Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Andalucía – Junio de 2019

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

Miércoles, 12 de junio de 2019

Opción A

Ejercicio 1 (2'5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4 200 g de algodón y 800 g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

SOLUCIÓN: Organizamos la información que nos da el enunciado en la siguiente tabla (conviene poner los productos a fabricar en las columnas y las materias primas en las filas):

	Camisetas lisas	Camisetas estampadas	Máximo
Algodón	70 g	60 g	4200 g
Poliéster	20 g	10 g	800 g
Beneficio	5 €	4 €	

Llamemos x al número de camisetas lisas e y al número de camisetas estampadas que vamos a fabricar. Tenemos las siguientes restricciones:

- No podemos fabricar una cantidad negativa de camisetas, por lo que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

*Profesor de la Universidad de Granada - http://www.ugr.es/~aroldan

- Solo disponemos de 4200 g de algodón, por lo que $70x + 60y \leq 4200$. Simplificando entre 10, encontramos la desigualdad $7x + 6y \leq 420$.
- Solo disponemos de 800 g de poliéster, por lo que $20x + 10y \leq 800$. Simplificando entre 10, encontramos la desigualdad $2x + y \leq 80$.
- Debemos fabricar al menos 10 camisetas estampadas por lo que $y \geq 10$.
- El doble de camisetas estampadas $(2y)$ debe ser al menos igual $(\geq)$ al número de lisas (x). Por tanto, $2y \geq x$. De esta forma, $x - 2y \leq 0$.

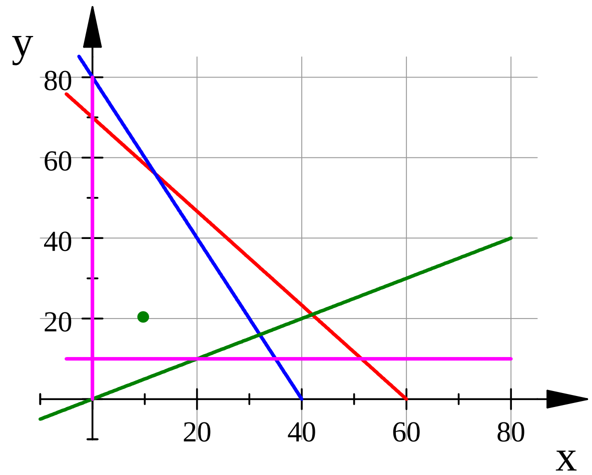
Queremos maximizar la función que nos indica el beneficio, que es la función $F(x, y) = 5x + 4y$. Por tanto, nos encontramos ante el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{maximizar} \quad F(x,y) = 5x + 4y \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 10 \\ 7x + 6y \leq 420, \\ 2x + y \leq 80, \\ x - 2y \leq 0. \end{cases}$$

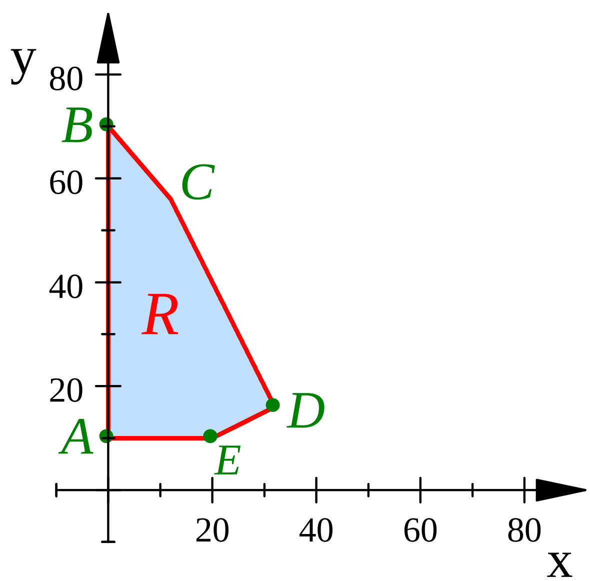
Para dibujar el recinto R que satisface todas las desigualdades, en primer lugar transformamos las desigualdades en igualdades, observando que hay cinco de ellas, y buscamos dos puntos del plano que estén sobre cada una de ellas (para así dibujarlas de manera más sencilla):

$$\begin{aligned}
&x = 0 \quad \rightarrow \quad (0,0) \quad \text{y} \quad (0,10); \\
&y = 10 \quad \rightarrow \quad (0,10) \quad \text{y} \quad (10,10); \\
&7x + 6y = 420 \quad \rightarrow \quad (0,70) \quad \text{y} \quad (60,0); \\
&2x + y = 80 \quad \rightarrow \quad (0,80) \quad \text{y} \quad (40,0); \\
&x - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad (0,0) \quad \text{y} \quad (20,10).
\end{aligned}$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades a través de los dos puntos que hemos calculado en cada recta, obteniendo la siguiente figura.



El recinto R que buscamos está delimitado por las rectas anteriores. De hecho, encontramos que el punto $(10, 20)$ satisface todas las desigualdades del enunciado, por lo que concluímos que la región factible es la siguiente:



Sabemos las coordenadas de dos vértices con solo mirar el dibujo: $A\,(0, 10)$ y que $B\,(0, 70)$. Determinamos los otros vértices de la región factible resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones lineales.

$C \equiv \begin{cases} 7x + 6y = 420 \\ 2x + y = 80 \end{cases}$	$D \equiv \begin{cases} 2x + y = 80 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$	$E \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = 10 \end{cases}$
$x = 12,\ y = 56$	$x = 32,\ y = 16$	$x = 20,\ y = 10$

Por consiguiente, los vértices de la región factible son:

$$A\,(0, 10)\,, \quad B\,(0, 70)\,, \quad C\,(12, 56)\,, \quad D\,(32, 16) \quad \text{y} \quad E\,(20, 10)\,.$$

Consideremos la función $F(x, y) = 5x + 4y$. El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función F alcanza máximo (y mínimo) absoluto en la región acotada R, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto R, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$$\begin{aligned} F\,(0, 10) &= 5 \cdot 0 + 4 \cdot 10 = 40, \\ F\,(0, 70) &= 5 \cdot 0 + 4 \cdot 70 = 280, \\ F\,(12, 56) &= 5 \cdot 12 + 4 \cdot 56 = 284, \\ F\,(32, 16) &= 5 \cdot 32 + 4 \cdot 16 = 224, \\ F\,(20, 10) &= 5 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 140. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el valor máximo, que es 284, se alcanza en el vértice $C\,(12, 56)$, donde $x = 12$ e $y = 56$. Esto significa que podemos obtener un beneficio máximo de 284 euros fabricando 12 camisetas lisas y 56 camisetas estampadas.

> El máximo beneficio es de 284 euros y se alcanza fabricando 12 camisetas lisas y 56 camisetas estampadas.

■

Ejercicio 2 Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$**.**

a) **(1 punto) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función que sean paralelas a la recta** $y = 3x - 3$**.**

b) **(1 punto) Estudie la monotonía y la curvatura de la función** f**.**

c) **(0.5 puntos) Calcule** $\int f\,(x)\,dx$**.**

Solución: Dado que la función f posee una expresión general polinómica, sabemos que es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Apartado (a). La recta $y = 3x - 3$ posee pendiente 3, por lo que debemos encontrar los puntos en los que la primera derivada de f (que coincide con la pendiente de la recta tangente) vale 3, es decir, debemos resolver la ecuación $f'(x) = 3$. Dado que $f'(x) = 3x^2 - 9$, deducimos que:

$$f'(x) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 9 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2.$$

Por consiguiente, hay dos puntos en los que las rectas tangentes a la gráfica de f son paralelas a la recta $y = 3x-3$, a saber, $x = -2$ y $x = 2$. Dado que $f(-2) = (-2)^3 - 9\cdot(-2)+2 = -8+18+2 = 12$ y $f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2 + 2 = 8 - 18 + 2 = -8$, las ecuaciones de dichas rectas tangentes son las siguientes:

- $y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2)) \quad \Leftrightarrow \quad y - 12 = 3(x + 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x + 18;$
- $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad y - (-8) = 3(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 14.$

> Las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función f paralelas a la recta $y = 3x - 3$ son $y = 3x + 18$ e $y = 3x - 14$.

Apartado (b). Sabiendo que la primera derivada de f es $f'(x) = 3x^2-9$, sus puntos críticos son las soluciones de la siguiente ecuación:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}.$$

La siguiente tabla nos indica tanto la monotonía de f como sus extremos relativos.

f'	$+$	máx	$-$	mín	$+$
f	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$

$$f'(-2) = 3 > 0; \quad f'(0) = -9 < 0; \quad f'(2) = 3 > 0.$$

Por tanto, f es creciente en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ y es decreciente en $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$.

La segunda derivada de f es $f''(x) = 6x$, que sólo se anula en $x = 0$. La siguiente tabla nos indica la curvatura de la función f.

f''	$-$	PI	$+$
f	$\cap$	0	$\cup$

$$f''(-1) = -6 < 0; \quad f''(1) = 6 > 0.$$

De esta forma, f es cóncava en $]-\infty, 0[$ y es convexa en $]0, +\infty[$.

> La función f es (estrictamente) creciente en $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ y es (estrictamente) decreciente en $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$. Además, la función f es cóncava en $]-\infty, 0[$ y es convexa en $]0, +\infty[$.

Apartado (c). Teniendo en cuenta que

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

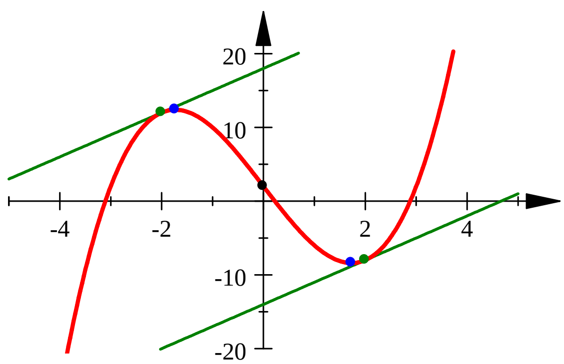
para cada número natural n (se aumenta una unidad el exponente y se divide entre el nuevo exponente), deducimos que

$$\int f(x)\, dx = \int \left(x^3 - 9x + 2\right) dx = \int x^3 dx - 9 \int x dx + 2 \int dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - 9\frac{x^2}{2} + 2x + C = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C.$$

$$\boxed{\int f(x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C.}$$

■

Nota. Aunque no se nos pide, dibujamos la función, sus rectas tangentes en los puntos del primer apartado (en verde), su punto de inflexión (en negro) y sus extremos relativos (en azul).



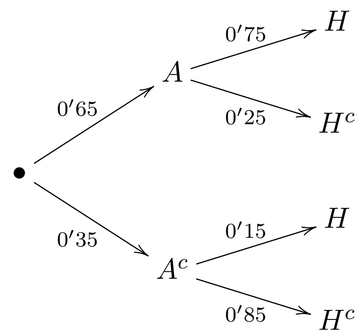
Ejercicio 3 El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientras que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) **(1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?**

b) **(1 punto) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?**

Solución: Denotemos por A al suceso “elegido/a un/a turista al azar, éste/a se aloja en la capital” (lo que significa que A^c representa el caso en el que se aloja en una zona rural) y por

H al suceso "elegido/a un/a turista al azar, éste/a se aloja en un hotel" (lo que significa que H^c representa el caso en el que se aloja en un apartamento turístico). Los datos del enunciado nos indican que $p(A) = 0'65$, $p(H/A) = 0'75$ y $p(H/A^c) = 0'15$. Podemos entonces completar el siguiente diagrama de árbol:



Apartado (a). Aplicando el *teorema de la probabilidad total*, la probabilidad de que un/a turista elegido/a al azar se aloje en un hotel es:

$$p(H) = p(A) \cdot p\left({}^{H}\!\diagup_{A}\right) + p(A^c) \cdot p\left({}^{H}\!\diagup_{A^c}\right) = 0'65 \cdot 0'75 + 0'35 \cdot 0'15 = 0'54.$$

Apartado (b). Aplicando el *teorema de Bayes*:

$$p\left({}^{A^c}\!\diagup_{H^c}\right) = \frac{p(A^c) \cdot p\left({}^{H^c}\!\diagup_{A^c}\right)}{p(A) \cdot p\left({}^{H^c}\!\diagup_{A}\right) + p(A^c) \cdot p\left({}^{H^c}\!\diagup_{A^c}\right)} = \frac{0'35 \cdot 0'85}{0'65 \cdot 0'25 + 0'35 \cdot 0'85}$$

$$= \frac{0'2975}{0'46} = \frac{2975}{4600} = \frac{119}{184} \approx 0'64674.$$

$$\boxed{\textbf{(a)}\ \ p(H) = 0'54 \qquad \textbf{(b)}\ \ p\left({}^{A^c}\!\diagup_{H^c}\right) = \frac{119}{184} \approx 0'64674}$$

■

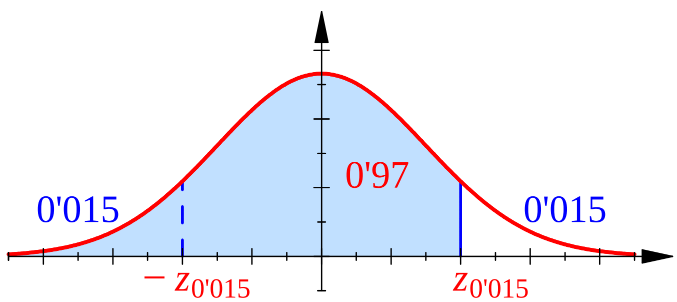
Ejercicio 4 **Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partido político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.**

a) **(1.5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensan votar a ese partido en dicha ciudad.**

b) **(1 punto) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2 %.**

SOLUCIÓN: Llamemos p a la verdadera proporción de personas de esa población que desean votar al partido político en cuestión. Esta proporción es desconocida y vamos a tratar de estimarla.

Apartado (a). Se ha tomado una muestra aleatoria (suficientemente grande) de $n = 300$ votantes de esa ciudad y se ha encontrado que 135 de ellos piensan votar a dicho partido político, por lo que la proporción muestral de votantes de ese partido en la muestra es de $\hat{p} = 135/300 = 9/20 = 0'45$. Calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ a un nivel de confianza del 97 % (es decir, al $\alpha = 0'03 = 3\ \%$ de significación). El número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'015$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso complementario, es decir, $p\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'015 = 0'985$.



Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando que $p(Z \le 2'17) = 0'9850$, por lo que tomamos como valor crítico $z_{\alpha/2} = 2'17$. De esta forma, el intervalo de confianza para la proporción de individuos que piensan votar a ese partido en dicha ciudad es:

$$\mathrm{IC}(p) = \left]\ \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\ \right[= \left]\ 0'45 \pm 2'17\sqrt{\frac{0'45\cdot 0'55}{300}}\ \right[\approx$$

$$\approx \left]\ 0'45 \pm 0'06233\ \right[= \left]\ 0'38767, 0'51233\ \right[.$$

Por tanto, si éste fuese uno del 97 % de los intervalos de confianza que contienen al verdadero valor de la proporción poblacional (al elegir muchas muestras aleatorias independientes y construir muchos intervalos de confianza asociados), tendríamos que la proporción de individuos que piensan votar a ese partido en dicha ciudad está entre el $38'767$ y el $51'233\ \%$.

$$\boxed{\mathrm{IC}\,(p) = \left]\ 0'38767,\ 0'51233\ \right[.}$$

Apartado (b). Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral necesario para cometer un error E inferior al $E_0 = 2\,\%$ debe cumplir:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = E \le E_0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{z^2_{\alpha/2}\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{n} \le E_0^2 \quad\Leftrightarrow\quad n \ge \frac{z^2_{\alpha/2}\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E_0^2}.$$

Así:

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{E_0^2} = \frac{2'17^2 \cdot 0'45 \cdot 0'55}{0'02^2} = 2913'6.$$

Por tanto,

> el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2 % es de 2914 individuos.

■

Opción B

Ejercicio 1 Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **(0.5 puntos) Razone si la matriz A es simétrica.**

b) **(1 punto) Calcule A^{-1}.**

c) **(1 punto) Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = 0$.**

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** La matriz A no es simétrica ya que el elemento a_{23} vale -1 y el elemento a_{32} es 1, siendo estos valores diferentes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & \boxed{-1} \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Apartado (b). En primer lugar, estudiamos si la matriz A posee inversa calculando su determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+0+0) - (0+4-1) = -1.$$

Dado que A posee determinante no nulo, deducimos que posee inversa. Calculamos su matriz adjunta determinando, previamente, la siguiente matriz de menores (que resultan de eliminar una fila y una columna):

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 & \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz adjunta de A (que se obtiene a partir de la anterior cambiando el signo de los elementos que ocupan posición "impar") es:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Apartado (c). La forma más sencilla de calcular la matriz X se basa en despejarla de la propia ecuación de la siguiente forma (teniendo cuidado en multiplicar por la inversa de A por la derecha):

$$2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2X \cdot A = A^2 + 3I_3 \quad \Leftrightarrow \quad 2X = \left(A^2 + 3I_3\right) \cdot A^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad X = \frac{1}{2} \cdot \left(A^2 + 3I_3\right) \cdot A^{-1}.$$

Por consiguiente, dado que:

$$A^2 + 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -3 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

deducimos que la matriz X es:

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left(A^2 + 3I_3\right) \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -3 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) A no es simétrica **(b)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(c)** $X = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

■

Nota. Este cálculo hubiese sido más sencillo si hubiésemos multiplicado:

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left(A^2 + 3I_3\right) \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(A \cdot A \cdot A^{-1} + 3I_3 \cdot A^{-1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(A + 3A^{-1}\right),$$

por lo que hubiésemos obtenido la misma solución de una forma más directa.

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left(A + 3A^{-1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \textbf{si } x < 0, \\ x^2 + a, & \textbf{si } x \geq 0. \end{cases}$

a) **(1 punto) Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.**

b) **(1.5 puntos) Para $a = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?**

Solución: **Apartado (a).** El denominador del primer trozo solo se anula en $x = 1$, que no cumple la condición $x < 0$, por lo que f está bien definida en todo $\mathbb{R}$. En el intervalo abierto $]-\infty, 0[$ su expresión general es un cociente de polinomios (de hecho, una función hiperbólica) y en el intervalo abierto $]0, +\infty[$ su expresión general es un polinomio. Por consiguiente, deducimos que, como mínimo, f es continua y derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Estudiamos qué ocurre en $x = 0$. En dicho punto, el valor de la función y de los límites laterales es:

$$f\left(0^-\right) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$f(0) = f\left(0^+\right) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 + a\right) = a.$$

Por consiguiente, f es continua en $x = 0$ si, y sólo si, $a = -1$, en cuyo caso f sería continua en su dominio ($\mathbb{R}$). Suponiendo que $a = -1$, la primera derivada de f tomaría los siguiente valores en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

- $x < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2},$
- $x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x.$

De esta forma, los límites laterales de la primera derivada en $x = 0$ valen

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{(x-1)^2} = -1,$$

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0.$$

Como estos límites laterales no coinciden, la función f no es derivable en $x = 0$, por lo que solo es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

> La función f es continua y derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sea cual sea el valor de a. Si $a = -1$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (nunca es derivable en $x = 0$).

Apartado (b). Suponiendo que $a = -2$, la función f y su primera derivada vienen dadas mediante:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x < 0, \\ x^2 - 2, & \text{si } x \geq 0; \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0, \\ 2x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Sabemos que f es continua y derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y que en $x = 0$ ni es continua ni es derivable. La función f' nunca se anula en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ya que

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0 \qquad \text{si } x < 0,$$

$$f'(x) = 2x > 0 \qquad \text{si } x > 0.$$

De esta forma, la siguiente tabla nos indica la monotonía de la función f:

f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$f'(-1) = \frac{-1}{4} < 0; \quad f'(1) = 2 > 0.$$

Por tanto, f es decreciente en $]-\infty, 0[$ y es creciente en $]0, +\infty[$.

Para estudiar la curvatura, calculamos la segunda derivada de f:

- $x < 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-1}{(x-1)^2}\right) = \dfrac{2}{(x-1)^3} < 0,$
- $x > 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 2 > 0.$

Por consiguiente, confeccionamos la siguiente tabla:

f''	$-$		$+$
f	$\cap$	0	$\cup$

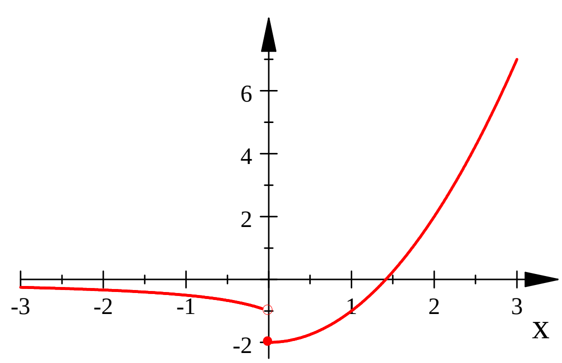
$$f''(-1) = \frac{-1}{4} < 0; \quad f''(1) = 2 > 0.$$

Por tanto, f es cóncava en $]-\infty, 0[$ y es convexa en $]0, +\infty[$. El punto $x = 0$ no es un punto de inflexión porque en él (aún cuando la función cambia su curvatura, pasando de cóncava a convexa) la función f no es continua.

> La función f es (estrictamente) decreciente en $]-\infty, 0[$ y (estrictamente) creciente en $]0, +\infty[$. Además, f es cóncava en $]-\infty, 0[$ y convexa en $]0, +\infty[$. No posee ningún punto de inflexión.

■

Nota. Aunque no se pide, dibujamos la función para observar su comportamiento.



Ejercicio 3 El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35 % películas y el 18 % no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) **(0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que vea series o películas.**

b) **(1 punto) Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.**

c) **(0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?**

Solución: **Apartado (a).** Llamemos S al suceso "elegido un habitante al azar de esa ciudad, éste ve series" y denotemos por L al suceso "elegido un habitante al azar de esa ciudad, éste ve películas". El enunciado nos informa de que $p(S) = 0'69$ y $p(L) = 0'35$. Además $p(S^c \cap L^c) = 0'18$. Aplicando la *ley de De Morgan*, observamos que

$$(S \cup L)^c = S^c \cap L^c,$$

por lo que la probabilidad de que vea series o películas es:

$$p(S \cup L) = 1 - p((S \cup L)^c) = 1 - p(S^c \cap L^c) = 1 - 0'18 = 0'82.$$

Apartado (b). La probabilidad que se pide es:

$$p\left(L/S\right) = \frac{p(S \cap L)}{p(S)}.$$

La probabilidad de que vea, a la vez, series y películas, es:

$$p(S \cap L) = p(S) + p(L) - p(S \cup L) = 0'69 + 0'35 - 0'82 = 0'22.$$

Por tanto,

$$p\left(L/S\right) = \frac{p(S \cap L)}{p(S)} = \frac{0'22}{0'69} = \frac{22}{69} \approx 0'31884.$$

Apartado (c). La probabilidad de que vea series y no vea películas es:

$$p(S \cap L^c) = p(S) - p(S \cap L) = 0'69 - 0'22 = 0'47.$$

$$\boxed{\textbf{(a)}\ p(S \cup L) = 0'82 \qquad \textbf{(b)}\ p\left(L/S\right) = \frac{22}{69} \approx 0'31884 \qquad \textbf{(c)}\ p(S \cap L^c) = 0'47.}$$

■

Ejercicio 4 **Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:**

10 17 8 27 6 9 32 5 21

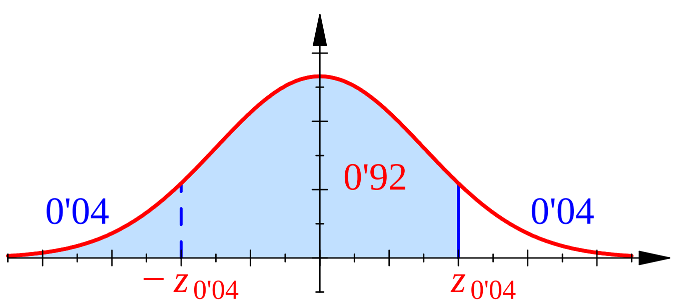
a) **(1.5 puntos) Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.**

b) **(1 punto) Con una confianza del 95.5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1.5 minutos?**

Solución: Llamemos X a la variable aleatoria que mide el tiempo que tarda un/a empleado/a, elegido/a al azar en esa empresa, en llegar al puesto de trabajo desde su domicilio. El enunciado nos indica que podemos suponer que X posee una distribución Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma = 8)$, de desviación típica $\sigma = 8$ minutos, siendo la media μ desconocida. Se toma una muestra aleatoria de $n = 9$ empleados/as de la empresa que arroja una media de:

$$\overline{x} = \frac{10 + 17 + 8 + 27 + 6 + 9 + 32 + 5 + 21}{9} = 15 \text{ minutos.}$$

Apartado (a). Calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ a un nivel de confianza del 92 % (es decir, al $\alpha = 0'08 = 8\ \%$ de significación). El número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'04$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso complementario, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'04 = 0'96$.

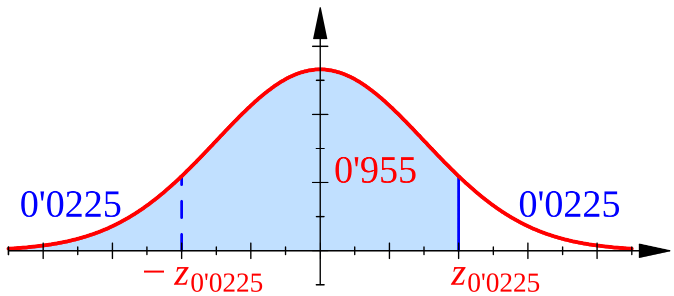


Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando que $p(Z \leq 1'75) = 0'9599$ y $p(Z \leq 1'76) = 0'9608$, por lo que tomamos como valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'75$. De esta forma, el intervalo de confianza para el tiempo medio al 92 % de confianza es:

$$\text{IC}\,(\mu) = \left]\ \overline{x} \pm z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right[= \left]\ 15 \pm 1'75 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}}\ \right[\approx \left]\ 15 \pm 4'667\ \right[= \left]\ 10'333\ ,\ 19'667\ \right[.$$

$$\boxed{\text{IC}(\mu) = \left]\ 10'333\ ,\ 19'667\ \right[.}$$

Apartado (b). Calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ a un nivel de confianza del 95'5 % (es decir, al $\alpha = 0'045 = 4'5\ \%$ de significación). El número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'0225$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso complementario, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'0225 = 0'9775$.



Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando que $p(Z \leq 2) = 0'9772$ y $p(Z \leq 0'01) = 0'9778$, por lo que tomamos como valor crítico $z_{\alpha/2} = 2'005$. Así,

$$z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = E \leq E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E_0} \leq \sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E_0}\right)^2.$$

Por consiguiente,

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{2'005\cdot 8}{1'5}\right)^2 = 114'35.$$

De esta forma,

> para estimar el tiempo medio con un error inferior a $1'5$ minutos habrá que tomar una muestra de, al menos, 115 individuos.

■