

**ANÁLISIS DE RECURSOS EN INTERNET  
PARA LA ENSEÑANZA DE LA  
PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN  
PRIMARIA**

**Karen Ruiz Reyes**



**Tesis de Máster**

**Director: Dr. José Miguel Contreras**

**GRANADA, 2013**





# **ANÁLISIS DE RECURSOS EN INTERNET PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA**

## **TRABAJO FIN DE MASTER**

MEMORIA realizada por D<sup>a</sup>. Karen Ruiz Reyes bajo la dirección del Doctor José Miguel Contreras García del Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada para optar al Máster Oficial en Didáctica de la Matemática impartido por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

### **La autora**

Karen Ruiz Reyes

### **Vº Bº del Director**

Dr. José Miguel Contreras García



# ANÁLISIS DE RECURSOS EN INTERNET PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos del trabajo	1
1.3. Marco curricular	2
1.3.1 La probabilidad en el currículo español de educación primaria	2
1.3.2 La probabilidad en el currículo chileno de educación primaria	4
1.3.3 Comparación entre el currículo español y el currículo chileno de educación primaria en el área de probabilidad	6
1.3.4 Estándares americanos	7
1.3.5 Proyecto Gaise	8
1.4. Marco teórico	10
1.4.1 La actividad matemática y los objetos ligados a ella	10
1.4.2 Objetos emergentes e intervinientes en los sistemas de prácticas	11
1.4.3 Relación entre los objetos: función semiótica	12
1.4.4 Criterios de idoneidad didáctica	13
1.4.5 Análisis didáctico	13
1.5. La probabilidad como objeto matemático fundamental	14
1.5.1 Propiedades y conceptos relacionados con la probabilidad	15
1.5.2 Representaciones y argumentos	17
1. INVESTIGACIONES PREVIAS	21
2.1. Introducción	21
2.2. Applets en la enseñanza de la estadística y la probabilidad	21
2.3. Investigaciones apoyadas en la simulación	25
2.4. Formación de profesores para enseñar probabilidad	27
2.4.1 Actitudes y creencias	28
2.4.2 Conocimientos probabilísticos	29
2.4.3 Conocimiento de la probabilidad y la enseñanza	32
2.4.4 Conocimiento de la probabilidad y los estudiantes	33

2.5. Conclusiones del estudio de las investigaciones previas	34
2. RECURSOS EN INTERNET: UN ESTUDIO EXPLORATORIO	37
3.1. Introducción	37
3.2. Muestra de recursos analizados y método	37
3.3. Resultados de la clasificación y discusión	38
3.3.1 Juegos	38
3.3.2 Exploración de conceptos	43
3.3.3 Problemas	61
3.3.4 Lecciones o libros de texto	66
3.3.5 Video tutoriales	75
3. CONCLUSIONES	81
4.1. Introducción	81
4.2. Conclusiones respecto de los objetivos	81
4.3. Limitaciones del estudio	83
4.4. Implicaciones para la formación de profesores	84
REFERENCIAS	85

# CAPÍTULO 1

## EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

### 1.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo presenta los objetivos de la investigación junto con el desarrollo del contexto de la investigación, haciendo hincapié en las directrices curriculares vigentes en España y en Chile y las sugerencias internacionales planteadas por el NTCM y el Proyecto GAISE para la enseñanza de la Probabilidad en la Educación Primaria. El capítulo se finaliza exponiendo el marco teórico que sustenta esta investigación, relacionado con algunos conceptos y propiedades de la probabilidad y las herramientas de análisis utilizadas del Enfoque Ontosemiótico.

### 1.2. OBJETIVOS DEL TRABAJO

En este trabajo nos centraremos en localizar, clasificar y analizar recursos disponibles en Internet que sean útiles en la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Se pretende conseguir los siguientes objetivos:

*Objetivo 1. Buscar y seleccionar materiales didácticos disponibles en Internet, pensados para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Deben ser asequibles a alumnos y profesores y complementar las directrices curriculares establecidas en los currículos y orientaciones curriculares.*

*Objetivo 2. Clasificar los materiales encontrados en categorías: juegos, exploración de conceptos, problemas, lecciones o libros de texto virtuales, videos tutoriales y preparar listados de estos recursos, con las direcciones donde están disponibles, para hacerlos más accesibles a los profesores.*

*Objetivo 3. Analizar los recursos y los objetos matemáticos puestos en juego en un ejemplo típico en cada una de las categorías identificadas en el objetivo anterior, para determinar si estos objetos se corresponden con los del currículo, lo amplían o hay objetos en el currículo que no se tienen en cuenta en estos recursos.*

*Objetivo 4. Valorar la idoneidad didáctica de los mismos y las posibles dificultades a priori que se pueden dar en su utilización para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria.*

### **1.3. MARCO CURRICULAR**

Este apartado describe el Marco Curricular de nuestro trabajo. Presenta un resumen de la organización curricular de España y Chile, junto a una comparación entre ambas directrices curriculares, las orientaciones aportadas por el NTCM y el Proyecto GAISE referentes a la importancia de la probabilidad en la Educación Primaria.

#### **1.3.1 LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL DE EDUCACIÓN PRIMARIA**

El currículo español está, en primer lugar, dictado a nivel nacional por los Decretos de Enseñanzas Mínimas, por parte del Ministerio de Educación y Ciencia. A nivel autonómico cada comunidad completa estas directrices. En el actual plan de estudios, la estadística y probabilidad se programan dentro de un Bloque Completo destinado al tema, que se inicia desde el primer ciclo de la educación primaria. Resumimos a continuación estas orientaciones curriculares.

#### **Decreto de Enseñanzas Mínimas del Ministerio de Educación y Ciencia**

En este Decreto (MEC, 2006) se incluye la probabilidad en el bloque 4, Tratamiento de la información, azar y probabilidad, que se presenta conectado con problemas que implican a otras áreas de conocimiento. Este documento indica que el trabajo en este Bloque ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones presentes en los medios de comunicación y contribuir a que los estudiantes valoren los conocimientos estadísticos.

El Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 2006), en el bloque Tratamiento de la información, azar y probabilidad incluye los siguientes contenidos específicos, sobre azar y la probabilidad en la Educación Primaria:

- *Primer Ciclo (6 - 7 años):* Carácter aleatorio de algunas experiencias. Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.
- *Segundo Ciclo (8 - 9 años):* Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar.

- *Tercer Ciclo (10 - 11 años)*: Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.

Se señala que los juegos de azar proporcionan ejemplos que permitirán introducir las nociones de probabilidad e incertidumbre. Para la probabilidad se pretende que el alumnado sea capaz de razonar sobre los posibles resultados de un experimento aleatorio sencillo, que asignen probabilidades a sucesos equiprobables o no, utilizando distintas estrategias sobre técnicas de conteo. También se propicia la asignación frecuencial, a partir de experimentos organizados en la clase, que permiten enlazar estadística y probabilidad.

Encontramos también en este documento los siguientes criterios de evaluación, relacionados con la probabilidad:

- *Primer Ciclo*: Se pretende evaluar si los niños y las niñas están familiarizados con conceptos y términos básicos sobre el azar: seguro, posible, imposible.
- *Tercer Ciclo*: Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. Además, se comprobará que hay sucesos imposibles, sucesos que se producen con casi toda seguridad, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en la experiencia.

La evaluación considerará además de los aspectos propios de la clasificación y representación de datos, la capacidad para deducir relaciones entre ellos y, sobre todo, la deducción de conclusiones y estimaciones a partir de los datos representados.

### **Directrices de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía**

Como ejemplo de normativa autonómica, comentamos las directrices de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (2007), por su parte, remite a estos mismos contenidos cuando describe el Bloque 5 que incluye en el currículo de matemáticas con el título Tratamiento de la información, azar y probabilidad.

Se indican las importantes conexiones de este bloque con las establecidas en el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre (MEC 2006): Bloque 1, Números y operaciones; Bloque 2, La medida: estimación y cálculo de magnitudes; Bloque 3, Geometría. También se sugieren que sus contenidos sólo adquieren su pleno significado

cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento.

La principal finalidad de este núcleo temático es que los alumnos comiencen a interpretar los fenómenos ambientales y sociales de su entorno cercano a través de las matemáticas y en especial de la estadística y la probabilidad. Los alumnos deben ser conscientes de los fenómenos de distinta naturaleza que suceden a su alrededor y que aparecen en los medios de comunicación. Esto ayuda a entender las matemáticas como una disciplina que ayuda a interpretar la realidad y a actuar sobre ella de forma responsable, crítica y positiva. Las múltiples aplicaciones de dichas disciplinas se extienden a todos los campos de la actividad humana. Ello ocasiona un amplio reconocimiento social, constatado por su creciente presencia en el aprendizaje de otras materias, el mercado laboral y el ambiente cultural.

Todas estas razones hacen que la promoción de su aprendizaje en todos los niveles educativos sea una imprescindible meta de carácter cultural.

### **1.3.2 LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO CHILENO DE EDUCACIÓN PRIMARIA**

La Ley General de Educación (2009), establece que la enseñanza básica (primaria) se compone de seis cursos, de primero a sexto básico. Los recientes cambios curriculares, propuestos por el Ministerio de Educación de Chile en las Bases Curriculares (2012) organizan, para la enseñanza básica, la asignatura de matemática en cinco ejes temáticos: Números y Operaciones; Patrones y Álgebra, Geometría, Medición; Datos y Probabilidades, cada uno de ellos compuesto de una serie de objetivos de aprendizaje.

El eje Datos y Probabilidades, del currículo chileno, presenta como objetivo que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades. Estos conocimientos les permitirán reconocer gráficos y tablas en su vida cotidiana. Para lograr este aprendizaje, es necesario que conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido y hagan predicciones a partir de ellos.

Los objetivos de aprendizaje propuestos para el concepto de Probabilidad son los siguientes:

- *Segundo Básico (7 años)*

- Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados.
- Registrar resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.
- *Tercero Básico (8 años)*
  - Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas.
- *Cuarto Básico (9 años)*
  - Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos.
- *Quinto Básico (10 años)*
  - Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento por sobre la base de un experimento aleatorio, empleando los términos seguro – posible - poco posible - imposible.
  - Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.
- *Sexto Básico (11 años)*
  - Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.

En los Programas de Estudio de cada curso de educación básica, se sugieren los siguientes indicadores de evaluación para el concepto de probabilidad:

- *Segundo Básico*
  - Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.
- *Tercero Básico*
  - Realizan juegos aleatorios con dados de diferentes formas (cubos, tetraedros u otros) y monedas.
- *Cuarto Básico*
  - Realizan experimentos con dados cúbicos u de otra forma regular como tetraedro, dodecaedro, etc.
  - Extraen naipes al azar con y sin devolver.
  - Realizan repeticiones de un mismo experimento.
  - Usan software educativo para simular experimentos aleatorios.
- *Quinto Básico*
  - Describen eventos posibles en el resultado de un juego de azar; por ejemplo: al lanzar un dado, indican los resultados posibles incluidos en el evento: “que salga un número par”.

- Se refieren a la posibilidad de ocurrencia de un evento, mediante expresiones simples como seguro, posible, poco posible o imposible.
- Dan ejemplos de eventos cuya posibilidad de ocurrencia es segura, posible, poco posible o imposible.
- Dan ejemplos de eventos cuya probabilidad de ocurrencia es mayor que la de otros eventos, sin calcularla.
- Juegan a lanzar dados o monedas y, frente a eventos relacionados con estos lanzamientos, dicen, sin calcular, cuál es más probable que ocurra.
- Hacen apuestas entre alumnos y dicen, sin calcular, quién tiene más probabilidad de ganar.
- *Sexto Básico*
  - Enumeran resultados posibles de lanzamientos de monedas o dados con ayuda de un diagrama de árbol.
  - Realizan de manera repetitiva experimentos con monedas para conjeturar acerca de las tendencias de los resultados.
  - Conjeturan acerca de porcentajes de ocurrencia de eventos relativos a lanzamientos de monedas o dados.

### **1.3.3 COMPARACIÓN ENTRE EL CURRÍCULO ESPAÑOL Y EL CURRÍCULO CHILENO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN EL ÁREA DE PROBABILIDAD**

En ambos países la educación primaria tiene una duración de seis años. Los contenidos y objetivos de aprendizajes de probabilidad, en el caso de Chile, se organizan anualmente en el eje temático Datos y Probabilidades, en el caso de España, se organizan en tres ciclos de dos años cada uno, en el bloque denominado Tratamiento de la información, azar y probabilidad).

Las directrices curriculares de ambos países incluyen el estudio de la probabilidad desde los primeros años de educación primaria, siguiendo las recomendaciones internacionales propuestas por el NTCM y el proyecto GAISE (ver apartados 1.4.4 y 1.4.5). En el currículo chileno los contenidos de probabilidad están orientados a la realización de experimentos aleatorios, al registro y ordenación de los resultados, como también a la descripción de la probabilidad de ocurrencia de un evento y a la comparación de la posibilidad de ocurrencia de distintos eventos sin calcularla. En el currículo español, se parte de la caracterización entre lo imposible, lo seguro, lo posible,

el uso de lenguaje habitual de expresiones relacionadas con la probabilidad, siguiendo con la estimación de las posibilidades de ocurrencia de una situación aleatoria, finalizando con la estimación y expresión del grado de probabilidad de un suceso, igualmente, se destaca la presencia de algunos objetivos actitudinales relacionados con el trabajo en equipo, la reflexión, el razonamiento, la perseverancia entre otros.

En la Tabla 1.3.1 incluimos una comparación de los contenidos de probabilidad del currículo español y chileno.

Tabla 1.3.1. Comparación de los contenidos de Probabilidad del currículo español y chileno

Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad.	Eje Datos y Probabilidades
<p><b>Primer Ciclo</b>            Carácter aleatorio de algunas experiencias:            - Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.            - Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de los demás.</p>	<p><b>Segundo básico</b>            - Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados.            - Registrar resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.</p>
<p><b>Segundo Ciclo</b>            Carácter aleatorio de algunas experiencias:            - Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto.            Introducción al lenguaje del azar:            - Constatación del carácter aleatorio de algunas experiencias.</p>	<p><b>Tercero básico</b>            - Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas.</p> <p><b>Cuarto básico</b>            - Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos.</p>
<p><b>Tercer Ciclo</b>            Carácter aleatorio de algunas experiencias:            - Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación y expresión del grado de probabilidad de un suceso.            - Utilización del lenguaje adecuado para describir experiencias relacionadas con el azar.            - Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas.            - Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales.</p>	<p><b>Quinto básico</b>            - Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento por sobre la base de un experimento aleatorio, empleando los términos seguro – posible - poco posible - imposible.            - Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.</p> <p><b>Sexto básico</b>            - Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.</p>

### 1.3.4 ESTÁNDARES AMERICANOS

En los estándares curriculares (NCTM, 2000) la probabilidad se inicia desde el nivel K-2 (5 años) y continúa a lo largo de toda la escolaridad. A continuación describimos las competencias recogidas en estos estándares, con relación a este tema:

- *Respecto a la inferencia y la predicción basada en datos:*
  - Desde preescolar hasta el grado 2, todos los estudiantes deberían poder discutir eventos relacionados con experiencias de los estudiantes, como probable o improbable.
  - En los grados 3-5 todos los estudiantes deberían poder: proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos y diseñar estudios para sacar conclusiones o predicciones.
- *Respecto a los conceptos básicos de probabilidad:*
  - En los grados 3-5 todos los estudiantes deberían describir sucesos probables o improbables y discutir el grado de probabilidad usando palabras como cierto, igualmente probable e imposible. Asimismo deben predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos y poner a prueba las predicciones; entender que la medida de la probabilidad de un evento puede ser representado por un número de 0 a 1.

### **1.3.5 PROYECTO GAISE**

La American Statistical Association (ASA) en el año 2007, publicó el trabajo denominado “Pautas para la Evaluación e Instrucción en Educación Estadística”, Proyecto GAISE (Franklin et. al, 2007), basado en los principios y estándares del NCTM, destaca que la enseñanza actualmente tiene como objetivo la alfabetización estadística, lo cual implica formar, desde los primeros niveles escolares, estudiantes con habilidad estadística, para razonar a partir de datos empíricos; comprender y explicar la variación de los datos; percibir, cuantificar y justificar el comportamiento de los datos. Plantea que se deben desarrollar los conocimientos estadísticos en tres niveles de desarrollo (A, B, C), a través de cuatro procesos: formular preguntas, recolectar datos, analizar datos e interpretar resultados.

El proyecto GAISE propone en el nivel A, que los estudiantes deben desarrollar las ideas básicas de la probabilidad con el fin de apoyar su uso posterior de la probabilidad de sacar conclusiones en los niveles B y C. A continuación, se describe el Rol de la Probabilidad para el nivel A y B, que está relacionado con la adquisición de los conceptos básicos de probabilidad.

#### **El Rol de la Probabilidad**

En el Nivel A, los estudiantes deben entender que la probabilidad es una medida de la posibilidad de que algo va a suceder. Es una medida de certeza o incertidumbre. Los

eventos deben ser vistos como situados en un continuo de ser imposible a seguro, con menos probable, igualmente probable, y más probable situados en el medio.

Los estudiantes aprenden a asignar de manera informal números a la probabilidad de que ocurra algo. Un ejemplo de asignación de números en una recta numérica, Figura 1.3.1, es la siguiente:

0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
Impos- sible	Unlikely or less likely	Equally likely to occur and not occur	Likely or more likely	Certain

Figura 1.3.1. Asignación Numérica de la Probabilidad

Los estudiantes deben tener experiencias de como estimar las probabilidades a partir de datos empíricos. A través de la experimentación (o simulación), los estudiantes deben lograr la comprensión explícita de la idea de que cuantas veces más se repite un fenómeno aleatorio, más cerca los resultados estarán para el modelo matemático esperado. En el Nivel A, se consideran sólo modelos simples basados en resultados igualmente probables, o, a lo sumo, basados, en la suma de las caras en dos dados numerados.

Si un niño lanza una moneda 10 veces para obtener datos empíricos, es muy posible que él o ella, no consiga cinco caras y cinco cruces. Sin embargo, si el niño lanza la moneda cientos de veces, es de esperar ver que los resultados comenzarán a estabilizar a las probabilidades esperadas de 0,5 para las caras y 0,5 para las cruces. Esto se conoce como la Ley de los Grandes Números. Por lo tanto, en el Nivel A, los experimentos de probabilidad deben centrarse en la obtención de datos empíricos para desarrollar interpretaciones de frecuencias relativas que los niños pueden traducir fácilmente a los modelos con probabilidades "matemáticas" conocidas y comprensibles. El clásico lanzamiento de monedas, girar ruletas simples, y el lanzamiento de dados numéricos son herramientas confiables para usar en ayudar a los estudiantes del Nivel A, a desarrollar una comprensión de la probabilidad. El concepto de interpretaciones frecuencia relativa será importante en el nivel B cuando el estudiante trabaja con el razonamiento proporcional, al pasar de cuenta o frecuencias a proporciones o porcentajes.

Mientras los estudiantes trabajan con los resultados de la repetición fenómenos aleatorios, pueden desarrollar una comprensión del concepto de aleatoriedad. Verán que

al lanzar una moneda 10 veces, aunque es de esperar cinco caras y cinco cruces, los resultados reales pueden variar de un estudiante a otro. También verán que si resulta una cara en un lanzamiento, eso no significa que en el próximo lanzamiento resultará una cruz. Debido a que el lanzamiento de una moneda es un experimento aleatorio, siempre hay incertidumbre en cuanto a cómo la moneda caerá de un lanzamiento al siguiente. Sin embargo, en el nivel A, los estudiantes pueden comenzar a desarrollar la idea de que aunque tenemos la incertidumbre y la variabilidad en los resultados, mediante el examen de lo que ocurre con el proceso aleatorio en el largo plazo, podemos cuantificar la incertidumbre y la variabilidad con probabilidades dando un número predictivo de la probabilidad de un resultado en el largo plazo. En el nivel B, los estudiantes verán el papel que la probabilidad desempeña en el desarrollo del concepto de la muestra aleatoria simple y el rol que la probabilidad juega con la aleatoriedad.

#### **1.4. MARCO TEÓRICO**

En este trabajo utilizaremos nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS), desarrolladas por Godino y colaboradores, que nos servirán de herramienta para analizar recursos didácticos relacionados con la probabilidad para la enseñanza primaria. En concreto nos centramos en las prácticas matemáticas ligadas a la resolución de problemas relacionados con estos recursos o a la propia interpretación de los recursos y los posibles conflictos de los estudiantes.

##### **1.4.1 LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA Y LOS OBJETOS LIGADOS A ELLA**

Los autores de este marco teórico conciben la actividad matemática como un conjunto de prácticas, de las cuáles surgen los objetos matemáticos. Estas prácticas se hacen para resolver problemas que pueden ser matemáticos o extra-matemáticos (Godino, 2002).

Las prácticas pueden ser específicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas interesadas en resolver una misma clase de situaciones problemáticas. La pertenencia a una institución conlleva a la realización de unas prácticas sociales que son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento.

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas de las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, sobre qué es el objeto matemático *probabilidad*, se propone como respuesta, “el sistema de prácticas que

realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales interviene dicho objeto.

Puesto que los significados dependen de los contextos sociales y de los sujetos, su carácter es relativo. Su uso en el análisis didáctico lleva, en consecuencia, a introducir la tipología básica de significados (Godino, 2003). Respecto al significado institucional, se diferencia entre el global (qué significa un objeto en su sentido más amplio en una institución), referencial (qué significado en una enseñanza o investigación), pretendido (qué se pretende enseñar), implementado (qué se logra enseñar) y evaluado (qué parte se evalúa).

#### **1.4.2 OBJETOS EMERGENTES E INTERVINIENTES EN LOS SISTEMAS DE PRÁCTICAS**

Godino, Batanero y Font (2007) describen diferentes categorías en los objetos ligados a las prácticas matemáticas, que serán objetos institucionales si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución o serán objetos personales si dichos sistemas de prácticas son realizados por una persona. Es decir, se tienen en cuenta las dimensiones social y personal del conocimiento y también el hecho de que una práctica personal pudiera ser o no adecuada desde el punto de vista de la institución. A continuación se describen las categorías de objetos propuestas.

- *Situaciones-problemas*: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, acciones que inducen una actividad matemática. En nuestro caso el problema puede ser la búsqueda de una estrategia óptima en un juego, o bien otros problemas planteados por el profesor en relación a un recurso didáctico en Internet.
- *Lenguajes*: términos, expresiones, notaciones, gráficos que se utilizan para representar los datos del problema, las operaciones que hacemos con ellos, los objetos matemáticos que se utilizan y la solución encontrada. En los recursos de Internet analizados el lenguaje gráfico tiene un peso muy importante, aunque también se usa el lenguaje verbal, icónico y simbólico.
- *Conceptos-definición*: En las prácticas que llevan a cabo los estudiantes para resolver un problema matemático (en este caso cuando trabajan con el recurso) se usan implícita o explícitamente objetos matemáticos, de los cuáles el alumno ha de recordar o aplicar la definición. Por ejemplo, los estudiantes usarán implícitamente los objetos: aleatoriedad, espacio muestral, suceso, probabilidad.

- *Proposiciones* o enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que igualmente se han de emplear al resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando los estudiantes tienen que recordar que la suma de probabilidades en el espacio muestral es igual a la unidad.
- *Procedimientos*: Serían los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo que los estudiantes han aprendido durante la enseñanza previa y que aplican al resolver el problema. En nuestro caso, los estudiantes usarán técnicas sencillas de cálculo de probabilidades, como técnicas combinatorias, uso de diagrama en árbol, etc.
- *Argumentos*: Serían los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o bien la solución de los problemas. Pueden ser deductivos, inductivos, formales o informales.

Godino, Batanero y Font (2007) indican que los seis tipos descritos están relacionados entre sí formando configuraciones, es decir redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Los autores clasifican estas configuraciones en epistémicas (cuando se trata de objetos institucionales) o cognitivas (si se refieren a objetos personales). La configuración epistémica es el conjunto de objetos matemáticos que intervienen en la resolución de las actividades. Dentro de la configuración se distingue la previa (los objetos que se supone el alumno conoce antes de trabajar en la unidad didáctica) y la emergente (lo que suponemos se va a aprender).

### **1.4.3 RELACIÓN ENTRE LOS OBJETOS: FUNCIÓN SEMIÓTICA**

Otro desarrollo teórico de interés en nuestro estudio es el de función semiótica (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), que sirve para resaltar los procesos de interpretación que se llevan a cabo en la actividad matemática y en los cuales a veces pueden aparecer desajustes (conflictos) de interpretación entre alumnos y profesor.

Los autores del marco teórico describen la idea de función semiótica como correspondencia entre un antecedente y un consecuente, establecida por un sujeto (persona o institución). Un Applet en Internet, en sí mismo, puede considerarse como una función semiótica, donde el antecedente es el propio Applet, que representa visualmente un cierto juego o bien un procedimiento o teorema matemático. La correspondencia entre antecedente y consecuente suele estar implícita, aunque en algunos casos, se incluyen instrucciones para la interpretación de los recursos. Tanto si hay instrucciones como si no, es posible que el estudiante que trabaja con el recurso no comprenda su funcionamiento o no interprete correctamente los resultados producidos.

Si las interpretaciones hechas por el estudiante no son las esperadas por el profesor, diremos que hay un conflicto semiótico.

El antecedente (expresión) y consecuente (significado) de una función semiótica no se restringen a conceptos, sino abarca toda la anterior ontología de objetos matemáticos u organizaciones de estos en entidades más complejas, como sistemas conceptuales o teorías. Así en nuestro estudio, podemos, generalmente, descomponer cada recurso, en partes, tras las cuáles aparecen diferentes objetos matemáticos implícitos. Se tratará, mediante el análisis de poner de manifiesto estos objetos, así como las dificultades que los estudiantes pueden tener en su uso.

#### **1.4.4 CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA**

Otro desarrollo teórico que usamos en nuestro trabajo es la noción de idoneidad didáctica que se desarrolla a partir de la articulación de seis componentes, cada uno de los cuáles puede darse en mayor o menor grado (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006):

- *Idoneidad epistémica*: Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Sería si los significados de los objetos presentes en un recurso son adecuados desde el punto de vista matemático.
- *Idoneidad cognitiva*: Grado en que los significados pretendidos/implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los significados pretendidos por el profesor.
- *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional*: Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio.

#### **1.4.5 ANÁLISIS DIDÁCTICO**

De acuerdo a Godino, Font y Wilhelmi (2008) una tarea importante para el profesor es valorar la propia práctica docente con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Para facilitar esta valoración los autores describen diversos niveles de análisis, algunos de los cuáles creemos que también pueden aplicarse al estudio de los

recursos didácticos, entre ellos los recursos en Internet. En concreto, usaremos en nuestro estudio los siguientes tipos de análisis:

1. *Sistemas de prácticas y objetos matemáticos (previos y emergentes)*. Este nivel de análisis se aplica durante la planificación de cualquier proceso o situación de enseñanza y pretende estudiar las prácticas matemáticas planificadas. Permite descomponer el proceso de estudio previsto en una secuencia de episodios y, para cada uno de ellos, describir las prácticas supuestas de los potenciales alumnos. Como consecuencia del análisis se identifica una configuración epistémica global prevista en el desarrollo del proceso. Puede diferenciarse entre configuración previa (la que se supone tiene el alumno para poder realizar las tareas previstas) y emergente (la que se adquiere como consecuencia del aprendizaje). En nuestro caso trataremos de identificar las configuraciones y objetos latentes en los recursos analizados.
2. *Procesos matemáticos y conflictos semióticos*. En toda práctica Godino, Font y Wilhelmi identifican un *sujeto agente* (en nuestro caso un alumno potencial). Este segundo nivel de análisis se centra en los objetos y, procesos que intervienen en la realización de las prácticas previstas, y también en los que emergen de ellas, es decir, en el nivel cognitivo. La finalidad es describir la complejidad de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se podrían producir en su realización. En nuestro caso puesto que el análisis de los recursos se hace a priori, el estudio tendrá un carácter hipotético.
3. *Idoneidad didáctica del proceso de estudio*. Se trata de analizar si se verifican los diferentes tipos de idoneidad descritos en el punto anterior. Para ello los autores proporcionan unas guías de descriptores para poder valorar cada uno de los tipos de idoneidad.

## **1.5 LA PROBABILIDAD COMO OBJETO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL**

En lo que sigue analizamos el objeto matemático “probabilidad” y los objetos relacionados con él para definir un significado institucional de referencia en nuestro trabajo. Puesto que cualquier tema matemático puede estudiarse con diferentes niveles de formalización, el significado institucional de la probabilidad puede variar, dependiendo de la institución de enseñanza. En nuestro caso, nos centraremos en la

Educación Primaria, así como los conocimientos que un profesor de estos niveles debiera adquirir sobre el tema.

### 1.5.1 PROPIEDADES Y CONCEPTOS RELACIONADOS CON LA PROBABILIDAD

En este apartado definiremos algunos conceptos y propiedades relacionados con la probabilidad.

#### Álgebra de sucesos

Para introducir la probabilidad, necesitamos primeramente algunas ideas previas, entre ellas los axiomas de probabilidad propuestos por Kolmogorov (ver, por ejemplo, Feller, 1973). Partiendo de un experimento aleatorio, definimos *espacio muestral*  $\Omega$  como el conjunto de resultados posibles, es decir el conjunto de todos los sucesos aleatorios asociados a un experimento aleatorio.

Sea  $\rho$  una clase no vacía de conjuntos de  $\Omega$ , que se denominarán sucesos aleatorios o simplemente sucesos. Se llama *suceso aleatorio*  $A$ , a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Se consideran las operaciones entre sucesos, dentro del mismo espacio muestral  $\Omega$ : el suceso unión  $A \cup B$ , el suceso intersección  $A \cap B$  y el suceso complementario  $\bar{A}$ , que se representan en la Figura 1.5.1. Estas operaciones son similares a las definidas entre conjuntos y tienen sus mismas propiedades, por lo que  $\rho$  tiene una estructura de Álgebra (de Boole o más generalizada).

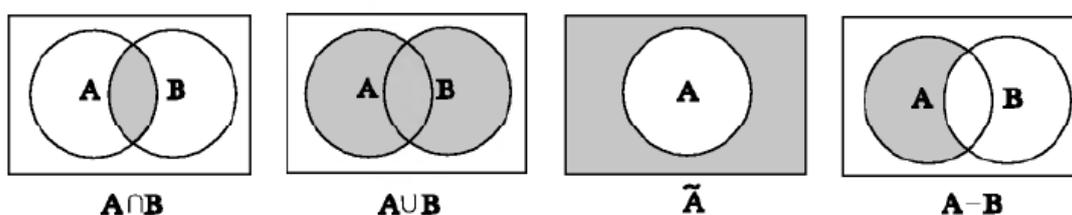


Figura 1.5.1. Operaciones entre sucesos

Si  $A \cap B = \emptyset$ ; entonces decimos que son *incompatibles* o *mutuamente excluyentes*. Este concepto será importante en nuestro análisis pues los alumnos confunden sucesos excluyentes e incompatibles. Dados  $\{A_i\}$  decimos que forman un sistema completo de

sucesos si son mutuamente excluyentes y  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

### Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov

Dado un espacio muestral  $\Omega$ , y un  $\sigma$ -álgebra de sucesos  $\rho$  sobre él, diremos que cualquier función  $P$  definida sobre una clase  $\rho$  es una probabilidad sobre  $\rho$  si cumple los tres axiomas de probabilidad (Kolmogorov, 1956):

1.  $P: \rho \rightarrow [0, 1] \in \mathbb{R}$ . La probabilidad es una función definida sobre  $\rho$  y que sólo toma valores positivos comprendidos entre 0 y 1.
2.  $P(\Omega) = 1$ , La probabilidad del suceso seguro es 1.

3. Si  $A, B \in \rho$ ;  $A \cap B = \emptyset$ ;  $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , si  $\{A_i\}_{i=1}^n \in \rho$ ;

$$A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(\cup A_i) = \sum_i P(A_i); \text{ es decir si un conjunto de eventos son}$$

mutuamente excluyentes o incompatibles, no ocurren simultáneamente, entonces la frecuencia relativa de su unión es la suma de las frecuencias relativas de cada uno.

Por lo tanto  $P$  es una función numérica sobre  $\rho$  es normada, no negativa y finitamente aditiva (medible) que toma sus valores en el intervalo  $[0,1]$ . Al valor de  $P$  para un suceso  $A$  se denominará *probabilidad de A* y se designará por  $P(A)$ . El par  $(\rho, P)$  se denomina *campo de probabilidad* y la terna  $(\Omega, \rho, P)$  se denomina *espacio de probabilidad* o espacio probabilístico (Loeve, 1976).

### Propiedades de la probabilidad

De los tres axiomas de la probabilidad podemos reducir las propiedades de la probabilidad a las siguientes:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . La probabilidad del suceso complementario a uno dado es igual a la unidad menos la probabilidad del complementario.
- $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$ ; esto implica que la probabilidad conjunta de dos sucesos mutuamente excluyentes es igual a cero
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ; es decir la probabilidad de la unión de dos sucesos es igual a la suma de las probabilidades menos la probabilidad de la intersección.
- Si  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ ; Si un suceso está contenido en otro, la probabilidad del primero es siempre menor que la probabilidad del segundo.
- Si  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Una probabilidad conjunta  $P(A \cap B)$  es siempre menor que las probabilidades

simples  $P(A)$  y  $P(B)$ .

### 1.5.2 REPRESENTACIONES Y ARGUMENTOS

Los elementos del lenguaje, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. son necesarios para resolver los problemas matemáticos, para representar objetos abstractos, para generalizar su solución o para describirlos a otras personas. En relación a la probabilidad hemos encontrados los siguientes:

#### *Términos y expresiones*

Encontramos una gran variedad de ellos en la literatura relacionada, entre los que citamos los siguientes: probabilidad, probabilidad condicionada, diagrama de árbol, aleatorio, conjuntos vacío, total, unión, intersección, probabilidad de la unión, probabilidad de la intersección, función probabilística, variable aleatoria, equiprobabilidad, independencia, dependencia, espacio muestral, suceso, frecuencia relativa, ley de los grandes números, regla de Laplace, regla del producto, convergencia, simulación con uso del ordenador, etc.

Asimismo encontramos *términos asociados a los conceptos relacionados*: distribución de probabilidad, variables aleatorias discretas y continuas, propiedades estadísticas, cálculo de probabilidades de variables y estadísticos, ley de los grandes números.

Hacemos notar que cada una de estas expresiones corresponde a conceptos o propiedades matemáticas que el estudiante debería haber aprendido antes de finalizar el tema, lo que muestra la complejidad del objeto de estudio.

#### *Expresiones algebraicas*

Expresiones como la siguiente, forman parte del conjunto de representaciones simbólicas relacionadas con la probabilidad y se usan sobre todo al dar argumentos de tipo deductivo:

$$P(G) = P((G \cap A) \cup (G \cap B)) = P(G \cap A) + P(G \cap B) = P(G/A)P(A) + P(G/B)P(B)$$

En ella tenemos una demostración de que la probabilidad de un suceso se puede descomponer como la suma de la descomposición de la probabilidad en otros sucesos compuestos. Otras expresiones algebraicas se usan al describir los conceptos relacionados: Por ejemplo, es frecuente encontrar expresiones algebraicas representando el teorema de Levene (casos favorables entre casos posibles).

$$P(A) = \frac{n}{m}$$

### Representaciones gráficas

Los gráficos es uno de esos elementos que siempre están presentes en la Probabilidad. Se reconoce en los gráficos un medio elocuente de comunicar ideas, para refutar teorías, de representar relaciones entre varias variables, de usarlos para distinguir con ellos el foco de atención, en cómo se cuestionan los datos, en sus propósitos, en la precisión de la información cualitativa extraída de ellos y la realización ocasional de funciones instrumentales.

A la hora de representar la probabilidad es común el uso del *diagrama de Venn*. Con este gráfico tenemos una visión espacial de las diferentes situaciones que se pueden presentar en el comportamiento de intersecciones, uniones y como se condicionan unos sucesos a otros. (Ver Figura 1.5.2, encontrada en Internet en [www.kalipedia.com/graficos/interseccion.html?x=20070926klpmateyp\\_30.Ges](http://www.kalipedia.com/graficos/interseccion.html?x=20070926klpmateyp_30.Ges)).

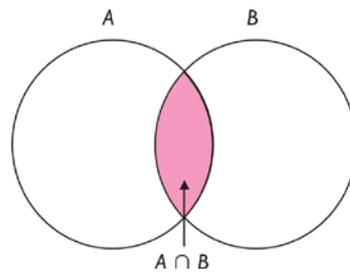


Figura 1.5.2. Representación de sucesos

Otra representación utilizada en el cálculo de probabilidades es el Diagrama de árbol. Un diagrama de árbol es una herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, el cual consta una serie de pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo. Se utiliza en los problemas de conteo y probabilidad. (Ver Figura 1.5.3, encontrada en Internet en: [www.vitutor.com/pro/2/a\\_15.html](http://www.vitutor.com/pro/2/a_15.html))

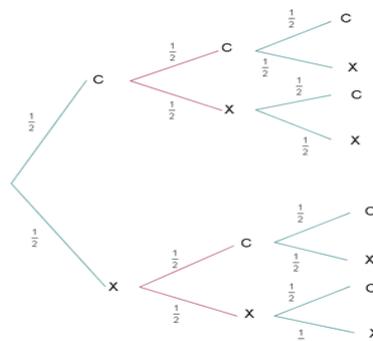


Figura 1.5.3. Diagrama de Árbol Lanzamiento de tres monedas

### ***Representaciones elaboradas por el ordenador***

Merece mención aparte de representación, *la simulación*, la cual permite a través del ordenador estudiar las propiedades de un fenómeno aleatorio reemplazándolo por otro isomorfo. Por medio de dispositivos como el modelo de urnas es factible simular experimentos probabilísticos, tales como el lanzamiento de un dado, de una moneda, etc. El papel que juega la simulación en la enseñanza de la estadística y la probabilidad ha sido resaltado entre otros por Biehler (1997, 2003), Batanero (2003) y Mills (2002), avisando que la simulación permite poner en manos del estudiante un instrumento que hace posible la exploración y el descubrimiento de conceptos y principios que de otro modo serían mucho más abstractos. Sin embargo, la falta de “guías prácticas” que dirijan el trabajo de exploración del simulador, donde a veces se diseña de manera parcial y difusa los significados pretendidos en el proceso de estudio, provocará que los estudiantes tengan dificultades para observar el comportamiento del fenómeno (Godino, Font y Wilhelmi, 2008).



## **CAPITULO 2**

### **INVESTIGACIONES PREVIAS**

#### **2.1. INTRODUCCIÓN**

Para fundamentar este trabajo, presentamos un resumen las principales investigaciones relacionadas con nuestro objeto de investigación, la probabilidad, considerando la incorporación de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la estadística y probabilidad, la comprensión conceptual de la probabilidad, y la formación de profesores.

#### **2.2. APPLETS EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD**

La International Association for Statistics Education (IASE) ha destacado y reconocido la influencia de las nuevas tecnologías en la estadística y su enseñanza en diversas conferencias, tales como: Round Table Conference, celebrada en Granada (Garfield y Burrill, 1997), conferencia sobre Educación Estadística e Internet y en los Congresos Internacionales sobre la Enseñanza de la Estadística. En ellos se discutió sobre el software disponible para la enseñanza, los cambios que deben llevarse a cabo en el contenido y la metodología, y el efecto de la tecnología, tanto en el aprendizaje como en las actitudes de los alumnos.

Las posibilidades de simulación y creación de micromundos estocásticos virtuales permiten explorar los conceptos de probabilidad y sustituir las demostraciones formales por razonamientos más intuitivos. Se añaden a éstas también las funciones de tutor y ayuda al autoestudio, evaluación y ejercitación (Biehler, 1997, 2003; Ben-Zvi, 2000). Podemos añadir las experiencias didácticas basadas en el uso de recursos disponibles en Internet, incluyendo las relacionadas con la formación de profesores en estadística y la interacción a distancia entre alumnos o alumnos y profesor.

Algunos futuros profesores, y docentes en ejercicio, tienen dificultades en la utilización adecuada del software para fomentar la comprensión de los alumnos y consideran que la simulación es sólo útil después de estudiar la probabilidad de forma

teórica. Todo ello conlleva una adecuada preparación de los profesores para poder así introducir la tecnología en la enseñanza de los tópicos de estadística y probabilidad. Otras investigaciones, señalan que al trabajar con la tecnología pasan por alto las ideas previas correctas de los estudiantes, centrándose sólo en sus errores (Stohl, 2005). Teniendo en cuenta estas consideraciones, recopilamos un resumen de algunas investigaciones centradas en los beneficios del uso de Applets en la enseñanza de la probabilidad, algunas sugerencias de innovaciones didácticas incorporando simulaciones al proceso de enseñanza y aprendizaje, como también, algunas propuestas de análisis epistémico de recursos para la enseñanza de tópicos de estadística y probabilidad.

Mills (2004) recomienda el uso de métodos de simulación por ordenador para la enseñanza de conceptos estadísticos. El propósito de este estudio fue determinar si el uso de métodos de simulación por ordenador proporciona una mayor comprensión por parte de los estudiantes de los temas del curso de introducción a la estadística. Los resultados preliminares de este estudio indican una cierta evidencia de que estos métodos pueden mejorar la comprensión de conceptos abstractos por parte de los estudiantes de estadística.

Sada (2011) describe las características y potencialidades de una selección de Applets y sus posibilidades de utilización en las aulas de matemáticas, destacando los materiales disponibles del Proyecto Gauss. Menciona las ventajas del uso de Applets a través de la utilización del ordenador en el aula: facilita la comprensión, la representación e interpretación de gráficos estadísticos, la observación colectiva de resultados de un número elevado de simulaciones, favorece la dinámica del debate y el ritmo del aula.

Arnaldos y Faura (2011) mencionan la importancia de las simulaciones interactivas incorporadas en la docencia, pues al poseer un formato más atractivo, permiten incidir de forma directa en el proceso de aprendizaje del alumno. Para la planificación de actividades que incluyan simulaciones sugieren los siguientes pasos: (1) el número de simulaciones propuestas no debe ser muy elevado; (2) debe prepararse el momento de su uso y (3) debe comprobarse si, con el uso de las simulaciones, se mejora el proceso de aprendizaje de los temas tratados.

El uso del software Fathom en los cursos de introducción a la probabilidad y estadística para los futuros profesores de matemáticas, es descrito por Maxara y Biehler

(2006), quienes proponen una serie de directrices para desarrollar las competencias de modelado y simulación en los estudiantes.

Barragués y Guisasola (2007) describen una experiencia para la enseñanza de los temas elementales de la Teoría de la Probabilidad en primer ciclo universitario basada en un modelo alternativo donde el ordenador toma un papel activo como herramienta para la construcción de modelos probabilísticos, como herramienta de resolución de problemas, para profundizar en el significado de los conceptos y como ayuda a los alumnos para superar sus dificultades.

Theis y Savard (2010) analizan las propuestas de enseñanza y la utilización de programas de simulación que emplean cuatro maestros de escuelas secundarias de Québec al enfrentar a los estudiantes a actividades de apuestas. Se evidencia que los profesores utilizan el software de simulación principalmente para hacer que los alumnos comprendan que los juegos de lotería no dan resultado en el largo plazo. Los profesores presentan dificultades al discutir conceptos probabilísticos a través del software de simulación.

Herrera y Rodríguez (2011) proponen una serie de innovaciones en la enseñanza de estadística para ciencias experimentales, cuyo propósito de estimular el desarrollo del pensamiento y razonamiento inferencial, empleando diversos Applets estadísticos diseñados para ayudar a los estudiantes a familiarizarse y retener las ideas sobre inferencia estadística, usando simulaciones. Las autoras señalan que la puesta en práctica de estas innovaciones revela resultados positivos respecto a períodos anteriores de docencia sin la utilización de esta clase de recursos.

Villalba y López (2012) elaboraron un taller para trabajar el enfoque frecuencial de la probabilidad mediante simulaciones en GeoGebra. Estas autoras sugieren que el trabajo con los Applets permite relacionar el cálculo de la probabilidad a priori con la probabilidad a posteriori de la realización del experimento aleatorio, identificar las características de un experimento aleatorio, determinar el espacio muestral, clasificar los tipos de sucesos y vincular Probabilidad y Estadística.

Pérez, Maya, et al. (2012) presentan la descripción de cuatro Applets desarrollados para la obtención de medidas estadísticas y representaciones gráficas de datos. Los autores concluyen que los Applets desarrollados son valiosos para ejercer la

práctica docente, utilizándose como herramienta para fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Investigadores como Arnaldos y Faura (2012) señalan que existe gran cantidad de recursos en la red (libros online, revistas educativas, proyectos de visualización,...) que pueden ser utilizados como una herramienta más en la docencia de las asignaturas de Estadística y que pueden mejorar y facilitar el proceso de aprendizaje y formación. Estas herramientas se pueden utilizar tanto en actividades no presenciales, como proceso de autoaprendizaje y autoevaluación, como en actividades presenciales, en las que el papel del profesor es más importante. La labor del profesor cuando se quiere integrar este recurso en la docencia debe ser discriminar entre todos los recursos existentes, atendiendo a los objetivos que se persigan, motivar correctamente a los alumnos en su uso y valorar la eficacia del empleo de las mismas.

Osorio, Suárez y Uribe (2013) presentan los resultados de una exploración en Internet sobre diferentes alternativas para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad a nivel universitario, describiendo una recopilación de software educativo, simuladores, Applets, actividades lúdicas y metodologías basadas en la práctica. Estos autores concluyen que existe la tendencia de utilizar las TIC en los procesos de enseñanza de la Probabilidad, como complemento para mejorar la adquisición de los conceptos, como estrategia efectiva para fomentar el aprendizaje autónomo por parte del estudiante y estimular su interés por los temas de Probabilidad.

Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina (2007) ofrecen una visión general sobre el papel que las herramientas tecnológicas pueden desempeñar para ayudar a los estudiantes a desarrollar la cultura estadística y el razonamiento. Sugieren que la utilización eficaz de la tecnología requiere una planificación cuidadosa y deliberada, así como la creatividad y el entusiasmo. Del mismo modo, la elección de una herramienta tecnológica particular, debe hacerse con base en la facilidad de uso, la interactividad, los vínculos dinámicos entre los datos, gráficos, análisis y portabilidad. Estos autores concluyen que aún faltan más estudios sobre las formas más eficaces de integrar la tecnología en los cursos de estadística en el desarrollo de razonamiento de los estudiantes acerca de conceptos particulares, y determinar los medios adecuados para evaluar el impacto en el aprendizaje del estudiante en estos contextos.

En cuanto al análisis semiótico de recursos, en el caso de simulaciones en internet, encontramos los trabajos de Contreras (2009), Batanero, Fernández y Contreras (2009),

Contreras, Díaz, Arteaga, Gonzato y Cañadas (2011) que presentan un análisis de los objetos y procesos matemáticos implícitos en algunas soluciones correctas posibles de recursos útiles para la enseñanza de la probabilidad condicional. Estos explican distintos conflictos semióticos relacionados con los razonamientos erróneos más frecuentes en su solución y se señalan algunas implicaciones del uso de este problema en la enseñanza y formación de profesores. Por otro lado, Alvarado y Retamal (2009), analizan una propuesta de enseñanza de la distribución muestral basado en una muestra libros de textos de estadística aplicada a la ingeniería. Siguiendo un modelo teórico sobre el significado de un objeto matemático se caracterizan los enunciados y propiedades importantes, las representaciones, campos de problema, procedimientos y argumentos asociados a la distribución muestral.

### **2.3. INVESTIGACIONES APOYADAS EN LA SIMULACIÓN**

Las investigaciones de Pratt (1998, 2000, 2005) y Pratt y Noss (2002) profundiza en los significados que atribuyen los niños de 10 y 11 años a fenómenos aleatorios. Éstos diseñaron un micromundo computacional con dados, monedas y ruletas electrónicas, que podían ser manipulados por los niños en cuanto a la distribución de probabilidad, el número de ensayos, la opción gráfica y numérica para ver los resultados. Además, el software podía producir resultados no aleatorios para observar el comportamiento de los niños al confrontar esta situación. Previo al uso del programa, los niños fueron entrevistados para deducir el significado que daban el término aleatorio, clasificándose como de impredecible, irregular, incontrolable y equitativo. Se pidió a los niños ver si varios generadores eran o no aleatorios. Al finalizar el experimento algunos niños habían construido algunos conocimientos de probabilidad frecuencial, como la relación entre las frecuencias de los resultados y la estructura del generador, y el efecto sobre las frecuencias relativas del número de ensayos y la distribución inicial de probabilidades.

Aspinwall y Tarr (2001) evalúan el efecto de un programa de instrucción en 23 estudiantes estadounidenses de grado 6°, con el objeto de determinar si tareas de simulación de fenómenos aleatorios influyen en la comprensión del papel que juega el tamaño de muestra al estimar probabilidades bajo un enfoque frecuencial. Utilizan un programa instruccional de cinco sesiones, que comprendía tareas de resolución de problemas, preguntas clave y la escritura por parte de los alumnos de un reporte escrito. Los autores observaron diferencias significativas entre las evaluaciones que realizan de los conocimientos previos y posteriores a la instrucción. Puesto que la diferencia es

positiva, lo asumen como evidencia de que el programa de instrucción propuesto puede facilitar la comprensión de la ley de los grandes números que no es un concepto intuitivo.

Serrano, Ortiz y Rodríguez (2009) analizan los resultados de 45 estudiantes de 3° de Educación Secundaria (14-15 años) en la aplicación de un cuestionario de intuiciones sobre sucesiones aleatorias desde el enfoque frecuencial, con el fin de determinar la influencia de la simulación sobre tales intuiciones. Los autores observaron inseguridad e inmadurez para interpretar y responder al cuestionario, además de dificultades iniciales con el simulador. Los adolescentes identificaban correctamente situaciones aleatorias en la mayoría de casos, reconociendo la variabilidad e imprevisibilidad de los resultados, y usaban frecuencias relativas para contestar algunas preguntas de probabilidades.

Lee, Angotti y Tarr (2010) analizaron a 23 estudiantes de 6° grado (11-12 años) de Estados Unidos a los que se les realizó un experimento de enseñanza de probabilidad de doce sesiones de 60 minutos cada una. Los estudiantes abordaron seis tareas en parejas o tríos, experimentando con objetos reales (monedas, dados y ruletas) y simulando con un software educativo (*Probability Explorer*). El programa de ordenador permitía especificar condiciones de simulación como el número de ensayos, la visualización del resultado por ensayo, el sistema de representación para el resumen de los resultados (tabular y gráfica, con frecuencias absolutas o relativas) y la actualización de estas representaciones después de cada ensayo. Después del trabajo en grupos, la clase completa discutía los resultados comparando las observaciones en los ensayos empíricos con las expectativas derivadas del modelo teórico de distribución de probabilidades.

Polaki (2002 a y b) contrastó el desempeño de dos grupos de 12 niños en Italia, de 4° y 5° grado, que recibieron instrucción sobre probabilidad con metodología diferente. En uno de los grupos se generaban muestras pequeñas con datos experimentales y se utilizaba el análisis de la estructura del espacio muestral para determinar las probabilidades, de una forma clásica. En el otro grupo se simulaban, en un ordenador, grandes muestras de un experimento, antes de considerar el análisis de la composición del espacio muestral, usando, por tanto el enfoque frecuencial para estimar las probabilidades.

El autor menciona el impacto positivo de ambos métodos para desarrollar el razonamiento probabilístico de los niños, notando que no fueron significativas las diferencias en las pruebas realizadas para evaluar el aprendizaje en los dos grupos.

Concluyó también que el enfoque frecuencial puede ser demasiado abstracto para los niños de esta edad, ya que no logran adquirir la ley de los grandes números, es decir, de comprender el efecto del tamaño de muestra en la convergencia, identificando como posible argumento para esta dificultad la falta de familiaridad de los participantes en su estudio con la generación de datos por ordenador y la manipulación de conjuntos con numerosos datos.

#### **2.4. FORMACIÓN DE PROFESORES PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD**

De acuerdo a lo expuesto por Batanero, Arteaga y Contreras (2009), en los últimos años ha habido un aumento en el número de investigaciones que abordan como tema central la formación inicial del profesor de matemáticas y su desarrollo profesional. Estas investigaciones se recopilan en libros y capítulos dedicados al tema (Brown y Borko, 1992; Thompson, 1992; Jaworski y Gellert, 2003; Llinares y Krainer, 2006; Ponte y Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Philipp, 2007; Sowder, 2007; Wood, 2008). El ICMI Study 15 (Even y Ball, 2008) y la revista *Journal of Mathematics Teacher Education*, también se destacan en este tipo de recopilaciones.

Autores como Russell (1990); Batanero, Godino y Roa (2004); Franklin y Mewborn (2006), mencionan que actualmente esta formación está siendo objeto de debate, pues muchos de los programas de formación inicial en curso, no incluyen un curso específico de didáctica de la estadística y probabilidad, por lo que no forman a los profesores adecuadamente para enseñar estos contenidos,

En la mayoría de los casos, los profesores que han de impartir el tema estudiaron uno o más cursos de estadística, que privilegiaban la formación teórica y no tienen experiencia con estudios de estadística aplicada, muestreo, o diseño de experimentos (Franklin y Mewborn, 2006).

Chaput, Girard y Henry (2008) señalan que pocos profesores tienen experiencia con el enfoque frecuencial, ya que requiere un análisis cuidadoso de las situaciones y ser conscientes de la diferencia entre frecuencia relativa (que se refiere a los datos empíricos) y probabilidad (que es un objeto matemático teórico).

Por lo general la mayoría de los maestros de primaria no han recibido una formación adecuada en el campo de la probabilidad, pues hasta hace poco no se incluía apenas enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Por otro lado, son pocos

los profesores que tuvieron un curso específico de didáctica de la estadística, aunque si de didáctica de la matemática. Franklin y Mewborn (2006) señalan que en pocos cursos sobre didáctica de la matemática se incluyen los conocimientos didácticos que necesitan para enseñar probabilidad.

#### **2.4.1 ACTITUDES Y CREENCIAS**

Existen pocas investigaciones centradas en las creencias o actitudes de los profesores hacia la probabilidad. Steinbring (1990), sugirió que los formadores de profesores tienen que hacer frente al problema de concienciar a los profesores de la naturaleza particular de lo estocástico y ver que es diferente de la matemática tradicional enseñada en la escuela.

Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) realizaron una investigación utilizando cuestionarios y entrevistas para comprender las razones por las cuáles los profesores omiten la enseñanza de la probabilidad en la escuela y las fuentes de información que pueden influenciar esta decisión. Los resultados indican que los profesores omiten la enseñanza de la probabilidad debido a su creencia de que la probabilidad no tiene suficiente consistencia educativa en la enseñanza obligatoria ni garantizaba ningún propósito práctico para los estudiantes o porque piensan en las dificultades que el estudiante podría tener con el tema ya que suponen que la metodología usual para otros temas no sería útil para esta materia. Los autores concluyen que la falta de información relacionada con el tema de éstos, supone un obstáculo para incorporar la probabilidad en la enseñanza.

Eichler (2008) describe una investigación sobre las creencias de los profesores respecto a la enseñanza de la estadística, mostrando la influencia de estas creencias sobre su práctica docente y cómo esta práctica influye en los conocimientos que adquieren sus alumnos. Este autor diferencia entre el currículo oficial (marcado por las directrices curriculares), el pretendido por el profesor, el implementado en el aula y el aprendido por los estudiantes. Debido a estas creencias muestra que la enseñanza recibida por los estudiantes respecto a un mismo nivel educativo y contenidos, podrían diferir considerablemente.

Todos estos resultados alertan de la importancia de desarrollar actitudes y creencias positivas de los profesores hacia la probabilidad, tanto dentro de la matemática, como para la formación de sus estudiantes (Estrada y Batanero, 2008).

## 2.4.2 CONOCIMIENTOS PROBABILÍSTICOS

Los estudios de evaluación realizados, generalmente se han centrado en el conocimiento común del contenido y tratan de determinar si el nivel de conocimiento de los futuros profesores es suficiente para resolver las tareas que tendrán que proponer a sus futuros alumnos.

Azcárate (1995) en un estudio realizado con 57 futuros profesores de Educación Primaria, propuso una serie de enunciados en que se describían diferentes fenómenos, preguntando a los participantes si consideraban que eran o no aleatorios, justificando su respuesta. Muy pocos sujetos mostraban una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios. La mayoría de los participantes minusvaloraron el posible estudio matemático de los fenómenos aleatorios, no realizaban esquemas combinatorios o no utilizaban instrumentos elementales para la asignación de probabilidades, cuantificando las expectativas de ocurrencia de un suceso desde criterios personales. Respecto a la idea de juego equitativo, los participantes tuvieron dificultades para diferenciar los juegos equitativos de los no equitativos y basan su argumento sobre la equitatividad de un juego en la equiprobabilidad de los resultados, reglas aritméticas o argumentación combinatoria.

Begg y Edward (1999) proporcionaron un cuestionario y realizaron entrevistas a 22 profesores australianos en ejercicio de escuela primaria, que no habían recibido una enseñanza formal del tema durante su formación inicial, para evaluar sus conocimientos sobre probabilidad usando contextos conocidos de la vida cotidiana. Los autores llegaron a la conclusión de que dichos profesores tenían una escasa comprensión de la probabilidad. Sólo alrededor de dos tercios del profesorado de su muestra comprendía correctamente las ideas de aleatoriedad y de sucesos equiprobables y muy pocos aplicaron correctamente el concepto de independencia. El análisis de las justificaciones de las respuestas sugiere que los profesores empleaban la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982) esperando que una muestra fuese semejante a la población y el outcome approach descrito por Konold (1989), es decir, interpretando un enunciado probabilístico en forma no probabilística. Los profesores también hicieron un uso excesivo de sus teorías previas al resolver los problemas.

Watson (2001) realizó una encuesta a 15 profesores de primaria (enseñanza elemental) y a 28 profesores de secundaria de Australia, utilizando las respuestas de los profesores para buscar patrones y para describir características generales de éstos.

Respecto a los conocimientos de probabilidad de los docentes, informó de que los profesores de secundaria tenían un nivel de seguridad significativamente más alto que los de primaria a la hora de enseñar conceptos básicos de probabilidad. Estos hallazgos han sido corroborados en investigaciones con profesores de primaria (Pereira-Mendoza, 2002).

Ortiz, Nordin, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006) evaluaron la capacidad de los futuros profesores de educación primaria para comparar probabilidades, utilizando tareas sencillas tomadas de un cuestionario de probabilidad que había sido utilizado previamente con niños de 11 a 14 años. Para ello analizaron las respuestas de 102 estudiantes de magisterio a siete problemas, estudiando los porcentajes de respuestas correctas y los argumentos proporcionados por los alumnos, y comparando sus resultados con los obtenidos por los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997). Estos autores observaron una mejora del número de respuestas correctas respecto a los niños de la investigación de Cañizares en todos los problemas, aunque los porcentajes de errores son muy altos.

Por ejemplo, en un problema en que se pedía comparar la probabilidad de obtener una bola negra en dos urnas con diferente composición de bolas blancas y negras, donde la falta de proporcionalidad obligaba a usar la regla de Laplace, obtuvieron un 75% de errores en los futuros profesores de primaria. En otro problema similar en que se añade un factor subjetivo irrelevante (uno de los jugadores es más inteligente, por tanto podría tener más posibilidades de sacar la bola negra) se produce un aumento de la dificultad, debido al distractor de tipo subjetivo (70% de errores). Otro problema de comparación de probabilidades donde la composición de las dos urnas era proporcional, obtuvo 57% de errores. Por otro lado en algunos problemas algunos futuros profesores obtuvieron respuestas correctas con un razonamiento inadecuado.

Batanero, Cañizares y Godino (2005) analizaron los resultados de la evaluación inicial en una muestra de 132 profesores en formación, utilizando un cuestionario con varios ítems que evaluaban la presencia de sesgos en el razonamiento probabilístico de los profesores. Los resultados de la evaluación mostraron que el 60% de la muestra razonaba de acuerdo a la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982) esperando que una muestra fuese semejante a la población. Otro 60% de participantes mostró el sesgo de equiprobabilidad descrito en los experimentos de Lecoutre (1992), Lecoutre y Durand (1988), que consiste en la creencia de los sujetos en la

equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquellos en que no es aplicable el principio de indiferencia o donde no hay una simetría física. Finalmente, el 23% de los profesores mostró el “outcome approach” (enfoque en los resultados) y el outcome approach descrito por Konold (1989), es decir, interpretando un enunciado probabilístico en forma no probabilística. Los autores realizaron actividades de simulación con dispositivos manipulativos, tablas de números aleatorios y el software Statgraphics, volviendo a evaluar a los participantes al finalizar la experiencia. Se observó una mejora general de las concepciones de los participantes, lo que sugiere el interés de la simulación como recurso didáctico.

Estrada y Díaz (2007) realizaron un estudio exploratorio con 65 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Lleida, que estaban siguiendo un curso optativo de didáctica de la estadística. Les plantearon un problema con tres preguntas: (a) cálculo de una probabilidad simple, (b) cálculo de una probabilidad condicional y (c) cálculo de una probabilidad conjunta, dando los datos en una tabla de doble entrada. Analizan las respuestas abiertas y encuentran una gran proporción de errores, sobre todo en las preguntas sobre probabilidad condicional y conjunta. Las autoras explican sus resultados en términos de conflictos semióticos.

Por su parte Sáenz (2007) evalúa el conocimiento funcional de las matemáticas en una muestra de 140 futuros profesores de educación primaria, utilizando algunos ítems de las pruebas PISA. Encuentra un porcentaje medio de respuestas correctas de un 64%, indicando que los estudiantes de magisterio no superan significativamente los resultados de alumnos de 15 años. El rendimiento es menor a medida que aumenta la complejidad del ítem y sólo un 11% de participantes alcanza los ítems de mayor dificultad. El autor indica que es precisamente el área de probabilidad y estadística donde se obtienen los peores resultados.

Mohamed (2012) evalúa los conocimientos de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. Como resultados destaca que la mayoría de los futuros profesores de educación primaria participantes en el estudio mostró un conocimiento común insuficiente del contenido de probabilidad, pues tuvieron dificultades para resolver de forma correcta los problemas propuestos, incurrieron en sesgos, utilizaron estrategias incorrectas en la resolución de los mismos y manifestaron una percepción incorrecta de la independencia. Existe un alto porcentaje de futuros profesores que incurren en sesgos relacionados con la probabilidad, destacando el sesgo de

equiprobabilidad.

En resumen, las escasas investigaciones sobre conocimientos probabilísticos de futuros profesores nos indican que este conocimiento es a veces escaso, sobre todo en los futuros profesores y más aún en los futuros profesores de educación primaria.

### **2.4.3 CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD Y LA ENSEÑANZA**

Las investigaciones relacionadas con el conocimiento didáctico de los profesores para enseñar probabilidad sugieren que este conocimiento es escaso. Al tratarse de un tema nuevo en los currículos, ha habido, hasta el momento poca oportunidad para un desarrollo profesional de los profesores de educación primaria en probabilidad.

Respecto al conocimiento especializado del contenido, algunas investigaciones examinan a profesores en ejercicio durante su enseñanza, observándolos a lo largo de un periodo de tiempo y deduciendo su conocimiento a partir de esta observación, complementada con entrevistas u otros medios. Un primer punto investigado es la capacidad de los profesores para reconocer qué conceptos pueden ser estudiados a partir de un recurso o problema dado. En la investigación de Chick y Pierce (2008) los profesores participantes no hicieron un uso adecuado de los datos y proyectos al planificar sus lecciones, pues fallaron en sacar a la luz los conceptos latentes, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada. Por el contrario se limitaron a pedir cálculos o nuevos gráficos, con pocas actividades de interpretación.

En la enseñanza de la probabilidad se recomienda actualmente el uso de investigaciones y simulaciones, de modo que se ayude a los estudiantes a mejorar su razonamiento probabilístico. Sin embargo son pocos los profesores que tienen experiencia previa con experimentos y simulaciones en probabilidad. En el estudio de Stohl (2005) los profesores observados fallaron al implementar el enfoque experimental en la enseñanza de la probabilidad, porque las tareas que proponían a los estudiantes sólo utilizaban muestras pequeñas. En su investigación, Watson (2001) encuentra pocos profesores de secundaria que usaran actividades basadas en la simulación y toma de muestras para reforzar la enseñanza de la probabilidad. Además, aunque los profesores de primaria utilizaban lecciones basadas en dichas actividades, no parecía existir un enfoque coherente hacia el estudio de los conceptos estadísticos.

Haller (1997) realizó una investigación con un grupo de cuatro profesores de educación secundaria que asistían a un curso de desarrollo profesional. Los profesores

con un conocimiento del contenido más bajo, cometían errores conceptuales y de interpretación de las respuestas de sus alumnos durante sus lecciones, dependían en gran medida de los libros de texto y no aprovechaban el contexto de la probabilidad para desarrollar relaciones entre las fracciones, los decimales y los porcentajes. Sin embargo, los profesores con un mayor conocimiento del contenido no cometían errores matemáticos, relacionaban los decimales, las fracciones y los porcentajes y añadían preguntas y actividades suplementarias, independientes del libro de texto.

López (2006) analiza la forma en que los profesores diseñan y llevan a cabo unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria, y muestra la gran dificultad de estos profesores al enfrentarse a conceptos nuevos para ellos. En un estudio con profesores de enseñanza elemental en prácticas, Dugdale (2001) utilizó la simulación por ordenador para revelar el conocimiento didáctico. Observó que el uso de software permitió a los profesores diseñar un par de dados, con igual probabilidad de obtener pares que impares al multiplicar las cifras en cada tirada, simular un gran número de tiradas, calcular las frecuencias relativas, convenciéndose así de que el juego creado era representativo. Destacó que los profesores en prácticas podían usar este software como una herramienta para promover el debate y la comprensión de la probabilidad desde un punto de vista que normalmente no permite un número limitado de pruebas con un dado físico, y que no se conformaban con observar las frecuencias relativas generadas por la simulación por ordenador, sino que pasaban a razonar sobre las probabilidades teóricas para así verificar los resultados.

Por otro lado, en algunos casos, los libros de texto y materiales curriculares preparados son insuficientes como soporte para el profesor. Ello es debido a que presentan una visión muy parcial de los conceptos (por ejemplo, solo la aproximación clásica de la probabilidad). En otros casos las aplicaciones se limitan a juegos de azar, o no se basan en datos tomados de aplicaciones reales. También aparecen en ocasiones definiciones incorrectas o incompletas de los conceptos (Cardeñoso, Azcárate y Serradó, 2005).

#### **2.4.4 CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD Y LOS ESTUDIANTES**

Otras investigaciones se centran en el conocimiento del contenido y los estudiantes. Stohl (2005), examina las interpretaciones de treinta y cinco profesores de educación secundaria sobre las interacciones de los alumnos con una herramienta de simulación. Las interpretaciones eran comparadas con un análisis sobre cómo los alumnos

trabajaban con la herramienta de simulación, para así determinar las semejanzas y diferencias con las interpretaciones hechas por los profesores. Los profesores, se centraban en criticar la ausencia de ideas formales sobre probabilidad ignorando detalles sobre las acciones y el lenguaje de los alumnos que indicaban el desarrollo de ideas probabilísticas. Como resultado, se menciona que los profesores no comprendían que el desarrollo de ideas sobre probabilidad es un proceso complejo y difícil de evaluar.

Watson (2001) examinó el conocimiento de los profesores sobre las dificultades de sus alumnos con la probabilidad y la estadística. Sólo dos profesores de primaria mencionaron haber encontrado dificultades, mientras que trece profesores de secundaria indicaron dificultades en aspectos procedimentales (calcular probabilidades, permutaciones, diagramas de árbol) o conceptuales (la probabilidad teórica, la inferencia o la probabilidad condicional). Aunque estos datos sugieren que los profesores de este estudio eran capaces de identificar los problemas de los alumnos, también muestran se centraban principalmente en aspectos de procedimiento y su enseñanza se basaba en un enfoque computacional.

## **2.5. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE LAS INVESTIGACIONES PREVIAS**

En los apartados anteriores se presentó una revisión de las investigaciones sobre comprensión de la probabilidad según los diferentes significados de la probabilidad. La investigación revisada muestra que este no es un tema sencillo, que tiene una amplia variedad de matices y los alumnos lo asocian con la problemática de la causalidad y temporalidad, teniendo dificultad en la percepción de los experimentos compuestos en el caso de situaciones simultáneas. La presentación en los libros de texto no siempre es completa y los problemas incluidos en el tema, en ocasiones son problemas aritméticos y no verdaderos problemas probabilísticos.

Por lo tanto, creemos que dada la importancia de la probabilidad en estadística y en la vida cotidiana, las dificultades descritas en los alumnos y las carencias de los libros de texto, merece la pena continuar la investigación sobre otros recursos para la enseñanza de la probabilidad. Nuestro estudio de recursos disponibles en Internet para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria, presentado en el Capítulo 3, se orienta a identificar aquellos que pudieran contribuir a la superación de algunos de los errores descritos.

El significado intuitivo mostró la existencia de intuiciones parciales sobre el azar y la probabilidad en niños muy pequeños y la capacidad para resolver problemas sencillos, basándose en la comparación de números enteros, áreas u otras magnitudes. Sin una adecuada enseñanza desde la infancia, estas intuiciones pueden evolucionar hacia concepciones erróneas impidiendo alcanzar un razonamiento probabilístico completo en la edad adulta.

En el significado clásico se ha mostrado la necesidad del razonamiento proporcional suficiente (dependiendo de la relación entre casos favorables y posibles) para resolver problemas de comparación de probabilidades, aunque sólo este razonamiento no es suficiente.

Respecto al significado frecuencial, dos puntos clave son la comprensión de las características de las secuencias de resultados aleatorios y de la convergencia, así como de la posibilidad de estimar una probabilidad teórica a partir de datos de frecuencias. Finalmente, las investigaciones centradas en el significado subjetivo muestran la gran dificultad de los conceptos de probabilidad y los sesgos ocasionados por heurísticas inapropiadas de pensamiento.

Respecto a la simulación en contexto informático, se destacan las ventajas del trabajo con ordenadores como herramienta para la construcción de modelos probabilísticos, como herramienta de resolución de problemas, para profundizar en el significado de los conceptos, como estrategia efectiva para fomentar el aprendizaje autónomo por parte del estudiante, estimular su interés por los temas de Probabilidad y para ayudar a los alumnos a superar sus dificultades. También se observa que para corta edad a los niños no les causa confianza la generación con el ordenador; sin embargo, se involucran rápidamente. Una desventaja es la incidencia del número de repeticiones en la aproximación de la probabilidad, que puede redundar en sesgos como la indiferencia al tamaño de la muestra o la confusión entre frecuencia relativa y probabilidad.

Como lo señalan algunas de las investigaciones anteriores, aún faltan más estudios sobre métodos eficaces para integrar la tecnología en los cursos de estadística y probabilidad que permitan el desarrollo de razonamiento probabilístico, y evaluar el impacto en el aprendizaje del estudiante en esos contextos.



# **CAPÍTULO 3**

## **RECURSOS EN INTERNET: UN ESTUDIO EXPLORATORIO**

### **3.1. INTRODUCCIÓN**

Como indican las investigaciones analizadas en el Capítulo 2, los conocimientos estadísticos no son suficientes para la enseñanza de la probabilidad de una manera efectiva que provoque en los estudiantes un adecuado razonamiento probabilístico. Una consecuencia del análisis realizado en el Capítulo 2 es la necesidad de apoyar a los profesores durante su formación inicial o permanente y proporcionarles actividades que les sirvan para conectar los aspectos conceptuales y didácticos de cada tema matemático (Ball, 2000).

La probabilidad es una de las materias que ha tenido mayor influencia de la tecnología, y en particular de Internet como se observa en la página de la International Association for Statistical Education, ([www.stat.auckland.ac.nz/~iase/](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/)) que recoge vínculos a otros servidores y publicaciones, incluyendo tesis doctorales, actas de conferencias y revistas electrónicas, como Statistics Education Research Journal.

Este capítulo está dirigido al análisis y clasificación de recursos disponibles en Internet útiles como apoyo para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria y para la formación de los futuros profesores de este nivel educativo.

### **3.2. MUESTRA DE RECURSOS ANALIZADOS Y MÉTODO**

Para la localización de los recursos se ha realizado diferentes métodos, a continuación mostramos los criterios principales:

- Exploración de los servidores de educación matemática que incluyen listados de recursos en Internet para la enseñanza de la probabilidad. Por ejemplo, se ha explorado el servidor del Ministerio de Educación de recursos educativos para la educación primaria:  
[http://roble.pntic.mec.es/arum0010/temas/porcentaje\\_probabilidad.html](http://roble.pntic.mec.es/arum0010/temas/porcentaje_probabilidad.html)

- El servidor de “Biblioteca virtual de recursos manipulativos” <http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>
- Algunos repositorios de recursos como:
  - <http://miclaseenlanube.wordpress.com/mat/tratamiento-de-la-informacin>
  - <http://recursostic.educacion.es/descartes/web/aplicaciones.php?bloque=4>
  - <http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/recursoseducativos>
  - <http://didactalia.net/comunidad/materiaeducativo/recursos>
- El sitio web del NCTM ([www.nctm.org/](http://www.nctm.org/)) en la opción de lecciones y recursos, en el enlace: <http://illuminations.nctm.org/Lessons.aspx>, “Proyecto Descartes” del Ministerio de Educación ([descartes.cnice.mec.es/](http://descartes.cnice.mec.es/)).
- Realizando una búsqueda directa en buscadores de Internet, utilizando palabras claves como “Applet” y alguna de las siguientes “probabilidad”, “educación primaria”, “probability”, etc.

Una vez localizado un recurso, se clasifica según categoría (descritas posteriormente), incorporándolo a una Tabla que incluye título y dirección web, ordenada alfabéticamente.

Finalizada la elaboración de la Tabla se eligió varios recursos en cada categoría, los cuales nos parecieron interesantes desde el punto de vista didáctico. Uno de ellos se ha analizado de forma detallada siguiendo el modelo descrito en Contreras (2009, 2011), realizando una descripción de éste, viendo su contenido matemático y llevando a cabo un análisis semiótico de los objetos matemáticos implícitos en el trabajo con el recurso, estudiando los posibles conflictos semióticos de los estudiantes en el uso del recurso y la idoneidad de éste. Posteriormente se analizan, de forma más resumida, otros dos recursos de cada categoría que difieren en complejidad con el ejemplo principal.

### **3.3. RESULTADOS DE LA CLASIFICACIÓN Y DISCUSIÓN**

A continuación se clasifican y describen los recursos de Internet seleccionados.

#### **3.3.1 JUEGOS**

En este apartado se muestran una serie de recursos que permiten visualizar determinados objetos matemáticos relacionados con el tema de probabilidad simple. Su utilidad en la enseñanza es que hacen aflorar los errores y las concepciones erróneas en los estudiantes a partir de la manipulación de diferentes elementos, tales como el número de sucesos o las probabilidades de los mismos, comprobando el efecto de dicho cambio sobre otros sucesos y probabilidades. A continuación describimos algunos recursos en esta categoría.

## Exploración de las operaciones con sucesos y sus probabilidades

En primer lugar analizamos un recurso para la enseñanza de la probabilidad simple (cuya pantalla principal se muestra en la Figura 3.3.1) que permite explorar varios experimentos de extracción, sin reposición, de bolas de una caja y calcular la probabilidad de sacar una bola azul.

*Dirección web:*

[http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/azar\\_y\\_probabilidad/mt11\\_0a03\\_es/index.html](http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_0a03_es/index.html)

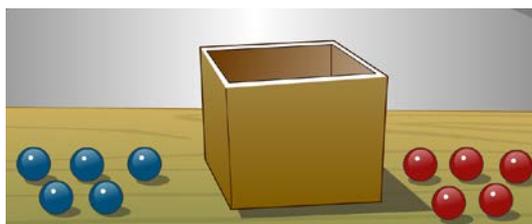


Figura 3.3.1. Experimento extraer una bola de una caja

### *Descripción*

El recurso muestra una caja y diez bolas (5 rojas y 5 azules) que son introducidas dentro de la caja. Posteriormente, el recurso pregunta ¿Cuál es la probabilidad de que saque Andrés, sin mirar, una bola de color azul? A continuación, el recurso explica el concepto de probabilidad simple, mediante la regla de Laplace, como cociente entre número de casos favorables y número de casos posibles. El recurso calcula la probabilidad de sacar una bola azul, simplificando el resultado y mostrándolo en forma de fracción y en forma decimal.

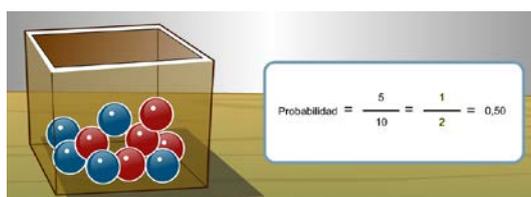


Figura 3.3.2 Pantalla cálculo de probabilidades experimento 1

El recurso realiza el experimento en extraer una bola (sin reposición), y esa bola resulta ser de color rojo, calculando ahora la probabilidad de sacar una bola azul en la siguiente extracción y explicando que en esta ocasión hay más probabilidad de sacar una bola azul. El recurso vuelve a extraer otra bola de la caja, sin reponer la bola extraída anteriormente, y ésta resulta de color azul.

En una segunda fase, el recurso realiza cuestiones para que el usuario calcule la mayor probabilidad de extraer la bola de un color, indicando los casos favorables y los posibles, de la bola que más probabilidad tenga de ser sacada de la caja, e indique que color es más probable. Mostrándole al usuario si es correcta o no la respuesta.

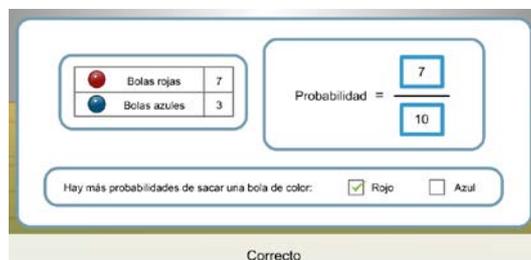


Figura 3.3.3. Experimento calcular la mayor probabilidad

### **Análisis matemático del recurso**

El recurso es básicamente una visualización de un experimento de extracción de bolas sin reposición y el cálculo de sus respectivas probabilidades.

A partir de dos sucesos  $A=\{bola\ rojo\}$  y  $B=\{bola\ azul\}$  el recurso calcula la probabilidades de sacar bola azul,  $P(B)$ , mediante la regla de Laplace:

$P(B) = \frac{\text{número de bolas azules}}{\text{número de bolas}}$ , posteriormente realiza muestreo sin reposición, por lo que pueden variar el número de bolas azules y siempre se reduce el número total de bolas.

### **Objetos matemáticos puestos en juego**

Al resolver matemáticamente el recurso se utilizan implícitamente los objetos matemáticos y significados que se muestran en la Tabla 3.3.1.

Tabla 3.3.1. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Cálculo de probabilidades simples en un muestreo sin reposición	- Experimentación del cambio de probabilidades al cambiar la composición de los sucesos
Lenguajes	- Visual	- Composición espacio muestral ( $A, B$ ) - Extracción de las bolas - Cálculo de probabilidades
	- Verbal	- Explicación de la situación
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
	- Matemático	- Cálculo de probabilidades
	- $A, B$	- Sucesos
	- $P(A), P(B), \dots$	- Probabilidad de los sucesos
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Experimento de extracción de bolas de una caja
	- Sucesos	- Bolas rojas y bolas azules
	- Espacio muestral	- Conjunto de posibilidades del experimento
	- Probabilidad simple	- Medida relativa del área de cada parte respecto al total

	- Muestreo sin reposición	- Los elementos extraídos no se vuelven a colocar en la caja
	- Casos favorables	- Número de bolas de un color determinado
	- Casos posibles	- Número total de bolas que hay en la caja
	- Espacio total	- Suceso formado por todas las bolas
Procedimientos	- Extracción	- Se elige una bola de la caja
	- No reposición	- Después de elegir una bola no se devuelve a la caja
	- Regla de Laplace	- Cociente entre casos favorables y casos posibles
	- Cálculo de probabilidades	- Se aplicaría la fórmula de Laplace
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples; visualmente las puede comparar el alumno
	- Representación gráfica	- Disposición del nº de bolas
	- Ordenación	- Ordenamos de mayor a menor para calcular cual es la probabilidad mayor
Propiedades	- La probabilidad es un valor entre 0 y 1	- El número de casos favorables es menor o igual que el número de casos posibles, será cero cuando no tengamos ningún caso favorable.
	- Ordenación probabilidades	- Una probabilidad de un suceso es mayor que otra cuando el número de casos favorables de éste sea mayor que el número de casos favorables de otro suceso (siempre que tengamos el mismo nº de casos totales)
Argumentos	- Visualizaciones	- Visualización de los distintos sucesos y su relación

### ***Idoneidad Didáctica***

En este apartado, describimos y valoramos resumidamente los componentes de la idoneidad:

- *Idoneidad epistémica o matemática:* Este recurso podría tener una idoneidad matemática en el aprendizaje de los conceptos de: experimento aleatorio, muestreo sin reposición, probabilidad, Regla de Laplace. Como vemos en la Tabla 3.3.1, esta idoneidad podría ser elevada, dependiendo del trabajo que se realice con el recurso. Las soluciones formales tienen mayor idoneidad si se complementan con una solución intuitiva de las situaciones-problemas planteados en el recurso.
- *Idoneidad cognitiva:* La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de educación primaria, pues el lenguaje verbal utiliza términos de fácil comprensión y se complementa con una serie de representaciones pictóricas que guían al estudiante durante la exploración del recurso. Asimismo, los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos, ya que explica detalladamente cómo utilizar la regla de Laplace para el cálculo de la probabilidad.
- *Idoneidad interaccional:* Este tipo de idoneidad depende de cómo organice el docente el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en pareja o en grupos para que surja el conflicto y se expliciten las dudas que aparecen en el proceso. Será importante también organizar una puesta en común de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los errores cometidos en la resolución de los problemas planteados por el recurso. Cabe destacar el rol del docente como guía en el proceso de utilización del recurso, frente al lenguaje utilizado por el Applet para plantear las distintas cuestiones que deben resolver los alumnos.

- *Idoneidad mediacional:* No se precisa de muchos recursos, con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente se puede trabajar esta situación. La idoneidad aumentaría si se trabaja en el aula de informática donde cada alumno o profesor puede explorar el recurso de manera individual o grupal.
- *Idoneidad afectiva:* Pensamos que esta es la más alta de todas, ya que este juego propicia el interés y motivación de los estudiantes, permitiendo un mayor compromiso en su proceso de aprendizaje.

### ***Dificultades posibles de los estudiantes***

Una de las principales dificultades que pueden encontrar los estudiantes con este recurso es la interpretación del lenguaje del Applet. Por ejemplo, el recurso explica como calcular probabilidades simples a partir de un muestreo sin reposición, pero siempre para el suceso “sacar una bola de color azul”, sin embargo al finalizar el recurso muestra una serie de problemas para el cálculo de probabilidades simples, donde se pide elegir “cual tiene más probabilidades de sacar una bola de color, rojo o azul” y rellenar la fórmula del Laplace. Por ello vemos que no se especifica si el suceso, al que se ha de realizar la probabilidad, es para un cierto color, como se mostraba en el ejemplo y no se indica en ningún momento que solo se ha de rellenar la fórmula para el suceso con mayor probabilidad.

### ***Variantes y otros recursos de exploración***

El recurso que se muestra a continuación en la Figura 3.3.4, permite a los estudiantes relacionar el concepto de probabilidad con su representación pictórica. El estudiante debe elegir una de las tres ruletas que aparecen en la pantalla como respuesta a la pregunta planteada. Si acierta en su respuesta, aparece en un recuadro amarillo la frase: ¡Buen Trabajo! y un botón “continuar” que permite acceder a las demás preguntas. Al contestar incorrectamente, sale el mensaje inténtalo de nuevo, permitiendo al alumno contestar nuevamente la pregunta, eligiendo otra de las respuestas sugeridas en el Applet.

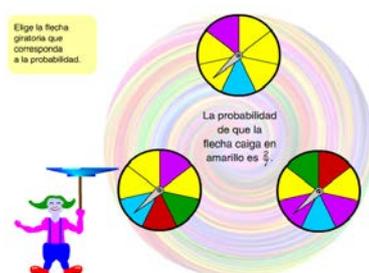


Figura 3.3.4 El circo de la Probabilidad



Figura 3.3.5. El Dado

En la Figura 3.3.5 mostramos un Applet que permite explorar las ideas de probabilidad a partir de figuras geométricas tridimensionales. Este recurso muestra en una primera pantalla la animación de un dado y sus caras, luego se plantean tres preguntas relacionadas con la probabilidad de un suceso, el botón revisar, el alumno puede comprobar si están o no correctas sus respuestas. En la segunda actividad se les presenta un nuevo dado y se solicita completar con los resultados posibles, los resultados favorables y finalmente calcular la probabilidad de un suceso.

En la Tabla 3.3.2 se presentan una selección de juegos, que se relacionan con el tema de probabilidad, útiles para la enseñanza en Primaria.

Tabla 3.3.2. Juegos relacionados con probabilidad y aleatoriedad

Nombre	Dirección
El circo de la probabilidad	<a href="http://www.harcourtschool.com/activity_es/probability_circus">http://www.harcourtschool.com/activity_es/probability_circus</a>
El Dado	<a href="http://odas.educarchile.cl/objetos_digitales_NE/ODAS_Matematica/Ed_Matematica/probabilidad_evento_experimento_aleatorio/index.html">http://odas.educarchile.cl/objetos_digitales_NE/ODAS_Matematica/Ed_Matematica/probabilidad_evento_experimento_aleatorio/index.html</a>
Experiencias Aleatorias	<a href="http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/SEXTO/datos/03_Mates/datos/05_rdi/ud15/1/01.htm">http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/SEXTO/datos/03_Mates/datos/05_rdi/ud15/1/01.htm</a>
Experimental Probability	<a href="http://shodor.org/interactivate/activities/ExpProbability/">http://shodor.org/interactivate/activities/ExpProbability/</a>
Experimentos Aleatorios	<a href="http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/agrega/visualizar/es/es-ic_2010051013_9135453/false#">http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/agrega/visualizar/es/es-ic_2010051013_9135453/false#</a>
La Ruleta	<a href="http://www.editorialteide.es/elearning/Primaria.asp?IdJuego=923&amp;IdTipoJuego=8">http://www.editorialteide.es/elearning/Primaria.asp?IdJuego=923&amp;IdTipoJuego=8</a>
Probabilidad de un suceso	<a href="http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/CUARTO/datos/01_Mates/datos/05_rdi/U15/03.htm">http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/CUARTO/datos/01_Mates/datos/05_rdi/U15/03.htm</a>
Probabilidades	<a href="http://www.editorialteide.es/elearning/Primaria.asp?IdJuego=853&amp;IdTipoJuego=8">http://www.editorialteide.es/elearning/Primaria.asp?IdJuego=853&amp;IdTipoJuego=8</a>
Racing Game with One Die	<a href="http://shodor.org/interactivate/activities/RacingGameWithOneDie/">http://shodor.org/interactivate/activities/RacingGameWithOneDie/</a>
Sucesos Posibles, Seguros o Imposibles	<a href="http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/CUARTO/datos/01_Mates/datos/05_rdi/U15/02.htm">http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/CUARTO/datos/01_Mates/datos/05_rdi/U15/02.htm</a>

### 3.3.2 EXPLORACIÓN DE CONCEPTOS

En esta categoría clasificaremos los recursos encontrados que pueden ser útiles en la visualización de diversos objetos matemáticos los que tienen relación con los siguientes temas: Azar, Tipos de Sucesos, Experimentos Aleatorios y Probabilidad.

#### A) Azar

En primer lugar, analizamos la actividad “Fichas Bicolores” (Figura 3.3.6), una de las siete propuestas en este recurso, que están incluidas en la secuencia de actividades “Determinismo y Azar” dentro de la serie “Azar y Probabilidad”, que permite explorar el concepto de azar a través de algunas de sus propiedades.

*Dirección web:* <http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar>

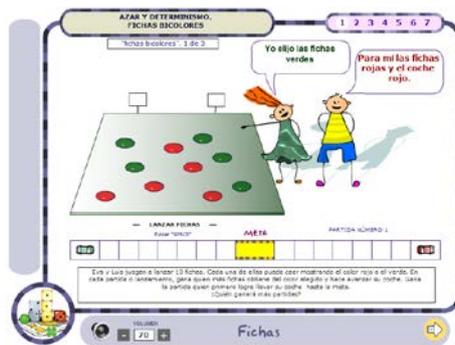


Figura 3.3.6. Pantalla de Determinismo y Azar. Fichas Bicolores.

### ***Descripción***

El recurso presenta dos simulaciones relacionadas con el lanzamiento de fichas. En la Simulación N° 1, que se muestra en la Figura 3.3.6, el recurso representa un tablero con 10 fichas de colores, rojas y verdes, dos coches (uno rojo y uno verde) y dos personajes: Eva y Luis. Se deben lanzar las fichas, para que uno de los dos coches llegue a la meta. El lanzamiento de las fichas puede hacerse haciendo clic en el botón “Lanzar Fichas” o pulsando la “Barra Espaciadora”. Cada una de las fichas puede caer mostrando el color rojo o el verde. En cada partida, o lanzamiento, gana quien más fichas obtiene del color elegido y haga avanzar su coche logrando llevarlo hasta la meta. Se plantea la siguiente pregunta: ¿Quién ganará más partidas?

Se pueden realizar varias repeticiones de las partidas, las cuales son numeradas por el recurso. Cada vez que se concluye una partida se hace un recuento de los resultados correspondientes al ganador, en donde se va construyendo un diagrama de barras con el número de victorias de cada color (verde o rojo).

El recurso plantea una segunda actividad, a la que se accede haciendo clic en el botón siguiente que aparece en la esquina inferior derecha de la pantalla.

Para la Simulación N° 2, que se muestra en la Figura 3.3.7, cambian las reglas del juego. En esta ocasión, gana quien más fichas obtiene del color elegido y hace avanzar su coche hacia la meta tanto más, cuanto mayor sea la diferencia de fichas entre ambos. Gana la partida quien primero logre llevar su coche hasta la meta. Se propone la pregunta: ¿Quién ganará más partidas?

Al igual que en la simulación anterior, el lanzamiento de las fichas puede hacerse haciendo clic en el botón “Lanzar Fichas” o pulsando la “Barra Espaciadora”. Cada vez que se termina una partida se hace un recuento de los resultados mostrando el color

ganador (verde o rojo), y se construye un diagrama de barras con el número de victorias de cada color.



Figura 3.3.7. Fichas de colores, Actividad N°2

Finalmente, el recurso define los términos de juego equitativo y de situaciones de azar.

### **Análisis matemático del recurso**

El recurso es básicamente una visualización de un experimento de lanzamiento de fichas de colores, que permite introducir los conceptos de juego equitativo y situaciones de azar.

A partir de dos sucesos  $A = \{\text{ficha roja}\}$  y  $B = \{\text{ficha verde}\}$  el recurso calcula la cantidad de fichas de cada color que se obtienen en cada lanzamiento.

Como representación gráfica se utiliza un diagrama de barras con el recuento de las partidas ganadas de cada color.

Otros conceptos que se explotan en el recurso son: “Juego equitativo”, los jugadores tienen la misma oportunidad de ganar, y “Eventos Mutuamente Excluyentes”, dos o más eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos, si no pueden ocurrir simultáneamente; es decir, la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro evento (o eventos).

### **Objetos matemáticos puestos en juego**

A continuación incluimos la tabla de análisis de objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso.

Tabla 3.3.3. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Cálculo de ocurrencia de un suceso	- Experimentación del cambio de frecuencia de la ocurrencia de un suceso

Lenguajes	- Visual	- Composición espacio muestral ( $A, B$ ) - Lanzamiento de fichas - Cálculo de la ocurrencia de cada suceso
	- Verbal	- Explicación de la situación
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
	- Matemático	- Cálculo de la ocurrencia de un suceso
	- $A, B$	- Sucesos
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Experimento de lanzamiento de fichas de colores
	- Juego Equitativo	- Los jugadores tienen la misma oportunidad de ganar
	- Sucesos	- Fichas rojas y fichas verdes
	- Espacio muestral	- Conjunto de posibilidades del experimento
	- Frecuencia Absoluta	- Número de fichas de un color determinado
	- Eventos mutuamente excluyentes	- Dos o más eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos, si no pueden ocurrir simultáneamente. Es decir, la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro evento (o eventos)
	- Espacio total	- Suceso formado por todas las fichas
Procedimientos	- Lanzamientos	- Se lanzan las fichas de colores
	- Representación Gráfica	- Diagrama de Barras con el resumen de las partidas ganadas correspondientes a cada color
	- Ordenación	- Ordenamos de mayor a menor para calcular cual es la mayor frecuencia
Propiedades	- Ordenación de frecuencias	- Calcular la mayor frecuencia
Argumentos	- Visualizaciones	- Visualización de los distintos sucesos y su relación

### ***Idoneidad Didáctica***

En este apartado, describimos y valoramos resumidamente los componentes de la idoneidad didáctica:

- *Idoneidad epistémica o matemática:* La idoneidad matemática podría presentarse en este recurso para el aprendizaje de los conceptos de: experimento aleatorio, situaciones de azar, juego equitativo, eventos mutuamente excluyentes, frecuencia absoluta. Como vemos en la Tabla 3.3.3, esta idoneidad podría ser elevada, dependiendo del trabajo que se realice con el recurso. Las soluciones formales tienen mayor idoneidad si se complementan con una solución intuitiva de las situaciones - problemas planteados en el recurso.
- *Idoneidad cognitiva:* Las actividades planteadas en este recurso son aptas para cursos de educación primaria, pues el lenguaje verbal como icónico fomentan la comprensión de los conceptos expuestos en el recurso. Asimismo, los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos, pues a partir de la simulación un experimento aleatorio se introducen las nociones de aleatoriedad y juego equitativo
- *Idoneidad interaccional:* Este tipo de idoneidad depende de cómo organice el docente el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en pareja o en grupos para que surja el conflicto y se explicita. Será importante también organizar una puesta en común de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los errores cometidos en la interpretación de las actividades planteadas por el recurso.
- *Idoneidad mediacional:* No se precisa de muchos recursos, con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente se puede trabajar esta

situación. La idoneidad aumentaría si se trabaja en el aula de informática donde cada alumno o profesor puede explorar el recurso de manera individual o grupal.

- *Idoneidad afectiva:* Pensamos que esta es la más alta de todas, ya que este recurso propicia el interés y motivación de los estudiantes, permitiendo un mayor compromiso en su proceso de aprendizaje.

### ***Dificultades posibles de los estudiantes***

Una dificultad que se puede presentar al manipular el recurso, es la generación de obstáculos entre las concepciones previas e ideas intuitivas del azar y la comprensión de los conceptos teóricos relacionados con el azar, lo que puede provocar que los estudiantes no identifiquen las diferencias entre juego equitativo y no equitativo.

Otra dificultad que se les puede presentar a los estudiantes tiene relación con la animación de los lanzamientos, pues deben esperar que se ejecute completamente un lanzamiento de las fichas, para que se pueda realizar el conteo respectivo y avance un lugar el automóvil del color ganador.

### ***Variantes y otros recursos de exploración***

En la Figura 3.3.8 mostramos un recurso que puede servir para explorar la idea de azar en la vida cotidiana, a través del juego de piedra, papel o tijera.

En este recurso, el alumno debe elegir uno de los elementos (piedra, papel o tijera) para realizar la tirada correspondiente al primer jugador. El resultado de las tiradas de cada jugador, se registra en una Tabla, en la que se anota: “pierde”, “gana” o “empate”, según corresponda. Una vez completados los cinco tiros, aparece un botón continuar que lleva a una serie de cinco preguntas de opción múltiple que deben ser contestadas por el estudiante, finalizada la actividad, se realiza la corrección de las respuestas entregadas, mostrándose cada una de las preguntas planteadas, la respuesta seleccionada por el usuario y si ésta es o no correcta.

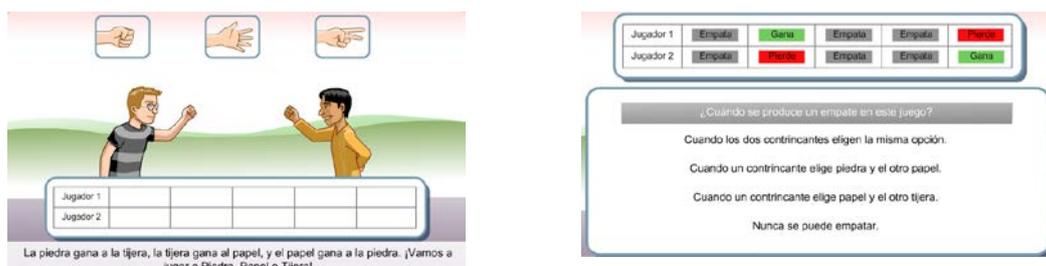


Figura 3.3.8. Capturas de El Azar en la Vida Cotidiana

El recurso de la Figura 3.3.9 puede ser usado para complementar la enseñanza de los juegos de azar y situaciones aleatorias. Muestra una ruleta dividida en 5 sectores iguales, representados por diferentes colores. El botón “Cambiar Ruleta”, permite personalizar las “Regiones de la ruleta”; se puede elegir el número de regiones (asignando porciones más grandes o más pequeñas) y el color respectivo a cada una de ellas.

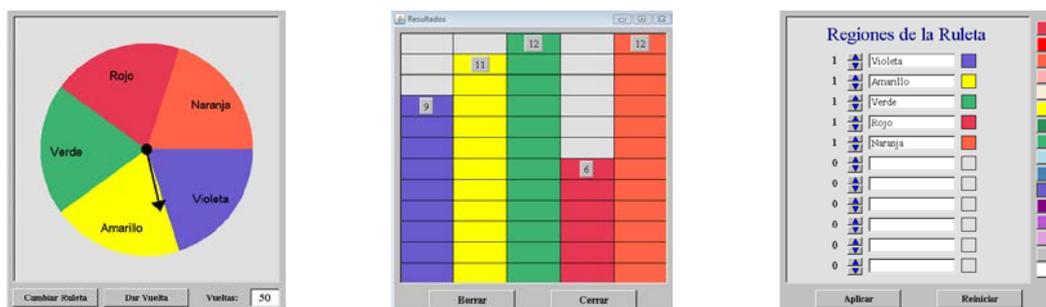


Figura 3.3.9. Capturas La Ruleta

El botón “Dar Vuelta”, realiza la simulación de hacer girar la ruleta (está determinado para realizar solamente un giro). El botón “Guardar Resultados”, permite anotar el número de vueltas (giros) que el usuario decida y al mismo tiempo, hace un recuento de todos los resultados que se obtienen en cada giro, confeccionando un diagrama de barras y la frecuencia absoluta obtenida por cada color, como se muestra en la Figura 3.3.9.

Finalmente, en la Tabla 3.3.4 presentamos las direcciones web de éstos y otros recursos útiles para la exploración de conceptos.

Tabla 3.3.4. Recursos para la exploración del concepto Azar

Nombre	Dirección
Determinismo y Azar. Baraja	<a href="http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/">http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/</a>
Determinismo y Azar. Casilleros Numéricos	<a href="http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/">http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/</a>
Determinismo y Azar. ¿En qué mano está la Moneda?	<a href="http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/">http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/</a>
Determinismo y Azar. Piensa un número y...	<a href="http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/">http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/</a>
Determinismo y Azar. ¿Qué Ostra tiene la perla?	<a href="http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/">http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/</a>
El Azar en la vida cotidiana	<a href="http://repositorio.educa.jccm.es/porta/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_0a02_es/index.html">http://repositorio.educa.jccm.es/porta/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_0a02_es/index.html</a>
Experimentos aleatorios o no aleatorios	<a href="http://contenidos.proyectoagrega.es/visualizador-1/Visualizar/Visualizar.do?idioma=es&amp;identificador=es_2009091713_8898177&amp;secuencia=false#">http://contenidos.proyectoagrega.es/visualizador-1/Visualizar/Visualizar.do?idioma=es&amp;identificador=es_2009091713_8898177&amp;secuencia=false#</a>
Los juegos de Azar	<a href="http://repositorio.educa.jccm.es/porta/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_0a04_es/index.html">http://repositorio.educa.jccm.es/porta/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_0a04_es/index.html</a>
Ruleta	<a href="http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_186_g_3_t_5.html">http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_186_g_3_t_5.html</a>

## B) Tipos de Sucesos

En la Figura 3.3.10 mostramos un recurso que aborda algunos objetos matemáticos relacionados con la exploración de los conceptos: probable, seguro e imposible. Estos recursos permiten a los alumnos visualizar diversos ejemplos de estos conceptos, como también, distinguir entre sus diferencias.

Analizamos un Applet que permite explorar los conceptos azar, seguro, probable e imposible, cuya pantalla principal se muestra en la Figura 3.3.10 y corresponde a la actividad N° 1 de dicho recurso.



Figura 3.3.10. Pantalla Applet Experimentos Aleatorios

*Dirección web:*

[http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/azar\\_y\\_probabilidad/mt11\\_oa01\\_es/index.html](http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_oa01_es/index.html)

### **Descripción**

El recurso muestra una serie de ejemplos de situaciones relacionadas con el azar, distinguiendo en sucesos imposible: que un coche funcione sin gasolina, suceso probable: que un perro encuentre un hueso escondido por otro perro, y suceso seguro: sacar un caramelo de menta de una bolsa que solo tiene caramelos de menta. Una vez terminada la animación, se pulsa el botón siguiente, planteándole al usuario una serie de 8 cuestiones de opción múltiple, en donde debe distinguir entre sucesos probables, seguros, o imposibles (ver Figura 3.3.11). Una vez elegida la opción, si la respuesta es correcta, se felicita al alumno y se debe pulsar el botón siguiente para seguir contestando el cuestionario. Si la respuesta no es correcta, se le solicita al alumno que vuelva a intentarlo.

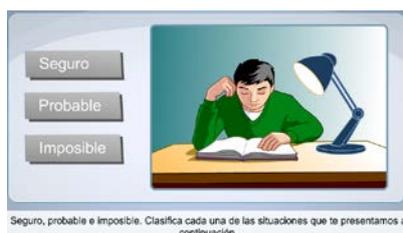


Figura 3.3.11. Pantalla Clasificación de Situaciones (Seguro, Probable, Imposible)

### **Análisis matemático del recurso**

El recurso explora los siguientes conceptos:

- *Suceso seguro*: está formado por todos los resultados posibles del experimento. Coincide con el espacio muestral y siempre ocurre. Tiene probabilidad 1.
- *Suceso imposible*: nunca ocurre, no se presenta al realizar un experimento aleatorio. Tiene probabilidad 0.
- *Suceso probable*: su probabilidad es mayor que cero y menor que 1.

### **Objetos matemáticos puestos en juego**

A continuación incluimos la Tabla de análisis de objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso.

Tabla 3.3.5. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Clasificación de Experimentos Aleatorios	- Distinguir entre suceso seguro, probable e imposible.
Lenguajes	- Visual	- Situaciones aleatorias
	- Verbal	- Explicación de la situación
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos
	- Matemático	- suceso seguro, suceso probable, suceso imposible.
	- A, B...	- Sucesos
Conceptos	- Suceso seguro	- Está formado por todos los resultados posibles del experimento. Coincide con el espacio muestral y siempre ocurre. Tiene probabilidad 1
	- Suceso imposible	- Nunca ocurre. No se presenta al realizar un experimento aleatorio. Tiene probabilidad 0
	- Suceso probable	- Su probabilidad es mayor que cero y menor que 1
	- Sucesos	- Obtener cruz, caer agua, aprobar el examen,...
Procedimientos	- Representación gráfica	- Imagen de la situación y su descripción
Propiedades	- La probabilidad es un valor entre 0 y 1	- El número de casos favorables es menor o igual que el número de casos posibles, será cero cuando no tengamos ningún caso favorable
Argumentos	- Visualizaciones	- Visualización de los distintos sucesos y su relación

### **Idoneidad Didáctica**

En este apartado, describimos y valoramos resumidamente los componentes de la idoneidad:

- *Idoneidad epistémica o matemática*: Este recurso podría tener una idoneidad matemática en el aprendizaje de los conceptos de experimento aleatorio, suceso seguro, suceso imposible, suceso probable.
- *Idoneidad cognitiva*: La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de educación primaria, pues el lenguaje verbal utiliza términos de fácil comprensión y se complementa con una serie de representaciones pictóricas que guían al estudiante durante la exploración del recurso. Asimismo, los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos, ya que se ejemplifican situaciones cotidianas relacionadas con las nociones de seguro, probable e imposible.

- *Idoneidad interaccional:* Este tipo de idoneidad depende de cómo organice el docente el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en pareja o en grupos para que surja el conflicto y se explicita. Será importante también organizar una puesta en común de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los errores cometidos en la resolución de los problemas planteados por el recurso. Cabe destacar el rol del docente como guía en el proceso de utilización del recurso, para aclarar las concepciones intuitivas que poseen los estudiantes sobre sucesos seguros, probables e imposibles.
- *Idoneidad mediacional:* No se precisa de muchos recursos, con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente se puede trabajar esta situación. La idoneidad aumentaría si se trabaja en el aula de informática donde cada alumno o profesor puede explorar el recurso de manera individual o grupal.
- *Idoneidad afectiva:* Pensamos que esta es la más alta de todas, ya que este Applet propicia el interés y motivación de los estudiantes, permitiendo un mayor compromiso en su proceso de aprendizaje.

### ***Dificultades posibles de los estudiantes***

La principal dificultad que pueden encontrar los alumnos con este Applet es realizar la clasificación de las situaciones en seguro, probable e imposible, ya que al visualizar algunas de las imágenes relacionadas con los sucesos, éstas pueden sugerir una respuesta errónea, dependiendo de la interpretación subjetiva que haga el estudiante de acuerdo a sus concepciones intuitivas del azar.

### ***Variantes y otros recursos de exploración***

En la Figura 3.3.12 se muestra un recurso que corresponde a la séptima actividad presentada en el Applet , que permite explorar los conceptos seguro, muy probable, poco probable e imposible, a través de la extracción de dos bolas de colores de una urna, que están numeradas del 0 al 2. Haciendo clic en el botón “Extraer dos Bolas”, se puede realizar la simulación del experimento aleatorio, lo que permite a los estudiantes observar cuáles son los resultados posibles de este experimento. Este recurso propone un listado de sucesos que se deben arrastrar a los cuadrados que representan a cada tipo de suceso (ver Figura 3.3.12). Una vez finalizada la actividad, el usuario puede hacer clic en el botón “Verificar” y corregir sus respuestas, si la respuesta es incorrecta, los sucesos se devuelven a la lista, permitiendo al alumno reclasificarlos y corregir su error. El botón “Recolocar” permite mover las respuestas de los recuadros a la lista.

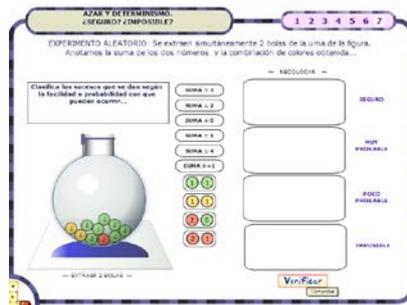


Figura 3.3.12. Determinismo y Azar. ¿Seguro? ¿Imposible?

En la Figura 3.3.13 se muestra el recurso “Clasificación de Probabilidades” que permite al usuario unir listas; una de ellas contiene cinco sucesos diferentes y en la otra columna se presentan los tipos de sucesos. El alumno puede revisar sus respuestas haciendo clic en el botón “Corregir”. Si el estudiante contesta erróneamente, el recurso le permite contestar nuevamente las preguntas incorrectas.

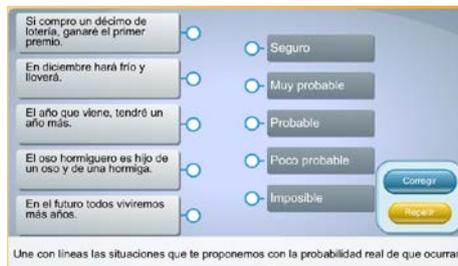


Figura 3.3.13. Clasificación de Probabilidades (Actividad 2)

En la Tabla 3.3.6 se presentan estos y otros recursos para la exploración de los tipos de sucesos.

Tabla 3.3.6. Recursos para la exploración de los conceptos relacionados los tipos de sucesos

Nombre	Dirección
Clasificación de Probabilidades (Actividad 2)	<a href="http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/maticas/azar_y_probabilidad/mt11_oa01_es/index.html">http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/maticas/azar_y_probabilidad/mt11_oa01_es/index.html</a>
Determinismo y Azar. ¿Seguro? ¿Imposible?	<a href="http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/">http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/</a>
Experimentos Aleatorios	<a href="http://www.librosvivos.net/smtc/hometc.asp?temaclave=1170">http://www.librosvivos.net/smtc/hometc.asp?temaclave=1170</a>
Más o menos probable	<a href="http://primaria.edumexico.net/Plan%20de%20estudios/cuarto/Matematicas4/Bimestre3/APUNTES/Las%20expresiones%20mas%20probable%20y%20menos%20probable.html">http://primaria.edumexico.net/Plan%20de%20estudios/cuarto/Matematicas4/Bimestre3/APUNTES/Las%20expresiones%20mas%20probable%20y%20menos%20probable.html</a>
Sucesos posibles y probables	<a href="http://contenidos.proyectoagrega.es/visualizador-1/Visualizar/Visualizar.do?idioma=es&amp;identificador=es_2009091713_8898177&amp;secuencia=false#">http://contenidos.proyectoagrega.es/visualizador-1/Visualizar/Visualizar.do?idioma=es&amp;identificador=es_2009091713_8898177&amp;secuencia=false#</a>
Tipos de Sucesos Aleatorios	<a href="http://contenidos.proyectoagrega.es/visualizador-1/Visualizar/Visualizar.do?idioma=es&amp;identificador=es_2009091713_8898177&amp;secuencia=false#">http://contenidos.proyectoagrega.es/visualizador-1/Visualizar/Visualizar.do?idioma=es&amp;identificador=es_2009091713_8898177&amp;secuencia=false#</a>

### C) Experimentos Aleatorios

En esta categoría describiremos algunos recursos que sirven de apoyo a la exploración de conceptos tales como espacio muestral, sucesos o eventos de un experimento aleatorio.

## Sucesos de un Experimento

En el recurso que se muestra en la Figura 3.3.14, se aborda el tema de espacio muestral y sucesos aleatorios.

Dirección web: <http://www.librosvivos.net/smtc/hometc.asp?temaclave=1170>

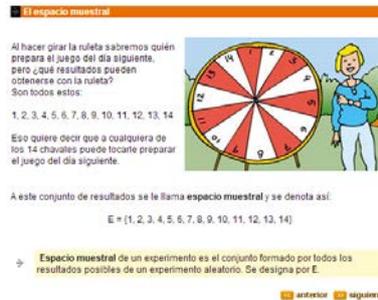


Figura 3.3.14. Captura del Recurso Sucesos de un Experimento

### Descripción

El recurso, Figura 3.3.14, desarrolla el concepto de espacio muestral a través de un ejemplo de una ruleta numerada del 1 al 14. Considerando este mismo ejemplo, se describen los sucesos aleatorios “obtener un número impar”, “obtener un número mayor que 9”, “obtener un número múltiplo de 8”, como se muestra en la Figura 3.3.15. En otra fase, se ejemplifica y define un suceso seguro, un suceso imposible y un suceso contrario. Finalmente, se presenta una actividad en que la que los alumnos deben contestar una serie de preguntas de opción múltiple sobre el lanzamiento de un dado de seis caras especial, cuyas caras corresponden a números impares del 1 al 11, como se muestra en la Figura 3.3.16.

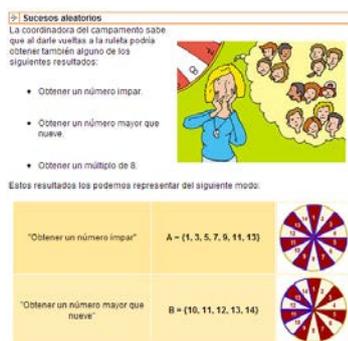


Figura 3.3.15. Sucesos Aleatorios

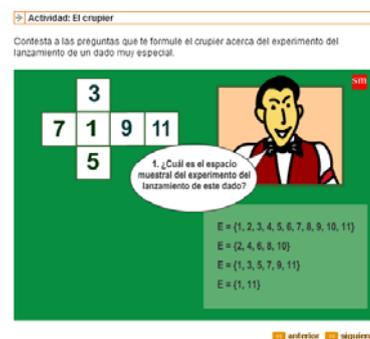


Figura 3.3.16. Actividad: El crupier

### Análisis matemático del recurso

Los principales conceptos probabilísticos que describe este recurso son los siguientes:

- El espacio muestral de un experimento es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se designa por  $E$ .
- Un suceso aleatorio o suceso es cualquier parte del espacio muestral. Se representa por una letra mayúscula.
- Suceso seguro es el que siempre se produce. Coincide con el espacio muestral; por eso se designa por  $E$ .
- Suceso imposible es aquel que nunca se puede obtener. Se designa por  $\Phi$
- Suceso contrario de  $A$  es el que se verifica cuando no se verifica  $A$ . Se designa por  $\overline{A}$

### ***Objetos matemáticos puestos en juego***

A continuación incluimos la tabla de análisis de objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso.

Tabla 3.3.7. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Girar la Ruleta - Lanzar un dado especial	- Determinar los resultados posibles que pueden obtenerse al girar la ruleta o lanzar el dado.
Lenguajes	- Visual	- Composición espacio muestral ( $A, B$ ) - Ruleta Numerada del 1 al 14. - Dado de seis caras numerado con números impares del 1 al 11
	- Verbal	- Explicación de la situación
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
	- Matemático	- Descripción del Espacio Muestral y los sucesos que lo componen
	- $A, B, C...$	- Sucesos
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Girar Ruleta numerada del 1 al 14 - Lanzamiento de un dado especial, de seis caras numeradas con números primos del 1 al 11.
	- Espacio muestral	- Conjunto de posibilidades de cada experimento
	- Sucesos	- Obtener un número impar al girar la ruleta - Obtener un número mayor que nueve al girar la ruleta - Obtener un múltiplo de 8 al girar la ruleta - Salir un número menor que 15 al girar la ruleta - Salir un 16 al girar la ruleta - Salir un múltiplo de 4 al girar la ruleta - Suceso seguro al lanzar el dado especial - Salir un número menor o igual a 5 - Suceso contrario de salir un múltiplo de 3 - Suceso imposible
	- Suceso Seguro	- Es el que siempre se produce, coincide con el espacio muestral.
	- Suceso Imposible	- Es aquel que no se puede obtener.
	- Suceso Contrario	- El suceso contrario al suceso $A$ es aquel que se verifica cuando no se verifica $A$ .
	- Espacio total	- Suceso formado por el total de posibilidades de cada experimento
Procedimientos	- Representación gráfica	- Descripción de los sucesos
Propiedades	- Suceso o Evento Simple	- Un suceso o evento simple es un subconjunto del espacio muestral que contiene un único elemento.

	- Ocurrencia de un Suceso	- Un evento A ocurre, si el resultado del experimento aleatorio es un elemento de A.
Argumentos	- Visualizaciones	- Visualización de las distintos sucesos y su relación

### ***Idoneidad Didáctica***

En este apartado, describimos y valoramos resumidamente los componentes de la idoneidad:

- *Idoneidad epistémica o matemática:* Este recurso podría tener una idoneidad matemática en el aprendizaje de los conceptos de: experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos, suceso seguro, suceso imposible, suceso contrario. Como vemos en la Tabla 3.3.7, esta idoneidad podría ser elevada, dependiendo del trabajo que se realice con el recurso. Las soluciones formales tienen mayor idoneidad si se complementan con una solución intuitiva de las situaciones - problemas planteados en el recurso.
- *Idoneidad cognitiva:* La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de educación primaria, pues el recurso plantea una serie de conceptos con ejemplificaciones de fácil comprensión, que guían al estudiante durante la exploración del recurso. Asimismo, los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos, ya que se muestran las definiciones de los conceptos utilizados en el recurso.
- *Idoneidad interaccional:* Este tipo de idoneidad depende de cómo organice el docente el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en pareja o en grupos para que surja el conflicto y se explicita. Será importante también organizar una puesta en común de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los errores cometidos en la resolución de los problemas planteados por el recurso.
- *Idoneidad mediacional:* No se precisa de muchos recursos, con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos puedan explorar colectivamente el recurso y trabajar en las situaciones planteadas. La idoneidad aumentaría si se trabaja en el aula de informática donde cada alumno o profesor puede explorar el recurso de manera individual o grupal.
- *Idoneidad afectiva:* Pensamos que esta es la más alta de todas, ya que este recurso propicia el interés y motivación de los estudiantes, permitiendo un mayor compromiso en su proceso de aprendizaje.

### ***Dificultades posibles de los estudiantes***

Una dificultad que se les puede presentar a los alumnos es determinar los elementos que componen un suceso, por ejemplo, en el caso del experimento de la ruleta, determinar los múltiplos de 3, deben tener presente que serán los múltiplos que aparecen en dicha ruleta y no todos los múltiplos de 3 que podemos obtener. Otra dificultad se presenta al determinar el suceso contrario a uno dado, pues hay que tener mucha claridad de los elementos que componen el suceso original para luego asignar a su contrario los demás elementos no incluidos en el suceso original.

### Variantes y otros recursos

En la Figura 3.3.17 se presenta un recurso que explora el concepto de evento o suceso aleatorio a través de una animación y una actividad propuesta. En la animación se muestran todos los resultados posibles al lanzar un dado y se explica qué es un evento aleatorio. La actividad propuesta permite a los estudiantes familiarizarse con el concepto de evento aleatorio y anotar los elementos que componen cada suceso aleatorio de acuerdo al lanzamiento de un dado. Los estudiantes pueden verificar sus respuestas haciendo clic en el botón “revisar”. En la segunda actividad, los alumnos deben completar los elementos que corresponden a cada suceso señalado, y pueden comprobar si sus respuestas son correctas.



Figura 3.3.17. Un Evento Aleatorio

Otro recurso analizado en esta categoría, corresponde al de exploración del concepto de experimentos aleatorios, espacio muestral y sucesos que se muestra en la Figura 3.3.18. Se propone una actividad para que los estudiantes relacionen los distintos sucesos que pueden ocurrir en el lanzamiento de un dado con sus respectivos elementos.



Figura 3.3.18. Experimentos aleatorios, espacio muestral y sucesos

En la Tabla 3.3.8 se presentan las direcciones de cada uno de estos recursos y de otros que exploran los conceptos de sucesos de un experimento aleatorio y espacio muestral.

Tabla 3.3.8. Recursos para la exploración del concepto de Experimentos Aleatorios

Nombre	Dirección
Azar y Probabilidad. Elige un Circuito con Bolas	<a href="http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/">http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/</a>
Ball and Urn Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/BallUrnExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/BallUrnExperiment.html</a>
Binomial Coin Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/BinomialCoinExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/BinomialCoinExperiment.html</a>
Buffon's Coin Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/BufferCoinExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/BufferCoinExperiment.html</a>
Buffon's Needle Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/BufferNeedleExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/BufferNeedleExperiment.html</a>
Bertrand's Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/BertrandExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/BertrandExperiment.html</a>
Random Birthday Applet	<a href="http://www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/Birthday.html">http://www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/Birthday.html</a>
Buffon's Needle	<a href="http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262/buffon/buffon.html">http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262/buffon/buffon.html</a>
Card Sample Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/CardExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/CardExperiment.html</a>
Central Limit Theorem Applet	<a href="http://www.stat.sc.edu/~west/javahtml/CLT.html">http://www.stat.sc.edu/~west/javahtml/CLT.html</a>
Coin-Die Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/CoinDieExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/CoinDieExperiment.html</a>
Coin Flipper	<a href="http://www.random.org/coins/?num=2&amp;cur=60-eur.ireland-1euro">http://www.random.org/coins/?num=2&amp;cur=60-eur.ireland-1euro</a>
Coin Sample Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/CoinSampleExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/CoinSampleExperiment.html</a>
Coin Toss	<a href="http://shodor.org/interactivate/activities/Coin/">http://shodor.org/interactivate/activities/Coin/</a>
Experimentos aleatorios, espacio muestral y sucesos (Actividad 4)	<a href="http://www.librosvivos.net/smtc/homeTC.asp?TemaClave=1051">http://www.librosvivos.net/smtc/homeTC.asp?TemaClave=1051</a>
Dice Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/DiceExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/DiceExperiment.html</a>
Dice Roller	<a href="http://www.random.org/dice/">http://www.random.org/dice/</a>
Dice Sample Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/DiceSampleExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/DiceSampleExperiment.html</a>
Galton Board Game	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/GaltonBoardGame.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/GaltonBoardGame.html</a>
Galton Board Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/GaltonBoardExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/GaltonBoardExperiment.html</a>
Playing Card Shuffler	<a href="http://www.random.org/playing-cards/">http://www.random.org/playing-cards/</a>
Poker Experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/PokerExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/PokerExperiment.html</a>
Random Variables	<a href="http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262/intro_prob_models/intro_prob_models.html">http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262/intro_prob_models/intro_prob_models.html</a>
Reese's Pieces Samples	<a href="http://statweb.calpoly.edu/chance/Applet s/Reeses/ReesesPieces.html">http://statweb.calpoly.edu/chance/Applet s/Reeses/ReesesPieces.html</a>
Sampling Words	<a href="http://www.rossmanchance.com/Applet s/GettysburgSample/GettysburgSample.html">http://www.rossmanchance.com/Applet s/GettysburgSample/GettysburgSample.html</a>
Un evento aleatorio (Actividad 4)	<a href="http://odas.educarchile.cl/objetos_digitaes_NE/ODAS_Matematica/Ed_Matematica/aplicacion_vocabulario_probabilidades/index.html">http://odas.educarchile.cl/objetos_digitaes_NE/ODAS_Matematica/Ed_Matematica/aplicacion_vocabulario_probabilidades/index.html</a>
Venn Diagram Applet	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/VennGame.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet s/VennGame.html</a>

## D) Probabilidad

El recurso que se muestra en la Figura 3.3.19, realiza la simulación de los lanzamientos de una moneda y graba los resultados obtenidos.



Figura 3.3.19. Pantalla Lanzamientos de una moneda

Dirección web: [http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames\\_asid\\_305\\_g\\_3\\_t\\_5.html](http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_305_g_3_t_5.html)

### Descripción

El Applet presenta dos modalidades para realizar la simulación del lanzamiento de una moneda. En la primera opción, se pueden especificar la cantidad de lanzamientos que se pretende realizar, el botón Iniciar permite realizar los lanzamientos señalados. Para realizar un nuevo experimento, se debe hacer clic en el botón Borrar. La segunda

opción, permite señalar el número de caras sucesivas, lo que permite al usuario establecer la mayor cantidad de veces que quiere que se repita cara en un experimento, en esta opción el Applet detiene la simulación hasta que se logra el número de caras señalados, el número total de lanzamientos depende de cuándo la simulación encuentre la cantidad de caras sucesivas señaladas, como se observa en la Figura 3.3.20.

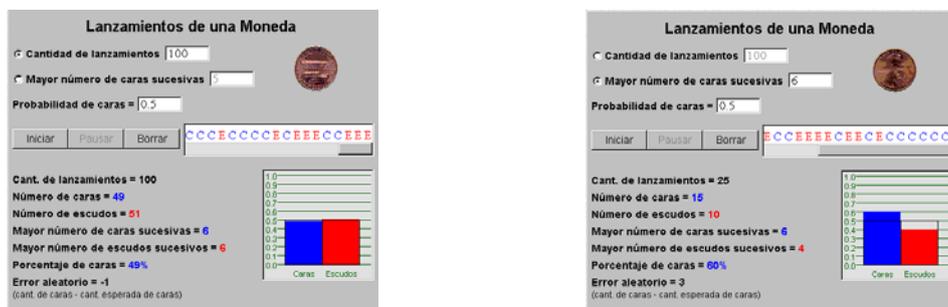


Figura 3.3.20. Lanzamientos de una Moneda.

El recurso, muestra todos los resultados posibles del experimento realizado y un resumen con los siguientes datos: cantidad de lanzamientos, número de caras, número de escudos (cruces), mayor número de caras sucesivas, mayor número de escudos (cruces) sucesivos, porcentaje de caras, error aleatorio. También se realiza un diagrama de barras con el porcentaje de caras y escudos (cruces) obtenidos en el experimento, como se aprecia en la Figura 3.3.20.

### ***Análisis matemático del recurso***

El recurso es básicamente una visualización de un experimento de Lanzamiento de una Moneda. A partir de dos sucesos  $A=\{cara\}$  y  $B=\{escudo\}$  el recurso efectúa el lanzamiento de la moneda, escribe la totalidad de casos posibles, calcula el número de veces que ocurre cada suceso y realiza un diagrama de barras con sus frecuencias relativas expresadas como porcentaje.

### ***Objetos matemáticos puestos en juego***

A continuación incluimos la tabla de análisis de objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso.

Tabla 3.3.9. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Cálculo de probabilidades simples.	- Experimentación del cambio de probabilidades al cambiar la composición de los sucesos
Lenguajes	- Visual	- Composición espacio muestral ( $A, B$ ) - Lanzamiento de una moneda - Cálculo de porcentajes - Frecuencia Relativa

	- Verbal	- Explicación de la situación
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
	- Matemático	- Cálculo de frecuencia absoluta - Cálculo de porcentajes - Número de Lanzamientos
	- $A, B$	- Sucesos
	- $P(A), P(B), \dots$	- Probabilidad Frecuencial de los sucesos
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Lanzamiento de una Moneda
	- Sucesos	- Cara y Escudo (Cruz)
	- Espacio muestral	- Conjunto de posibilidades del experimento
	- Probabilidad simple	- Medida relativa del área de cada parte respecto al total
	- Espacio total	- Suceso formado por el total de lanzamientos
	- Frecuencia Absoluta	- N° de veces que se repite el valor de una variable
	- Frecuencia Relativa	- Cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos
	- Cálculo de probabilidades	- Probabilidad Frecuencial
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples; visualmente las puede comparar el alumno
	- Representación gráfica	- Escritura de los casos posibles - Diagrama de Barras
	- Ordenación	- Ordenamos de mayor a menor para calcular cual es la probabilidad mayor
Propiedades	- La probabilidad es un valor entre 0 y 1	- El número de casos favorables es menor o igual que el número de casos posibles, será cero cuando no tengamos ningún caso favorable.
	- Ordenación probabilidades	- Una probabilidad de un suceso es mayor que otra cuando el número de casos favorables de éste sea mayor que el número de casos favorables de otro suceso (siempre que tengamos el mismo n° de casos totales)
Argumentos	- Visualizaciones	- Visualización de los distintos sucesos y su relación

### ***Idoneidad Didáctica***

En este apartado, describimos y valoramos resumidamente los componentes de la idoneidad:

- *Idoneidad epistémica o matemática:* Este recurso podría tener una idoneidad matemática en el aprendizaje de los conceptos de: experimento aleatorio, sucesos, espacio muestral, probabilidad simple, espacio total, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, cálculo de probabilidades, comparación de probabilidades. Como vemos en la Tabla 3.3.9, esta idoneidad podría ser elevada, dependiendo del trabajo que se realice con el recurso. Las soluciones formales tienen mayor idoneidad si se complementan con una solución intuitiva de las situaciones - problemas planteados en el recurso.
- *Idoneidad cognitiva:* La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de educación primaria, pues permite al alumno manipular algunas opciones para realizar diferentes experimentos aleatorios modificando las condiciones en que se ejecuta el experimento. Asimismo, los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos, ya que además pueden visualizar todos los resultados obtenidos, una representación gráfica de los resultados y también un recuento de información proporcionada por el recurso.

- *Idoneidad interaccional:* Este tipo de idoneidad depende de cómo organice el docente el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en pareja o en grupos para que surja el conflicto y se explicita. Será importante también organizar una puesta en común de los diferentes experimentos realizados para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los errores cometidos en la exploración del recurso. Cabe destacar el rol del docente como guía en el proceso de utilización del recurso, frente al lenguaje utilizado por el Applet para elegir las opciones y ejecutar los distintos tipos de lanzamientos simulados.
- *Idoneidad mediacional:* No se precisa de muchos recursos, con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden manipular el Applet colectivamente se puede trabajar esta situación. La idoneidad aumentaría si se trabaja en el aula de informática donde cada alumno o profesor puede explorar el recurso de manera individual o grupal.
- *Idoneidad afectiva:* Pensamos que esta es la más alta de todas, ya que este recurso propicia el interés y motivación de los estudiantes, permitiendo un mayor compromiso en su proceso de aprendizaje.

### ***Dificultades posibles de los estudiantes***

Una dificultad puede presentarse cuando se interpreta el concepto de probabilidad frecuencial, confundiéndola con la probabilidad teórica. La falta de comprensión del concepto de independencia, frente a la repetición del experimento. Se puede presentar la creencia que la probabilidad de un suceso decrece cuando el suceso ha ocurrido recientemente, sin reconocer la independencia de los ensayos repetidos (falacia del jugador). Otra dificultad, está relacionada con el gráfico que presenta el Applet, el que corresponde a un diagrama de barras, que el alumno puede confundir con un histograma ya que las barras aparecen juntas, una al lado de la otra.

### ***Variantes y otros recursos***

En la Figura 3.3.21 se presenta la pantalla del recurso Probabilidad de un Suceso, el que muestra en una primera parte la probabilidad como frecuencia relativa a través de la realización del experimento de lanzar un dado. Se muestra en una tabla las respuestas realizadas por un grupo de amigos que han lanzado un dado distintas veces. En la actividad siguiente, se introduce la Regla de Laplace con un ejemplo de girar una ruleta. Finalmente, se les propone a los estudiantes la actividad llamada “La Tómbola”, en la que deben unir las frases que dan algunos personajes, con la probabilidad de ocurrencia de cada enunciado descrito.

El recurso que se presenta en la Figura 3.3.22, muestra un ejemplo de la aproximación frecuencial a la probabilidad, considerando el lanzamiento de un dado. El ejemplo muestra una Tabla en donde se recoge la información de los lanzamientos, la

frecuencia absoluta (el número de veces que ocurre el suceso Obtener un cinco), el número total de lanzamientos, y la frecuencia relativa. En una segunda actividad, se realiza la simulación del lanzamiento de un dado. Esta actividad permite al usuario elegir la cantidad de lanzamientos que desea realizar, lo que se resume en una Tabla que incluye los sucesos posibles, la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de cada suceso. Si el usuario desea ver la lista de los suceso obtenidos, debe activar la opción ver/ocultar sucesos obtenidos



Figura 3.3.21. Probabilidad de un suceso



Figura 3.3.22. Azar y Probabilidad. Al Lanzar el Dado

En la Tabla 3.4.8 se presentan las direcciones de estos y otros recursos para la exploración del concepto de probabilidad.

Tabla 3.3.10. Recursos de Exploración para el concepto de Probabilidad

Nombre	Dirección
Azar y probabilidad. al lanzar un dado	<a href="http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar">http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar</a>
El tablero de dados	<a href="http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Dice/Index.html">http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Dice/Index.html</a>
Frecuencia y probabilidad	<a href="http://ntic.educacion.es/w3//recursos/primaria/matematicas/porcentajes/menue5.html">http://ntic.educacion.es/w3//recursos/primaria/matematicas/porcentajes/menue5.html</a>
Juegos de azar	<a href="http://contenidos.proyectoagrega.es/visualizador-1/Visualizar/Visualizar.do?idioma=es&amp;identificador=es_2009091713_8898177&amp;secuencia=false#">http://contenidos.proyectoagrega.es/visualizador-1/Visualizar/Visualizar.do?idioma=es&amp;identificador=es_2009091713_8898177&amp;secuencia=false#</a>
Modelo de cajas	<a href="http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_146_g_3_t_5.html">http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_146_g_3_t_5.html</a>
Probabilidad de un suceso	<a href="http://www.librosvivos.net/smtc/hometc.asp?temaclave=1170">http://www.librosvivos.net/smtc/hometc.asp?temaclave=1170</a>
Probabilidad experimental	<a href="http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Prob/Index.html">http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Prob/Index.html</a>
Probability	<a href="http://bcs.whfreeman.com/ips4e/cat_010/Applet_s/Probability.html">http://bcs.whfreeman.com/ips4e/cat_010/Applet_s/Probability.html</a>
Probability experiment	<a href="http://www.math.uah.edu/stat/Applet_s/ProbabilityExperiment.html">http://www.math.uah.edu/stat/Applet_s/ProbabilityExperiment.html</a>
Sacar Bola	<a href="http://www.uco.es/~ma1marea/Recursos/Bolas.swf">http://www.uco.es/~ma1marea/Recursos/Bolas.swf</a>
Situaciones problemáticas.	<a href="http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar">http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar</a>
Tirar el dado	<a href="http://www.uco.es/~ma1marea/Recursos/Dados.swf">http://www.uco.es/~ma1marea/Recursos/Dados.swf</a>

### 3.3.3 PROBLEMAS

El recurso de la Figura 3.3.23, nos presenta un cuestionario sobre probabilidad simple, que sirve como apoyo para la resolución de problemas.

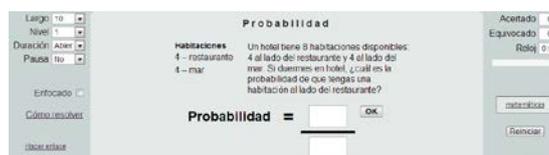


Figura 3.3.23. Cuestionario sobre Probabilidad

Dirección web: <http://www.thatquiz.org/es-d/>

### **Descripción**

El recurso de la Figura 3.3.23 presenta una serie de problemas relativos al cálculo de probabilidad. Se compone de cuatro ventanas despegables, en donde se puede elegir la cantidad de preguntas (Largo), el nivel de dificultad (de 1 a 5, en donde el nivel 1 corresponde al cálculo de probabilidades de experimentos sencillos), la duración (seleccionar el tiempo máximo para contestar las preguntas) y si se necesita pausa entre preguntas. Muestra tres cuadros: las preguntas Acertadas (respuestas correctas), las preguntas Equivocadas (respuestas incorrectas), y el Reloj con el tiempo que emplea el usuario para contestar el listado de problemas propuestos.

Una vez contestadas las serie de preguntas, el Applet entrega un cuadro resumen, con la Nota, expresada en porcentaje; Cumplido, cantidad de respuestas contestadas; Sin cumplir, cantidad de respuestas no contestadas; Acertado, número de respuestas correctas; Equivocado, número de respuestas incorrectas; Tiempo; Segundos, promedio de segundos empleados en contestar una pregunta. En caso de no contestar correctamente, el resumen también muestra una corrección de los problemas, apareciendo el enunciado de dicho problema, la solución correcta y la respuesta entregada por el usuario. El recurso también entrega un enlace con la posibilidad de que el usuario corrija sus errores, contestando nuevamente los problemas en los que se equivocó al responder el cuestionario.

### **Análisis matemático del recurso**

El recurso propone una secuencia de 10 (o más) problemas de cálculo de probabilidad simple utilizando la Regla de Laplace  $P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ .

### **Objetos matemáticos puestos en juego**

A continuación incluimos la tabla de análisis de objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso.

Tabla 3.3.11. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Cálculo de probabilidades simples con diversos datos.	- Experimentación del cambio de probabilidades al cambiar la composición de los sucesos
Lenguajes	- Visual	- Composición espacio muestral ( $A, B$ ) - Cálculo de probabilidades

	- Verbal	- Explicación de la situación
	- Matemático	- Cálculo de probabilidades
	- $A, B, \dots$	- Sucesos
	- $P(A), P(B), \dots$	- Probabilidad de los sucesos
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Cada uno de los planteados en cada problema
	- Sucesos	- Los planteados en cada problema
	- Espacio muestral	- Conjunto de posibilidades del experimento
	- Probabilidad simple	- Medida relativa del área de cada parte respecto al total
	- Casos favorables	- Número de elementos señalados en el enunciado del problema que corresponden a un determinado suceso
	- Casos posibles	- Número total de elementos presentes en el enunciado del problema
	- Espacio total	- Suceso formado por todos los elementos del problema
Procedimientos	- Regla de Laplace	- Cociente entre casos favorables y casos posibles
	- Cálculo de probabilidades	- Se aplicaría la fórmula de Laplace
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples; visualmente las puede comparar el alumno
	- Ordenación	- Ordenamos de mayor a menor para calcular cual es la probabilidad mayor
Propiedades	- La probabilidad es un valor entre 0 y 1	- El número de casos favorables es menor o igual que el número de casos posibles, será cero cuando no tengamos ningún caso favorable.
	- Ordenación probabilidades	- Una probabilidad de un suceso es mayor que otra cuando el número de casos favorables de éste sea mayor que el número de casos favorables de otro suceso (siempre que tengamos el mismo n° de casos totales)
Argumentos	- Visualizaciones	- Visualización de los distintos sucesos y su relación

### ***Idoneidad Didáctica***

En este apartado, describimos y valoramos resumidamente los componentes de la idoneidad:

- *Idoneidad epistémica o matemática:* Este recurso podría tener una idoneidad matemática en el aprendizaje de los conceptos de: Regla de Laplace, cálculo de probabilidades, comparación de probabilidades. Como vemos en la Tabla 3.3.11, esta idoneidad podría ser elevada, dependiendo del trabajo que se realice con el recurso.
- *Idoneidad cognitiva:* Las situaciones-problemas planteadas tienen suficiente idoneidad en cursos de educación primaria, pues el lenguaje verbal del recurso utiliza términos de fácil comprensión. Asimismo, los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos, ya que se señalan los espacios para completar la fórmula de la regla de Laplace y realizar el cálculo de la probabilidad. Además, en el recurso se puede seleccionar una mayor o menor dificultad, o una menor o mayor cantidad de preguntas y medir el tiempo para contestar, de acuerdo a lo que el usuario quiera establecer.
- *Idoneidad interaccional:* Este tipo de idoneidad depende de cómo organiza el docente el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en pareja o en grupos para que surja el conflicto y se explicita. Será importante también organizar una puesta en común de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los errores cometidos en la resolución de los problemas planteados por el recurso.

- *Idoneidad mediacional*: No se precisa de muchos recursos, con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos puedan contestar colectivamente los problemas planteados en este recurso. La idoneidad aumentaría si se trabaja en el aula de informática donde cada alumno o profesor puede explorar el recurso de manera individual o grupal.
- *Idoneidad afectiva*: Pensamos que esta es la más alta de todas, ya que este recurso propicia el interés y motivación de los estudiantes, ya que pueden personalizar su entorno de trabajo, dependiendo de sus condiciones individuales, modificando las opciones: cantidad de preguntas (largo) y duración (tiempo).

### ***Dificultades posibles de los estudiantes***

Una de las principales dificultades que pueden encontrar los alumnos, tiene relación con el cálculo de probabilidades, confundiendo la probabilidad simple con la probabilidad de un suceso elemental, o confunde la probabilidad con los casos posibles, o calcular la probabilidad de un suceso en vez de la probabilidad de su complementario. Otra dificultad se presenta al anotar el resultado de la probabilidad, pues no se especifica en las instrucciones si se debe o no simplificar.

### ***Variantes y otros recursos de exploración***

En la Figura 3.3.24 mostramos un recurso que puede servir para ejercitar el cálculo de probabilidades de experimentos sencillos. Esta es la tercera actividad que plantea el recurso, corresponde a una serie de seis preguntas de opción múltiple, sobre el cálculo de probabilidades utilizando las cartas de la baraja española, en donde el usuario debe elegir la respuesta correcta, utilizando la Regla de Laplace. Incluye un Botón ayuda, en donde se define la Regla de Laplace y se caracterizan las cartas que componen una baraja española. Si el usuario marca la respuesta correcta, ésta se resalta y aparece el botón continuar, para pasar a la siguiente pregunta. Si la respuesta es incorrecta, aparece en pantalla el mensaje “la respuesta no es correcta, vuelve a intentarlo”, dando la opción de elegir nuevamente otra respuesta.

El recurso es básicamente una visualización de un experimento de extracción de cartas de una baraja con reposición y el cálculo de sus respectivas probabilidades. A partir de un suceso, el recurso calcula las probabilidades de sacar una carta de la baraja española, mediante la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables del suceso } A}{\text{número de casos posibles}} .$$



Figura 3.3.24. La baraja española

En la Figura 3.3.25 se muestra un recurso que propone una serie de cuestiones relacionadas con el cálculo de probabilidades, considerando la extracción de bolas de una bolsa. El recurso muestra nueve bolas (4 rojas, 3 azules y 2 amarillas) que están introducidas dentro de una bolsa. Se plantea una serie de preguntas sobre el cálculo de probabilidad simple, expresada como fracción, utilizando la regla de Laplace, como cociente entre número de casos favorables y número de casos posibles. El estudiante debe completar cada respuesta indicando el número de casos favorables y el número de casos posibles. Una vez completadas las respuestas, éstas se pueden corregir haciendo clic en el botón comprobar. El botón seleccionar muestra las respuestas a cada pregunta planteada.



Figura 3.3.25. Probabilidad de un suceso

En la Tabla 3.3.12 se presentan las direcciones de estos y otros recursos para la resolución de problemas y el cálculo de probabilidades.

Tabla 3.3.12. Listado recursos sobre problemas de probabilidad

Nombre	Dirección
Experiencias Aleatorias	<a href="http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/CUARTO/datos/01_Mates/datos/05_rdi/U15/01.htm">http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/CUARTO/datos/01_Mates/datos/05_rdi/U15/01.htm</a>
La baraja española (Actividad N°3)	<a href="http://repositorio.educa.jccm.es/porta/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_oa03_es/index.html">http://repositorio.educa.jccm.es/porta/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_oa03_es/index.html</a>
Probabilidad de un Suceso	<a href="http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/CUARTO/datos/01_Mates/datos/05_rdi/U15/03.htm">http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/CUARTO/datos/01_Mates/datos/05_rdi/U15/03.htm</a>
Probability	<a href="http://www.adaptedmind.com/p.php?tagId=1012">http://www.adaptedmind.com/p.php?tagId=1012</a>
Problemas y Estrategias (Actividad 1-3)	<a href="http://repositorio.educa.jccm.es/porta/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_oa05_es/index.html">http://repositorio.educa.jccm.es/porta/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_oa05_es/index.html</a>
Sucesos Posibles, Seguros e Imposibles	<a href="http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/CUARTO/datos/01_Mates/datos/05_rdi/U15/02.htm">http://www.ceipjuanherreraalcausa.es/Recursosdidacticos/CUARTO/datos/01_Mates/datos/05_rdi/U15/02.htm</a>

### 3.3.4 LECCIONES O LIBROS DE TEXTO

En este apartado encontramos versiones electrónicas de lecciones y libros de probabilidad que incorporan recursos de visualización y exploración de conceptos.

#### A) Lecciones Virtuales

En esta categoría describiremos algunos recursos que presentan lecciones completas o parciales sobre probabilidad, las cuales incluyen un desarrollo teórico o presentan una serie de actividades propuestas para desarrollar con los estudiantes.

#### Unidad Didáctica Probabilidad y Estadística

Esta unidad didáctica aborda temas de estadística y probabilidad, por lo que centraremos el análisis de las actividades propuestas para probabilidad.

Dirección web: <http://www3.unileon.es/personal/wwdfcedg/Diversid/Webquest/unidadprobabilidad.pdf>

UNIDAD DIDÁCTICA: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA.

Elaboración de una Unidad Didáctica desde la perspectiva intercultural.

Isabel Taléns Escribuela

CURSO INTERCULTURALNET  
C.P. Párra Melchor (Benicàssim)  
ICAD@unileon.es

1.12. ACTIVIDAD 4: PROBABILIDAD.

- ❖ Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:
  - Lanzar tres monedas.
  - Lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.
  - Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.
  - El tiempo, con relación a la lluvia, que hará durante tres días consecutivos.
- ❖ Pedro y Ana siempre están discutiendo y desde hace unos días siempre terminan la discusión tirando una moneda al aire y aceptando lo que salga según lo que cada uno haya pedido.  
Coge una moneda y tirala 50 veces anotando el resultado y compáralo con el de tus compañeros/as.

Resultado de tu experiencia  
Resultado de la clase  
Nº de veces que ha salido cara  
Nº de veces que ha salido cruz  
Nº de veces que ha salido cara  
Nº de veces que ha salido cruz

¿Qué resultado, salir cara o cruz, ha ocurrido más veces?

Figura 3.3.26. Capturas Unidad Didáctica Probabilidad y Estadística

#### Descripción

Esta unidad didáctica, Figura 3.3.26, plantea una secuencia de actividades para desarrollar con los alumnos para introducir algunas nociones generales e intuitivas referidas al azar.

Se proponen diversas actividades: describir el espacio muestral de diversos experimentos aleatorios; realizar y anotar los resultados de experimentos aleatorios como el lanzamiento de la moneda o el dado, sacar bolas de una caja, la ruleta; cálculo de probabilidades en experimentos con extracción de bolas de colores, la baraja española, el lanzamiento de un dado.

#### Análisis matemático del recurso

Se utilizan los siguientes conceptos probabilísticos:

- Experimentos aleatorios este tipo de experimentos, repetidos una cierta cantidad de veces, en condiciones similares, pueden presentar resultados diferentes. No se conocen los resultados de antemano.

- Espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- Tipos de sucesos: más o menos probable.
- Probabilidad de un suceso, es el cociente entre el número de casos favorables del suceso A y el número de casos posibles.
- Frecuencia absoluta corresponde al número de veces que se repite el valor de una variable.
- Frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos.

### ***Objetos matemáticos puestos en juego***

A continuación incluimos la Tabla de análisis de objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso.

Tabla 3.3.13. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Descripción del espacio muestral de distintos experimentos aleatorios</li> <li>- Experimentos aleatorios</li> <li>- Cálculo de probabilidades simples en distintos experimentos aleatorios</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Escribir los elementos que conforman el espacio muestral de un determinado experimento aleatorio</li> <li>- Realizar el experimento aleatorio (lanzar un dado 50 veces, etc.) , anotar los resultados del experimento...</li> <li>- Experimentación del cambio de probabilidades al cambiar la composición de los sucesos</li> </ul>
Lenguajes	- Visual	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Composición espacio muestral (<math>A, B, \dots</math>)</li> <li>- Lanzamiento dado, lanzamiento moneda, sacar bolas de una bolsa, ruleta, baraja española, etc.</li> <li>- Cálculo de probabilidades</li> </ul>
	- Verbal	- Explicación de las situaciones
	- Matemático	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Espacio muestral</li> <li>- Experimento Aleatorio</li> <li>- Cálculo de probabilidades</li> <li>- Frecuencias absolutas</li> <li>- Frecuencias relativas</li> </ul>
	- $A, B, \dots$	- Sucesos
	- $P(A), P(B), \dots$	- Probabilidad de los sucesos
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Lanzamiento dado, lanzamiento moneda, extracción de bolas de una bolsa, ruleta, baraja española, etc.
	- Sucesos	- N° de veces que ha salido cara, N° de veces que ha salido cruz,...
	- Espacio muestral	- Conjunto de posibilidades del experimento
	- Probabilidad simple	- Medida relativa del área de cada parte respecto al total
	- Casos favorables	- Número de elementos señalados en el enunciado del problema que corresponden a un determinado suceso
	- Casos posibles	- Número total de elementos presentes en el enunciado del problema
	- Frecuencia Absoluta	- Número de veces que se repite el valor de una variable
	- Frecuencia Relativa	- Cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de veces que se realizó un experimento aleatorio
- Espacio total	- Suceso formado por todas las bolas	
Procedimientos	- Regla de Laplace	- Cociente entre casos favorables y casos posibles

	- Cálculo de probabilidades	- Se aplicaría la fórmula de Laplace - Se aplica el cálculo de la frecuencia relativa
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples; visualmente las puede comparar el alumno
	- Representación gráfica	- Disposición de los elementos de cada experimento aleatorio
	- Ordenación	- Ordenamos de mayor a menor para calcular cual es la probabilidad mayor
Propiedades	- La probabilidad es un valor entre 0 y 1	- El número de casos favorables es menor o igual que el número de casos posibles, será cero cuando no tengamos ningún caso favorable.
	- Ordenación probabilidades	- Una probabilidad de un suceso es mayor que otra cuando el número de casos favorables de éste sea mayor que el número de casos favorables de otro suceso (siempre que tengamos el mismo n° de casos totales)
Argumentos	- Visualizaciones	- Visualización de los distintos sucesos y su relación

### ***Idoneidad Didáctica***

En este apartado, describimos y valoramos resumidamente los componentes de la idoneidad:

- *Idoneidad epistémica o matemática:* Este recurso podría tener una idoneidad matemática en el aprendizaje de los conceptos de: experimento aleatorio, sucesos, espacio muestral, probabilidad simple, Regla de Laplace, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, espacio total. Como vemos en la Tabla 3.3.13, esta idoneidad podría ser elevada, dependiendo del trabajo que se realice con el recurso. Las soluciones formales tienen mayor idoneidad si se complementan con una solución intuitiva de las situaciones - problemas planteados en el recurso.
- *Idoneidad cognitiva:* La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de educación primaria, pues las diferentes actividades están planteadas para este nivel de enseñanza, basadas en la experimentación y manipulación de materiales didácticos.
- *Idoneidad interaccional:* Este tipo de idoneidad depende de cómo organice el docente el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en pareja o en grupos para que surja el conflicto y se expliciten. Será importante también organizar una puesta en común de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los errores cometidos en la resolución de los problemas planteados por el recurso.
- *Idoneidad mediacional:* No se precisa de muchos recursos, con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos puedan trabajar grupalmente las situaciones-problema planteadas en la unidad. La idoneidad aumentaría si se trabaja con copias impresas de las actividades sugeridas en la unidad didáctica, donde cada alumno o profesor puede explorar el recurso de manera individual o grupal.
- *Idoneidad afectiva:* Pensamos que esta es la más alta de todas, ya que las actividades planteadas, propicia el interés y motivación de los estudiantes, permitiendo un mayor compromiso en su proceso de aprendizaje, ya que la mayoría de las situaciones se les solicita realizar las repeticiones de los experimentos aleatorios o

construir sus propios recursos (por ejemplo, una ruleta o un dado sesgado) para poder realizar un experimento aleatorio y contestar las preguntas planteadas.

### ***Dificultades posibles de los estudiantes***

Los estudiantes pueden presentar una baja comprensión de los conceptos aleatorios, al no diferenciar entre su uso cotidiano o intuitivo y el uso de las definiciones formales. Por otro lado, los estudiantes pueden no entender la diferencia entre la probabilidad clásica utilizando la regla de Laplace y el enfoque frecuencial del cálculo de la probabilidad, ocurriendo el sesgo de equiprobabilidad o creencia de que todos los sucesos aleatorios son equiprobables. Otras dificultades pueden presentarse en el cálculo de probabilidades confundiendo la probabilidad de un suceso y la de su complemento, o confundiendo la probabilidad con los casos posibles o confundiendo la probabilidad simple con la probabilidad de un suceso elemental, o al realizar los cálculos obtienen una probabilidad mayor a la unidad.

### ***Variantes***

En la Figura 3.3.27 presentamos una lección que está compuesta de una serie de diapositivas que abordan el tema de probabilidad, utilizando la Regla de Laplace y muestran ejemplos de experimentos aleatorios, como el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, elegir corazones de colores de una caja. Se presentan cinco ejercicios sobre el cálculo de probabilidades. Posteriormente, se describe y ejemplifica cómo construir un Diagrama de Árbol, a través del lanzamiento de una moneda, elección de platos para la cena (tipo y color), elección del tamaño de una pizza de dos ingredientes. Se plantean cinco ejercicios de opción múltiple sobre diagrama de árbol. Finalmente, se presentan tres enlaces a recursos relacionados con la exploración del concepto de probabilidad, las respuestas a las rondas de preguntas y las referencias bibliográficas utilizadas para confeccionar estas diapositivas.



Figura 3.3.27. Capturas Lección Descubriendo la Probabilidad

En la Figura 3.3.28, encontramos otra lección que propone una actividad para introducir los términos “más probable”, “menos probable”, “imposible”, “seguro”,

como vocabulario de uso común dentro del tema de probabilidad, a través del lanzamiento de diferentes dados construidos según las actividades planteadas, ya sea por los colores de las caras o por su numeración.



Figura 3.3.28. Captura Lección Más o Menos Probable

A continuación, en la Tabla 3.3.14 presentamos éstas y otras lecciones virtuales como apoyo a la enseñanza de los conceptos de azar y probabilidad para la enseñanza primaria.

Tabla 3.3.14. Lecciones Virtuales

Nombre	Dirección
Azar y Probabilidad	<a href="http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/elazarylaprobabilidad/html/MAT45RDE_imprimir_docente.pdf">http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/elazarylaprobabilidad/html/MAT45RDE_imprimir_docente.pdf</a>
Azar y Probabilidad	<a href="http://www.matemath.com/azar/">http://www.matemath.com/azar/</a>
Conceptos	<a href="http://www.ine.es/explica/docs/pasos_conceptos_parte1.pdf">http://www.ine.es/explica/docs/pasos_conceptos_parte1.pdf</a>
Descubriendo la Probabilidad	<a href="http://www.slideshare.net/avlím/descubriendo-la-probabilidad-7957924">http://www.slideshare.net/avlím/descubriendo-la-probabilidad-7957924</a>
El lenguaje del azar	<a href="http://www.matemath.com/azar/p05.html">http://www.matemath.com/azar/p05.html</a>
Enseñando probabilidad básica	<a href="http://www.almightydad.com/education/teaching-basic-probability-with-a-pile-of-mms">http://www.almightydad.com/education/teaching-basic-probability-with-a-pile-of-mms</a>
Ideas que conducen a la probabilidad	<a href="http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/lessons/pm1.html">http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/lessons/pm1.html</a>
Introducción al concepto de Probabilidad	<a href="http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/lessons/pm2.html">http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/lessons/pm2.html</a>
Introduction to Probability	<a href="http://www.analyze-math.com/statistics/introduction_probability.html">http://www.analyze-math.com/statistics/introduction_probability.html</a>
La enseñanza de la probabilidad en educación Primaria	<a href="http://www.slideshare.net/rafikylopez/la-enseanza-de-la-probabilidad-en-educacin-primaria">http://www.slideshare.net/rafikylopez/la-enseanza-de-la-probabilidad-en-educacin-primaria</a>
Ley de Laplace	<a href="http://www.icarito.cl/enciclopedia/articulo/segundo-ciclo-basico/matematica/datos-y-azar/2009/12/101-8587-9-2-probabilidades.shtml">http://www.icarito.cl/enciclopedia/articulo/segundo-ciclo-basico/matematica/datos-y-azar/2009/12/101-8587-9-2-probabilidades.shtml</a>
Más o menos probable	<a href="http://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/2012/06/13/moneda/">http://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/2012/06/13/moneda/</a>
Más o menos probable	<a href="http://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml_get_0fc98716-7a06-11e1-81ed-ed15e3c494af/index.html">http://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml_get_0fc98716-7a06-11e1-81ed-ed15e3c494af/index.html</a>
Mutually exclusive events - examples with solutions	<a href="http://www.analyze-math.com/statistics/mutually-exclusive.html">http://www.analyze-math.com/statistics/mutually-exclusive.html</a>
Probabilidad	<a href="http://oregon.conevyt.org.mx/colaboracion/colabora/objetivos/libros_pdf/sma2_u3lecc22.pdf">http://oregon.conevyt.org.mx/colaboracion/colabora/objetivos/libros_pdf/sma2_u3lecc22.pdf</a>
Probabilidad	<a href="http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/probabilidad/impresos/quincena12.pdf">http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/probabilidad/impresos/quincena12.pdf</a>
Probabilidad	<a href="http://www.vitutor.com/pro/2/probabilidad.html">http://www.vitutor.com/pro/2/probabilidad.html</a>
Probabilidad y Deportes	<a href="http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/lessons/pm7.html">http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/lessons/pm7.html</a>
Probabilidad y Estadística para 5° y 6° primaria	<a href="http://estadistica2013.unizar.es/?q=content/probabilidad-y-estad%C3%ADstica-para-5%C2%BA-y-6%C2%BA-de-primaria">http://estadistica2013.unizar.es/?q=content/probabilidad-y-estad%C3%ADstica-para-5%C2%BA-y-6%C2%BA-de-primaria</a>
Probabilidad y Estadística para 2° primaria	<a href="http://estadistica2013.unizar.es/?q=content/probabilid-y-estad%C3%ADstica-para-2%C2%BA-de-primaria">http://estadistica2013.unizar.es/?q=content/probabilid-y-estad%C3%ADstica-para-2%C2%BA-de-primaria</a>
Probabilidades	<a href="http://primaria.aulafacil.com/matematicas-sexto-primaria/Curso/Lecc-31.htm">http://primaria.aulafacil.com/matematicas-sexto-primaria/Curso/Lecc-31.htm</a>
Probabilidades	<a href="http://www.icarito.cl/enciclopedia/articulo/segundo-ciclo-basico/matematica/datos-y-azar/2009/12/101-8587-9-probabilidades.shtml">http://www.icarito.cl/enciclopedia/articulo/segundo-ciclo-basico/matematica/datos-y-azar/2009/12/101-8587-9-probabilidades.shtml</a>

## B) Libros de Texto Virtuales

En esta sección presentamos una recopilación de libros de texto virtuales que proponen diversas actividades de resolución de problemas.

## Probabilidad y Estadística

Este recurso presenta una serie de actividades y problemas para que los alumnos puedan desarrollar relacionados con el cálculo de probabilidades, como también se sugieren algunas ideas metodológicas como apoyo al docente.

Dirección web: <http://www.e-vocacion.es/files/html/265837/recursos/la/U15/index.html>

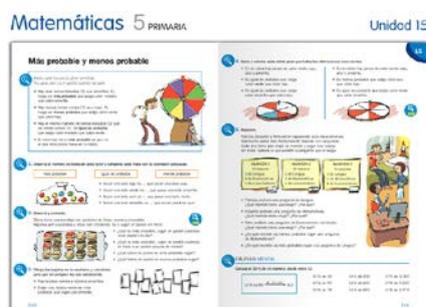


Figura 3.3.29. Captura Libro Virtual: Probabilidad y Estadística

### Descripción

El recurso de la Figura 3.3.29, presenta un libro virtual que propone una serie de actividades para desarrollar con alumnos de 5º de primaria, sobre temas de probabilidad, tales como tipos de sucesos (seguro, posible, imposible), más o menos probable y el cálculo de probabilidades a través de la Regla de Laplace.

Además de las actividades para los alumnos, se incluyen algunas orientaciones metodológicas y algunos recursos complementarios para profundizar en los temas anteriormente mencionados, en el apartado Guía Digital.

### Análisis matemático del recurso

Algunos de los conceptos probabilísticos que utiliza este recurso son:

- Suceso seguro es el suceso que se cumple siempre.
- Suceso posible es el suceso que se cumple algunas veces.
- Suceso imposible es el suceso que no se cumple nunca.
- Más probable suceso que tiene una probabilidad más alta de ocurrir
- Menos probable suceso que tiene una baja probabilidad de ocurrir
- Igual de probables sucesos que tienen la misma probabilidad de ocurrir.
- El cálculo de probabilidades se realiza mediante la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables del suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

### Objetos matemáticos puestos en juego

A continuación incluimos la Tabla de análisis de objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso.

Tabla 3.3.15. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Experimentos aleatorios - Cálculo de probabilidades simples en experimentos aleatorios	- Bolas en una bolsa, ruleta, elección de pasteles, etc. - Experimentación del cambio de probabilidades al cambiar la composición de los sucesos
Lenguajes	- Visual	- Composición espacio muestral ( $A, B$ ) - Cálculo de probabilidades
	- Verbal	- Explicación de la situación
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
	- Matemático	- Tipos de sucesos - Cálculo de probabilidades
	- $A, B$	- Sucesos
	- $P(A), P(B), \dots$	- Probabilidad de los sucesos
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Experimento de extracción de bolas de una bolsa, Ruleta, elección de pasteles, etc.
	- Sucesos	- Bolas de colores, colores de los sectores de la ruleta, pasteles cuadrados o redondos, etc.
	- Espacio muestral	- Conjunto de posibilidades del experimento
	- Suceso seguro	- Es el suceso que se cumple siempre.
	- Suceso posible	- Es el suceso que se cumple algunas veces
	- Suceso imposible	- Es el suceso que no se cumple nunca
	- Más probable	- Suceso que tiene una probabilidad más alta de ocurrir
	- Menos probable	- Suceso que tiene una baja probabilidad de ocurrir
	- Igual de probables	- Sucesos que tienen la misma probabilidad de ocurrir
	- Probabilidad simple	- Medida relativa del área de cada parte respecto al total
	- Casos favorables	- Número de elementos señalados en el enunciado del problema que corresponden a un determinado suceso
	- Casos posibles	- Número total de elementos presentes en el enunciado del problema
Procedimientos	- Espacio total	- Suceso formado por todos los elementos del problema
	- Regla de Laplace	- Cociente entre casos favorables y casos posibles
	- Cálculo de probabilidades	- Se aplicaría la fórmula de Laplace
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples; visualmente las puede comparar el alumno
	- Representación gráfica	- Disposición de los elementos de cada experimento aleatorio
Propiedades	- Ordenación	- Ordenamos de mayor a menor para calcular cual es la probabilidad mayor
	- La probabilidad es un valor entre 0 y 1	- El número de casos favorables es menor o igual que el número de casos posibles, será cero cuando no tengamos ningún caso favorable.
Argumentos	- Ordenación probabilidades	- Una probabilidad de un suceso es mayor que otra cuando el número de casos favorables de éste sea mayor que el número de casos favorables de otro suceso (siempre que tengamos el mismo n° de casos totales)
	- Visualizaciones	- Visualización de las distintos sucesos y su relación

### ***Idoneidad Didáctica***

En este apartado, describimos y valoramos resumidamente los componentes de la idoneidad:

- *Idoneidad epistémica o matemática:* Este recurso podría tener una idoneidad matemática en el aprendizaje de los conceptos de: experimento aleatorio, más o menos probable, suceso seguro, posible e imposible, espacio muestral, Regla de Laplace. Como vemos en la Tabla 3.3.15 esta idoneidad podría ser elevada, dependiendo del trabajo que se realice con el recurso. Las soluciones formales tienen mayor idoneidad si se complementan con una solución intuitiva de las situaciones - problemas planteados en el recurso.
- *Idoneidad cognitiva:* La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de educación primaria, pues el lenguaje verbal del recurso, utiliza términos de fácil comprensión y se complementa con una serie de representaciones pictóricas que guían al estudiante durante la exploración del recurso. Asimismo, los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos, ya que cada actividad propuesta presenta instrucciones claras.
- *Idoneidad interaccional:* Este tipo de idoneidad depende de cómo organice el docente el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en pareja o en grupos para que surja el conflicto y se explicita. Será importante también organizar una puesta en común de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los errores cometidos en la resolución de los problemas planteados en el recurso.
- *Idoneidad mediacional:* No se precisa de muchos recursos, con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos puedan acceder a las actividades propuestas en este libro virtual. La idoneidad aumentaría si se trabaja en el aula de informática donde cada alumno o profesor puede explorar el recurso de manera individual o grupal.
- *Idoneidad afectiva:* Pensamos que esta es la más alta de todas, ya que este recurso propicia el interés y motivación de los estudiantes, planteando una serie de problemas desafiantes.

### ***Dificultades posibles de los estudiantes***

Una de las dificultades se presenta en algunos de los problemas planteados, en donde los estudiantes deben identificar y representar distintos enunciados que involucran los conceptos de seguro, posible e imposible, para ello deben colorear algunos elementos para representar la situación planteada verbalmente, lo que puede ocasionar una baja comprensión de los conceptos aleatorios, al no diferenciar entre el uso de las definiciones formales y su uso cotidiano o intuitivo, lo mismo ocurre en el caso de identificar sucesos más o menos probables.

Por otro lado, los estudiantes pueden presentar dificultades en el cálculo de probabilidades, confundiendo la probabilidad con los casos posibles, o confundiendo la probabilidad simple con la probabilidad de un suceso elemental, o al realizar los

cálculos pueden obtener una probabilidad mayor a la unidad. Otra dificultad se presenta en uno de los problemas, en que a partir de un enunciado con la descripción de un experimento aleatorio de extracción de bolas de una bolsa, el alumno debe representar pictóricamente dicha situación, lo que dependiendo de la interpretación subjetiva que realice el alumno, puede llegar a dos representaciones distintas del enunciado.

### Variantes

En la Figura 3.3.30 se presentan capturas del libro virtual que explora algunos conceptos relacionados con el azar y la probabilidad en la vida cotidiana, como también propone una serie de ejercicios sobre cada tema expuesto. Presenta la definición de fenómenos aleatorios y sucesos, tipos de sucesos (seguro, posible, probable, imposible). Ejemplifica el cálculo de probabilidades, a través de un experimento de extracción de bolas de colores de una bolsa, introduciendo así la regla de Laplace.

6º de E. Primaria  
MATEMÁTICAS-TEMA 13

**AZAR, PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**  
**EXPERIENCIAS DE AZAR**

Hay situaciones en la vida diaria en las que no podemos saber qué resultado va a salir, pero si sabemos los posibles resultados, son situaciones que dependen del azar. Al lanzar una moneda al aire no sabemos si saldrá cara o cruz, pero si conocemos los posibles resultados. Cuando lanzamos un dado no sabemos el número que saldrá, pero sabemos que hay seis posibles resultados. El resultado en el lanzamiento de una moneda o en el lanzamiento de un dado depende del azar. El lanzamiento de una moneda o de un dado es un fenómeno aleatorio.

Que el próximo niño que nazca en una clínica sea niño o niña es un fenómeno aleatorio, pero la hora de la salida del sol o las estaciones por las que pasará el metro en una línea del metro no son fenómenos aleatorios porque conocemos de antemano lo que va a suceder.

**DIAGRAMA DE ÁRBOL**

1.ª moneda: cara, cruz  
2.ª moneda: cara, cruz  
Resultado: (cara, cara), (cara, cruz), (cruz, cara), (cruz, cruz)

Juego	Sucesos posibles	Nº de sucesos posibles
Lanzar una moneda al aire	Cara, cruz	2
Tirar un dado	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
Lanzar dos monedas al aire	(cara,cara), (cara-cruz), (cruz,cara), (cruz,cruz)	4

Figura 3.3.30. Capturas de Azar, Probabilidad y Estadística

En la Figura 3.3.31 se muestran las capturas de algunas de las actividades que presenta el libro de texto virtual, en la que se exploran los conceptos de seguro, probable, imposible, improbable, como también se plantean una serie de situaciones problemas en las cuales los alumnos deben recurrir a los dibujos y datos del enunciado para dar respuesta a las preguntas propuestas. Este recurso también contiene una página de sugerencias metodológicas para los docentes.

**Paquete de Actividades de Maggie**

Nombre \_\_\_\_\_  
Fecha \_\_\_\_\_

**¿Cuáles Son las Probabilidades?**

¡Dos Palabras de Matemáticas!  
Es Invierno. Maggie mira por la ventana. Ella ve nubes. "Pienso que la nieve es probable."  
¿Estará Maggie en Florida? \_\_\_\_\_  
Ahora es verano. Decimos que la nieve es imposible.

**¿Cuáles Son Las Probabilidades?**  
Vas a jugar un juego. Tu aguja giratoria se ve así:

¿Cuáles son las probabilidades de que saques un 8?  
Podrías decir que una en cuatro posibilidades.  
Contesta las preguntas de abajo sobre un juego que se juega con esta aguja giratoria.  
Usa números.

A. ¿Cuáles son las probabilidades de sacar un 7? \_\_\_\_\_  
B. ¿Cuáles son las probabilidades de sacar un 2? \_\_\_\_\_  
C. ¿Cuáles son las probabilidades de sacar un 4? \_\_\_\_\_  
D. ¿Cuáles son las probabilidades de sacar un número impar? \_\_\_\_\_  
E. ¿Cuáles son las probabilidades de sacar un número menor que 10? \_\_\_\_\_

Figura 3.3.31. ¿Cuáles son las Probabilidades?

En la Tabla 3.3.16 se incluyen éstos y otros libros de texto virtuales.

Tabla 3.3.16. Libros de Texto Virtuales

Nombre	Dirección
Azar, Probabilidad y Estadística (páginas 1 – 2)	<a href="http://www.clarionweb.es/6_curso/maticas/tema13.pdf">http://www.clarionweb.es/6_curso/maticas/tema13.pdf</a>
Azar y Probabilidad	<a href="http://www.colegioromareda.org/primaria/3ciclo/Matem%C3%A1ticas6/Azar%20y%20probabilidad%206.pdf">http://www.colegioromareda.org/primaria/3ciclo/Matem%C3%A1ticas6/Azar%20y%20probabilidad%206.pdf</a>
¿Cuáles son las probabilidades?	<a href="http://www.missmaggie.org/paquetesemanal/week242pg.pdf">http://www.missmaggie.org/paquetesemanal/week242pg.pdf</a>
Probabilidad	<a href="http://amolasmates.es/pdf/ejercicios/3_ESO/Ejercicios%20de%20Probabilidad.pdf">http://amolasmates.es/pdf/ejercicios/3_ESO/Ejercicios%20de%20Probabilidad.pdf</a>
Probabilidad (páginas 4 - 5)	<a href="http://enprimaria.files.wordpress.com/2010/05/estadistica-y-probabilidad-primaria.pdf">http://enprimaria.files.wordpress.com/2010/05/estadistica-y-probabilidad-primaria.pdf</a>
Probabilidad de Eventos Simples (páginas 1 - 2)	<a href="http://www.glencoe.com/sec/math/msmath/mac04/course3/study_guide/pdfs/mac3_pssg08_sp.pdf">http://www.glencoe.com/sec/math/msmath/mac04/course3/study_guide/pdfs/mac3_pssg08_sp.pdf</a>
Problemas (Preguntas 10-14)	<a href="https://docs.google.com/file/d/0ByNdud67CAybbWtvTIU0RUZWOGc/edit?pli=1">https://docs.google.com/file/d/0ByNdud67CAybbWtvTIU0RUZWOGc/edit?pli=1</a>
¿Qué es la probabilidad?	<a href="http://www.missmaggie.org/paquetesemanal/week265ig.pdf">http://www.missmaggie.org/paquetesemanal/week265ig.pdf</a>
Regla de Laplace	<a href="http://www.librosvivos.net/smtc/files/p1010.pdf">http://www.librosvivos.net/smtc/files/p1010.pdf</a>
Taller de Estadística y Probabilidad	<a href="http://www.publicatuslibros.com/fileadmin/Biblioteca/Libros/Tecnicos/Rau__Nunez_Cabello_-_TALLER_DE_ESTADISTICA_Y_PROBABILIDAD.pdf">http://www.publicatuslibros.com/fileadmin/Biblioteca/Libros/Tecnicos/Rau__Nunez_Cabello_-_TALLER_DE_ESTADISTICA_Y_PROBABILIDAD.pdf</a>

### 3.3.5 VIDEO TUTORIALES

En esta categoría se analizarán y clasificarán una serie de videos que muestran una introducción al concepto de probabilidad y que son útiles como apoyo a la enseñanza de este concepto en la educación primaria.

En la Figura 3.3.32 se muestra una captura del video “Cómo se resuelve un problema de probabilidad”, que a partir de una situación cotidiana introduce el concepto de probabilidad y muestra su aplicación a la resolución de problemas.

Se analizarán los primeros 03:21 minutos, ya que corresponden al concepto de probabilidad simple.

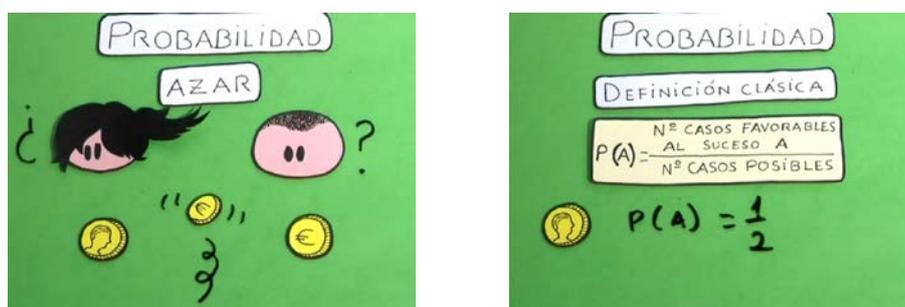


Figura 3.3.32. Capturas Video Cómo se resuelve un problema de probabilidad

Dirección web: <http://educacion.practicopedia.lainformacion.com/maticas/como-se-resuelve-un-problema-de-probabilidad-10823>

#### Descripción

El video plantea una situación cotidiana, en donde dos hermanos, María y Jesús dejan su suerte al azar, al intentar decidir quién lavará los platos de la comida, lanzando una moneda al aire. A partir de este ejemplo, se introduce la definición clásica de probabilidad, utilizando Regla de Laplace. El vídeo muestra un ejemplo considerando el

suceso: sacar cara al lanzar una moneda. Se complementa la definición, dando algunas propiedades de la probabilidad. El video explica que existen distintos problemas de probabilidad y que éstos dependen de las condiciones del experimento aleatorio o de las características del suceso, para ello se ejemplifica con el experimento extracción de bolas negras y rojas de una bolsa, con o sin reposición. Finalmente, se plantea un problema de sucesos, realizando el experimento aleatorio: lanzamiento de un dado, el cual se explica paso a paso, empezando con anotar los datos que nos entrega el enunciado del problema, identificando el espacio muestral y los sucesos “salir par” y “salir primo”, los que se escriben por extensión, utilizando notación conjuntista, como también su representación gráfica mediante Diagrama de Venn. Posteriormente, se calcula el suceso “Salir Par o Primo” y el suceso “salir Par y Primo”, para ambos sucesos, se escriben sus elementos por extensión y se muestra su representación gráfica en Diagrama de Venn.

### ***Análisis matemático del recurso***

El video presenta una introducción al concepto de probabilidad utilizando la definición clásica, mediante la Regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ de casos favorables al suceso } A}{N^{\circ} \text{ de casos posibles}}$$

Se complementa esta definición con la siguiente afirmación: la probabilidad de un suceso, es una ley que asocia a cada suceso  $A$  del espacio de sucesos, un número real llamado probabilidad de  $A$ , denotada por  $P(A)$ , y algunas propiedades como: la probabilidad de un suceso es positiva o nula  $P(A) \geq 0$ ; la probabilidad de un suceso cierto, que es aquel que siempre se realiza es igual a la unidad  $P(A) = 1$ ; la probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles, aquellos que nunca pueden producirse simultáneamente es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

El recurso, muestra algunos ejemplos de experimentos aleatorios y el cálculo de sus respectivas probabilidades, tales como:

- Lanzar una moneda al aire y calcular la probabilidad de sacar cara en un lanzamiento, introduce la notación y calcula la probabilidad pedida:  $P(A) = \frac{1}{2}$ .

- Sacar bolas de color rojo o negro de una bolsa, en este ejemplo aclara la diferencia entre realizar un experimento con o sin reposición de los elementos.
- En el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado, se solicita determinar el suceso  $C$ : salir par o primo y el suceso  $D$ : salir par y primo. Se determina el espacio muestral  $E$ , que es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Se describen cada uno de los sucesos que nos aporta el enunciado del problema, suceso  $A$ : salir par,  $A = \{2, 4, 6\}$ ; suceso  $B$ : salir primo,  $B = \{2, 3, 5\}$ ; suceso  $C$ : salir par o primo, que está formado por la unión de los sucesos  $A$  y  $B$ ,  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . Suceso  $D$ : salir par y primo, que está determinado por la intersección de los sucesos  $A$  y  $B$ ,  $A \cap B = \{2\}$ . En este ejemplo, también se utilizan diagramas de Venn para representar el espacio muestral y cada uno de los sucesos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .

### **Objetos matemáticos puestos en juego**

A continuación incluimos la tabla de análisis de objetos matemáticos y significados implícitos en el recurso.

Tabla 3.3.17. Objetos matemáticos implícitos en el recurso

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación
Situaciones-problemas	- Cálculo de probabilidades simples en un experimento aleatorio	- Experimentación del cambio de probabilidades al cambiar la composición de los sucesos
Lenguajes	- Visual	- Composición espacio muestral ( $A, B, \dots$ ) - Lanzamiento de una moneda - Extracción de las bolas de una bolsa - Lanzamiento de un dado - Cálculo de probabilidades
	- Verbal	- Explicación de la situación
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados
	- Matemático	- Cálculo de probabilidades
	- $A, B, \dots$ - $P(A), P(B), \dots$	- Sucesos - Probabilidad de los sucesos
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Lanzamiento de una moneda - Experimento de extracción de bolas de una bolsa - Lanzamiento de un dado
	- Sucesos	- Cara o Cruz - Bolas rojas y bolas negras - Caras de un dado
	- Espacio muestral	- Conjunto de posibilidades del experimento
	- Probabilidad simple	- Medida relativa del área de cada parte respecto al total
	- Muestreo sin reposición	- Los elementos extraídos no se vuelven a colocar en la bolsa
	- Muestreo con reposición	- Los elementos extraídos se vuelven a colocar en la bolsa
	- Casos favorables	- Depende del experimento realizado
	- Casos posibles	- Depende del experimento realizado
- Espacio total	- Suceso formado por todos los resultados del experimento	
Procedimientos	- Lanzamiento	- Se lanza una moneda al aire
	- Extracción	- Se elige una bola de la bolsa
	- No reposición	- Después de elegir una bola no se devuelve a la bolsa

	- Reposición	- Después de elegir una bola se devuelve a la bolsa
	- Regla de Laplace	- Cociente entre casos favorables y casos posibles
	- Cálculo de probabilidades	- Se aplicaría la fórmula de Laplace
	- Comparación de probabilidades	- Representación de las distintas probabilidades simples; visualmente las puede comparar el alumno
	- Representación gráfica	- Lados de una Moneda - Disposición del nº de bolas - Caras de un dado
	- Ordenación	- Ordenamos de mayor a menor para calcular cual es la probabilidad mayor
Propiedades	- La probabilidad es un valor entre 0 y 1	- El número de casos favorables es menor o igual que el número de casos posibles, será cero cuando no tengamos ningún caso favorable.
	- Ordenación probabilidades	- Una probabilidad de un suceso es mayor que otra cuando el número de casos favorables de éste sea mayor que el número de casos favorables de otro suceso (siempre que tengamos el mismo nº de casos totales)
Argumentos	- Visualizaciones	- Visualización de los distintos sucesos y su relación

### ***Idoneidad Didáctica***

En este apartado, describimos y valoramos resumidamente los componentes de la idoneidad:

- *Idoneidad epistémica o matemática:* Este recurso podría tener una idoneidad matemática en el aprendizaje de los conceptos de: experimento aleatorio, sucesos, espacio muestral, espacio total, muestreo sin reposición, muestreo con reposición, regla de Laplace. Como vemos en la Tabla 3.3.17, esta idoneidad podría ser elevada, dependiendo del trabajo que se realice con el recurso.
- *Idoneidad cognitiva:* La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de educación primaria, pues el lenguaje verbal utiliza términos de fácil comprensión y se complementa con una serie de representaciones pictóricas que ejemplifican las situaciones analizadas. Asimismo, los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos, ya que cada ejemplo o problema propuesto se explica detalladamente.
- *Idoneidad interaccional:* Este tipo de idoneidad depende de cómo organice el docente el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en pareja o en grupos para que surja el conflicto y se explicita. Será importante también organizar una puesta en común de los conceptos tratados para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los errores de interpretación de los conceptos planteados por el recurso.
- *Idoneidad mediacional:* No se precisa de muchos recursos, con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden observar colectivamente el video y analizar los temas expuestos. La idoneidad aumentaría si se trabaja en el aula de informática donde cada alumno o profesor puede explorar el recurso de manera individual o grupal.
- *Idoneidad afectiva:* Pensamos que esta es la más alta de todas, ya que este video propicia el interés y motivación de los estudiantes, permitiendo un mayor compromiso en su proceso de aprendizaje.

### ***Dificultades posibles de los estudiantes***

Una de las dificultades que pueden presentar los alumnos es la interpretación de la representación gráfica por diagramas de Venn, ya que no están familiarizados a trabajar con ese tipo de notación. Otra dificultad se evidencia en el traspaso de la representación gráfica a la notación por extensión de los elementos que conforman cada suceso. El ejemplo mostrado en el recurso puede producir una interpretación errónea de la conjunción “y”.

### ***Variantes***

En la Figura 3.3.33 se muestra la captura de un video que a través de ejemplos del lanzamiento de un dado introduce la idea de probabilidad. Se plantea la pregunta ¿qué es probabilidad? Para dar una respuesta, se analiza el lanzamiento dado, calculando la probabilidad de obtener un seis. Posteriormente, se complementa esta idea realizando el cálculo de la probabilidad de obtener dos seis al tirar un par de dados, lo cual se explica a través de una Tabla que muestra todos los resultados posibles mostrando las caras de ambos dados.



Figura 3.3.33. Captura del video: Probabilidad Básica

El video “Estadística y Probabilidad”, que se presenta en la Figura 3.3.34, muestra una introducción a los conceptos de azar y probabilidad, se desarrollan principalmente los temas de Azar y Probabilidad a partir de ejemplos de situaciones de la vida cotidiana y apoyos teóricos entregados por expertos en la materia para las definiciones de Azar, Experimento Aleatorio, Historia de la Probabilidad. Se muestran una serie de ejemplos del cálculo de probabilidades con diversos experimentos aleatorios: lanzamiento de una moneda, lanzamiento de un dado, extracción de caramelos de una bolsa, la ruleta. Finalmente, se abordan los juegos de azar y el concepto de equiprobabilidad. Los expertos dan ejemplos del cálculo de probabilidades en distintas situaciones de la vida cotidiana.



Figura 3.3.34. Capturas del video: Estadística y Probabilidad

En la Tabla 3.3.18 se registran los enlaces a estos videos como a otros que complementan la introducción al tema de probabilidad.

Tabla 3.3.18. Videos tutoriales de Probabilidad

Nombre	Dirección
Anticipación de los resultados de una experiencia aleatoria	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=ziNg-7p0tWA">http://www.youtube.com/watch?v=ziNg-7p0tWA</a>
Conceptos Probabilidad	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=ka53XNic-ew">http://www.youtube.com/watch?v=ka53XNic-ew</a>
El Azar en las Matemáticas	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=PmjKP4Y7Nv0">http://www.youtube.com/watch?v=PmjKP4Y7Nv0</a>
Escala de Probabilidad	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=SZeBNolP9gs">http://www.youtube.com/watch?v=SZeBNolP9gs</a>
Espacio Muestral	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=Bt711CMenr8">http://www.youtube.com/watch?v=Bt711CMenr8</a>
Estadística y Probabilidad	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=4AnRMRFsk3g&amp;feature=player_embedded">http://www.youtube.com/watch?v=4AnRMRFsk3g&amp;feature=player_embedded</a>
Eventos Mutuamente Excluyentes	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=sd133RIDLBA">http://www.youtube.com/watch?v=sd133RIDLBA</a>
Eventos Probables y Poco Probables	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=SXil8mgw9fc">http://www.youtube.com/watch?v=SXil8mgw9fc</a>
Identificación de Eventos Complementarios	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=Sc7Iucx6rgc">http://www.youtube.com/watch?v=Sc7Iucx6rgc</a>
Nociones de Probabilidad	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=YFEnLoMIsH8">http://www.youtube.com/watch?v=YFEnLoMIsH8</a>
Probabilidad (Parte 1)	<a href="http://www.youtube.com/watch?NR=1&amp;v=aP2s0uD1JmY&amp;feature=endscreen">http://www.youtube.com/watch?NR=1&amp;v=aP2s0uD1JmY&amp;feature=endscreen</a>
Probabilidad	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=Gwjbadd3W9Q">http://www.youtube.com/watch?v=Gwjbadd3W9Q</a>
Probabilidad 1000 bolas de colores	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=9sDItOnHIBk">http://www.youtube.com/watch?v=9sDItOnHIBk</a>
Probabilidad Básica	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=3X7t-Q_xejM">http://www.youtube.com/watch?v=3X7t-Q_xejM</a>
Probabilidad Clásica	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=kJh9z-RdAm4">http://www.youtube.com/watch?v=kJh9z-RdAm4</a>
Probabilidad de un evento	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=XRgvpBIA92U">http://www.youtube.com/watch?v=XRgvpBIA92U</a>
Probabilidad de un evento simple	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=7xZ_kkMiqGU">http://www.youtube.com/watch?v=7xZ_kkMiqGU</a>
Probabilidades Ejercicios	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=eXvP8aKzXDA&amp;feature=player_embedded">http://www.youtube.com/watch?v=eXvP8aKzXDA&amp;feature=player_embedded</a>
¿Qué es más Probable?	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=kNUvZGyQOAY">http://www.youtube.com/watch?v=kNUvZGyQOAY</a>
Relación entre probabilidad clásica y frecuencial	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=e5LghdtWg1U">http://www.youtube.com/watch?v=e5LghdtWg1U</a>
Seguro - Imposible	<a href="http://www.youtube.com/watch?v=5TNxdd2yAvM">http://www.youtube.com/watch?v=5TNxdd2yAvM</a>

## **CAPÍTULO 4**

### **CONCLUSIONES**

#### **4.1. INTRODUCCIÓN**

En este último capítulo, resumimos las conclusiones a las que hemos llegado a partir del trabajo realizado, haciendo hincapié en el cumplimiento de los objetivos previstos. De la misma forma, comentamos algunas limitaciones encontradas y las posibles líneas de investigación para proseguir este trabajo.

#### **4.2. CONCLUSIONES RESPECTO DE LOS OBJETIVOS**

En primer lugar comentamos las conclusiones respecto a los objetivos presentados en el Capítulo 1 y que reproducimos aquí para facilitar la lectura.

*Objetivo 1. Buscar y seleccionar materiales didácticos disponibles en Internet, pensados para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Deben ser asequibles a alumnos y profesores y complementar las directrices curriculares establecidas en los currículos y orientaciones curriculares.*

El objetivo de encontrar recursos en Internet que pudiesen contribuir a la comprensión de la probabilidad en la educación primaria se ha trabajado de cumplir mediante una minuciosa tarea de búsqueda, clasificación, agrupación y análisis de los distintos recursos que se presenta en el Capítulo 3. Como resultado, hemos elaborado un índice bastante amplio de recursos que proporcionan ayudas de aprendizaje, proponen diferentes enfoques para abordar el término probabilidad, plantean problemas relacionados con aspectos de la vida cotidiana, permiten la simulación y experimentación y proporcionan al estudiante un aspecto visual del que carecen los libros de texto. Los recursos seleccionados abordan los contenidos establecidos en las directrices curriculares que hemos descrito en el Capítulo 1. Creemos que la incorporación de estos recursos en el proceso de enseñanza y aprendizaje debidamente planificado y dirigido ayudará al estudiante a comprender las propiedades y aplicaciones de la probabilidad.

*Objetivo 2. Clasificar los materiales encontrados en categorías: juegos, exploración de conceptos, problemas, lecciones o libros de texto virtuales, videos tutoriales y preparar listados de estos recursos, con las direcciones donde están disponibles, para hacerlos más accesibles a los profesores.*

Para lograr este objetivo, una vez encontradas las distintas direcciones de Internet de cada recurso, se confeccionó un índice en una tabla que incluye título y dirección web, ordenado alfabéticamente, en cada una de las categorías anteriormente mencionadas.

De las categorías elaboradas por Contreras (2009, 2011), decidimos incorporar una nueva categoría, la de *videos tutoriales*, debido a la proliferación de estos recursos en los últimos años, ya que son una herramienta útil para introducir el tema de probabilidad, como también sirven de síntesis de los temas relacionados con el estudio de la probabilidad.

Las categorías *lecciones o libros de texto virtuales* y *videos tutoriales* presentan una mayor cantidad de recursos encontrados.

*Objetivo 3. Analizar los recursos y los objetos matemáticos puestos en juego en un ejemplo típico en cada una de las categorías identificadas en el objetivo anterior, para determinar si estos objetos se corresponden con los del currículo, lo amplían o hay objetos en el currículo que no se tienen en cuenta en estos recursos.*

Una vez realizada la búsqueda de los materiales didácticos, se procedió a seleccionar tres recursos más significativos para cada una de las categorías, de los cuales, se designó uno de ellos como ejemplo típico de la categoría y se le realizó un detallado análisis epistémico de los objetos matemáticos involucrados en dicho recurso, dicho análisis se presenta en el Capítulo 3 de este estudio. Los otros dos recursos que difieren en complejidad con el ejemplo principal, se analizaron de forma general, resumiendo sus principales características y funcionamiento.

La mayoría de los recursos seleccionados están estrechamente relacionados con los contenidos del currículo de primaria.

Algunos recursos encontrados, señalaban estar diseñados para un nivel de secundaria, pero actualmente, los contenidos desarrollados en ellos pertenecen al currículo de primaria.

*Objetivo 4. Valorar la idoneidad didáctica de los mismos y las posibles dificultades a priori que se pueden dar en su utilización para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria.*

Para lograr este objetivo, después de elaborar el análisis epistémico de cada ejemplo típico de las categorías de clasificación, en el Capítulo 3 hemos descrito cada uno de los componentes de la idoneidad didáctica que presenta cada recurso analizado. Consideramos que todos los recursos analizados presentan una alta Idoneidad Afectiva, ya que el uso de este tipo de materiales favorece la motivación de los estudiantes por el tema, pues los conceptos se presentan de una forma más atractiva y permite al alumno adoptar un rol más activo en su proceso de aprendizaje.

Las dificultades encontradas también las describimos en el Capítulo 3 de este estudio, presentando los posibles conflictos semióticos de los estudiantes en el uso del recurso. Principalmente, tienen relación con la interpretación del lenguaje del Applet, pues en algunos casos, no aparecen todas las instrucciones claramente especificadas, es en este punto es donde el rol docente adquiere importancia como mediador y guía del proceso de aprendizaje de los estudiantes.

### **4.3. LIMITACIONES DEL ESTUDIO**

Como los sitios web se modifican y actualizan constantemente, debemos ser conscientes que algunas de las direcciones que componen los listados de recursos pueden cambiar con el paso del tiempo.

La dirección web de algunos recursos solo lleva al menú principal de la página, por lo que se debe buscar en los índices respectivos el nombre del recurso para poder acceder a él.

Sería interesante para futuros estudios poder valorar la idoneidad ecológica, que se refiere al grado en que un plan de acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno que se utiliza (Godino, 2011), al crear alguna unidad didáctica con la utilización de algunos de los recursos encontrados y aplicarla en un aula de primaria.

#### **4.4. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES**

Para realizar futuras investigaciones y continuar el análisis de los recursos didácticos en Internet relacionados con la probabilidad, se puede considerar el desafío de diseñar unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria que incorpore estos recursos. Igualmente sería necesario aplicar y evaluar estas unidades didácticas, en cursos con alumnos de este nivel educativo, pretendiendo valorar si se presenta alguna mejora en la adquisición de los conceptos probabilísticos, o si estos recursos pueden servir como una estrategia para fomentar el aprendizaje autónomo por parte del estudiante y estimular su interés por los temas de Probabilidad.

En la enseñanza universitaria, por ejemplo, se podría realizar estudios de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad utilizando recursos de Internet con profesores en formación, que se centrarían en la evaluación de los conocimientos matemáticos o didácticos de dichos profesores, para lo cual sería necesario elaborar instrumentos adecuados de evaluación y analizar los resultados en distintas muestras de estudiantes.

Por otro lado, se podría solicitar a los profesores en formación, diseñar unidades didáctica utilizando alguno de los recursos de Internet de los listados encontrados (y que no han sido analizados en este trabajo), que les permitan profundizar en el análisis de los objetos matemáticos involucrados en el recurso, observar los posibles conflictos semióticos y valorar la idoneidad didáctica de los mismos.

Además, las ideas planteadas anteriormente, podrían aplicarse en cursos de formación continua para profesores de educación primaria en ejercicio.

## REFERENCIAS

- Alvarado, H. y Retamal, L. (2009). Diseño de unidades didácticas de la distribución muestral incorporando recursos tecnológicos. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander*.
- Arnaldos, F. y Faura, U. (2011). Cómo mejorar la comprensión de los fundamentos de la probabilidad a través de las TICs. *III Jornadas de Docencia en Economía (Cartagena, junio2011)*.
- Arnaldos, F. y Faura, U. (2012). Aprendizaje de los fundamentos de la probabilidad apoyado en las TICs. *@tic. revista d'innovació educativa*, 9, 131-139.
- Aspinwall, L. y Tarr, J. E. (2001). Middle school students' understanding of the role sample size plays in experimental probability. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 1-17.
- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.
- Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.
- Barragués, J. y Guisasola, J. (2007). Simulación por ordenador de experimentos aleatorios en la enseñanza de la probabilidad. *SIGMA*, 31, 207-223.
- Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Educación y Pedagogía*, 35, 37-64.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2009). Estadística en la educación primaria. Retos para la formación de profesores. En M Guzmán (Coord.), *Arte, humanidades y educación. Libro homenaje a Carmen Medialdea* (pp. 49-62). Universidad de Granada.
- Batanero, C., Cañizares, M. J. y Godino, J. (2005). Simulation as a tool to train preservice school teachers. *Proceedings of the First African Regional Conference of ICMI*. Ciudad del Cabo: ICMI. CD ROM.
- Batanero, C., Fernández, J. A. y Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *SUMA*, 62, 11-18.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12. On line: [www.amstat.org/publications/jse/](http://www.amstat.org/publications/jse/).

- Begg, A. y Edwards, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. *Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne, Australia: AARE.
- Ben-Zvi, C. (2000). Towards understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1y 2), 127-155.
- Biehler, R. (1997). Software for learning and for doing statistics». *International Statistical Review*, 65(2), 167-190.
- Biehler, R. (2003). Interrelated learning and working environments for supporting the use of computer tools in introductory courses. En L. Weldon y J. Engel (Eds.), *Proceedings of IASE Conference on Teaching Statistics and the Internet*. Berlin: IASE. CD-ROM.
- Brown, C. y Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York, NY: Macmillan.
- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada
- Cardeñoso, J. M., Azcárate, P. y Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal*, 4(2), 59-81.
- Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics. *Technology Innovations in Statistics Education Journal* 1(1). Working Draft.
- Chaput, B., Girard, J. C. y Henry, M. (2008). Modeling and simulations in statistics education. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, y A. Rossman (2008).
- Chick, H. L. y Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, y A. Rossman (2008).
- Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía*.
- Contreras, J. M. (2009). *Recursos en Internet para la enseñanza de la probabilidad condicionada*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Contreras, J. M., Díaz, C., Arteaga, P., Gonzato, M., Cañadas, G. (2011). Probabilidad condicional: Exploración y visualización mediante recursos en Internet. *Epsilon*, 28(3), 79, 91-100.
- Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools*, 17(1/2), 173-182.
- Eichler, A. (2008). Germany, teachers' classroom practice and students' learning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008).
- Estrada, A. y Batanero, C. (2008). *Explaining teachers' attitudes towards statistics*. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008)
- Estrada, A. y Díaz, A. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO*, 44, 48-58.
- Even, R. y Ball, D. (2008) (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer.
- Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*. México: Limusa.
- Franklin, C., Kader, G., Newborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) Report: a pre-k–12 curriculum framework.
- Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.
- Garfield, J. B. y Burrill, G. (Eds.) (1997). *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*. Voorburg: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22 (2 y 3), 237-284.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Online: [www.ugr.es/local/jgodino](http://www.ugr.es/local/jgodino).

- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 38, 25-48.
- Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), 1-26.
- Haller, S. K. (1997). *Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers*. Tesis Doctoral. University of Minnesota.
- Herrera, M. I. y Rodríguez, M. I. (2011). Educación estadística: desarrollo del pensamiento y razonamiento estadístico. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.
- Jaworski, B. y Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: Integrating theory and practice, and the roles of practising teachers. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 795-828). Dordrech: Kluwer.
- Kolmogorov, A.N. (1956). Foundations of the theory of probability. Chelsea Publishing Company.
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Jugéments probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357-368.

- Lee, H. S., Angotti, R. L., y Tarr, J. E. (2010). Making connections between observed data and expected outcomes: Students' informal hypothesis testing with probability simulation tools. *Statistics Education Research Journal*, 9(1), 69-96.
- Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds) *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 429 – 459). Rotherdam / Taipei: Sense Publishers.
- Loeve, M. (1976 ). *Teoría de la probabilidad* Madrid: Editorial Tecnos.
- López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM] Salvador (Bahía) Brasil: International Statistical Institute.
- Maxara, C. y Biehler, R. (2006). Students' probabilistic simulation and modeling competence after a computer-intensive elementary course in statistics and probability. En A. Rossman, y B. Chance (Edts.) ICOTS-7 Conference Proceedings. IASE, Salvador (CD-Rom).
- MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*.
- Mills, J. D. (2004). Learning abstract statistics concepts using simulation. *Educational Research Quarterly*, 28(4). 18-33.
- Mills, J. D. (2002). Using computer simulation methods to teach statistics: a review of the literature. *Journal of Statistics Education*, 10, (1).
- Ministerio de Educación. (2009). Ley General de Educación. Ley N° 20.370. Santiago, Chile.
- Ministerio de Educación. (2012). Bases Curriculares: Matemática, Educación Básica. Santiago, Chile.
- Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA; NTCM.
- Osorio, M. A, Suárez, A. y Uribe, C. (2013). Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la Probabilidad. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 38, 127-142.
- Ortiz, J. J., Nordin, M., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En Bolea, P., González, M. J. y

- Moreno, N. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.
- Pérez, R., Maya, N., Inzunza, S., Escobar, A., Rosete M. y Romero, M. (2012). Applets interactivos para el aprendizaje de estadística. *Universo de la Tecnología, Universidad Tecnológica de Nayarit*, 13, 14-17.
- Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*.
- Phillipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. En F. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing y NCTM.
- Polaki, M. V. (2002a). Using instruction to identify key features of Basotho elementary students' growth in probabilistic thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 4, 285-314.
- Polaki, M. V. (2002b). Using instruction to identify mathematical practices associated with Basotho elementary students' growth in probabilistic reasoning. *Canadian Journal for Science, Mathematics and Technology Education*, 2, 357-370.
- Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.
- Pratt, D. (1998). The co-ordination of meanings for randomness. *For the Learning of Mathematics*, 18(3), 2-11.
- Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal of Research in Mathematics Education*, 31, 602-625.
- Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? En G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School* (pp. 171-189). New York: Springer
- Pratt, D. y Noss, R. (2002). The Micro-Evolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness, *Journal of the Learning Sciences* 11(4), 453-488.
- Russell, S. (1990). Issues in training teachers to teach statistics in the elementary school: A world of uncertainty En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics Proceedings of the International Statistical Institute Round Table Conference* (pp. 59- 71). Voorburg, Netherlands: International Statistical Institute.

- Sada, M. (2011). Los applets para la enseñanza de la estadística y probabilidad. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 58, 38-48.
- Sáenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(3), 355–366.
- Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, C. (2005). Randomness in textbooks: the influence of the deterministic thinking. *Proceedings of CERME 4*. On line: <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/SerradAzcarCarde.pdf>
- Serrano L., Ortiz, J.J., Rodríguez, J.D. (2009). La simulación como recurso didáctico en la enseñanza de la probabilidad. *Tendencias Actuales se la Investigación en Educación Estocástica*, 157-176.
- Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-224). Charlotte, N.C: Information Age Publishing y NCTM.
- Steinbring, H. (1990). The nature of stochastic knowledge and the traditional mathematics curriculum. Some experiences with in-service training and developing materials. En A. Hawkins (Ed.). *Training teachers to teach statistics* (pp. 2-19). Voorburg: International Statistical Institute.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (345-366). New York: Springer.
- Theis, L. y Savard, A. (2010). Linking probability to real-world situations: how do teachers make use of the mathematical potential of simulation programs? En C. Reading (Ed.), *ICOTS-8 Conference Proceedings*.
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Villalba, M. y López, A. (2012). Los Applets Geogebra en la enseñanza de la probabilidad. *Taller. Actas conferencia latinoamericana de Geogebra*.64-71. Uruguay

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 305-337.

Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.