiene un 1 en la posición l+1 y cero en resto (con  $l = 1, 2$ ). Y

$$v = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{1/2} \bar{v}_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{1/2} \begin{pmatrix} t_\alpha - t_{\alpha-1} \\ G(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \end{pmatrix}_{3 \times (n-1)} \quad \alpha = 2; \dots; n.$$

Capítulo 3. Modelo con un vector exógeno concreto y caso bidimensional

---

$Z = (Z_2, \dots, Z_n)$  es dimensión  $(2 \times (n-1))$ , por lo tanto  $Vec(Z)$  es de dimensión  $((n-1)2 \times 1)$ .

Analizando la dimensión de  $[E_{ii} \otimes (H_i'vv'H_i)^{-1}H_i'v]Vec(Z')$  resulta ser:

$$\begin{aligned} & [(2 \times 2) \otimes [(2 \times 3)(3 \times (n-1))((n-1) \times 3)(3 \times 2)]^{-1}[(2 \times 3)(3 \times (n-1))]] [(2(n-1) \times 1)] \\ & [(2 \times 2) \otimes (2 \times 3)(3 \times 3)(3 \times 2)]^{-1} [2 \times (n-1)][(2(n-1) \times 1)] \\ & [(2 \times 2) \otimes (2 \times (n-1))][(2(n-1) \times 1)] \\ & [4 \times 2(n-1)][(2(n-1) \times 1)] \\ & 4 \times 1 \end{aligned}$$

y el estimador de A, será:

$$\hat{A} = \frac{1}{n-1}(Z - Bv)(Z - Bv)'$$

de dimensión:

$$\begin{aligned} & ((2 \times (n-1)) - (2 \times 3)(3 \times (n-1)))(2 \times (n-1) - (2 \times 3)(3 \times (n-1)))' \\ & (2 \times (n-1))((n-1) \times 2) \\ & 2 \times 2 \end{aligned}$$



# Capítulo 4

## Estudio de una extensión no homogénea en el Modelo de Difusión Lognormal unidimensional y bidimensional

### 4.1. Estudio de una extensión no homogénea en el Modelo de Difusión Lognormal unidimensional.

Sea el Modelo general de un proceso de difusión lognormal no homogéneo en el tiempo con momentos infinitesimales del tipo

$$\begin{aligned}A_1(x, t) &= xq(x, t); \\A_2(x, t) &= \sigma x^2, \sigma > 0\end{aligned}$$

con factores exógenos que permitan una modificación en la tendencia.

En este caso se estudia una familia F de procesos de difusión con los siguientes momentos infinitesimales:

$$\begin{aligned}A_1(x, t) &= xg(t) + \frac{a\sigma x^{a+1}h(t)}{1 + x^a h(t)} \quad a \in \mathbb{R} \\A_2(x, t) &= \sigma x^2, \sigma > 0\end{aligned}$$

con  $g(t)$  función continua y  $h(t)$  expresada por:

$$h(t) = \exp \left\{ -a \left\{ \frac{a-1}{2} \sigma t + \int_{t_0}^t g(r) dr \right\} \right\} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Estos momentos infinitesimales son utilizados en relación con los problemas de primer paso en difusiones no homogéneas introducidos en Gutiérrez et al. (1997).

#### 4.1.1. Ecuaciones de Kolmogorov

Sea  $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$  un proceso de difusión con los momentos infinitesimales anteriores, a partir de las ecuaciones de Kolmogorov para un proceso de difusión genérico y siendo

$$p = P(y, t/x, s) = P[X(t) = y/X(s) = x] \quad x, y \in (\mathbb{R}^k)$$

se determinan las ecuaciones del proceso. Dichas ecuaciones son:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{d[A_1(y, t)p]}{dy} + \frac{1}{2} \frac{d^2[A_2(y, t)p]}{dy^2};$$

(ecuación adelantada)

$$\frac{dp}{ds} = -A_1(x, s) \frac{dp}{dx} - \frac{1}{2} A_2(x, s) \frac{d^2p}{dx^2};$$

(ecuación atrasada).

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales se obtiene como probabilidad de transición condicionada:

$$P(y, t/x, s) = \frac{1 + y^a h(t)}{1 + x^a h(s)} \frac{1}{y \sqrt{2\pi\sigma(t-s)}} \exp \left\{ \frac{- \left[ \lg y - \lg x - \int_s^t g(r) dr + \frac{\sigma}{2}(t-s) \right]^2}{2\sigma(t-s)} \right\}.$$

#### 4.1.2. Estudio de un caso particular

A continuación se estudia el caso particular en el que la función  $g(t)$  anterior pertenece a la familia paramétrica:

$$g(t) = \alpha + \gamma(1 - 2t^2)e^{-t^2}.$$

Los momentos infinitesimales de este proceso son:

$$A_1(x, t) = \left[ \alpha + \gamma(1 - 2t^2)e^{-t^2} \right] x + \frac{a\sigma x^{a+1} h(t)}{1 + x^a h(t)} \quad a \in \mathbb{R};$$

$$A_2(x, t) = \sigma x^2$$

y su función de densidad de probabilidad de transición es:

$$P(y, t/x, s) = \frac{1 + y^a h(t)}{[1 + x^a h(s)] y \sqrt{2\pi\sigma(t-s)}} \exp \left\{ - \frac{[\lg y - \lg x - \beta(t-s) - \gamma(te^{-t^2} - se^{-s^2})]^2}{2\sigma(t-s)} \right\},$$

siendo

$$\beta = \alpha - \frac{\sigma}{2}$$

y

$$h(t) = \exp \left\{ -a \left( \frac{a}{2} \sigma t + \beta t + \gamma t e^{-t^2} \right) \right\}.$$

### Momentos del proceso

A partir de la función de densidad del proceso podemos calcular sus momentos.

El momento de orden p viene determinado por la expresión:

$$E[X^p(t)/X(t_0) = x_0] = \int x^p P[x, t/x_0, t_0] dx = \frac{x_0^p}{1 + x_0^p h(t_0)} \exp \left\{ \left( p\beta + p^2 \frac{\sigma}{2} \right) (t - t_0) + p\gamma (te^{-t^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right\} \times \left[ 1 + x_0^a h(t) \exp \left\{ \left( a\beta + (2ap + a^2) \frac{\sigma}{2} \right) (t - t_0) + a\gamma (te^{-t^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right\} \right].$$

En el caso de p=1, obtendremos la media del proceso:

$$E[X(t)/X(t_0) = x_0] = \frac{x_0}{1 + x_0^a h(t_0)} \exp \left\{ \left( \beta + \frac{\sigma}{2} \right) (t - t_0) + \gamma (te^{-t^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right\} \times \left[ 1 + x_0^a h(t) \exp \left\{ a \left( \beta + (2+a) \frac{\sigma}{2} \right) (t - t_0) + a\gamma (te^{-t^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right\} \right].$$

Y si tomamos  $t_0 = 0$ , nos queda:

$$E[X(t)/X(0) = x_0] = \frac{x_0}{1 + x_0^a} \exp \left\{ \left( \beta + \frac{\sigma}{2} \right) t + \gamma t e^{-t^2} \right\} \times \left[ 1 + x_0^a h(t) \exp \left\{ a \left( \beta + (2+a) \frac{\sigma}{2} \right) t + a\gamma t e^{-t^2} \right\} \right].$$

### 4.1.3. Estimación máximo-verosímil

Sea un muestreo discreto del proceso  $(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  para los instantes  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  y con la condición inicial  $P(X_{t_0} = x_0) = 1$ .

La función de verosimilitud de este proceso es:

$$L_n(a, \sigma, \beta, \gamma) = \prod_{i=2}^n P[x_i, t_i/x_{i-1}, t_{i-1}] =$$

$$(2\pi\sigma)^{-n/2} \prod_{i=2}^n \left( \frac{1 + x_i^a h(t_i)}{(1 + x_{i-1}^a h(t_{i-1}))x_i(t_i - t_{i-1})^{1/2}} \right) \times$$

$$\prod_{i=2}^n \exp \left\{ \frac{- \left[ \lg x_i - \lg x_{i-1} - \beta(t_i - t_{i-1}) - \gamma(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \right]^2}{2\sigma(t_i - t_{i-1})} \right\}$$

tomando logaritmos, queda:

$$\lg(L_n(a, \sigma, \beta, \gamma)) =$$

$$-\frac{n}{2} \lg(2\pi) - \frac{n}{2} \lg(\sigma) + \lg \left[ \frac{1 + x_n^a h(t_n)}{1 + x_0^a h(t_0)} \right] - \sum_{i=2}^n \lg \left[ x_i(t_i - t_{i-1})^{1/2} \right]$$

$$-\frac{1}{2\sigma} \sum_{i=2}^n \frac{\left[ \lg x_i - \lg x_{i-1} - \beta(t_i - t_{i-1}) - \gamma(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \right]^2}{t_i - t_{i-1}}.$$

Si calculamos las derivadas parciales respecto a los parámetros, resulta:

$$\frac{d[\lg L_n]}{da} =$$

$$\left[ \lg x_n - a\sigma t_n - \beta t_n - \gamma t_n e^{-t_n^2} \right] \left[ \frac{x_n^a h(t_n)}{1 + x_n^a h(t_n)} \right] - \left[ \lg x_0 - a\sigma t_0 - \beta t_0 - \gamma t_0 e^{-t_0^2} \right] \left[ \frac{x_0^a h(t_0)}{1 + x_0^a h(t_0)} \right];$$

$$\frac{d[\lg L_n]}{d\sigma} =$$

$$-\frac{n}{2\sigma} - \frac{a^2}{2} t_n \left[ \frac{x_n^a h(t_n)}{1 + x_n^a h(t_n)} \right] + \frac{a^2}{2} t_0 \left[ \frac{x_0^a h(t_0)}{1 + x_0^a h(t_0)} \right] +$$

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^n \frac{\left[ \lg x_i - \lg x_{i-1} - \beta(t_i - t_{i-1}) - \gamma(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \right]^2}{t_i - t_{i-1}};$$

$$\frac{d[\lg L_n]}{d\beta} =$$

$$-at_n \left[ \frac{x_n^a h(t_n)}{1 + x_n^a h(t_n)} \right] + at_0 \left[ \frac{x_0^a h(t_0)}{1 + x_0^a h(t_0)} \right] + \frac{1}{\sigma} \left[ \lg \left( \frac{x_n}{x_0} \right) - \beta(t_n - t_0) - \gamma(t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right];$$

$$\frac{d[\lg L_n]}{d\gamma} =$$

$$-at_n e^{-t_n^2} \left[ \frac{x_n^a h(t_n)}{1 + x_n^a h(t_n)} \right] + at_0 e_0^2 \left[ \frac{x_0^a h(t_0)}{1 + x_0^a h(t_0)} \right] +$$

$$\frac{1}{\sigma} \left[ \sum_{i=2}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \lg \left( \frac{x_i}{x_{i-1}} \right)}{t_i - t_{i-1}} - \beta(t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) - \gamma \sum_{i=1}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2})^2}{t_i - t_{i-1}} \right];$$

denotando:

$$\theta = (a, \sigma, \beta, \gamma),$$

$$H_n(\theta) = \frac{x_n^a h(t_n)}{1 + x_n^a h(t_n)},$$

$$H_1(\theta) = \frac{x_0^a h(t_0)}{1 + x_0^a h(t_0)},$$

$$E_{t,x} = \sum_{i=2}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \lg \left( \frac{x_i}{x_{i-1}} \right)}{t_i - t_{i-1}},$$

$$F_{t,x}(\beta, \gamma) = \sum_{i=2}^n \frac{\left[ \lg x_i - \lg x_{i-1} - \beta(t_i - t_{i-1}) - \gamma(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \right]^2}{t_i - t_{i-1}},$$

$$G_t = \sum_{i=2}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2})^2}{t_i - t_{i-1}}.$$

Si igualamos a cero las derivadas parciales, obtenemos:

$$\Delta_1 : \frac{\lg x_n - a\sigma t_n - \beta t_n - \gamma t_n e^{-t_n^2}}{\lg x_0 - a\sigma t_0 - \beta t_0 - \gamma t_0 e^{-t_0^2}} - \frac{H_1(\theta)}{H_n(\theta)} = 0;$$

$$\Delta_2 : n\sigma + a^2\sigma^2 [t_n H_n(\theta) - t_0 H_1(\theta)] - F_{t,x}(\beta, \gamma) = 0;$$

$$\Delta_3 : a\sigma [t_n H_n(\theta) - t_0 H_1(\theta)] + \beta(t_n - t_0) + \gamma (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) - \lg \left( \frac{x_n}{x_0} \right) = 0;$$

$$\Delta_4 : a\sigma [t_n e^{-t_n^2} H_n(\theta) - t_0 e^{-t_0^2} H_1(\theta)] + \beta [t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}] + \gamma G_t - E_{t,x} = 0.$$

De  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$  obtenemos:

$$a\sigma = \frac{-n\sigma + F_{t,x}(\beta, \gamma)}{\lg \left( \frac{x_n}{x_0} \right) - \beta(t_n - t_0) - \gamma(t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-n + \frac{1}{\sigma} F_{t,x}(\beta, \gamma)}{\lg \left( \frac{x_n}{x_0} \right) - \beta(t_n - t_0) - \gamma(t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}.$$

De la ecuación  $\Delta_1$  se tiene:

$$H_n(\theta) = \frac{\lg x_0 - a\sigma t_0 - \beta t_0 - \gamma t_0 e^{-t_0^2}}{\lg x_n - a\sigma t_n - \beta t_n - \gamma t_n e^{-t_n^2}} H_1(\theta)$$

Reemplazando  $H_n(\theta)$  en las ecuaciones  $\Delta_3$  y  $\Delta_4$ , obtendremos:

$$\Delta'_3 : a\sigma \left[ t_n \left( \frac{\lg x_0 - a\sigma t_0 - \beta t_0 - \gamma t_0 e^{-t_0^2}}{\lg x_n - a\sigma t_n - \beta t_n - \gamma t_n e^{-t_n^2}} \right) - t_0 \right] H_1(\theta) =$$

$$\lg \left( \frac{x_n}{x_0} \right) - \beta(t_n - t_0) - \gamma (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})$$

$$\Delta'_4 : a\sigma \left[ t_n e^{-t_n^2} \left( \frac{\lg x_0 - a\sigma t_0 - \beta t_0 - \gamma t_0 e^{-t_0^2}}{\lg x_n - a\sigma t_n - \beta t_n - \gamma t_n e^{-t_n^2}} \right) - t_0 e^{-t_0^2} \right] H_1(\theta) =$$

$$E_{t,x} - \beta (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) - \gamma G_t$$

De la expresión de  $\Delta'_3$  se deduce que:

$$H_1(\theta) = \frac{\left[ \lg \left( \frac{x_n}{x_0} \right) - \beta(t_n - t_0) - \gamma (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right]}{a\sigma [t_n \lg x_0 - t_0 \lg x_n + \gamma t_0 t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})]} \left[ \lg x_n - a\sigma t_n - \beta t_n - \gamma t_n e^{-t_n^2} \right]$$

con lo que la expresión  $\Delta'_4$  toma la forma:

$$\left[ t_n e^{-t_n^2} \lg x_0 - t_0 e^{-t_0^2} \lg x_n - \beta t_0 t_n \left( e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2} \right) \right] \left( \lg x_n - a\sigma t_n - \beta t_n - \gamma t_n e^{-t_n^2} \right) -$$

$$\left[ t_n \lg x_0 - t_0 \lg x_n - \beta t_0 t_n \left( e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2} \right) \right] \left[ E_{t,x} - \beta \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) - \gamma G_t \right] = 0$$

desarrollando estas expresiones, sustituyendo  $(a\sigma)$  y desarrollando  $F_{t,x}(\beta, \gamma)$  en la forma:

$$F_{t,x}(\beta, \gamma) = K_{t,x} + (t_n - t_0)\beta^2 + G_t \gamma^2 - 2 \lg \left( \frac{x_n}{x_0} \right) \beta - 2 E_{t,x} + 2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \beta \gamma$$

con

$$K_{t,x} = \sum_{i=2}^n \frac{\lg^2 \left( \frac{x_i}{x_{i-1}} \right)}{t_i - t_{i-1}}.$$

Con lo que podremos establecer una relación entre los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros  $\gamma$  y  $\sigma$ :

$$\hat{\sigma} = \hat{\gamma} M_{t,x} + N_{t,x}$$

siendo:

$$M_{t,x} = \frac{1}{nt_n t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \left[ \left( t_n e^{-t_n^2} \lg x_0 - t_0 e^{-t_0^2} \lg x_n \right) \times \right. \\ \left. \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) - (t_n \lg x_0 - t_0 \lg x_n) G_t \right] - \frac{1}{n^2} E_{t,x}$$

y

$$N_{t,x} = \frac{1}{n} K_{t,x} - \frac{1}{nt_n t_0 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})} \left[ (t_n \lg x_0 - t_0 \lg x_n) E_{t,x} + \right. \\ \left. \left( t_n e^{-t_n^2} \lg x_0 - t_0 e^{-t_0^2} \lg x_n \right) \lg \left( \frac{x_n}{x_0} \right) \right].$$

Por lo tanto, los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros están relacionados por las expresiones:

$$\hat{\sigma} = \hat{\gamma} M_{t,x} + N_{t,x}$$

$$\hat{a} = \frac{-n + (\hat{\gamma} M_{t,x} + N_{t,x})^{-1} F_{t,x}(\hat{\beta}, \hat{\gamma})}{\lg \left( \frac{x_n}{x_0} \right) - \hat{\beta} (t_n - t_0) - \hat{\gamma} (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}.$$

## 4.2. Estudio de una extensión no Homogénea en el Modelo de Difusión Lognormal bidimensional

Sea un proceso de difusión lognormal no homogéneo en el tiempo bidimensional con momentos infinitesimales del tipo:

$$A_1(x, t) = xq(x, t);$$

$$A_2(x, t) = x' Bx,$$

con  $x$  un vector bidimensional y  $B$  una matriz simétrica definida no negativa, de manera que los factores exógenos permitan una modificación de la tendencia para adaptarlo a situaciones reales.

### 4.2.1. Modelo y caracterización

Estudiaremos, al igual que en el caso unidimensional, un proceso lognormal bidimensional, no homogéneo, afectado por una familia de factores exógenos especial. Consideraremos una familia  $F$  de procesos de difusión que tiene los siguientes momentos infinitesimales:

$$A_1(x, t) = \begin{bmatrix} x_0 g_1(t) + \frac{ab_{11}x_0^{\alpha+1}h_1(t)}{1+x_0^\alpha h_1(t)+x_2^\alpha h_2(t)} + \frac{ab_{12}x_0x_2^\alpha h_2(t)}{1+x_0^\alpha h_1(t)+x_2^\alpha h_2(t)} \\ x_2 g_2(t) + \frac{ab_{22}x_2^{\alpha+1}h_2(t)}{1+x_0^\alpha h_1(t)+x_2^\alpha h_2(t)} + \frac{ab_{21}x_2x_0^\alpha h_1(t)}{1+x_0^\alpha h_1(t)+x_2^\alpha h_2(t)} \end{bmatrix};$$

$$A_2(x, t) = x' Bx,$$

con  $B$  matriz de  $2 \times 2$  simétrica, definida no negativa,  $g_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  función continua y  $h_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  de la forma:

$$h_i(t) = \exp \left\{ -a \left\{ \frac{a-1}{2} b_{ii} t + \int_{t_0}^t g_i(r) dr \right\} \right\}.$$

### Ecuaciones de Kolmogorov

Sea  $X(t) = \{(X_0(t), X_2(t))'; t_0 \leq t \leq T\}$  un proceso de difusión con los momentos infinitesimales anteriores, podemos obtener las ecuaciones de Kolmogorov del proceso  $X(t)$  a partir de las ecuaciones para el proceso genérico.

Siendo

$$p = P(y, t/x, s) = P[X(t) = y/X(s) = x] \quad x, y \in (\mathbb{R}^k)$$

la función de densidad de probabilidad de transición, obtenemos:



$$\frac{dp}{dt} = - \sum_{i=1}^2 \frac{d \left[ \left( y_i g_i(t) + a \sum_{j=1}^2 \frac{b_{ij} y_i y_j^a h_j(t)}{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)} \right) p \right]}{dy_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} \frac{d^2(y_i y_j p)}{dy_i dy_j};$$

(ecuación adelantada)

$$\frac{dp}{ds} = - \sum_{i=1}^2 \left( x_i g_i(s) + a \sum_{j=1}^2 \frac{b_{ij} x_i x_j^a h_j(s)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \right) \frac{dp}{dx_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^2 b_{ij} x_i y_j \frac{d^2 p}{dx_i dx_j};$$

(ecuación atrasada)

La solución de estas ecuaciones diferenciales es:

$$P(y, t/x, s) = \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left( \prod_{i=1}^2 y_i \right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t-s)} Q_p \right\}$$

con

$$Q_p = \left[ \lg y - \lg x - \int_s^t g(r) dr + \frac{1}{2} b(t-s) \right]' B^{-1} \left[ \lg y - \lg x - \int_s^t g(r) dr + \frac{1}{2} b(t-s) \right];$$

$$b = (b_{11}, b_{22})'$$

y

$$g(r) = (g_1(r), g_2(r))'$$

### Demostración de la ecuación atrasada

Calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} = & - \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} \left\{ x_0^a h_1(s) \left[ -a \left( \frac{a-1}{2} b_{11} + g_1(s) \right) \right] \right\} \times \\ & \frac{1}{\left( \prod_{i=1}^2 y_i \right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t-s)} Q_p \right\} - \\ & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} \left\{ x_2^a h_2(s) \left[ -a \left( \frac{a-1}{2} b_{22} + g_2(s) \right) \right] \right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} + \\
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)^2|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} - \\
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} \left[\frac{1}{2(t-s)^2}Q_p\right] - \\
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} \times \\
 & \left[\frac{1}{t-s}\right] (g(s))' B^{-1} \left[\lg y - \lg x - \int_s^t g(r)dr + \frac{1}{2}b(t-s)\right] + \\
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} \times \\
 & \left[\frac{1}{t-s}\right] \frac{1}{2}(b)' B^{-1} \left[\lg y - \lg x - \int_s^t g(r)dr + \frac{1}{2}b(t-s)\right].
 \end{aligned}$$

Por otra parte calculamos:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^2 \left( x_i g_i(s) + a \sum_{j=1}^2 \frac{b_{ij} x_i x_j^a h_j(s)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \right) \frac{dp}{dx_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} x_i x_j \frac{d^2 p}{dx_i dx_j} = \\
 & \left[ \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)) a x_0^a h_1(s) g_1(s)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} + \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)) a x_2^a h_2(s) g_2(s)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} \right] \times \\
 & \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} \times \\
& \left[\frac{1}{t-s}\right] (g(s))' B^{-1} \left[\lg y - \lg x - \int_s^t g(r)dr + \frac{1}{2}b(t-s)\right] + \\
& \left[\frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))a^2 x_0^{2a} b_{11} h_1^2(s)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^3} + \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))a^2 x_2^{2a} b_{22} h_2^2(s)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^3}\right] \times \\
& \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} - \\
& \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))a}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} \times \\
& \left[\frac{1}{t-s}\right] (bhx^a)' B^{-1} \left[\lg y - \lg x - \int_s^t g(r)dr + \frac{1}{2}b(t-s)\right] + \\
& \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))a^2 b_{12} x_0^a x_2^a h_1(s)h_2(s)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^3} \frac{2}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} - \\
& \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))ab_{12}}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} \times \\
& \left[\frac{1}{t-s}\right] (hx^a)' B^{-1} \left[\lg y - \lg x - \int_s^t g(r)dr + \frac{1}{2}b(t-s)\right] + \\
& \frac{1}{2} \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))a(a-1)(x_0^a h_1(s)b_{11} + x_2^a h_2(s)b_{22})}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} \times \\
& \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} \left[\frac{1}{2(t-s)^2}Q_p\right] + \\
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} \times \\
 & \quad \left[\frac{1}{t-s}\right] \frac{1}{2}(b)'B^{-1} \left[\lg y - \lg x - \int_s^t g(r)dr + \frac{1}{2}b(t-s)\right] + \\
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} - \\
 & \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))a^2 b_{12} x_0^a x_2^a h_1(s) h_2(s)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^3} \frac{2}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} - \\
 & \left[\frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))a^2 x_0^{2a} b_{11} h_1^2(s)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^3} + \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))a^2 x_2^{2a} b_{22} h_2^2(s)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^3}\right] \times \\
 & \quad \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} + \\
 & \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))a}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} \times \\
 & \quad \left[\frac{1}{t-s}\right] (bhx^a)'B^{-1} \left[\lg y - \lg x - \int_s^t g(r)dr + \frac{1}{2}b(t-s)\right] + \\
 & \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t))ab_{12}}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{1}{t-s} \right] (hx^a)' B^{-1} \left[ \lg y - \lg x - \int_s^t g(r) dr + \frac{1}{2} b(t-s) \right] = \\
 & \left[ \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)) a x_0^a h_1(s) g_1(s)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} + \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)) a x_2^a h_2(s) g_2(s)}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} \right] \times \\
 & \frac{1}{\left( \prod_{i=1}^2 y_i \right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t-s)} Q_p \right\} - \\
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left( \prod_{i=1}^2 y_i \right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t-s)} Q_p \right\} \times \\
 & \left[ \frac{1}{t-s} \right] (g(s))' B^{-1} \left[ \lg y - \lg x - \int_s^t g(r) dr + \frac{1}{2} b(t-s) \right] + \\
 & \frac{1}{2} \frac{(1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)) a (a-1) (x_0^a h_1(s) b_{11} + x_2^a h_2(s) b_{22})}{(1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s))^2} \times \\
 & \frac{1}{\left( \prod_{i=1}^2 y_i \right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t-s)} Q_p \right\} - \\
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left( \prod_{i=1}^2 y_i \right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t-s)} Q_p \right\} \left[ \frac{1}{2(t-s)^2} Q_p \right] + \\
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left( \prod_{i=1}^2 y_i \right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t-s)} Q_p \right\} \times \\
 & \left[ \frac{1}{t-s} \right] \frac{1}{2} (b)' B^{-1} \left[ \lg y - \lg x - \int_s^t g(r) dr + \frac{1}{2} b(t-s) \right] + \\
 & \frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left( \prod_{i=1}^2 y_i \right) (2\pi)(t-s)^2 |B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(t-s)} Q_p \right\} = \\
 & = \frac{dp}{ds}
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} bhx^a &= (b_{11}h_1(s)x_0^a; b_{22}h_2(s)x_2^a)', \\ b &= (b_{11}, b_{22})' \end{aligned}$$

y

$$hx^a = (h_1(s)x_0^a; h_2(s)x_2^a)'$$

### 4.2.2. Estudio de un caso particular

Supondremos que la función  $g_i(t)$  pertenece a una familia paramétrica del tipo:

$$g_i(t) = \alpha_i + \gamma_i(1 - 2t^2)e^{-t^2} \quad i = 1, 2.$$

Este caso tiene especial interés para relacionar las difusiones lognormales con los tiempos de primer paso.

Los momentos infinitesimales del proceso lognormal no homogéneo afectado por esta familia son:

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= \begin{bmatrix} x_0(\alpha_1 + \gamma_1(1 - 2t^2)e^{-t^2}) + \frac{ab_{11}x_0^{a+1}h_1(t)}{1+x_0^a h_1(t)+x_2^a h_2(t)} + \frac{ab_{12}x_0x_2^a h_2(t)}{1+x_0^a h_1(t)+x_2^a h_2(t)} \\ x_2(\alpha_2 + \gamma_2(1 - 2t^2)e^{-t^2}) + \frac{ab_{22}x_2^{a+1}h_2(t)}{1+x_0^a h_1(t)+x_2^a h_2(t)} + \frac{ab_{21}x_2x_0^a h_1(t)}{1+x_0^a h_1(t)+x_2^a h_2(t)} \end{bmatrix}; \\ A_2(x, t) &= (x_0, x_2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \end{pmatrix} = x' Bx, \end{aligned}$$

y suponiendo que  $b_{12} = b_{21} = 0$ , resulta:

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= \begin{bmatrix} x_0(\alpha_1 + \gamma_1(1 - 2t^2)e^{-t^2}) + \frac{ab_{11}x_0^{a+1}h_1(t)}{1+x_0^a h_1(t)+x_2^a h_2(t)} \\ x_2(\alpha_2 + \gamma_2(1 - 2t^2)e^{-t^2}) + \frac{ab_{22}x_2^{a+1}h_2(t)}{1+x_0^a h_1(t)+x_2^a h_2(t)} \end{bmatrix}; \\ A_2(y, t) &= (y_1, y_2) \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (b_{11}, b_{22} > 0), \end{aligned}$$

y la función de densidad de probabilidad transición es:

$$P(y, t/x, s) =$$

$$\frac{1 + y_1^a h_1(t) + y_2^a h_2(t)}{1 + x_0^a h_1(s) + x_2^a h_2(s)} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^2 y_i\right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}Q_p\right\}$$

con

$$Q_p = \left[ \lg y - \lg x - \beta(t-s) - \gamma \left( te^{-t^2} - se^{-s^2} \right) \right]' \times \\ B^{-1} \left[ \lg y - \lg x - \beta(t-s) - \gamma \left( te^{-t^2} - se^{-s^2} \right) \right]$$

donde

$$\gamma = (\gamma_1; \gamma_2)'; \\ \beta = (\beta_1; \beta_2)' = \left( \alpha_1 - \frac{b_{11}}{2}; \alpha_2 - \frac{b_{22}}{2} \right)'; \\ b = (b_{11}; b_{22})'$$

y

$$h_i(t) = \exp \left\{ -a \left( \frac{a}{2} b_{ii} t + \beta_i t + \gamma_i t e^{-t^2} \right) \right\} \quad i = 1, 2.$$

### Momentos del proceso

El momento de orden p es:

$$E[X_i^p / X_i(t_0) = x_{i1}] =$$

$$\frac{x_{i1}^p}{1 + x_{i1}^a h_1(t_0) + x_{i1}^a h_2(t_0)} \exp \left\{ \left( p\beta_i + p^2 \frac{b_{ii}}{2} \right) (t - t_0) + p\gamma_i \left( te^{-t^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right\} \times \\ \left[ 1 + x_{j1}^a h_j(t) + x_{i1}^a h_i(t) \exp \left\{ \left( a\beta_i + (2ap + a^2) \frac{b_{ii}}{2} \right) (t - t_0) + a\gamma_i \left( te^{-t^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right\} \right] \\ i, j = 1, 2.$$

Si p=1, obtendremos la media del proceso:

$$E[X_i / X_i(t_0) = x_{i1}] =$$

$$\frac{x_{i1}}{1 + x_{i1}^a h_1(t_0) + x_{i1}^a h_2(t_0)} \exp \left\{ \left( \beta_i + \frac{b_{ii}}{2} \right) (t - t_0) + \gamma_i \left( te^{-t^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right\} \times \\ \left[ 1 + x_{j1}^a h_j(t) + x_{i1}^a h_i(t) \exp \left\{ \left( a\beta_i + (2a + a^2) \frac{b_{ii}}{2} \right) (t - t_0) + a\gamma_i \left( te^{-t^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right\} \right]$$

y si consideramos  $t_0 = 0$ , queda:

$$E[X_i / X_i(0) = x_{i1}] = \frac{x_{i1}}{1 + x_{i1}^a + x_{i1}^a} \exp \left\{ \left( \beta_i + \frac{b_{ii}}{2} \right) t + \gamma_i t e^{-t^2} \right\} \times \\ \left[ 1 + x_{j1}^a h_j(t) + x_{i1}^a h_i(t) \exp \left\{ \left( a\beta_i + (2a + a^2) \frac{b_{ii}}{2} \right) t + a\gamma_i t e^{-t^2} \right\} \right].$$

### 4.2.3. Estimación máximo-verosímil de los parámetros

Sea un muestreo discreto del proceso  $(X_{t_0}, X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$  en los instantes  $(t_0, t_0, \dots, t_n)$  con  $X_{t_i} = (X_{t_{i1}}, X_{t_{i2}})'$ ,  $x_{t_i} = (x_{t_{i1}}, x_{t_{i2}})'$  y  $P[X_{t_0} = x_0] = 1$ .

La función de verosimilitud asociada al proceso sigue la siguiente expresión:

$$L_n(a, \sigma, \beta, \gamma) = \prod_{i=2}^n P[x_i, t_i/x_{i-1}, t_{i-1}] =$$

$$(2\pi)^{-n} |B|^{-1/2} \prod_{i=2}^n \left( \frac{1 + x_{i1}^a h_1(t_i) + x_{i2}^a h_2(t_i)}{[1 + x_{i-11}^a h_1(t_{i-1}) + x_{i-12}^a h_2(t_{i-1})] \prod_{j=1}^2 x_{ij}(t_i - t_{i-1})} \right) \times$$

$$\prod_{i=2}^n \exp \left\{ -\frac{1}{2(t_i - t_{i-1})} \left[ \lg x_i - \lg x_{i-1} - \beta(t_i - t_{i-1}) - \gamma \left( t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2} \right) \right] \right\} \times$$

$$B^{-1} \left[ \lg x_i - \lg x_{i-1} - \beta(t_i - t_{i-1}) - \gamma \left( t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2} \right) \right] \Big\}.$$

Tomando logaritmos, resulta:

$$\lg L_n(a, \sigma, \beta, \gamma) =$$

$$-n \lg(2\pi) - \frac{n}{2} \lg |B| + \lg \left[ \frac{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)} \right] - \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^2 \lg [x_{ij}(t_i - t_{i-1})] -$$

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{2(t_i - t_{i-1})} \left\{ \left[ \lg x_i - \lg x_{i-1} - \beta(t_i - t_{i-1}) - \gamma \left( t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2} \right) \right] \times \right.$$

$$B^{-1} \left[ \lg x_i - \lg x_{i-1} - \beta(t_i - t_{i-1}) - \gamma \left( t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2} \right) \right] \Big\} =$$

$$-n \lg(2\pi) - \frac{n}{2} \lg |B| + \lg \left[ \frac{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)} \right] - \sum_{i=1}^n \sum_{i=2}^2 \lg [x_{ij}(t_i - t_{i-1})] -$$

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{2(t_i - t_{i-1})} \frac{1}{b_{11} b_{22}} \left\{ b_{11} \left[ \lg x_{i1} - \lg x_{i-11} - \beta_1(t_i - t_{i-1}) - \gamma_1 \left( t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2} \right) \right]^2 + \right.$$



$$b_{22} \left[ \lg x_{i2} - \lg x_{i-12} - \beta_2(t_i - t_{i-1}) - \gamma_2 \left( t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2} \right) \right]^2 \Big\}.$$

Las derivadas primeras del logaritmo de la función de verosimilitud, son:

$$\frac{d \lg L_n}{da} =$$

$$\left[ \lg x_{n1} - ab_{11}t_n - \beta_1 t_n - \gamma_1 t_n e^{-t_n^2} \right] \left[ \frac{x_{n1}^a h_1(t_n)}{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)} \right] +$$

$$\left[ \lg x_{n2} - ab_{22}t_n - \beta_2 t_n - \gamma_2 t_n e^{-t_n^2} \right] \left[ \frac{x_{n2}^a h_2(t_n)}{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)} \right] -$$

$$\left[ \lg x_{11} - ab_{11}t_0 - \beta_1 t_0 - \gamma_1 t_0 e^{-t_0^2} \right] \left[ \frac{x_{11}^a h_1(t_0)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)} \right] -$$

$$\left[ \lg x_{12} - ab_{22}t_0 - \beta_2 t_0 - \gamma_2 t_0 e^{-t_0^2} \right] \left[ \frac{x_{12}^a h_2(t_0)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)} \right];$$

$$\frac{d \lg L_n}{db_{11}} =$$

$$-\frac{a^2 t_n}{2} \left[ \frac{x_{n1}^a h_1(t_n)}{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)} \right] + \frac{a^2 t_0}{2} \left[ \frac{x_{11}^a h_1(t_0)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)} \right] -$$

$$\frac{n}{2b_{11}} + \frac{1}{2b_{11}^2} \sum_{i=2}^n \frac{[\lg x_{i1} - \lg x_{i-11} - \beta_1(t_0 - t_{i-1}) - \gamma_1(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2})]^2}{t_i - t_{i-1}};$$

$$\frac{d \lg L_n}{db_{22}} =$$

$$-\frac{a^2 t_n}{2} \left[ \frac{x_{n2}^a h_2(t_n)}{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)} \right] + \frac{a^2 t_0}{2} \left[ \frac{x_{12}^a h_2(t_0)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)} \right] -$$

$$\frac{n}{2b_{22}} + \frac{1}{2b_{22}^2} \sum_{i=2}^n \frac{[\lg x_{i2} - \lg x_{i-12} - \beta_2(t_0 - t_{i-1}) - \gamma_2(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2})]^2}{t_i - t_{i-1}};$$

$$\frac{d \lg L_n}{d\beta_1} =$$

$$-at_n \left[ \frac{x_{n1}^a h_1(t_n)}{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)} \right] + at_0 \left[ \frac{x_{11}^a h_1(t_0)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)} \right] +$$

$$\frac{1}{b_{11}} \left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right];$$

$$\frac{d \lg L_n}{d\beta_2} =$$

$$-at_n \left[ \frac{x_{n2}^a h_2(t_n)}{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)} \right] + at_0 \left[ \frac{x_{12}^a h_2(t_0)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)} \right] +$$

$$\frac{1}{b_{22}} \left[ \lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right];$$

$$\frac{d \lg L_n}{d\gamma_1} =$$

$$-at_n e^{-t_n^2} \left[ \frac{x_{n1}^a h_1(t_n)}{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)} \right] + at_0 e^{-t_0^2} \left[ \frac{x_{11}^a h_1(t_0)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)} \right] +$$

$$\frac{1}{b_{11}} \left[ \sum_{i=2}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \lg \left( \frac{x_{i1}}{x_{i-11}} \right)}{t_i - t_{i-1}} - \beta_1 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) - \gamma_1 \sum_{i=1}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2})^2}{t_i - t_{i-1}} \right];$$

$$\frac{d \lg L_n}{d\gamma_2} =$$

$$-at_n e^{-t_n^2} \left[ \frac{x_{n2}^a h_2(t_n)}{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)} \right] + at_0 e^{-t_0^2} \left[ \frac{x_{12}^a h_2(t_0)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)} \right] +$$

$$\frac{1}{b_{22}} \left[ \sum_{i=2}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \lg \left( \frac{x_{i2}}{x_{i-12}} \right)}{t_i - t_{i-1}} - \beta_2 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) - \gamma_2 \sum_{i=1}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2})^2}{t_i - t_{i-1}} \right].$$

Denotando:

$$\theta_1 = (a, b_{11}, \beta_1, \gamma_1),$$

$$\theta_2 = (a, b_{22}, \beta_2, \gamma_2),$$

$$H_n(\theta_1) = \frac{x_{n1}^a h_1(t_n)}{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)},$$

$$H_n(\theta_2) = \frac{x_{n2}^a h_2(t_n)}{1 + x_{n1}^a h_1(t_n) + x_{n2}^a h_2(t_n)},$$

$$H_1(\theta_1) = \frac{x_{11}^a h_1(t_0)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)},$$

$$H_1(\theta_2) = \frac{x_{12}^a h_2(t_0)}{1 + x_{11}^a h_1(t_0) + x_{12}^a h_2(t_0)},$$

$$E_{t,x_0} = \sum_{i=2}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \lg\left(\frac{x_{i1}}{x_{i-11}}\right)}{t_i - t_{i-1}},$$

$$E_{t,x_2} = \sum_{i=2}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \lg\left(\frac{x_{i2}}{x_{i-12}}\right)}{t_i - t_{i-1}},$$

$$F_{t,x_0}(\beta_1, \gamma_1) = \sum_{i=2}^n \frac{\left[ \lg x_{i1} - \lg x_{i-11} - \beta_1(t_i - t_{i-1}) - \gamma_1(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \right]^2}{t_i - t_{i-1}},$$

$$F_{t,x_2}(\beta_2, \gamma_2) = \sum_{i=2}^n \frac{\left[ \lg x_{i2} - \lg x_{i-12} - \beta_2(t_i - t_{i-1}) - \gamma_2(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2}) \right]^2}{t_i - t_{i-1}},$$

$$G_t = \sum_{i=2}^n \frac{(t_i e^{-t_i^2} - t_{i-1} e^{-t_{i-1}^2})^2}{t_i - t_{i-1}}.$$

Si igualamos las derivadas parciales a cero, obtenemos:

$$\Delta_1 : H_n(\theta_1) \left[ \lg x_{n1} - ab_{11}t_n - \beta_1 t_n - \gamma_1 t_n e^{-t_n^2} \right] + H_n(\theta_2) \left[ \lg x_{n2} - ab_{22}t_n - \beta_2 t_n - \gamma_2 t_n e^{-t_n^2} \right] -$$

$$H_1(\theta_1) \left[ \lg x_{11} - ab_{11}t_0 - \beta_1 t_0 - \gamma_1 t_0 e^{-t_0^2} \right] - H_1(\theta_2) \left[ \lg x_{12} - ab_{22}t_0 - \beta_2 t_0 - \gamma_2 t_0 e^{-t_0^2} \right] = 0;$$

$$\Delta_2 : H_n(\theta_1)[a^2 t_n] - H_1(\theta_1)[a^2 t_0] + \frac{n}{b_{11}} - \frac{F_{t,x_0}(\beta_1, \gamma_1)}{b_{11}} = 0;$$

$$\Delta_3 : H_n(\theta_2)[a^2 t_n] - H_1(\theta_2)[a^2 t_0] + \frac{n}{b_{22}} - \frac{F_{t,x_2}(\beta_2, \gamma_2)}{b_{22}} = 0;$$

$$\Delta_4 : H_n(\theta_1)[at_n] - H_1(\theta_1)[at_0] - \frac{1}{b_{11}} \left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right] = 0;$$

$$\Delta_5 : H_n(\theta_2)[at_n] - H_1(\theta_2)[at_0] - \frac{1}{b_{22}} \left[ \lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right] = 0;$$

$$\Delta_6 : ab_{11} [t_n e^{-t_n^2} H_n(\theta_1) - t_0 e^{-t_0^2} H_1(\theta_1)] + \beta_1 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) + \gamma_1 G_t - E_{t,x_0} = 0;$$

$$\Delta_7 : ab_{22} [t_n e^{-t_n^2} H_n(\theta_2) - t_0 e^{-t_0^2} H_1(\theta_2)] + \beta_2 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) + \gamma_2 G_t - E_{t,x_2} = 0;$$

De  $\Delta_4$  obtenemos:

$$ab_{11} = \frac{-nb_{11} + F_{t,x_0}(\beta_1, \gamma_1)}{\lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}$$

$$\implies b_{11} = \frac{1}{a} \frac{-nb_{11} + F_{t,x_0}(\beta_1, \gamma_1)}{\lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}.$$

Equivalentemente, de  $\Delta_5$  obtendremos:

$$ab_{22} = \frac{-nb_{22} + F_{t,x_2}(\beta_2, \gamma_2)}{\lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}$$

$$\implies b_{22} = \frac{1}{a} \frac{-nb_{22} + F_{t,x_2}(\beta_2, \gamma_2)}{\lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}.$$

De la ecuación  $\Delta_4$  tenemos:

$$H_n(\theta_1) = \frac{1}{at_n} \left\{ H_1(\theta_1)at_0 + \frac{1}{b_{11}} \left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right] \right\}.$$

Reemplazando esta expresión de  $H_n(\theta_1)$  en la ecuación  $\Delta_6$ :

$$H_1(\theta_1) = - \frac{\left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] e^{-t_n^2}}{at_0 b_{11} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})}$$

$$\frac{\beta_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right)}{at_0 b_{11} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \frac{\gamma_1 G_t}{at_0 b_{11} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_0}}{at_0 b_{11} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})}.$$

Insertando la expresión de  $H_1(\theta_1)$  en la de  $H_n(\theta_1)$ , resulta:

$$H_n(\theta_1) = \frac{\left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right]}{at_n b_{11}} - \frac{\left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] e^{-t_n^2}}{at_n b_{11} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})}$$

$$\frac{\beta_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right)}{at_n b_{11} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \frac{\gamma_1 G_t}{at_n b_{11} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_0}}{at_n b_{11} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})}.$$

Realizando la misma metodología para  $\Delta_5$  y  $\Delta_7$ , obtendremos las expresiones de  $H_1(\theta_2)$  y  $H_n(\theta_2)$ :

$$H_1(\theta_2) = - \frac{\left[ \lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] e^{-t_n^2}}{at_0 b_{22} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})}$$

$$\frac{\beta_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right)}{at_0 b_{22} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \frac{\gamma_2 G_t}{at_0 b_{22} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_2}}{at_0 b_{22} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})}.$$

$$H_n(\theta_2) = \frac{\left[ \lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right]}{at_n b_{22}} - \frac{\left[ \lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] e^{-t_n^2}}{at_n b_{22} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})}$$

$$\frac{\beta_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right)}{at_n b_{22} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \frac{\gamma_2 G_t}{at_n b_{22} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_2}}{at_n b_{22} (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})}.$$

Insertando estas cuatro expresiones en  $\Delta_1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{ab_{11}} \left\{ \frac{1}{t_n} \left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. \frac{e^{-t_n^2}}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. \frac{\beta_1 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \frac{\gamma_1 G_t}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_0}}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \right\} \left( \lg x_{n1} - \beta_1 t_n - \gamma_1 t_n e^{-t_n^2} \right) - \\
 & \quad \frac{1}{ab_{11}} \left\{ - \frac{e^{-t_n^2}}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. \frac{\beta_1 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \frac{\gamma_1 G_t}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_0}}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \right\} \left( \lg x_{11} - \beta_1 t_0 - \gamma_1 t_0 e^{-t_0^2} \right) + \\
 & \quad \frac{1}{ab_{22}} \left\{ \frac{1}{t_n} \left[ \lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. \frac{e^{-t_n^2}}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \left[ \lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. \frac{\beta_2 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \frac{\gamma_2 G_t}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_2}}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \right\} \left( \lg x_{n2} - \beta_2 t_n - \gamma_2 t_n e^{-t_n^2} \right) - \\
 & \quad \frac{1}{ab_{22}} \left\{ - \frac{e^{-t_n^2}}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \left[ \lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. \frac{\beta_2 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \frac{\gamma_2 G_t}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_2}}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \right\} \left( \lg x_{12} - \beta_2 t_0 - \gamma_2 t_0 e^{-t_0^2} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right] + \left[ \lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right]$$

Si denotamos:

$$A_1(\beta_1, \gamma_1) = \left[ \lg \left( \frac{x_{n1}}{x_{11}} \right) - \beta_1(t_n - t_0) - \gamma_1 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right];$$

$$A_2(\beta_2, \gamma_2) = \left[ \lg \left( \frac{x_{n2}}{x_{12}} \right) - \beta_2(t_n - t_0) - \gamma_2 \left( t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2} \right) \right];$$

$$B_n(\beta_1, \gamma_1) = \left[ \frac{1}{t_n} A_1(\beta_1, \gamma_1) - \frac{e^{-t_n^2}}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} A_1(\beta_1, \gamma_1) - \frac{\beta_1 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \right.$$

$$\left. \frac{\gamma_1 G_t}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_0}}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \right] \left( \lg x_{n1} - \beta_1 t_n - \gamma_1 t_n e^{-t_n^2} \right);$$

$$B_1(\beta_1, \gamma_1) = \left[ -\frac{e^{-t_n^2}}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} A_1(\beta_1, \gamma_1) - \frac{\beta_1 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \right.$$

$$\left. \frac{\gamma_1 G_t}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_0}}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \right] \left( \lg x_{11} - \beta_1 t_0 - \gamma_1 t_0 e^{-t_0^2} \right);$$

$$B_n(\beta_2, \gamma_2) = \left[ \frac{1}{t_n} A_2(\beta_2, \gamma_2) - \frac{e^{-t_n^2}}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} A_2(\beta_2, \gamma_2) - \frac{\beta_2 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \right.$$

$$\left. \frac{\gamma_2 G_t}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_2}}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \right] \left( \lg x_{n2} - \beta_2 t_n - \gamma_2 t_n e^{-t_n^2} \right);$$

$$B_1(\beta_2, \gamma_2) = \left[ -\frac{e^{-t_n^2}}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} A_2(\beta_2, \gamma_2) - \frac{\beta_2 (t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2})}{t_n (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} - \right.$$

$$\left. \frac{\gamma_2 G_t}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} + \frac{E_{t,x_2}}{t_0 (e^{-t_n^2} - e^{-t_0^2})} \right] \left( \lg x_{12} - \beta_2 t_0 - \gamma_2 t_0 e^{-t_0^2} \right),$$

tenemos:

$$\frac{1}{ab_{11}} B_n(\beta_1 \gamma_1) - \frac{1}{ab_{11}} B_1(\beta_1 \gamma_1) + \frac{1}{ab_2} B_n(\beta_2 \gamma_2) - \frac{1}{ab_{22}} B_1(\beta_2 \gamma_2) =$$

$$A_1(\beta_1 \gamma_1) + A_2(\beta_2 \gamma_2)$$

y sustituyendo las expresiones de  $b_{11}$  y  $b_{22}$ , queda:

$$\frac{aA_1(\beta_1 \gamma_1) + n}{F_{t,x_0}(\beta_1 \gamma_1)} \left[ B_n(\beta_1 \gamma_1) - B_1(\beta_1 \gamma_1) \right] + \frac{aA_2(\beta_2 \gamma_2) + n}{F_{t,x_2}(\beta_2 \gamma_2)} \left[ B_n(\beta_2 \gamma_2) - B_1(\beta_2 \gamma_2) \right] =$$

$$a \left[ A_1(\beta_1 \gamma_1) + A_2(\beta_2 \gamma_2) \right].$$

Si denotamos:

$$\Gamma_1(\beta_1 \gamma_1) = \frac{A_1(\beta_1 \gamma_1)}{F_{t,x_0}(\beta_1 \gamma_1)} \left[ B_n(\beta_1 \gamma_1) - B_1(\beta_1 \gamma_1) \right];$$

$$\Gamma_2(\beta_2 \gamma_2) = \frac{A_2(\beta_2 \gamma_2)}{F_{t,x_2}(\beta_2 \gamma_2)} \left[ B_n(\beta_2 \gamma_2) - B_1(\beta_2 \gamma_2) \right];$$

$$\Gamma_{12}(\beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2) = A_1(\beta_1 \gamma_1) + A_2(\beta_2 \gamma_2);$$

$$H_1(\beta_1 \gamma_1) = \frac{B_n(\beta_1 \gamma_1) - B_1(\beta_1 \gamma_1)}{F_{t,x_0}(\beta_1 \gamma_1)};$$

$$H_2(\beta_2 \gamma_2) = \frac{B_n(\beta_2 \gamma_2) - B_1(\beta_2 \gamma_2)}{F_{t,x_2}(\beta_2 \gamma_2)};$$

obteniendo el estimador de máxima-verosimilitud del parámetro  $a$ :

$$\hat{a} = \frac{n \left[ H_1(\hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1) + H_2(\hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2) \right]}{\Gamma_{12}(\hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1, \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2) - \Gamma_1(\hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1) - \Gamma_2(\hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2)}$$

Si llamamos

$$\Psi \left( \hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1, \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2 \right) = \left[ H_1 \left( \hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1 \right) + H_2 \left( \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2 \right) \right];$$

$$\Phi \left( \hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1, \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2 \right) = \Gamma_{12} \left( \hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1, \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2 \right) - \Gamma_1 \left( \hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1 \right) - \Gamma_2 \left( \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2 \right)$$



e insertamos la estimación de  $\hat{a}$  en las expresiones de  $b_{11}$  y  $b_{22}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{11} &= F_{t,x_0}(\hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1) \Phi(\hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2) \left( n \Psi(\hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2) \times \right. \\ &\left. \left[ \lg\left(\frac{x_{n1}}{x_{11}}\right) - \hat{\beta}_1(t_n - t_0) - \gamma_1(t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right] + n \Psi(\hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2) \right)^{-1}; \\ \hat{b}_{22} &= F_{t,x_2}(\hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2) \Phi(\hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2) \left( n \Psi(\hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2) \times \right. \\ &\left. \left[ \lg\left(\frac{x_{n2}}{x_{12}}\right) - \hat{\beta}_2(t_n - t_0) - \gamma_2(t_n e^{-t_n^2} - t_0 e^{-t_0^2}) \right] + n \Psi(\hat{\beta}_1 \hat{\gamma}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\gamma}_2) \right)^{-1} \end{aligned}$$



# Capítulo 5

## Modelo Lognormal bidimensional con factores exógenos distintos para cada proceso componente: El Producto Interior Bruto y el Precio de la Vivienda en España

Se desarrolla aquí un ejemplo de aplicación real, original, sobre procesos de difusión multidimensionales de crecimiento, no homogéneos con factores exógenos afectando sus tendencias y según el modelo estudiado en el Capítulo 2 de esta Tesis.

Aparte del interés práctico socio-económico del caso, se obtienen las características básicas del modelo descrito en el Capítulo 2, y se muestra cómo se alteran, respecto al modelo del Capítulo 1, los estimadores de parámetros, las funciones tendencias y de covarianzas, etc.

### 5.1. Introducción: Problema real considerado

#### 5.1.1.

En este capítulo, se desarrolla un ejemplo de aplicación con datos reales, del modelo estudiado en el Capítulo 2 de esta Tesis. Consiste en el ajuste de una difusión lognormal bivariante con dos factores exógenos (uno para cada variable endógena considerada) y tiene un doble objetivo:

1. Ajustar el modelo, estimando, en base a un muestreo discreto, equidistante y con factores exógenos dados por los incrementos relativos de dos variables exógenas, las distintas características del modelo (tendencias condicionadas y no condicionadas; función de varianzas-covarianzas y correlación; etc) basadas en las estimaciones máximo-verosímiles de los parámetros que intervienen en dicho modelo.
2. Realizar una comparación entre los resultados obtenidos con el modelo con factores exógenos comunes, Capítulo 1, y los correspondientes resultados obtenidos según el modelo descrito en el Capítulo 2 precedente.

### 5.1.2.

Las variables endógenas consideradas son:

- $X_1(t)$ : Producto Interior Bruto en España, en el tiempo  $t$ .
- $X_2(t)$ : Precio de la Vivienda Nueva en España, en el tiempo  $t$ .

Se han seleccionado estas dos variables, por el interés que tiene el estudio de su comportamiento y de la predicción a corto y medio plazo de su evolución, todo ello en el contexto económico y social de España en las últimas décadas y muy especialmente por el gran interés actual que tiene el estudio del precio de la vivienda en España, que constituye hoy en día un grave problema de amplias repercusiones en el marco macroeconómico.

Cada variable endógena que consideramos ha sido estudiada marginalmente, desde el punto de vista de su modelización por proceso de difusión univariantes de crecimiento (lognormal, Gompertz).

En particular la variable  $X_1(t)$  ha sido analizada en el periodo [1971-1994] en Gutiérrez, Román, and Torres (1999), en donde se modeliza, mediante una difusión lognormal univariante con factores exógenos, su evolución y la predicción a medio plazo correspondiente. Los factores exógenos seleccionados en dicho trabajo fueron el “Gasto del Consumidor” y “Gross Domestic Fixed Capital”, que son utilizados a través de sus incrementos relativos para los ajustes del citado modelo.

Posteriormente, Gutiérrez et al. (2003b) ampliaron el estudio para la evolución del Producto Interior Bruto de España al periodo [1970-2001], utilizando un modelo lognormal univariante con los mismos factores exógenos antes indicados y utilizando, además, otros perfeccionamientos en cuanto a los métodos de estimación de parámetros (consideración de estimadores U.M.V.U.)

Por otra parte, la variable endógena  $X_2(t)$ , Precio de la Vivienda Nueva en España, también ha sido considerada marginalmente en Gutiérrez et al. (2005a) y en Gutiérrez et al. (2003a). En este trabajo se ajusta, sobre el periodo [1976-2001], la variable “Precio de la Vivienda Nueva en España”, ajustando un modelo de difusión Gompertz univariante, con factores exógenos, en base a un muestreo discreto y con estimación máximo-verosímil. Los tres factores exógenos utilizados fueron el “Producto Interior Bruto”, la “Tasa de Interés Oficial” y el “Índice de Precios al Consumo”. Las predicciones en base a las tendencias con y sin condicionar resultan ser muy ajustadas a los datos observados.

### 5.1.3.

En el presente estudio consideramos, conjuntamente, ambas variables  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$ , modelizándolas mediante un proceso lognormal bivalente y considerando dos factores exógenos, uno para cada variable. De entre el conjunto de factores exógenos utilizados en los trabajos citados anteriormente, hemos seleccionado los siguientes:

1. Para  $X_1(t)$ , el factor “Gross Domestic Fixed Capital Formation” (uno de los considerados para  $X_1(t)$  en el trabajo citado de Gutiérrez et al. (2003b)).
2. Para  $X_2(t)$ , el factor “Tasa de Interés Bancario” (uno de los considerados para  $X_2(t)$  en el trabajo citado de Gutiérrez et al. (2005a)).

Los datos considerados son los correspondientes al periodo [1976-2001]

## 5.2. Resultados

A continuación resumimos los resultados más significativos obtenidos al ajustar el modelo, incluyendo las comparaciones entre este Modelo y el Modelo precedente descrito en el Capítulo 1

### 5.2.1. Comparación de las estimaciones de los parámetros correspondientes a ambos modelos

Si realizamos la comparación de los estimadores obtenidos para el ajuste lognormal bidimensional de las dos variables consideradas, según los factores exógenos sean comunes o no, resultan los diferentes estimadores:

1. Modelo con factores exógenos comunes.

La matriz Beta es:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \beta_2 & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0123603838 & 0,0003652872 & 0,0520375067 \\ 0,0891949068 & 0,0001439747 & 0,2016580652 \end{pmatrix}$$

mientras que la matriz A resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 0,0001964752 & 0,0005000811 \\ 0,0005000811 & 0,0073785513 \end{pmatrix}$$

## 2. Modelo con factores exógenos distintos.

La matriz de los Beta es:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \beta_2 & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0182187626041909 & 0,198221476033676 & 0 \\ 0,102331214572121 & 0 & 0,209954608495526 \end{pmatrix}$$

la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 0,000130566414571673 & 0,000239216221985595 \\ 0,000239216221985595 & 0,00699895039547952 \end{pmatrix}$$

### 5.2.2. Comparación de las funciones tendencias con y sin condicionar ajustadas

La Tabla 5.1 muestra las tendencias marginales condicionadas estimadas (ECTF), para las variables  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$ , para el modelo lognormal con factores exógenos iguales para ambas variables. En la Tabla 5.2 se muestran las tendencias marginales estimadas y las tendencias marginales condicionadas estimadas (ETF y ECTF) para el modelo propuesto en esta Tesis (modelo lognormal con factores distintos para cada una de las variables).

Las Figuras 5.1 y 5.2 muestran las tendencias estimadas condicionadas con factores exógenos comunes, para las variables  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$ . Las Figuras 5.3 y 5.4 muestran las tendencias estimadas sin condicionar, para las variables Producto Interior Bruto y Precio de la Vivienda con factores exógenos distintos para cada variable. Finalmente las Figuras 5.5 y 5.6 muestran, para las mismas variables las tendencias estimadas condicionadas según nuestro modelo.

### 5.2.3. Conclusiones

- De los ajustes realizados con ambos modelos bidimensionales puede concluirse que el modelo sin factores comunes mejora los ajustes y las predicciones marginales de ambas variables, realizados con las funciones tendencia marginales (condicionada y no condicionada), respecto del modelo con factores comunes; esta mejora es más patente, en el caso de la variable  $X_2(t)$  y con tendencias condicionadas. Ver al respecto las Figuras 5.5 y 5.6 en relación con las Figuras 5.1 y 5.2.
- Por otro lado destacamos el hecho comprobado de que los valores de la Función de Correlación en cada instante  $t$ , entre los dos procesos considerados, toma para los valores de  $t$  correspondientes a los años sucesivos 1976-2001, valores comprendidos en el intervalo  $(0,27 - 0,32)$ . La función correlación citada  $\rho_{1,2}(t)$  ha sido calculada mediante las expresiones obtenidas en el Capítulo 2.2.3 de esta Tesis para las funciones Varianzas-Covarianzas. Nótese que los mencionados valores son bastante estables en el periodo [1976-2001] considerado, y medio-bajos, lo que confirmaría con el Modelo Lognormal sin factores comunes utilizado en el ajuste, la relativa medio-baja correlación entre las dos variables económicas consideradas, hipótesis que desde otros puntos de vista económicos, es sostenida por los analistas del problema, que defienden que el sostenido aumento del Precio de la Vivienda Nueva en España esta más correlacionado con otras variables (Precio del Suelo, Interés Hipotecario, Deducciones por Compra de Vivienda, etc) que con el incremento del PIB en España en el mismo periodo.
- Finalmente podemos concluir que sería de interés en relación con el problema considerado, proseguir la búsqueda de factores exógenos que consiguieran mejorar los ajustes aquí obtenidos. Recientemente (2005) se ha sugerido por los analistas económicos la posible relación del comportamiento del Precio de la Vivienda con el Precio de Oferta Pública del Suelo y otras variables, que podrían ser factores exógenos a considerar en nuestro modelo para la variable endógena  $X_2(t)$  del proceso bidimensional.

Tabla 5.1: Tendencias en el modelo lognormal con factores iguales

Año	$X_1$	ECT $X_1$	$X_2$	ECTF $X_2$
1976	288.511	288.511	102.54	102.540
1977	294.718	292.769	122.43	115.855
1978	298.042	295.820	162.09	129.567
1979	299.789	297.863	211.98	140.085
1980	304.223	303.457	218.29	158.674
1981	303.820	307.262	230.18	181.661
1982	307.607	313.300	239.24	205.103
1983	313.052	317.743	248.25	229.058
1984	318.639	319.643	265.27	247.242
1985	326.036	330.849	290.65	270.807
1986	336.643	345.448	328.88	306.195
1987	355.317	362.034	407.92	355.807
1988	373.418	380.284	509.97	433.856
1989	391.443	398.536	628.50	494.434
1990	406.245	411.736	727.63	571.595
1991	416.588	420.865	830.69	622.764
1992	420.459	424.238	820.51	660.869
1993	416.122	422.761	816.84	686.012
1994	426.036	433.052	823.06	696.103
1995	437.792	448.668	851.38	818.952
1996	448.456	459.490	866.98	859.681
1997	466.513	473.989	880.63	902.153
1998	486.742	494.307	921.10	991.165
1999	506.849	514.418	987.58	1076.358
2000	527.613	529.906	1166.83	1295.328
2001	542.166	542.465	1346.27	1442.856



Tabla 5.2: Tendencias en el modelo lognormal con factores distintos para cada variable

Año	$X_1$	ETF $X_1$	ECTF $X_1$	$X_2$	ETF $X_2$	ECTF $X_2$
1976	288.511	288.511	288.511	102.540	102.540	102.540
1977	294.718	293.311	293.311	122.430	116.183	116.183
1978	298.042	297.60	298.554	162.090	128.948	138.499
1979	299.789	302.131	300.905	211.980	140.857	180.185
1980	304.223	310.833	305.744	218.290	159.131	239.481
1981	303.820	315.097	308.824	230.180	179.361	250.047
1982	307.607	322.608	310.046	239.240	196.048	259.256
1983	313.052	327.103	312.518	248.250	217.765	269.252
1984	318.639	330.804	315.821	265.270	239.104	275.963
1985	326.036	344.663	328.856	290.650	259.667	288.084
1986	336.643	353.653	339.012	328.880	291.616	318.884
1987	355.317	361.419	351.246	407.920	328.452	365.594
1988	373.418	369.077	371.727	509.970	375.484	466.331
1989	391.443	374.741	389.472	628.500	400.896	559.942
1990	406.245	377.473	403.797	727.630	457.147	707.890
1991	416.588	380.805	415.106	830.690	495.399	798.930
1992	420.459	383.401	420.812	820.510	550.277	911.385
1993	416.122	386.800	420.724	816.840	611.172	899.429
1994	426.036	402.425	425.56	823.060	648.861	855.159
1995	437.792	414.670	440.610	851.380	782.138	934.354
1996	448.456	417.602	447.709	866.980	819.499	910.975
1997	466.513	427.740	461.237	880.630	903.287	919.831
1998	486.742	439.768	484.364	921.100	1020.997	950.012
1999	506.849	447.048	504.424	987.580	1129.315	988.716
2000	527.613	452.493	522.027	1166.830	1355.845	1144.907
2001	542.166	457.928	539.976	1346.270	1445.225	1297.087

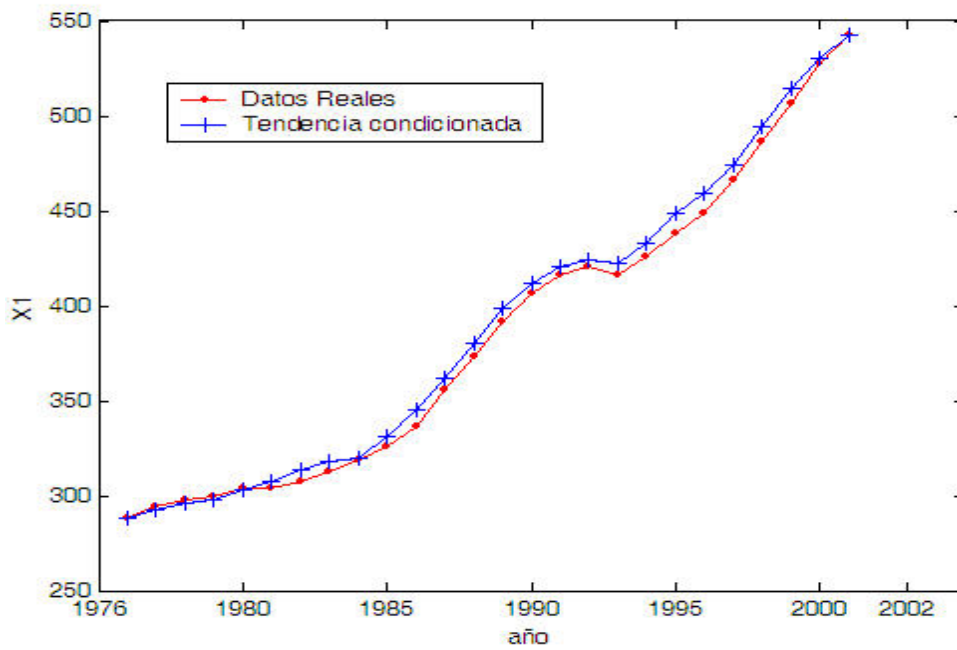


Gráfico 5.1: Tendencia estimadas condicionadas con factores exógenos comunes para  $X_1$

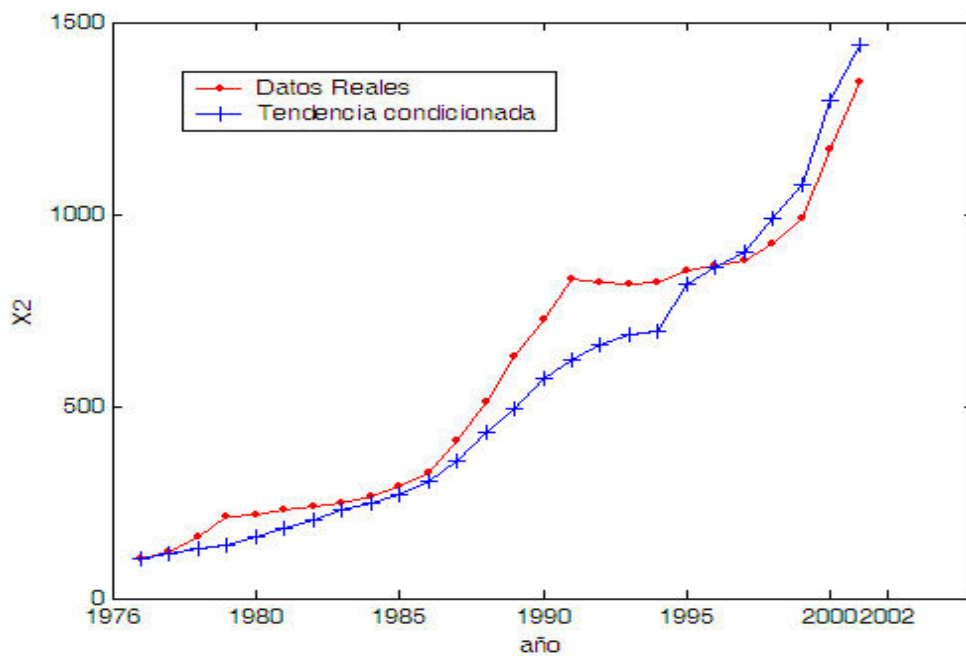


Gráfico 5.2: Tendencia estimadas condicionadas con factores exógenos comunes para  $X_2$

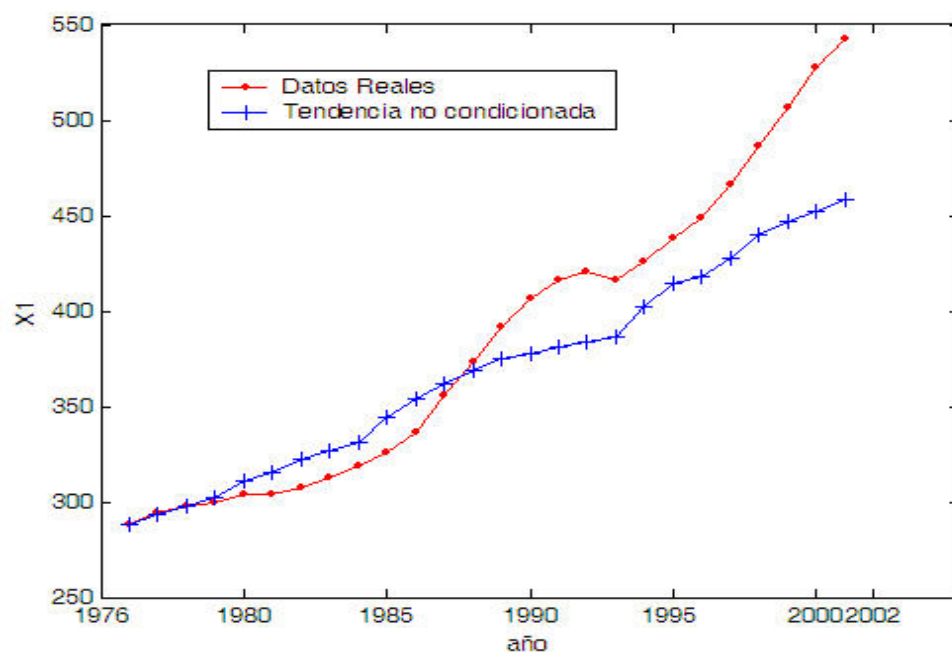


Gráfico 5.3: Tendencias estimadas no condicionadas para  $X_1$  con factores distintos

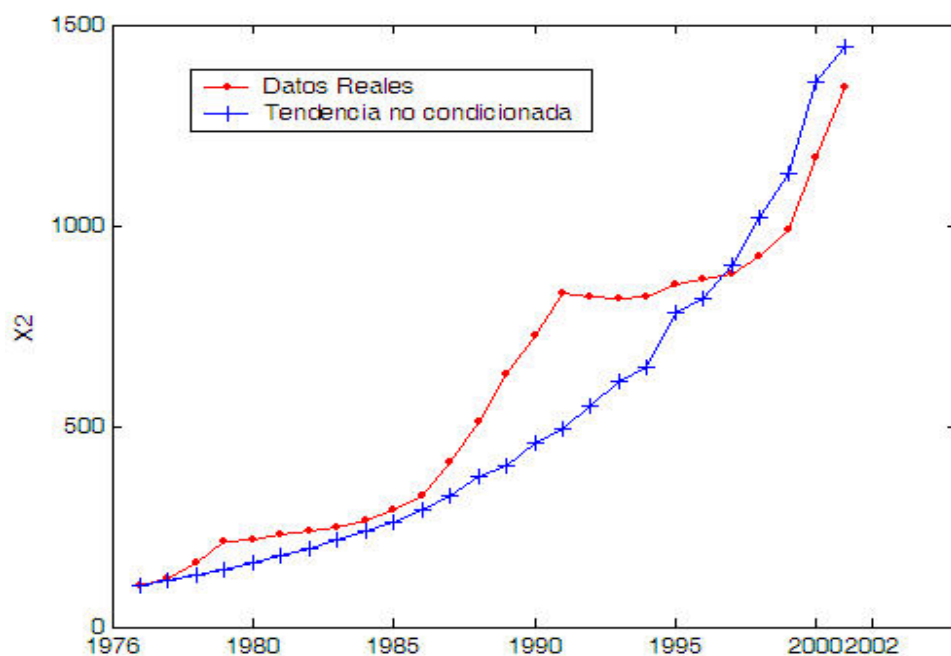


Gráfico 5.4: Tendencias estimadas no condicionadas para  $X_2$  con factores distintos

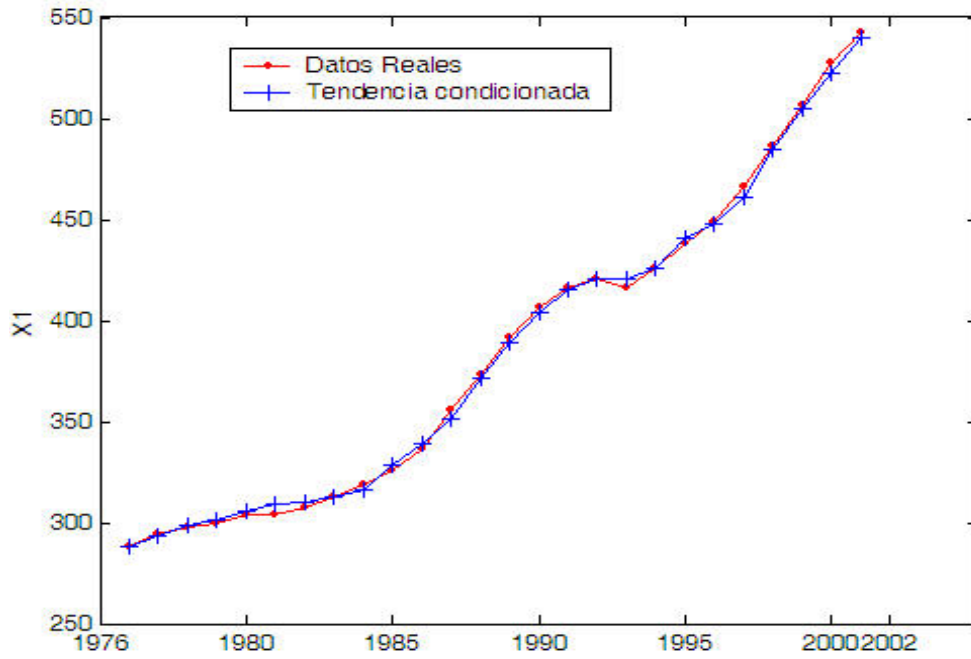


Gráfico 5.5: Tendencias estimadas condicionadas para  $X_1$  con factores distintos

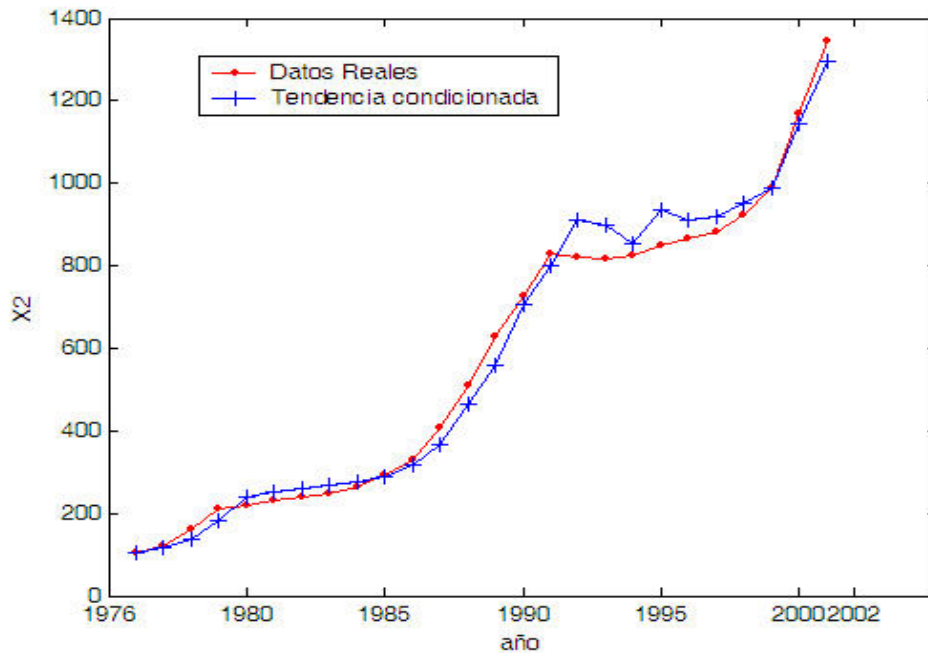


Gráfico 5.6: Tendencias estimadas condicionadas para  $X_2$  con factores distintos

## Parte II

Otros procesos: Proceso  
Gompertz homogéneo y no  
homogéneo y Proceso de  
Rayleigh



## Capítulo 6

# Proceso de Difusión de Gompertz Univariante homogéneo y no homogéneo. Modelización del Parque Total de Vehículos en España

### 6.1. Proceso de difusión de Gompertz univariante

#### 6.1.1. Transformación de difusiones al proceso de Wiener. Método de la transformación de Ricciardi

Como es sabido, es de gran interés estudiar transformaciones de los procesos de difusión, via ecuaciones de Kolmogorov o via ecuaciones de Itô con su cálculo estocástico asociado. En particular una de las transformaciones más interesantes de los procesos de difusión es la transformación al proceso de Wiener. En general, no es obvio que cualquier proceso de difusión se pueda transformar al proceso de Wiener ni tampoco es fácil encontrar, en su caso, las funciones adecuadas para realizar dicha transformación. El siguiente teorema de Ricciardi (Ricciardi 1977) nos da por una parte la condición necesaria y suficiente para que un proceso de difusión se pueda transformar al proceso de Wiener, y por otra parte, proporciona las funciones que aseguran dicha transformación. En efecto:

Sea un proceso de difusión unidimensional  $\{X(t), t \geq t_0\}$  en general no homogéneo con momentos infinitesimales  $a(t, x)$  y  $b(t, x)$ , definido en un intervalo  $I$ , y con función de densidad de transición (fdt),  $P$ . Consideramos un proceso

de Wiener  $\{W(t'), t' \geq t'_0\}$  con fdt  $P'$ , definido en el intervalo  $I' = (-\infty, +\infty)$ . La condición necesaria y suficiente para que  $\{X(t), t \geq t_0\}$  se pueda transformar al proceso de Wiener  $\{W(t'), t' \geq t'_0\}$  es que existan dos funciones  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  tales que:

$$a(t, x) = \frac{1}{4} \frac{\partial b(t, x)}{\partial x} + \frac{[b(t, x)]^{\frac{1}{2}}}{2} \left\{ c_1(t) + \int^x \frac{c_2(t)b(t, y) + \frac{\partial b(t, y)}{\partial t}}{[b(t, y)]^{\frac{3}{2}}} dy \right\}.$$

La transformación viene dada entonces por:

$$\begin{aligned} x' = \psi(t, x) &= \left( \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int^t c_2(\theta) d\theta \right\} \right) \left( \int^x \frac{dy}{[b(t, y)]^{\frac{1}{2}}} \right) - \\ &\frac{1}{2} \left( \int^t c_1(s) ds \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int^s c_2(\theta) d\theta \right\} \right) \\ t' = \phi(t) &= \int^t \exp \left\{ -\int^s c_2(\theta) d\theta \right\} ds. \end{aligned}$$

Ambas fdt están relacionadas por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P(y, t/x, s) &= P'(y', t'/x', s') \frac{\partial \psi(y, t)}{\partial y} = \\ &P'(\psi(y, t), \phi(t)/\psi(x, s), \phi(s)) \frac{\partial \psi(y, t)}{\partial y} \end{aligned}$$

que usando la expresión de la función densidad del proceso de Wiener (densidad de una distribución normal), proporciona la siguiente ecuación:

$$P(y, t/x, s) = (2\pi [\Phi(t) - \Phi(s)])^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{[\Psi(y, t) - \Psi(x, s)]^2}{2 [\Phi(t) - \Phi(s)]} \right\} \frac{\partial \Psi(y, t)}{\partial y}.$$

### 6.1.2. El modelo de Gompertz

En primer lugar se introduce el denominado proceso de difusión de Gompertz, unidimensional y homogéneo, mediante los momentos infinitesimales y ecuaciones de kolmogorov correspondientes.

En efecto, sea  $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$  un proceso de difusión,  $\mathbb{R}$ -valuado, con fdt dada por:

$$P(y, t/x, s) = P(X(t) = y/X(s) = x)$$

y con coeficientes de tendencia y de difusión dados en la forma:



$$\begin{aligned} a(t, x) &= \alpha x - \beta x \lg(x) \\ b(t, x) &= \sigma^2 x^2 \end{aligned}$$

con  $\sigma^2 > 0$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ , parámetros constantes. El proceso de difusión homogéneo así definido se denomina Difusión de Gompertz. Obsérvese que si  $\beta = 0$  esta difusión sería el proceso de lognormal univariante homogéneo.

Las ecuaciones adelantada y atrasada de Kolmogorov verificadas por la fdt correspondiente al proceso así definido, tienen la forma, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y} \{(\alpha y - \beta y \lg(y)) P\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{\sigma^2 y^2 P\} \\ \frac{\partial P}{\partial s} &= -\{\alpha x - \beta x \lg(x)\} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Para determinar la fdt,  $P$ , del proceso, vamos a aplicar el teorema de transformación de Ricciardi. El proceso Gompertz antes definido verifica la condición necesaria y suficiente de este teorema con  $c_1$  y  $c_2$  dadas así:

$$\begin{cases} c_1(t) = \frac{2}{\sigma}(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}) \\ c_2(t) = -2\beta \end{cases}.$$

La transformación apropiada es

$$\begin{cases} \psi(y, t) = \frac{e^{\beta t}}{\sigma} \lg(y) - \frac{\alpha - \sigma^2}{\sigma} \int^t e^{\beta s} ds \\ \phi(t) = \int^t e^{2\beta s} ds \end{cases}.$$

En consecuencia podemos escribir, aplicando dicho teorema de Ricciardi (Sección 6.1.1), que:

$$\begin{aligned} P(y, t \mid x, s) &= \left\{ \frac{2\pi\sigma^2}{2\beta} [1 - e^{-2\beta(t-s)}] \right\}^{-1/2} \times \\ &\frac{1}{y} \exp \left\{ -\frac{[\lg(y) - e^{-\beta(t-s)} \lg(x) - \frac{\alpha - \sigma^2/2}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)})]^2}{\frac{2\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)})} \right\}. \end{aligned}$$

Esta fdt depende, en particular, de  $(t - s)$  en lo que al parámetro temporal del proceso se refiere (carácter homogéneo).

Por lo tanto, fdt del proceso Gompertz,  $X(t)$ , se corresponde con la densidad de una distribución lognormal univariante  $\Lambda_1(m(s, t), v(s, t))$ , siendo:

$$\begin{aligned} m(s, t) &= e^{-\beta(t-s)} \lg(x) + \frac{\alpha - \sigma^2/2}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) \\ v(s, t) &= \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)}) \end{aligned}.$$

### 6.1.3. Momentos

Como la variable aleatoria  $X(t)/X(s) = x$  sigue una distribución lognormal  $\Lambda(m(s, t), v(s, t))$ , entonces aplicando resultados conocidos de dicha distribución, se tiene:

$$\begin{aligned} E(X_t^r/X_s = x) &= \exp\left\{rm(s, t) + \frac{r^2}{2}v(s, t)\right\} = \\ \exp\left\{re^{-\beta(t-s)} \lg(x) + r\frac{(\alpha - \frac{\sigma}{2})}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) + \frac{r^2\sigma^2}{4\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)})\right\} &= \\ \exp\{re^{-\beta(t-s)} \lg(x)\} \exp\left\{\frac{r\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)})\right\} \times & \\ \exp\left\{\frac{r\sigma^2}{4\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)})[r(1 + e^{-\beta(t-s)}) - 2]\right\}. & \end{aligned}$$

El momento de primer orden tiene la siguiente expresión:

$$E(X_t/X_s = x) = \exp\left\{e^{-\beta(t-s)} \lg(x) + \frac{\alpha - \sigma^2/2}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) + \frac{\sigma^2}{4\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)})\right\}.$$

La varianza del proceso se expresa en la forma:

$$\begin{aligned} Var(X_t/X_s = x) &= (\exp\{2e^{-\beta(t-s)} \lg(x)\}) \left(\exp\left\{\frac{2\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)})\right\}\right) \times \\ & \left(\exp\left\{\frac{-\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)})^2\right\}\right) \left(\exp\left\{\frac{\sigma^2}{2\beta}[1 - e^{-2\beta(t-s)}]\right\} - 1\right). \end{aligned}$$

### 6.1.4. Inferencia en el proceso Gompertz: Estimación de parámetros

Se trata de estimar los parámetros del proceso por el método de máxima verosimilitud. Para determinar la función de verosimilitud condicionada, suponemos que realizamos observaciones discretas del proceso, considerando el muestreo discreto  $(X(t_1) = x_{t_1}, \dots, X(t_n) = x_{t_n})$ , realizado en los instantes  $(t_1, \dots, t_n)$ . Además si suponemos que  $P(X(t_1) = x_1) = 1$ , como condición inicial, entonces la función de verosimilitud asociada será:

$$L(x_1, \dots, x_n, / \alpha, \beta, \sigma^2) = \prod_{j=2}^n P(x_j, t_j / x_{j-1}, t_{j-1}) =$$

$$\prod_{j=2}^n \left\{ 2\pi \left[ \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta\tau_j}) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1} \times \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left[ \lg(x_j) - e^{-\beta\tau_j} \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma}{\beta} (1 - e^{-\beta\tau_j}) \right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta\tau_j})} \right\}$$

siendo:

$$\gamma = \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \quad y \quad \tau_j = t_j - t_{j-1}.$$

Teniendo en cuenta que los valores que maximizan dicha función, también maximizan su logaritmo, consideramos:

$$\lg(L) = -\frac{n-1}{2} \lg(2\pi) - \frac{n-1}{2} \lg\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}\right) - \sum_{j=2}^n \lg(x_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \lg(1 - e^{-2\beta\tau_j}) - \\ \frac{\beta}{\sigma^2} \sum_{j=2}^n \frac{\left[ \lg(x_j) - e^{-\beta\tau_j} \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma}{\beta} (1 - e^{-\beta\tau_j}) \right]^2}{(1 - e^{-2\beta\tau_j})}.$$

Si denotamos por  $\theta_j = e^{-\beta\tau_j}$ , se tiene:

$$\lg(L) = -\frac{n-1}{2} \lg(\sigma^2) + \frac{n-1}{2} \lg(2\beta) - \sum_{j=2}^n \lg(x_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \lg(1 - \theta_j^2) - \\ \frac{n-1}{2} \lg(2\pi) - \frac{\beta}{\sigma^2} \sum_{j=2}^n \frac{\left[ \lg(x_j) - \theta_j \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta} \right]^2}{1 - \theta_j^2}.$$

Las derivadas parciales respecto a los parámetros  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\sigma^2$  son:

$$\frac{\partial \lg(L)}{\partial \gamma} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=2}^n \frac{\lg(x_j) - \theta_j \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}}{1 + \theta_j} \\ \frac{\partial \lg(L)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n-1}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4} \sum_{j=2}^n \frac{\left[ \lg(x_j) - \theta_j \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta} \right]^2}{1 - \theta_j^2} \\ \frac{\partial \lg(L)}{\partial \beta} = -\frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=2}^n \frac{\left[ \lg(x_j) - \theta_j \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta} \right]}{1 - \theta_j^2} \times$$

$$\begin{aligned} & \left[ \theta_j \tau_j \lg(x_{j-1}) - \gamma \left( \frac{\theta_j \tau_j}{\beta} - \frac{1 - \theta_j}{\beta^2} \right) \right] + \\ & \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=2}^n \theta_j \tau_j \frac{\left[ \lg(x_j) - \theta_j \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta} \right]^2}{(1 - \theta_j^2)^2} + \\ & \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=2}^n \frac{\theta_j^2 \tau_j}{1 - \theta_j^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=2}^n \frac{\left[ \lg(x_j) - \theta_j \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta} \right]^2}{1 - \theta_j^2} \end{aligned}$$

Igualando a cero dicha derivadas parciales y haciendo las operaciones pertinentes, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= \hat{\beta} \left( \sum_{j=2}^n \frac{1 - \hat{\theta}_j}{1 + \hat{\theta}_j} \right)^{-1} \left( \sum_{j=2}^n \frac{\lg(x_j) - \hat{\theta}_j \lg(x_{j-1})}{1 + \hat{\theta}_j} \right) \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{2\hat{\beta}}{n-1} \sum_{j=2}^n \frac{\left[ \lg(x_j) - \hat{\theta}_j \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\hat{\theta}_j)}{\beta} \right]^2}{1 - \hat{\theta}_j^2} \\ & - \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=2}^n \frac{\hat{\theta}_j \tau_j \left[ \lg(x_j) - \hat{\theta}_j \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\hat{\theta}_j)}{\beta} \right]}{1 - \hat{\theta}_j^2} \left[ \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma}{\beta} \right] - \\ & \sum_{j=2}^n \frac{\hat{\theta}_j^2 \tau_j}{1 - \hat{\theta}_j^2} + \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=2}^n \frac{\hat{\theta}_j^2 \tau_j \left[ \lg(x_j) - \hat{\theta}_j \lg(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\hat{\theta}_j)}{\beta} \right]^2}{(1 - \hat{\theta}_j^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Reemplazando  $\hat{\gamma}$  y  $\hat{\sigma}^2$  por sus valores en la última expresión tendremos una ecuación no lineal, que podemos resolver por métodos numéricos, por ejemplo el método de Newton-Raphson.

### Caso particular

Un caso particular habitual en la práctica, es el caso en que las observaciones están hechas en intervalos igualmente espaciados y con  $\tau_j = 1$  para  $j = 2, \dots, n$ . En este caso el anterior sistema de ecuaciones, se reduce al siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= \frac{\hat{\beta}}{(n-1)(1 - e^{-\hat{\beta}})} \sum_{j=1}^n \left[ \lg(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \lg(x_{j-1}) \right] \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{2\hat{\beta}}{(n-1)(1 - e^{-2\hat{\beta}})} \sum_{j=2}^n \left[ \lg(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \lg(x_{j-1}) - \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}}(1 - e^{-\hat{\beta}}) \right]^2 \end{aligned}$$

$$e^{-\hat{\beta}} = \frac{\left[ \sum_{j=2}^n \lg(x_j) \right] \left[ \sum_{j=2}^n \lg(x_{j-1}) \right] - (n-1) \left[ \sum_{j=2}^n \lg(x_j) \lg(x_{j-1}) \right]}{\left[ \sum_{j=2}^n \lg(x_{j-1}) \right]^2 - (n-1) \left[ \sum_{j=2}^n (\lg(x_{j-1}))^2 \right]}.$$

### Observación

Al tender  $\hat{\beta}$  hacia cero, en las últimas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\hat{\beta} \rightarrow 0} \hat{\gamma} &= \lim_{\hat{\beta} \rightarrow 0} \hat{\beta} \left( \sum_{j=2}^n \frac{1 - \hat{\theta}_j}{1 + \hat{\theta}_j} \right)^{-1} \left( \sum_{j=2}^n \frac{\lg(x_j) - \hat{\theta}_j \lg(x_{j-1})}{1 + \hat{\theta}_j} \right) = \\ &= \left( \sum_{j=2}^n \frac{1 - \hat{\theta}_j}{\hat{\beta} (1 + \hat{\theta}_j)} \right)^{-1} \left( \sum_{j=2}^n \frac{\lg(x_j) - \hat{\theta}_j \lg(x_{j-1})}{1 + \hat{\theta}_j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=2}^n (\lg(x_j) - \lg(x_{j-1})) \right] \left[ \sum_{j=2}^n \frac{\tau_j}{2} \right]^{-1} = \\ &= \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{j=2}^n (\lg(x_j) - \lg(x_{j-1})). \end{aligned}$$

De la misma manera se obtiene:

$$\lim_{\hat{\beta} \rightarrow 0} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^n \frac{[\lg(x_j) - \lg(x_{j-1}) - (t_j - t_{j-1})\hat{\gamma}]^2}{t_j - t_{j-1}}.$$

Que son exactamente los estimadores de los parámetros del proceso de difusión lognormal univariante con dos parámetros, lo que esta en consonancia con el hecho antes indicado de que para  $\beta = 0$ , el proceso Gompertz coincide con el lognormal univariante biparamétrico.

## 6.2. Proceso de Gompertz con factores exógenos

### 6.2.1. Concepto y caracterización

Vamos a introducir el proceso de difusión de crecimiento de Gompertz univariante con factores exgenos que afectan a su parámetro tendencia, por medio

de las ecuaciones adelantada y atrasada de Kolmogorov correspondientes.

Sea  $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$  un proceso de difusión unidimensional y sean  $g$  y  $h$  dos funciones continuas y paramétricas (dependen en general de un cierto número de parámetros).

Definimos el proceso de difusión Gompertz unidimensional con factores exógenos (no homogéneo), como la difusión con momentos infinitesimales (drift y difusión) dados, respectivamente, así:

$$\begin{aligned} a(t, x) &= g(t)x - h(t)x \lg(x) \\ b(t, x) &= \sigma^2 x^2 \end{aligned}$$

siendo  $\sigma^2 > 0$ .

De la misma manera que en el proceso Gompertz homogéneo estudiado anteriormente (Sección 6.1.2), la fdt del proceso puede obtenerse por el método de Ricciardi antes mencionado (Sección 6.1.1). Las funciones  $c_1$  y  $c_2$  en este caso vienen dadas por:

$$\begin{cases} c_1(t) = \frac{2}{\sigma}(g(t) - \frac{\sigma^2}{2}) \\ c_2(t) = -2h(t) \end{cases} .$$

La transformación adecuada es:

$$\Phi(t) = \int^t e^{2 \int^u h(\theta) d\theta} du$$

$$\Psi(t, x) = \frac{x}{\sigma} e^{\int^t h(\theta) d\theta} - \frac{1}{\sigma} \int^t (g(u) - \sigma^2/2) e^{\int^u h(\theta) d\theta} du.$$

Con todo ello, puede calcularse la fdt del proceso, que resulta ser la densidad de una distribución lognormal univariante  $\Lambda_1(m(s, t), v(s, t))$  y con fdt dada así:

$$P(y, t/x, s) = \left[ 2\pi\sigma^2 e^{-2 \int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t e^{2 \int_s^u h(\theta) d\theta} du \right]^{-\frac{1}{2}} y^{-1} \times \\ \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{\left[ \lg(y) - \lg(x) e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} - e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t (g(u) - \sigma^2/2) e^{\int_u^t h(\theta) d\theta} du \right]^2}{\sigma^2 e^{-2 \int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t e^{2 \int_s^u h(\theta) d\theta} du} \right)$$

siendo  $m(s, t)$  y  $v(s, t)$ :

$$m(s, t) = \lg(x) e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} + e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t (g(u) - \sigma^2/2) e^{\int_u^t h(\theta) d\theta} du$$

$$v(s, t) = \sigma^2 e^{-2 \int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t e^{2 \int_s^u h(\theta) d\theta} du.$$

### 6.2.2. Momentos de las variables endógenas

Como la variable  $X(t)/X(s) = x$  se distribuye según una distribución log-normal  $\Lambda(m(s, t), v(s, t))$ , entonces :

$$\begin{aligned} E(X_t^r / X_s = x) &= \exp \left\{ rm(s, t) + \frac{r^2}{2} v(s, t) \right\} = \\ &\exp \left\{ r \lg(x) e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} + r e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t (g(u) - \sigma^2/2) e^{-\int_u^t h(\theta) d\theta} du + \right. \\ &\quad \left. \frac{r^2 \sigma^2}{2} e^{-2 \int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t e^{2 \int_s^u h(\theta) d\theta} du \right\}. \end{aligned}$$

El momento de primer orden es:

$$\begin{aligned} E(X_t / X_s = x) &= \exp \left\{ \lg(x) e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} + e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t (g(u) - \sigma^2/2) e^{-\int_u^t h(\theta) d\theta} du + \right. \\ &\quad \left. \frac{\sigma^2}{2} e^{-2 \int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t e^{2 \int_s^u h(\theta) d\theta} du \right\}. \end{aligned}$$

La varianza del proceso es:

$$\begin{aligned} Var(X_t / X_s = x) &= \exp \left\{ 2 \lg(x) e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} + 2 e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t (g(u) - \sigma^2/2) e^{-\int_u^t h(\theta) d\theta} du + \right. \\ &\quad \left. 2 \sigma^2 e^{-2 \int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t e^{2 \int_s^u h(\theta) d\theta} du \right\} - \\ &\exp \left\{ 2 \lg(x) e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} + 2 e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t (g(u) - \sigma^2/2) e^{-\int_u^t h(\theta) d\theta} du + \right. \\ &\quad \left. \sigma^2 e^{-2 \int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t e^{2 \int_s^u h(\theta) d\theta} du \right\} = \\ &\exp \left( 2 \lg(x) e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} + 2 e^{-\int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t (g(u) - \sigma^2/2) e^{-\int_u^t h(\theta) d\theta} du + \right. \\ &\quad \left. \sigma^2 e^{-2 \int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t e^{2 \int_s^u h(\theta) d\theta} du \right) \times \\ &\quad \left( \exp \left\{ \sigma^2 e^{-2 \int_s^t h(\theta) d\theta} \int_s^t e^{2 \int_s^u h(\theta) d\theta} du \right\} - 1 \right). \end{aligned}$$

### 6.2.3. Estimación de los parámetros

A continuación se estiman los parámetros del proceso de Gompertz con factores exógenos por el método de máxima verosimilitud, mediante el siguiente muestreo discreto del proceso  $(X(t_1) = x_{t_1}, \dots, X(t_n) = x_{t_n})$  en los instantes  $(t_1, \dots, t_n)$ . Además si suponemos que  $P(X(t_1) = x_1) = 1$  como condición inicial, entonces la función verosimilitud asociada al proceso será:

$$L(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\alpha=2}^n P(x_\alpha, t_\alpha / x_\alpha, t_{\alpha-1})$$

$$= \prod_{\alpha=2}^n \left[ 2\pi\sigma^2 e^{-2 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(\theta) d\theta} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} e^{2 \int_{t_{\alpha-1}}^u h(\theta) d\theta} du \right]^{-\frac{1}{2}} x_\alpha^{-1} \times$$

$$\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[\lg(x_\alpha) - m_\alpha]^2}{e^{-2 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(\theta) d\theta} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} e^{2 \int_{t_{\alpha-1}}^u h(\theta) d\theta} du} \right)$$

siendo:

$$m_\alpha = \lg(x_{\alpha-1}) e^{-\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(\theta) d\theta} - e^{-\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(\theta) d\theta} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} (g(u) - \sigma^2/2) e^{-\int_u^{t_\alpha} h(\theta) d\theta} du$$

El logaritmo de esta función de verosimilitud condicionada será:

$$\lg L(x_1, \dots, x_n) = -\frac{n-1}{2} \lg(2\pi) - \frac{n-1}{2} \lg(\sigma^2) -$$

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha=2}^n \lg \left( e^{-2 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(\theta) d\theta} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} e^{2 \int_{t_{\alpha-1}}^u h(\theta) d\theta} du \right) -$$

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha=2}^n \frac{[\lg(x_\alpha) - m_\alpha]^2}{e^{-2 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(\theta) d\theta} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} e^{2 \int_{t_{\alpha-1}}^u h(\theta) d\theta} du}.$$

Es clara la dificultad de abordar el problema de estimación de forma genérica, es decir, con las funciones  $g(t)$  y  $h(t)$  consideradas en la definición de la Sección 6.2.1. En ciertos casos particulares, es posible simplificar la función de verosimilitud de manera que sea analíticamente tratable. Por ejemplo un caso importante en la práctica es el Gompertz definido por las funciones  $h(t) = \beta$  y  $g(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g_i(t)$ .



## 6.3. Proceso de difusión Gompertz no homogéneo con factores exógenos particulares

### 6.3.1. Modelo

Sea el proceso de difusión no homogéneo  $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$  solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica (SDE)

$$dX(t) = [g(t)X(t) - \beta X(t) \lg(X(t))] dt + \sigma X(t) dW(t), \quad X(s) = x_s.$$

En este caso, el parámetro tendencia (drift) está afectado por factores exógenos de la forma  $g(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g_i(t)$ , donde  $g_i(t)$  (variables exógenas) son funciones continuas en  $[t_0, T]$  y  $\beta, \sigma$  y  $\alpha_i$ , para  $i = 0, \dots, q$  son parámetros independientes del tiempo (a estimar) y  $W(t)$  es un proceso Wiener.

### 6.3.2. Densidad de transición y funciones tendencia

A continuación calculamos la fdt y las funciones tendencias para el proceso definido en la Sección 6.3.1, mediante el cálculo estocástico de Itô. En efecto, aplicando la formula de Itô a la transformación dependiente del tiempo  $y_t = e^{\beta t} \lg[x(t)]$ , resulta

$$dy_t = (g(t) - \sigma^2/2)e^{\beta t} dt + \sigma e^{\beta t} dW(t), \quad y_s = e^{\beta s} \lg(x_s)$$

cuya solución es

$$y_t = y_s + \int_s^t (g(\tau) - \sigma^2/2)e^{\beta \tau} d\tau + \sigma \int_s^t e^{\beta \tau} dW(\tau)$$

de donde podemos obtener la solución de la ecuación estocástica original, que sería

$$X(t) = \exp \left\{ e^{-\beta(t-s)} \lg(x_s) + \int_s^t (g(\tau) - \sigma^2/2)e^{-\beta(t-\tau)} d\tau + \sigma \int_s^t e^{-\beta(t-\tau)} dW(\tau) \right\}.$$

Usando el hecho de que la variable aleatoria,  $\int_s^t e^{-\beta(t-\tau)} dW(\tau) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \int_s^t e^{-2\beta(t-\tau)} d\tau)$ , se puede deducir la distribución exacta de la variable  $X(t) | X(s) = x_s$ , la cual sigue una distribución lognormal univariante  $\Lambda_1(\mu(s, t), \sigma^2 \nu^2(s, t))$ , donde

$$\begin{aligned} \mu(s, t, x_s) &= e^{-\beta(t-s)} \lg(x_s) - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) + \int_s^t g(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \\ \nu^2(s, t) &= \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)}) \end{aligned}.$$

Es decir, que la fdt del proceso es:

$$f(y, t | x, s) = [2\pi\sigma^2\nu^2(s, t)]^{-\frac{1}{2}} y^{-1} \exp \left\{ -\frac{[\lg(y) - \mu(s, t, x_s)]^2}{2\sigma^2\nu^2(s, t)} \right\}.$$

Aplicando las propiedades conocidas de esta distribución y considerando la condición inicial  $P[X(t_1) = x_1] = 1$ , la función tendencia del proceso vendrá dada por:

$$E(X(t)) = \exp \left\{ \lg(x_1)e^{-\beta(t-t_1)} + \frac{\alpha_0 - \sigma^2/2}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_1)}) + \frac{\sigma^2}{4\beta} (1 - e^{-2\beta(t-t_1)}) \right\} \times \exp \left( \sum_{i=1}^q \alpha_i \int_{t_1}^t g_i(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \right).$$

La función tendencia condicionada vendrá dada por:

$$E(X(t)|X_s) = \exp \left\{ \lg(x_s)e^{-\beta(t-s)} + \frac{\alpha_0 - \sigma^2/2}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-s)}) + \frac{\sigma^2}{4\beta} (1 - e^{-2\beta(t-s)}) \right\} \times \exp \left( \sum_{i=1}^q \alpha_i \int_s^t g_i(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \right).$$

### 6.3.3. Inferencia en el modelo: estimación de parámetros y de funciones tendencia

En el presente estudio, con muestreo discreto, estimamos los parámetros  $\beta$ ,  $\sigma$  y  $\alpha_i$  para  $i = 0, \dots, q$  del modelo aplicando la metodología MLE y asumiendo intervalos en el tiempo igualmente espaciados ( $t_j - t_{j-1} = h$ ), con  $h = 1$ . Consideraremos un muestreo discreto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  del proceso para los instantes del tiempo  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  y con la condición inicial  $P[X(t_1) = x_1] = 1$ . La función de verosimilitud condicionada asociada correspondiente tiene la forma:

$$L(x_1, \dots, x_n, \mathbf{a}, \sigma^2) = \prod_{j=2}^n f(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}).$$

Con objeto de expresar esta verosimilitud de forma condensada, en términos matriciales, introducimos las reparametrizaciones y vectores siguientes:

- $\gamma_\beta = (1 - e^{-\beta})/\beta$ .
- $\mathbf{a} = (\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}, \alpha_1, \dots, \alpha_q)'$ , vector  $(k + 1) \times 1$ .
- $\nu_\beta = \nu(t_{i-1}, t_i) = \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t_i - t_{i-1})}) = \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta})$ , dada la suposición anteriormente indicada de intervalos  $(t_i - t_{i-1}) = 1$ .

- $v_{i,\beta} = \nu_\beta^{-1}(\lg(x_i) - e^{-\beta} \lg(x_{i-1}))$ , para  $i = 2, \dots, n$ .
- $\mathbf{v}_\beta = (v_{2,\beta}, \dots, v_{n,\beta})'$ , vector  $(n-1) \times 1$ .
- $\mathbf{u}_{i,\beta} = \nu_\beta^{-1}(\gamma_\beta, \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_1(\tau) e^{-\beta(t_i-\tau)} d\tau, \dots, \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_1(\tau) e^{-\beta(t_i-\tau)} d\tau)'$  vector  $(q+1) \times 1$ , para  $i = 2, \dots, n$ .
- $\mathbf{U}_\beta = (\mathbf{u}_{2,\beta}, \dots, \mathbf{u}_{n,\beta})$ , matriz  $(q+1) \times (n-1)$ , que se supone de rango  $(q+1)$ .

Con esta notación la función de verosimilitud puede escribirse así:

$$L(v_2, \dots, v_n/\mathbf{a}, \beta, \sigma^2) = [2\pi\sigma^2\nu_\beta^2]^{-(n-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a})'(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a})\right).$$

Diferenciando el logaritmo de la función de verosimilitud con respecto a  $\mathbf{a}$  y  $\sigma^2$ , obtendremos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\beta\mathbf{v}_\beta &= \mathbf{U}_\beta\mathbf{U}'_\beta\mathbf{a} \\ (n-1)\sigma^2 &= (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a})'(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a}). \end{aligned}$$

La tercera ecuación de verosimilitud es obtenida de las derivadas con respecto a  $\beta$ , lo que conduce haciendo uso de las dos últimas ecuaciones, a la siguiente ecuación:

$$\left(\nu_\beta^{-1}e^{-\beta}\mathbf{1}'_x - \mathbf{a}'\frac{\partial\mathbf{U}_\beta}{\partial\beta}\right)(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a}) = 0$$

donde  $\mathbf{1}_x = (\lg(x_1), \dots, \lg(x_{n-1}))'$  y  $\frac{\partial\mathbf{U}_\beta}{\partial\beta}$  es la matriz cuyos elementos son las derivadas con respecto a  $\beta$  de los componentes de  $\mathbf{U}_\beta$ .

Después de algunas operaciones algebraicas, los estimadores de máxima verosimilitud de  $\mathbf{a}$  y  $\sigma^2$  resultan

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= (\mathbf{U}_\beta\mathbf{U}'_\beta)^{-1}\mathbf{U}_\beta\mathbf{v}_\beta \\ (n-1)\hat{\sigma}^2 &= \mathbf{v}'_\beta\mathbf{H}_{\mathbf{U},\beta}\mathbf{v}_\beta. \end{aligned}$$

En donde la matriz  $\mathbf{H}_{\mathbf{U},\beta}$ , simétrica e idempotente, está dada por  $\mathbf{H}_{\mathbf{U},\beta} = \mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{U}'_\beta(\mathbf{U}_\beta\mathbf{U}'_\beta)^{-1}\mathbf{U}_\beta$ .

Sustituyendo estos estimadores en la tercera ecuación de verosimilitud antes indicada, se obtiene finalmente la ecuación que proporciona el estimador de  $\beta$ , que tiene la siguiente expresión:

$$\left( \nu_\beta^{-1} e^{-\beta} \mathbf{1}'_x - \mathbf{v}'_\beta \mathbf{U}'_\beta (\mathbf{U}'_\beta \mathbf{U}_\beta)^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}_\beta}{\partial \beta} \right) \mathbf{H}_{\mathbf{U}, \beta} \mathbf{v}_\beta = 0.$$

Destacamos que en esta última ecuación no es posible calcular explícitamente el estimador de  $\beta$ , ya que los componentes de la matriz  $\mathbf{U}_\beta$  dependen de las integrales  $\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_j(\tau) e^{-\beta(t_i-\tau)} d\tau$ , y los cálculos requieren las expresiones de las funciones  $g_j(t)$  en los intervalos  $[t_{i-1}, t_i]$ , las cuales en la práctica sólo son conocidas a partir de las observaciones discretas de los datos de las variables exógenas. Los  $g_i(t)$  pueden ser obtenidas mediante el uso de las funciones poligonales, técnica utilizada en Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafdi (2005a).

## Notas

1. Estimación de las funciones tendencia.

Por el teorema de Zehna, puede obtenerse una estimación de la función tendencia (ETF) y una estimación de la función tendencia condicionada (ECTF) del modelo de Gompertz no homogéneo con factores exógenos, sustituyendo los parámetros que en ellas aparecen por las estimaciones máximo verosímiles obtenidas en la Sección 6.3.3.

2. Caso particular del modelo sin factores exógenos (homogéneo).

En el caso del modelo Gompertz sin factores exógenos, definido y estudiado en la Sección 6.1, podemos obtener los estimadores de sus parámetros  $\beta$ ,  $a$  y  $\sigma$ , como caso particulares de los estimadores obtenidos en el apartado 6.3.3, para el caso no homogéneo. Al no existir factores exógenos, es decir,  $g_i(t) = 0$  para  $i = 1, \dots, q$ , la matriz  $\mathbf{U}_\beta$  se reduce al vector fila  $\mathbf{U}_\beta = \gamma_\beta \nu_\beta^{-1} \mathbf{U}$  en donde  $\mathbf{U} = (1, \dots, 1)$ , vector  $1 \times (n-1)$ . Además en este caso homogéneo, la tercera ecuación de verosimilitud anterior (sección 6.3.3) para el caso no homogéneo puede escribirse  $e^{-\beta} \mathbf{1}'_x \mathbf{H}_{\mathbf{U}} \mathbf{v}_\beta = 0$  donde  $\mathbf{H}_{\mathbf{U}} = I_{n-1} - \mathbf{U}'(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\mathbf{U}$ .

Finalmente, teniendo en cuenta que  $\mathbf{v}_\beta = \nu_\beta^{-1}(\mathbf{1}_x - e^{-\beta} \mathbf{J}_x)$  con  $\mathbf{J}_x = (\lg(x_2), \dots, \lg(x_n))'$  puede obtenerse una expresión explícita para el estimador de  $\beta$ , que resulta ser:

$$\hat{\beta} = \lg \left( \frac{\mathbf{J}'_x \mathbf{H}_{\mathbf{U}} \mathbf{J}_x}{\mathbf{J}'_x \mathbf{H}_{\mathbf{U}} \mathbf{1}_x} \right)$$

En cuanto a los estimadores de los parámetros  $a$  y  $\sigma^2$  en el caso homogéneo, pueden obtenerse a partir de las expresiones de las dos primeras ecuaciones de verosimilitud dadas anteriormente en la sección 6.3.3 con las particularizaciones que acabamos de ver, obteniéndose explícitamente:

$$\hat{a} = \gamma_{\hat{\beta}}^{-1} \nu_{\hat{\beta}} (\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1} \mathbf{U}\mathbf{v}_{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \mathbf{v}'_{\hat{\beta}} \mathbf{H}_{\mathbf{U}} \mathbf{v}_{\hat{\beta}}$$

3. Proceso de difusión lognormal univariante homogéneo y no homogéneo con factores exógenos.

Teniendo en cuenta, que como antes indicábamos, si  $\beta$  es igual a cero, el modelo Gompertz homogéneo estudiado en 6.1, y el no homogéneo estudiado en 6.3, coinciden con los respectivos procesos lognormales (homogéneo y no homogéneo con factores exógenos) y los estimadores para este caso lognormal, pueden obtenerse a partir de los obtenidos para el Gompertz haciendo  $\beta = 0$  y  $\hat{\beta} = 0$ . Los resultados que se obtienen coinciden con los obtenidos en el capítulo 1 de esta tesis con  $k=1$ .

## 6.4. Aplicación del modelo Gompertz al estudio del parque de vehículos en España

Como hemos visto, en los capítulos precedentes de esta Tesis, y en el presente en lo que al Gompertz se refiere, los procesos estocásticos de difusión de tipo lognormal y Gompertz, tienen la capacidad de incluir “factores exógenos” en su tendencia (función media del proceso respectivo) de tal forma que esta se afecte por aquellos. Ello permite la inclusión de variables externas que hipotéticamente influyen en el comportamiento dinámico de la variable endógena que es descrita por los modelos estocásticos citados. Su estudio teórico y aplicaciones en el campo económico, entre otros, ha sido ampliamente estudiados en Gutiérrez, Román, and Torres (1995), Gutiérrez, González, and Torres (1997), Gutiérrez, Román, and Torres (1999), Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi (2004) y Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi (2005b).

Por otra parte, en una primera fase del estudio de la evolución del parque nacional de vehículos de determinado tipo, en función del consumo energético (gasoil, gasolina) respectivo, es preciso detectar posibles variables exógenas que influyan en su comportamiento. A este respecto, se han estudiado distintos modelos, no basados en procesos estocásticos, que exploran, en situaciones concretas (países, áreas territoriales...), determinadas variables regresoras, por ejemplo Kayser (2000) y Greenman (1996). Para ello se hace preciso determinar en base a series de observaciones en el tiempo, un modelo de proceso estocástico ajustado estadísticamente con un suficiente grado de bondad, que evidencie las perturbaciones en la tendencia del comportamiento. Y detectadas estas perturbaciones (irregularidades respecto al modelo) tratar de encontrar

variables exógenas que las provocan e incorporarlas al modelo de difusión básico.

En este ejemplo de aplicación, concretamente, se consideran las difusiones estocásticas unidimensionales de tipo Gompertz y lognormal, con la metodología estudiada previamente, en particular en lo que al ajuste mediante las funciones tendencias estimadas se refiere.

Estos modelos y sus metodologías estadísticas, se aplican a la descripción y predicción de la evolución del “Parque Total de Vehículos en España”, y al “Parque Total de Turismos en España” medidos en cada año. Esta última variable se considera además desagregada según el tipo de carburante utilizado (gasolina o gasoil). Los datos considerados corresponden a la serie 1978-2002. En lo que sigue se discuten los resultados obtenidos por los modelos Gompertz y lognormal ajustados y se obtienen conclusiones con vistas a futuras ampliaciones de este estudio que incluyan factores exógenos apropiados.

Los datos tiene como fuente el Ministerio de Economía (Anuario Nacional del Transporte).

La metodología que se ha utilizado es la siguiente:

- Usamos los 22 primeros datos de las series (correspondientes al periodo 1978-2000) para estimar los parámetros de los procesos Gompertz y lognormales.
- Los datos de 2001-2002 son utilizados para comparar los valores predichos, para dichos años, con los correspondientes valores de las funciones tendencia estimadas, es decir, con la tendencia estimada (ETF) y con la tendencia estimada condicionada (ECTF).

A continuación se incluyen las siguientes tablas y gráficos:

1. En las tablas 6.1-6.4, se recogen los datos observados, los valores ajustados mediante la tendencia estimada (ETF) y las predicciones para los años 2001-2002, obtenidas mediante el modelo Gompertz homogéneo sin factores exógenos, para las distintas variables endógenas estudiadas.
2. En las figuras 6.1-6.4, se representan gráficamente los datos de las tablas 6.1-6.4.
3. En las tablas 6.5-6.8; y en las figuras 6.5-6.8, se incluyen en el mismo orden del modelo Gompertz, los resultados correspondiente al ajuste y predicción mediante el modelo lognormal.

4. Finalmente en las tablas 6.9 y 6.10 se recogen las estimaciones de los parámetros de ambos modelos ajustados.

Como conclusiones del estudio realizado podemos citar las siguientes:

- Para todas las variables consideradas, el modelo Gompertz homogéneo ajustado es más preciso que el modelo lognormal tanto para el ajuste de las series consideradas como para las predicciones en los años considerados. Aunque no se han incluido los ajustes mediante las tendencias condicionadas (ETCF), estos tienen un alto grado de precisión respecto de los datos observados, especialmente en el modelo Gompertz, que también se muestra más preciso que el lognormal en todas las variables consideradas.
- De lo anterior se deduce que, en efecto, la consideración del modelo Gompertz, con el término “corrector”  $-\beta x \lg(x)$  en el coeficiente de tendencia  $a(t, x)$ , respecto del modelo lognormal correspondiente sin dicho coeficiente corrector, es más idóneo para el presente estudio. En la tabla 6.9 antes mencionada, pueden verse las estimaciones del parámetro  $\beta$  del término corrector, para cada una de las variables endógenas consideradas.
- No obstante lo anterior, se hace evidente respecto de uno de los objetivos de este estudio antes indicado, que es preciso introducir en algunos casos factores exógenos que mejoren ciertas irregularidades de los datos observados respecto de las tendencias ajustadas. Por ejemplo, en las variables “Parque Total de Turismos de Gasolina” y en el “Parque Total de Turismos de Gasoil”. Factores exógenos del tipo “Precio del Combustible”, “Renta per-capita”, etc, pueden ser incorporados al modelo Gompertz y obtener los ajustes correspondientes mediante la metodología descrita en la sección 6.3. Un estudio de este tipo ha sido realizado en Gutiérrez et al. (2005a) y en Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi (2005a)

Tabla 6.1: Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Vehículos” según la distribución Gompertz

<b>Año</b>	<b>Dato Real</b>	<b>ETF</b>
1978	8952628	8952628
1979	9586802	9402512
1980	10192748	9869468
1981	10666714	10353873
1982	11170404	10856103
1983	11628151	11376531
1984	11190584	11915525
1985	11716339	12473451
1986	12284080	13050671
1987	13066884	13647542
1988	13881323	14264416
1989	14870484	14901639
1990	15696715	15559553
1991	16528396	16238492
1992	17347203	16938785
1993	17809897	17660753
1994	18218924	18404711
1995	18847245	19170964
1996	19542104	19959813
1997	20286408	20771546
1998	21306493	21606446
1999	22411194	22464786
2000	23284215	23346829
<b>Predicciones</b>		
2001	24249871	24252829
2002	25065732	25183030



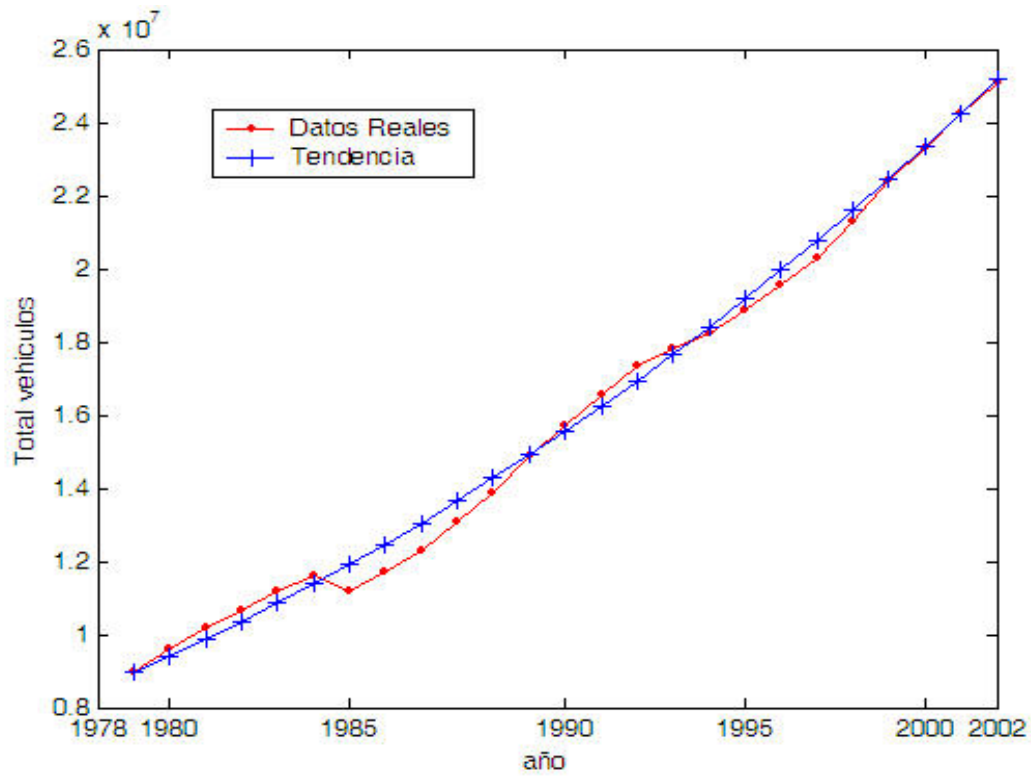


Gráfico 6.1: Tendencia estimada para la variable “Parque Total de Vehículos” según la distribución Gompertz

Tabla 6.2: Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Turismos” según la distribución Gompertz

<b>Año</b>	<b>Dato Real</b>	<b>ETF</b>
1978	6530428	6530428
1979	7057521	6918675
1980	7556511	7319210
1981	7943325	7731821
1982	8354050	8156271
1983	8714076	8592297
1984	8874442	9039612
1985	9273710	9497907
1986	9643448	9966853
1987	10218526	10446101
1988	10787424	10935282
1989	11467727	11434014
1990	11995640	11941896
1991	12537099	12458517
1992	13102285	12983453
1993	13440694	13516269
1994	13733794	14056522
1995	14212259	14603762
1996	14753809	15157533
1997	15297366	15717375
1998	16050057	16282823
1999	16847397	16853413
2000	17449235	17428681
<b>Predicciones</b>		
2001	18150880	18008162
2002	18732632	18591393

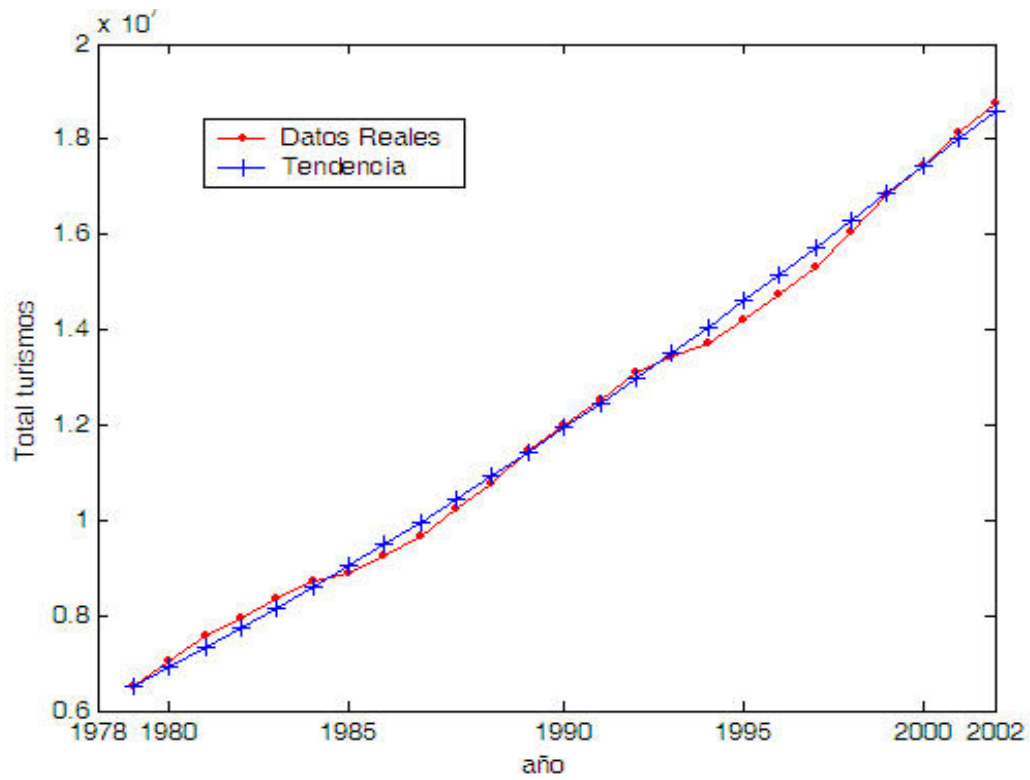


Gráfico 6.2: Tendencia estimada para la variable “Parque Total de Turismos” según la distribución Gompertz

Tabla 6.3: Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Turismos de Gasolina” según la distribución Gompertz

<b>Año</b>	<b>Dato Real</b>	<b>ETF</b>
1978	6378229	6378229
1979	6872870	6784070
1980	7333143	7184335
1981	7669907	7577449
1982	8025358	7962035
1983	8291550	8336919
1984	8339699	8701116
1985	8627557	9053825
1986	8885257	9394418
1987	9347039	9722422
1988	9800330	10037511
1989	10360638	10339487
1990	10774894	10628269
1991	11219624	10903878
1992	11640667	11166422
1993	11838632	11416085
1994	11927546	11653116
1995	12153133	11877815
1996	12362457	12090527
1997	12490612	12291630
1998	12681210	12481528
1999	12802978	12660644
2000	12746971	12829415
<hr/> <hr/> Predicted values		
2001	12795735	12988283
2002	12728713	13137697

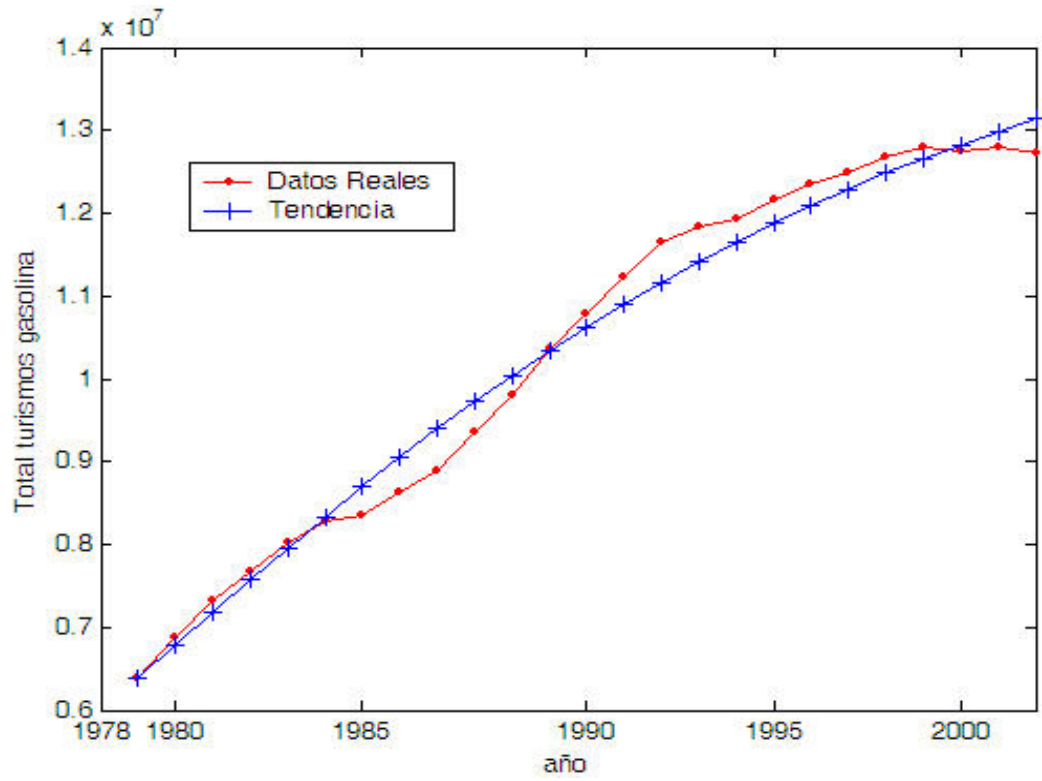


Gráfico 6.3: Tendencias estimada para a variable “Parque Total de Turismos de Gasolina” según la distribución Gompertz

Tabla 6.4: Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Turismos de Gasoil” según una distribución Gompertz

<b>Año</b>	<b>Dato Real</b>	<b>ETF</b>
1978	152199	152199
1979	181234	185645
1980	223388	225371
1981	273418	272335
1982	328692	327605
1983	422911	392359
1984	534743	467896
1985	646153	555638
1986	758191	657137
1987	871487	774075
1988	987094	908270
1989	1107089	1061676
1990	1220746	1236387
1991	1317475	1434631
1992	1461618	1658775
1993	1602062	1911316
1994	1806248	2194883
1995	2059126	2512229
1996	2391352	2866223
1997	2806754	3259848
1998	3368847	3696184
1999	4044419	4178406
2000	4702264	4709768
<b>Predicciones</b>		
2001	5355145	5293591
2002	6003919	5933253

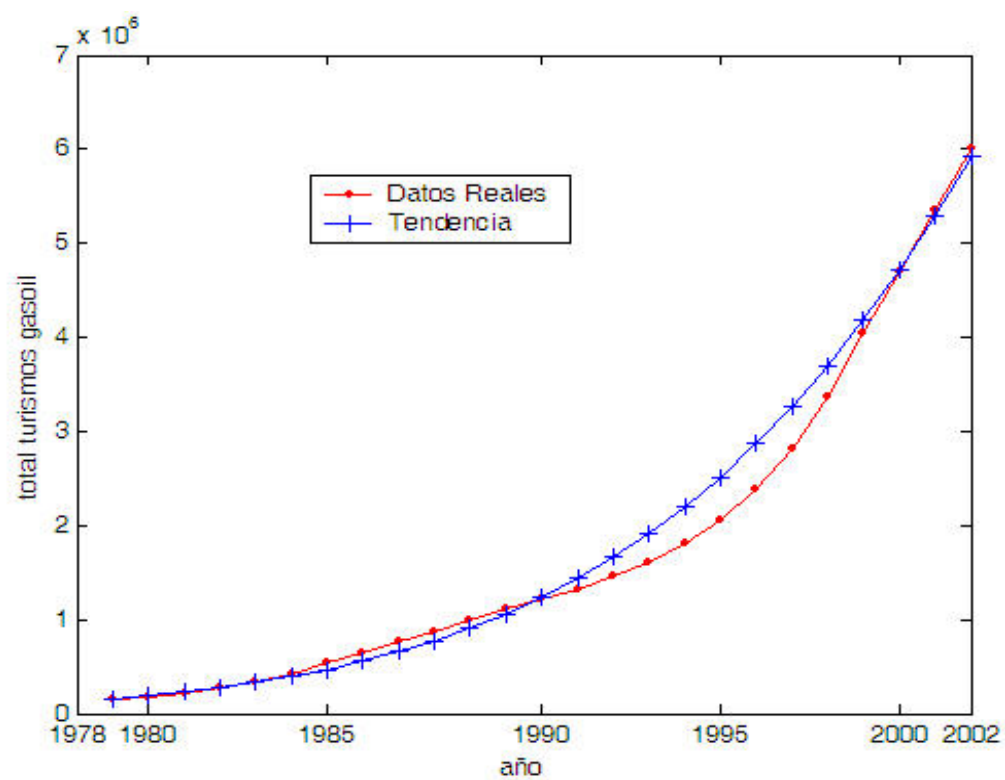


Gráfico 6.4: Tendencias estimadas para la variable “Parque Total de Turismos de Gasoil” según la distribución Gompertz

Tabla 6.5: Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Vehículos” según una distribución lognormal

<b>Año</b>	<b>Dato Real</b>	<b>ETF</b>
1978	8952628	8952628
1979	9586802	9347040
1980	10192748	9758828
1981	10666714	10188758
1982	11170404	10637628
1983	11628151	11106274
1984	11190584	11595566
1985	11716339	12106413
1986	12284080	12639767
1987	13066884	13196618
1988	13881323	13778001
1989	14870484	14384997
1990	15696715	15018734
1991	16528396	15680391
1992	17347203	16371198
1993	17809897	17092439
1994	18218924	17845454
1995	18847245	18631643
1996	19542104	19452469
1997	20286408	20309456
1998	21306493	21204198
1999	22411194	22138359
2000	23284215	23113674
<b>Predicciones</b>		
2001	24249871	24131958
2002	25065732	25195102



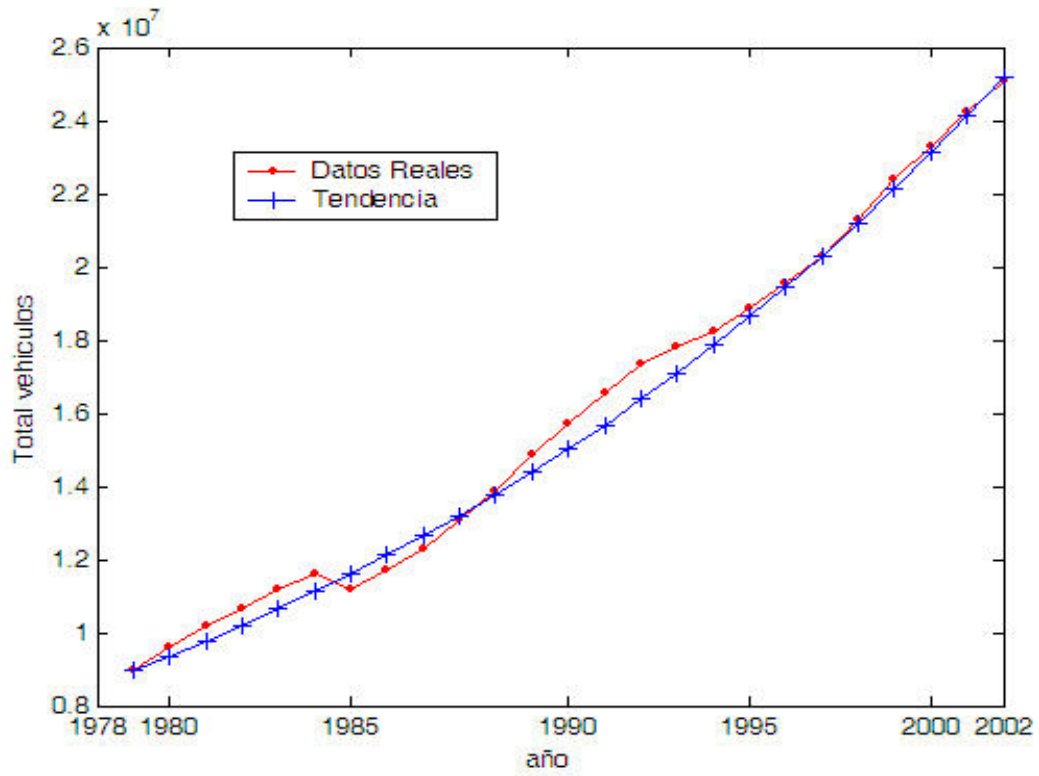


Gráfico 6.5: Tendencia estimada para la variable “Parque Total de Vehículos” según una distribución lognormal

Tabla 6.6: Valores observados y estimados para la variable “Parque Total de Turismos” según una distribución lognormal

<b>Año</b>	<b>Dato Real</b>	<b>ETF</b>
1978	6530428	6530428
1979	7057521	6826617
1980	7556511	7136240
1981	7943325	7459906
1982	8354050	7798252
1983	8714076	8151943
1984	8874442	8521677
1985	9273710	8908180
1986	9643448	9312212
1987	10218526	9734570
1988	10787424	10176084
1989	11467727	10637622
1990	11995640	11120094
1991	12537099	11624449
1992	13102285	12151679
1993	13440694	12702821
1994	13733794	13278961
1995	14212259	13881231
1996	14753809	14510818
1997	15297366	15168960
1998	16050057	15856951
1999	16847397	16576147
2000	17449235	17327963
<b>Predicciones</b>		
2001	18150880	18113877
2002	18732632	18935436

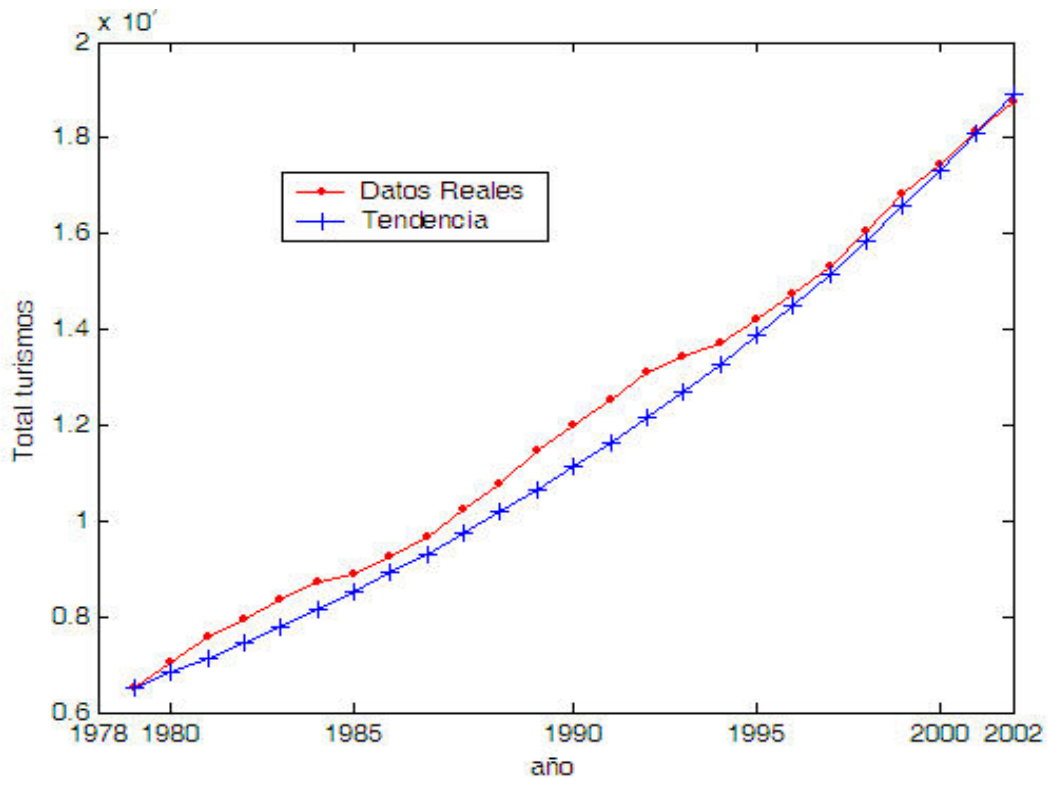


Gráfico 6.6: Tendencia estimada para la variable “Parque Total de Turismos” según una distribución lognormal

Tabla 6.7: Valores observados y predichos para la variable “Total de Turismos de Gasolina” según una distribución lognormal

<b>Año</b>	<b>Dato Real</b>	<b>ETF</b>
1978	6378229	6378229
1979	6872870	6572916
1980	7333143	6773545
1981	7669907	6980298
1982	8025358	7193362
1983	8291550	7412930
1984	8339699	7639200
1985	8627557	7872376
1986	8885257	8112669
1987	9347039	8360298
1988	9800330	8615484
1989	10360638	8878460
1990	10774894	9149463
1991	11219624	9428738
1992	11640667	9716538
1993	11838632	10013122
1994	11927546	10318759
1995	12153133	10633725
1996	12362457	10958305
1997	12490612	11292792
1998	12681210	11637489
1999	12802978	11992708
2000	12746971	12358769
<hr/> <hr/> <b>Predicciones</b>		
2001	12795735	12736003
2002	12728713	13124753

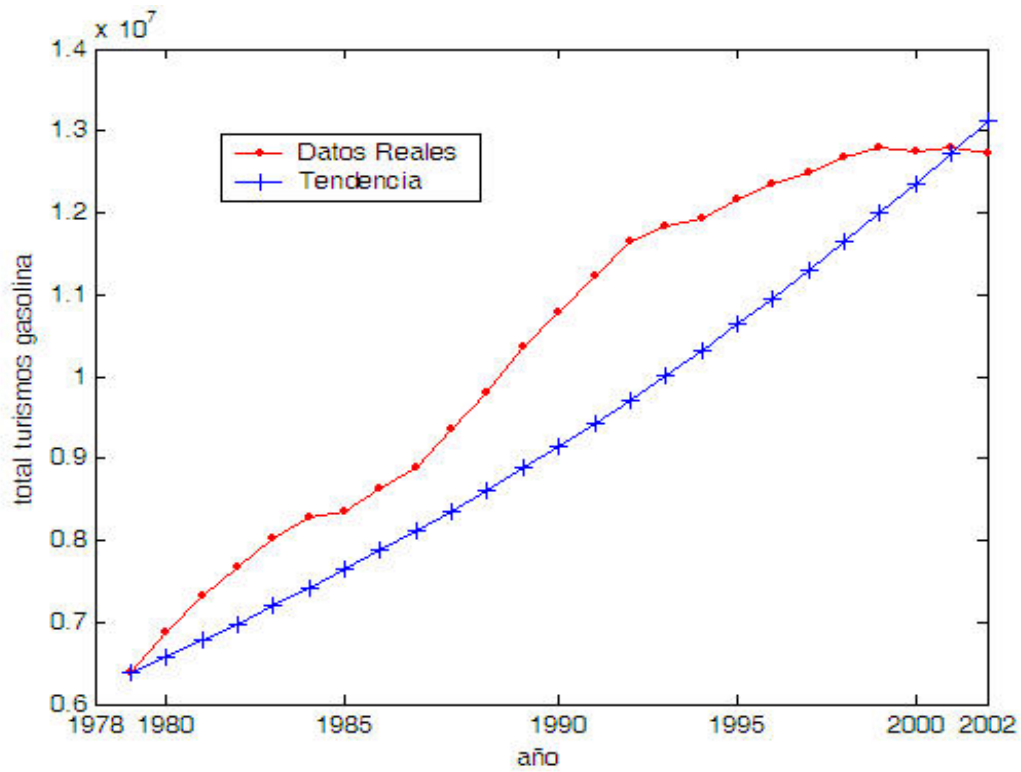


Gráfico 6.7: Tendencias estimadas para la variable “Parque Total de Turismos de Gasolina” según una distribución lognormal

Tabla 6.8: Valores observados y predichos para la variable “Parque Total de Turismos Gasoil” según una distribución lognormal

<b>Año</b>	<b>Dato Real</b>	<b>ETF X</b>
1978	152199	152199
1979	181234	177511
1980	223388	207034
1981	273418	241466
1982	328692	281624
1983	422911	328461
1984	534743	383088
1985	646153	446800
1986	758191	521108
1987	871487	607774
1988	987009	708854
1989	1107089	826744
1990	1220746	964241
1991	1317475	1124605
1992	1461618	1311640
1993	1602062	1529781
1994	1806248	1784200
1995	2059126	2080933
1996	2391352	2427016
1997	2806754	2830656
1998	3368847	3301426
1999	4044419	3850491
2000	4702264	4490871
<b>Predicciones</b>		
2001	5355145	5237753
2002	6003919	6108851

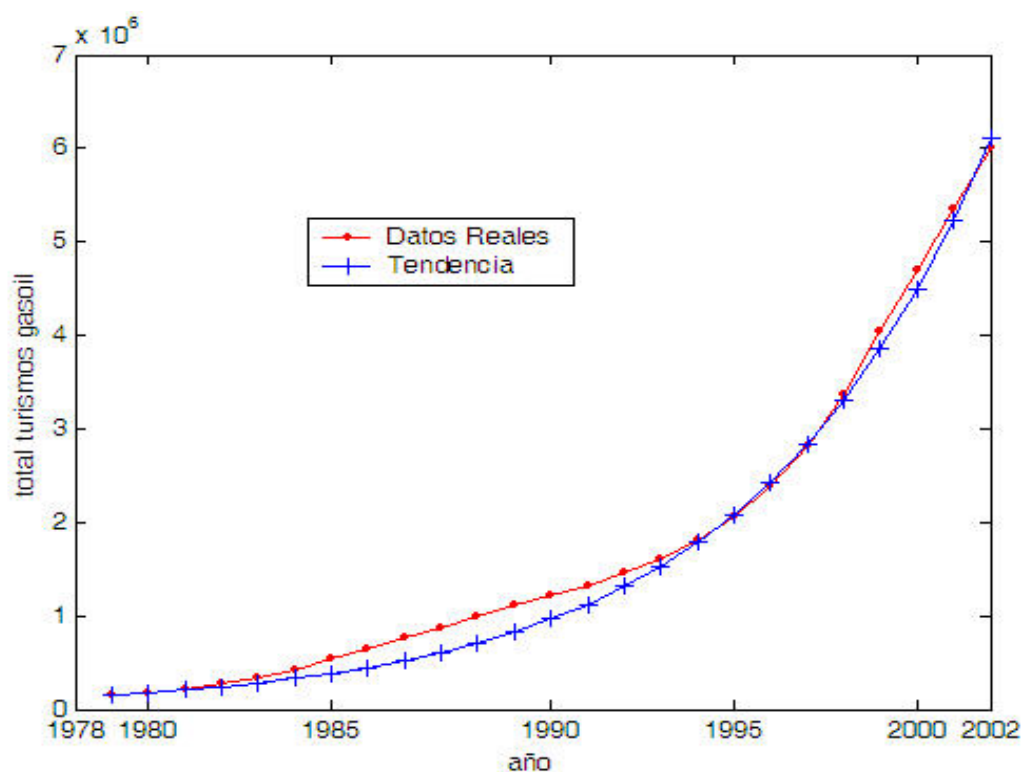


Gráfico 6.8: Tendencias estimadas para la variable “Parque de Turismo Gasoil” según una distribución lognormal

Tabla 6.9: Estimaciones de los parámetros de la distribución Gompertz

	$\hat{\beta}$	$\hat{a}$	$\hat{\sigma}^2$
Parque total	0.01145	0.23238	4.5750e-004
Parque de turismos	0.02581	0.46356	1.46713e-004
turismos gasolina	0.07321	1.21102	1.96008e-004
Turismos gasoil	0.02404	0.48715	0.001615

Tabla 6.10: Estimaciones de los parámetros para la distribución lognormal

	$\hat{a}$	$\hat{\sigma}^2$
Parque total	0.0433	4.23851e-004
Total turismos	0.04444	1.77455e-004
Turismos gasolina	0.03027	4.06870e-004
Turismos de gasoil	0.15480	0.00192





# Chapter 7

## Rayleigh diffusion process: statistical inference and applications. The life expectancy at birth in Andalusia

### 7.1 Introduction

The stochastic Rayleigh diffusion process (SRDP), from its first formulation (Rayleigh 1902), has been widely used in physics. For example, the radial Ornstein-Uhlenbeck process, a special case of the general Rayleigh process, is quite naturally related with the description of “optical field” by means of a pair of Ornstein-Uhlenbeck processes, which in turn describe the behaviour, both real and imaginary, of an electrical field, and thus the Ito Stochastic Differential Equation (SDE) of the corresponding amplitude coincides with the SDE of a Rayleigh diffusion process (see, for example, Gardiner (1990)).

In the last few decades, the Rayleigh process, or one of its particular cases, has been discussed in conjunction with important theoretical and practical problems in various aspects of Stochastic Modelling. For example, in the theory of Point Processes, and in particular in modelling based on the Cox process (Cox 1955), a stationary radial Ornstein-Uhlenbeck process (a particular Rayleigh process) plays an important role, as discussed by Clifford and Wei (1993), who showed that if a Cox process has an intensity that is the square of a stationary radial Ornstein-Uhlenbeck process, then it is equivalent to a death process within a “simple stationary immigration, birth and death process”, with all the advantages implicit in this, for example with respect to its simulation.

Recently, see for example Davidov and Linetsky (2001), the Rayleigh diffusion process has also been considered in the context of the path-dependent

options models used in economics and stochastic finance studies. Specifically, the Rayleigh process (radial Ornstein-Uhlenbeck process) is used in relation with important models formulated under the hypothesis that volatility is not constant, but is rather a function of the underlying asset price. On the basis of Constant Elasticity of Variance (CEV) stochastic diffusions, or Cox processes (Cox 1996), which include as particular cases the lognormal diffusion of the Black-Scholes model (Black and Scholes 1973), the diffusion of the Merton model (Merton 1973), the diffusion of the Cox-Ross model (Cox and Ross 1976) and others, it can be shown that there exists a specific functional transformation between these CEV diffusion processes and the Rayleigh process and its particular cases. The CEV models, and especially the Rayleigh model, are today recognized to be very appropriate in real-life situations, under which the Black-Scholes model and the others named above have been found unable to achieve good fits. The article by Davidov and Linetsky (2001) describes various simulations of the above-cited diffusions and some fits to real applications in the Theory of Options and Risk. In other fields of science, and in particular in Biomedical Science and related areas (such as demographic statistics and the growth of cell populations), we are unaware of applications of the Rayleigh process to theoretical modelling or to statistical fits to observed real data.

Giorno et al. (1986), taking as their starting point a definition of the Rayleigh process, in its broad sense, (see Section 7.2.1 below) established the basic probabilistic theory of this process, obtaining their own transition density function and first-passage time density for arbitrary constant barriers, on the basis of the corresponding Kolmogorov equations (see, for example, Ricciardi (1977)). As regards the statistical inference of the Rayleigh process, especially concerning the estimation of its drift and diffusion parameters, it is noteworthy that from the published literature, it does not seem to have been dealt with in a complete, integrated way (i.e. dealing with the estimation of the two types of parameter). With respect to the drift parameters, and in the case of a Rayleigh (radial Ornstein-Uhlenbeck) process with a diffusion coefficient equal to one, which is thus a very special Rayleigh model with a constant volatility equal to one, Prakasa Rao considers the estimation to be based on eigenfunctions.

For other diffusions, and in particular Gompertz-type diffusions, the problem of the statistical inference of their drift and diffusion parameters has been addressed. Drift parameters are estimated by continuous sampling and an approximation of the diffusion coefficient is made by means of formulas based on the quadratic variation of the process. This method represents an alternative to that presented in this Thesis for the Rayleigh process. In this Gompertzian case, the statistical methodology is applied to real problems of tumor growth (Ferrante et al. 2000) and energy consumptions (Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi 2005b).

In all the studies mentioned, and in other, similar ones, the Rayleigh process has been studied theoretically from various viewpoints and it has been applied to the theoretical structural modelling of the above-cited phenomena. However, no study has been carried out to obtain estimators of the parameters by general methods of parametric statistical inference, such that the Rayleigh model can be statistically fitted to real data obtained by time-continuous sampling (sample trajectories) or by discrete sampling (observations within a time discretization).

In the theoretical-practical context of the Rayleigh model as summarised above, the present study is intended to achieve the following objectives: firstly, taking into account the fitting and prediction methodology that will subsequently be used; Section 7.2.1 completes the probabilistic study of the Rayleigh model developed in Giorno et al. (1986), obtaining the trend function and conditioned trend function, together with their asymptotic behaviour in time. Section 7.3 contains an integrated study of the estimation of the drift and diffusion parameters. The former are estimated by maximum likelihood methods, using continuous sampling; moreover, we propose an approximate calculation by means of numerical procedures applying the discretization of the Riemann integrals appearing in the corresponding expressions. As regards the coefficient of diffusion, we propose a methodology of approximate estimation, which is in fact a variation of the method described by Chesney and Elliot (1995). Finally, we propose the estimations of the conditioned and non-conditioned trend functions. Secondly, following this, Section 7.4 includes results on the simulation of the Rayleigh process and on the application of the proposed methodology to six real cases.

As well as evaluating the fits and predictions obtained in each real situation, we note the versatility of the Rayleigh model, in that it is capable of describing, to a considerable degree of accuracy, phenomena with increasing trends (as is the case of deaths from cancer and the life expectancy at birth) and those with decreasing trends (as is the case of infant mortality), phenomena that in general are non-exponential.

## 7.2 The model and its trend functions

### 7.2.1 Rayleigh diffusion process model

The proposed model is a one dimensional diffusion process with values in  $(0, \infty)$ , and is defined by the process  $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$  solution of the following non linear stochastic differential equation (SDE) of the first order ( see

Giorno et al. (1986) for the general case and Gardiner (1990) for a particular case):

$$dX_t = \left( \frac{a}{X_t} + bX_t \right) dt + \sigma dW_t ; \quad X(t_0) = x_0 \quad (7.1)$$

where  $\{W_t, t \in [t_0, T]\}$  is a one-dimensional standard Wiener process and  $\sigma^2 > 0$ ,  $a$  and  $b$  ( $b \neq 0$ ) are real parameters (to be estimated).

## 7.2.2 Computation of the trend function

Taking into account the homogeneity of this process, and using the expression for the transition probability density function (t.p.d.f.) as obtained by Giorno et al. (1986) for  $a > -\frac{\sigma^2}{2}$  and with the zero-flux condition, the t.p.d.f. of the model is

$$f(x, t/y, s) = \frac{2by^{-\alpha}x^{\alpha+1}}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)} \exp\left(-\frac{b(x^2 + y^2e^{2b(t-s)})}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)} - \alpha b(t-s)\right) I_\alpha\left(\frac{2bxye^{b(t-s)}}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)}\right)$$

where  $I_\alpha$  denotes the modified Bessel function of the first kind and  $\alpha = \frac{a}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ .

The conditional trend function (CTF) of the process is

$$E(X_t/X_s = x_s) = \int_0^\infty xf(x, t/x_s, s)dx.$$

Then, we have

$$E(X_t/X_s = x_s) = \frac{2bx_s^{-\alpha}}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)} \exp\left(\frac{-bx_s^2e^{2b(t-s)}}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)} - \alpha b(t-s)\right) \times \int_0^\infty x^{\alpha+2} \exp\left(\frac{-bx^2}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)}\right) I_\alpha\left(\frac{2bxx_se^{b(t-s)}}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)}\right) dx.$$

By applying the change of variable  $y = x^2$  and by using the relations (Gradshteyn and Ryzhik (1979): 6.643),

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} y^{\mu-1/2} I_{2\nu}(2\xi\sqrt{y}) dy = \frac{\Gamma(\mu + \nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu + 1)} \xi^{-1} \lambda^{-\mu} \exp\left(\frac{\xi^2}{2\lambda}\right) M_{-\mu, \nu}\left(\frac{\xi^2}{\lambda}\right)$$

where  $\mu + \nu + 1/2 > 0$  and  $M_{-\mu, \nu}$  is a Whittaker function (Sepanier and Oldham (1977) p.477:48-13.1), and

$$M_{\nu, \mu}(x) = x^{\mu+1/2} e^{-x/2} \Phi(\mu - \nu + 1/2, 2\mu + 1, x)$$

where  $\Phi$  is the confluent hypergeometric function (Kummer function), the conditional trend function of the proposed process leads to

$$E(X_t | X_s = x_s) = \frac{\Gamma(\alpha + 3/2)}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{b}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)} \right)^{-1/2} \exp \left( \frac{-bx_s^2 e^{2b(t-s)}}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)} \right) \times \\ \Phi \left( \alpha + 3/2, \alpha + 1, \frac{bx_s^2 e^{2b(t-s)}}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)} \right).$$

Finally, by the Kummer transformation  $\Phi(\beta, \gamma, z) = e^z \Phi(\gamma - \beta, \gamma, -z)$ , we deduce that the final form of the conditional trend function of the model is:

$$E(X_t | X_s = x_s) = \frac{\Gamma(\alpha + 3/2)}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{b}{\sigma^2(e^{2b(t-s)} - 1)} \right)^{-1/2} \times \\ \Phi \left( -\frac{1}{2}, \alpha + 1, \frac{-bx_s^2}{\sigma^2(1 - e^{-2b(t-s)})} \right). \quad (7.2)$$

From (7.2) and by considering the initial distribution  $P(X(t_0) = x_0) = 1$ , the trend function (TF) of the process is

$$E(X_t) = \frac{\Gamma(\alpha + 3/2)}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{b}{\sigma^2(e^{2b(t-t_0)} - 1)} \right)^{-1/2} \times \\ \Phi \left( -\frac{1}{2}, \alpha + 1, \frac{-bx_0^2}{\sigma^2(1 - e^{-2b(t-t_0)})} \right). \quad (7.3)$$

These functions are utilized in the following Section to fit and predict the future evolution of the Stochastic Rayleigh Diffusion Process (SRDP).

Using the relation (Sepanier and Oldham (1977) p.467: 47-9.6), for very large, positive  $z$  and  $a \neq 0, -1, -2, \dots$

$$\Phi(a, b, z) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} z^{a-b} \exp(z)$$

one can show the right  $t_0$ -continuity of 7.3, thus obtaining  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} E(X_t) = x_0$ .

We can also study the asymptotic behaviour in time of the trend function, thus obtaining, if  $b < 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(X_t) = \frac{\Gamma(\alpha + 3/2)}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{-b}{\sigma^2} \right)^{-1/2}.$$

## 7.3 Parameter estimation

We shall now estimate the parameters of the proposed model using two methods: firstly, estimating the drift parameters (the  $a$  and  $b$  parameters) by the maximum likelihood method, with continuous sampling of the process; and secondly, by estimating the coefficient of diffusion by an approach proposed, based on an extension of the procedure described by Chesney and Elliot (1995) for the case of a linear EDS, to the non-linear case.

### 7.3.1 Estimation of drift parameters

Let us consider the following SDE (scalar)

$$dX_t = A_t(X_t)\theta dt + B_t(X_t)dW_t; \quad t_0 \leq t \leq T \quad (7.4)$$

where the parameter  $\theta$  is a  $(k \times 1)$ -vector,  $A_t$  is a  $(1 \times k)$ -vector and  $B_t$  is  $\mathbb{R}$ -valued depending only on the sample path up to the given instant. We assume that equation (7.4) has a unique solution for every  $\theta$ . The maximum likelihood estimator of the vector  $\theta$  is given by (see, for example, Kloeden et al. (1996) and Prakasa Rao (1999))

$$\hat{\theta}_T = S_T^{-1}H_T \quad (7.5)$$

where  $H_T$  is the following  $(k \times 1)$ -vector:

$$H_T = \int_{t_0}^T A_t^*(X_t)(B_t(X_t)B_t(X_t))^{-1}dX_t \quad (7.6)$$

and  $S_T$  is the  $k \times k$ - matrix:

$$S_T = \int_{t_0}^T A_t^*(X_t)(B_t(X_t)B_t(X_t))^{-1}A_t(X_t)dt \quad (7.7)$$

and the asterisk denotes the transpose.

The representative equation (7.1) of the model can be written in the vectorial form (7.4), with:

$$A(X_t) = \left( \frac{1}{X_t}, X_t \right); \quad \theta^* = (a, b) \quad \text{and} \quad B(X_t) = \sigma.$$

The corresponding vector  $H_T$  in equation (7.6) in this case leads us to

$$H_T^* = \frac{1}{\sigma^2} \left( \int_{t_0}^T \frac{dX_t}{X_t}, \int_{t_0}^T X_t dX_t \right),$$

$S_T$  is the following square matrix

$$S_T = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \int_{t_0}^T \frac{dt}{X_t^2} & (T - t_0) \\ (T - t_0) & \int_{t_0}^T X_t^2 dt \end{pmatrix}.$$

Using equation (7.5) and after some calculation (not shown), we obtain the expressions of the estimators

$$\hat{a} = \frac{\left( \int_{t_0}^T X_t^2 dt \right) \left( \int_{t_0}^T \frac{dX_t}{X_t} \right) - (T - t_0) \int_{t_0}^T X_t dX_t}{\left( \int_{t_0}^T \frac{dt}{X_t^2} \right) \left( \int_{t_0}^T X_t^2 dt \right) - (T - t_0)^2}$$

$$\hat{b} = \frac{\left( \int_{t_0}^T \frac{dt}{X_t^2} \right) \left( \int_{t_0}^T X_t dX_t \right) - (T - t_0) \left( \int_{t_0}^T \frac{dX_t}{X_t} \right)}{\left( \int_{t_0}^T \frac{dt}{X_t^2} \right) \left( \int_{t_0}^T X_t^2 dt \right) - (T - t_0)^2}.$$

The stochastic integrals in the latter expressions can be transformed into Riemann-Stieljes integrals by using the Itô formula, hence

$$\int_{t_0}^T \frac{dX_t}{X_t} = \lg(X_T) - \lg(x_0) + \frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^T \frac{dt}{X_t^2}$$

$$\int_{t_0}^T X_t dX_t = \frac{1}{2} (X_T^2 - x_0^2) - \frac{\sigma^2}{2} (T - t_0).$$

Therefore, the resulting maximum likelihood estimators are

$$\hat{a} = \frac{\left( \int_{t_0}^T X_t^2 dt \right) \left( \lg\left(\frac{X_T}{x_0}\right) + \frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^T \frac{dt}{X_t^2} \right) - \frac{T-t_0}{2} (X_T^2 - x_0^2 - \sigma^2(T - t_0))}{\left( \int_{t_0}^T \frac{dt}{X_t^2} \right) \left( \int_{t_0}^T X_t^2 dt \right) - (T - t_0)^2} \quad (7.8)$$

$$\hat{b} = \frac{\frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^T \frac{dt}{X_t^2} \right) (X_T^2 - x_0^2 - \sigma^2(T - t_0)) - (T - t_0) \left( \lg\left(\frac{X_T}{x_0}\right) + \frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^T \frac{dt}{X_t^2} \right)}{\left( \int_{t_0}^T \frac{dt}{X_t^2} \right) \left( \int_{t_0}^T X_t^2 dt \right) - (T - t_0)^2} \quad (7.9)$$

The use of these expressions in estimating the parameters requires continuous observations of the process, which in practice cannot be made. In such a situation, we consider a finite number of discrete observations at the instants  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , and so the corresponding likelihood function is the product of the transition density. The latter is normally difficult to obtain (in our case it would be the product of very complicated Bessel functions). An alternative method, and one that is frequently used (see, for example, Skiadas and Giovani (1997) and Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi (2005b)), consists in using the above expressions for the estimators and numerically calculating the Riemann integrals appearing in them, for example, by means of the trapezium method.

### 7.3.2 Estimation of the diffusion coefficient

In general, no direct estimation methods exist to estimate the coefficient of the diffusion parameter  $\sigma$ . Various expressions have been proposed to obtain approximate estimations, such as the formula proposed by Guerra and Stefanini (2000), based on the quadratic variation associated with the process, while others, such as those of Skiadas and Giovani (1997) and Katsamaki and Skiadas (1995) approximate this coefficient in the case of a linear SDE with multiplicative white noise. We propose a formula based on an extension to the case of a nonlinear SDE from the procedure described by Chesney and Elliot (1995), as follows:

By applying the Itô formula, we have

$$d\left(\frac{1}{X_t}\right) = -\frac{dX_t}{X_t^2} + \frac{\sigma^2 dt}{X_t^3}.$$

Using the following approximation in the interval  $[t-1, t]$

$$d\left(\frac{1}{X_t}\right) \simeq \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_{t-1}} \quad \text{y} \quad d(X_t) \simeq X_t - X_{t-1}$$

then

$$X_t^3 \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_{t-1}} \right) + X_t(X_t - X_{t-1}) = \sigma^2.$$

An estimator for  $\sigma$  is, therefore

$$\hat{\sigma} = \sqrt{X_t/X_{t-1}} |X_t - X_{t-1}|.$$

For  $n + 1$  observations of one trajectory of the process, the resulting estimator has the following expression:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sqrt{X_t/X_{t-1}} |X_t - X_{t-1}| \quad (7.10)$$

#### Remark

By using Zehna's theorem, the estimated conditional trend function (ECTF) of the SRDP is obtained by replacing the parameters in expression (7.2) by equations (7.8), (7.9) and (7.10), and thus the ECTF is given by the following expression:

$$\begin{aligned} \widehat{E}(X_t | X_s = x_s) &= \frac{\Gamma(\hat{\alpha} + 3/2)}{\Gamma(\hat{\alpha} + 1)} \left( \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}^2(e^{2\hat{b}(t-s)} - 1)} \right)^{-1/2} \times \\ &\quad \Phi \left( -\frac{1}{2}, \hat{\alpha} + 1, \frac{-\hat{b}x_s^2}{\hat{\sigma}^2(1 - e^{-2\hat{b}(t-s)})} \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$



where  $\hat{\alpha} = \frac{\hat{a}}{\hat{\sigma}^2} - \frac{1}{2}$

## 7.4 Applications and simulation

### 7.4.1 Applications

The homogeneous SRDP model with the statistical methodology proposed above was used to study the evolution of various biometric-type variables in Spain, such as life expectancy at birth, infant mortality and the number of deaths caused by cancer. The present study considers, particularly, the evolution of the rate of infant mortality in Spain, the number of deaths in Andalusia caused by cancer and the evolution of the live expectancy at birth in Andalusia. . This latter region, which has a large degree of self-government and a population of seven and a half million, is of particular socio-demographic and biosanitary interest within Spain. The respective time-dependent stochastic variables (stochastic processes) are:

1.  $X(t)$ , the value of the rate of infant mortality per 1000 born with age less than a year, at time  $t$ , in Spain (female and male).
2.  $Y(t)$ , the gross interannual increase at time  $t$  of the total number of deaths caused by cancer, in Andalusia (Spain) .
3.  $X_1(t)$ , the value of the rate of infant mortality per 1000 born with age less than a year, at time  $t$ , in Spain (female).
4.  $X_2(t)$ , the value of the rate of infant mortality per 1000 born with age less than a year, at time  $t$ , in Spain (male).
5.  $Z_1(t)$ , the value of life expectancy at birth corresponding to year,  $t$  of birth (female).
6.  $Z_2(t)$ , the value of life expectancy at birth corresponding to year,  $t$  of birth (male).

For  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ , we took the time period of 1976-2000 to fit the corresponding SRDP models and the period 1944-1999 for  $Z_1(t)$  and  $Z_2(t)$  . The values observed were the rate of infant mortality in each natural year considered, the interannual increases measured at 31 December each year and the life expectancy at birth calculated for each year of birth. Table (7.1-7.6) show the sample values observed for six processes. Note that these values correspond to observations of the six stochastic processes in a time discretisation at equal-amplitude intervals of one year. In all cases, the source for the data was The INE (National Statistics Institute of Spain).

In applying the statistical methodology, the following steps were applied:

1. Take the values observed for the periods 1976-2000 for  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $X_1(t)$  and  $X_2(t)$  and 1944-1999 for  $Z_1(t)$  and  $Z_2(t)$  for the fits, reserving the values observed for 2001-2002 ( $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ ) and 2000-2001 ( $Z_1(t)$ ,  $Z_2(t)$ ) to compare these values with the corresponding ones forecasted by the adjusted models.
2. Calculate the estimators of the parameters of each SRDP model, using expressions (7.8) and (7.9) for the drift parameters and expression (7.10) for the respective coefficients of diffusion (volatilities). Expressions (7.8) and (7.9) are numerically approximated as described in this Thesis, section 7.3.1, using Mathematica 5.1. The parameters obtained are shown in Table (7.7).
3. After estimating the parameters, obtain the conditioned trend functions (CTF), using expression (7.11). The respective TF are obtained from expression (7.3), replacing the parameters by their corresponding estimators. Tables (7.1-7.6) show the values as adjusted by the ECTF for each of the examples discussed. Figures (7.1-7.6) show the observed and adjusted values by the conditioned trends of the SRDP models for each of the examples

Finally, the years 2001-2002 ( $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ ) and 2000-2001 ( $Z_1(t)$ ,  $Z_2(t)$ ), which were not used for the statistical fit, were compared with the predicted values by the respective ECTF for these years (Table 7.1-7.6).

Table 7.1: Observed values and Predicted values of  $X(t)$ 

<b>Years</b>	<b>X</b>	<b>ETF X</b>	<b>ECTF X</b>
1976	18.86	18.86	18.86
1977	17.11	17.385	17.385
1978	16.03	16.042	15.791
1979	15.25	14.821	14.809
1980	14.27	13.713	14.101
1981	12.34	12.708	13.211
1982	12.47	11.799	11.464
1983	11.29	10.979	11.582
1984	10.89	10.240	10.516
1985	9.87	9.577	10.156
1986	8.92	8.983	9.239
1987	9.20	8.454	8.389
1988	8.88	7.983	8.640
1989	8.05	7.567	8.354
1990	7.78	7.201	7.615
1991	7.60	6.879	7.376
1992	7.19	6.598	7.217
1993	7.05	6.354	6.855
1994	6.69	6.142	6.732
1995	6.05	5.959	6.416
1996	5.49	5.802	5.859
1997	5.54	5.667	5.377
1998	5.03	5.552	5.419
1999	4.86	5.454	4.985
2000	4.47	5.370	4.842
<b>Predicted values</b>			
2001	4.38	5.299	4.516
2002	4.08	5.239	4.442

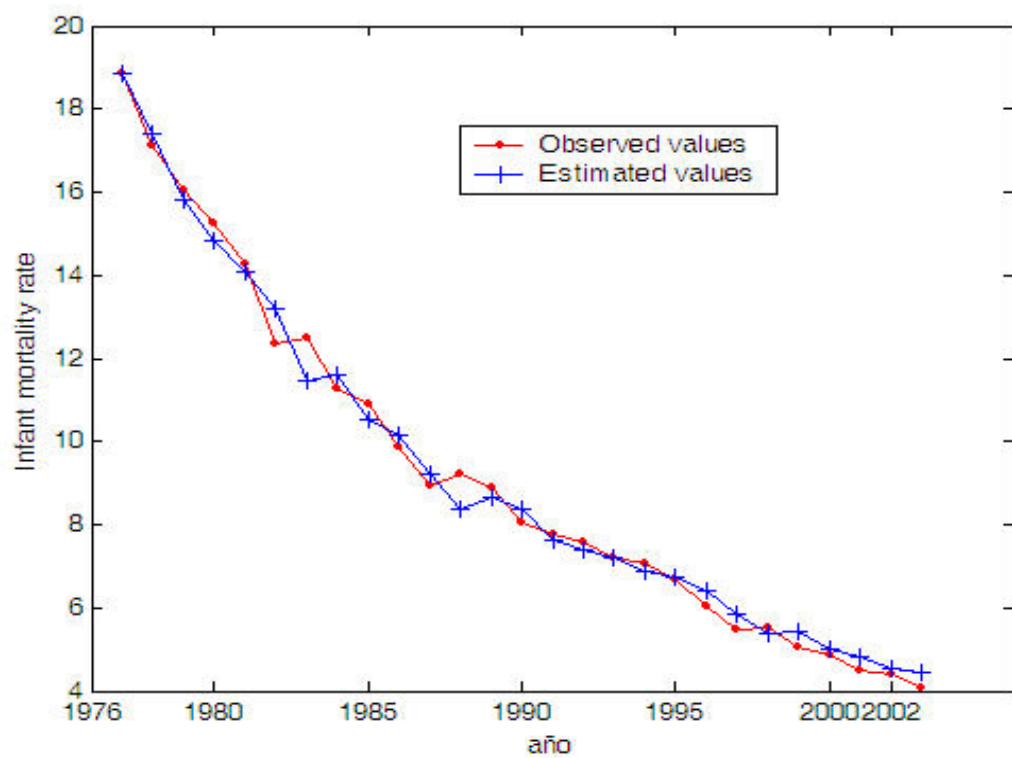


Figure 7.1: Fit and forecast of  $X(t)$ , using ECTF

Table 7.2: Observed values and Predicted values of  $Y(t)$ 

<b>Years</b>	<b>Y</b>	<b>ETF Y</b>	<b>ECTF Y</b>
1976	8303	8303	8303
1977	8569	8681	8681
1978	9151	9043	8935
1979	9128	9389	9492
1980	9494	9722	9470
1981	9746	10041	9821
1982	10033	10350	10064
1983	10380	10648	10340
1984	10708	10937	10676
1985	11000	11217	10993
1986	11358	11489	11276
1987	11665	11753	11624
1988	11785	12010	11923
1989	12027	12261	12039
1990	12350	12505	12275
1991	12552	12744	12590
1992	12756	12977	12787
1993	13313	13204	12987
1994	13520	13427	13531
1995	13872	13645	13734
1996	13848	13858	14079
1997	14195	14067	14055
1998	14399	14273	14396
1999	14639	14474	14596
2000	14727	14671	14831
Predicted values			
2001	15288	14865	14918
2002	15523	15055	15469

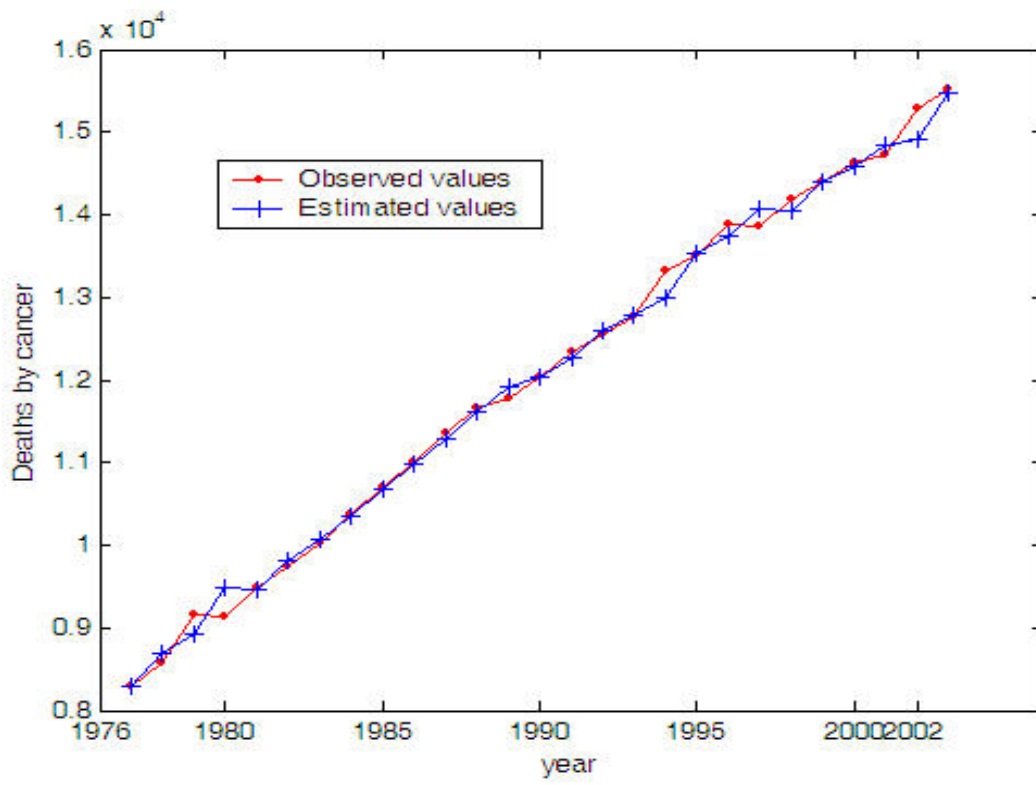


Figure 7.2: Fit and forecast of  $Y(t)$ , using ECTF

Table 7.3: Observed values and Predicted values of  $X_1(t)$ 

<b>Years</b>	$X_1$	<b>ETF</b> $X_1$	<b>ECTF</b> $X_1$
1975	16.76	16.76	16.76
1976	14.79	15.382	15.382
1977	14.02	14.137	13.602
1978	13.51	13.014	12.907
1979	12.55	12.002	12.447
1980	10.67	11.093	11.583
1981	10.86	10.277	9.896
1982	10.13	9.548	10.066
1983	9.82	8.899	9.413
1984	8.77	8.322	9.136
1985	7.82	7.813	8.202
1986	8.08	7.364	7.362
1987	7.57	6.970	7.591
1988	7.37	6.628	7.141
1989	6.96	6.330	6.966
1990	6.88	6.073	6.606
1991	6.44	5.852	6.537
1992	6.28	5.663	6.153
1993	5.95	5.501	6.015
1994	5.35	5.364	5.730
1995	5.09	5.248	5.216
1996	4.71	5.150	4.995
1997	4.51	5.068	4.676
1998	4.44	4.999	4.510
1999	4.12	4.941	4.452
2000	4.07	4.892	4.190
<b>Predicted values</b>			
2001	3.72	4.851	4.149
2002	3.68	4.817	3.868

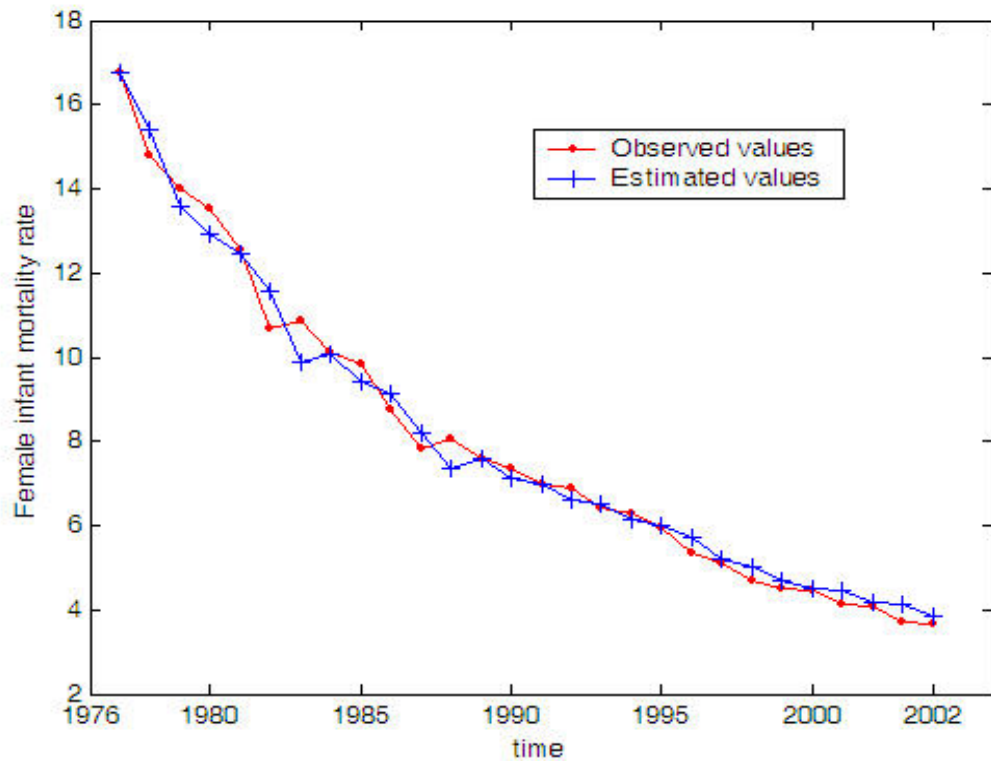


Figure 7.3: Fit and forecast of  $X_1(t)$ , using ECTF



Table 7.4: Observed values and Predicted values of  $X_2(t)$ 

<b>Years</b>	$X_2$	<b>ETF</b> $X_2$	<b>ECTF</b> $X_2$
1975	20.86	20.86	20.86
1976	19.29	19.266	19.266
1977	17.91	17.809	17.831
1978	16.87	16.479	16.570
1979	15.88	15.266	15.622
1980	13.89	14.162	14.719
1981	13.93	13.158	12.908
1982	12.35	12.246	12.945
1983	11.88	11.421	11.511
1984	10.88	10.675	11.085
1985	9.95	10.003	10.182
1986	10.25	9.399	9.344
1987	10.09	8.859	9.614
1988	8.68	8.377	9.470
1989	8.55	7.948	8.206
1990	8.27	7.569	8.090
1991	7.89	7.235	7.840
1992	7.78	6.942	7.502
1993	7.38	6.685	7.405
1994	6.7	6.462	7.050
1995	5.87	6.268	6.452
1996	6.32	6.100	5.730
1997	5.52	5.956	6.120
1998	5.24	5.832	5.428
1999	4.8	5.725	5.189
2000	4.66	5.634	4.817
<hr/> <hr/> Predicted values			
2001	4.42	5.556	4.700
2002	4.59	5.489	4.501

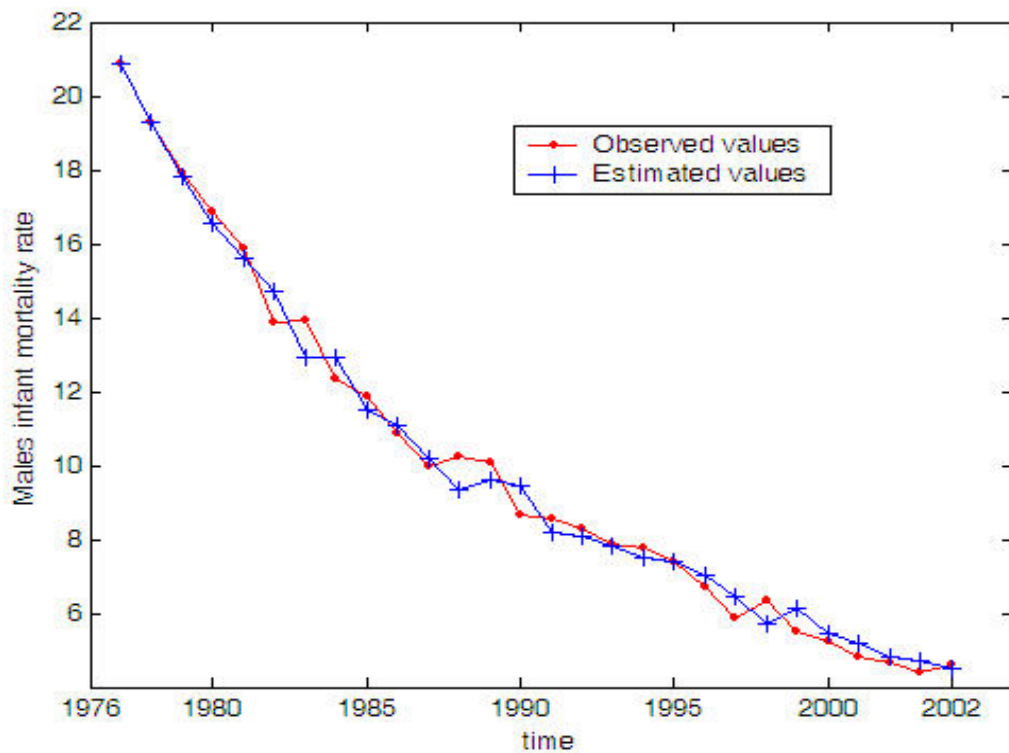


Figure 7.4: Fit and forecast of  $X_2(t)$ , using ECTF

Table 7.5: Observed values and Predicted values of  $Z_1(t)$ 

<b>Years</b>	$Z_1$	<b>ETF</b> $Z_1$	<b>ECTF</b> $Z_1$
1944	57.900	57.9000	57.9000
1945	58.618	59.0799	59.0799
1946	59.081	60.1923	59.7565
1947	60.243	61.2426	60.1932
1948	61.779	62.2355	61.2901
1949	62.430	63.1753	62.7425
1950	62.666	64.0656	63.3588
1951	64.229	64.9098	63.5823
1952	65.869	65.7111	65.0641
1953	67.594	66.4722	66.6214
1954	68.595	67.1957	68.2619
1955	69.004	67.8838	69.2149
1956	68.980	68.5387	69.6046
1957	69.581	69.1623	69.5817
1958	70.329	69.7564	70.1545
1959	71.432	70.3228	70.8678
1960	71.775	70.8629	71.9203
1961	72.002	71.3781	72.2477
1962	72.136	71.8699	72.4645
1963	72.546	72.3394	72.5925
1964	72.928	72.7879	72.9841
1965	73.317	73.2163	73.3491
1966	73.486	73.6257	73.7209
1967	73.690	74.0171	73.8824
1968	73.621	74.3913	74.0775
1969	73.839	74.7493	74.0115
1970	73.893	75.0917	74.2199
1971	74.454	75.4194	74.2716
1972	74.625	75.7329	74.8081
1973	74.947	76.0331	74.9717
1974	75.074	76.3205	75.2798
1975	75.535	76.5958	75.4013
1976	75.615	76.8594	75.8429
1977	76.454	77.1119	75.9190
1978	76.433	77.3538	76.7228
1979	77.048	77.5856	76.7026
1980	77.273	77.8077	77.2919
1981	77.595	78.0207	77.5073
1982	78.100	78.2248	77.8155
1983	78.080	78.4204	78.3001

Table 7.5: continuation

1984	78.632	78.6080	78.2804
1985	78.702	78.7879	78.8099
1986	78.824	78.9605	78.8771
1987	79.029	79.1259	78.9935
1988	79.058	79.2846	79.1904
1989	79.453	79.4368	79.2186
1990	79.424	79.5829	79.5977
1991	79.653	79.7230	79.5692
1992	80.136	79.8574	79.7892
1993	80.038	79.9865	80.2525
1994	80.461	80.1102	80.1583
1995	80.650	80.2290	80.5648
1996	80.724	80.3431	80.7459
1997	80.899	80.4525	80.8171
1998	80.976	80.5575	80.9854
1999	81.050	80.6584	81.0590
<hr/>			
Predicted values			
<hr/>			
2000	81.421	80.7552	81.1304
2001	81.710	80.8481	81.4860

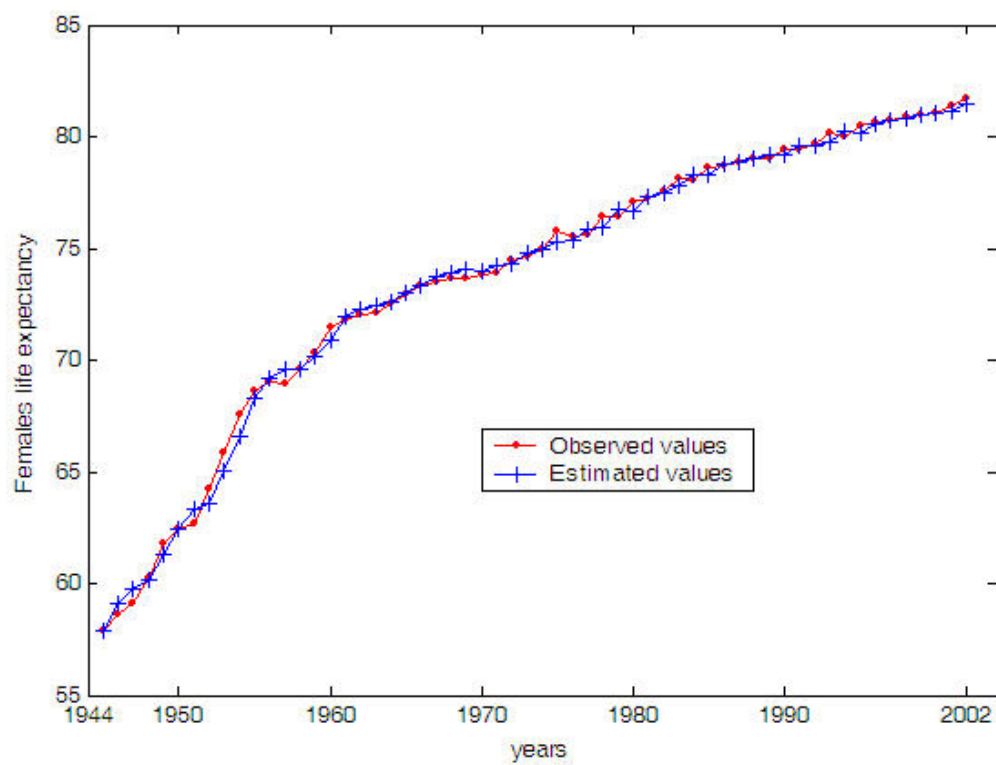
Figure 7.5: Fit and forecast of  $Z_1(t)$ , using ECTF

Table 7.6: Observed values and Predicted values of  $Z_2(t)$ 

<b>Years</b>	$Z_2$	<b>ETF</b> $Z_2$	<b>ECTF</b> $Z_2$
1944	51.609	51.6099	51.6100
1945	51.701	52.9232	52.9232
1946	52.472	54.1471	53.0079
1947	53.710	55.2902	53.7261
1948	55.904	56.3599	54.8812
1949	56.522	57.3623	56.9340
1950	56.860	58.3031	57.5134
1951	58.604	59.1872	57.8305
1952	60.428	60.0189	59.4690
1953	62.504	60.8022	61.1864
1954	63.517	61.5405	63.1455
1955	63.776	62.2371	64.1030
1956	63.753	62.8948	64.3480
1957	64.256	63.5161	64.3262
1958	65.014	64.1036	64.8021
1959	66.000	64.6594	65.5198
1960	66.326	65.1854	66.4540
1961	66.510	65.6835	66.7630
1962	66.676	66.1555	66.9375
1963	66.977	66.6028	67.0949
1964	67.389	67.0270	67.3805
1965	67.642	67.4294	67.7714
1966	67.671	67.8112	68.0115
1967	67.788	68.1736	68.0391
1968	67.635	68.5178	68.1501
1969	67.793	68.8446	68.0049
1970	67.773	69.1551	68.1549
1971	68.420	69.4502	68.1359
1972	68.681	69.7307	68.7503
1973	69.121	69.9973	68.9982
1974	69.341	70.2509	69.4163
1975	69.638	70.4920	69.6254
1976	69.720	70.7214	69.9079
1977	70.296	70.9396	69.9854
1978	70.286	71.1473	70.5336
1979	70.882	71.3450	70.5242
1980	71.499	71.5331	71.0909
1981	71.342	71.7122	71.6781
1982	71.891	71.8827	71.5291
1983	72.215	72.0451	72.0515

Table 7.6: continuation

1984	72.178	72.1998	72.3603
1985	72.210	72.3470	72.3248
1986	72.470	72.4873	72.3550
1987	72.681	72.6210	72.6029
1988	72.672	72.7483	72.8039
1989	72.583	72.8696	72.7953
1990	72.520	72.9852	72.7103
1991	72.587	73.0954	72.6503
1992	73.095	73.2004	72.7140
1993	73.199	73.3005	73.1985
1994	73.590	73.3958	73.2979
1995	73.547	73.4868	73.6704
1996	73.714	73.5734	73.6297
1997	74.310	73.6560	73.7887
1998	74.063	73.7348	74.3572
1999	74.175	73.8099	74.1212
<hr/> <hr/>			
Predicted values			
2000	74.846	73.8815	74.2287
2001	75.106	73.9498	74.8687

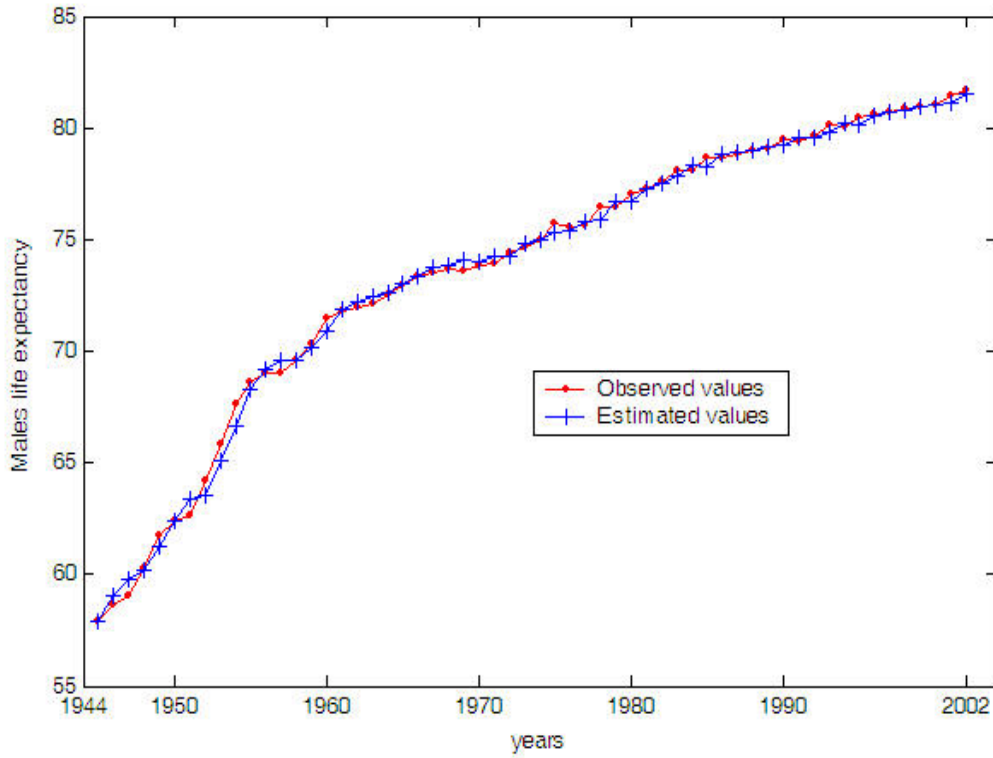


Figure 7.6: Fit and forecast of  $Z_2(t)$ , using ECTF

Table 7.7: Estimation of Parameters

Variable	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\sigma}^2$
X	1.94359	-0.08737	0.80347
Y	3.40099	-0.00257	0.30208
$X_1$	1.87161	-0.0930	0.73354
$X_2$	2.00627	-0.08448	0.88939
$Z_1$	136.83102	-0.01982	0.60859
$Z_2$	132.35918	-0.02332	0.67293



### 7.4.2 Simulation

For the simulation of the sample paths, we have used the procedure proposed by Rao, Borwankar, and Ramkrishma (1974), see also, for example, (Kloeden and Platen 1992). The derivation of this algorithm involves approximate discretization of the Itô integral equation in time intervals of length  $h$ .

In the case of the Rayleigh diffusion process, the algorithm becomes

$$x_{n+1} = x_n + h \left( \frac{a}{x_n} + bx_n \right) + \sigma Z_{1n} + \frac{h^2}{2} \left( b^2 x_n - \frac{a^2}{x_n^3} \right) + \left( b - \frac{a}{x_n^2} \right) \sigma Z_{2n} + \frac{a\sigma^2}{x_n^3} (Z_{1n}Z_{2n} - Z_{3n});$$

$$X_0 = x_{t_0}$$

where  $Z_{1n} \rightsquigarrow N[0, h]$ ,  $Z_{2n} \rightsquigarrow N[0, \frac{h^3}{3}]$ ,  $E[Z_{1n}Z_{2n}] = \frac{h^2}{2}$  and  $Z_{3n}$  is not normal, but for small values of  $h$ , one can approximate it by a normal variable with zero mean and variance  $\frac{h^4}{12}$  verifying  $E[Z_{1n}Z_{3n}] = E[Z_{2n}Z_{3n}] = 0$ .

The simulation was carried out by taking values of  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma^2$  and  $x_0$  that were close to the values estimated for these parameters in two real-life applications, concretely the  $X_1(t)$  and  $X_2(t)$  above considered. In each case we generated 100 paths with 101 values each, and considered the time instants  $t_i = (i - 1)h$ ,  $i = 1, \dots, 101$ . Figures (7.7) and (7.8) show, for the particular cases of  $a=1.9$ ,  $b=-0.09$ ,  $\sigma^2=0.74$ ,  $h=0.1$  and  $x_0 = 21$ , and of  $a=2$ ,  $b=-0.08$ ,  $\sigma^2=0.89$ ,  $h=0.1$  and  $x_0 = 17$ , which correspond respectively to values close to those obtained in the study of  $X_1(t)$  and  $X_2(t)$ , ten of the simulated paths, together with the theoretical trend function for the values of these parameters. The figures (7.7 and 7.8) show the simulated paths of the Rayleigh process, with the dark line representing the trend.

### 7.4.3 Conclusion and discussion

The main conclusion of this study is that the homogeneous Rayleigh model, under the proposed statistical methodology, provides an accurate fit for the rate of infant mortality, the number of deaths caused by cancer and de life expectancy at birth. Furthermore, the model enables us to accurately predict, in the medium term, the behaviour of the six dynamic variables considered.

Additionally, the SRDP model considered is found to be versatile in that it is capable of modelling cases with either a decreasing or an increasing trend, which is the case for example, respectively, of the rate of infant mortality and the life expectancy at birth.

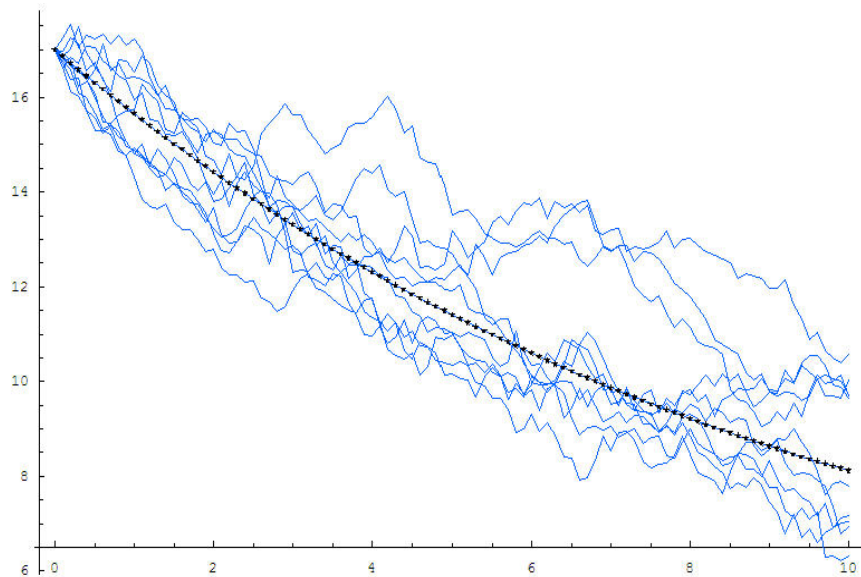


Figure 7.7: A simulation of the trajectory of SRDP

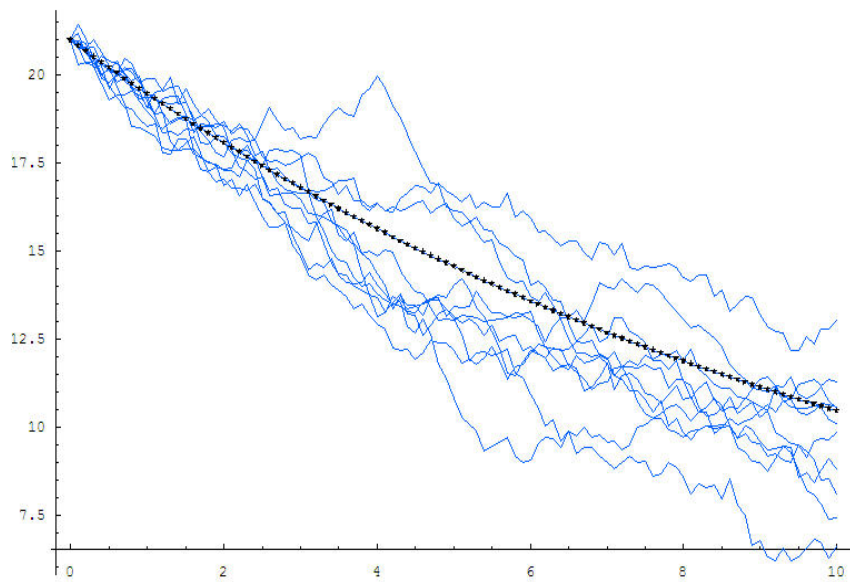


Figure 7.8: A simulation of the trajectory of SRDP

An alternative approach was to fit the six cases described in this Thesis using other diffusion models, such as those based on lognormal or on Gompertz homogeneous stochastic diffusions (see for example Gutiérrez, Román, and Torres (1995), Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi (2004)). For this purpose, a statistical-fit methodology was applied, but in all cases the fits achieved were unsatisfactory. On the other hand, the SRDP model was found to be ideal for interpreting the internal dynamic of the evolution of the six variables considered, by means of the estimated Itô stochastic equation (7.1).

As a possible area for future research, a study could be made of a non-homogeneous version of the SRDP model, defined by introducing time-dependent exogenous variables into the trend function, analogously to the work carried out on lognormal and Gompertz diffusions (see, for example, Gutiérrez et al. (1997), Gutiérrez, González, and Torres (1997), Gutiérrez, Román, and Torres (1999), Gutiérrez, Román, and Torres (2001), Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez, and Nafidi (2004) and Gutiérrez et al. (2005a)). This would enable us to study, for example, the effect of certain preventive health policies on the behaviour of the endogenous variables considered. In the particular case of the rate of infant mortality, it is likely that there will be a “rebound” in the next few years as a result of the influence of an exogenous variable related to immigration, which is currently increasing at a fast rate in Spain. Thus, the SRDP process described in Thesis, with its associated statistical methodology, is technically ready for the construction of the above-mentioned non-homogeneous version.

The Rayleigh model, in this Thesis, was applied for example, to the study of a group of deaths caused by all forms of cancer. If it could be refined to examine those deaths caused by certain specific types of cancer, it would be very interesting to use the model to analyse the influence of biosanitary policies for disease prevention on the evolution of the mortality of such cancer types, by using the aboved mentioned Rayleigh model with exogeneous factors.



# Apéndice A

## Anexos

### A.1. Estudio del cambio de variable

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1; \\z_2 &= (t_2 - t_1)^{-1/2}(\lg x_2 - \lg x_1); \\&\vdots \\z_\alpha &= (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2}(\lg x_\alpha - \lg x_{\alpha-1}); \\&\vdots \\z_n &= (t_n - t_{n-1})^{-1/2}(\lg x_n - \lg x_{n-1});\end{aligned}$$

Destacamos que todas estas igualdades son entre vectores y se han de entender componente a componente, es decir, que:

$$z_{\alpha;i} = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2}(\lg x_{\alpha;i} - \lg x_{\alpha-1;i}); \quad i = 1, \dots, k$$

Veamos a continuación el cálculo del jacobiano de la transformación inversa.

1. Sea el cambio inverso:

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1; \\x_2 &= z_1 \exp[(t_2 - t_1)^{1/2} z_2]; \\x_3 &= z_1 \exp[(t_2 - t_1)^{1/2} z_2 + (t_3 - t_2)^{1/2} z_3]; \\&\vdots \\x_\alpha &= z_1 \exp[(t_2 - t_1)^{1/2} z_2 + (t_3 - t_2)^{1/2} z_3 + \dots + (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{1/2} z_\alpha]; \\&\vdots\end{aligned}$$

Es decir;

$$x_\alpha = z_1 \exp\left[\sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_j\right].$$

Volvemos a destacar que estas expresiones se han de entender componente a componente. Es decir:

$$x_{\alpha,i} = z_{1,i} \exp\left[\sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_{j,i}\right]; \quad i = 1, \dots, k.$$

2. La matriz jacobiana del cambio inverso anterior es:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ J_{n1} & J_{n2} & J_{n3} & \cdots & J_{nn} \end{pmatrix}$$

en donde  $J_{\alpha j}$ ; con  $\alpha = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, k$ , es la matriz de las derivadas de  $x_\alpha$  respecto de  $z_j$ , con  $\alpha \geq j$ . Como quiera que  $x_\alpha$  sólo depende de  $z_1, \dots, z_\alpha$ , la matriz J es triangular inferior (ya que los  $J_{\alpha,j}$  con  $j = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots$  son nulos). Por tanto el jacobiano de J será:

$$Jac(J) = \prod_{\alpha=1}^n Jac(J_{\alpha,\alpha}).$$

3. Calculamos un  $J_{\alpha,\alpha}$  cualquiera:

$$J_{11} = I_k.$$

En general, calculamos  $J_{\alpha,\alpha}$  interpretando por "componentes" la relación

$$x_\alpha = z_1 \exp\left[\sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_j\right]$$

es decir con:

$$x_{\alpha,i} = z_{1,i} \exp\left[\sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_{j,i}\right]; \quad i = 1, \dots, k.$$

Hay que derivar  $x_{\alpha,i}$  respecto de  $z_\alpha = (z_{\alpha,1}, z_{\alpha,2}, \dots, z_{\alpha,k})$ . Por lo tanto, para cada  $\alpha$ , con un  $\alpha$  fijo, será:

$$\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial z_{\alpha p}} = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{1/2} z_{1i} \exp\left[\sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_{ji}\right] \delta_{ip}$$

con  $i = 1, \dots, k$ ;  $p = 1, \dots, k$ . Por lo tanto, ( $i=p$ ;  $\delta_{ip}=1$ )

$$J_{\alpha\alpha} = \text{diag} \left[ (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{1/2} z_{1,i} \exp \left[ \sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_{ji} \right] \right]$$

de donde

$$|J_{\alpha,\alpha}| = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{k/2} \prod_{i=1}^k z_{1i} \exp \left[ \sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_{ji} \right].$$

Y el jacobiano final será:

$$\begin{aligned} \text{Jac}(J) &= \prod_{\alpha=1}^n |J_{\alpha,\alpha}| = \prod_{\alpha=2}^n |J_{\alpha,\alpha}| = \\ &= \prod_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{k/2} \prod_{i=1}^k z_{1i} \exp \left[ \sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_{ji} \right]. \end{aligned}$$

El cambio de variable considerado es aplicado a la expresión obtenida de la función de verosimilitud, resultando:

$$\begin{aligned} L(z_1, \dots, z_n/B, A) &= (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{(n-1)}{2}} \prod_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-k/2} \left( \prod_{i=1}^k z_{1i} \right)^{-1} \times \\ &\exp \left[ - \sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_{ji} \right] \exp \left[ \frac{-1}{2} \left( \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - Bv_\alpha) \right) \right] \times \\ &\prod_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{k/2} \prod_{i=1}^k z_{1i} \exp \left[ \sum_{j=2}^{\alpha} (t_j - t_{j-1})^{1/2} z_{ji} \right] = \\ &= (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |A|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp \left[ \frac{-1}{2} \left( \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - Bv_\alpha) \right) \right] \end{aligned}$$

sin más que considerar el teorema del cambio de variable aleatoria y considerar el jacobiano de la transformación inversa antes calculado.

## A.2. Operaciones matriciales

**Teorema:** Si F y G son dos funciones matriciales, A una matriz de constantes y  $\alpha$  un escalar, entonces

1. Si  $F(X) = A_{m \times p}$ ,  $F$  es diferenciable y

$$dF(X) = 0.$$

2. Dado  $G_{m \times p}$  diferenciable y  $\alpha$  un escalar distinto de cero, si  $F(X) = \alpha G(X)$ ,  $F$  es diferenciable y

$$dF(X) = \alpha dG(X).$$

3. Dado  $g_{m \times p}$  diferenciable, si  $F(X) = \text{Vec}(G(X))$ ,  $F$  es diferenciable y

$$dF(X) = \text{Vec}(dG(X)).$$

4. Dado  $G_{m \times p}$  diferenciable, si  $F(X) = G'(X)$ ,  $F$  es diferenciable y

$$dF(X) = (dG(X))'.$$

5. Dado  $G_{p \times p}$  diferenciable, si  $F(X) = \text{tr}[G(X)]$ ,  $F$  es diferenciable y

$$dF(X) = \text{tr}[dG(X)].$$

6. Dados  $G_{m \times p}$  y  $H_{m \times p}$  diferenciables, si  $F(X) = (G \pm H)(X)$ ,  $F$  es diferenciable y

$$dF(X) = dG(X) \pm dH(X).$$

7. Dados  $G_{m \times r}$  y  $H_{r \times p}$  diferenciables, si  $F(X) = (GH)(X)$ ,  $F$  es diferenciable y

$$dF(X) = dG(X)H(X) + G(X)dH(X).$$

8. Dado  $G_{m \times m}$  diferenciable, si  $F(X) = (G(X))^{-1}$ ,  $F$  es diferenciable y

$$dF(X) = -F(X)dG(X)F(X).$$

9. Dado  $G_{p \times p}$  diferenciable y  $F(X) = (|G|)(X)$ ,  $F$  es diferenciable y

$$dF(X) = G(X)\text{tr}[G^{-1}(X)dG(X)].$$

10. Dado  $G_{p \times p}$  diferenciable y  $F(X) = \log(G(X))$ ,  $F$  es diferenciable y

$$dF(X) = \text{tr}[G^{-1}(X)dG(X)].$$



## Producto de Kronecker

Sean  $A_{m \times n}$  y  $B_{p \times q}$  dos matrices. Se define el producto de Kronecker como la matriz de dimensión  $mp \times nq$  siguiente:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} (a_{ij}B)_{ij}; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

### Propiedades interesantes:

1. Dadas  $A_{m \times n}$ ,  $B_{p \times q}$  y  $C_{r \times s}$ , entonces

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

2. Dadas  $A_{m \times n}$ ,  $B_{n \times p}$ ,  $C_{q \times r}$ , y  $D_{r \times s}$ , entonces

$$(A \otimes C)(B \otimes D) = AB \otimes CD.$$

3. Si  $A_{m \times m}$  y  $B_{n \times n}$ , entonces

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

4. Dadas  $A_{m \times n}$  y  $B_{p \times q}$ , entonces

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'.$$

5. Si  $A_{m \times m}$  y  $B_{n \times n}$  son ortogonales,  $A \otimes B$  es ortogonal.

6. Si  $A_{m \times m}$  y  $B_{n \times n}$  son definidas positivas,  $A \otimes B$  es definida positiva.

7. Dadas  $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$  y  $B_{p \times q}$ , entonces

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix}.$$

8. Dadas  $A_{m \times m}$  y  $B_{n \times n}$ , entonces

$$\text{tr}[A \otimes B] = \text{tr}[A]\text{tr}[B].$$

9. Dadas  $A_{m \times m}$  y  $B_{n \times n}$ , entonces

$$|A \otimes B| = |A|^n |B|^m.$$

## Operación Vec

Sea  $X$  una matriz de orden  $n \times q$ . Se define  $\text{Vec}(X)$  como el vector de dimensión  $nq \times 1$  resultante de apilar las columnas de  $X$ .

### Propiedades interesantes

1. Sea  $a_{n \times 1}$  y  $b_{q \times 1}$  dos vectores; entonces

$$\text{Vec}(ab') = b \otimes a.$$

2. Sean  $A_{n \times q}$ ,  $B_{q \times p}$  y  $C_{p \times r}$ , tres matrices cualesquiera, entonces

$$\text{Vec}(ABC) = (C' \otimes A)\text{Vec}(B).$$

3. Sea  $A_{n \times q}$  y  $B_{q \times n}$ , entonces,

$$\text{tr}[AB] = \text{Vec}'(A')\text{Vec}(B) = \text{Vec}'(B')\text{Vec}(A).$$

## Matriz permutación

Dada una matriz  $M$  de orden  $m \times n$ , se define la matriz vec-permutación notada como  $I_{(n,m)}$  como la matriz que trasforma el  $\text{vec}(M)$  en  $\text{vec}(M')$ , de manera que:

$$\text{vec}(M') = I_{(n,m)}\text{vec}(M)$$

$I_{(n,m)}$  es cuadrada de orden  $mn$  y ortogonal.

### Propiedades interesantes:

Sean  $M$  y  $N$  matrices de dimensiones  $m \times n$  y  $p \times q$  y  $b$  vector  $p$ -dimensional, se cumple:

1.  $I_{(n,m)} = I'_{(n,m)} = I_{(n,m)}^{-1}$ .
2.  $I_{(m,n)}(M \otimes N) = (N \otimes M)I_{(n,p)}$ .
3.  $I_{(m,p)}(M \otimes b) = b \otimes M$ .
4.  $\text{vec}(M \otimes N) = (I_n \otimes I_{(m,q)} \otimes I_p) (\text{vec}(M) \otimes \text{vec}(N))$ .

## Matriz duplicación

**Definición 1:** Sea  $M$  una matriz cuadrada de orden  $m$ . El vector  $\text{vech}(M)$  de dimensión  $\frac{1}{2}m(m+1)$  es obtenido a partir del vector  $\text{vec}(M)$  eliminado los elementos de la diagonal superior de  $M$ .

**definición 2:** Sea  $N$  una matriz simétrica de orden  $n$ . Se define la matriz duplicación  $D_n$  como aquella matriz de orden  $n^2 \times \frac{1}{2}n(n+1)$  que transforme  $\text{vech}(N)$  en  $\text{vec}(N)$ :

$$\text{vec}(N) = D_n \text{vech}(N).$$

La matriz  $D_n$  tiene rango completo  $\frac{1}{2}n(n+1)$  y por tanto su inversa generalizada de Moore-Penrose es:

$$D_n^+ = (D_n' D_n)^{-1} D_n'.$$

### Propiedades interesantes:

Sea  $N$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Entonces:

1.  $\text{vech}(N) = D_n^+ \text{vec}(N)$  si  $N=N'$ .
2.  $D_n D_n^+ (N \otimes N) D_n = (N \otimes N) D_n$ .
3.  $D_n D_n^+ (N \otimes N) (D_n)' = (N \otimes N) (D_n)'$ .

Si  $N$  es no singular:

1.  $(D_n^+ (N \otimes N) (D_n)^{-1})^{-1} = D_n^+ (N \otimes N) D_n$ .
2.  $(D_n' (N \otimes N) (D_n)^{-1})^{-1} = D_n^+ (N \otimes N) (D_n^+)'$ .
3.  $|D_n^+ (N^{-1} \otimes N^{-1}) (D_n^+)'| = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} |N|^{n-1}$ .

## A.3. Notas sobre la normal matricial

Sea  $X_{m \times n} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{m \times n}[M; C \otimes D]$  con  $C_{m \times m}$  y  $D_{n \times n}$  definidas positivas y  $M_{m \times n}$ .

Sabemos que entonces  $\text{Vec}(X') \rightsquigarrow \mathcal{N}_{mn}[\text{vec}(M'); C \otimes D]$ . Su densidad se escribe de la forma:

$$f(X) = (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} |C|^{-\frac{n}{2}} |D|^{-\frac{m}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} [C^{-1} (X - M) D^{-1} (X - M)'] \right\}$$

Sean  $t_1; t_2 \dots; t_m$  vectores con  $t_i \in \mathbb{R}^n$ , sea  $T = [t_1, t_2; \dots; t_m]_{n \times m}$  y sea  $t = \text{vec}(T) \in \mathbb{R}^{mn}$ . Entonces la función generatriz de momentos es:

$$M_{\text{vec}(X')}(t) = E[\exp\{t' \text{vec}(X')\}] = \exp\{t' \text{vec}(m') + \frac{1}{2} t'(C \otimes D)t\}$$

con:

1.  $E[\exp\{t' \text{vec}(X')\}] = E[\exp\{\text{vec}'(X')t\}] = E[\exp\{\text{vec}'(X')\text{vec}(t)\}] = E[\exp\{\text{tr}[TZ]\}]$ .
2.  $t' \text{vec}(M') = \text{vec}'(M')t = \text{vec}'(M')\text{vec}(T) = \text{tr}[TM]$ .
3.  $t'(C \otimes D)t = \text{vec}'(T)(C \otimes D)\text{vec}(T) = \text{vec}'(T)\text{vec}(DTC) = \text{tr}[DTCT']$ .

con lo que

$$M_X(T) = E[\exp\{\text{tr}[TX]\}] = \exp\{\text{tr}[TM] + \frac{1}{2} \text{tr}[DTCT']\} \text{ con } T \in M_{n \times m}.$$

# Bibliografía

- Black, F., and M. Scholes. 1973. “The pricing of options and corporate liabilities.” *Political Econom* 81:637–659.
- Capocelli, R.M., and L.M. Ricciardi. 1971. “Diffusion approximation and first passage time problem for a model neuron.” *Kybernetik* 6:214–223.
- . 1973. “A continuous Markovian model for neuronal activity.” *Journal of Theoretical Biology* 40:369–387.
- . 1974a. “A diffusion model for population growth in random environment.” *Theoretical Population Biology* 5:28–41.
- . 1974b. “Growth with regulation in random environment.” *Kybernetik* 15:147–157.
- . 1975. “A note on growth proceses in random environment.” *Biol. Cybernetics* 18:105–109.
- Chesney, M., and J. Elliot. 1995. “Estimating the instantaneous volatility and covariance of risky assets.” *Applied Stochastic Models and Data Analysis* 11:51–58.
- Clifford, P., and G. Wei. 1993. “The equivalence of the Cox process with squared radial Ornstein-Uhlembeck intensity and the death process in a simple population model.” *Annals of Applied Probability* 3(3):863–873.
- Cox, D.R. 1955. “Some statistical methods connected with series of events (with discussion).” *J. Roy. Statist. Soc. Ser B* 27:129–164.
- Cox, J. 1996. “Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions.” *Stanford University (1955). Reprinted in Journal of Portfolio Management* 22:15–17.
- Cox, J., and S. Ross. 1976. “The valuation of options for alternative stochastic processes.” *J. Financial Econom* 3:145–166.
- Davidov, D., and V. Linetsky. 2001. “Pricing and hedging path-dependent options under CEV processes.” *Management Sciences* 47(7):949–965.
- Di Crescenzo, A. 1992. “On the construction of transition densities for multidimensional diffusion processes.” Edited by Robert Trappl, *Cybernetics*

- and Systems Research'92*. Austrian Society for Cybernetics Studies, 853–859.
- Ferrante, L., S. Bompade, L. Possati, and L. Leone. 2000. “Parameter estimation in a Gompertzian stochastic-model for tumor growth.” *Biometrics* 56:1076–1081.
- Frank, T.D. 2002. “Multivariate Markov processes for stochastic systems with delays: Application to the stochastic Gompertz model with delays.” *Physical Review E* 66:1–8.
- Franses, P.H. 2002. “Testing for residual autocorrelation in growth curve models.” *Technol Forecast Soc Chang* 69:195–204.
- Gardiner, C.W. 1990. *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and natural sciences, 2nd edition*. Berlin, Germany: Springer Verlag.
- Giorno, V., A.G. Nobile, L.M. Ricciardi, and L. Sacerdote. 1986. “Some remarks on the Rayleigh process.” *Journal of Applied Probability* 23:398–408.
- Giovanis, A.N., and C.H. Skiadas. 1999. “A stochastic logistic innovaton diffusion model studying the electricity consumption in Greece and the United States.” *Technol Forecast Soc Change* 61:253–264.
- Gradshteyn, L.S, and I.M. Ryzhik. 1979. *Table of integrals, series and products*. Academic Press.
- Greenman, J.V. 1996. “The car park: Diffusion models revisited.” *Energy Economics* 18:107–128398–408.
- Guerra, M.L, and L. Stefanini. 2000. “A comparative simulation study for estimating diffusion coefficient.” *Mathematical and Computers in Simulation* 53:193–203.
- Gutiérrez, R., J.M. Angulo, A. González, and R. Pérez. 1991. “Inference in lognormal multidimensional diffusion processes with exogenous factors: application to modelling in economics.” *Applied Stochastic Models and Data Analysis* 7:295–316.
- Gutiérrez, R., and A. González. 1991. *Estadística Multivariante. Volumen I: Introducción al Análisis Multivariante*. Spain: Universidad de Granada.
- Gutiérrez, R., A. González, and F. Torres. 1992. “Statistical inference about multidimensional lognormal diffusion process with multivariate exogenous factors and applications.” Edited by Robert Trappl, *Cybernetics and Systems Research'92*. Austrian Society for Cybernetics Studies, 845–852.
- . 1997. “Estimation in multivariate lognormal diffusion process with exogenous factors.” *Applied Statistics* 4(1):140–146.

- Gutiérrez, R., and R. Gutiérrez-Sánchez. 2003. “Modelo de difusión lognormal multivariante con vector de factores exógenos.” *Proceedings of the 27<sup>o</sup> Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. SEIO, Lerida.
- Gutiérrez, R., R. Gutiérrez-Sánchez, and A. Nafidi. 2003a. “Inference in the stochastic Gompertz diffusion model with continuous sampling.” Edited by Universidad de Zaragoza, *Proceedings of the VIII Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada y Estadística*. Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano.
- . 2003b. “Maximum likelihood estimation in multivariate lognormal diffusion process with a vector of exogenous factors.” Edited by Universidad de Zaragoza, *Proceedings of the VIII Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada y Estadística*. Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano.
- . 2004. “Stochastic Gompertz diffusion model: Statistical inference and applications.” *Proceedings of the 17th symposium on E.M.C.S.R.* Austrian Society for Cybernetic Studies, Vienna, 146–150.
- . 2005a. “Electricity consumption in Morocco: Stochastic Gompertz exogenous factors diffusion analysis.” *Appl Energy*, In Press.
- . 2005b. “Forecasting total natural-gas consumption in Spain by using the stochastic Gompertz innovation diffusion model.” *Appl Energy* 80(2):115–124.
- Gutiérrez, R., R. Gutiérrez-Sánchez, A. Nafidi, P. Román, and F. Torres. 2005a. “Inference in Gompertz type non homogeneous stochastic systems by means of discrete sampling.” *Cybernetics and Systems* 36:203–216.
- Gutiérrez, R., R. Gutiérrez-Sánchez, E. Ramos, P. Román, and F. Torres. 2003a. “Modelo de difusión lognormal para la descripción y predicción del precio de la vivienda.” *Proceedings of the 27<sup>o</sup> Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. SEIO, Lerida.
- Gutiérrez, R., A. Juan, and P. Román. 1991. “Construction of first-passage-time densities for a diffusion process which is not necessarily time-homogeneous.” *Journal of Applied Probability* 28(4):903–909.
- Gutiérrez, R., L. M. Ricciardi, P. Román, and F. Torres. 1997. “First passage-time densities for time-non-homogeneous diffusion processes.” *Journal of Applied Probability* 34(3):623–631.
- Gutiérrez, R., C. Roldán, R. Gutiérrez-Sánchez, and J.M. Angulo. 2005b. “Estimation and prediction of a 2D lognormal diffusion random field.” *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, vol. In Press.
- Gutiérrez, R., P. Román, D. Romero, and F. Torres. 2003b. “Application of the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors in forecasting.” *Cybernetics and Systems* 34(8):709–724.

- Gutiérrez, R., P. Román, and F. Torres. 1995. "A note on the Volterra integral equation for the first-passage-time density." *Journal of Applied Probability* 53(3):635–648.
- . 1999. "Inference and first-passage-time for the lognormal diffusion process with exogenous factors: Application to modelling in economics." *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 15(4):325–332.
- . 2001. "Inference on some parametric functions in the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors." *Test* 10(2):357–373.
- Katsamaki, A., and C.H. Skiadas. 1995. "Analytic solution and estimation of parameters on a stochastic exponential model for a technological diffusion process application." *Appl. Stoch. Model. D. A.* 11:59–75.
- Kayser, H.A. 2000. "Gasoline demand and car choice: estimating gasoline demand using household information." *Energy Economics* 22:331–348.
- Kloeden, P., and E. Platen. 1992. *The numerical solution of stochastic differential equations*. Berlin, Germany: Springer.
- Kloeden, P., E. Platen, H. Schurz, and M. Sorensen. 1996. "On effects of discretization on estimators of drift parameters for diffusion processes." *Journal of Applied Probability* 33:1061–1071.
- Magnus, J.R., and H. Neudecker. 1988. *Matrix differential calculus with applications in statistics and economics*. New York, USA: Wiley.
- Merton, R.C. 1973. "Theory of rational options pricing." *Bell J. Econom. Management Sci.* 4:141–183.
- Muirhead, R. J. 1982. *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. New York: John Wiley.
- Nafidi, A. 1997. "Difusiones lognormales con factores exógenos en tendencia y coeficiente de difusión." Ph.D. diss., Universidad de Granada.
- Prakasa Rao, B.S.L. 1999. *Statistical inference for diffusion type process*. Ed. Arnold.
- Rao, N.J., J.D. Borwankar, and D. Ramkrishma. 1974. "Numerical solution of Itô Integral Equations." *SIAM J. Control* 12(1):124–139.
- Rayleigh, L. 1902. *Phil. Mag.* 32 (Scientific Papers III): 473.
- Ricciardi, L.M. 1977. *Diffusion processes and related topics in biology*. Berlin, Germany: Lecture Notes in Biomathematics, Springer Verlag.
- Sepanier, J., and K.B. Oldham. 1977. *An Atlas of functions*. Berlin, Germany: Springer Verlag.
- Skiadas, C.H., and A.N. Giovani. 1997. "A stochastic Bass innovation diffusion model for studying the growth of electricity consumption in Greece." *Appl. Stoch. Models Data Annal.* 13:85–101.



- Srivastava, M.S., and C.G. Khatri. 1979. *An introduction to Multivariate Analysis*. Amsterdam: North-Holland Publ.
- Tan, W.Y. 1986. “A stochastic Gompertz birth-death process.” *Statistical and Probability Letters* 4:25–28.
- Torres, F. 1993. “Aportaciones al estudio de difusiones estocásticas no homogéneas.” Ph.D. diss., Universidad de Granada.
- Troynikov, V.S., and H.K. Gorfine. 1998. “Alternative approach for establishing legal minimum lengths for abalone based on stochastic growth models for length increment data.” *Journal of Shellfish Research* 17:827–831.