Para definir otra de las operaciones entre numeros cardinales, Cantor desarrolló una nueva noción, la de cobertura de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Una cobertura del conjunto N con los elementos del conjunto M es formalmente una función que asigna a cada elemento n de N uno de M. No es necesario, sin embargo, que a cada m de M le corresponda un solo elemento de N, aunque la conversa ha de darse. Dos funciones de cobertura o, brevemente, dos coberturas son idénticas cuando asignan a cada individuo de un conjunto el mismo individuo del otro. Veamos algunos ejemplos de coberturas de N con M:

Sea $M = \{a, b, c\}$ y $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

una cobertura, f_1, podría ser

$$f_1(1) = a;\ f_1(2) = b;\ f_1(3) = a;\ f_1(4) = b;\ f_1(5) = c.$$

Tendríamos así el conjunto de pares ordenados definidos por f_1:

$$f_1 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 4, b\rangle, \langle 5, c\rangle\}.$$

Otra cobertura distinta, f_2, podría ser:

$$f_2(x) = a, \quad \text{si } x = 2 \text{ ó } x = 4$$
$$f_2(x) = b, \quad \text{si } x = 1 \text{ ó } x = 3$$
$$f_2(x) = c, \quad \text{si } x = 5$$

Otra diferente, f_3, podría ser:

$$f_3(x) = a, \quad \text{si } x = 5$$
$$f_3(x) = b, \quad \text{si } x = 1 \text{ ó } x = 3$$
$$f_3(x) = c, \quad \text{si } x = 2 \text{ ó } x = 4$$

El conjunto de coberturas posibles de N con M, que Cantor simboliza por "$(N|M)$", tiene mas elementos que el conjunto N. Si M tiene a elementos y N tiene b elementos, siendo

a y **b** cardinales cualesquiera, la unión de todas las coberturas de N con M define la operación a^b. Así

$$a^b = \overline{\overline{(N|M)}}.$$

Sean M, N, P conjuntos y **a**, **b**, **c** los números cardinales que les corresponden respectivamente, de las definiciones anteriores se siguen las siguientes afirmaciones

$$((N|M).(P|M)) \simeq ((N,P)|M)$$

y por tanto

$$a^b.\ a^c = a^{b+c}.$$

$$((P|M).\ (P|N)) \simeq (P|(M.N))$$

y así

$$a^c.\ b^c = (a.\ b)^c.$$

$$(P|(N|M)) \simeq ((P.N)|M)$$

luego

$$(a^b)^c = a^{b.c}.$$ [109] [110]

3.2 <u>Definición de los cardinales finitos</u>[111]

Sea e_0 un objeto cualquiera. Si e_0 se subsume bajo un concepto de manera que nada mas caiga bajo él, tenemos que al conjunto E_0 de los objetos que caen bajo el concepto le corresponde un número cardinal al que Cantor llama "uno" y simboliza por "1". Así,

$$1 = \overline{\overline{E_0}}.$$

Si se añade ahora un objeto cualquiera, e_1, distinto de e_0, al conjunto E_0, el conjunto resultante, $E_1 = (E_0, e_1)$[112], tendrá a su vez un número cardinal, distinto del de E_0 dado que

(E_0, e_1) y E_0 no son equivalentes, y al que Cantor llama "dos", en símbolos "2":

$$2 = \overline{\overline{(E_0, e_1)}} = \overline{\overline{(e_0, e_1)}} = \overline{\overline{E_1}}$$

Esta proceso puede continuarse de la siguiente manera

$$E_1 = (E_0, e_1); \; E_2 = (E_1, e_2); \; E_3 = (E_2, e_3)$$

y así sucesivamente. De este modo

$$2 = \overline{\overline{E_1}}, \; 3 = \overline{\overline{E_2}}, \; 4 = \overline{\overline{E_3}}.$$

y así sucesivamente.

En general

$$n = \overline{\overline{E_{n-1}}}$$

$$E_n = (E_{n-1}, e_n) = (e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Cada número cardinal es el resultado de añadir 1 al que le precede inmediatamente. De acuerdo con las definiciones anteriores pueden probarse los siguientes teoremas[13].

(5) Si M es un conjunto tal que no es equivalente a ninguno de sus subconjuntos propios, entonces (M, e), el conjunto unión de M y un elemento simple, e, tiene esta misma propiedad.

Prueba: Sea M un conjunto no equivalente a ninguna de sus partes, y supongamos que (M, e) tiene una parte propia, N, que es equivalente a (M, e). Podemos distinguir dos casos:

A) $e \in N$. Luego N será la unión de un conjunto determinado, M_1, y el elemento e, es decir

$$N = (M_1, e).$$

Si (m, e) es equivalente a N, esto es, a (M_1, e) entonces M y M_1 también serán equivalentes, si consideramos que el elemento e se hace corresponder a sí mismo en la correlación. Como N es una parte propia de M y M_1 es una parte de N. M_1 es una parte propia de M. Luego se sigue que M es equivalente a una de sus partes propias, lo que contradice la hipótesis.

B) $\sim(e \in N)$. Entonces N es idéntico a M o a una parte de M. Sea $N = (M_1, f)$. Como hemos supuesto que $(M_1, f) \simeq (M, e)$, es decir, que $N \simeq (M, e)$, si hacemos corresponder los elementos f y e en la correlación que define la equivalencia, tendremos que $M_1 \simeq M$. Pero M_1 es una parte de N, y N una parte de M, con lo que M_1 es una parte de M equivalente a M, en contra de la hipótesis.

Luego (M, e) no es equivalente a ninguna de sus partes propias.

q. e. d.

(6) Si N es un conjunto de número cardinal finito n, y N_1 es un subconjunto propio de N, el número cardinal de N es alguno de los que anteceden a n

$$1, 2, 3, \dots, n-1.$$

<u>Prueba</u>[14] : Supongamos que el teorema (6) vale hasta un cierto n y probemoslo para $n+1$. Según las definiciones anteriores

$$n+1 = E_n = (e_0, e_1, \dots, e_n)$$

Sea E' un subconjunto propio de E_n. Pueden darse tres situaciones

A) $\sim(e_n \in E')$, entonces E' es o bien idéntico a E_{n-1} o bien un subconjunto de E_{n-1}. En cualquiera de estos casos tendrá un cardinal igual o menor que n, puesto que el teorema se cumple para los números menores que $n+1$.

B) E' tiene un único elemento, e_n. Luego $E' = 1$.

C) $e_n \in E'$ y $E' = (E'', e_n)$. Si E' es un subconjunto propio de E_n, E'' es un subconjunto propio de E_{n-1}, con lo que el cardinal de E'' será n-1 o algún número anterior a este, según hemos supuesto. Luego si $E' = (E'', e_n)$, entonces $E' = E''+1$, es decir, un número igual o menor que **n**.

En cualquiera de los tres casos el cardinal de cualquier subconjunto de un conjunto de n+1 miembros es uno de los números anteriores a n+1.

q. e. d.

(7) Los elementos de la serie infinita de los números cardinales finitos

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n,\ \dots$$

son todos diferentes unos de otros.

<u>Prueba</u>: Ningún conjunto E_n, siendo **n** finito, es equivalente a ninguna de sus partes:

Para n = 1, $E_1 = (e_0, e_1)$, y sus (e_0) y (e_1). Se ve inmediatamente que ni $(e_0) \simeq (e_0, e_1)$ ni $(e_1) \simeq (e_0, e_1)$.

Para n > 1. Sean **m** y **n** dos números finitos, y m < n. Entonces E_{m-1} y E_{n-1} no serán equivalentes, con lo que sus respectivos cardinales **m** y **n** serán distintos.

q. e. d.

(8) Cada número finito **n** es mayor que todos los que lo preceden y menor que todos los que le siguen.

<u>Prueba</u>: Sea **m** un cardinal anterior a **n**. E_{m-1} será pues un subconjunto de E_{n-1}, pero E_{n-1} no es un subconjunto de E_{m-1}. Si lo fueran serían equivalentes y sus cardinales idénticos, lo que está en contradicción con el teorema (7). Luego, de acuerdo con la definición de las relaciones de mayor y menor, m < n.

(9) No existe ningún cardinal entre **n** y n+1.

<u>Prueba</u>: Sea **a** un cardinal menor que n+1, entonces habrá un subconjunto de E_n con el número cardinal **a**. Del teorema (6) se sigue que **a** será idéntico a alguno de los números anteriores a n+1, y del teorema (8) se sigue que no será mayor que **n**, luego no hay ningún número entre n+1 y **n**.

(10) Si K es cualquier conjunto de números cardinales finitos distintos, entonces hay un k_1 entre ellos que es el menor de todos.

<u>Prueba</u>: A K pertenece el 1 o no pertenece. Si lo primero, entonces $k_1 = 1$. Si lo segundo, sea J el conjunto de los números finitos menores que cualquiera de los que aparecen en K. A J debe pertenecer un número **n** tal que n+1 y los que le siguen no pertenezcan a J puesto que si no todo número finito pertenecería a J y K sería vacío.

Todos los números pertenecientes a J y distintos de **n** son menores que **n**, luego J no es más que el conjunto

$$(1, 2, 3, \ldots, n).$$

Y en este caso $k_1 = n+1$.

q. e. d.

A estos teoremas añade Cantor, sin prueba, el siguiente:

(11) Todo conjunto $K = \{k\}$ de números cardinales finitos distintos puede ordenarse como una serie

$$K = (k_1, k_2, k_3, \ldots)$$

de modo que

$$k_1 < k_2 < k_3 \ldots .$$

Del teorema anterior no da Cantor la prueba explícitamente, pero se sigue inmediatamente de los tres teoremas anteriores: todo conjunto de números finitos tiene un primer elemento, por (10); puede ordenarse de menor a mayor, por (8), y cada número tiene un sucesor inmediato, por (9).

3.3 Teoría de los tipos ordinales [118]

Definamos, en primer lugar, la noción de conjunto simplemente ordenado:

M es un conjunto simplemente ordenado si, gracias a una relación R previamente establecida entre sus elementos, puede decirse de dos cualesquiera de ellos, m_1 y m_2, cuál es el anterior y cuál el posterior según el orden en que los coloca R y, además, si ocurre siempre que si m_1 es anterior a m_2 y m_2 es anterior a otro elemento m_3, entonces m_1 es anterior a m_3 según R.

Si un conjunto está simplemente ordenado o no, sólo puede afirmarse respecto de alguna ordenación particular, dado que un mismo conjunto puede ordenarse de muchas maneras diferentes.

Cantor llama tipo ordinal de un conjunto simplemente ordenado M al concepto general que queda al abstraer las peculiaridades de los elementos de M, aunque manteniendo bajo consideración el orden en el que éstos están. Los tipos ordinales son, pues, conjuntos de "unos" simplemente ordenados.

El tipo ordinal de M se simboliza por

$$\bar{M}$$

indicando el trazo único que sólo se ha producido un acto de abstracción sobre M, y no dos, la constitución y el orden de los elementos, como ocurre en el caso de las potencias.

Dos conjuntos simplemente ordenados, M y N, serán <u>similares</u> (<u>ähnlich</u>), en signos: $M - N$[116], si puede definirse una relación biunívoca entre los elementos de uno y otro que preserve el orden relativo de los elementos emparejados por la relación. Esto es, si m_1 y m_2 son elementos de M y n_1 y n_2 son los elementos de N que corresponden a m_1 y a m_2 respectivamente según la relación que conecta biunívocamente a ambos conjuntos, y m_1 precede a m_2 en M, entonces n_1 precede a n_2 en N.

Si dos conjuntos simplemente ordenados son similares, a ambos les corresponde el mismo tipo y viceversa. Formalmente,

$$M - N \text{ si, y sólo si } \bar{M} = \bar{N}.$$

Los tipos ordinales, al igual que las potencias, son conjuntos y en este caso conjuntos similares a aquellos de los que se abstraen.

Todos los conjuntos finitos de la misma cardinalidad son similares entre sí, por lo que a cada número cardinal finito le corresponde un único tipo ordinal. Cantor simboliza los tipos ordinales finitos mediante los signos utilizados para hacer referencia a los números cardinales finitos

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

La coincidencia de notación no supone ningún peligro de ambigüedad puesto que en la esfera de lo finito la distinción entre tamaño cardinal y tipo ordinal de un conjunto no es relevante.

En el caso de los conjuntos infinitos la cuestion es completamente diferente. Conjuntos con un mismo tamaño cardinal pueden adoptar infinitos tipos ordinales distintos.

Si en un conjunto simplemente ordenado M se invierte el orden relativo de los elementos como en un espejo, de manera que si m_i era anterior a m_j en M, sea ahora m_j anterior a m_i, para cualesquiera dos elementos m_i y m_j de M, lo que resulta es el conjunto inverso de M, que Cantor simboliza por

$$*M.$$

Si α es el tipo ordinal de M, el tipo de *M sera $*\alpha$. Para todos los tipos finitos se cumple que

$$\alpha = *\alpha$$

y también para algunos infinitos, pero no en general. Entre los tipos infinitos para los que se cumple Cantor cita[117] el tipo del conjunto de los números racionales p/q mayores que cero y menores que 1, simbolizado por η . Todos los conjuntos de tipo η tienen las siguientes caracteristicas:

(i) son equivalentes al conjunto de los números finitos

(ii) no tienen un primer elemento ni un elemento último

(iii) entre dos cualesquiera de sus elementos siempre hay un número infinito de ellos.

El tipo η corresponde también al conjunto de todos los racionales positivos y negativos, incluido el cero en su orden natural, y al conjunto de los números reales algebraicos en su orden natural.

Un tipo ordinal que no tiene la propiedad de ser identico a su tipo inverso y que se utilizará mucho en lo que sigue es el tipo del conjunto de los enteros finitos positivos en su orden natural, que se simboliza por "ω". El inverso, $*\omega$, corresponde al conjunto de los enteros finitos negativos.

3.3.1 Adición y multiplicación de tipos ordinales

Sean M y N dos conjuntos simplemente ordenados y sea α el tipo que corresponde a M y β el que corresponde a N. La unión (M, N) será un conjunto simplemente ordenado si se mantiene el orden interno de los elementos de M y N, y si todos los elementos de M tienen un rango inferior a todos los elementos de N. En este caso (M,N) tendrá un tipo ordinal determinado, que no dependerá de la constitución de los elementos de M y N sino de sus tipos. Cantor define así la suma de los dos tipos ordinales α y β de la siguiente manera:

$$\alpha+\beta = \overline{(M,N)}$$

teniendo en cuenta que la notación (M,N) indica que los elementos de M preceden a los de N.

Si se sustituye cada elemento del conjunto N por un conjunto M_i similar a M, la unión de los M_i dará lugar a un conjunto simplemente ordenado cuyo tipo ordinal estará en función de los tipos α, de M, y β, de N. Llamemos S al conjunto resultante de la unión anterior, el tipo de S será el producto de los tipos de M y N. El producto de α y β será entonces:

$$\alpha . \beta = \overline{S}.$$

La suma y la multiplicacion de tipos ordinales no cumplen, en general, la propiedad conmutativa dado que puede ocurrir que los tipos resultantes de las operaciones $\alpha+\beta$ y $\alpha.\beta$ sean distintos de los de las operaciones $\beta+\alpha$ y $\beta.\alpha$.

3.3.2 Definiciones de serie fundamental y conceptos derivados

Cantor denomina serie fundamental de primer orden a cualquier subconjunto de un conjunto simplemente ordenado que sea o del tipo ω o del tipo $*\omega$. Si el subconjunto es del tipo ω será una serie fundamental ascendente, si del tipo $*\omega$ será una serie fundamental descendente.

Una serie fundamental ascendente es, pues, similar al conjunto de los enteros positivos en su orden natural. Una serie fundamental descendente es similar al conjunto de los enteros negativos en su orden natural. Cantor simboliza las series fundamentales por

$$\{\alpha_\nu\}.$$

Dos series fundamentales, $\{\alpha_\nu\}$ y $\{\alpha'_\nu\}$, son coherentes, lo que se simboliza por

$$\{\alpha_\nu\} \; || \; \{\alpha'_\nu\}$$

si (i) en el caso de ser ambas ascendentes existen elementos de la primera que suceden el orden de M a cualquier elemento de la segunda y al contrario, existen elemnetos de la segunda que suceden en el rango a cualquier elemento de la primera.

(ii) En el caso de ser ambas descendentes, existen elementos de la primera que preceden en el orden de M a cualquier elemento de la segunda y viceversa, hay elementos de la segunda de rango más bajo que cualquier elemento de la primera.

(iii) En el caso de que (α_ν) sea ascendente y (α'_ν) descendente, si se cumplen las dos condiciones siguientes

a) todos los elementos de (α_ν) preceden a todos los de (α'_ν)

b) hay a lo sumo un elemento m_0 de M tal que, para todo ν, los α_ν preceden a m_0 y los α'_ν siguen todos a m_0. Esto se expresa formalmente así

$$\alpha \prec m_0 \prec \alpha'_\nu$$

donde el signo "$\prec$" indica que los elementos que están a su izquierda tienen un rango inferior que los que están a su derecha.

Ejemplos simples de series fundamentales coherentes ambas ascendentes podrían ser el conjunto de los números finitos pares y el de los números finitos impares, ambos subconjuntos del conjunto simplemente ordenado de los números finitos.

Los pares e impares negativos proporcionan un ejemplo de coherencia de series descendentes y en este caso M es el conjunto de los enteros negativos.

Si colocamos en primer lugar el conjunto de los enteros positivos y a continuación el de los enteros negativos, tendremos un ejemplo de coherencia de dos series, una ascendente y la otra descendente. En este caso, M es el conjunto de los enteros finitos, positivos y negativos y no hay ningún elemento de M que sea m_0.

Si en un conjunto simplemente ordenado M, existe un elemento m_1 que sucede siempre a cualquier elemento de una serie fundamental determinada (α_v) de M, esto es, si

$$\alpha_v \prec m_1$$

para todo $\alpha_v \in (\alpha_v)$ y todo elemento de M, $m \prec m_1$, es tal que existe un determinado $\alpha_{v_0} \in (\alpha)$ tal que, para todo $v > v_0$

$$m \prec \alpha_v$$

entonces decimos que m_1 es un elemento límite de (α_v) en M o un elemento principal de M.

En el caso de que estemos considerando una serie descendente (β_v), m_1 será un límite de (β_v) en M o un elemento principal de M si

(i) para todo v

$$m_1 \prec \beta_v$$

(ii) para todo m de M que suceda a m_1 en el rango, $m_1 \prec m$, existe un número v_0 tal que para cualquier v, $v_0 < v$

$$\beta_v \prec m.$$

Una serie fundamental sólo puede tener un límite en M, en tanto que M puede tener mas de un elemento principal, dado que puede contener más de una serie fundamental.

El concepto de serie fundamental se completa con los siguientes teoremas[18]:

(12) Si dos series fundamentales son coherentes con una tercera, son coherentes entre sí.

(13) Dos series fundamentales, ambas ascendentes o ambas descendentes, de las cuales una sea una parte de la otra, son siempre coherentes.

(14) Si una serie fundamental (a_ν) tiene un límite m_0 en M, todas las series coherentes con ella tendrán el mismo límite m_0 en M.

(15) Si dos series fundamentales tienen un mismo límite en M, son coherentes entre sí.

Sean M y M' dos conjuntos simplemente ordenados con el mismo tipo ordinal, i. e. similares entre sí, entonces

(16) A toda serie fundamental en M se le puede hacer corresponder una serie fundamental en M', y viceversa; a cada serie ascendente en M, una ascendente en M', a cada serie descendente en M, una descendente en M', a series coherentes en M, series coherentes en M' y viceversa.

(17) Si a una serie fundamental de M le corresponde un límite m_0 en M, a la correspondiente serie fundamental de M' le corresponderá un límite m'_0 de M' y m_0 y m'_0 estarán conectados entre sí mediante la relación que garantiza la similitud de M y M'.

(18) A los elementos principales de M le corresponden elementos principales de M' y viceversa.

Si todos los elementos de un conjunto M son elementos principales, Cantor dirá que M es un <u>conjunto denso en sí</u>. Un conjunto denso en sí es, pues, aquel todos cuyos elementos son elementos límites de series fundamentales contenidas en él. Si un conjunto M contiene los límites de todas sus series fundamentales, se dice que M es un <u>conjunto cerrado</u>. Y si un conjunto es, a la vez, <u>denso en sí</u> y <u>cerrado</u>, Cantor dirá que el conjunto es <u>perfecto</u>.

Las tres nociones anteriormente definidas, las de conjunto denso en sí, cerrado y perfecto, tienen la peculiaridad de que si se cumplen para un conjunto, se cumplen igualmente para todos los conjuntos similares a él. Esta es la razon por la que Cantor habla a veces de tipos, y no conjuntos particulares, densos, cerrados o perfectos. Estas nociones hacen referencia a propiedades de los tipos, y por ello a todos los conjuntos que comparten un tipo determinado.

3.3.3 El tipo ordinal del continuo

Se llama continuo al conjunto $X = (x)$ de los números reales mayores o iguales que cero y menores o iguales que 1. Cantor simboliza el tipo ordinal del continuo por θ.

En el conjunto de los números reales está incluido el conjunto de los números racionales p/q, donde p y q son primos entre sí, mayores que cero y menores que uno. Este último conjunto tiene un tipo ordinal que ya conocemos, η, y sus elementos se hallan en tal relación con los del continuo X que entre cada dos elementos cualesquiera x_1 y x_2 de X hay siempre elementos del conjunto de los racionales mencionado. La relación en la que ambos conjuntos se encuentran se recoge en la definición cantoriana del tipo θ que es la siguiente:

Un conjunto M tiene el tipo θ del continuo si, y sólo si,

(i) M es un conjunto perfecto

(ii) existe un conjunto S equivalente al conjunto de los números enteros finitos tal que entre cada dos elementos m_0 y m_1 de M hay siempre elementos de S.[119, 120]

3.4 Conjuntos bien ordenados

El interes que los conjuntos bien ordenados tienen en la teoria de Cantor descansa en el hecho de que mediante ellos se definen los números ordinales, tanto finitos como transfinitos, y a traves de las clases en las que los números ordinales se organizan se definen también los números cardinales transfinitos o Alef, como Cantor los llama.

La definición de conjunto bien ordenado aparece por primera vez en Grundlagen (1883)[121] y se recoge en Beiträge sin variaciones esenciales aunque con una terminología más precisa. Cantor entiende por conjunto bien ordenado lo siguiente:

M es un conjunto bien ordenado si, y sólo si:

(i) M está simplemente ordenado

(ii) existe un elemento m_0 de M que es el primero en el rango, i. e., que precede en la ordenacion a todos los demas

(iii) Si M' es un subconjunto de M, existe un elemento m' de M que sigue inmediatamente a todos los de M' de manera que entre estos y m' no hay ningún elemento de M.[122]

Los siguientes conjuntos son ejemplos de conjuntos bien ordenados[123]:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots, c_1, c_2, c_3)$$

donde

$$a_n \quad a_{n+1} \quad b_n \quad b_{n+1} \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 .$$

Otra definición de conjunto bien ordenado se encuentra en una carta a Dedekind de 1899:

> "Se llama <u>bien ordenada</u> a una multiplicidad (<u>Vielheit</u>), si satisface la condición de que cada <u>subconjunto</u> (<u>Teilvielheit</u>) tiene un <u>primer</u> elemento; llamo a una multiplicidad tal una 'sucesión' (<u>Folge</u>)."[124]

Ambas definiciones son equivalentes. Cantor no prueba su equivalencia ni siquiera la afirma explícitamente, pero en <u>Beiträge</u>[125] se demuestran los dos teoremas siguientes:

(19) Todo subconjunto F_1 de un conjunto bien ordenado F tiene un primer elemento.

(20) Si F es un conjunto simplemente ordenado tal que tanto él como cualquiera de sus subconjuntos tiene un primer elemento, entonces F está bien ordenado.

Si en el teorema (20) no se incluyera la condición de que F sea simplemente ordenado, condición que es superflua pues se sigue de las otras hipótesis del teorema, la unión de (19) y (20) significaría que un conjunto está bien ordenado según la definición de <u>Beiträge</u> si, y sólo si, todos sus subconjuntos tienen un primer elemento, que es la definición de la correspondencia con Dedekind y la que actualmente se utiliza.

Además de los mencionados, y en relación con la noción de conjunto bien ordenado, se incluyen y se demuestran en <u>Beiträge</u> los siguientes teoremas:

(21) Si F' es un subconjunto de un conjunto F bien ordenado, entonces F' está bien ordenado.

(22) Todo conjunto similar a un conjunto bien ordenado está bien ordenado.

(23) Si en un conjunto bien ordenado G se sustituyen sus elementos g por conjuntos bien ordenados, de modo que si $F_{g'}$ es el conjunto que corresponde al elemento g' y $F_{g''}$ el conjunto que corresponde a g'' y si $g' \prec g''$, entonces todos los elementos de $F_{g'}$ preceden a los de $F_{g''}$, entonces el conjunto resultante de la unión de todos los F_g en el orden indicado será un conjunto bien ordenado.

Para indicar que todos los elementos de un conjunto G preceden en una determinada ordenación a todos los de un conjunto F, Cantor utiliza la notación

"$G \prec F$".

Los teoremas (21), (22) y (23) mostrarán su utilidad en la definicion de número ordinal y de las operaciones entre estos números.

También de gran utilidad son los conceptos de <u>segmento</u> y <u>resto</u> de conjuntos bien ordenados: Si f es un elemento cualquiera de un conjunto bien ordenado F, distinto del primero, entonces el <u>segmento de F determinado por f</u> es el conjunto de los elementos de F que preceden a f en el rango. El <u>resto de F determinado por f</u> es el conjunto de los elementos que no pertenecen al segmento determinado por f, es decir, f y todos los que le siguen. Así cada elemento de un conjunto bien ordenado, a excepción del primero, define una división del conjunto en un segmento y un resto.

Si A' es el segmento de F determinado por el elemento f' y a el segmento de F determinado por el elemento f, y f' precede a f en F, entonces Cantor dirá que A' es un segmento menor que A en F y que A es un segmento mayor que A' en F. Formalmente,

$$A' < A \quad ó \quad A > A'.$$

En este sentido, puede decirse que cualquier segmento de un conjunto bien ordenado es menor que el conjunto en cuestión.

La afirmación más importante que hace Cantor acerca de los conjuntos bien ordenados es el teorema:

(29) Si F y G son dos conjuntos bien ordenados cualesquiera, necesariamente tiene que ocurrir uno de los tres casos siguiente:

(i) F y G son similares

(ii) existe un segmento F_1 de F similar a G

(iii) existe un segmento G_1 de G similar a F.

No cabe una cuarta posibilidad.

Este teorema tendrá una importancia capital a la hora de demostrar la comparabilidad de los ordinales y el hecho de que el conjunto de estos está, al menos, simplemente ordenado. Cantor prueba este teorema en Beiträge[26] con la ayuda de otros teoremas previamente introducidos en la misma obra. Loa teoremas necesarios para probar (29) son:

(24) Si F y G son dos conjuntos bien ordenados similares, entonces a cada segmento F' de F le corresponderá un segmento similar G' de G, y viceversa, y al elemento f' de F que determina el segmento F' le corresponde, según la ordenación que garantiza la similitud de F y G, el elemento g' que determina el segmento G' de G.

(25) Ningún conjunto bien ordenado es similar a alguno de sus segmentos.

(26) Si todo segmento F' de F es similar a algún segmento G' de G, y viceversa, entonces F y G son similares entre sí.

(27) Si todo segmento F' de F es similar a algún segmento G' de G, pero hay al menos un segmento de G que no es similar a ningún segmento de F, entonces existe un segmento determinado G" de G que es similar a F.

(28) Si el conjunto F tiene al menos un segmento que no es similar a ninguno de los segmentos de G, entonces para todo segmento G' de G debe haber un segmento F' de F similar a él.

La prueba que Cantor ofrece de (29) es la siguiente[127]:

Prueba: Sean F y G dos conjuntos bien ordenados

(i) si todo segmento F' de F es similar a algún segmento G' de G, y todo segmento G' de G es similar a algún segmento F' de F, entonces por el teorema (26) F y G son similares.

(ii) Si a todo segmento F' de F le corresponde un segmento G' de G similar a él, pero hay al menos un segmento de G que no es similar a ninguno de los de F, entonces por el teorema (27) hay un segmento G" de G similar a F.

(iii) Si todo segmento G' de G es similar a algún segmento de F pero la conversa no ocurre, según (27) habrá un segmento de F similar a G.

(iv) La posibilidad de que haya un segmento de G que no sea similar a ninguno de los de F y un segmento de F que no sea similar a ninguno de los G está eliminada por el teorema (28).

Hay que mostrar ahora que no pueden darse dos de estas posibilidades a la vez. Supongamos que G' es similar a F y a un segmento de F, F'. En este caso F y F' serían similares, lo que está prohibido por (25) y lo mismo ocurre para el caso de que F' fuera similar a G y G'.

Supongamos ahora que F es similar a algún segmento G' de G y G es similar a algún segmento F' de F. Entonces se seguiría del teorema (24) que un segmento G" de G' sería similar al segmento F' de F, y como F' es similar a G tendríamos que G" es similar a G, lo que contradice el teorema (25). Luego, de las posibilidades (i), (ii) y (iii) de (29) anteriormente expuestas exactamente una ha de ser verdadera.[128]

3.5 <u>Números ordinales</u>

Cantor llama a los tipos ordinales de los conjuntos bien ordenados <u>números ordinales</u> (<u>Ordnungszahlen</u>). Los tipos ordinales no se identifican, pues, con los números ordinales. Los tipos ordinales dependen de conjuntos simplemente ordenados mientras que los números ordinales se abstraen de conjuntos bien ordenados. Los conjuntos bien ordenados son conjuntos simplemente ordenados pero no a la inversa, por lo que los números ordinales son un subconjunto propio de los tipos de orden. Los números ordinales son sólo algunos de los tipos ordinales posibles y hay tipos ordinales que no son números, por ejemplo, sabemos que el tipo η de los números racionales mayores que cero y menores que uno no es un número ordinal puesto que este conjunto, en el orden que indica η, no está bien ordenado; no tiene primer elemento por lo que no cumple la condicion (ii) de la definicion; y, dado que entre dos cualesquiera de sus miembros hay siempre un tercero, la condicion (iii) no se cumple para muchos subconjuntos de los conjuntos de tipo [illegible] .

De acuerdo con lo dicho hasta aqui, los numeros ordinales tambien son conjuntos de puros "unos", estando estos últimos colocados como dice la definición de buena ordenación para conjuntos.

La primera definicion de <u>número ordinal</u> se encuentra en <u>Grundlagen</u> (1883), se hace referencia a ellos en el articulo inédito <u>Principien</u> (1884) y posteriormente se desarrollan y precisan las ideas aparecidas en ambos en <u>Beitrage</u> (1897).

La afirmación que caracteriza de forma esencial acerca de los números ordinales es que dos conjuntos tienen el mismo ordinal si, y sólo si, son similares.

La asignación de número ordinal a un conjunto depende, en la mayoría de los casos, de la relación que se defina entre sus miembros; puede ocurrir, por tanto, que dos conjuntos sean similares de acuerdo con una ordenación y no lo sean de acuerdo con otra.

Dado que los números ordinales son tipos especiales, todo lo que vale para tipos ordinales vale tambien para números ordinales, aunque la afirmación conversa no es cierta. Todos los conjuntos finitos simplemente ordenados están bien ordenados. Por esta razon los signos

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

que se introdujeron para denotar, primero, cardinales finitos y, despues, tipos ordinales finitos, sirven tambien para designar numeros ordinales finitos. Entre los numeros finitos la distincion entre ordinales y cardinales no tiene ninguna relevancia. Los conjuntos finitos tienen siempre el mismo numero ordinal sea cual sea la ordenacion que se les de a sus elementos, y este ordinal coincide con el numero cardinal que determina la magnitud del conjunto.

3.5.1 Principios de formación de ordinales transfinitos

Los números ordinales transfinitos se definen todos gracias a dos principios de formación que Cantor introduce en Grundlagen[129]. Son los siguientes:

El primer principio consiste simplemente en la adicion de la unidad a un números ya existente. De esta manera se obtiene la serie

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

que no tiene último termino. Utilizando la terminología de Beitrage podríamos decir que prolongando infinitamente el procedimiento del primer principio se consiguen series fundamentales, como la de los números finitos.

Sería contradictorio hablar del mayor numero de la serie anterior, pero no lo es, en la teoría de Cantor, hablar de un numero mayor que cualquiera de los pertenecientes a ella. Ni, en concreto, del menor numero mayor que cualquiera de los numeros de la serie. Este número, simbolizado desde <u>Grundlagen</u> en adelante por "ω", es el primer ordinal transfinito, e indica el tipo de orden de la serie de los números naturales y de todas las similares a ella. A partir de <u>Beitrage</u> puede decirse que ω es el límite de la serie fundamental de los números finitos. La definición de ordinales transfinitos como límites de series fundamentales es el <u>segundo principio</u> que aparece en <u>Grundlagen</u>, aunque en esta obra Cantor no utilice aún esta terminología[130].

Mediante los dos principios combinados se definen todos los números transfinitos. Así, partiendo de ω y de acuerdo con el primer principio, se pueden formar nuevos ordinales

(A) $\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega+n, \ldots$.

El número $\omega+1$ corresponde a una serie como la de los números naturales a la que se le haya añadido al final un elemento último. Por ejemplo,

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots a.$$

O también

$$2, 3, 4, \ldots, n, \ldots 1.$$

Una serie como

$$3, 4, 5, \ldots, n, \ldots 1, 2$$

tiene el número $\omega+2$. El número $\omega+3$ corresponderá, por ejemplo, a

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots a, b, c$$

y tambien a

$$4, 5, 6, \ldots, n, \ldots 1, 2, 3$$

y así sucesivamente.

La serie (A) no tiene último término. Es una serie fundamental que tiene, a su vez, un límite. Esto es, de acuerdo con el segundo principio puede definirse un número que siga inmediatamente a todos los de (A) y que entre él y los números de (A) no haya ningún ordinal. Cantor simboliza el nuevo número por "$\omega 2$"[131].

Por el primer principio, pueden definirse otros números a partir de $\omega 2$:

$$\omega 2,\ \omega 2+1,\ \omega 2+2,\ \omega 2+3,\ \ldots,\ \omega 2+n,\ \ldots$$

después de los anteriores, por el segundo principio, se define $\omega 3$, y a continuación, por el primer principio

$$\omega 3,\ \omega 3+1,\ \omega 3+2,\ \omega 3+3,\ \ldots,\ \omega 3+n,\ \ldots$$

y así sucesivamente hasta alcanzar todos los $\mu\omega+n$, donde μ y n son números finitos. Después de todos ellos obtendremos ω^2, y mediante los dos principios continua el proceso

$$\omega^2,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+n,\ \ldots$$

$$\omega^2 2,\ \omega^2 2+1,\ \omega^2 2+2,\ \ldots,\ \omega^2 2+n,\ \ldots$$

$$\omega^2 3,\ \omega^2 3+1,\ \omega^2 3+2,\ \ldots,\ \omega^2 3+n,\ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu\omega^2,\ \mu\omega^2+1,\ \mu\omega^2+2,\ \ldots,\ \mu\omega^2+n,\ \ldots\ .$$

Tras todos los $\mu\omega^2+n$ aparecerá ω^3, luego ω^4 y así hasta llegar a ω^ω. Cantor no introduce en su obra números superiores a ω^ω pero señala[132] que el proceso de definición de ordinales no tiene fin.

Con el propósito de dividir la serie transfinita de números en conjuntos con características homogéneas, Cantor introduce un tercer principio restrictivo al que llama Principio de Limitación (Hemmungsprinzip o Beschränkungsprinzip)[133] y que no formula explícitamente. El Principio de Limitación tiene el efecto de reunir a los números ordinales en clases a las que el autor llama clases numéricas (Zahlenklassen). La clase numérica

I está constituida por los números finitos. A esta clase pertenecen todos los ordinales que, en el orden en el que se definen mediante los dos principios de formación, tienen un número finito de predecesores.

La clase numérica II está formada por aquellos ordinales definidos mediante los dos principios cuyos predecesores forman un conjunto equivalente a la clase numerica I.

A la clase numérica III pertenecen los números formados con la ayuda de los dos principios cuyos predecesores forman un conjunto equivalente a la clase numerica II, y así sucesivamente.

3.5.2 Números ordinales de la clase numérica II

Entre las características de la clase numérica II destaca el hecho de que tal clase tiene un elemento que es el menor número ordinal de todos los que pertenecen a ella. Este número es ω, al que ya conocemos, que corresponde a la serie de los números finitos en su orden natural de magnitud. De él dice Cantor que es el límite, lim n, de los números finitos n. En este caso, el término "límite" que he utilizado para referirme a la expresión cantoriana "lim n" tiene un significado distinto de lo que en 3.3.3 he llamado "elemento límite de una serie fundamental en un conjunto M", para lo cual Cantor usa la expresión "Grenzelement". El nuevo concepto se define en Beiträge[134] como

$$\lim \alpha_n = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + (\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \ldots$$

siendo los α_n los elementos de una serie fundamental en la que

$$\alpha_{n+1} > \alpha_n.$$

De aquí en adelante siempre que utilice la expresión "límite" me referiré a este último sentido a menos que indique expresamente lo contrario.

Los teoremas más interesantes que Cantor prueba en <u>Beiträge</u> en relación a los ordinales transfinitos de la clase II son los siguientes[135]:

(30) La clase numérica II tiene un número menor que todos los demás, $\omega = \lim n$.

(31) Si α es cualquier número de la clase II, entonces $\alpha+1$ sigua inmediatamente a α en esta clase.

(32) Si α_1, α_2, ..., α_n es una serie fundamental de números de la clase I o de la clase II, entonces existe un número de la clase II que es el límite, $\lim \alpha_n$, de esta serie fundamental.

(33) Si α es cualquier número de la clase II, el conjunto de todos los números de las clases I y II que preceden a α en orden de magnitud forman un conjunto bien ordenado cuyo número es α.

(34) El conjunto $\{\alpha'\}$ de los números de las clases I y II menores que uno cualquiera de la clase II, α, tiene la cardinalidad transfinita menor, i. e., es equivalente al conjunto de los números finitos.

(35) Todo número α de la clase II o bien tiene un predecesor inmediato, α' y

$$\alpha = \alpha' + 1$$

o bien existe una serie fundamental $\{\alpha_n\}$ de números de las clses I y II tal que

$$\alpha = \lim \alpha_n.$$

Este último teorema distingue dos tipos entre los números de la clase II: hay ordinales en esa clase que son sucesores inmediatos de otros números de la clase, es decir, que se definen a partir de un número determinado ya disponible mediante el primer principio de formación de ordinales. A estos ordinales los llama Cantor números del primer tipo (Zahlen erster Art). Existen además en la clase II números que no son sucesores de ningún ordinal particular, esto es, que no tienen un predecesor inmediato sino que son límites de series fundamentales. A estos números, definidos mediante el segundo principio de formación de ordinales, los llama Cantor números del segundo tipo (Zahlen zweiter Art).

(36) El conjunto $\{\alpha\}$ de los números de la clase II en su orden natural de magnitud forman un conjunto bien ordenado.

Prueba:

(i) $\{\alpha\}$ tiene un primer elemento, ω, de acuerdo con el teorema (30).

(ii) Sea $A\alpha$ el conjunto de todos los números de la clase II menores que uno determinado, α. Según (33), $A\alpha$ está bien ordenado en su orden de magnitud y su tipo será $\alpha-\omega$, puesto que del conjunto $\{\alpha'\}$ de los números de las clases I y II al que se refiere el teorema (33) se han eliminado los números de la clase I, cuyo tipo es ω.

Sea J cualquier conjunto de números de la clase II que cumpla la condición de que en esta clase haya siempre números mayores que todos los de J. Supongamos que α_0 es uno de tales números, i.e., $\alpha_0 \in \{\alpha\}$ y para todo $\beta \in J$, $\beta < \alpha_0$. En este caso

J será un subconjunto de $A(\alpha_0+1)$ y en $A(\alpha_0+1)$ hay al menos un elemento que es mayor que todos los de J, a saber, α_0. $A(\alpha_0+1)$ es un conjunto bien ordenado, por (33), y según la definición de conjunto bien ordenado habrá un elemento α' de $A(\alpha_0+1)$ que siga inmediatamente a todos los J.

De (i) y (ii) se sigue que el conjunto $\{\alpha\}$ de todos los números de la clase II está bien ordenado.

(37) Todo conjunto de números de las clases I y II tiene un número que es el menor de todos.

(38) Todo conjunto de números de las clases I y II en su orden de magnitud forman un conjunto bien ordenado.

3.5.3 Aritmética ordinal transfinita

Los números ordinales son tipos ordinales de conjuntos bien ordenados, por ello las operaciones aritméticas para números ordinales se definen exactamente igual que para tipos de orden. En 3.3.1 hemos visto la adición y la multiplicación de tipos, que se adapta punto por punto a la adicion y multiplicación de números ordinales. Recordémoslo brevemente:

Si M y M' son conjuntos bien ordenados y α y β son los ordinales que les corresponden respectivamente, la expresión "$\alpha+\beta$" denotará al tipo ordinal del conjunto formado al unir el conjunto M' a M, colocando todos los elementos de M' despues de todos los elementos de M, y manteniendo en M y M' el orden interno de sus miembros. De acuerdo con la definición de buena ordenación, el conjunto unión de M y M' colocado como se ha dicho, constituirá un conjunto bien ordenado, por que el tipo $\alpha+\beta$ es un número ordinal. Un rasgo curioso de la suma ordinal es que para ella no es generalmente valida la propiedad conmutativa. Si α y β son números finitos, sabemos que $\alpha+\beta = \beta+\alpha$, pero si son transfinitos esto no tiene por qué ocurrir. Por ejemplo, si a una serie del tipo de la de los números enteros finitos

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

que sabemos que le corresponde el número ω, le añadimos un elemento al comienzo

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

obtenemos una serie cuyo número es $1+\omega$. Pero, puesto que esta última es similar a la de los números enteros,

$$1+\omega = \omega.$$

Sin embargo, si añadimos un elemento al final

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots 0$$

lo que tenemos es una serie de número $\omega+1$, que es distinto de ω y es el que le sigue inmediatamente en orden de magnitud. En el primer caso, de ω a $1+\omega$, la estructura de la serie no cambia, pero de ω a $\omega+1$ sí lo hace, puesto que ω es el número de una serie que no tiene último término mientras que $\omega+1$ indica las series con este número tienen un elemento final. La propiedad asociativa, no obstante, sigue siendo válida para la suma ordinal.

Si sustituimos ahora cada elemento de M por un conjunto similar a M_1, de manera que si m' y m'' son elementos de M, y M'_1 y M''_1 son los conjuntos similares a M_1 -- i. e. con su mismo numero ordinal -- correspondientes a m' y m" respectivamente, entonces M'_1 y M''_1 mantienen la misma situación relativa que m' y m", la unión de todos estos conjuntos similares a M_1 en el orden señalado sera un conjunto bien ordenado cuyo número ordinal es el producto del número de M_1 por el número de M, i. e., $\beta\alpha$, donde el primero es el multiplicando y el segundo el multiplicador[136]. Tampoco en este caso la propiedad conmutativa es universalmente válida. Supongamos que $\alpha = 2$ y $\beta = \omega$, entonces $\omega 2$ es $\omega+\omega$, esto es, el número de un conjunto de dos miembros cada uno de los cuales ha sido sustituido por un conjunto similar al de los números finitos:

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2, 4, 6, 8,$$

Este número es distinto de ω, es el que sigue inmediatamente a todos los $\omega+n$, donde n es un número finito. Por el contrario 2ω es el número de un conjunto similar al de los enteros finitos en su orden natural, en el cual cada uno de sus elementos ha sido sustituido por un conjunto de dos miembros:

$$1, 1', 2, 2', 3, 3', \ldots, n, n', \ldots$$

La serie anterior es similar a la de los enteros por lo que $2\omega = \omega$. La propiedad asociativa sigue conservándose también en el producto.

La sustracción y la división -- que veremos a continuación -- son algo mas complicadas, debido esencialmente a la no-conmutatividad de la suma y la multiplicación:

Si α y β son ordinales de la clase numerica II y $\alpha < \beta$, entonces la ecuacion

$$\alpha+\lambda = \beta$$

tiene siempre una solución y sólo una, pudiendo ser λ un número de las clases I ó II. Este número puede denotarse por $\beta-\alpha$.

Sin embargo, en el caso

$$\lambda+\alpha = \beta$$

la ecuación no tiene necesariamente una solución. Cantor propone el siguiente ejemplo[37] sin solución:

$$\lambda+\omega = \omega+1.$$

Cuando hay solución para la ecuación puede suceder que no sea única y es frecuente que haya un número infinito de valores de λ que satisfagan la fórmula. Como todos los valores que puede tomar λ son números ordinales, entre los que aporten una solución a la ecuación anterior habrá uno que será el menor. Cantor simboliza el menor valor que constituye una solución a una ecuación del estilo de

$$\lambda+\alpha = \beta$$

por "$\beta_{-\alpha}$" -- en el caso de que haya alguno.

Con la división ocurre algo similar. la ecuación

$$\beta = \alpha\lambda$$

tiene siempre una solución única

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta} .$$

Pero el caso contrario, cuando la incógnita aparece como multiplicando

$$\beta = \lambda a$$

puede ser insoluble o admitir infinitas soluciones. En el segundo caso, el menor número que constituye una solución se simboliza por

$$\frac{\beta}{\alpha} .$$

Entre los números ordinales transfinitos hay también <u>números primos</u>. Cantor define los números primos como aquellos números γ para los cuales la ecuación

$$\alpha = \gamma\beta$$

sólo es posible si $\beta = 1$ ó $\beta = \alpha$[138]. En este caso, γ no tiene que tener un valor único, sino que a menudo puede adquirir valores de entre un dominio muy amplio.

La descomposición de un número transfinito en sus factores primos está determinado de manera única, al igual que ocurre entre los números finitos. Para explicar la descomposición de los primos transfinitos hay que echar mano de las nociones de <u>número del primer tipo</u> y <u>número del segundo tipo</u> que ya conocemos. Los números del primer tipo son aquellos definidos por el primer principio de formación, por lo que tienen un predecesor inmediato. Los números del segundo tipo, por el contrario, no tienen predecesor inmediato y se definen mediante el segundo principio. Ejemplos de números del primer tipo son

$$\omega+1,\ \omega^2+\omega+2,\ \omega^{\omega}+3$$

y del segundo tipo

$$\omega,\ \omega2,\ \omega^n+\omega,\ \omega^{\omega}.$$

Los números primos, como todos los demás, también se dividen en estas dos categorías. Cantor cita[139] como números primos del primer tipo

$$\omega+1,\ \omega^2+1,\ \omega^3+1,\ \ldots,\ \omega^n+1,\ \ldots$$

y del segundo tipo

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^2},\ \omega^{\omega^3},\ \ldots\ .$$

Hay tantos numeros primos del primer tipo como del segundo y, según el autor, tantos como números de la segunda clase numérica.

Los numeros primos del segundo tipo, η , tienen la propiedad de que si

$$\alpha < \eta$$

entonces

$$\alpha\eta = \eta.$$

De ahí se sigue que si α y β son números menores que η, $\beta\alpha$ es siempre menor que η .

3.5.4 Algunos números de la clase II y operaciones entre ellos

Entre las distintas formas que pueden adoptar los números de la segunda clase[140] se encuentra la de aquellos que pueden expresarse de manera única como funciones algebraicas de ω de grado finito. Esto es, existen ciertos numeros ϕ de la segunda clase que pueden determinarse univocamente de la siguiente manera:

$$\phi = \omega^{\mu}\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \ldots + \nu_\mu \tag{A}$$

donde μ, ν_0 son números finitos distintos de cero y ν_1, ν_2, ..., ν_μ pueden ser nulos. Para estos numeros se define en Beiträge[141] la suma y la multiplicación. Estas dos operaciones para números "algebraicos" de la segunda clase ya fueron definidas en Grundlagen con la única diferencia de que tanto en las operaciones como en la ecuación (A) el orden relativo del multiplicador y el multiplicando se invierte.

Para abordar números cuyos exponentes sean transfinitos es necesario, en primer lugar, determinar el significado de la exponenciación transfinita, cosa que lleva a cabo el autor mediante la generalización del procedimiento de la inducción completa, que hoy conocemos como <u>inducción transfinita</u>.

Sea λ una variable que puede tomar como valor cualquier número de la primera o segunda clase, y γ y δ dos constantes tales que

$$\gamma > 1 \quad y \quad \delta > 0 \, ,$$

entonces puede probarse el siguiente teorema:

(39) Existe una función monádica completamente definida $f(\lambda)$ que satisface las condiciones

(i) $f(0) = \delta$

(ii) si λ' y λ'' son dos valores cualesquiera de λ y

$$\lambda' < \lambda''$$

entonces

$$f(\lambda') < f(\lambda'').$$

(iii) para todo valor de λ

$$f(\lambda+1) = f(\lambda)\gamma$$

(iv) si (λ_ν) es una serie fundamental, entonces también lo es $(f(\lambda_\nu))$ y además si

$$\lambda = \lim_{\nu} \lambda_\nu$$

entonces

$$f(\lambda) = \lim_{\nu} f(\lambda_\nu).$$

<u>Prueba</u>: A partir de (i) y (ii) tenemos que

$$f(1) = \delta\gamma, \; f(2) = \delta\gamma\gamma, \; f(3) = \delta\gamma\gamma\gamma$$

y como $\delta > 0$ y $\gamma > 1$

$$f(1) < f(2) < f(3) < \ldots < f(\nu) < f(\nu+1) < \ldots$$

por lo que la funcion $f(\lambda)$ esta determinada para todo número finito.

Supongamos que el teorema se cumple para todos los valores de λ menores que un determinado número α de la segunda clase. Entonces, si α es del primer tipo, es decir

$$\alpha = \beta+1$$

donde β es el número que precede inmediatamente a α, entonces de (iii) se sigue que

$$f(\alpha) = f(\beta)\gamma, \quad f(\beta)\gamma > f(\beta)$$

por lo que las condiciones (i), (ii), (iii) se cumplen para $\lambda \leq \alpha$.

Si α es del segundo tipo, esto es, existe una serie fundamental $\{\alpha_\nu\}$ tal que

$$\lim_\nu \alpha_\nu = \alpha$$

entonces, se sigue de (ii) que $\{f(\alpha_\nu)\}$ es tambien una serie fundamental, y de (iv) que

$$f(\alpha) = \lim_\nu f(\alpha_\nu).$$

Supongamos que $\{\alpha'_\nu\}$ es otra serie fundamental tal que

$$\alpha = \lim_\nu \alpha'_\nu,$$

entonces, las dos series $\{\alpha_\nu\}$ y $\{\alpha'_\nu\}$ seran coherentes por lo que

$$f(\alpha) = \lim_\nu f(\alpha'_\nu).$$

Luego el valor $f(\alpha)$ esta determinado en cualqier caso. Si α' es cualquier número menor que α, entonces

$$f(\alpha') < f(\alpha),$$

con esto se satisfacen las condiciones (ii), (iii) y (iv) de donde se sigue que el teorema (39) es válido para todo λ.

La prueba del teorema (39) descansa en la suposicion de que si en un conjunto bien ordenado A la afirmacion de que todos los predecesores de un elemento α cumplen una determinada propiedad lleva a probar que α tambien la cumple, entonces todos los elementos de A cumplen la propiedad en cuestión. Esta suposición se conoce actualmente como Principio de Inducción Transfinita, que Cantor utiliza sin formularlo expresamente y sin haberlo probado.

Mediante el teorema anterior, suponiendo que la función $f(\lambda)$ es γ^λ y que la constante $\delta = 1$, define Cantor la exponenciación para valores infinitos.

(40) Si γ es un número de la primera o segunda clase mayor que 1, entonces existe una función γ^λ de λ tal que

(i) $\gamma^0 = 1$

(ii) si $\lambda' < \lambda''$, entonces $\gamma^{\lambda'} < \gamma^{\lambda''}$

(iii) para todo valor de λ, $\gamma^{\lambda+1} = \gamma^\lambda\gamma$

(iv) si $\{\lambda_\nu\}$ es una serie fundamental, entonces $\{\gamma^{\lambda_\nu}\}$ también lo es, y si

$$\lambda = \lim_\nu \lambda_\nu$$

entonces

$$\gamma^\lambda = \lim_\nu \gamma^{\lambda_\nu}.$$

En relación a la función γ^λ se prueban[42] las siguientes afirmaciones

(41) Si α y β son dos números de la primera o la segunda clase, entonces

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}.$$

(42) Si α y β son números de la primera o segunda clases

$$\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^{\alpha})^{\beta}.$$

(43) Si $\gamma > 1$, entonces

$$\gamma^{\lambda} \geq \lambda.$$

Supongamos que α es cualquier número de la segunda clase, entonces ω^{λ} será mayor que α para algún valor suficientemente grande de λ. Cantor simboliza este valor por "β" y muestra que no puede ser del segundo tipo, esto es, un límite. Así β será la suma de algún número α_0 y la unidad:

$$\beta = \alpha_0+1.$$

El número α_0 estará completamente determinado y cumple las dos condiciones siguientes

$$\omega^{\alpha_0} \leq \alpha \quad y \quad \omega^{\alpha_0}\omega > \alpha.$$

De la segunda condición se sigue que no todos los valores finitos de v pueden ser tales que

$$\omega^{\alpha_0}v \leq \alpha,$$

ya que en este caso también $\omega^{\alpha_0}\omega$, que sería

$$\lim \omega^{\alpha_0}v$$

cumpliría la condición

$$\omega^{\alpha_0}\omega \leq \alpha.$$

Al menor número finito v tal que

$$\omega^{\alpha_0}v > \alpha$$

se lo simboliza por "x_0+1". Entonces habrá un número x_0 completamente determinado de la primera clase tal que

$$\omega^{\alpha_0}x_0 \leq \alpha \quad y \quad \omega^{\alpha_0}(x_0+1) > \alpha.$$

Si simbolizamos "$\alpha-\omega^{\alpha_0}x_0$" por "$\alpha'$", tendremos que

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}x_0 + \alpha'$$

y $$0 \leq \alpha' \leq \omega^{\alpha_0} \quad y \quad 0 < x_0 < \omega.$$

Esta indicaciones se resumen en el siguiente teorema que Cantor prueba[48]:

(44) Todo número α de la clase II de números puede expresarse unívocamente de la forma siguiente:

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}x_0 + \alpha',$$

de tal modo que

$$0 \leq \alpha' < \omega^{\alpha_0} \quad y \quad 0 < x_0 < \omega.$$

La representación de los números de la clase II queda solucionada mediante el siguiente teorema:

(45) Todo número da la clase II puede expresarse unívocamente en la forma

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}x_0 + \omega^{\alpha_1}x_1 + \ldots + \omega^{\alpha_\tau}x_\tau.$$

donde α_0, α_1, ..., α_τ son números de las clases I ó II que satisfacen la condición

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_\tau \geq 0$$

mientras que x_0, x_1, ..., x_τ, $\tau+1$ son números finitos distintos de cero.

A α_0 le llama Cantor "grado" del número α y a α_τ "exponente" de α.

Otra categoría de números de la clase II son los llamados <u>números ϵ</u>. Tras los números "algebraicos" de la clase II que adoptaban la forma

$$\phi = \omega^{\mu}v_0 + \omega^{\mu-1}v_1 + \ldots + v_\mu$$

siendo μ un número finito, se encuentran los números definidos mediante exponentes transfinitos:

$$\omega^\omega,\ \omega^\omega + 1,\ \omega^\omega + 2,\ \ldots$$

pero todavía hay números mayores, como

$$\omega^{\omega^2}, \ \omega^{\omega^3}, \ \omega^{\omega^4}, \ \ldots$$

y a estos seguirá

$$\omega^{\omega^\omega}$$

y así sucesivamente.

Consideremos ahora la serie de aquellos números que no pueden definirse mediante ningún número finito de números menores que ellos mismos,

$$1, \ \omega, \ \omega^{\omega}, \ \omega^{\omega^\omega}, \ \ldots .$$

Al límite de la serie anterior lo llama Cantor "ϵ_0". El número ϵ_0 es el menor de los números ϵ, según prueba el autor[144], y estos se definen en Beiträge como aquellos números que son idénticos a su grado. Formalmente, los números ϵ son números de la clase II que satisfacen la ecuación

$$\omega^\lambda = \lambda$$ [145]

3.6 Números cardinales transfinitos

Los números cardinales finitos se identifican con los ordinales finitos y con los tipos finitos, como hemos visto anteriormente. La situación es distinta, sin embargo, en el dominio de los números transfinitos. Cantor define, tanto en Grundlagen como en Beiträge, los cardinales transfinitos suponiendo definidos de antemano los números ordinales, finitos y transfinitos. En concreto, los cardinales transfinitos son las potencias de determinados conjuntos de números ordinales.

El menor cardinal transfinito es el que corresponde al conjunto de los ordinales finitos. Tecnicamente, es la potencia de la clase numerica I. La clase numerica I -- tambien llamada a veces "clase numerica (n)" -- tiene un numero infinito de elementos por lo que su número cardinal es distinto de cada uno de los números que pertenecen a ella. De <u>Beitrage</u> en adelante, Cantor denomina a este cardinal transfinito "Alef-cero", $\aleph_0$. Así, si por (n) entendemos el conjunto de los números finitos,

$$\overline{\overline{(n)}} = \aleph_0 .$$

Los conjuntos de cardinalidad alef-cero pueden ordenarse de multitud de formas distintas. Por ejemplo, el conjunto de los números finitos puede presentarse en su orden natural

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

o con un último término

$$2, 3, 4, \ldots, n, \ldots 1$$

o con dos términos al final

$$3, 4, 5, \ldots, n, \ldots 1, 2$$

y así sucesivamente. Tambien pueden presentarse todos los números pares antes que todos los impares

$$2, 4, 6, \ldots 1, 3, 5, \ldots$$

y de otras muchas formas. En cada ordenación el conjunto tendra asignado un ordinal particular. En los ejemplos anteriores la primera ordenación forma una serie cuyo tipo -- o número -- es ω, la segunda tiene el ordinal $\omega+1$, la tercera $\omega+2$ y la cuarta $\omega+\omega$. De hecho, un conjunto cuyo número cardinal sea $\aleph_0$ puede ordenarse mediante cualquiera de los ordinales que pertenecen a la clase numerica II y sólo mediante ellos, esta es la razón por la que Cantor llama tambien a esta clase "clase numerica ($\aleph_0$)".

Dicho de otro modo, la clase numérica ($\aleph_0$) es el conjunto de todos los ordinales que pueden corresponder a conjuntos de cardinalidad $\aleph_0$. Dado cualquier ordinal α de la clase numérica II y cualquier conjunto A equivalente al conjunto de los números finitos, A puede ordenarse de manera que α sea el ordinal que le corresponda. Y sea cual sea la ordenación que se le dé a los elementos de A, siempre que el resultado sea un conjunto bien ordenado, estos elementos formarán siempre un conjunto cuyo tipo ordinal será algún número de la clase II.

Si nos preguntamos de cuántas formas distintas pueden disponerse los elementos de un conjunto infinito de $\aleph_0$ miembros de manera que formen un conjunto bien ordenado, estaremos preguntando por el número de elementos de la clase II.

Cantor probó, como veremos, que el número cardinal de la clase II es distinto y mayor que $\aleph_0$, y de Beitrâge en adelante lo llamó "Alef-uno", $\aleph_1$. Así $\aleph_1$ es el cardinal del conjunto de los números ordinales pertenecientes a la clase II y de todos los conjunto equivalentes a ella. La comparación de los tamaños de las clases I y II requiere que los elementos de ambas sean susceptibles de una buena ordenación.

3.6.1 Los primeros cardinales transfinitos: $\aleph_0$ y $\aleph_1$

Como sabemos, el menor número cardinal transfinito es la potencia del conjunto de los números finitos y de todos los conjuntos equivalentes a el. Cantor prueba que $\aleph_0$ es exactamente el cardinal transfinito menor por medio de los siguientes teoremas:

(46) Todo conjunto infinito T tiene subconjuntos de número cardinal $\aleph_0$.

Lo que Cantor llama la "prueba" de este teorema[146] no es en realidad más que una indicación intuitiva que requiere además del postulado de la buena ordenación. Es la siguiente:

Si ordenamos en una serie

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n$$

un número finito de elementos de T, siempre existe la posibilidad de añadir otro elemento más. El conjunto $\{t_n\}$ de todos los elementos de T que pueden ser añadidos de esta forma es equivalente a $\{n\}$, el conjunto de los números finitos, con lo que

$$\overline{\overline{\{t_n\}}} = \aleph_0 .$$

(47) Si S es un conjunto transfinito cuyo número cardinal es $\aleph_0$ y S_1 es un subconjunto transfinito de S, el número cardinal de S_1 es también $\aleph_0$.[147]

<u>Prueba</u>: Supongamos que $S \simeq \{n\}$; así todos los elementos de S estarán en correlación mediante alguna ley determinada con los elementos de $\{n\}$. Por esta razón podemos simbolizar el conjunto S por "$\{s_n\}$", donde los s_n son los elementos de S correlacionados con $\{n\}$. Si S_1 es un subconjunto de S, sus elementos serán algunos de los de $\{s_n\}$.

De acuerdo con el teorema (11) todo conjunto de números finitos puede ordenarse como una serie

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots$$

donde

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$$

luego los elementos de S_1 podrán ordenarse según sus subíndices en una serie (s_{k_n}). Como hemos supuesto que S_1 es transfinito, $(s_n) \simeq (s_{k_n})$ y por tanto

$$\overline{\overline{S}}_1 = \aleph_0.$$

De los teoremas (46) y (47) se sigue que alef-cero es el menor cardinal transfinito.

Al conjunto de los ordinales transfinitos que correspoden a conjuntos de cardinalidad $\aleph_0$ bien ordenados le atribuye Cantor el cardinal $\aleph_1$. Ahora puede plantearse la cuestión de si ambos cardinales son idénticos o, en caso negativo, cuál es la relación entre ellos, suponiendo que sean comparables. Desde que aparece por primera vez en la obra de Cantor el concepto de potencia transfinita dependiendo de las clases numéricas -- i. e. desde Grundlagen -- es consciente el autor de que $\aleph_0$ y $\aleph_1$ son números distintos y de que el segundo sucede inmediatamente al primero en la serie infinita de cardinales transfinitos. Ambos resultados se prueban en Grundlagen[148] y posteriormente en Beiträge[149] prácticamente de la misma manera. Para las pruebas se necesita el siguiente teorema, que se demuestra en Grundlagen[150]:

(48) Cualquier serie (α_ν)

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots$$

de la primera potencia transfinita, compuesta por números de la clase II, contiene un número γ que es el mayor de todos, o en caso contrario hay un número β de la clase II que no aparece en la serie anterior (α_ν) que es el que sigue inmediatamente en magnitud a todos los de la serie.

Prueba: Sea α_{ν_2} el primer número de la serie (α_ν) mayor que α_1, α_{ν_3} el primero mayor que α_{ν_2}, de manera que ordenemos (α_ν) como

$$\alpha_1,\ \alpha_{\nu_2},\ \alpha_{\nu_3},\ \ldots$$

y

$$\alpha_1 < \alpha_{\nu_2} < \alpha_{\nu_3} < \ldots$$

(A) Puede ocurrir que haya un número en la serie, por ejemplo α_{ν_ρ} a partir del cual todos los números sean menores que él. En este caso tendriamos que $\gamma = \alpha_{\nu_\rho}$, es decir que α_{ν_ρ} es el mayor número de la serie.

(B) Si lo anterior no es el caso, formemos la serie de todos los números enteros de 1 en adelante menores que α_1, añadamos a continuación los números mayores o iguales que α_1 y menores que α_{ν_2}, luego los números mayores o iguales que α_{ν_2} y menores que α_{ν_3} y así sucesivamente. Lo que obtendremos de este modo será un conjunto numerable de conjuntos numerables y como tal tendrá la cardinalidad [151]. De acuerdo con la definicion de la clase II habrá siempre un número β de tal clase que será el que siga inmediatamente a todos ellos -- este número es de la clase II puesto que el conjunto de sus predecesores es de la primera potencia transfinita -- y que no pertenece a la serie original.

q. e. d.

De aquí deduce Cantor que en una serie de cardinalidad $\aleph_0$ no pueden estar todos los números de la clase II. Su argumentación es como sigue:

De acuerdo con el teorema (48) una serie de la primera potencia transfinita tiene un elemento maximo o no lo tiene. Si ocurre lo primero y el elemento máximo es γ, $\gamma+1$ sera tambien un número de la clase II y no pertenecerá a la serie. Si no tiene elemento maximo, mediante el segundo principio de formacion de ordinales aparece un nuevo elemento β que sera también de la clase II y que tampoco se encuentra en la serie.

(49) La potencia del conjunto (α) de números de la clase II es distinta de $\aleph_0$.

El teorema (49) se sigue inmediatamente de (48). Cantor lo prueba en <u>Beitrage</u>[152] por reducción al absurdo. El núcleo de la argumentación es el siguiente:

Si

$$\overline{\overline{(\alpha)}} = \aleph_0,$$

entonces <u>todos</u> los números de α podrían ordenarse en una serie similar a la de los números naturales. Esta serie tendría un número mayor que todos los demás o no lo tendría. En cualquiera de los dos casos aparece un número de (α) que no se encuentra en la serie primitiva de cardinalidad $\aleph_0$.

El siguiente paso para esclarecer las características de los primeros cardinales transfinitos es establecer la relación de tamaño existente entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$. En <u>Grundlagen</u> y luego en <u>Beitrage</u> aparece la prueba de que $\aleph_1$ sigue inmediatamente a $\aleph_0$ en orden de magnitud, esto es, que no puede existir ningún conjunto que sea mayor que la clase I y menor que la clase II:

(50) Si (α') es un conjunto de números de la clase II, entonces (α') es un conjunto finito o (α') tiene la cardinalidad de la clase I o es equivalente a la clase II.

<u>Prueba</u>: Tomemos el conjunto (α') y ordenemos sus miembros por orden de magnitud, siendo α_ω el menor, $\alpha_{\omega+1}$ el siguiente, etc. de manera que (α') aparezca como un conjunto bien ordenado α_β donde β es cualquier número, de ω en adelante. Si Ω es el menor número de la clase III, todo elemento de α_β es menor que Ω

puesto que los α_β son números de la clase II. Puede ocurrir que β permanezca menor que algún número determinado de la serie $\omega+n$, donde n es cualquier número finito, con lo que (α') será un conjunto finito; o bien β toma todos los valores $\omega+n$ menores que un número de la clase II y (α') tendrá entonces la primera potencia, o toma todos los valores sin excepción de la clase II con lo que (α') será equivalente a esta clase.

q. e. d.

A partir del teorema (50) Cantor deduce los dos siguientes:

(51) Si M es un conjunto de la cardinalidad de la clase II, cualquier subconjunto infinito de M o es de la cardinalidad de la clase I o es equivalente a M.

(52) Sea M un conjunto de la segunda cardinalidad transfinita, M' un subconjunto de M y M" un subconjunto de M'. Si suponemos que M" es equivalente a M, entonces también M' es equivalente a M y a M".

Cantor supone[153] que el teorema (52) también valdría si M fuera de cualquier otra cardinalidad transfinita y promete justificar la validez de la afirmación general en otro trabajo.

En realidad, los teoremas (51) y (52) no se siguen del teorema (50), puesto que aquellos hacen referencia a conjuntos cualesquiera y éste se refiere a conjuntos de números ordinales. Se podrían probar a partir de (50) si se supone que todo conjunto puede ordenarse bien y esto es equivalente al Axioma de Elección.

Zermelo[154] hace notar que lo que he señalado como teorema (52) es la primera formulación del teorema de equivalencia que probaron Schröder en 1896 y Bernstein en 1897. A la afirmación de que si M' es un subconjunto de M y M" un subconjunto de M', y M" es equivalente a M, entonces M' también lo es, se la conoce en la actualidad como Teorema de Schröder-Bernstein.

En ninguna obra de Cantor se analizan cardinales superiores a $\aleph_1$. No obstante, el autor afirma en más de una ocasión[155] que los alef forman una sucesión infinita y que tras cada número cardinal transfinito hay hay siempre alguno que le sigue inmediatamente. En opinión de Cantor, los cardinales transfinitos son tan numerosos como los ordinales transfinitos, aunque explícitamente sólo caracterice los dos primeros alef.

4. Supuestos no demostrados en la primera teoría de conjuntos de Cantor

La teoría de conjuntos tratada en el §3 descansa en ciertas hipótesis que son imprescindibles si pretendemos que se mantenga en pie tal como Cantor la ideó. Las hipótesis a las que me estoy refiriendo son tres: el *Principio de la buena ordenación*, el *Principio del infinito actual* y la *Hipótesis del continuo*. De algunas de ellas -- en concreto la primera y la tercera -- Cantor fue consciente e hizo reiterados intentos por demostrarlas, intentos que invariablemente fracasaron, mientras que en relación a la segunda, que puede formularse así: todo infinito potencial presupone un infinito actual o, más brevemente, existen conjuntos infinitos en acto, no hay indicio alguno de que Cantor considerara que era problemática en algún sentido y que era necesario justificarla. Se conformó con mostrar que los argumentos filosóficos y teológicos contra el infinito actual no eran correctos, pero nunca se ocupó del principio del infinito actual como presupuesto de su teoría de conjuntos.

4.1 El Principio de la buena ordenación y el Axioma de Elección

Entre las afirmaciones sustentadas por Cantor y no probadas se encuentra la de la existencia de una buena ordenación para cualquier conjunto. Aparece por primera vez en 1883 en *Grundlagen*:

"Que siempre es posible ofrecer todo conjunto bien-definido en la forma de un conjunto bien-ordenado, sobre esta ley del pensamiento fundamental y profunda, como me parece, especialmente notable por su validez universal volveré en un tratado posterior."[156]

Cantor no probó su hipótesis de la buena ordenación pero tampoco renunció a ella y en ella descansan algunas importantes conclusiones de la teoría cantoriana. No obstante, Cantor no especifica cuáles de sus tesis conjuntistas se ven afectadas por la hipótesis ni qué repercusiones tienen para su teoría sus fracasos en la demostración de la misma.

Además de ser imprescindibles para la demostración de algunos teoremas de la primera teoría, la hipótesis de la buena ordenación tiene una enorme importancia a la hora de establecer una de las conclusiones más significativas que se desprenden de la obra de Cantor: La comparabilidad de los números cardinales transfinitos o, dicho de otro modo, la tesis de que toda potencia transfinita es un alef.

Si todo conjunto puede ordenarse bien, entonces dados dos conjuntos cualesquiera siempre podemos decidir si son similares o si uno es similar a un segmento del otro. Cuando los conjuntos son finitos, la comparación puede realizarse siempre, y como los ordinales y los cardinales finitos coinciden, la ley de tricotomía será válida para ambos. El interés de la hipótesis y la dificultad de su prueba aparecen en relación a conjuntos infinitos. Suponiendo la buena ordenación, a todo conjunto infinito le corresponderá algún número ordinal transfinito y puesto que éstos están organizados en clases numéricas, le corresponderá asimismo un alef determinado. Dados dos conjuntos infinitos sus potencias respectivas serán idénticas o una mayor que la otra, y no cabe la posibilidad de que sean incomparables ya que todas las potencias son alef y éstos forman una serie ordenada.

La afirmación de que los alef son comparables, i. e. que pueden organizarse formando una serie simplemente ordenada o incluso bien ordenada no depende del principio de la buena ordenación. Teniendo en cuenta que los alef se definen a partir de clases numéricas de números ordinales y que estos últimos están bien ordenados, dados dos alef cualesquiera siempre podrá determinarse la relación de tamaño que mantienen entre ellos. Lo que sí depende del principio es la suposición de que no hay más potencias transfinitas que los alef, puesto que si las potencias y los alef se identifican, cualquier conjunto infinito podrá ordenarse bien a través del infinito número de ordinales transfinitos que pertenecen a la clase numérica sobre la que se define el alef que corresponda, y necesariamente tiene que corresponderle alguno si el conjunto está bien definido.

En una carta a Dedekind fechada en Halle el 28 de Julio de 1899[57], expone Cantor lo que él considera una prueba de que no pueden existir cardinales transfinitos que no sean alef. La prueba descansa en la aceptación de la hipótesis de la buena ordenación aunque Cantor no lo indique explícitamente. Antes de exponer la argumentación cantoriana hay que señalar que en esta fecha, y a causa del descubrimiento de las contradicciones de la primera teoría, Cantor había restringido la concepción que de los conjuntos tenía en <u>Beiträge</u>. La variación que introdujo en la primera primera teoría, variación a la que llamaré <u>la segunda teoría</u>, consiste casi exclusivamente en la distinción entre <u>conjuntos</u>, que son colecciones que se dejan considerar como unidades consistentemente, y <u>multiplicidades absolutamente infinitas</u>, que dan lugar a contradicciones si se las piensa formando una unidad. Sobre este tema volveremos en el capítulo siguiente. No obstante, para el estudio de la hipótesis de la buena ordenación el cambio de la primera teoría a la segunda no es relevante, ya que lo que he señalado como supuestos no demostrados de la primera lo son también de la segunda.

La prueba de que todos los cardinales transfinitos son alef la lleva a cabo Cantor en tres partes:

1. En la primera demuestra que el sistema de todos los ordinales, al que simboliza aquí por "Ω", es una multiplicidad inconsistente.

En <u>Beiträge</u>[158] se prueba que el sistema de todos los ordinales en su orden natural está bien ordenado. Al sistema que resulta de añadir el cero delante de los ordinales lo simboliza por "Ω'":

$$\Omega' = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots\ \omega_1\ \ldots$$

Esta serie tiene la propiedad de que cada uno de sus elementos designa el número ordinal de la serie formada por los elementos que la preceden en el orden en que están.

Supongamos que Ω' es un conjunto, esto es, una multiplicidad consistente. En este caso tiene que haber un ordinal δ que corresponda a la serie Ω' y que sea mayor que todos los que aparecen en ella, y por tanto mayor que todos los de la serie Ω. Pero por hipótesis, Ω contiene a todos los ordinales y así debería de haber un ordinal $\alpha \in \Omega$ que fuera idéntico a δ, con lo que tendríamos que δ es mayor que todo Ω e idéntico a alguno de ellos. Como esto es contradictorio, se sigue que la suposición de la que partíamos es falsa y por tanto Ω' es una multiplicidad inconsistente.

2. En segundo lugar prueba Cantor que los números cardinales en su orden de magnitud forman una serie similar a la de los ordinales, y por tanto Π, la totalidad de los cardinales, es también inconsistente,

$$\Pi = \aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_n, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\omega_1}, \ldots$$

A todo ordinal le corresponde un cardinal pues los conjuntos bien ordenados son, al fin y al cabo, conjuntos. A los cardinales finitos sólo les corresponde un ordinal, pero los conjuntos infinitos pueden ordenarse bien en un número infinito de maneras diferentes, cada una de la cuales determina un ordinal. Un sólo número cardinal define una clase de ordinales, la clase numérica de este cardinal. El menor ordinal transfinito se simboliza en 1899 por "ω_0" y el cardinal que le corresponde es el menor de los transfinitos, $\aleph_0$. La clase de todos los ordinales cuyo cardinal es $\aleph_0$, se simboliza aquí por "Ω_0".

Los números α que pertenecen a la clase Ω_0 satisfacen la siguiente condición:

$$\omega_0 \leq \alpha < \omega_1,$$

siendo ω_1 el primer ordinal cuyo cardinal es distinto de $\aleph_0$. El cardinal de ω_1 es alef-uno

$$\overline{\omega_1} = \aleph_0$$

-- en este caso sólo es necesario un trazo sobre ω porque para obtener el ordinal hemos tenido que realizar ya un primer acto de abstracción -- . La clase de todos los ordinales cuyo cardinal es $\aleph_1$, se simboliza por "Ω_1". Los números β que pertenecen a esta clase cumplen la siguiente condición

$$\omega_1 \leq \beta < \omega_2,$$

donde ω_2 es el menor ordinal cuya cardinalidad es mayor que $\aleph_1$. De esta manera, demuestra Cantor que para toda clase numérica Ω_n hay un alef --$\aleph_n$ -- y sólo uno que la define. Además, mediante el procedimiento de definición de los alef a partir de las clases numéricas quiere hacer ver el autor que tanto éstos como el sistema Ω son absolutamente inconsistentes, puesto que pueden ordenarse de manera similar a la serie de todos los ordinales.

3. En tercer lugar, se prueba como conclusión que la clase Π contiene todos los cardinales transfinitos: todo conjunto transfinito tiene como número cardinal un alef.

Supongamos que existe un conjunto infinito V cuyo número cardinal no sea un alef. Si no lo es, Cantor supone que será mayor que todos los alef y por tanto tendrá una parte V' equivalente al conjunto de los alef, a Π. Pero un conjunto consistente no puede tener partes inconsistentes, luego se deduce que V es inconsistente. Así, todo conjunto consistente tiene un número cardinal idéntico a algún alef de la serie Π.

q. e. d.

Como resultado de la prueba, Cantor afirma que todo conjunto infinito tiene un alef como número cardinal[60]. De esta manera considera probada la comparabilidad de todo cardinal, i. e., la ley de tricotomía para cardinales finitos e infinitos que introdujo en Beitrage sin justificación.

En mi opinión el razonamiento de Cantor es circular puesto que supone implícitamente el principio de tricotomía de la siguiente manera:

Al afirmar que todo conjunto infinito cuya cardinalidad sea distinta de los alef debe tener una parte equivalente al conjunto de éstos, se está asumiendo que un cardinal infinito que no pertenezca a Π debe ser mayor que cualquiera de los elementos de este conjunto. Se puede argumentar que no puede ser menro que los alef, pues $\aleph_0$ es el primer cardinal transfinito y por debajo de él sólo están los cardinales finitos, y que no puede ser igual a ningún alef por hipótesis. Pero si se deduce de ahí que debe ser mayor estamos suponiendo que todo cardinal es comparable y, por tanto, la ley de tricotomía. Dicho de otro modo, la argumentación de Cantor descansa en la idea de que si dos conjuntos no son equivalentes, uno debe ser equivalente a una parte del otro y ésto sólo puede afirmarse para conjuntos bien ordenados.

Cantor no dice exactamente que la cardinalidad de V tenga que ser mayor que todo alef. Lo que él dice es que si V no tiene un alef como número, la clase Ω de todos los ordinales debe ser proyectable (hineinproiizierbar) en el conjunto V, esto es, que V debe tener un subconjunto equivalente a Ω. Zermelo, en sus observaciones a la obra de Cantor[61] considera que el punto debil del argumento es justamente la suposicion no probada de que Ω se puede proyectar en V, pues eso exigiria un numero infinito de elecciones arbitrarias de elementos de V, para definir la relación entre estos y cada uno de los elemntos de Ω, de modo que cada elemento elegido de V sólo aparezca una vez. Esto, de nuevo, sólo estaría justificado en el caso de que el conjunto V estuviera bien ordenado, que es precisamente lo que hay que demostrar.

4.1.1. La prueba de Zermelo

El principio de la buena ordenación para cualquier conjunto fué demostardo por primera vez por Zermelo en una carta a Hilbert de 1904[162]. El presupuesto fundamental de la prueba de Zermelo es que a cada subconjunto M' no vacio de un conjunto dado M se le puede asociar un elemento m' de M' como su elemento distintivo. Al conjunto de todos los subconjuntos de M' de M lo simbolizaramos aquí por "P(M)". Lo que hace Zermelo entonces es definir una cobertura de M con P(M)[163].

El número cardinal de la cobertura de M con P(M) es el producto de los números de los subconjuntos M' de M y Zermelo supone que es distinto de cero.

Para probar que M puede ordenarse bien toma Zermelo una cobertura arbitraria de M sobre P(M) a la que simboliza por "γ". en la carta a Hilbert que estamos considerando se define la noción de γ-conjunto como un conjunto bien ordenado $M\gamma$ de elementos de M tal que, si a es un elemento de cualquiera de $M\gamma$ y A es el segmento que consta de todos los elementos x de M tales que x $\prec$ a, donde " $\prec$ " significa "preceder a" en una determinada ordenación", entonces **a** es el elemento distintivo de M-A. Esto significa que para todo γ-conjunto Mγ, el elemento distintivo del conjunto complementario de cada segmento A, M-A, es el elemento que sigue inmediatamente a los elementos de A.

Como los γ-conjuntos estan bien ordenados, Zermelo afirma que si Mγ' y Mγ" son dos γ-conjuntos distintos, uno tiene que ser similar a un segmento del otro. De aquí se deduce que si dos γ-conjuntos tienen un elemento en común, tambien compartirán el segmento asociado a ese elemento, y si tienen dos elementos en común, **a** y **b**, éstos tendrán el mismo orden relativo en los dos γ-conjuntos. Así o bien en ambos **a** precede a **b** o en ambos **b** precede a **a**.

Llamemos ahora <u>γ-elemento</u> a cualquier elemento de M que pertenezca a un γ-conjunto. Al conjunto de todos los γ-elementos se lo simboliza por "Lγ". A partir de aquí Zermelo formula y prueba el siguiente teorema:

> El conjunto de todos los γ-elementos puede ser ordenado como un γ-conjunto que contendrá todos los elementos de M.

Probar este teorema equivale a probar que M puede ordenarse bien. La prueba está dividida en cinco partes:

1. Si **a** es un elemento arbitrario de un subconjunto Mγ' de Mγ y **b** es un elemento arbitrario de otro subconjunto Mγ" de Mγ, entonces o bien Mγ' es idéntico a un segmento de Mγ" o bien Mγ"

es identico a un segmento de $M\gamma'$. En cualquier caso, el subconjunto mayor determina si el orden entre los dos elementos es $a \prec b$ ó $b \prec a$, pero siempre se da una de estas dos relaciones.

2. <u>Si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces $a \prec c$</u>:

Si todo γ-conjunto que contenga a c contiene el segmento anterior a c, contendrá también a a y a b. Puesto que todo γ-conjunto está bien ordenado por definición, se sigue que si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces $a \prec c$.

De acuerdo con 1 y 2 el conjunto $L\gamma$ está <u>simplemente ordenado</u>.

3. <u>Todo subconjunto $L\gamma'$ de $L\gamma$ tiene un primer elemento</u>

Si a es un elemento de un γ-conjunto $M\gamma$, y por ser un γ-elemento pertenece a un subconjunto $L\gamma'$ de $L\gamma$, entonces a $M\gamma$ pertenecerán también todos los elementos que preceden a a y por tanto $M\gamma$ incluirá a $L\gamma''$, que es el resultado de eliminar de $L\gamma'$ los elementos que siguen a a.

Como $M\gamma$ es un subconjunto bien ordenado, también lo será $L\gamma''$, que es un subconjunto de $M\gamma$. De aquí se sigue que $L\gamma''$ tiene un primer elemento, que también será el primer elemento de $L\gamma'$. De esta forma, todo subconjunto $L\gamma'$ de $L\gamma$ tiene primer elemento, por lo que $L\gamma$ es un conjunto bien ordenado.

4. <u>$L\gamma$ es un γ-elemento</u>

Todo γ-elemento arbitrario a tiene asociado, en todo conjunto $M\gamma$ al que a pertenece, el segmento A de todos los elementos que lo preceden. Además, a es el elemento distintivo de M-A. Luego, de acuerdo con la definición, Lγ es un γ-conjunto.

5. M es un conjunto bien ordenado

Supongamos que a M pertenece un individuo que no es un γ-elemento, esto es, que no pertenece a ningún γ-conjunto. Llamemos a este elemento m'. Por la hipotesis m' pertenece a M-Lγ, es decir, al conjunto de los individuos que pertenecen a M y no a Lγ. Pero entonces m' será el elemento distintivo de Lγ, y el conjunto (Lγ, m') será un γ-conjunto y m' un γ-elemento en contra de la hipótesis. Luego, por reducción al absurdo, M no puede tener elementos que no lo sean también de Lγ y así M y Lγ coinciden. Como anteriormente se probó que Lγ es un conjunto bien ordenado, se sigue que M también puede serlo.

La conclusión final de la prueba es que todo conjunto puede ordenarse bien.

q. e, d.

4.1.2 Primeras formulaciones del Axioma de Elección

Zermelo es consciente de que la fuerza de su prueba descansa en la asunción de que a todo subconjunto no vacío M' de M se le puede hacer corresponder un elemento m' de M' como su representante. Esta asunción es expresada técnicamente por Zermelo diciendo que "el producto de una totalidad infinita de conjuntos, cada uno de ellos con un elemento al menos, difiere el mismo de cero"[184]. Esta es la primera formulación de lo que hoy se conoce como Axioma de Elección o, como Russell lo llama, Axioma Multiplicativo. Todavia Zermelo no le da este nombre pero está convencido de su transcendencia y afirma, parece que con razón, que tal principio no puede reducirse a otro más simple[165].

En 1908 ofrece otra prueba del teorema de la buena ordenación[166] e introduce explicitamente el siguiente axioma:

> "Un conjunto S que puede ser descompuesto en un conjunto de partes disjuntas A, B, C, ... cada una de las cuales contiene al menos un elemento, posee al menos un subconjunto S_1 que tiene exactamente un elemento en común con cada una de las partes A, B, C, ...consideradas."[167]

Con el nombre de Axioma de Elección (Axiom der Auswahl) se encuentra por primera vez en un artículo de 1908 titulado "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I".[168] La formulación del axioma en este trabajo es la siguiente:

> "Si T es un conjunto cuyos elementos son todos conjuntos distintos de 0 y mutuamente disjuntos, su unión $\mathfrak{S}$T incluye al menos un subconjunto S_1 que tiene un elemento en común y sólo uno con cada elemento de T"[169]

Ph.J. Jourdain reivindica para sí el merito de haber sido el primero en probar el teorema de la buena ordenación y considera que su prueba es más completa que la de Zermelo. Tal reivindicación y un esquema de prueba aparecen en un artículo de 1905[170] en el que presupone que

$$\aleph_v \cdot \aleph_v = \aleph_v$$

para cualquier alef $\aleph_v$. Esta suposición es equivalente al Axioma de Elección según probó Tarski en 1924[171].

A pesar de que la introducción del axioma como tal se debe a Zermelo, algunos autores como Fraenkel, Bar-Hillel y Levy[172], Th.J. Jech[173] o Morris Kline[174] indican que ya Peano, en un trabajo de 1890, hace alusión a la necesidad de suponer el contenido del axioma. El texto de Peano es el siguiente:

> "Sin embargo, puesto que no podemos aplicar un número infinito de veces una ley arbitraria por la que se asigne a una clase un individuo de tal clase, hemos formado aquí una ley definida por la que, bajo ciertas condiciones, se asigna a cada clase de un cierto sistema un individuo de esta clase."[175]

Una versión del axioma algo diferente de la formulada por Zermelo la constituye el <u>Axioma Multiplicativo</u> de Russell, al que éste dió tal nombre porque su utilidad original consistía en hacer extensible la definición de multiplicación de Whitehead para el caso de que hubiera un número infinito de factores. La primera formulación de la versión multiplicativa del axioma se encuentra en un artículo de Russell de 1906 y dice así:

> "Dado un conjunto K de clases mutuamente excluyentes, ninguna de las cuales es nula, existe al menos una clase compuesta de un término de cada miembro de K."[176]

Russell afirma en esta obra que el axioma multiplicativo se sigue del Axioma de Elección y expresa su convicción de que el axioma de Zermelo también puede deducirse del suyo aunque afirma no hallarse aún en posesión de la prueba de esto último[177].

La versión multiplicativa se utiliza también en Principia Mathematica aunque en esta obra no se asume la validez general de este axioma, sino que se introduce donde hace falta de manera explícita. La razón por la que Russell y Whitehead consideraron que el axioma de multiplicación no formaba parte de los principios básicos para la fundamentación de la matemática descansa en la naturaleza existencial del axioma que hace muy discutible su estatuto lógico.

Como hoy sabemos, la hipótesis de la buena ordenación, también conocida como el teorema de Zermelo, es equivalente al Axioma de Elección y a la ley de tricotomía para cardinales transfinitos. Por tanto, de lo dicho se desprende que el Axioma de Elección es uno de los principios básicos inexcusable de la posición conjuntista cantoriana.

4.2 El principio del infinito actual y el Axioma de Infinitud

En la teoría cantoriana de números transfinitos la existencia de éstos depende de la previa existencia de los conjuntos adecuados, de acuerdo con las definiciones de potencia y número ordinal mediante el procedimiento de la abstracción. Dejando a un lado los ordinales, que dependen de la buena ordenación, la existencia de cualquier potencia transfinita requiere la disponibilidad de un conjunto de infinitos miembros. En el caso mas simple, $\aleph_0$ necesita de un conjunto infinito numerable para su definición. El conjunto paradigmático es el de los números naturales, cada uno de cuyos miembros se define mediante la unión de un objeto cualquiera a un conjunto ya existente. Hemos visto en el punto 3.2 cómo define Cantor los números finitos por abstracción sobre conjuntos finitos. Recordemos brevemente el proceso:

Existe un objeto particular e_0 y suponemos que tal objeto es el único individuo perteneciente a un conjunto E_0. Si abstraemos la potencia de éste obtenemos el número uno. A continuación se necesita que exista otro objeto e_1, distinto de e_0, para dar lugar a un conjunto del que se abstraiga el número dos, y luego otro objeto e_2, distinto de e_0 y de e_1 para abstraer el número tres y así sucesivamente. La definición de los números finitos descansa, pues, en la asunción de que existen infinitos objetos e_i que pueden ser añadidos a conjuntos previos a fin de dar lugar a nuevos conjuntos; es decir, se supone que los infinitos e_i son todos distintos entre sí. Si ete no fuera el caso no aumentarían de tamaño a cada paso los conjuntos E, que aparecen en las definiciones.

Sin embargo, si bien suponiendo un conjunto infinito los números cardinales transfinitos pueden caracterizarse desde un punto de vista lógico-matemático, la existencia de tal conjunto previo no puede probarse. No hay ninguna razón matemática que impida que en el universo no existan más que e_n objetos, siendo n un número finito. En ésta situación se podría definir n+1 por el procedimiento que Cantor utiliza, pero nigún número superior. Dicho de otro modo, el sistema de Cantor descansa en la hipótesis de que el mundo contiene infinitos objetos. Y el problema que se plantea desde un punto de vista conjuntista, aunque Cantor no fuera consciente de él, es que tal hipótesis, aún en el dudoso caso de que fuera cierta, no puede demostrarse.

Cantor conjeturó[178] que el número de átomos corpóreos que constituyen la materia prima de todo lo que hay era $\aleph_0$. Hoy sabemos, no obstante, que el número de partículas elementales del universo, por muy elevado que sea, es finito[179]. Sin embargo, aunque la hipótesis de Cantor fuera acertada, la existencia o no de infinitas partículas en el universo es una cuestión empírica que no debería interferir en el desarrollo de las matemáticas.

La suposición de la existencia de infinitos objetos, o de un conjunto infinito se conoce actualmente como el <u>Axioma de Infinitud</u>. La afirmación cantoriana más próxima a una formulación del axioma lo constituye lo que llamaré <u>Principio cantoriano del infinito actual</u>[180] cuya expresión más clara se encuentra en el siguiente texto:

"Para que una magnitud variable tal sea útil para una consideracion matematica, debe conocerse rigurosamente el 'dominio' de su variación de antemano a través de una definición; pero este 'dominio' no puede él mismo ser de nuevo algo variable, puesto que en caso contrario fallaría toda base sólida de consideración; luego este 'dominio' es un conjunto de valores determinado actualmente infinito"[8]

Lo que este texto significa es que, en opinión de Cantor, todo infinito ~~actual~~ potencial presupone ya un infinito ~~potencial~~ actual, y que es inconsistente aceptar la utilización del infinito potencial en el análisis y mantener al mismo tiempo que no existen dominios actualmente infinitos. Si una variable puede tomar cualquier valor sin limitación dentro de un dominio determinado, entonces no hay mas remedio que asumir que tal dominio es actualmente infinito y que proporciona el marco sobre el que puede cambiar la variable en cuestión. Es curioso que ya Aristóteles creyera en la corrección de una argumentación como la anterior a la hora de probar la existencia de infinitos actuales y ésa es la razón por la cual el filósofo griego no aceptaba los infinitos potenciales por adición, como se ha visto en el punto 1.1. En efecto, Aristóteles suponía que si existían infinitos potenciales por adición de elementos nuevos a multiplicidades dadas no se podría evitar la conclusión de que deben existir conjuntos infinitos actuales que proporcionen la materia prima para la adición mencionada. De aquí concluyó el filósofo griego que el infinito potencial del tipo descrito no puede existir, mientras que el filósofo alemán dedujo la necesidad del infinito actual para el análisis y las matemáticas en general.

Antes de que los lógicos se convencieran, a principios de este siglo, de que la existencia de conjuntos infinitos sólo podía garantizarse mediante su afirmación explícita, i. e. por medio de un axioma como el de Infinitud, algunos matemáticos contemporáneos de Cantor se enfrentaron a la prueba obteniendo argumentos que suponían lo que pretendían demostrar. Entre ellos se encuentran Bolzano, Dedekind, Frege y el Russell de Los Principios de la Matemática.

4.2.1 Los intentos de Bolzano y Dedekind

En el §13 de Paradoxien des Unendlichen[182] Bolzano pretende mostrar que la idea de infinito no es una pura invención de ciertas mentes imaginativas sino que es una idea objetiva. Para ello ensaya una prueba de que hay al menos un conjunto infinito; si no entre las cosas realmente existentes, sí al menos entre las posibles. En líneas generales su argumentación discurre como sigue:

Supongamos que A es una proposición verdadera, entonces la proposición "A es verdadera" es también verdadera. Si llamamos B a esta última, "B es verdadera" será una proposición verdadera distinta de la anterior, puesto que sus sujetos respectivos, A y B, son diferentes. A partir de la última proposición entrecomillada, a la que podemos llamar C, se forma

"C es verdadera" que de nuevo es un proposición verdadera distinta de la anteriores, y así sucesivamente al infinito.

El caso de Dedekind es muy parecido: el matematico alemán dedica el teorema 66 de su artículo "Was sind und was sollen die Zahlen?"[163] a probar la existencia de conjuntos infinitos. El enunciado del teorema dice simplemente: "existen sistemas infinitos" y en una nota[164] cita Paradoxien des Unendlichen, de Bolzano, afirmando que en esta obra se encuentra una prueba muy similar a la suya. La argumentación de Dedekind se desarrolla como sigue:

El conjunto S de todos mis pensamientos es infinito, puesto que, si suponemos que s es uno de mis pensamientos, el pensamiento s': "s puede ser objeto de mi pensamiento", es también uno de mis pensamientos y además distinto de s. Dedekind define los conjuntos -- o sistemas, como él los llama -- infinitos por medio de la reflexividad. Esto es, para Dedekind un conjunto es infinito si, y sólo si, es equivalente a alguno de sus subconjuntos propios. De acuerdo con esta definición, el conjunto S de mis pensamientos sería infinito si, y sólo si, existiera una parte S' de S equivalente a S. La condición de cumple puesto que si S' es el conjunto de mis pensamientos de la forma s', entonces S' es un subconjunto infinito de S que no contiene todos los elementos de éste último, ya que no todos mis pensamientos tienen la forma s'. Y sin embargo es equivalente a él puesto que a cada pensamiento s puede hacérsele corresponder su s', mediante el esquema " s puede ser objeto de mi pensamiento".

4.2.2 Crítica a los intentos de Bolzano y Dedekind

Actualmente sabemos que la existencia de conjuntos infinitos debe ser supuesta explícitamente en las teorías de conjuntos porque no puede probarse. Si esto es así algún fallo deben de tener las supuestas pruebas de Dedekind y Bolzano. Las estructuras de las argumentaciones de ambos son prácticamente idénticas: Se toma un objeto existente -- una proposición, en el caso de Bolzano y un objeto del pensamiento, en el de Dedekind -- y se muestra que a partir de él y mediante una determinada operación pueden obtenerse infinitos objetos del mismo tipo en un proceso ilimitado. A los procedimientos que dan lugar continuamente a objetos nuevos sobre la base de uno dado repitiendo una determinada operación sobre los objetos previamente definidos se los conoce como procedimientos recursivos. Tanto Dedekind como Bolzano utilizan procedimientos recursivos para definir conjuntos que pueden extenderse tanto como se quiera. El defecto de las pruebas de los dos autores se encuentra en que poseer un procedimiento para obtener conjuntos cada vez mayores por adición de nuevos elementos no significa en modo alguno que se obtenga alguna vez un conjunto infinito. Sea cual sea la cantidad de proposiciones o de objetos del pensamiento que puedan conseguirse mediante los esquemas "X es una proposición verdadera" y "s es objeto de mi pensamiento" esta cantidad puede aumentarse mediante una nueva aplicación de los esquemas. Así el número de proposiciones o de objetos del pensamiento calculados aumenta cada vez en una unidad pero no deja de ser finito ni se acerca un ápice al infinito. Los procedimientos recursivos pueden definir conjuntos potencialmente infinitos pero no infinitos en acto.

Los intentos de Bolzano y Dedekind serían correctos solo en el caso de que se aceptara algún principio similar al del infinito actual de Cantor: todo infinito en potencia presupone un infinito en acto como su ámbito de variación. Pero con esto no hemos avanzado nada puesto que tal principio no puede demostrarse. Bolzano sugiere débilmente que el proceso recursivo que él utiliza apunta hacia la existencia de un conjunto infinito en acto que posibilita la definición de unas proposiciones a partir de otras. El texto de Bolzano al que me refiero es el siguiente:

> "Podemos construir siempre nuevas proposiciones [sobre otras], o mejor dicho, existirían tales proposiciones en sí mismas tanto si las construimos como si no."[185]

En mi opinión este texto significa que el hecho de que se puedan conseguir unas proposiciones a partir de otras en un proceso sin limitación <u>indica</u> que el conjunto de las proposiciones es actualmente infinito, pero ésto no es una <u>prueba</u> ni en el caso de Bolzano ni en el de Cantor.

4.2.3 El intento de Frege

En Los Fundamentos de la Aritmética[186] afirma Frege que el número que corresponde al concepto "número finito" es un número infinito. Un número es para Frege la extensión de un concepto, y si existen números infinitos es porque existen a su vez extensiones de conceptos que son infinitas. Veamos cómo pueden justificarse estas afirmaciones de existencia en el sistema fregeano. Para ello tendremos que exponer brevemente las tesis y definiciones centrales que sostiene el lógico aleman acerca de los números finitos:

Frege utiliza dos nociones primitivas: concepto y objeto. Un concepto puede describirse como una función proposicional de un argumento cuyos valores son valores de verdad. Objeto es lo que no es concepto. Cuando se dice, por ejemplo, que el número de habitantes de Granada capital es 300.000 no se está afirmando, en opinión de Frege, nada de los habitantes de Granada sino que se está dando información acerca del concepto "habitante de Granada capital en 1987" y lo que se dice es que hay 300.000 objetos que caen bajo ese concepto, que su extensión está formada por 300.000 individuos. Dicho de otra manera, los números afirman algo acerca de los conceptos, y Frege considera que la expresión "x es un número" significa "existe un concepto tal que x es el número que le corresponde"[187]

Supongamos que tenemos dos conceptos F y G. Si es posible emparejar cada objeto f que caiga bajo F con un objeto g que caiga bajo G, y sólo uno, y viceversa, de manera que no queden objetos sin emparejar bajo ninguno de los dos conceptos, Frege dirá que F y G son equinuméricos. Utilizando esta noción define el número de un concepto como sigue:

> "El número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto 'equinumérico al concepto F'"[188]

En otras palabras, el número de un concepto F es el conjunto de todos aquellos conjunto que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con la extensión de F.

Dos números son iguales cuando las extensiones de los conceptos a los que se aplican son equivalentes. En la terminología de Frege, la expresión

> "El número que corresponde al concepto F es el mismo que el que corresponde al concepto G"

significa lo mismo que

> "La extensión del concepto 'equinumérico al concepto F' es igual a la extensión del concepto 'equinumérico al concepto G'"[189]

Si los números son extensiones de conceptos, definir un número determinado no es otra cosa que identificar el concepto al que dicho número corresponde. En Los Fundamentos de la Aritmética se definen los números finitos por inducción, se define el cero y la relación por medio de la cual se determina el resto de los números a partir del cero.

El concepto al que corresponde el cero y mediante el cual se define es "desigual consigo mismo". La definición que Frege da es

"El cero es el número que corresponde al concepto 'desigual consigo mismo'"[190]

La relación que va a permitir la caracterización de todos los números finitos una vez que disponemos del cero es "n sigue inmediatamente a m en la serie de los números naturales" y se define de la siguiente manera

" 'n sigue inmediatamente a m en la serie de los números naturales' significa 'existe un concepto F y un objeto x que cae bajo F de tal modo que el número que corresponde al concepto F es n, y el número que corresponde al concepto 'que cae bajo F, pero no es x' es m"[191]

Esta definición descansa en la teoría fregeana de las relaciones hereditarias, que se expone en Begriffschrift y desde esta teoría se justifica la inducción aritmética.

Veamos ahora cómo aparecen los demas números naturales: ¿Hay algún número que siga inmediatamente al cero?. Decir que x sigue inmediatamente a cero significa que existe un concepto F y un objeto a bajo F y que al concepto "que cae bajo F, pero no es a" le corresponde el cero y al concepto F le corresponde x. El concepto utilizado en este caso por Frege en lugar de F es "igual a 0". Bajo dicho concepto cae un objeto, a saber, el cero y bajo el concepto "que cae bajo 'igual a 0' pero que no es cero" no cae ningún objeto, por lo que le corresponde el cero. Así el concepto que determina el número siguiente a cero es "igual a 0". Este número es el uno y se define

"El 1 es el número que corresponde al concepto 'igual a 0'"[192]

Para poder hablar con propiedad del número que sigue inmediatamente a x, siendo x cualquier número finito, hay que probar en primer lugar que todo número finito tiene un sucesor y en segundo lugar que sólo tiene uno. Esto último está garantizado puesto que la definición de serie de los números naturales que ofrece Frege descansa en su teoría de las propiedades hereditarias y en ésta última se presupone que las relaciones implicadas son pluriunívocas, de modo que en el paso de un número al siguiente en la serie de los números naturales no puede adjudicársele a cada número más que uno. En cuanto a la primera tesis, que cada número tiene un sucesor, se ofrece en Los Fundamentos de la Aritmetica un esbozo de prueba que veremos más adelante. Consideremos antes brevemente la definición de serie y la concepción de las propiedades hereditarias de Frege:

Sea f una relación pluriunívoca cualquiera. Si todo objeto y con el que un objeto con la propiedad P está en la relación f tiene la propiedad P diremos que P es una propiedad hereditaria en la serie definida por la relación f,-- o la f-serie en la terminología que Frege utiliza --. En otras palabras, si de las proposiciones "el objeto x tiene la propiedad P" y "x está en la relación f con y" se sigue siempre "y tiene la propiedad P" entonces P es una propiedad hereditaria a través de f[193]. Formalmente,

P es hereditaria en la f-serie si, y sólo si

$(x)(y)\ (Px\ .\ f(x,y) \rightarrow Py)$.

Si P es una propiedad hereditaria en la f-serie y si del hecho de que un individuo y con la propiedad P y que tenga la relación f con un individuo x, se puede inferir siempre que x tiene la la propiedad P, Frege dirá que x sigue a y en la f-serie o que y precede a x en la f-serie. Formalmente,

> Para cualesquiera dos individuos x e y, x sigue a y en la f-serie si, y sólo si, P es una propiedad hereditaria en la f-serie y si todo individuo que tenga la relación f con x tiene la propiedad P, entonces y tiene la propiedad P. [194]

Si un individuo cualquiera z es igual a x o bien sigue a x en la f-serie Frege dirá que z pertenece a la f-serie que empieza con x o que x pertenece a la f-serie que termin. con z. La definición es la siguiente:

> "z pertenece a la f-serie que empieza con x o x pertenece a la f-serie que termina con z" significa "z es igual a x o z sigue a x en la f-serie"[195]

La conexión de lo dicho hasta aquí con el tema de los números naturales y por tanto con el concepto "número finito", cuya explicación ha exigido este rodeo, se ve con claridad cuando en la definición anterior se sustituye la relación f por la relación "n sigue inmediatamente a m en la serie de los numeros naturales". En este caso, en vez de hablar de la f-serie hablaremos de la serie de los números naturales o, para abreviar, de la N-serie.

Los numeros finitos son el cero y todos los que le siguen en la N-serie. La definición que ofrece Frege es la siguiente:

> "n es un número finito" significa "n pertenece a la N-serie que empieza con 0"[196]

La propiedad de pertenecer a la N-serie que empieza con cero es hereditaria en la N-serie[197].

Para mostrar que la extensión del concepto "número finito" es infinita hay que probar que la N-serie no tiene último término, esto es, que todo número finito n tiene un sucesor distinto de n. Ello requiere la demostración de que el número del concepto "perteneciente a la serie de los números naturales que termina con n" es el que sigue inmediatamente a n en la serie de los números naturales. En <u>Los Funadamentos de la Aritmetica</u>[198] se ofrece un esquema de prueba. La prueba propiamente dicha tendría que llevarse a cabo en dos partes:

1. Hay que probar que <u>si</u> n sigue inmediatamente a m en la N-serie, y <u>si</u> para m vale que el número que corresponde al concepto "perteneciente a la N-serie que termina con m" sigue inmediatamente a m en la N-serie, <u>entonces</u> tambien vale para n

que el número del concepto "perteneciente a la serie de los números naturales que termina con n" sigue inmediatamente a n en la N-serie.

2. Hay que probar que lo anterior vale para el cero y que si z pertenece a la N-serie que empieza con cero, también vale para z.

Una vez concluida la prueba se podrá afirmar que entre los números finitos no existe uno que sea el último. En la primera parte de la prueba se requiere la suposición, como el propio Frege indica, de que ninguno de los números finitos se sigue a sí mismo en la serie de los números naturales. En opinión de Frege, éste es el rasgo esencial que distingue a los números finitos de los infinitos. Esto es, que al contrario de lo que ocurre entre los números finitos, los números infinitos se siguen a sí mismos[99].

Como sabemos, Frege considera que el número del concepto "número finito" es un número infinito. De acuerdo con sus definiciones, el número que corresponde al concepto "número finito" es la extensión del concepto "equinumérico con el concepto 'número finito'". Si este número existe, puede mostrarse que se sigue a sí mismo en la serie de los números naturales con la sola ayuda de las definiciones introducidas hasta el momento. Si en la definición de "n sigue inmediatamente a m en la N-serie" se sustituye el concepto F por "número finito" y el objeto f que cae bajo él poe el número 1, llegaremos a la conclusión de que el número que corresponde a "número finito" es el mismo que el que corresponde a "número finito distinto de 1" puesto que entre las extensiones de ambos conceptos puede definirse una relación biunívoca. Por tanto, el número del concepto "número finito" se sigue a sí mismo en la N-serie. De este modo, se identifica el concepto mediante el que se define el primer número infinito, el número de elementos que tiene la N-serie, y se muestra que éste no es ninguno de los finitos.

A primera vista puede parecer que Frege no necesita presuponer ninguna versión del Axioma de Infinitud[200]. En mi opinión esto es falso. Desde luego, si se entiende por utilizar el Axioma introducir explícitamente una fórmula que garantice la existencia de al menos un conjunto infinito, entonces Frege no lo utiliza. Sin embargo, la teoría de Frege depende de un principio de abstracción indiscriminado -- la conocida ley V de Grundgesetze -- que afirma que siempre es posible el paso de un concepto a su extensión, es decir, que todo predicado define un conjunto: el conjunto de los objetos que satisfacen el predicado. La ley V puede interpretarse como un esquema axiomático de existencia de conjuntos y, en este sentido, el Axioma de Infinitud es una instancia de la misma. A partir del concepto de "número finito" surge un conjunto infinito como su extensión y la ley V garantiza que tal conjunto existe. Tras las contradicciones en la teoría de conjuntos se rechaza un principio de abstracción tan potente y se introducen axiomas particulares de existencia que provean de los objetos necesarios para el desarrollo de la teoría, entre estos axiomas se encuentra el de Infinitud. Por todo ello, decir que Frege no necesita el axioma puede llevar a confusión. Frege no necesita afirmar lo particular porque dispone de un principio general que engloba todos los axiomas de existencia de las teorías de conjuntos posteriores.

Sin el principio de abstracción, Frege se encuentra en la misma situación que Bolzano, dedekind y Cantor: mediante un procedimiento recursivo se obtienen todos los números finitos pero en cada momento del proceso sólo tenemos una cantidad finita de ellos.

4.2.4 Los intentos de Russell

Russell creyó que era posible probar la existencia de un conjunto infinito de objetos antes de construir su teoría de los tipos para solucionar las paradojas lógicas de la teoría de conjuntos. La idea sobre la que supuso poder demostrar la existencia de conjuntos infinitos se recoge en su obra Introduction to Mathematical Philosophy[20] aunque en 1919, fecha de su publicación, ya no la consideraba válida. Es la siguiente:

Supongamos que hay n individuos, siendo n cualquier número finito incluido el cero, entonces habrá 2^n clases de individuos, 2^{2^n} clases de clases de individuos y así sucesivamente. Así la serie completa de individuos, clases de individuos, clases de clases de individuos...

$$n + 2^n + 2^{2^n} + \dots$$

será infinita, tendrá la cardinalidad infinita menor, $\aleph_0$.

La suposición de que hay n individuos no invalida la prueba, ya que si n puede ser cero lo único que suponemos es o que existen individuos o que no existen y esto siempre puede afirmarse.

Russell considera que el error de la argumentación anterior consiste en lo que él denomina una "confusión de tipo"[202]. En la teoría que Russell construye para evitar las contradicciones se prohibe expresamente la existencia de clases cuyos elementos pertenezcan a niveles o tipos distintos. Esto es, en líneas genarales, equivalente a decir que todos los elementos de una clase han de ser individuos, o todos clases de individuos, o todos clases de clases de individuos ... La división de la realidad en órdenes y tipos, como hace Russell, impide que en su teoría se pueda probar alguna afirmación equivalente al Axioma de Infinitud.

Naturalmente, la crítica que el propio Russell hace de su posición primitiva es una crítica interna a la teoría de los tipos. Podría pensarse que si se sostiene un punto de vista menos sofisticado que éste de la división impermeable en niveles la prueba de Russell sería adecuada, pero sin embargo no es así. Aún con un punto de vista más liberal que el de la teoría de los tipos la argumentación anterior es incorrecta y lo es por la misma razón que lo eran las de los autores anteriormente tratados. Añadiendo a los objetos que existan -- si existe alguno -- las clase que pueden formarse con ellos y después las que pueden formarse con las clases ya constituidas etc. se consiguirán conjuntos cada vez más abarcantes, y perseverando lo suficiente daremos con conjuntos de cualquier cardinalidad finita, pero no conseguiremos jamás un conjunto infinito por muchos que sean los objetos que logremos reunir.

En Los Principios de la Matemática[203] ofrece Russell otra estrategia que pretende probar lo mismo y que no depende de la teoría de los tipos:

El cero es un número natural, y como entre éste y cualquier otro número n, ambos incluidos, hay n+1 números, n+1 existe para todo n y además n+1 es distinto a todos sus predecesores. En conclusión, los números pueden ordenarse según el orden de su aparición de manera que formen una serie de tipo ω, con $\aleph_0$ términos[204]. De manera similar, aunque más extensamente, se expresa en su artículo "The Axiom of Infinity" (1904). Como es evidente ya, este último intento del matemático inglés adolece del mismo defecto que he señalado en todos los anteriores.

4.2.5 La primera formulación del Axioma de Infinitud

Como acabamos de ver, Cantor supuso sin más que hay conjuntos infinitos con todos sus elementos disponibles de una vez. Nunca creyó que esta afirmación tuviera que justificarse dentro de la teoría de conjuntos y por eso no hay ninguna referencia a ella en su obra conjuntista por excelencia, Beiträge. Sí se ocupó de la noción de infinitud actual y de su justificación desde un punto de vista filosófico tanto en

Grundlagen como en *Mitteilungen*, pero nunca trató de defender la existencia de conjuntos infinitos sino mas bien la ausencia de contradicción del concepto de infinito actual. Tanto es así que la introducción de multiplicidades infinitas sin una justificación explícita es uno de los rasgos definitorios de la postura cantoriana. Otros autores del contexto intelectual de Cantor, como Bolzano, Dedekind, Frege y el primer Russell, fueron conscientes de que la afirmación de existencia de lo que hoy conocemos por el Axioma de Infinitud no podía suponerse sin alguna explicación explicación e hicieron vanos intentos de probarla. Que se sepa, ni Bolzano ni Dedekind conocieron los errores de sus pruebas, Frege sí vivió para ver los problemas que su ley V provocaba y Russell, el más joven de todos, tuvo tiempo de rechazar sus primitivos ensayos dirigidos a la prueba del axioma y comprender la necesidad de su afirmación explícita como lo prueba el hecho de que ya aparece como un axioma bien delimitado en *Principia Mathematica*.

El primer autor que fue consciente de que la existencia de conjuntos infinitos era necesaria en la teoría de conjuntos y que, no obstante, no podía demostrarse, fue E. Zermelo. El matemático alemán ofreció en 1908, en un artículo titulado "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I"[206], la primera teoría axiomática de conjuntos. En ella el Axioma de Infinitud aparece como Axioma VII y dice así:

> "Existe en el dominio [de la teoría] al menos un conjunto Z que contiene como elemento al conjunto vacío y está constituido de tal forma que a cada uno de sus

elementos a le corresponde otro elemento de la forma {a}, en otras palabras, que con cada uno de sus elementos a, contiene tambien el correspondiente conjunto {a} como un elemento."[207]

4.3 El Problema y la Hipótesis del Continuo

No debe confundirse el problema del continuo con la llamada Hipótesis del Continuo, que abreviaré HC, o Hipótesis de Cantor. Gödel formula el problema de la siguiente manera:

> "¿Cuántos puntos hay en una línea recta de un espacio euclídeo? Una pregunta equivalente es: ¿Cuántos conjuntos diferentes de números naturales existen?."[208]

Se denomina habitualmente Hipótesis del Continuo a la suposición de que el conjunto de los números reales o de los puntos de una línea es equivalente a la segunda clase numérica, suposición ralizada originalmente por Cantor. Hay muchas maneras de expresar la misma idea, una de las más conocidas es la siguiente

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \qquad (1)$$

En la fórmula (1) se indica que el número de subconjuntos del conjunto de los números naturales o de cualquier conjunto de $\aleph_0$ miembros es $\aleph_1$, el número transfinito inmediatamente superior.

La primera formulación del problema del continuo en la obra de Cantor es de 1878. Cantor se pregunta:

> "en cuántas y cuáles clases pueden descomponerse los conjuntos lineales, si los conjuntos de la misma potencia se ponen en una y la misma clase, [y] los conjuntos de distinta potencia en clases distintas."[209]

Es decir, ¿cuántas clases de equivalencia necesitaríamos para albergar todos los subconjuntos infinitos de un continuo?. La primera expresión de HC consiste en la respuesta cantoriana a esa cuestión: exactamente dos.

La Hipótesis vuelve a ser retomada en Grundlagen sin que el autor añada a lo dicho más que la identificación explícita de la cardinalidad de los puntos de un intervalo (0 ... 1) con la clase numérica (II). De esta manera reformula lo que expuso en 1878 diciendo:

> "todos los subconjuntos infinitos de puntos P tienen la potencia de la primera clase numerica (I) o la potencia de la segunada clase numerica (II)."[211]

y promete ofrecer en breve una prueba de esta afirmación. Es sabido que Cantor no encontró nunca la prueba, pero en 1884 estaba convencido de haberla conseguido. El 26 de Agosto de este año le escribe a Mittag-Leffler:

"Estoy en posesión de una prueba extraordinariamente simple del teorema más importante de la teoría de conjuntos, que el continuo tiene la potencia de la clase numérica (II)."[212]

La supuesta prueba discurriría por los siguientes pasos: primero hay que demostrar que todo conjunto cerrado tiene la cardinalidad de la clase (II). En segundo lugar, y por medio de un teorema que cantor ya ha demostrado[213], que dice que todo conjunto de puntos cerrado P puede dividirse en un conjunto R de la primera potencia y en un conjunto perfecto S, se deduce que S tiene la segunda cardinalidad transfinita. Luego si todo conjunto perfecto tiene la potencia del continuo, éste tendrá la potencia de la segunda clase numérica.

Cantor afirma que lo único que falta para que la demostración pueda darse por concluida es aislar un conjunto perfecto de la segunda cardinalidad[214].

Cantor escribió de nuevo a Mittag-Leffler, el 20 de Ocyubre, indicándole que su presunta demostración estaba equivocada. Poco después, el 14 de Noviembre, le comunicaba que había encontrado una prueba negativa: el continuo no tiene la cardinalidad de ninguna clase numérica, lo que dicho sea de paso hubiera implicado que su suposición de la buena ordenación de cualquier conjunto era falsa. Y a las veinticuatro horas volvía a escribirle diciendo que en esta última demostración también había un error[215].

No teneros noticias de que volviera a intentar probar la hipótesis en su trabajo posterior, pero a pesar de que la prueba se le resistió, no por eso dejó de considerarla verdadera. La hipótesis es muy plausible en determinados contextos. Por ejemplo, los conjuntos de puntos que conocemos, si son infinitos, tiene la potencia del conjunto de los números naturales o son equivalentes al continuo. Además no disponemos de ningún conjunto de puntos del que se pueda demostrar que no es ni de la primera cardinalidad transfinita ni de la segunda, siendo infinitos. Naturalmente esto no implica la hipótesis, porque no puede descartarse que no nos encontremos alguna vez con un conjunto de cardinalidad m, tal que

$$\aleph_0 < m < 2^{\aleph_0}.$$

La negación de esta última fórmula es otra manera de expresar la hipótesis:

(2) No existe ningún número cardinal entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$.

Puede considerarse que HC constituya la respuesta cantoriana al problema del continuo, aunque pueden darse otras muchas. HC mantiene una estrecha relación con otra suposición cantoriana, también indemostrada, la de la buene ordenación de cualquier conjunto. Si ésta última es falsa, entonces no todo conjunto puede ordenarse bien, lo que significa que no todo conjunto tendrá un número ordinal. Los números ordinales transfinitos, los alef, han sido definidos por Cantor por medio de clases numéricas, que son clases de números ordinales. Y sabemos que en la teoría cantoriana, si un conjunto tiene un alef por número cardinal habrá una clase numérica de ordinales capaces de ordenar tal conjunto.

Del principio de la buena ordenación se sigue que la potencia del continuo tiene que ser una de las definidas a través de las clases numéricas, es decir, tiene que ser uno de los alef,

$$\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

Qué alef sea ese es el problema del continuo, y la afirmación de que es alef-uno la hipótesis de Cantor.

Hay una formulación de HC que no involucra el principio de la buena ordenación:

(3) Ningún conjunto de números ordinales de la clase (II) tiene una cardinalidad mayor que $\aleph_0$ y menor que $\aleph_1$.

Es una formulación más débil que las dos anteriores puesto que sólo se refiere a ordinales. Estos, según los principios de formación introducidos por Cantor, forman una serie bien ordenada, por lo que el principio anterior es superfluo en este caso[217].

A pesar de lo que pueda parecer teniendo en cuenta lo dicho hasta aquí, no lo desconocemos todo acerca de la cardinalidad del continuo. Sabemos, por ejemplo, que no es idéntica a $\aleph_\omega$. A esto se le llama Teorema de König, por haber sido probado por éste en 1904. Puede probarse que tampoco es idéntica a $\aleph_\alpha$, donde α es un ordinal de la clase (II) y del segundo tipo, i. e. un límite[218].

A la suposición de que para cualquier ordinal α,

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$$

se la denomina Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC), puesto que la HC es un caso particular de ella, a saber, cuando $\alpha = 0$. Otra versión de HGC es

(5) Para cualquier alef $\aleph_\alpha$, $2^{\aleph_\alpha}$ es el que le sigue inmediatamente.

En los textos de Cantor no aparece ninguna afirmación que nos permita sospechar que supuso alguna vez algo parecido a la hipótesis generalizada.

5. Cantor y los infinitésimos

Podría pensarse que el tratamiento matemático del infinito llevado a cabo por el matemático alemán desde Grundlagen en adelante permitiría la solución definitiva de un problema viejo y recurrente en la historia occidental del cálculo: la existencia de magnitudes infinitamente pequeñas o infinitésimos. Cantor así lo creyó, pero la solución que él desarrolló es negativa. El autor de Grundlagen manifiesta en esta obra su convicción de que tales magnitudes infinitamente pequeñas no existen y que los autores que las han defendido han caído en el error de confundir el infinito potencial con el actual[31]. Los infinitésimos, tan útiles en el análisis y en la teoría de funciones, no pueden existir más que como infinitos potenciales, i. e. en opinión de Cantor, como magnitudes que pueden disminuir más allá de cualquier magnitud finita dada. Las magnitudes potencialmente infinitas permanecen siempre en el ámbito de lo finito, y por eso Cantor ha llamado al infinito potencial finito variable o infinito impropio. Lo dicho se aplica igualmente a los infinitésimos: son magnitudes finitas que son susceptibles de una disminución continua sin que por ello dejen de ser magnitudes finitas. En Grundlagen no profundiza mas en el problema de los infinitésimos.

Vuelve a hacer referencia a este tema en su correspondencia. En una carta a Goldscheider de 1887[220] afirma el autor que la existencia de los números transfinitos no sólo no apoya la de los infinitésimos, sino que por el contrario la única prueba posible, en su opinión, de que a estos últimos se les atribuyen características contradictorias descansa en algunos teoremas de la teoría de números transfinitos. Cantor da las indicaciones que llevarían a formalizar tal prueba. Son las siguientes:

Si se supone que existe una magnitud λ infinitamente pequeña, el producto

$$\lambda . n$$

donde n es cualquier número finito, será menor que 1. También puede probarse que

$$\lambda . v$$

será menor que 1, si v es cualquier número transfinito. Así, λ no puede convertirse en una magnitud finita por muy grande que sea la magnitud que se le añada, lo que contradice el mismo concepto de magnitud[221], una de cuyas características esenciales es que cualquier magnitud puede considerarse como una parte de otras magnitudes. Cantor considera un gran triunfo de su teoría del infinito la argumentación anterior que él supone que demuestra concluyentemente la no existencia de los infinitésimos. Otro merito que Cantor se atribuye en relación a las magnitudes infinitamente pequeñas es que si se acepta su "prueba" de inexistencia, de ella se sigue el <u>Axioma de Arquímedes</u>:

> "Cualesquiera que sean los números reales a > 0 y b, podemos encontrar un número natural n tal que n.a > b."[222]

y lo que Cantor llama <u>La Hipótesis de Euclides</u>:

> Cualquier segmento finito de recta puede reconstruirse a partir de un segmento tan pequeño como se quiera por medio de un número finito de repeticiones de este segmento.[223]

De esta manera Cantor afirma que, si se acepta su teoría, el axioma anterior dejaría de serlo y se convertiría en un teorema deducible de su teoría de números transfinitos. En las anotaciones a la obra de Cantor hechas por el editor, E. Zermelo, éste manifiesta[224] su escepticismo ante el optimismo del autor. Zermelo afirma que ni puede probarse la no-existencia de los números transfinitos ni la de los infinitésimos. En el caso de estos últimos, lo que se discute es más bien la aceptación de sistemas numéricos no arquimedianos, que Zermelo considera como "irreprochables" (<u>einwanfrei</u>)[225]. En efecto, es evidente que en la prueba de Cantor se está suponiendo el axioma de Arquímedes y la hipótesis de Euclides; de ahí deduce Cantor que no pueden existir magnitudes actuales infinitamente pequeñas y nada de extraño tiene el hecho de que de la prueba del autor se deduzcan la hipótesis y el axioma, teniendo en cuenta que él los ha introducido previamente. Lo que sí es extraño es que Cantor no sea consciente de que en este caso él mismo esta cometiendo petición de principio, y su prueba es del mismo estilo que las que intentaban demostrar que no existían conjuntos infinitos en acto, tan brillantemente desmontadas por él.

6. La numerabilidad: concepción tradicional y concepción ampliada

En la obra de Cantor, el término "numerable" tiene dos significados: uno estricto y otro más amplio. En sentido estricto "numerable" se dice de un conjunto cuando éste se encuentra en determinada relación con el de los números finitos, a saber, un conjunto es numerable si su potencia es un número natural o es él mismo equivalente al conjunto de los números naturales. Posteriormente Cantor extiende el concepto de número hasta abarcar los números transfinitos, con lo que no tiene ya un sentido tan preciso decir que un conjunto infinito numerable es equivalente al conjunto de los números porque en la teoría cantoriana se podría responder con la pregunta;¿ a qué números?. Si los números transfinitos son números con todas sus consecuencias, los conjuntos a los que se apliquen seran también, en cierto sentido, "numerables". De ahí que Cantor introduzca otro sentido del término, éste más extenso, y que en esta segunda acepcion pueda decirse que todo conjunto infinito bien definido es numerable -- al menos hasta la aparición de las contradicciones en la teoría --. Como ya sabemos, hay una estrecha relación entre las potencias y los números ordinales transfinitos: los conjuntos de cardinalidad infinita pueden ordenarse de manera que les corresponda un determinado ordinal, pero esto no ocurre aleatoriamente. Un conjunto de cardinalidad $\aleph_n$ podra ordenarse mediante los números de la clase numerica (n+2). En este sentido dice Cantor que los conjuntos de $\aleph_0$ miembros son numerables a través de los ordinales de la clase numérica (II), los de la cardinalidad inmediatamente superior, $\aleph_1$, por los de la clase numérica (III), etc. Este es el significado preciso de la concepción ampliada de la numerabilidad.

Que todo conjunto sea numerable significa que sea cual sea su tamaño existen ordinales suficientes como para determinar el número (o los números) que le corresponde(-n). En los conjuntos finitos asignamos un número a un conjunto al contar sus elementos. Si no queremos introducir elementos subjetivos, como el contar, diremos que lo único imprescindible para que se pueda determinar el número del conjunto es que esté bien ordenado. Para todo conjunto finito puede definirse una buena ordenación. Lo que Cantor ha hecho al extender el concepto de numerabilidad a los conjuntos infinitos es ampliar el alcance de esta característica de los finitos para que alcance a todo conjunto bien definido sin importar su tamaño. De esta manera, ha procurado homogeneizar al maximo el ambito de lo matematizable, no haciendo mas distinciones entre finito e infinito que las absolutamente imprescindibles. M. Hallett llama a este rasgo de la teoría cantoriana _Principio del Finitismo_, que consiste en el intento de tratar lo infinito matemático del modo más parecido posible a como se trata lo finito[illegible]. Hallett considera que la constitución y las relaciones que se conocen entre conjuntos y números finitos han servido a Cantor de principios heurísticos para adentrarse en el infinito. En este punto coincido con su opinión. No obstante, no hay que llevar el principio del finitismo demasiado lejos. Recuérdese que precisamente por intentar aplicar al infinito las características de los conjuntos finitos se descubrieron las "paradojas del infinito", entre las que destaca la de Galileo, y esto motivó el rechazo del infinito durante siglos.

6.1 _Crítica a la interpretación de Hallett de la numerabilidad en la obra de Cantor_

Identificar la primera acepción del término "numerable" con "contable" en mi opinión es dudoso, puesto que el último término hace referencia a un acto por nuestra parte, que tiene que llevarse a cabo dentro de las limitaciones de nuestra existencia finita, y no hay sin embargo ninguna forma de recorrer en un tiempo finito un conjunto infinito numerable de forma completa. No obstante, con cierta amplitud de criterio, podríamos aceptar la identificación sobre la base de que al contar uno comienza asignando elementos del conjunto de los números finitos a otros objetos, es decir, los elementos del conjunto de los números finitos sirven para contar --ente otras cosas --. En la segunda acepción, por el contrario, tal identificacion es injustificable en mi opinión. M. Hallett, no obstante, identifica la numerabilidad con la susceptibilidad de ser contado[227].

En Cantorian Set Theory[228] M. Hallett trata de mostrar que Cantor ha intentado construir su teoría sin elementos subjetivos pero que no ha tenido éxito. El psicologismo y el subjetivismo han hecho mella fundamentalmenta en las nociones de potencia y número ordinal. Coincido con Hallett en que la definición de potencia está impregnada de ambigüedad a causa sobre todo de la utilización de un tipo inexplicado de abstracción que convierte una actividad del pensamiento humano en parte esencial de tal definición. Dicho sea de paso, el problema de la abstracción afecta también a la definición de número ordinal tan profundamente como a la de potencia.

Sin embargo, no coincido con Hallett en su crítica a la teoría del número ordinal. La tesis de Hallett[229] consiste en lo siguiente: Si Cantor no ha sido capaz de demostrar su hipótesis de que todo conjunto está bien ordenado, al utilizar el concepto de numerabilidad está fundamentando la teoría de los ordinales, y a traves de ella de las potencias en una especie de extensión de nuestra capacidad para contar conjuntos. Hallett distingue tres estadios teóricos en el camino hacia las definiciones modernas de los números ordinales:

El primero, al que pertenecería Arquímedes, se caracterizaría por ligar la existencia de un número definido para una colección a nuestra capacidad actual de contar los miembros de dicha colección. En el segundo se produce el paso desde la aceptación de nuestra capacidad actual a una capacidad potencial. Se acepta que existen numeros arbitrariamente grandes, que se generan a partir del primero mediante la adición de la unidad. Y el tercero, que relaciona la existencia de un número únicamente con la existencia de una buena ordenación. Según Hallett, Cantor estaría oscilando entre el segundo y el tercer estadios. Desea pertenecer al tercero pero no puede liberarse del segundo, y la traba que se lo impide es, en opinión de Hallett, el concepto de numerabilidad. El término que Cantor utiliza es "Abzählbarkeit" y el verbo del que depende es "abzählen", e indica Hallett, "como en abzählen an die (sic)Fingern, contar con los dedos de uno"[230]. Y en el mismo lugar dice:

> "Los números ordinales se toman para enumerar o contar conjuntos, y existe una fuerte sugestión de que Cantor toma aquí 'contar' en una sentido más o menos literal."[231]

Según Hallett, el punto crucial que hace que Cantor hable en este sentido cuasi literal se encuentra en su incapacidad para probar el teorema de la buena ordenación. Hallett considera que si Cantor hubiera demostrado este teorema su teoría quedaría encuadrada perfectamente en la tercera etapa, sin embargo, en su situación no tiene más remedio que echar mano de nociones constructivas.

En mi opinión, la convicción por parte de Cantor de que todo conjunto puede ordenarse bien era tan fuerte que no influyó especialmente en su teoría el hecho de que no pudiera probarlo. En la obra de Cantor hay a veces términos con resonancias constructivistas, pero esto no significa que él tuviera dudas respecto de los principios de formación de ordinales. Siempre mantuvo que todo conjunto puede ordenarse bien, en la definición de buena ordenación no hay nada subjetivo, y tampoco lo hay en su definición de número ordinal -- excepto como ya he dicho, en lo concerniente a la abstracción --. No es justo, desde mi punto de vista, colocar a Cantor entre los estadios segundo y tercero y hacer depender la teoría de ordinales transfinitos de una dudosa capacidad de contar los conjuntos "en principio". Cantor es el fundador del tercer estadio y se encuentra completamente instalado en él; siempre que introduce los números ordinales, tanto en <u>Grundlagen</u> como en <u>Beiträge</u>, señala explícitamente que dependen de manera esencial de la buena ordenación.

La verosimilitud de la tesis de Hallett descansa, en gran medida, en su empeño por traducir "abzählbar" por "countable" o, en castellano, "contable", y no por "numerable" o "enumerable" que son términos generalmente admitidos. Incluso cita la traducción al inglés de van Heijenoort de una carta de Cantor a Dedekind de 1899 y señala que ha retocado el texto de van Heijenoort cambiando "denumerable" ("enumerable") por "countable" ("contable")[222]. En mi opinión esta traducción es sesgada. Hallett admite que no tiene que existir necesariamente contradicción entre una actitud constructivista, como él le supone a Cantor, y la aceptación de multiplicidades infinitas, pero sí aparece una tensión si desde posiciones constructivistas se sustentan nociones de conjunto e infinitud demasiado liberales. Este es el dilema de Cantor, en opinión de Hallett: unas definiciones poco potentes para una ontología tan superabundante. Dice Hallett:

> "Pero en [1883b] aplica "contable" a <u>todos</u> y cualesquiera conjuntos infinitos. Y en <u>esto</u> es donde descansa realmente la tensión. Cantor señala ([1883b], p.168) que la <u>única</u> diferencia entre conjuntos finitos e infinitos es que los últimos pueden ser enumerados (contados) de varias maneras mientras mientras que los primeros pueden ser enumerados exactamente de <u>una</u> manera. Ciertamente si uno toma contar (o colocación) seriamente uno esperaría que se afirmara la diferencia esencial: (la mayoría de) los conjuntos infinitos no pueden contarse <u>en absoluto</u>."[233]

Los rasgos de la teoría cantoriana que desmienten en este punto las acusaciones de constructivismo y psicologismo son, a mi modo de ver, la asunción de la existencia de todos los elementos de un conjunto infinito a la vez y la convicción de que todo conjunto, finito o no, puede ordenarse bien. Una teoría con estas características no encierra la tensión que Hallett le atribuye, sin que esto signifique que no existan en otros puntos de la misma oscilaciones hacia posturas psicologistas.

7. La primera teoría de conjuntos como teoria ingenua

Algunos autores como G. Boolos[234], Ch. Parsons[235] o H. Wang[236] han sostenido el punto de vista de que la noción de conjunto que Cantor maneja encaja dentro de lo que se ha denominado la concepción iterativa de los conjuntos.

Es habitual, tanto entre los autores que acabo de mencionar como entre el resto de los que se dedican a estas cuestiones, hablar de la teoría de conjuntos de Cantor. En el presente trabajo estoy manteniendo que no existe nada tal como la teoría cantoriana. Cantor habla de conjuntos en muchas de sus obras y no hay duda de que a lo largo de éstas se exponen dos teorías de conjuntos distintas e incompatibles. Una de ellas es la que se encuentra sobre todo en Beiträge (1895-97) y otra la que aparece en la correspondencia con Dedekind y Jourdain, a partir de 1899 y que es claramente un teoría de la limitación del tamaño. Cuando se habla de la teoría de conjuntos cantoriana habitualmente uno se refiere a la teoría de Beiträge; por lo tanto, lo que está en cuestión en este momento es si la teoría contenida en la obra citada pertenece o no a la concepción iterativa de los conjuntos. La respuesta que considero adecuada y que pretendo justificar en lo que sigue es negativa: en mi opinión, lo que he llamado primera teoría es el paradigma de la concepción ingenua de los conjuntos.

La característica central de la concepción iterativa -- que abreviaré CI -- es la asunción de la idea intuitiva de que los conjuntos se forman a partir de individuos disponibles previamente, individuos que serán los elementos de cada conjunto. El significado de la expresión "disponibles previamente" se suele precisar mediante una estructuración de los conjuntos en niveles, de forma similar a lo que hace Russell en su teoría de los tipos, aunque bastante más simple, de manera que los elementos de un conjunto no se formen nunca en un nivel superior al que antecede inmediatamente al nivel de formación del conjunto. La teoría de conjuntos de Zermelo es una buena precisión formal de las ideas intuitivas que definen la concepción iterativa. Los axiomas que Zermelo aisló como principios básicos de su teoría[237] son los siguientes: en primer lugar, el axioma de extensionalidad, verdadera ley fundamental de cualquier teoría que pretenda denominarse teoría de conjuntos en el sentido habitual, y a continuación una serie de axiomas de existencia: axiomas del conjunto vacío, del par, del conjunto unión, del conjunto potencia, de Infinitud, de separación y de Elección; cada uno de ellos garantiza la existencia de cierto tipo de conjuntos. Los axiomas que se relacionan propiamente con CI son todos ellos excepto el de Elección; si se añade éste último la teoría resultante es más bien una extensión de la concepción pero no pertenece a la idea que animó originalmente a la misma.

A CI, tal como la expone Boolos[238], también corresponde la tesis de que en cada uno de los niveles de formación de conjuntos existen tantos conjuntos como pueden construirse con los elementos de los que consta el nivel anterior. La formación de <u>todos</u> los conjuntos posibles en un cierto nivel es la clave para la derivación de los axiomas de Zermelo de CI. Por ejemplo, el conjunto vacio de individuos existe en el primer nivel; si dos conjuntos A y B se formaron en algun nivel, no necesariamente el mismo para ambos, en un nivel posterior *tiene* que formarse el conjunto que conste exactamente de los miembros de A y B. La idea que subyace a la derivacion del axioma del conjunto potencia en CI es que si en un nivel se forman el conjunto C y todos su subconjuntos, puesto que constan de los mismos elementos, en un nivel posterior *tiene* que formarse el conjunto de todos los subconjuntos de C y así sucesivamente[239].

Si la primera teoría de Cantor encerrara una concepción iterativa esto significaría al menos lo siguiente:

(i) que las ideas que definen la teoría de Zermelo son las mismas que gobiernan la teoría de *Beiträge*;

(ii) dado que por el momento hay fundadas razones para suponer que CI da lugar a teorías de conjuntos consistentes, hay que suponer que la primera teoría no es contradictoria, o al menos que las contradicciones que puedan derivar de ésta están provocadas por malentendidos que un exposición más detallada de la teoría haría desaparecer. La interpretación de las contradicciones como efectos de una asimilación incorrecta de los supuestos cantorianos ha sido defendida por Hao Wang[240].

7.1 Las ideas conjuntistas de Cantor y los axiomas de Zermelo

Veamos, en primer lugar, cómo expresa Cantor lo que entiende por conjunto. Una caracterización explícita de los conjuntos sólo aparece dos veces en la obra del matemático alemán. La primera es una nota a Grundlagen:

> "Entiendo por 'multiplicidad' o 'conjunto' en general toda multitud que pueda pensarse como uno, esto es, toda reunión de elementos determinados que puedan ser relacionados en un todo mediante una ley."[241]

La segunda al comienzo de Beiträge:

> "Entendemos por 'conjunto' cualquier colección M de objetos m definidos y determinados de nuestra intuición o nuestro pensamiento (que se llaman 'elementos' de M) en un todo."[242]

Lo que hay que determinar antes que nada es si ambas definiciones son equivalentes ya que, evidentemente, no son idénticas. Se parecen en que en las dos los conjuntos son colecciones de individuos susceptibles de ser considerados como objetos simples desde algún punto de vista; aunque no se expresa la idea de la misma forma en una y otra. En la aproximación de Grundlagen los elementos de cada conjunto se conectan entre sí "mediante una ley", lo que en mi opinión no es distinto a decir que los elementos de los conjuntos caen bajo un mismo concepto, en el sentido que Frege da al término. Esto es, en la primera definicion la relacion de unos elementos con otros dentro del mismo conjunto se establece mediante un concepto. Los conjuntos son las extensiones de los conceptos, y de este modo la definición a la que me estoy refiriendo expresa una postura acerca de los conjuntos muy próxima a lo que, siguiendo a Gödel, H. Wang[243] ha llamado la concepción lógica de los conjuntos cuyo paradigma es el trabajo de Frege. En la segunda definición, sin embargo, el concepto de conjunto subyacente es mas ambiguo. No puede adscribirse la definicion a la concepción lógica sin mas como ocurre con la primera definición. Lo que Cantor parece decir aqui es que los conjuntos son reuniones de objetos que prexisten al conjunto, y de ahí que se haya visto este texto como la prehistoria de la concepción iterativa. H. Wang, por ejemplo, está convencido de que no pertenece en absoluto a la concepción lógica, sino más bien a lo que se ha llamado la concepción matemática[244], que tal como la entiendo vendría a decir que los conjuntos se forman de acuerdo con unas leyes determinadas, leyes que en el siglo XX han dado lugar a los axiomas conjuntistas y que en ella no tiene cabida nociones como concepto, predicado, verdad, satisfacción etc.

La opinión que yo mantendré es que las dos definiciones pertenecen a la concepción lógica y que la teoria de Beiträge es ingenua. Pero antes de exponer mis razones consideremos brevemente el tema de la aparición de las contradicciones de la teoria de conjuntos.

7.1.1 Las paradojas de Cantor

Hoy está fuera de toda duda razonable que el primero en descubrir contradicciones en lo que he llamado la primera teoría fue el propio Cantor. De acuerdo con Bernstein, discípulo de Cantor en Halle, éste descubrió las contradicciones del ordinal y cardinal maximos y las comunicó epistolarmente a Hilbert en 1896[45]. Fraenkel, en su biografía de Cantor, afirma que el autor conocía las contradicciones en 1895[46] pero no justifica el dato. Lo cierto es que la primera prueba que tenemos del descubrimiento es la carta mencionada y por el momento no hay razón para pensar que Cantor se hubiera encontrado con ellas antes de 1896. Esta es la postura de Grattan-Guinness a la que yo me adhiero. H. Wang, siguiendo a Fraenkel, supone que cuando Cantor escribió <u>Beitrage</u>, en 1895, ya conocía las contradicciones y que la definicion de conjunto que se ofrece al comienzo de esta obra significa un intento por escapar de las paradojas mediante la concepción iterativa.

Como sabemos, <u>Beitrage</u> es un obra en dos partes, la segunda de ellas publicada casi dos años despues que la primera, aunque ni desde el punto de vista de la temática ni desde el estilo hay solución de continuidad entre una parte y la otra. Una interpretación que considero muy plausible del retraso de la aparición de la segunda parte es, en mi opinión, el descubrimiento de las contradicciones. De acuerdo con esta interpretación la primera parte de la obra señalada, en la que se encuentra la definicion que he citado anteriormente, fue escrita sin consciencia de las contradicciones, mientras que cuando se publicó la segunda Cantor ya las conocía. En este caso, la demora inexplicada en la aparición de la última se debería al intento del autor por solucionar el problema, aunque no dió con una estrategia salvadora hasta 1899. La razón por la que en Beiträge no se pudo superar el problema descansaría, si mi interpretación es correcta, en el hecho de la definición de conjunto estaba ya publicada en la primera parte y ésta encerraba una concepción absolutamente irrestricta de lo que son los objetos básicos de la teoría. Tal como yo lo veo, la definición de esta obra es equivalente a la de Grundlagen, pertenece a la concepción lógica y la misma teoría de conjuntos aparece en una y la otra : la primera teoría de Cantor.

Después de la publicación de Beiträge Cantor llegó a la conclusión de que la única forma de superar las dificultades era cambiando la definición de conjunto, restringiendo ésta de manera que las multiplicidades problemáticas no pudieran aparecer en la teoría e ideó la estrategia de la limitación del tamaño, rechazando multiplicidades demasiado extensas. De las contradicciones de la primera teoría y las características de la segunda tratará extensamente el capítulo siguiente.

7.1.2 Grundlagen y Beiträge: la concepción ingenua

Las razones que me llevan a sostener que la primera teoría no es, ni en la intención de Cantor, un ejemplar de CI son las siguientes:

1. La primera teoría es contradictoria: La interpretación de H. Wang, entre otros, de las paradojas como efecto de una asimilación errónea de teoría pierde gran parte de su plausibilidad cuando se cae en la cuenta de que el autor de la teoría y el descubridor de las paradojas son la misma persona.

La razón que acabo de exponer, que responde a la afirmación que he señalado como (ii), es sólida si se acepta que en 1895 Cantor no conocía las paradojas. La siguiente sin embargo me parece más contundente:

2. En respuesta a (i) surge la pregunta de por qué la solución que Cantor ideó no se parece demasiado a la teoría de Zermelo. Si lo que hay en Beiträge es una concepción iterativa lo razonable hubiera sido que Cantor precisara ésta posteriormente. Pero, lejos de hacerlo, en la correspondencia con Dedekind y Jourdain perfila una teoría de la limitación del tamaño, con una distinción tajante entre colecciones que son conjuntos y colecciones que no lo son, distinción cuyo criterio demarcatorio lo proporciona la totalidad de los números ordinales: todas las colecciones del tamaño de ésta son inconsistentes y, por tanto, no son conjuntos.

En 1904, en una carta a Jourdain[45], Cantor contesta a una dificultad que Russell plantea en Los principios de la matemática relacionada con el teorema de Cantor

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0 .$$

La dificultad de Russell consiste en la aparente contradicción que hay entre la afirmación de Cantor de que no puede haber un número cardinal mayor que todos los demas y el hecho de que algunas colecciones parecen tener todos elementos posibles, como por ejemplo el conjunto de todas las cosas[46]. Si Cantor estuviera pensando en algo parecido a CI la respuesta que se esperaría a la objeción de Russell vendría a decir que el conjunto de todas las cosas no existe porque no puede formarse en ningún nivel, ya que en esta concepción los elementos de un conjunto se forman necesariamente es un estadio anterior al del conjunto y al conjunto de todas las cosas pertenece él mismo conjunto como elemento, lo que es imposible en CI . Sin embargo la respuesta de Cantor es completamente diferente: el teorema de Cantor no puede aplicarse a la colección de todas las cosas porque ésta no es un conjunto, es una multiplicidad inconsistente, como la totalidad de los números ordinales. Es decir, una multiplicidad que no se deja pensar como una unidad sin que aparezca una contradicción. En esta respuesta no hay, en mi opinión, nada que pueda interpretarse dentro de la concección iterativa.

En conclusión, la distinción entre conjuntos y multiplicidades inconsistentes entra dentro de lo que Russell llamó teorías de la limitación de tamaño: existe un límite a la amplitud que pueden tener los conjuntos. Russell hace referencia[248] a ciertos procesos en los cuales la totalidad de los objetos generados por ellos puede considerarse como el último término del proceso. De hecho, esto es lo que ocurre en las llamadas paradojas de Cantor y de Burali-Forti, que se consiguen unos números, un alef y un ordinal respectivamente, que deberían ser los últimos números transfinitos. Russell sugiere que ante procesos de este tipo lo más adecuado es suponer que la unión de los individuos generados no forma un conjunto. Así, no existe el conjunto de todos los alef ni el de todos los ordinales . La totalidad de estos individuos sólo da lugar a multiplicidades inconsistentes, en la terminología de Cantor. La estrategia de la limitación del tamaño sólo tiene sentido a posteriori, esto es, una vez que se conocen las contradicciones y algunos de los conjuntos que las provocan.

Por el contrario, CI no impone restricciones sobre el tamaño de los conjuntos sino más bien acerca del método de su formación. Si la teoría de Cantor fuera iterativa no haría falta limitar el tamaño de los conjuntos existentes puesto que simplemente los conjuntos responsables de los problemas no aparecerían. Así, CI propone un sistema conjuntista consistente, defendible aún en el caso de que las contradicciones no se hubieran producido nunca, mientras que la limitación no tiene sentido más que una vez conocidas estas. No se ve en la limitación de tamaño ninguna tesis intuitiva acerca de los conjuntos que no vaya encaminada a la eliminación de paradojas.

La concepción iterativa no sólo es distinta de la limitación del tamaño, sino incompatible con ella, puesto que de acuerdo con la primera existen conjuntos que no existen de acuerdo con la segunda y viceversa. Por ejemplo, en CI no pueden existir conjuntos que tengan que definirse impredicativamente, mientras que en la estrategia de la limitacion del tamaño estos existiran siempre que no sean muy grandes en relacion al tamaño del universo. A esto hay que añadir que enunciados que se consideran como axiomas en un concepción chocan con los principios intuitivos de la otra. Esto es lo que ocurre con el axioma de reemplazo, que Cantor formula explícitamente en 1899:

> "Dos multiplicidades equivalentes son o ambas 'conjuntos' o ambas inconsistentes."[250]

Esta afirmación es el alma de las teorías de la limitación del tamaño: toda multiplicidad equivalente a un conjunto es un conjunto, mientras que no puede justificarse desde la concepción iterativa: dos multiplicidades no tienen por qué correr la misma suerte, una de ellas puede existir si sus elementos preceden en algún sentido especificado a la multiplicidad, mientras que otra del mismo tamaño podría rechazarse si no cumple esa condición.

Por todo ello, no hay duda de que en la correspondencia de Cantor se expone explícitamente un sistema de limitación del tamaño para las teorías de conjuntos. Este hecho me inclina a pensar que lo que se encuentra en Beiträge es un teoría ingenua de conjuntos, en la que Cantor descubrió contradicciones. Si el autor hubiera vislumbrado desde el principio las tesis de CI las contradicciones no habrían tenido lugar, y si hubiera descubierto CI tras conocerlas ¿cómo se explica que en 1899, sólo dos años despues de la publicacion de la segunda parte de Beiträge se decante tan claramente por una estrategia como la limitación del tamaño, cuya justificación intuitiva es infinitamente menor que la de CI?. Me parece más plausible suponer que en Beitrage se expone una teoría contradictoria cuya potencia fue posteriormente recortada. Con esto no quiero afirmar que la definición de conjunto que aparece en esta obra no de pie en absoluto a suponer la CI, pero eso se debe más bien a que es muy ambigua y por tanto es muy facil proyectar en ella ideas que surgieron posteriormente. Además las resonancias que aquí y en otros trabajos de Cantor pueda haber de la afirmación iterativa de que los elementos de un conjunto le preceden lejos de probar CI muestran que la idea cantoriana consiste en que estos se parecen enormemente a montones o reuniones de objetos físicos: un rebaño de ovejas, una constelación de estrellas o una baraja. Tanto es así que en su teoría no existe el conjunto vacío. Este es el origen intuitivo de la noción de conjunto, pero una vez que se introduce en el sistema y se acepta que hay conjuntos cuyos elementos son objetos abstractos la idea de preexistencia de los elementos del conjunto desaparece y sólo queda la tesis de que cualquier reunion de objetos es un candidato irreprochable al calificativo de conjunto[25].

Recientemente M. Hallett ha defendido la opinión de que lo que yo he llamado la segunda teoría de Cantor no es más que una precisión de las ideas que el autor tenía desde que comenzó a interesarse por la teoría de conjuntos, es decir, lo que Hallett sostiene es que Cantor sólo tiene una teoría y que ésta pertenece al tipo de la limitación del tamaño. Las tesis de Hallett y las razones por las que me opongo a su interpretación se tratarán en el capítulo siguiente.

8. Conjuntos y números trasfinitos

Las tesis que pretendo defender en el presente apartado son dos: en primer lugar, que los números son conjuntos para Cantor y en segundo lugar, que Cantor no distingue entre potencias y números cardinales. Ambas tesis las he mantenido tácitamente a lo largo del presente trabajo y quisiera ahora discutirlas con algún detalle.

Contra la afirmación de que para Cantor los números son conjuntos se manifiesta, entre otros, H. Wang:

> "Para Cantor, los cardinales y los ordinales no son conjuntos sino conceptos generales o universales abstraidos de los conjuntos de igual cardinalidad y conjuntos isomórficos bien ordenados."[252]

Ciertamente, cuando Cantor habla de números afirma siempre que estos son conceptos generales. Por ejemplo en Principien puede leerse:

> "Por potencia o valencia de un conjunto dado M entiendo el concepto general (concepto de género, categoría) ..."[253]

y es igual en el resto de las definiciones tanto de número cardinal como de número ordinal. Lo importante ahora es saber qué entiende Cantor por "concepto general". A pesar de lo que la terminología pueda sugerir, la opinión de que los números son conjuntos es muy plausible: el propio Cantor afirma en varios lugares de su obra[254] que los números son conjuntos de "unos" abstraídos. Uno de los textos en que el autor lo dice explícitamente es el siguiente de Mitteilungen:

> "Tanto los números cardinales como los tipos de orden son simples construcciones conceptuales (Begriffsbildungen); cada uno de ellos es un verdadera unidad (μονας), porque en ellos se conectan unitariamente una multiplicidad o conjunto de unidades"[255]

En este texto Cantor utiliza a la vez la idea de que los conjuntos son conceptos y la de que son conjuntos. Podría pensarse que Cantor evoluciona desde una concepción más intensional de los números a una más extensional. Esta es la interpretación de M.Hallett[256]. Sin embargo, en mi opinión, desde sus primeras obras conjuntistas, esto es, desde 1883 en adelante, Cantor mantuvo la postura extensional. Mis razones son: en primer lugar, que tanto cuando dice expresamente que los números son conjuntos de unos como cuando no lo dice habla siempre de que son conceptos, por lo que no se puede utilizar esta denominación para sacar de ella consecuencias contrarias a la tesis que estoy defendiendo ; en segundo lugar, en una fecha tan temprana como 1884, en Principien[257] afirma que la matemática pura no es más que pura teoría de conjuntos, esto es, que los conceptos primitivos de la matematica y los objetos de que trata pueden tener un tratamiento satisfactorio en la teoria de conjuntos, por lo que es muy verosimil la idea de que los objetos que investiguen ambas disciplinas sean conjuntos y en tercer lugar, de acuerdo con las definiciones de número ordinal y de potencia por la abstracción de cualidades y, en su caso, del orden, hay fuertes indicios de que lo que se obyenga de ellas sean conjuntos que reflejen la estructura de los conjuntos originarios de los cuales se abstraen. La postura de Wang seria más plausible si Cantor abstrajese los numeros de las clases de equivalencia y no de los conjuntos uno a uno como, en mi opinión, es el caso.

La segunda tesis que quiero defender aquí es que Cantor no hace ninguna distinción entre potencias y números cardinales. Se puede rechazar esta afirmacion desde dos puntos de vista distintos: en primer lugar, puede mantenerse la idea de que las potencias constituyen la prehistoria de los números cardinales, esto es, que Cantor comienza definiendo potencias y posteriormente se da cuenta de que son auténticos números; en segundo lugar, puede sostenerse la idea de que los números forman un subconjunto propio del conjunto de las potencias, es decir, que los números cardinales son potencias pero que hay potencias que no son números cardinales.

J. Dauben se opone a la tesis que quiero defender desde la primera postura. Dauben considera que el concepto de número cardinal se introdujo en la teoria de conjuntos cantoriana mucho despues del descubrimiento de las potencias; en concreto mantiene que Cantor no asumió que las potencias eran números auténticos hasta 1891. Dice Dauben:

> "Hay todavía un último aspecto del artículo de 1891 que merece destacarse. Al contrario que en los Grundlagen, donde las potencias nunca eran consideradas como números, aquí Cantor ha llegado a la conclusión de que estas potencias representan, de hecho, la única y necesaria generalización del concepto de número cardinal."[258]

En el artículo de Cantor al que Dauben hace referencia en este texto[259] puede leerse, en efecto:

> "Las 'potencias' representan la única y necesaria generalización de los 'números cardinales' finitos, no son más que los números cardinales actual e infinitamente grandes, y les corresponde la misma realidad y determinación que a ellos."[260]

El sentido del texto citado es el reconocimiento por parte de Cantor de que las potencias son números cardinales infinitos, que son simplemente la extensión al dominio del infinito del concepto de número cardinal. Sin embargo, no es éste el primer texto en el que Cantor identifica las potencias con los números cardinales transfinitos. En una carta al Prof. Lasswitz de 1884, que se incluye en Mitteilungen[261] comienza Cantor una definición de potencia diciendo: "Entiendo por potencia o número cardinal

...". Esta es la primera vez que identifica Cantor ambos conceptos explícitamente en su obra publicada. Pero antes se encuentran afirmaciones en su obra que hacen pensar que consideraba ya a las potencias como la extensión al infinito del concepto de número. Así en Grundlagen puede leerse:

> "el concepto de número entero, que tiene en lo finito sólo el fundamento posterior del número ordinal, si se asciende al infinito se divide en cierto modo en dos conceptos, en el de potencia, que es independiente del orden, y en el de número ordinal[...]. Y si desciendo de nuevo del infinito a lo finito veo claramente como ambos conceptos se hacen uno nuevamente y confluyen en el concepto de número entero finito."[262]

En este texto se expresa abiertamente la idea de que la extensión al infinito de los números enteros da lugar a dos conceptos distintos que coinciden en la esfera de lo finito: el de potencia y el de número ordinal. Si Cantor cree en esta época que los ordinales son números no veo la razón por la que las potencias no deban serlo aún. Ambos conceptos se reparten la función de los enteros finitos en el infinito, por lo que en mi opinión en esta fecha ya consideraba Cantor a las potencias como números. Pero en cualquier caso, como hemos visto, la identificación explícita se lleva a cabo en una carta de 1884, siete años antes de la fecha indicada por Dauben.

La otra postura por la que uno puede oponerse a la identificación de números y potencias sostiene que no todas las potencias son numeros, y el criterio para distinguir entre unas y otros lo proporciona la buena ordenación[263]. Segun esta postura los números cardinales seran las potencias de los conjuntos bien ordenados mientras que las de los conjuntos que no puedan ordenarse bien tendrán potencias que no sean números. En la obra de Cantor esta interpretación puede parecer verosimil debido a que el autor define los números cardinales -- los alef -- sobre la base de las clase numéricas de ordinales, clases que siempre estan bien ordenadas. Sin embargo, si se piensa con más detenimiento esta interpretación es errónea puesto que como sabemos Cantor ha mantenido siempre la validez general del principio de buena ordenación, y según este principio todo conjunto infinito puede ordenarse bien -- de hecho puede ordenarse bien de infinitas maneras distintas -- y por tanto tendrá un número ordinal. Dado que estos números están clasificados por clases numéricas, a todo conjunto le corresponderá también un número cardinal, a saber, el alef definido mediante la clase numérica a la que pertenezcan los cardinales que ordenan el conjunto. De este modo, hay que concluir que no existen en la teoría de conjuntos de Cantor potencias que no sean alef.

9. La existencia de los objetos abstractos: matemáticas y metafísica

La concepción que Cantor mantuvo acerca de la existencia de los objetos abstractos no permaneció invariable a lo largo de toda su vida. De sus obras se desprende que se adhirió a una posición realista en lo que concierne a la existencia de los números enteros finitos, que a partir de 1883 se amplió hasta abarcar también a los números infinitos, los irracionales y cualesquiera otros que fueran susceptibles de una definición precisa. Hubo así una cierta evolución desde sus obras más antiguas hasta Grundlagen por lo que se refiere al compromiso ontológico del autor con aquellos conceptos que, como los irracionales y los números transfinitos, involucraban el infinito en su definición. Existen textos del autor en los que se dejan ver rasgos no sólo realistas, como he indicado, sino incluso platónicos y neoplatónicos, aunque éstos no se extienden por toda su obra. Veamos cuál es la concepción cantoriana de la existencia y cómo evolucionó.

9.1 Del formalismo al realismo

En 1872 ofrece Cantor una definición de límite con el propósito de caracterizar el dominio de los números reales[264].

La idea del autor es asociar con una determinada serie de numeros racionales un signo que indica que la serie cumple la propiedad de que la diferencia entre dos de sus miembros α_{n+m} y α_n puede hacerse menor que cualquier número racional ϵ conforme crece n[265]. Al signo en cuestión lo llama "el límite de la serie de racionales", pero de la exposición de Cantor se desprende que no se está comprometiendo con la existencia de objetos que son límites, sino que subraya que la expresion "tener un límite" es otra forma de decir que la serie de racionales se comporta de tal-y-cual modo señalado. La definición cantoriana de "tener un límite" es en mi opinión un ejemplo de lo que Frege llamó <u>definición constructiva</u> o <u>definición propiamente dicha</u>[266]. De acuerdo con la caracterización fregeana una definición no es un enunciado esencial en un sistema, todo pensamiento que puede expresarse mediante la definición puede expresarse sin ella, la definicion sirve para simplificar el cálculo dentro de un teoría. Para Cantor la expresión "tener un límite" es una abreviatura para expresar propiedades de otros objetos que también pueden expresarse sin echar mano de límites aunque de forma mas complicada. Esto es, el discurso acerca de límites puede reducirse al discurso acerca de racionales, mientras que el discurso acerca de racionales es irreductible. Esto último subraya un de los rasgos del realismo: si se es realista acerca de determinados objetos, por ejemplo racionales, el discurso acerca de ellos no puede sustituirse por un discurso en el que no aparezcan los terminos que los nombran. Por esta razon Cantor no llama números a los límites, cosa que sí hace con los racionales que sirven para definirlos, sino que para referirse a limites utiliza el término "signo" (*Zeichen*).

Algo similar ocurre cuando se introducen por primera vez las derivadas de orden infinito[267]. Estas se definen perfectamente mediante las operaciones de derivación a partir de un conjunto de puntos dado y de la intersección de infinitos conjuntos de puntos, pero los signos "∞", "$\infty+1$", "∞^n", "∞^∞" etc. usados para distinguir unas derivadas de orden infinito de otras no tienen todavia un significado autónomo. Cantor los llama "simbolos de infinitud" (*Unendlichkeitssymbole*). Mientras que los signos utilizados para señalar los órdenes de las derivadas finitas son números, los de las derivadas infinitas no lo son aún como queda patente en el siguiente texto de *ULP* IV:

> "Si P es un conjunto de puntos no numerable, entonces $P^{(\alpha)}$ también es no numerable, tanto si α es *un número entero finito, como también si es uno de los simbolos de infinitud*."[268]

Por esta razón podemos denominar al periodo que va desde los primeros escritos del autor hasta 1883 *etapa formalista*, teniendo en cuenta que el formalismo sólo puede afirmarse respecto de la existencia de lo que luego serán los números irracionales y los transfinitos, que son para Cantor, en cierto sentido, irracionales por su forma de definición[269], no respecto de los números enteros finitos acerca de los cuales Cantor mantuvo siempre una posición abiertamente realista, como lo prueba una de las tesis de su *Habilitationsschhrift* (1869):

"Los números enteros y los cuerpos celestes forman en cierto sentido un todo regido por leyes y relaciones semejantes."[270]

También en la concepción de la existencia de los números marca Grundlagen una frontera con los escritos anteriores. Esta obra inaugura no sólo el periodo de interés conjuntista del autor sino también, y es lo que nos interesa ahora, lo que llamaré su etapa realista[271]. Al comienzo de Grundlagen Cantor advierte que para poder continuar las investigaciones conjuntistas iniciadas a propósito de los conjuntos de puntos ha de separase de las concepciones habituales acerca del número y del infinito. En relación a éste último la novedad introducida por él consiste en la clara distinción entre infinito potencial e impropio e infinito actual o propio y la aceptación sin reservas de éste. Respecto de la concepción tradicional del número la originalidad de Cantor estriba en la extensión del concepto de número entero a la esfera de lo infinito, de modo que tras la serie conocida de los números enteros finitos asume la existencia de una sucesión de números enteros infinitos tan precisamente definidos y determinados como los números finitos. La introducción de los números infinitos presupone la asunción del infinito actual, y en este contexto escribe Cantor:

"En la primera forma, como infinito impropio [el infinito matematico] se presenta como un finito variable; en la otra forma, en la que yo lo llamo infinito propio, aparece como un infinito completamente determinado. Los números enteros reales infinitos (Die unendlichen realen ganzen Zahlen), que definiré a continuación y hacia los cuales fui llevado hace ya una larga serie de años sin ser claramente consciente de tener en ellos numeros concretos de significado real (in ihnen konkrete Zahlen von realer Bedeutung zu besitzen), no tienen en absoluto nada en común con la primera de estas dos formas, con el infinito impropio [...]; pertenecen por tanto a las formas y afecciones del infinito propio."[272]

A mi modo de ver, el texto citado muestra la conversión de Cantor desde una posición no comprometida con la existencia de los "símbolos de infinitud" a otra en la que estos símbolos vacíos adquieren el estatuto de verdaderos numerales. Se desprende de lo dicho que sea cual sea la concepción de la existencia de los números para Cantor, ésta será la misma sin importar que se trate de números finitos o infinitos. El siguiente texto, también de Grundlagen, repite la misma idea:

"así a través de esta relación entre numeración (Anzahl) y número (Zahl) se comprueba la realidad del último por mi señalada (die von mir betonte Realität der letzteren), incluso en el caso de que sea infinito-determinado."[273]

La relación a la que se refiere el texto entre numeración y número no es más que la relación entre la ordenación que mantienen los elementos de un conjunto y el número ordinal que la teoría cantoriana adscribe al conjunto en cuestión. La objetividad de los números transfinitos, los números ordinales que Cantor ha añadido a los números finitos tradicionales, consiste en la precisa relación que aquéllos mantiene con los conjuntos bien ordenados. La numeración, o el orden de un conjunto, constituye el "significado real" de los números del que Cantor habla en el penúltimo texto citado . De acuerdo con sus propias palabras, los números transfinitos no siempre tuvieron la misma realidad para él, pero desde Grundlagen en adelante adquieren una objetividad de la que no gozaron en épocas anteriores.

La conversión realista alcanza también, como es natural, a los números irracionales, de los cuales afirma el autor en Grundlagen[274] que pueden determinarse con la misma precisión, evidencia y claridad que los números racionales. De nuevo ocurre lo que con los números ordinales transfinitos y los finitos, que sea el que sea el estatuto ontológico de los números racionales, de él participan también los irracionales a diferencia de lo que Cantor creía en 1872.

9.2 ¿Qué significa ser realista?

El término "realismo" es un término ambiguo que puede utilizarse en contextos distintos y en cada uno de ellos adquiere un significado especial. Los dominios más comunes en los cuales se suele hablar de realismo son cuatro: 1. Se llama realismo a una determinada postura respecto de la existencia de los <u>universales</u>, que afirma que éstos existen no sólo con independencia de nuestra voluntad sino también "separados" de nosotros, en un mundo aparte. A este tipo de realismo se lo conoce a veces como <u>realismo platónico</u>, porque es el que se deja ver en la obra del filósofo griego. El realismo platónico se opone al nominalismo, que considera a los universales como simples términos o formas de hablar pero sin refencia a nada externo, y al conceptualismo, que sostiene que los universales son conceptos bajo los cuáles caen diversos objetos. 2. También se utiliza el término "realismo" para hacer referencia a un determinado punto de vista acerca de la existencia de los objetos del mundo. En este sentido el realismo afirma que los objetos físicos existen independientemente de nosotros, que no son un sueño de los seres humanos y que si nosotros dejásemos de existir ellos no se verían afectados. A este tipo se le califica a menudo de <u>realismo en metafísica</u> 3. A veces se llama realismo a la postura epistemológica que sostiene la posibilidad del conocimiento objetivo, del conocimiento del mundo "tal como es", este tipo de realismo, que se conoce como <u>realismo en epistemología</u>, se opone a la tesis idealista de que el sujeto del conocimiento estructura la realidad de acuerdo con sus categorías, categorías de las que no puede desprenderse. 4. Desde el punto de vista de la teoría de la verdad, se llama realismo a la postura que asume conjuntamente las dos tesis siguientes: (i) todos los enunciados con sentido tienen un valor de verdad determinado y (ii) algunos terminos singulares tienen referencia, i. e., los enunciados han de tomarse en un sentido literal. Esta postura, a la que llamaré realismo semantico, se opone a cualquier tipo de reduccionismo, y entre ellos al verificacionismo. Posiblemente se utilice el termino en otros contextos[275], pero estos son los mas frecuentes.

Los cuatro tipos de realismo distinguidos se diferencian por los distintos contextos teoricos en los que se utilizan: la teoria de los universales, la existencia del mundo exterior, la posibilidad del conocimiento de la realidad "en si" y la teoria de la verdad. Dentro de cada uno de estos contextos y sin dejar de ser realistas pueden mantenerse posturas más o menos radicales. En el contexto de la teoria de la verdad Paul Horwich[276] ha distinguido tres niveles o estadios que interpretan con intensidad creciente el significado de la idea asociada con el realismo de que los objetos, fisicos o abstractos, son "independientes" del sujeto que utiliza el lenguaje. El primer estadio, el menos elaborado y el menos comprometido, es lo que él denomina realismo epistemológico que consiste en la mera afirmación de la existencia de determinadas entidades teóricas pero sin tener una teoria que especifique el tipo de existencia que se supone que tienen tales entidades. El segundo estadio coincide exactamente con lo que he señalado anteriormente como realismo semantico. Un realista semantico mantiene que la realidad es "independiente" del sujeto en el sentido de que los enunciados tienen un valor de verdad objetivo, tanto si lo conocemos como si no y que no podemos cambiarlo a voluntad. Y por último un tercer estadio, al que él llama realismo metafisico, que se caracteriza por la tesis de que la verdad es una propiedad indefinible y primitiva de ciertos enunciados que no queda suficientemente explicada por la condición de Tarski de que una teoría es materialmente adecuada si sus teoremas son de la forma

'p' si, y sólo si p

y que, al no tener relación alguna con nuestra manera de conocer la realidad, no podemos estar seguros nunca de haberla alcanzado. La "independencia" entre la realidad y el sujeto es muy fuerte para un realista metafísico, cada uno -- mundo real y sujeto -- pertenecen a un ámbito distinto y es muy difícil -- por no decir imposible -- para el sujeto comprobar si sus afirmaciones acerca del mundo son acertadas aún en el caso de que lo sean. De ahora en adelante cuando hable de realismo metafísico me referiré a la acepción de Horwich de la expresión.

El rasgo que define a un realista metafísico es el convencimiento de que aún en el caso de que las teorías que mantengamos sean fecundas, simples y sin contraejemplos pueden ser falsas. Entre nuestro conocimiento y el mundo hay un hiato y no podemos tener la certeza de haberlo superado aunque lo hayamos hecho. Una de las tesis mas interesantes de Horwich, y la razón por la que me he referido a él explícitamente, es su idea de uno puede ser realista semántico sin ser realista metafísico. De acuerdo con Horwich, lo que la mayoría de los filósofos mantienen cuando se autocalifican de realistas no va más allá del realismo semántico, que puede reformularse diciendo que la realidad se descubre, no se inventa, y esto no obliga, de acuerdo con su postura, a sustentar un realismo metafísico.