

Universidad
de Granada

Departamento de
Matemática Aplicada



Aproximación de curvas y superficies
a partir de problemas de contorno
mediante métodos variacionales.
Aplicaciones.

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

Miguel Luis Rodríguez González

Granada, 2005

Memoria presentada para optar
al grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas por la Universidad
de Granada.

La presente memoria ha sido realizada en el Departamento de
Matemática Aplicada de la Universidad de Granada bajo la di-
rección del doctor Miguel Pasadas Fernández, Profesor Titular
del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad
de Granada.

El Autor

Fdo.: Miguel Luis Rodríguez

Vº Bº del Director

Fdo.: Miguel Pasadas Fernández
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

A Montse.
A Montse y a Javi.

Agradecimientos

Desde estas líneas deseo expresar mi más sincero y obligado agradecimiento a todas las personas que han contribuido, de una u otra forma, a la elaboración de este trabajo de investigación y a mi formación en el campo científico. En particular quiero expresar mi reconocimiento e impagable deuda:

Al Dr. Miguel Pasadas Fernández, como director de esta memoria, quien con su dedicación, y su más que constante paciencia, enseñanza, orientación, ayuda, apoyo, estímulo, derroche de energías y sacrificio, ha hecho posible la realización de este trabajo. Su sencillez y cercanía engrandecen aún más su valía humana y científica.

A los doctores y amigos José Juan Quesada, Abdelouahed Kouibia, Domingo Barrera y demás compañeros del Departamento de Matemática Aplicada, por su amabilidad, sus enseñanzas y la ayuda desinteresada que siempre me han brindado.

A todos mis amigos y compañeros de trabajo del Colegio Cristo Rey de Granada por sus ánimos, simpatía y muestras de afecto constantes.

A toda mi familia: a mi mujer, por tantas cosas que no caben aquí, a mis hijos, por su simpatía y vitalidad. A mis padres, hermana, Inma, Manolo y Nacho por sus ánimos. Y especialmente, a Antonio y a Mari por su ayuda incondicional. Esto es también vuestro premio.

Introducción

Esta memoria es una contribución a la Teoría de Aproximación y la construcción de curvas y superficies a partir de un problema de contorno, dado por una ecuación diferencial elíptica y condiciones de contorno de tipo elíptico, y un conjunto de puntos de aproximación.

La construcción de curvas y superficies en CAGD y en el diseño industrial fundamentalmente se ha venido realizando mediante formas geométricas, cónicas y cuádricas entre otra, que pueden ser caracterizadas mediante ecuaciones sencillas en la mayoría de los casos.

Sin embargo, muchos problemas de la ingeniería, arquitectura, geología y otros campos requieren curvas y superficies suaves que no pueden ser descritas de una manera elemental.

Estos problemas aparecen particularmente en diseños de automoción y en industria aeroespacial, donde algunos objetos son diseñados a partir de datos de interpolación y de aproximación o también cuando estos objetos verifican ciertas propiedades hidrodinámicas que pueden ser modelizadas a partir de ciertas ecuaciones diferenciales.

Por ejemplo, Z. C. Li [58] desarrolla aplicaciones de tipo práctico utilizando soluciones de problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias. Concretamente realiza blendings entre la trayectoria de una aeronave desde un punto determinado (utilizando su velocidad y posición) y el lugar donde ésta toma tierra, trazando de esta forma la trayectoria del posible aterrizaje.

Este tipo de problemas tiene un enfoque diferente a los problemas de interpolación tradicionales ya que el objetivo principal es encontrar una función que sea suave y que cumpla unas determinadas condiciones de contorno. Debido a estas características se suele considerar a este método más como una técnica de generación de curvas y superficies que como una técnica de representación.

Otro método que es utilizado usualmente es el método PDE (Ecuaciones en

derivadas parciales) para el diseño de superficies. Este método genera una superficie mediante la resolución de una ecuación en derivadas parciales con ciertas condiciones de frontera. Autores como M.I.G. Bloor y M. Wilson han publicado numerosos trabajos acerca de este método (véase por ejemplo [7],[8], [9], [10]).

El método PDE se utiliza principalmente con ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico debido a que producen superficies suaves para problemas de contorno, pero se pueden emplear otro tipo de ecuaciones.

Nuestros esfuerzos están encaminados a estudiar cómo mezclar condiciones de interpolación y de aproximación de forma que podamos conseguir curvas y superficies que aproximen un cierto conjunto de puntos y que, además, estén modeladas mediante una ecuación diferencial sometidas a ciertas condiciones de frontera.

En este contexto hemos desarrollado nuestra labor de investigación, que ha culminado con la presentación de esta memoria y cuyos objetivos fundamentales son:

- la construcción de curvas ODE y superficies PDE en espacios adecuados a partir de un conjunto de puntos de aproximación y un problema de contorno,
- el estudio y establecimiento de resultados de convergencia y estimaciones de error para la aproximación mediante curvas ODE y superficies PDE,
- la discretización de los problemas de aproximación definidos en espacios finito-dimensionales, cuyas soluciones llamaremos curvas ODE discretas y superficies PDE discretas, respectivamente,
- el desarrollo de aplicaciones de los métodos estudiados en el campo del modelado en general y, en particular, en la unión suave de curvas y superficies (blending).

Hemos estructurado la memoria en seis capítulos.

En el capítulo 1, preliminares, se introducen las notaciones necesarias para el estudio de la teoría de aproximación que se propone, el marco funcional en el que se desarrolla, diferentes propiedades y resultados clásicos en espacios normados y espacios de Hilbert y los distintos espacios funcionales que serán usados. Por último, como base fundamental para el método de discretización

que se utilizará, se realiza una introducción a los espacios de funciones B-splines y el método de los elementos finitos, en general, y a los espacios de elementos finitos, construidos a partir del elemento finito genérico unidimensional de clase C^k y del elemento finito genérico de Bogner–Fox–Schmit de clase C^k , en particular.

El capítulo 2, aproximación mediante curvas ODE, comienza con la definición de curva ODE, como solución de un cierto problema variacional, en el que intervienen dos términos fundamentalmente, uno ligado a un conjunto ordenado de puntos distintos

$$A^m = \{a_i, i = 1, \dots, m\},$$

de un intervalo abierto y acotado de \mathbb{R} , $I = (\alpha, \beta)$, y otro vinculado a una ecuación diferencial

$$Lu = f,$$

donde L es un operador diferencial de orden $2n$

$$L : H^{2n}(I) \longrightarrow L^2(I),$$

de la forma:

$$Lu(t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j (p_j(t)u^{(j)}(t))^{(j)}, \quad \alpha < t < \beta,$$

con $p_j(t) \in H^j(I)$, $0 \leq j \leq n$, verificando cierta condición, y f una función perteneciente al espacio $L^2(I)$.

Para añadir las condiciones de contorno a la ecuación diferencial anterior y los puntos de aproximación se introduce un conjunto de formas lineales

$$\Sigma = \{\phi_i : i = 1, \dots, 2n\},$$

definidas sobre el espacio de Sobolev de orden n de funciones reales definidas en I , $H^n(I)$, del tipo

$$\phi_i(v) = \begin{cases} v^{(i-1)}(\alpha) & \text{si } i = 1, \dots, n, \\ v^{(i-n-1)}(\beta) & \text{si } i = n + 1, \dots, 2n, \end{cases}$$

y dos vectores

$$\mathbf{y} = (y_i)_{i=1, \dots, 2n} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathbf{q} = (q_i)_{i=1, \dots, m} \in \mathbb{R}^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

cuyas funciones son las siguientes: \mathbf{y} aportará las condiciones de contorno a la ecuación diferencial y \mathbf{q} es el vector de ordenadas asociado al conjunto de puntos A^m .

Por tanto se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} Lu = f, \\ \tau u = \mathbf{y}. \end{cases}$$

En estos términos planteados diremos que σ es una curva ODE asociada a L , \mathbf{y} , A^m , \mathbf{q} y $\varepsilon > 0$, si σ es una solución del problema

$$\begin{cases} \sigma \in H, \\ \forall v \in H, \quad J(\sigma) \leq J(v), \end{cases}$$

donde J es el funcional definido sobre $H^n(I)$, de la forma:

$$J(v) = \langle \rho v - \mathbf{q} \rangle_m^2 + \varepsilon ((v, v)_L - 2(f, v)_{0,I}),$$

$H = \{u \in H^n(I) : \tau u = \mathbf{y}\}$, y ρ y τ son los operadores dados por

$$\begin{aligned} \rho : H^n(I) &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ v &\longmapsto (v(a_i))_{i=1, \dots, m}, \\ \tau : H^n(I) &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \\ v &\longmapsto (\phi_i(v))_{i=1, \dots, 2n}. \end{aligned}$$

A continuación se da una caracterización de dicha solución. Cuando el conjunto de datos de aproximación procede de una cierta función, se demuestra la convergencia de la curva ODE a dicha función y por último se dan cotas sobre el error de aproximación cometido al realizar tal aproximación.

En el capítulo 3, aproximación mediante curvas ODE splines, se realiza una discretización del método de aproximación estudiado en el capítulo 2, y se sigue un desarrollo prácticamente idéntico a éste. Después de la definición de curva ODE discreta, que tomará el nombre de curva ODE spline cuando el espacio de discretización considerado sea un espacio de funciones splines, se da una caracterización de dicha curva.

Se estudia la convergencia del problema estudiado en los términos adecuados y se establecen estimaciones del error. Finalmente se ilustra el capítulo con una serie de ejemplos con el objeto de poder observar la influencia en la aproximación de los diferentes parámetros que intervienen en el problema. Se observa que si los parámetros del método varían según las hipótesis de

convergencia, de la curva ODE discreta hacia la curva de la que proceden los datos, el error relativo disminuye, y se conjetura la existencia de un valor del parámetro ε óptimo.¹

En el capítulo 4, superficies PDE, se inicia un proceso similar al del capítulo 2. En este capítulo, partimos de un dominio Ω , de una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico, un conjunto de puntos de aproximación de \mathbb{R}^3 y unas condiciones de contorno que afectarán a toda la frontera del dominio Ω , motivo por el cual se exige que la frontera del dominio sea suficientemente regular. En estas condiciones se define la superficie PDE como solución de un problema de minimización. Se demuestra la unicidad de esta superficie y se establece una caracterización de la misma. Asimismo se estudia la convergencia de la superficie PDE hacia una función de un espacio adecuado cuando los datos de aproximación proceden de ésta y, nuevamente, se dan cotas del error cometido al efectuar dicha aproximación.

En el capítulo 5, superficies PDE discretas, se introducen estas superficies como consecuencia de la imposibilidad de explicitar en ocasiones las superficies PDE construidas en el capítulo anterior. Las superficies PDE discretas se definen y caracterizan análogamente a como se ha realizado en el capítulo 3 para el caso de curvas, y se estudia la convergencia y estimaciones del error cometido de una manera similar.

Para finalizar este capítulo se muestran una serie de ejemplos que tienen por finalidad observar la influencia de los diversos parámetros que intervienen en la construcción de una superficie PDE discreta. Se observa que si los parámetros del método varían según las hipótesis de convergencia, el error relativo, que se comete al aproximar, mediante la superficie PDE discreta, la superficie de la que proceden los datos, disminuye, y se conjetura la existencia de un valor del parámetro ε óptimo.

En el último capítulo, aplicaciones: *blendings*, se han intentado plasmar las posibilidades que tiene el método que se ha desarrollado en esta memoria. Comienza con una pequeña reseña acerca de las curvas y superficies *blendings* (superficies de unión suave de dos o más dadas) y seguidamente se analizan diferentes casos tanto en curvas como en superficies en los que se puede aplicar el método. Con respecto a curvas se distinguen varios casos en los que es de utilidad aplicar el método y construir una curva de unión a partir de otras dos. Con respecto a las superficies, se presentan las superficies PDE

¹Los principales resultados de los capítulos 2 y 3 constituyen el contenido del artículo “Construction of ODE curves, Numerical Algorithms, 34, 367–377 (2003)” [53].

paramétricas y se dan ejemplos de diferentes uniones de cilindros y planos.

Por último se muestran varios ejemplos de modelado libre volviendo a indicar como afectan los diferentes parámetros en el método.²

Finaliza esta memoria con el establecimiento de las conclusiones más relevantes de la misma, las líneas de investigación que deja abiertas y la bibliografía más relevante que se ha utilizado en su desarrollo.

²Los principales resultados de los capítulos 4, 5 y 6 constituyen el contenido de diferentes comunicaciones a congresos y de dos artículos enviados para su revisión a sendas revistas especializadas:

- “Construction of surfaces by PDE splines”, MATA 2003, Cancún, Abril 2003.
- “Approximation of surfaces by smoothing PDE splines”, IV International Meeting on Approximation, Úbeda, Junio, 2003.
- “Blending surfaces by smoothing PDE splines”, VIII Jornadas Zaragoza-Pau, Jaca, Septiembre 2003.
- “Construction of blending surfaces by parametric PDE splines”, MAIA 2004, Stuttgart (Alemania), Octubre, 2004.
- “Multivariate approximation by PDE splines”, Numerische Mathematik (enviado).
- “Approximation of surfaces by interpolation PDE splines”, Advances in Computational Mathematics (enviado).

Índice

1. Preliminares	1
1.1. Introducción	1
1.2. Notaciones	2
1.3. Espacios normados. Espacios de Hilbert	5
1.4. Espacios funcionales	7
1.5. Las funciones B-splines	12
1.5.1. Introducción	12
1.5.2. Definición y propiedades	13
1.5.3. Interpolación y aproximación mediante splines	15
1.6. Elementos finitos	19
1.6.1. Nociones generales	19
1.6.2. Elemento finito unidimensional de clase C^k	22
1.6.3. Elemento finito de Bogner–Fox–Schmit	24
1.6.4. Espacios de Elementos Finitos	26
2. Aproximación mediante curvas ODE	35
2.1. Introducción	35
2.2. Planteamiento del problema.	37
2.3. Convergencia	44
2.4. Estimaciones del error de aproximación	47
3. Aproximación mediante curvas ODE splines	51
3.1. Introducción	51
3.2. Planteamiento del problema	52
3.3. Convergencia	54
3.4. Estimaciones del error.	57
3.5. Computación.	57
3.6. Ejemplos gráficos y numéricos	62

4. Superficies PDE	75
4.1. Introducción	75
4.2. Planteamiento del problema	77
4.3. Convergencia	82
4.4. Estimaciones del error de aproximación	87
5. Superficies PDE discretas	91
5.1. Introducción	91
5.2. Planteamiento del problema	92
5.3. Convergencia	98
5.4. Estimaciones del error	105
5.5. Computación	106
5.6. Ejemplos gráficos y numéricos	107
6. Aplicaciones: Blending	127
6.1. Introducción	127
6.2. Antecedentes	128
6.3. Métodos paramétricos	131
6.4. Curvas blending	140
6.4.1. Construcción de curvas blending	142
6.4.2. Ejemplos	145
6.5. Superficies blending	158
6.5.1. Construcción de superficies blending	158
6.5.2. Modelado	161

Índice de figuras

1.5.1. Gráfica del B-spline de grado 0.	13
1.5.2. Gráfica del B-spline cuadrático de clase 1	15
1.5.3. Gráfica del B-spline cúbico de clase 2	15
1.6.4. Rectángulo K de lados paralelos a los ejes.	25
1.6.5. Una triangulación de $\bar{\Omega}$	30
1.6.6. Nudo y rectángulos adyacentes.	32
3.6.1. Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).	63
3.6.2. Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).	63
3.6.3. Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 8$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).	64
3.6.4. Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 8$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).	64
3.6.5. Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 16$ y $\varepsilon = 10^{-5}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).	64
3.6.6. Curva ODE spline obtenida con $m = 15$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-5}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).	65
3.6.7. Curva ODE spline obtenida con $m = 15$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 8$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).	65
3.6.8. Curva ODE spline obtenida con $m = 15$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 16$ y $\varepsilon = 10^{-5}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).	65

3.6.9. Curva ODE spline obtenida sin puntos de aproximación, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = \cos^2 x \sen x$ (rojo).	67
3.6.10. Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = \cos^2 x \sen x$ (rojo).	67
3.6.11. Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 8$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = \cos^2 x \sen x$ (rojo).	68
3.6.12. Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 16$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = \cos^2 x \sen x$ (rojo).	68
3.6.13. Curva ODE spline obtenida con $m = 15$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 16$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = \cos^2 x \sen x$ (rojo).	68
5.6.1. Gráfica de la función de Franke.	109
5.6.2. Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 8 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-2}$ y una partición de 9 rectángulos.	110
5.6.3. Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 8 puntos de interpolación, 225 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-4}$ y una partición de 9 cuadrados.	110
5.6.4. Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 8 puntos de interpolación, 225 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$ y una partición de 9 rectángulos.	111
5.6.5. Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 12 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$ y una partición de 16 cuadrados.	111
5.6.6. Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 12 puntos de interpolación, 625 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$ y una partición de 16 cuadrados.	112
5.6.7. Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 16 puntos de interpolación, 625 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$ y una partición de 25 cuadrados.	112
5.6.8. Gráfica de la superficie $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$	114
5.6.9. Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$ con 8 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-3}$ y una partición de 9 cuadrados.	115

5.6.10. Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$ con 8 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-8}$ y una partición de 9 cuadrados. . . 115

5.6.11. Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$ con 12 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-5}$ y partición de 16 cuadrados. . . 116

5.6.12. Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$ con 16 puntos de interpolación, 225 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-7}$ y una partición de 25 cuadrados. 116

5.6.13. Gráfica de $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$ 118

5.6.14. Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$ con 8 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-5}$ y una partición de 9 cuadrados. 119

5.6.15. Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$ con 12 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-5}$ y una partición de 16 cuadrados. 119

5.6.16. Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$ con 12 puntos de interpolación, 225 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-7}$ y una partición de 16 cuadrados. 120

5.6.17. Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$ con 16 puntos de interpolación, 625 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-7}$ y una partición de 25 cuadrados. 120

5.6.18. Gráfica de la función $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sen(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$ 122

5.6.19. Superficie PDE discreta aproximando $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sen(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$ con 16 puntos de interpolación, sin puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-8}$, y una partición de 25 cuadrados. 123

5.6.20. Superficie PDE discreta aproximando $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sen(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$ con 8 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-8}$, y una partición de 9 cuadrados. 123

5.6.21. Superficie PDE discreta aproximando $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sen(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$ con 12 puntos de interpolación, 225 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-8}$, y una partición de 16 cuadrados. 124

5.6.22. Superficie PDE discreta aproximando $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sin(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$ con 16 puntos de interpolación, 625 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-5}$, y una partición de 25 cuadrados.	124
6.3.1. Gráfica de la solución del problema (6.2).	133
6.3.2. Curva ODE paramétrica spline obtenida sin puntos de aproximación, $p = 5$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).	133
6.3.3. Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 3$ puntos de aproximación, $p = 8$ y $\varepsilon = 10^{-5}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).	133
6.3.4. Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 3$ puntos de aproximación, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-2}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).	134
6.3.5. Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 1$ puntos de aproximación, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-4}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).	134
6.3.6. Curva ODE paramétrica spline obtenida con un punto de aproximación, $p = 2$ y $\varepsilon = 10$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).	134
6.3.7. Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 3$ puntos de aproximación, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-5}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).	135
6.3.8. Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 3$ puntos de aproximación, $p = 7$ y $\varepsilon = 10^{-2}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).	135
6.3.9. Curva ODE paramétrica spline obtenida con 1 punto de aproximación, $p = 5$ y $\varepsilon = 10^{-7}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).	135
6.3.10. Gráfica de la función $g(t)$	136
6.3.11. Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 30$ puntos de aproximación, $p = 3$ y $\varepsilon = 10^{-7}$ (izquierda), y comparación con la original $\mathbf{g}(t)$ (derecha).	137
6.3.12. Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 10$ puntos de aproximación, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-7}$ (izquierda), y comparación con la original $\mathbf{g}(t)$ (derecha).	137
6.3.13. Curva ODE paramétrica spline obtenida sin puntos de aproximación, $p = 9$ y $\varepsilon = 10^{-7}$ (izquierda), y comparación con la original $\mathbf{g}(t)$ (derecha).	138

6.3.14. Curva ODE paramétrica spline obtenida con 30 puntos de aproximación, $p = 9$ y $\varepsilon = 10^{-7}$ (izquierda), y comparación con la original $\mathbf{g}(t)$ (derecha). 138

6.3.15. Superficie PDE paramétrica asociada al problema (6.4) (I). . . 139

6.3.16. Superficie PDE paramétrica asociada al problema (6.4) variando una de las condiciones de contorno. 140

6.4.17. Problema “blending” para curvas. 141

6.4.18. Problema “blending” para curvas con parte del dominio en común. 141

6.4.19. Problema “blending” para curvas con un punto del dominio en común. 142

6.4.20. Problema “blending” para curvas con un punto del dominio en común (II). 143

6.4.21. Problema “blending” para curvas con parte del dominio en común (II). 144

6.4.22. Problema “blending” para curvas con parte del dominio en común (II). 144

6.4.23. Situación inicial de los segmentos y arco de circunferencia. . 146

6.4.24. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 3 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$ 146

6.4.25. Curva blending de aproximación con $k = 5$ intervalos, 20 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$ 147

6.4.26. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 1 punto de aproximación $(2,0)$, y $\varepsilon = 10^{-3}$ 147

6.4.27. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 8 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$ 147

6.4.28. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 5 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$ 147

6.4.29. Curva blending de aproximación con $k = 8$ intervalos, 12 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$ 148

6.4.30. Situación inicial de las curvas. 149

6.4.31. Curva blending de aproximación con $k = 5$ intervalos, 20 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$ 149

6.4.32. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 1 punto de aproximación $(3,1)$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ 150

6.4.33. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 8 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$ 150

6.4.34. Curva blending de aproximación con $k = 7$ intervalos, 20 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$ 150

6.4.35. Curva blending de aproximación con $k = 8$ intervalos, 1 punto de aproximación, $(4, 0)$, y $\varepsilon = 10^{-4}$ 150

6.4.36. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 1 puntos de aproximación, $(4, 0)$, y $\varepsilon = 10^{-2}$	151
6.4.37. Curva blending de aproximación con $k = 6$ intervalos, 2 puntos de aproximación, $(1, 6)$ y $(5, 6)$, y $\varepsilon = 10^{-7}$	151
6.4.38. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 20 puntos de aproximación, entre ellos $(1, 6)$ y $(5, 6)$, y $\varepsilon = 10^{-7}$	151
6.4.39. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 20 puntos de aproximación, entre ellos $(1, 6)$ y $(5, 6)$, y $\varepsilon = 10^{-7}$	151
6.4.40. Gráfica de las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$	152
6.4.41. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 5 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$	153
6.4.42. Curva blending de aproximación con $k = 8$ intervalos, 15 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$	154
6.4.43. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 15 puntos de aproximación y $\varepsilon = 1$	154
6.4.44. Curva blending de aproximación con $k = 10$ intervalos, 50 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$	155
6.4.45. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 1 punto de aproximación, $(3, 2)$, y $\varepsilon = 10^{-10}$	155
6.4.46. Gráfica de las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$	156
6.4.47. Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 10 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$	156
6.4.48. Curva blending de aproximación con $k = 6$ intervalos, 20 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$	156
6.4.49. Curva blending de aproximación con $k = 6$ intervalos, 20 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$	157
6.4.50. Curva blending de aproximación con 25 intervalos, 30 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10$	157
6.5.51. Superficie blending para la unión de dos planchas	158
6.5.52. Superficie blending de cilindro y plano.	159
6.5.53. Superficie blending de circunferencia y segmento.	160

Índice de tablas

1.6.1. Funciones \hat{N}_{2l+s}^k	24
3.6.1. Tabla de errores para diferentes curvas ODE spline aproximando $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$	66
3.6.2. Tabla de errores para diferentes curvas ODE spline aproximando $g(x) = \cos^2 x \text{sen} x$	69
3.6.3. Tabla de errores para diferentes curvas ODE spline aproximando $g(x) = x^6$	70
3.6.4. Tabla de errores para diferentes curvas ODE spline aproximando $g(x) = \log x$	71
3.6.5. Tabla de errores para diferentes curvas ODE spline aproximando $g(x) = e^x$	72
5.6.1. Tabla de errores para diferentes superficies PDE discretas aproximando la función de Franke.	113
5.6.2. Tabla de errores para diferentes superficies PDE discretas aproximando la función $g(\mathbf{x}) = \cos(\pi x_1) \cos^2(\pi x_2)$	117
5.6.3. Tabla de errores para diferentes superficies PDE discretas aproximando la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$	121
5.6.4. Tabla de errores para diferentes superficies PDE discretas aproximando la función $g(\mathbf{x}) = 0,1 \text{senh}(3x_1 - 1,5) \text{sen}(3x_2) - 0,2 \text{senh}(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$	125

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

Este capítulo tiene por objetivo introducir tanto las notaciones como los resultados necesarios para el desarrollo de la teoría estudiada a lo largo de la memoria.

Éstos abarcan desde las notaciones para normas en los espacios euclídeos reales, expresiones diferenciales y espacios de polinomios y de matrices, hasta la introducción del marco funcional en el que se encuadrará la teoría de aproximación e interpolación tratada, y el establecimiento de varios resultados clásicos sobre el mismo, pasando por diferentes propiedades de convergencia, compacidad y proyección en espacios de Hilbert. Finalmente haremos una introducción a las funciones B-splines y a los espacios de elementos finitos que emplearemos posteriormente como herramienta de discretización.

Aunque no se demuestran los resultados, en cada sección se incluyen las referencias necesarias tanto para encontrar las demostraciones como para profundizar en alguno de los campos que brevemente se introducen.

El presente capítulo está estructurado de la forma siguiente. Comienza con la presentación, en la sección 1.2, de las notaciones precisas para las diferentes normas en el espacio euclídeo real \mathbb{R}^n , las aplicaciones proyección de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} , y diversos conjuntos topológicamente asociados a un subconjunto de \mathbb{R}^n . También se introducen notaciones para algunos conjuntos y operadores asociados a funciones vectoriales de variable vectorial. Por último se definen diferentes espacios de polinomios y de matrices de elementos reales así como una breve reseña sobre curvas y superficies paramétricas.

La sección 1.3 trata de los diferentes conceptos de convergencia en espacios de Hilbert, así como de algunos resultados sobre compacidad e inyección en estos espacios. La sección finalizará con el enunciado del teorema de Stampacchia, de vital importancia en el estudio de la solución de los problemas de aproximación que se abordarán a lo largo de la memoria.

La sección 1.4 trata exclusivamente de la introducción de los espacios de funciones en los que se enmarca la teoría: espacios de funciones continuas de clase C^k , espacios de funciones λ -hölderianas y espacios de Sobolev, así como de distintas normas, productos escalares, seminormas y semiproductos escalares que pueden definirse en los mismos. Por último se enuncian los clásicos teoremas de inyección continua y compacta de espacios de Sobolev.

Finaliza el capítulo con la sección 1.5, en la que se efectúa brevemente una introducción a las funciones B-splines, su construcción y las principales propiedades que utilizaremos y la sección 1.6 que está dedicada a la teoría de elementos finitos.

1.2. Notaciones

Como es habitual, los símbolos \mathbb{R} , \mathbb{Z} y \mathbb{N} representarán, respectivamente, los conjuntos de números reales, enteros y naturales. En capítulos posteriores aparecen también los subconjuntos $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se considerará que \mathbb{R}^n está dotado del producto escalar euclídeo $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ y de la norma asociada $\langle \cdot \rangle_n$, donde

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \langle \mathbf{x} \rangle_n = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_n^{\frac{1}{2}}.$$

Recordemos que el conjunto \mathbb{R}^n tiene estructura de espacio de Hilbert con el producto escalar euclídeo.

Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda > 0$, definimos los conjuntos

$$B(\mathbf{x}, \lambda) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_n < \lambda \},$$

$$\bar{B}(\mathbf{x}, \lambda) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_n \leq \lambda \},$$

llamados *bola abierta* y *bola cerrada*, respectivamente, de centro x y radio λ .

La base canónica de \mathbb{R}^n se indicará mediante $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, y

$$p_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{array}$$

denotarán las *proyecciones canónicas* de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} .

Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, indicaremos por \overline{E} , ∂E , $\text{Int}(E)$ y $\text{card}E$, respectivamente, la clausura, la frontera, el interior y el cardinal de E . Llamaremos *diámetro* de E al número real positivo

$$\text{diam}(E) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E} \langle \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_n.$$

Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $E \subset \mathbb{R}^p$.

Representaremos mediante $\langle E \rangle$ al subespacio vectorial de \mathbb{R}^p engendrado por el subconjunto E .

Dada una función \mathbf{u} con dominio E y con valores en \mathbb{R}^n , con $n \in \mathbb{N}^*$, se define el soporte de \mathbf{u} como

$$\text{sop } \mathbf{u} = \overline{\{\mathbf{x} \in E : \mathbf{u}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\}}.$$

Para toda p -tupla $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, se define

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^p \alpha_i \quad \text{y} \quad |\alpha|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} \alpha_i,$$

y se dirá que $|\alpha|$ es el *orden* de α .

Si $\alpha, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^p$, la expresión $\alpha^{\mathbf{n}}$ tiene el siguiente sentido

$$\alpha^{\mathbf{n}} = (\alpha_1^{n_1}, \dots, \alpha_p^{n_p}).$$

Sin pérdida de significación escribiremos

$$\forall |\alpha| \leq k \quad \text{y} \quad \forall |\alpha|_\infty \leq k$$

en lugar de

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^p \text{ tal que } |\alpha| \leq k \quad \text{y} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^p \text{ tal que } |\alpha|_\infty \leq k.$$

La notación de las derivadas de una función real u de variable real será u' , u'' y $u^{(l)}$, si $l \in \mathbb{N}$, $l > 2$.

Dados dos espacios normados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, se denotará por $\mathcal{L}(X; Y)$ el espacio de aplicaciones lineales y continuas $\Phi : X \rightarrow Y$ y se designará por X' el espacio dual topológico del espacio normado X , es decir, el espacio $\mathcal{L}(X; \mathbb{R})$. Asimismo, dada $\Phi \in \mathcal{L}(X; Y)$, se indicará por $\ker \Phi$, como es habitual, el núcleo de Φ , es decir, el subespacio

$$\ker \Phi = \{\mathbf{x} \in X : \Phi(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Sea Ω un abierto no vacío de \mathbb{R}^p . Dada una función $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}^*$, se representará por $D^j \mathbf{u}(\mathbf{x})$, o bien por $D\mathbf{u}(\mathbf{x})$ si $j = 1$, la derivada j -ésima de Fréchet de \mathbf{u} en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$, siempre y cuando tal derivada exista ([21], [3]). Igualmente, dada una p -tupla $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, la derivada parcial $\boldsymbol{\alpha}$ -ésima de \mathbf{u} en \mathbf{x} está definida como

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = D^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overbrace{(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_1)}^{\alpha_1 \text{ veces}}, \dots, \overbrace{(\mathbf{e}_p, \dots, \mathbf{e}_p)}^{\alpha_p \text{ veces}}.$$

Dados $E \subset \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}^*$, denotaremos por $\mathbb{P}_k(E; \mathbb{R}^n)$, o $\mathbb{P}_k(E)$ si $n = 1$, el espacio de restricciones a E de funciones polinómicas con valores en \mathbb{R}^n de grado menor o igual a k con respecto a todas las variables, es decir, si $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_k(E; \mathbb{R}^n)$, \mathbf{q} es de la forma

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \mathbf{a}_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \mathbf{a}_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p}$ si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ y $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$.

Para todo $m, n \in \mathbb{N}^*$, se designa por $\mathcal{M}_{m,n}$ el espacio de matrices de números reales que tienen m filas y n columnas.

Utilizaremos las notaciones $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, ó $A = (\mathbf{a}_i)$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq i \leq n$, indistintamente, para designar $A \in \mathcal{M}_{m,n}$.

Dotamos a este espacio del producto escalar euclídeo

$$\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}, \langle A, B \rangle_{m,n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij},$$

y de la correspondiente norma matricial

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}, \langle A \rangle_{m,n} = \langle A, A \rangle_{m,n}^{1/2}.$$

Dados un conjunto de índices I e $i, j \in I$, simbolizaremos por δ_{ij} la función *delta de Kronecker* que toma el valor 1 si $i = j$ y 0 en caso contrario.

Sean f y g dos funciones reales de variable real. Escribiremos

$$f(d) = O(g(d)), \quad d \rightarrow d_0,$$

si existen constantes reales $C > 0$ y $\eta > 0$ tales que

$$\forall d \in \mathbb{R}, |d - d_0| < \eta, |f(d)| \leq C|g(d)|.$$

De igual forma escribiremos

$$f(d) = o(g(d)), \quad d \rightarrow d_0,$$

cuando

$$\lim_{d \rightarrow d_0} \frac{f(d)}{g(d)} = 0.$$

La misma letra C designará cualesquiera constantes positivas.

1.3. Espacios normados. Espacios de Hilbert

En esta sección seguimos introduciendo definiciones y resultados de Análisis Funcional que se utilizarán, algunos con relativa frecuencia, en lo sucesivo. Se pueden consultar y ampliar en los textos de K. Atkinson [3], W. Cheney [23], H. Brezis [15] o P. Yosida [80].

Definición 1.3.1. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio normado. Se dice que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge fuertemente, o simplemente, que converge a $x \in X$ si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_X = 0.$$

Si X es, además, un espacio de Hilbert con el producto escalar $(\cdot, \cdot)_X$, se dice que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x en X si

$$\forall y \in X, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y)_X = (x, y)_X.$$

Se designará la convergencia (fuerte) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a x por

$$x_n \rightarrow x \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x,$$

y la convergencia débil por

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{débil } x_n = x.$$

Lema 1.3.2. *Sea X un espacio de Hilbert. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X . Se verifica que:*

- i) si $x_n \rightarrow x$, entonces $x_n \rightharpoonup x$;*
- ii) si $x_n \rightharpoonup x$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en X y $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;*
- iii) si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en X y todas las subsucesiones débilmente convergentes extraídas de la sucesión tienen el mismo límite débil x , entonces $x_n \rightharpoonup x$;*
- iv) si $x_n \rightharpoonup x$, entonces, para todo $f \in X'$, $f(x_n) \rightarrow f(x)$;*
- v) si $x_n \rightharpoonup x$ y $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, entonces $x_n \rightarrow x$.*

Lema 1.3.3. *De todo subconjunto infinito y acotado de un espacio de Hilbert X se puede extraer una sucesión débilmente convergente en X .*

Definición 1.3.4. *Sea X un espacio normado. Se dice que un conjunto $E \subset X$ es relativamente compacto en X si la clausura de E es un subconjunto compacto de X .*

Definición 1.3.5. *Sean X e Y dos espacios normados y T un operador de X en Y . Se dice que T es un operador compacto si transforma todo subconjunto acotado de X en un subconjunto relativamente compacto de Y .*

Lema 1.3.6. *Sean X un espacio de Hilbert, Y un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X; Y)$. Entonces, T es compacto si y sólo si, para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X débilmente convergente a x en X , la sucesión $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es fuertemente convergente a Tx en Y .*

Definición 1.3.7. *Sean X e Y dos espacios normados. Se dice que X se inyecta continuamente en Y , y se denota por $X \hookrightarrow Y$, si existe un operador inyectivo $I \in \mathcal{L}(X; Y)$. Si además I es compacto, se dice que X se inyecta compactamente en Y , y se denota por $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.*

Nota 1.3.8. *1.- Habitualmente, el operador de inyección I es la identidad (si $X \subset Y$) o bien una transformación lineal canónica como las existentes entre los distintos espacios funcionales que se introducirán en la sección siguiente.*

Concluimos esta sección con el enunciado del teorema de Stampacchia, empleado con frecuencia en problemas de minimización en espacios de Hilbert y que utilizaremos a lo largo del presente trabajo y el teorema de representación de Riesz-Fréchet.

Definición 1.3.9. Sea $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal sobre un espacio de Hilbert X con norma $\|\cdot\|_X$. Se dice que a es coerciva o X -elíptica si existe $C > 0$ tal que

$$\forall v \in X, \quad a(v, v) \geq C\|v\|_X^2.$$

Teorema 1.3.10. (Stampacchia) Sea $a(u, v)$ una forma bilineal continua y coerciva sobre un espacio de Hilbert X . Sea K un convexo, cerrado y no vacío de X . Dada

$$\phi : X' \longrightarrow \mathbb{R},$$

existe $u \in K$ única tal que

$$a(u, v - u) \geq \phi(v - u), \quad \forall v \in K.$$

Además, si a es simétrica, entonces u está caracterizada por la propiedad:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in K, \\ \frac{1}{2}a(u, u) - \phi(u) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \phi(v) \right\}. \end{array} \right.$$

Enunciamos el teorema de representación de Riesz-Fréchet cuya demostración puede consultarse en [15].

Teorema 1.3.11. Representación de Riesz-Fréchet Sea X un espacio de Hilbert y $\varphi \in X'$. Entonces existe $f \in X$ única tal que

$$\varphi(v) = (f, v)_X, \quad \forall v \in X.$$

Además se verifica

$$\|f\|_X = \|\varphi\|_{X'}.$$

1.4. Espacios funcionales

En esta sección introducimos los espacios funcionales que se emplean a lo largo de esta memoria, todos ellos de uso común en el análisis numérico. Las principales referencias que se han considerado para el desarrollo de esta sección son [3], [39], [29] y [33].

Sean $p, m \in \mathbb{N}^*$ y Ω un abierto no vacío de \mathbb{R}^p .

Definición 1.4.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se denota por $C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ (o $C^k(\Omega)$ si $m = 1$) el espacio de las funciones φ definidas en Ω con valores en \mathbb{R}^m que son continuas en Ω , así como todas sus derivadas parciales $\partial^\alpha \varphi$ con órdenes $|\alpha| \leq k$.

Recordemos que, para cada $i = 1, \dots, p$, $p_i \circ \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha (p_i \circ \varphi)$, es decir, para derivar φ basta con derivar cada una de sus funciones componentes.

Definición 1.4.2. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se indicará por $C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ (o $C^k(\bar{\Omega})$ si $m = 1$) el espacio de funciones $\varphi \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tales que, para todo $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha \varphi$ está acotada y es uniformemente continua.

Si $\varphi \in C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$, entonces, para todo $|\alpha| \leq k$, existe una única extensión continua de $\partial^\alpha \varphi$ a $\bar{\Omega}$. Si Ω está acotado, el recíproco es cierto. En lo sucesivo se identificará φ y sus derivadas parciales con sus respectivas extensiones continuas.

Se verifica que $C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|\varphi\|_{C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \langle \partial^\alpha \varphi(\mathbf{x}) \rangle_m.$$

Nota 1.4.3. Si $k = 0$ usaremos la notación $\|\cdot\|_{\infty, \Omega}$ en vez de $\|\cdot\|_{C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)}$ y se suele hablar de norma de Tchebycheff.

Definición 1.4.4. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in (0, 1]$. Se denotará por $C^{k, \lambda}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ (o $C^{k, \lambda}(\bar{\Omega})$ si $m = 1$) el espacio de funciones $\varphi \in C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ que son λ -hölderianas, así como todas sus derivadas parciales $\partial^\alpha \varphi$ de órdenes $|\alpha| \leq k$, es decir, tales que

$$\exists C > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \forall |\alpha| \leq k, \langle \partial^\alpha \varphi(\mathbf{x}) - \partial^\alpha \varphi(\mathbf{y}) \rangle_m \leq C \langle \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_p^\lambda.$$

Además $C^{k, \lambda}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|\varphi\|_{C^{k, \lambda}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)} = \|\varphi\|_{C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)} + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{\langle \partial^\alpha \varphi(\mathbf{x}) - \partial^\alpha \varphi(\mathbf{y}) \rangle_n}{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_p^\lambda}.$$

Algunas de las propiedades de los espacios que se introducen a continuación requieren un cierto grado de regularidad de la frontera $\partial\Omega$ del abierto Ω .

Definición 1.4.5. Sea Ω abierto y acotado en \mathbb{R}^p , y sea V un espacio de funciones definidas en \mathbb{R}^{p-1} . Diremos que $\partial\Omega$ es de clase V si para cada punto $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, existe un $r > 0$ y una función $g \in V$ tal que

$$\Omega \cap B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) : x_p > g(x_1, \dots, x_{p-1})\}$$

salvo un cambio del sistema de coordenadas mediante una transformación, si es necesario.

En particular, si V es un espacio de funciones de Lipschitz, diremos que Ω es un dominio Lipschitz. Cuando V sea un espacio de funciones $C^{k,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, diremos que Ω es un dominio Hölder de clase $C^{k,\alpha}$.

Definición 1.4.6. Se denota por $L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ el espacio de (clases de) funciones medibles (Lebesgue) \mathbf{u} definidas en Ω y con valores en \mathbb{R}^m tales que

$$\int_{\Omega} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle_m^2 d\mathbf{x} < +\infty.$$

Definición 1.4.7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se denota por $H^n(\Omega; \mathbb{R}^m)$ (o $H^n(\Omega)$ si $m = 1$) el espacio de Sobolev de orden n de (clases de) funciones $\mathbf{u} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tales que, para todo $|\alpha| \leq n$, la derivada parcial α -ésima $\partial^\alpha \mathbf{u}$, en el sentido de las distribuciones, pertenece a $L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Nota 1.4.8. Recordamos que, si $\mathbf{u} \in H^n(\Omega; \mathbb{R}^m)$, para cada $|\alpha| \leq n$, $\partial^\alpha \mathbf{u}$ es la única función de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^m), \int_{\Omega} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}), \partial^\alpha \varphi(\mathbf{x}) \rangle_m d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \langle \partial^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) \rangle_m d\mathbf{x},$$

donde $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ designa el espacio de funciones con valores en \mathbb{R}^m infinitamente diferenciables en Ω y con soporte compacto contenido en Ω . Observemos asimismo que $H^0(\Omega; \mathbb{R}^m) = L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Se dota al espacio $H^n(\Omega; \mathbb{R}^m)$ del producto escalar

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{n,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq n} \int_{\Omega} \langle \partial^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x}), \partial^\alpha \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_m d\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

y se denota por

$$\|\mathbf{u}\|_{n,\Omega} = ((\mathbf{u}, \mathbf{u}))_{n,\Omega}^{\frac{1}{2}}$$

la norma correspondiente.

También se definen los semiproductos escalares

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{j,\Omega,\mathbb{R}^m} = \sum_{|\alpha|=j} \int_{\Omega} \langle \partial^{\alpha} \mathbf{u}(\mathbf{x}), \partial^{\alpha} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_m dx, \quad 0 \leq j \leq n,$$

y las seminormas inducidas

$$|\mathbf{u}|_{j,\Omega,\mathbb{R}^m} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{j,\Omega,\mathbb{R}^m}^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Nota 1.4.9. Si $m = 1$, se suprimirá la letra \mathbb{R} de los subíndices del producto escalar, norma, semiproductos escalares y seminormas anteriores, que se denotarán, respectivamente, por $((\cdot, \cdot))_{n,\Omega}$, $\|\cdot\|_{n,\Omega}$, $(\cdot, \cdot)_{j,\Omega}$ y $|\cdot|_{j,\Omega}$.

Nota 1.4.10. Observemos que $\mathbf{u} \in H^n(\Omega; \mathbb{R}^m)$ si y sólo si $p_i \circ \mathbf{u} \in H^n(\Omega)$, para todo $i = 1, \dots, m$. Además,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{n,\Omega,\mathbb{R}^m} &= \left(\sum_{i=1}^m \|p_i \circ \mathbf{u}\|_{n,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ |\mathbf{u}|_{j,\Omega,\mathbb{R}^m} &= \left(\sum_{i=1}^m |p_i \circ \mathbf{u}|_{j,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Teorema 1.4.11. $H^n(\Omega; \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido en (1.1).

Demostración. Ver Atkinson[3, Teorema 6.2.3] y aplíquese la nota 1.4.10. \square

Seguidamente damos dos resultados clásicos de inyección de espacios de Sobolev que son casos particulares de los teoremas de Sobolev y de Rellich-Kondrasov. Formulaciones de tipo más general así como las correspondientes demostraciones se pueden consultar, entre otras, en R. A. Adams[1], H. Brézis[15], P. Grisvard[34].

Teorema 1.4.12. (Inyección hölderiana). Sean $p, m, n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in (0, 1]$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un abierto acotado de frontera lipschitziana. Si

$$i) \quad 0 < \lambda \leq n - k - \frac{p}{2} \quad \text{y} \quad k < n - \frac{p}{2} < k + 1, \quad \text{o bien}$$

$$ii) \quad 0 < \lambda < 1 \quad \text{y} \quad n - \frac{p}{2} = k + 1, \quad \text{o bien}$$

$$\text{iii) } \lambda = 1 \text{ y } n - \frac{p}{2} > k + 1,$$

entonces

$$H^n(\Omega; \mathbb{R}^m) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m).$$

Teorema 1.4.13. Sean $p, m, n \in \mathbb{N}^*$ y $k \in \mathbb{N}$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un abierto acotado de frontera lipschitziana. Si $n > k + \frac{p}{2}$, entonces

$$H^n(\Omega; \mathbb{R}^m) \stackrel{c}{\subset} C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m).$$

Teorema 1.4.14. Sean $p, m, n \in \mathbb{N}^*$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un abierto acotado de frontera lipschitziana. Entonces

$$H^n(\Omega; \mathbb{R}^m) \stackrel{c}{\subset} H^{n-1}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Teorema 1.4.15. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un abierto acotado de frontera lipschitziana.

Sea $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M \bar{\omega}_i$ una descomposición de $\bar{\Omega}$ tal que:

- (i) para todo $i = 1, \dots, M$, ω_i es un abierto contenido en Ω , conexo y de frontera lipschitziana;
- (ii) $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$, si $i \neq j$.

Sea $u \in C^{n-1}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$, con $n \in \mathbb{N}^*$, tal que, para cada $i = 1, \dots, M$, $u|_{\omega_i}$ pertenece a $H^n(\omega_i; \mathbb{R}^m)$. Entonces, u pertenece a $H^n(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Finalizamos la sección con dos resultados: uno sobre equivalencias de normas, que es una adaptación de uno más general a nuestro caso y otro sobre el operador traza y sus propiedades. Ambos se pueden consultar en [3].

Teorema 1.4.16. Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^p , $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$, donde cada Ω_λ tiene frontera lipschitziana y, además $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \neq \emptyset$ si $\lambda \neq \mu$. Sea $n \geq 1$. Supongamos que $f_j : H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq J$, son seminormas en $H^n(\Omega)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $0 \leq f_j(v) \leq c \|v\|_{n,\Omega}$, $\forall v \in H^n(\Omega)$, $1 \leq j \leq J$.
2. Si v es un polinomio de grado menor o igual que $n-1$ en cada Ω_λ , $\lambda \in \Lambda$, y $f_j(v) = 0$, $1 \leq j \leq J$, entonces $v = 0$.

Definimos

$$(N1) \quad \|v\| = |v|_{n,\Omega} + \sum_{j=1}^J f_j(v),$$

$$(N2) \quad \|v\| = \left(|v|_{n,\Omega}^2 + \sum_{j=1}^J (f_j(v))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces, (N1) y (N2) son normas en $H^n(\Omega)$, equivalentes a la norma $\|v\|_{n,\Omega}$.

Teorema 1.4.17. Sea $n \geq r + \frac{1}{2}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto acotado con frontera de clase Hölder $C^{r,1}$. Entonces existen, de forma única, las aplicaciones

$$\gamma_i : H^n(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega), \quad i = 0, 1, \dots, r,$$

tales que

$$\gamma_i(v) = \frac{\partial^i v}{\partial n^i} \Big|_{\partial\Omega}, \quad i = 0, 1, \dots, r,$$

cuando $v \in H^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\bar{\Omega})$.

Nota 1.4.18. Si $i = 0$ entonces a γ_0 se le denomina operador traza. Para cada $i = 0, \dots, r$, el operador γ_i , que no es inyectivo ni sobreyectivo, tiene interesantes propiedades. Su imagen $\gamma_i(H^n(\Omega))$ se suele denotar por $H^{r-\frac{i}{2}}(\partial\Omega)$ y es un espacio de Sobolev de orden positivo sobre la frontera de Ω .

1.5. Las funciones B-splines

1.5.1. Introducción

Hay diferentes espacios que se podrían emplear en la discretización de los resultados de la presente memoria. Vamos a decantarnos por espacios de tipo polinómico. Dentro de ellos, los espacios de elementos finitos, wavelets, producto tensorial de splines, etc., son herramientas que se suelen emplear con bastante frecuencia.

Consideraremos en concreto espacios generados por funciones B-splines en el caso $p = 1$.

La teoría de las funciones B-splines en la forma en la que a continuación será presentada, ha sido desarrollada entre otros por I. J. Schoenberg, C. de Boor, L.L. Schumaker, W. Boehm, W. Dahmen y C.K. Chui entre otros y aparece expuesta, por ejemplo, entre otras muchas referencias, en [38], [68], [12], [24], [72] y [71].

1.5.2. Definición y propiedades

Los B-splines son un tipo de funciones que se adaptan muy bien a las diversas teorías numéricas de interpolación, ajuste de datos, CAGD, etc.. El nombre de B-spline responde a que constituyen una base de un espacio vectorial de funciones splines.

Consideremos un conjunto de nodos infinito dado

$$\dots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 \dots, \quad (1.2)$$

verificando

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} t_{-i} = -\infty, \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = +\infty.$$

A partir de esta partición podemos introducir las diferentes familias de B-splines.

La definición formal del B-spline de grado 0 es

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

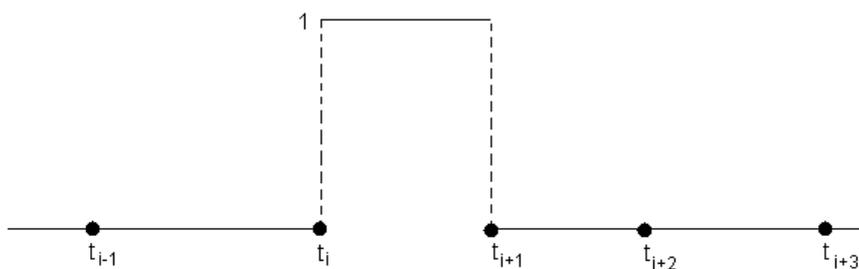


Figura 1.5.1: Gráfica del B-spline de grado 0.

La gráfica de los B-splines de grado 0 se muestra en la Figura 1.5.1. Entre las propiedades más importantes de esta familia destacamos:

- i) $B_i^0(x) = 0, \forall x \notin [t_i, t_{i+1})$.
- ii) $B_i^0(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{Z}$.

iii) $B_i^0(x)$ es continua por la derecha en toda la recta real.

$$iv) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_i^0(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hay que señalar que en esta serie no hay problemas de convergencia, ya que realmente no es una suma infinita por el apartado *i*).

A partir de estas funciones B_i^0 podemos definir, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, la función B-spline de grado k mediante la relación de recurrencia:

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}(x), \quad k \geq 1. \quad (1.3)$$

A continuación vamos a incluir algunas de las propiedades más interesantes de las diferentes familias de B-splines de grado k , que no son más que generalizaciones de las enunciadas para los B-splines de grado 0.

$$i) B_i^k(x) = 0, \forall x \notin [t_i, t_{i+k+1}).$$

$$ii) B_i^k(x) > 0, \forall x \in (t_i, t_{i+k+1}).$$

$$iii) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_i^k(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

iv) Para $k \geq 2$,

$$\frac{d}{dx} B_i^k = \left(\frac{k}{t_{i+k} - t_i} \right) B_i^{k-1} - \left(\frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}.$$

v) Para $k \geq 1$ la familia B_i^k pertenece a $C^{k-1}(\mathbb{R})$.

vi) Para todo k se verifica

$$\int_{-\infty}^x B_i^k(s) ds = \left(\frac{t_{i+k+1} - t_i}{k+1} \right) \sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(x).$$

vii) El conjunto de B-splines $B_i^k, B_{i+1}^k, \dots, B_{i+k}^k$ es linealmente independiente en (t_{i+k}, t_{i+k+1}) .

- Notas 1.5.1.** 1. Si los nodos son equidistantes (B-splines uniformes) algunas de las propiedades anteriores se pueden expresar de una forma más sencilla denotando por $h = t_i - t_{i-1}$, $i = 0, \dots, p$, la distancia entre nodos o paso.
2. Si $t_i = i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$ en (1.2), entonces se suelen denominar B-splines cardinales, y hay referencias dedicadas exclusivamente a ellos como [71]. Se suele denotar mediante $M_k = B_0^{k-1}$, $k \geq 0$, al B-spline cardinal de grado k y clase $k - 1$ cuyo soporte es el intervalo $[0, k]$.
3. Generalmente se suele trabajar con los B-splines de grado 2 y 3 cuyas gráficas se representan en las figuras 1.5.2 y 1.5.3.

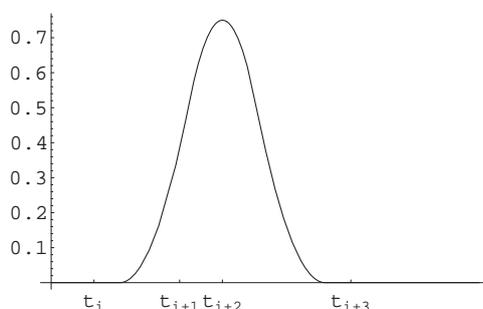


Figura 1.5.2: Gráfica del B-spline cuadrático de clase 1

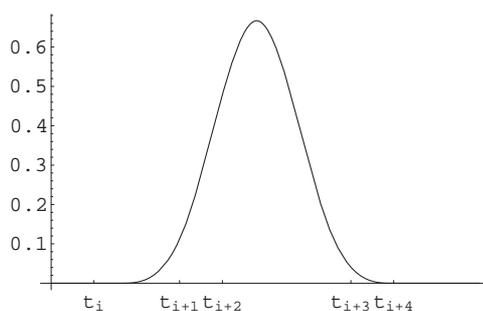


Figura 1.5.3: Gráfica del B-spline cúbico de clase 2

1.5.3. Interpolación y aproximación mediante splines

Este apartado está dedicado a reseñar brevemente como se pueden emplear las funciones splines en los esquemas interpolatorios y de aproximación o ajuste.

Sean $I = (\alpha, \beta)$ y $\Delta_p = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_p = \beta\}$ un subconjunto de puntos distintos de \bar{I} . Notemos mediante $S(k, r; \Delta_p)$ al espacio vectorial de funciones de clase global r y que son polinomios de grado $\leq k$ en cada uno de los p intervalos de la partición Δ_p , es decir

$$S(k, r; \Delta_p) = \{s \in C^r(\bar{I}) : s|_{[t_{i-1}, t_i]} \in \mathbb{P}_k[t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, p\}.$$

Entonces tenemos el siguiente teorema

Teorema 1.5.2. *Una base para el espacio vectorial $S(k, k-1; \Delta_p)$ es*

$$\{B_i^k|_{\bar{I}} : -k \leq i \leq p-1\}.$$

Como consecuencia la dimensión de $S(k, k-1; \Delta_p)$ es $p+k$.

Nota 1.5.3. *A lo largo del trabajo es posible que se abuse de la notación, utilizando la misma nomenclatura para B_i^k que para $B_i^k|_{\bar{I}}$, es decir: $B_i^k|_{\bar{I}} = B_i^k$.*

Supongamos dados una serie de datos $\{y_1, \dots, y_p : y_i \in \mathbb{R}\}$. Entonces el problema de interpolación lagrangiana se enuncia de la siguiente forma:

$$\text{Encontrar } s \in S(k, k-1; \Delta_p) \text{ tal que } s(t_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq p.$$

Se demuestra que las formas lineales asociadas a este problemas son linealmente independientes. Como la dimensión del espacio $S(k, k-1; \Delta_p) = p+k$ y hay $p+1$ ligaduras o condiciones, disponemos de $k-1$ posibilidades de elección para asegurar la unisolvencia del problema propuesto.

En el caso en que tengamos que interpolar en el espacio $S(1, 0; \Delta_p)$, $k-1 = 0$, con lo cual no disponemos grados de libertad.

Cuando se trabaja con splines cuadráticos de clase 1, es decir, en el espacio $S(2, 1; \Delta_p)$, $k-1 = 1$, y para obtener la unisolvencia hay que introducir un dato adicional. Lo habitual será añadir el valor de la derivada en cualquiera de los extremos t_0 o t_p del intervalo o minimizar alguna cantidad relacionada con el spline como puede ser una estimación de su energía a flexión.

Una de las situaciones más usuales es que el espacio sea el de los splines de grado $2k-1$ y clase $2k-2$, es decir, $S(2k-1, 2k-2; \Delta_p)$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$. Para garantizar la unisolvencia en este caso hay que imponer $2k-2$ condiciones adicionales. A continuación se exponen los esquemas más comunes (ver G. Hämmerlin[38]).

Proposición 1.5.4. *Los siguientes esquemas de interpolación son unisolventes*

i) *Interpolación con condiciones Hermite.*

El problema que se plantea es:

Dada $f \in C^k(\bar{I})$, encontrar $s \in S(2k-1, 2k-2; \Delta_p)$ tal que

- $s(t_i) = f(t_i) \quad i = 0, \dots, p,$
- $s^{(\mu)}(\alpha) = f^{(\mu)}(\alpha) \quad y \quad s^{(\mu)}(\beta) = f^{(\mu)}(\beta), \quad \mu = 1, \dots, k-1.$

ii) *Interpolación con condiciones naturales.*

El problema que se plantea es:

Dada $f \in C^m(\bar{I})$, $2 \leq k \leq p-1$ encontrar $s \in S(2k-1, 2k-2; \Delta_p)$ tal que

- $s(t_i) = f(t_i), \quad i = 0, \dots, p,$
- $s^{(\mu)}(\alpha) = s^{(\mu)}(\beta) = 0, \quad \mu = k, \dots, 2k-2.$

iii) *Interpolación con condiciones periódicas.*

Dada $f \in C^k(\bar{I})$, con $f^{(\kappa)}(\alpha) = f^{(\kappa)}(\beta)$ para $\kappa = 0, \dots, k-1$ encontrar $s \in S(2k-1, 2k-2; \Delta_p)$ tal que

- $s(t_i) = f(t_i) \quad i = 0, \dots, p,$
- $s^{(\mu)}(\alpha) = s^{(\mu)}(\beta), \quad \mu = 1, \dots, 2k-2.$

Notas 1.5.5. 1. *La misma forma de trabajo se puede emplear para otros espacios de splines como $S(3, 1; \Delta_p)$ o $S(2, 0; \Delta_p)$ aunque es obvio que el número de condiciones adicionales será distinto.*

2. *En cualquier caso siempre habrá que verificar que el conjunto de todas las formas lineales asociadas al problema, las de partida y las de las condiciones que se introducen son linealmente independientes.*

Recordamos el teorema de Schoenberg-Whitney (1953), fundamental en el estudio de interpolación polinómica.

Teorema 1.5.6. *Se consideran los nodos t_{-p}, \dots, t_{p+k} . Entonces existe un único spline $s \in S(k, k-1; \Delta_p)$ que interpola los valores y_1, \dots, y_{p+k} en los puntos $\zeta_1 < \dots < \zeta_{p+k}$ si y solo si*

$$B_{j-p-1}^k(\zeta_j) \neq 0, \quad 1 \leq j \leq p+k.$$

Si queremos interpolar los valores de una función conocida, $f \in C[t_0, t_p]$, en $x_1, \dots, x_n \in [t_0, t_p]$, se puede definir el operador de interpolación de Lagrange asociado a la función f como

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{i=1}^{p+k} f(x_i) B_i^k(x), \quad \forall x \in [t_0, t_p]. \quad (1.4)$$

Teorema 1.5.7. Sean $I = (\alpha, \beta)$ y $\Delta_p = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_p = \beta\}$. Consideremos s el spline cúbico con condiciones Hermite que interpola a $f \in C^2(\bar{I})$ en los nodos de la partición considerada. Entonces se tiene que

$$\forall x \in \bar{I}, |f(x) - s(x)| \leq h^{\frac{3}{2}} \left(\int_I (f''(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{donde } h = \max_{0 \leq j \leq p-1} (t_{j+1} - t_j).$$

También se tienen los siguientes resultados para las seminormas

Teorema 1.5.8. Sean $I = (\alpha, \beta)$ y Δ_p una partición uniforme de paso h de \bar{I} . Consideremos s el spline cúbico con condiciones Hermite que interpola a $f \in C^4(\bar{I})$ en los nodos de la partición considerada. Entonces se tiene que

$$|f - s|_{l, \bar{I}}^2 \leq K_l h^{4-l}, \quad l = 0, 1, 2, 3,$$

donde K_l , $l = 0, 1, 2, 3$, depende únicamente de f y $h = \max_{0 \leq j \leq p-1} (t_{j+1} - t_j)$.

Teorema 1.5.9. Sean $I = (\alpha, \beta)$, $h = \frac{\beta - \alpha}{p}$ y consideremos una partición uniforme de paso h de \bar{I} . Consideremos asimismo el spline cúbico natural s que interpola a $f \in C^4(\bar{I})$ en los nodos de la partición considerada. Entonces se tiene que

$$\|f - s\|_{\infty, I} \leq \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_{\infty, I}.$$

Por último enunciamos un teorema que nos da información sobre el error para los tres casos de interpolación presentados en la Proposición 1.5.4, que aunque nos ofrece información sobre la convergencia de las derivadas del spline, no es óptimo en cuanto a acotación del error.

Teorema 1.5.10. Sean $I = (\alpha, \beta)$ y $\Delta_p = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_p = \beta\}$. Consideremos $s \in S(2k - 1, 2k - 2; \Delta_p)$ el spline que interpola a $f \in C^k(\bar{I})$, $k \geq 2$ en Δ_p . Entonces, para $0 \leq l \leq k - 1$ se tiene que

$$\|f^{(l)} - s^{(l)}\|_{\infty, I} \leq \frac{k!}{l! \sqrt{k}} h^{k-l-\frac{1}{2}} |f^{(k)}|_{0, I}, \quad h = \max_{0 \leq j \leq p-1} (t_{j+1} - t_j).$$

1.6. Elementos finitos

La teoría de elementos finitos, en la forma en la que a continuación será presentada, ha sido desarrollada entre otros por P. G. Ciarlet y puede ser consultada, por ejemplo, en [25] y [26], referencias, junto con la de M. Pasadas[63], de las que están tomados gran parte de los resultados, definiciones y comentarios de esta sección.

1.6.1. Nociones generales

Sean K un subconjunto de \mathbb{R}^p compacto, conexo, de interior no vacío y frontera lipschitziana, \mathcal{C} un espacio vectorial de funciones reales definidas sobre K y P un subconjunto propio de \mathcal{C} .

Consideramos también $\Sigma = \{\Phi_1, \dots, \Phi_M\}$, $M \in \mathbb{N}^*$ una familia de M formas lineales definidas sobre \mathcal{C} linealmente independientes.

Definición 1.6.1. *Se dice que el subconjunto Σ es P -unisolvante si, para cualesquiera $\alpha_1, \dots, \alpha_M \in \mathbb{R}$, existe una única función $q \in P$ tal que*

$$\forall i = 1, \dots, M, \Phi_i(q) = \alpha_i.$$

Nota 1.6.2. *Si Σ es P -unisolvante y si, para $i = 1, \dots, M$, la forma lineal Φ_i está asociada a un punto $\mathbf{a}_i \in K$ de forma que*

$$\forall v \in \mathcal{C}, \Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_i),$$

diremos que el conjunto $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M\}$ es P -unisolvante.

Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \Phi : P &\longrightarrow \mathbb{R}^M, \\ q &\longmapsto (\Phi_1(q), \dots, \Phi_M(q)). \end{aligned}$$

Evidentemente Σ es P -unisolvante si, y sólo si, Φ es biyectiva. Por tanto, una vez verificada la condición

$$\dim P = M (= \text{card } \Sigma), \quad (1.5)$$

basta con analizar bien la inyectividad, bien la suprayectividad de Φ , para comprobar la P -unisolvencia de Σ . Ahora bien, Φ es inyectiva si, y sólo si, $\ker \Phi = \{\mathbf{0}\}$, es decir, si, y sólo si

$$q \in P \text{ y } \Phi_i(q) = 0, \text{ para cada } i = 1, \dots, M \Rightarrow q = 0. \quad (1.6)$$

Por otra parte, Φ es suprayectiva si, y sólo si, existe al menos una antiimagen de cada elemento de la base canónica de \mathbb{R}^M , o sea, si y sólo si

$$\forall j = 1, \dots, M, \exists q_j \in P : \forall i = 1, \dots, M, \Phi_i(q_j) = \delta_{ij}. \quad (1.7)$$

En consecuencia:

Lema 1.6.3. Σ es P -unisolvante si, y sólo si, se verifica (1.5) y (1.6) o bien (1.5) y (1.7).

Definición 1.6.4. Se dice que la terna (K, P, Σ) es un elemento finito si Σ es P -unisolvante. Las formas lineales $\Phi_i \in \Sigma$, $i = 1, \dots, M$, se denominan grados de libertad y las funciones $q_j \in P$, $j = 1, \dots, M$, dadas por (1.7) se llaman funciones de base del elemento finito.

Nota 1.6.5. La P -unisolvencia del conjunto Σ es equivalente al hecho de que las M formas lineales Φ_i constituyan una base del espacio dual de P . Como consecuencia, las bases $\{\Phi_i\}_{1 \leq i \leq M}$ y $\{q_i\}_{1 \leq i \leq M}$ son duales en el sentido algebraico.

Nota 1.6.6. Para indicar la dependencia de P y Σ respecto de K , se sustituirá a veces la terna (K, P, Σ) por (K, P_K, Σ_K) y, tanto los grados de libertad Φ_i como las funciones de base q_i , por Φ_{iK} y q_{iK} , respectivamente. En algunas ocasiones, por abuso de lenguaje, se llama elemento finito únicamente a K .

Nota 1.6.7. En la mayoría de los casos, el espacio funcional P contiene un espacio de polinomios $\mathbb{P}_k(K)$, para algún entero k . Este hecho será crucial en la obtención de propiedades de convergencia.

Nota 1.6.8. Es también usual que los grados de libertad sean de la forma:

$$\Phi_i : q \mapsto q(\mathbf{a}_i), \quad (1.8)$$

o bien

$$\Phi_i : q \mapsto D^l q(\mathbf{b}_i)(\boldsymbol{\xi}_{1i}^l, \dots, \boldsymbol{\xi}_{li}^l). \quad (1.9)$$

donde $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j^l$ son puntos de K , denominados nodos del elemento finito, y $\boldsymbol{\xi}_{ij}^l$, con $1 \leq i \leq l$, son vectores que dependen de la geometría de K , o son vectores fijos de \mathbb{R}^p . Si todos los grados de libertad son del tipo (1.8) se dice que (K, P, Σ) es un elemento finito de Lagrange, mientras que si al menos uno de ellos es del tipo (1.9), se dice que es un elemento finito de Hermite.

Nota 1.6.9. Con frecuencia se omite precisar cuál es el espacio \mathcal{C} . En el caso de elementos finitos de Hermite, resulta conveniente considerar $\mathcal{C} = C^\mu(K)$, donde μ es el máximo de los órdenes de derivación que intervienen en la definición de los grados de libertad.

Definición 1.6.10. Dado un elemento finito (K, P, Σ) , se llama operador de P -interpolación sobre Σ al operador $\Pi : \mathcal{C} \rightarrow P$ dado por

$$\Pi v = \sum_{i=1}^M \Phi_i(v) q_i.$$

Observemos que, dada $v \in \mathcal{C}$, su P -interpolante Πv se caracteriza equivalentemente por las condiciones

$$\begin{cases} \Pi v \in P, \\ \forall i = 1, \dots, M, \Phi_i(\Pi v) = \Phi_i(v). \end{cases}$$

Asimismo, $\Pi q = q$, para todo $q \in P$.

Definición 1.6.11. Dos elementos finitos, (K, P_K, Σ_K) y (L, P_L, Σ_L) , son iguales si $K = L$, $P_K = P_L$ y $\Pi_K = \Pi_L$, donde Π_K y Π_L son, respectivamente, los operadores de P_K -interpolación sobre Σ_K y de P_L -interpolación sobre Σ_L .

Definición 1.6.12. Dos elementos finitos $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ y (K, P, Σ) son afín-equivalentes si existe una aplicación afín biyectiva $F : \hat{K} \rightarrow K$ tal que

$$P = \{q : K \rightarrow \mathbb{R} \mid q \circ F \in \hat{P}\}$$

y todos los grados de libertad $\Phi \in \Sigma$ son de la forma $\Phi(v) = \hat{\Phi}(v \circ F)$ para algún $\hat{\Phi} \in \hat{\Sigma}$.

Nota 1.6.13. Se sigue inmediatamente de la Definición 1.6.12 que:

- (i) $\dim P = \dim \hat{P}$;
- (ii) si \hat{q}_i , para $i = 1, \dots, M$, son las funciones de base de $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, entonces $q_i = \hat{q}_i \circ F^{-1}$, para $i = 1, \dots, M$, son las de (K, P, Σ) ;
- (iii) para toda función $v \in \mathcal{C}$, $\Pi v \circ F = \hat{\Pi}(v \circ F)$, siendo $\hat{\Pi}$ y Π , respectivamente, los operadores de \hat{P} -interpolación sobre $\hat{\Sigma}$ y P -interpolación sobre Σ .

Teorema 1.6.14. *Sea $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ un elemento finito cuyos grados de libertad están definidos en $C^\mu(\hat{K})$, con $\mu \in \mathbb{N}$, y son de la forma (1.8) o (1.9). Sean $m, k \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq k + 1$, $P_k(\hat{K}) \subset \hat{P} \subset H^m(\hat{K})$ y $H^{k+1}(\hat{K}) \hookrightarrow C^\mu(\hat{K})$. Entonces, existe una constante $C = C(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ tal que, para todo elemento finito (K, P, Σ) afín-equivalente y para toda $v \in H^{k+1}(K)$,*

$$|v - \Pi_K v|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K},$$

donde Π_K es el operador de P -interpolación sobre Σ , ρ_K es el supremo de los diámetros de las hiperesferas contenidas en K y h_K es el diámetro de K .

Demostración. Cf. P.G. Ciarlet[25, Teorema 3.1.5]. \square

1.6.2. Elemento finito unidimensional de clase C^k

Dados $b_0 \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, sea $K \subset \mathbb{R}$ el intervalo cerrado $[b_0, b_1]$, con $b_1 = b_0 + h$. Consideremos también $k \in \mathbb{N}^*$.

Lema 1.6.15. *El conjunto de formas lineales*

$$\Sigma = \{\Phi_l^s : v \mapsto v^{(l)}(b_s) \mid s = 0, 1, l = 0, \dots, k\}, \quad (1.10)$$

definidas sobre $\mathcal{C} = C^k(K)$, es $P_{2k+1}(K)$ -unisolvente.

Demostración. Notemos, en primer lugar, que

$$\dim P_{2k+1}(K) = 2k + 2 = \text{card } \Sigma. \quad (1.11)$$

Sea ahora $q \in P_{2k+1}(K)$ tal que $\Phi_l^s(q) = 0$, para $s = 0, 1$ y $l = 0, \dots, k$. Como q es un polinomio de grado $2k + 1$, lo podemos expresar como

$$q(x) = \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{q^{(j)}(b_0)}{j!} (x - b_0)^j.$$

Asimismo,

$$q(x) = \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{q^{(j)}(b_1)}{j!} (x - b_1)^j.$$

Ahora bien, por hipótesis,

$$\forall s = 0, 1, \forall j = 0, \dots, k, q^{(j)}(b_s) = 0.$$

Luego

$$q(x) = (x - b_0)^{k+1} \sum_{j=k+1}^{2k+1} \frac{q^{(j)}(b_0)}{j!} (x - b_0)^{j-k-1}$$

y también

$$q(x) = (x - b_1)^{k+1} \sum_{j=k+1}^{2k+1} \frac{q^{(j)}(b_1)}{j!} (x - b_1)^{j-k-1}.$$

Por tanto $(x - b_0)^{k+1}(x - b_1)^{k+1}$ es un polinomio de grado $2k + 2$ que divide a q . En consecuencia, $q = 0$, de donde se sigue el resultado, considerando (1.11) y aplicando el Lema 1.6.15. \square

Del lema precedente se deduce de modo inmediato el siguiente

Corolario 1.6.16. *La terna $(K, P_{2k+1}(K), \Sigma)$, con Σ dado en (1.10), es un elemento finito, denominado elemento finito unidimensional de clase C^k .*

Se puede dar una definición equivalente del elemento finito unidimensional de clase C^k mediante un conjunto distinto de grados de libertad. En efecto, sea

$$\Sigma' = \{\Psi_i^s : v \mapsto (-1)^{sl} h^l v^{(l)}(b_s) \mid s = 0, 1, l = 0, \dots, k\}.$$

Lema 1.6.17. *$(K, P_{2k+1}(K), \Sigma')$ y $(K, P_{2k+1}(K), \Sigma)$ son dos elementos finitos iguales.*

Demostración. Puede encontrarse en [82]. \square

Teorema 1.6.18. *Todos los elementos finitos unidimensionales de clase C^k son afín-equivalentes.*

Demostración. Puede consultarse en [82]. \square

Teorema 1.6.19. *Sea $(\hat{K}, P_{2k+1}(\hat{K}), \hat{\Sigma})$ el elemento finito unidimensional de clase C^k definido sobre $\hat{K} = [0, 1]$. Entonces existe una constante $C = C(\hat{K}, P_{2k+1}(\hat{K}), \hat{\Sigma})$ tal que, para todo elemento finito unidimensional de clase C^k , $(K, P_{2k+1}(K), \Sigma)$, para todo $k' \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq k' \leq 2k + 1$, para toda función $v \in H^{k'+1}(K)$ y para todo $m = 0, \dots, k' + 1$,*

$$|v - \Pi_K v|_{m,K} \leq C h_K^{k'+1-m} |v|_{k'+1,K},$$

donde Π_K es el operador de $P_{2k+1}(K)$ -interpolación sobre Σ y h_K es la longitud del intervalo K .

Demostración. Es inmediata aplicando el Teorema 1.6.14, si tenemos en cuenta el lema y el teorema precedentes. \square

Nota 1.6.20. El elemento $(\hat{K}, P_{2k+1}(\hat{K}), \hat{\Sigma})$, con $\hat{K} = [0, 1]$, que aparece en el teorema anterior recibe el nombre de elemento finito unidimensional de referencia de clase C^k . Para $l = 0, \dots, k$ y $s = 0, 1$, se indica por \hat{N}_{2l+s}^k la función de base de este elemento asociada al grado de libertad $\hat{\Phi}_l^s$, caracterizada por las siguientes condiciones

$$\begin{cases} \hat{N}_{2l+s}^k \in P_{2k+1}([0, 1]), \\ \forall t = 0, 1, \forall m = 0, \dots, k, (\hat{N}_{2l+s}^k)^{(m)}(t) = \delta_{st}\delta_{lm}. \end{cases}$$

En la tabla 1.6.1 se dan las expresiones explícitas de las funciones \hat{N}_{2l+s}^k para $k = 1, 2$.

k	l	$s = 0$	$s = 1$
1	0	$(1 + 2x)(x - 1)^2$	$x^2(3 - 2x)$
	1	$x(x - 1)^2$	$x^2(x - 1)$
2	0	$(1 + 3x + 6x^2)(1 - x)^3$	$x^3(10 - 15x + 6x^2)$
	1	$x(1 + 3x)(1 - x)^3$	$x^3(1 - x)(3x - 4)$
	2	$\frac{1}{2}x^2(1 - x)^3$	$\frac{1}{2}x^3(1 - x)^2$

Tabla 1.6.1: Funciones \hat{N}_{2l+s}^k .

1.6.3. Elemento finito de Bogner–Fox–Schmit

Los contenidos de esta sección están tomados de J.J. Torrens[74], donde se pueden encontrar las demostraciones de los resultados que aquí enunciaremos.

Dados $\mathbf{b}_{00} = (b_{00}^1, b_{00}^2) \in \mathbb{R}^2$ y $h_1, h_2 > 0$, sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo de vértices $\mathbf{b}_{\beta} = \mathbf{b}_{00} + \beta_1 h_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 h_2 \mathbf{e}_2$, con $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$ tal que $|\beta|_{\infty} \leq 1$. Notemos que los lados de K son paralelos a los ejes de coordenadas (véase la Figura 1.6.4).

Sea $k \in \mathbb{N}^*$.

Lema 1.6.21. *El conjunto de formas lineales*

$$\Sigma = \{ \phi_{\alpha}^{\beta} : v \mapsto \partial^{\alpha} v(\mathbf{b}_{\beta}) \mid \|\alpha\|_{\infty} \leq k, |\beta|_{\infty} \leq 1 \} \quad (1.12)$$

es $Q_{2k+1}(K)$ -unisolvante.

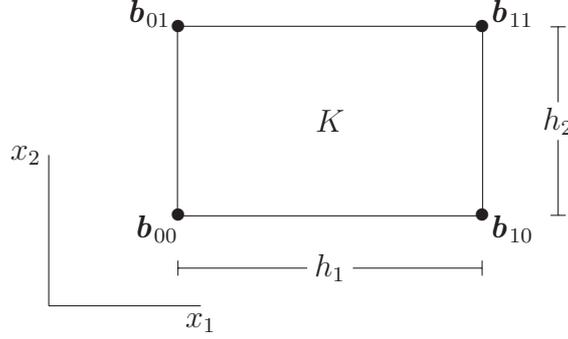


Figura 1.6.4: Rectángulo K de lados paralelos a los ejes.

Definición 1.6.22. El elemento finito $(K, Q_{2k+1}(K), \Sigma)$, con Σ dado en (1.12), recibe el nombre de elemento finito de Bogner–Fox–Schmit de clase C^k (abreviadamente, k -BFS).

Para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, con $|\alpha|_\infty \leq k$, y para cada $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$, con $|\beta|_\infty \leq 1$, la función de base $p_{\alpha k}^\beta$ asociada al grado de libertad Φ_α^β está dada por

$$p_{\alpha k}^\beta(x) = h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \hat{N}_{2\alpha_1+\beta_1}^k \left(\frac{x_1 - b_{00}^1}{h_1} \right) \hat{N}_{2\alpha_2+\beta_2}^k \left(\frac{x_2 - b_{00}^2}{h_2} \right),$$

siendo \hat{N}_{2l+s}^k las funciones de base del elemento finito de referencia unidimensional de clase C^k .

Se puede dar una definición equivalente del elemento finito k -BFS mediante un conjunto distinto de grados de libertad. En efecto, sea Σ' el conjunto

$$\left\{ \psi_\alpha^\beta : v \mapsto D^{|\alpha|} v(\mathbf{b}_\beta) \left((\Delta_{\beta^+})^{\alpha_1}, (\Delta_{\beta^-})^{\alpha_2} \right) : |\alpha|_\infty \leq k, |\beta|_\infty \leq 1 \right\},$$

donde $\Delta_{\beta^+} = b_{\beta^+} - b_\beta$ y $\Delta_{\beta^-} = b_{\beta^-} - b_\beta$, siendo \mathbf{b}_{β^+} y \mathbf{b}_{β^-} , respectivamente, los vértices de K posterior y anterior a \mathbf{b}_β si se recorre la frontera de K en el sentido contrario al de las agujas del reloj (así por ejemplo, $\mathbf{b}_{01^+} = \mathbf{b}_{00}$ y $\mathbf{b}_{01^-} = \mathbf{b}_{11}$). Recordemos, asimismo, que $(\Delta_{\beta^+})^{\alpha_1}$ y $(\Delta_{\beta^-})^{\alpha_2}$ indican, respectivamente,

$$\overbrace{\Delta_{\beta^+}, \dots, \Delta_{\beta^+}}^{\alpha_1 \text{ veces}} \quad \text{y} \quad \overbrace{\Delta_{\beta^-}, \dots, \Delta_{\beta^-}}^{\alpha_2 \text{ veces}}.$$

Lema 1.6.23. $(K, Q_{2k+1}(K), \Sigma')$ y $(K, Q_{2k+1}(K), \Sigma)$ son dos elementos finitos iguales.

Teorema 1.6.24. *Todos los elementos finitos k -BFS son afín-equivalentes.*

Teorema 1.6.25. *Sea $(\hat{K}, Q_{2k+1}(\hat{K}), \hat{\Sigma})$ el elemento finito k -BFS definido sobre $\hat{K} = [0, 1]^2$. Entonces, existe una constante $C = C(\hat{K}, Q_{2k+1}(\hat{K}), \hat{\Sigma})$ tal que, para todo elemento finito k -BFS $(K, Q_{2k+1}(K), \Sigma)$, para toda $v \in N^{2k+2}(K)$ y para todo $m = 0, \dots, 2k + 2$,*

$$|v - \Pi_K v|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{2k+2}}{\rho_K^m} |v|_{2k+2,K},$$

donde Π_K es el operador de $Q_{2k+1}(K)$ -interpolación sobre Σ , y h_K y ρ_K son, respectivamente, las longitudes de la diagonal y del menor de los lados de K .

1.6.4. Espacios de Elementos Finitos

Resulta complicado describir, en general, la construcción de espacios de elementos finitos. Las principales dificultades provienen, por un lado, de la definición de las “caras” de elementos no poligonales y, por otro lado, en el caso de elementos finitos de tipo Hermite, de las condiciones de compatibilidad de elementos adyacentes a lo largo de las caras comunes.

En los libros de P. G. Ciarlet[25] y P. A. Raviart y J. M. Thomas[69] se puede encontrar una definición detallada de los espacios asociados a los elementos finitos de Lagrange. En esta subsección, siguiendo el mismo procedimiento y basándonos en gran medida en J.J. Torrens[74, sección 2.3] y en la tesis de M. Pasadas[63, sección 1.5], desarrollamos la construcción de espacios a partir de los dos elementos definidos en las subsecciones precedentes, es decir, el elemento finito unidimensional de clase C^k y el elemento finito k -BFS.

Espacio de elementos finitos unidimensionales de clase C^k

Sea $\Omega = (a, b)$ un intervalo abierto y acotado. Sean $x_0, \dots, x_M \in \bar{\Omega}$ tales que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M-1} < x_M = b,$$

y, para $i = 1, \dots, M$, pongamos $K_i = [x_{i-1}, x_i]$. Obviamente, la familia de subintervalos $\mathcal{T}_h = \{K_i : i = 1, \dots, M\}$ verifica que

$$(i) \quad \bigcup_{i=1}^M K_i = \bar{\Omega};$$

$$(ii) \quad \text{si } i \neq j, \text{ entonces } \text{Int}(K_i) \cap \text{Int}(K_j) = \emptyset;$$

- (iii) cada extremo de cada intervalo K_i , para $i = 1, \dots, M$, o bien es un extremo de otro intervalo K_j , o bien es un extremo de Ω .

Así pues \mathcal{T}_h es una *triangulación* de $\bar{\Omega}$ (cf. P. G. Ciarlet[25]).

Al subíndice h se le asigna, por convenio, el siguiente valor:

$$h = \max_{i=1, \dots, M} h_i, \quad (1.13)$$

donde $h_i = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, \dots, M$.

Definición 1.6.26. Dado $k \in \mathbb{N}^*$, diremos que el conjunto

$$X_h = \left\{ v = (v_{K_i})_{i=1, \dots, M} \in \prod_{i=1}^M P_{2k+1}(K_i) : \forall l = 0, \dots, k, \right. \\ \left. \forall i = 1, \dots, M-1, (v_{K_i})^{(l)}(x_i) = (v_{K_{i+1}})^{(l)}(x_i) \right\}$$

es el espacio de elementos finitos *construido sobre \mathcal{T}_h a partir del elemento finito genérico unidimensional de clase C^k* .

De la definición precedente resulta inmediatamente que, para cada $v = (v_{K_i}) \in X_h$, se puede definir a trozos una función $\tilde{v} \in C^k(\bar{\Omega})$ del modo siguiente:

$$\forall i = 1, \dots, M, \quad \tilde{v}|_{K_i} = v_{K_i}.$$

Recíprocamente, si $\tilde{v} \in C^k(\bar{\Omega})$ y, para $i = 1, \dots, M$, $\tilde{v}|_{K_i} \in \mathbb{P}_{2k+1}(K_i)$, entonces $(\tilde{v}|_{K_i}) \in X_h$. Por tanto, se puede considerar (de hecho así se suele hacer) que

$$X_h = \{ \tilde{v} \in C^k(\bar{\Omega}) : \forall i = 1, \dots, M, \tilde{v}|_{K_i} \in \mathbb{P}_{2k+1}(K_i) \}. \quad (1.14)$$

Observando que, para $i = 1, \dots, M$, $P_{2k+1}(K_i) \subset H^{k+1}(K_i)$, y aplicando el Teorema 1.4.15, se tiene, en suma, que

$$X_h \subset H^{k+1}(\Omega) \cap C^k(\bar{\Omega}).$$

Las nociones de grado de libertad y de función de base se extienden al espacio X_h de la siguiente forma: para cada $l = 0, \dots, k$, y para cada $i = 1, \dots, M$, se define el grado de libertad Φ_{lh}^i como la forma lineal sobre $C^k(\bar{\Omega})$ dada por

$$\Phi_{lh}^i : v \mapsto v^{(l)}(x_i),$$

a la que se le asocia una función de base ω_i^l definida como la única función de X_h que satisface las condiciones

$$\forall l = 0, \dots, k, \forall j = 0, 1, \dots, M, (\omega_i^l)^{(l)}(x_j) = \delta_{il} \delta_{ij}.$$

Se deduce fácilmente, para $i = 1, \dots, M - 1$, que se puede escribir:

$$\omega_i^l(x) = \begin{cases} h_i^l \hat{N}_{2l+1}^k \left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right), & \text{si } x \in K_i, \\ h_{i+1}^l \hat{N}_{2l}^k \left(\frac{x - x_i}{h_{i+1}} \right), & \text{si } x \in K_{i+1}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\{\hat{N}_{2l+s}^k : s = 0, 1, l = 0, \dots, k\}$ son las funciones de base del elemento finito unidimensional de referencia de clase C^k . Asimismo,

$$\omega_0^l(x) = \begin{cases} h_1^l \hat{N}_{2l}^k \left(\frac{x - a}{h_1} \right), & \text{si } x \in K_1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y finalmente,

$$\omega_M^l(x) = \begin{cases} h_M^l \hat{N}_{2l+1}^k \left(\frac{x - x_{M-1}}{h_M} \right), & \text{si } x \in K_M, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El conjunto de funciones de base

$$\{\omega_i^l : i = 0, \dots, M, l = 0, \dots, k\}$$

es una base de X_h y, por tanto, X_h es de dimensión finita.

Se introduce, por último, el operador Π_h de X_h -interpolación como aquél que a cada $v \in C^k(\bar{\Omega})$ le asocia una función

$$\Pi_h v = \sum_{i=0}^M \sum_{l=0}^k v^{(l)}(x_i) \omega_i^l, \quad (1.15)$$

denominada X_h -interpolante de v , y que verifica

$$\begin{cases} \Pi_h v \in X_h, \\ \forall i = 0, \dots, M, \forall l = 0, \dots, k, (\Pi_h v)^{(l)}(x_i) = v^{(l)}(x_i). \end{cases}$$

De las definiciones del operador Π_h y de las funciones de base ω_i^l se desprende el siguiente lema.

Lema 1.6.27. Para todo $i = 1, \dots, M$ y para toda $v \in C^k(\bar{\Omega})$,

$$\Pi_h v|_{K_i} = \Pi_{K_i} v,$$

donde Π_{K_i} es el operador de $\mathbb{P}_{2k+1}(K_i)$ -interpolación correspondiente al elemento finito unidimensional de clase C^k construido sobre K_i .

Concluimos con un resultado de acotación del error de X_h -interpolación.

Teorema 1.6.28. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Sea $\mathcal{T}_h = (K_i)_{i=1, \dots, M}$ una triangulación de $\bar{\Omega}$, con h dado por (1.13). Entonces existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $k' \in \mathbb{N}$, con $k \leq k' \leq 2k + 1$, y para toda función $v \in H^{k'+1}(\Omega)$,

$$|v - \Pi_h v|_{m, \Omega} \leq Ch^{k'+1-m} |v|_{k'+1, \Omega}, \quad \forall m = 0, \dots, k + 1,$$

$$\left(\sum_{i=1}^M |v - \Pi_h v|_{m, K_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{k'+1-m} |v|_{k'+1, \Omega}, \quad \forall m = k + 2, \dots, k' + 1,$$

donde Π_h es el operador definido en (1.15).

Demostración. Puede encontrarse en [82]. □

Espacio de elementos finitos de Bogner-Fox-Schmit de clase C^k

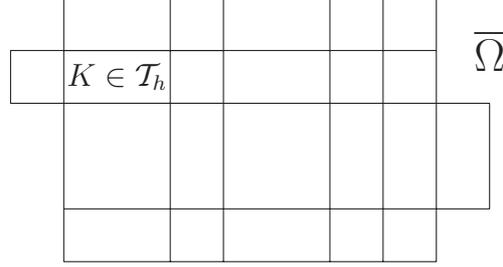
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto conexo y acotado con frontera formada por segmentos paralelos a los ejes de coordenadas. Sea \mathcal{T}_h una triangulación de $\bar{\Omega}$ mediante rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, es decir, \mathcal{T}_h verifica que :

1. $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$;
2. dados dos rectángulos distintos $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$, $\text{Int}(K_1) \cap \text{Int}(K_2) = \emptyset$;
3. los lados de todo rectángulo $K_1 \in \mathcal{T}_h$ son, bien uno de los lados de otro rectángulo $K_2 \in \mathcal{T}_h$, bien parte de la frontera de Ω .

El subíndice h tiene ahora el valor dado por

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K,$$

donde h_K es la longitud de la diagonal de cada rectángulo K .

Figura 1.6.5: Una triangulación de $\bar{\Omega}$.

Sea B_h el conjunto formado por los vértices de todos los rectángulos de \mathcal{T}_h y, para cada $\mathbf{b} \in B_h$, sea

$$\Lambda(\mathbf{b}) = \{ K \in \mathcal{T}_h \mid \mathbf{b} \in K \}.$$

Definición 1.6.29. Dado $k \in \mathbb{N}^*$, diremos que el conjunto

$$X_h = \left\{ v = (v_K)_{K \in \mathcal{T}_h} \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} Q_{2k+1}(K) : \forall \mathbf{b} \in B_h, \forall K_1, K_2 \in \Lambda(\mathbf{b}), \right. \\ \left. \forall |\boldsymbol{\alpha}|_\infty \leq k, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} v_{K_1}(\mathbf{b}) = \partial^{\boldsymbol{\alpha}} v_{K_2}(\mathbf{b}) \right\}$$

es el espacio de elementos finitos construido sobre \mathcal{T}_h a partir del elemento finito genérico de Bogner–Fox–Schmit de clase C^k .

Lema 1.6.30. Sean K_1 y K_2 dos rectángulos cualesquiera de \mathcal{T}_h con un lado común K' . Entonces,

$$\forall v \in X_h, \forall |\boldsymbol{\alpha}|_\infty \leq k, \left(\partial^{\boldsymbol{\alpha}} v_{K_1} \right) |_{K'} = \left(\partial^{\boldsymbol{\alpha}} v_{K_2} \right) |_{K'}.$$

Demostración. Véase J. J. Torrens[74, lema 2.3.1]. □

El lema anterior permite asegurar que, para cada $v = (v_K) \in X_h$, la función \tilde{v} , dada a trozos por

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \tilde{v}|_K = v_K,$$

está realmente bien definida sobre $\bar{\Omega}$ y pertenece al espacio $C^k(\bar{\Omega})$. Se deduce, pues, que se puede considerar que

$$X_h = \{ \tilde{v} \in C^k(\bar{\Omega}) : \forall K \in \mathcal{T}_h, \tilde{v}|_K \in Q_{2k+1}(K) \},$$

y, aplicando el Teorema 1.4.15, se concluye que

$$X_h \subset H^{k+1}(\Omega) \cap C^k(\bar{\Omega}).$$

Las nociones de grado de libertad y de función de base se extienden también al espacio X_h . En efecto, para cada $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, con $|\boldsymbol{\alpha}|_\infty \leq k$, y para cada $\mathbf{b} \in B_h$, se introduce el grado de libertad $\phi_{\boldsymbol{\alpha}h}^{\mathbf{b}}$, que supondremos definido sobre $C^{2k}(\overline{\Omega})$, mediante

$$\phi_{\boldsymbol{\alpha}h}^{\mathbf{b}} : v \in C^{2k}(\overline{\Omega}) \mapsto \partial^{\boldsymbol{\alpha}} v(\mathbf{b}).$$

A tal grado de libertad se le asocia la función de base $w_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\alpha}}$, la cual es la única función de X_h que satisface las condiciones

$$\forall |\boldsymbol{\alpha}'|_\infty \leq k, \forall \mathbf{b}' \in B_h, \partial^{\boldsymbol{\alpha}'} w_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{b}') = \delta_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'} \delta_{\mathbf{b}\mathbf{b}'}.$$

Resulta fácil comprobar que $w_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\alpha}}|_{K'} = 0$ si $K \notin \Lambda(\mathbf{b})$, y asimismo, que

$$w_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\alpha}}|_{K'} = p_{\boldsymbol{\alpha}k}^{\boldsymbol{\beta}}$$

si $K \in \Lambda(\mathbf{b})$ y \mathbf{b} es el nodo $\boldsymbol{\beta}$ -ésimo del rectángulo K , con $|\boldsymbol{\beta}|_\infty \leq 1$, donde, recordemos, $p_{\boldsymbol{\alpha}k}^{\boldsymbol{\beta}}$ es una de las funciones de base del elemento BFS de clase C^k construido sobre K . Así, por ejemplo, las funciones de base $w_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\alpha}}$ asociadas al nodo $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in B_h$ representado en la figura 1.6.6 se escriben explícitamente en la forma

$$w_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{h_{12}^{\alpha_1}}{h_{22}^{-\alpha_2}} \hat{N}_{2\alpha_1}^k \left(\frac{x_1 - b_1}{h_{12}} \right) \hat{N}_{2\alpha_2}^k \left(\frac{x_1 - b_2}{h_{22}} \right), & \text{si } \mathbf{x} \in K_1, \\ \frac{h_{11}^{\alpha_1}}{h_{22}^{-\alpha_2}} \hat{N}_{2\alpha_1+1}^k \left(\frac{x_1 - b_1 + h_{11}}{h_{11}} \right) \hat{N}_{2\alpha_2}^k \left(\frac{x_1 - b_2}{h_{22}} \right), & \text{si } \mathbf{x} \in K_2, \\ \frac{h_{11}^{\alpha_1}}{h_{21}^{-\alpha_2}} \hat{N}_{2\alpha_1+1}^k \left(\frac{x_1 - b_1 + h_{11}}{h_{11}} \right) \hat{N}_{2\alpha_2+1}^k \left(\frac{x_1 - b_2 + h_{21}}{h_{21}} \right), & \text{si } \mathbf{x} \in K_3, \\ \frac{h_{12}^{\alpha_1}}{h_{21}^{-\alpha_2}} \hat{N}_{2\alpha_1}^k \left(\frac{x_1 - b_1}{h_{12}} \right) \hat{N}_{2\alpha_2+1}^k \left(\frac{x_1 - b_2 + h_{21}}{h_{21}} \right), & \text{si } \mathbf{x} \in K_4, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo \hat{N}_{2l+s}^k las funciones de base del elemento finito unidimensional de referencia de clase C^k y $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$.

Notemos también que el conjunto

$$\{ w_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\alpha}} : |\boldsymbol{\alpha}|_\infty \leq k, \mathbf{b} \in B_h \}$$

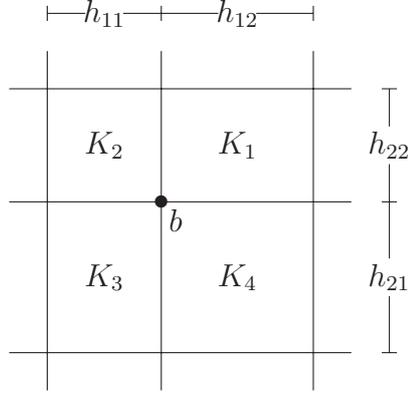


Figura 1.6.6: Nodo y rectángulos adyacentes.

es una base del espacio X_h , que, por tanto, tiene dimensión finita.

Se introduce, por último, un operador Π_h de X_h -interpolación. A cada $v \in C^{2k}(\bar{\Omega})$, se le asocia la función

$$\Pi_h v = \sum_{\mathbf{b} \in B_h} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|_\infty \leq k} \partial^{\boldsymbol{\alpha}} v(\mathbf{b}) w_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

denominada X_h -interpolante de v , que se caracteriza equivalentemente por las condiciones

$$\begin{cases} \Pi_h v \in X_h, \\ \forall \mathbf{b} \in B_h, \forall |\boldsymbol{\alpha}|_\infty \leq k, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \Pi_h v(\mathbf{b}) = \partial^{\boldsymbol{\alpha}} v(\mathbf{b}). \end{cases}$$

De las definiciones del operador Π_h y de las funciones de base $w_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\alpha}}$, se desprende que:

Lema 1.6.31. *Para todo $K \in \mathcal{T}_h$ y para toda $v \in C^{2k}(\bar{\Omega})$,*

$$(\Pi_h v)|_K = \Pi_K v,$$

donde Π_K es el operador de $Q_{2k+1}(K)$ -interpolación correspondiente al elemento finito BFS de clase C^k construido sobre K .

Por último, se tiene el siguiente resultado de acotación del error de X_h -interpolación.

Teorema 1.6.32. *Supongamos que existe una constante $\nu > 0$ tal que*

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \nu,$$

donde h_K y ρ_K son, respectivamente, las longitudes de la diagonal y del menor de los lados de cada rectángulo K . Entonces, existe una constante C tal que, para toda función $v \in H^{2k+2}(\Omega)$,

$$|v - \Pi_h v|_{m,\Omega} \leq C h^{2k+2-m} |v|_{2k+2,\Omega}, \quad \text{si } 0 \leq m \leq k+1,$$

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \Pi_h v|_{m,K}^2 \right)^{1/2} \leq C h^{2k+2-m} |v|_{2k+2,\Omega}, \quad \text{si } k+2 \leq m \leq 2k+2.$$

Demostración. Cf. J. J. Torrens[74, Teorema 2.3.5]. □

Capítulo 2

Aproximación mediante curvas ODE

2.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a la construcción de curvas a partir de un problema de contorno dado por una ecuación diferencial ordinaria y condiciones de contorno de tipo Hermite, y un conjunto de puntos de aproximación. Se pretende que la curva obtenida interpole las condiciones de contorno y aproxime tanto la solución del problema diferencial como los puntos inicialmente dados. A una curva así obtenida la llamaremos curva ODE (Ordinary Differential Equation).

En el desarrollo del capítulo consideramos operadores simétricos y definidos positivos que modelizan una gran variedad de problemas de vigas y otros problemas de ingeniería. Por otro lado, el modelo propuesto resuelve, bajo las condiciones adecuadas, problemas *blending*, en los cuales se trata de unir, de forma suave, mediante una curva ODE, otras dos dadas no conexas. Con el modelo que desarrollamos además podemos conseguir que esta curva ODE ajuste un conjunto de puntos dados sobre el intervalo donde esté definida. Diferentes variantes del problema han sido estudiadas en [7], [58].

Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado. Siguiendo la idea de [7], los candidatos naturales son los operadores lineales de orden $2n$ de la forma

$$Lu(t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j (p_j(t) u^{(j)}(t))^{(j)}, \quad t \in I,$$

con $p_j(t) \in H^j(I)$, $0 \leq j \leq n$, y $p_n(t) \geq \nu > 0$ para todo t en I , siendo ν constante.

Este tipo de operador diferencial aparece en diferentes problemas de ingeniería como por ejemplo los siguientes casos de flexión de vigas en teoría de estructuras:

- La flexión de una viga de longitud l , sometida a una carga normal $p(t)$, para todo $t \in [0, l]$, con módulo de elasticidad $E(t)$ y módulo de inercia $I(t)$, en cada sección transversal a la línea neutra, está modelizada por la ecuación diferencial ordinaria,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(E(t)I(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) = p(t), \quad t \in (0, l),$$

siendo $u(t)$ la posición del punto t de la línea neutra tras la deformación.

- Si la viga está sometida a su vez a un esfuerzo axial $N(t)$, se verifica que

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(E(t)I(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) - \frac{d}{dt} \left(N(t) \frac{d}{dt} u(t) \right) = p(t), \quad t \in (0, l).$$

- Si la viga tiene ciertas características elásticas (viga con fundamento flexible), entonces

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(E(t)I(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) - \frac{d}{dt} \left(N(t) \frac{d}{dt} u(t) \right) + k(t)u(t) = p(t),$$

con $t \in (0, l)$ y donde $k(t)$ es una función que depende de las características elásticas del material.

El capítulo está estructurado como sigue: en la siguiente sección, se introducen las herramientas e hipótesis necesarias para poder plantear de manera rigurosa el problema que se va a abordar, en el cual intervienen de forma esencial una ecuación diferencial y un conjunto de puntos de aproximación. Después de enunciar el concepto de curva ODE se demuestra un teorema que establece la existencia y la unicidad de una curva ODE cuando se fijan una serie de condiciones.

En la sección 2.3 se enuncian y demuestran resultados previos que tienen por objetivo estudiar y establecer teoremas acerca de la convergencia de la

solución del problema planteado en la sección anterior hacia una función de la cual procedan los datos de ajuste, siempre que el número de éstos tienda a infinito.

Finaliza el capítulo calculando con detalle las estimaciones del error de aproximación cometido al aproximar una función de un espacio determinado, de la cual extraemos el conjunto de puntos de aproximación, mediante una curva ODE.

2.2. Planteamiento del problema.

A lo largo del capítulo suponemos dados:

- $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$;
- un intervalo abierto y acotado de \mathbb{R} , $I = (\alpha, \beta)$;
- un operador diferencial de orden $2n$

$$L : H^{2n}(I) \longrightarrow L^2(I),$$

de la forma:

$$Lu(t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j (p_j(t)u^{(j)}(t))^{(j)}, \quad \alpha < t < \beta,$$

con $p_j(t) \in H^j(I)$, $0 \leq j \leq n$, y verificando

$$p_n(t) \geq \nu > 0 \quad t \in \bar{I},$$

donde ν es una constante.

Consideramos la forma bilineal y simétrica

$$(u, v)_L = \sum_{j \leq n} \int_I p_j(t) u^{(j)}(t) v^{(j)}(t) dt, \quad (2.1)$$

y suponemos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i(t) (u^{(i)}(t))^2 \geq 0, \quad \forall t \in I, \quad \forall u \in H^n(I), \quad (2.2)$$

$$p_n(t) \geq \nu > 0, \quad \forall t \in I,$$

con lo que dicha forma bilineal $(\cdot, \cdot)_L$ define un semiproducto escalar en $H^n(I)$. Notamos a la seminorma asociada mediante $|u|_L = (u, u)_L^{\frac{1}{2}}$.

Un operador diferencial así definido, verificando (2.2), se conoce con el nombre de operador fuertemente elíptico en I . A partir de (2.2) se puede comprobar que la forma bilineal $(\cdot, \cdot)_L$ es coerciva en $H_0^n(I)$. Por tanto, existe $C > 0$ tal que

$$(u, u)_L \geq C \|u\|_{n,I}^2, \quad \forall u \in H_0^n(I).$$

De esta forma, dada $f \in L^2(I)$, el Problema de Dirichlet Generalizado correspondiente tiene una única solución en $H_0^n(I)$, es decir, existe una única $u \in H_0^n(I)$ tal que se verifica la siguiente propiedad variacional

$$(u, v)_L = (f, v)_0, \quad \forall v \in H_0^n(I).$$

Consideramos el conjunto de formas lineales

$$\sum = \{\phi_i : i = 1, \dots, 2n\},$$

definidas sobre $H^n(I)$ por

$$\phi_i(v) = \begin{cases} v^{(i-1)}(\alpha) & \text{si } i = 1, \dots, n, \\ v^{(i-n-1)}(\beta) & \text{si } i = n+1, \dots, 2n; \end{cases} \quad (2.3)$$

Suponemos también dados

- dos vectores

$$\mathbf{y} = (y_i)_{i=1, \dots, 2n} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathbf{q} = (q_i)_{i=1, \dots, m} \subset \mathbb{R}^m, \quad m \in \mathbb{N};$$

- y un conjunto ordenado de puntos distintos de I

$$A^m = \{a_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Definimos los operadores $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\tau}$ de la forma

$$\boldsymbol{\rho} : H^n(I) \longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ v \longmapsto (v(a_i))_{i=1, \dots, m},$$

$$\boldsymbol{\tau} : H^n(I) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \\ v \longmapsto (\phi_i(v))_{i=1, \dots, 2n}.$$

Finalmente, consideramos el espacio vectorial

$$H_0 = \{u \in H^n(I) : \boldsymbol{\tau}u = \mathbf{0}\}$$

y el espacio afín asociado

$$H = \{u \in H^n(I) : \boldsymbol{\tau}u = \mathbf{y}\}.$$

Nota 2.2.1. *El espacio H es obviamente convexo y no vacío, puesto que cualquier interpolante polinomial $s \in \mathbb{P}_{2n-1}$ verificando $\phi_i(s) = y_i$, $i = 1, \dots, 2n$ está en H .*

Dada $f \in L^2(I)$, consideramos el problema de contorno:

$$\begin{cases} Lu = f, \\ \tau u = \mathbf{y}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Definición 2.2.2. *Decimos que σ es una curva ODE asociada a L , \mathbf{y} , A^m , \mathbf{q} y $\varepsilon > 0$, si σ es una solución del problema*

$$\begin{cases} \sigma \in H, \\ \forall v \in H, \quad J(\sigma) \leq J(v), \end{cases} \quad (2.5)$$

donde J es el funcional definido sobre $H^n(I)$, de la forma:

$$J(v) = \langle \rho v - \mathbf{q} \rangle_m^2 + \varepsilon((v, v)_L - 2(f, v)_{0,I}). \quad (2.6)$$

Nota 2.2.3. *El primer término del funcional J mide cuánto se aproxima v a \mathbf{q} en el sentido de mínimos cuadrados discretos, con lo que nos referiremos a él como término de ajuste. El segundo término del funcional, ponderado por el parámetro ε indica cuánto se aproxima v a la solución del problema (2.4).*

Teorema 2.2.4. *El problema (2.5) admite una única solución, que es también la única solución del problema variacional: encontrar $\sigma \in H$, tal que*

$$\forall v \in H_0, \quad \langle \rho u, \rho v \rangle_m + \varepsilon(u, v)_L = \langle \mathbf{q}, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,I}. \quad (2.7)$$

Demostración. Consideramos $a : H^n(I) \times H^n(I) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} a : H^n(I) \times H^n(I) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (u, v) &\longmapsto 2(\langle \rho u, \rho v \rangle_m + \langle \tau u, \tau v \rangle_{2n} + \varepsilon(u, v)_L). \end{aligned}$$

Es claro que esta forma es bilineal y simétrica en $H^n(I)$, ya que tanto el producto $\langle \cdot \rangle_m$ como el semiproducto escalar $(\cdot, \cdot)_L$ lo son.

Definimos

$$[u, v] = \langle \rho u, \rho v \rangle_m + \langle \tau u, \tau v \rangle_{2n} + (u, v)_L, \quad \forall u, v \in H^n(I).$$

Aplicando el Teorema 1.4.16, por (2.1)-(2.2) se tiene que $[\cdot, \cdot]$ es un producto escalar, y notamos su norma asociada $[[u]]^2 = [u, u]$, que es equivalente a la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{n,I}$.

Por tanto

$$a(u, u) \geq 2 \min(1, \varepsilon) (\langle \boldsymbol{\rho}u \rangle_m^2 + \langle \boldsymbol{\tau}u \rangle_{2n}^2 + |u|_L^2) \geq C \|u\|_{n,I}^2,$$

con lo que a es $H^n(I)$ -elíptica.

La continuidad de a se deduce inmediatamente de

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= |2(\langle \boldsymbol{\rho}u, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \langle \boldsymbol{\tau}u, \boldsymbol{\tau}v \rangle_{2n} + \varepsilon(u, v)_L)| \leq 2 \max(1, \varepsilon) \|u, v\| \\ &\leq 2 \max(1, \varepsilon) \|u\|_{n,I} \|v\|_{n,I}. \end{aligned}$$

También se tiene que H es convexo, cerrado y no vacío, y además la aplicación

$$\varphi(v) = 2\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + 2\varepsilon(f, v)_{0,I},$$

es claramente lineal y continua en $H^n(I)$ por lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.3.10 de Stampacchia, y concluir que existe un único $\sigma \in H$ tal que

$$a(\sigma, w - u) \geq \varphi(w - u), \quad \forall w \in H,$$

lo cual es equivalente a que

$$a(\sigma, v) \geq \varphi(v), \quad \forall v \in H_0.$$

Como H_0 es subespacio vectorial, si $v \in H_0$, entonces $-v \in H_0$ y, por tanto

$$a(\sigma, -v) \geq \varphi(-v), \quad \forall v \in H_0,$$

de donde

$$a(\sigma, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H_0.$$

Queda así demostrado que (2.7) tiene solución única.

Además σ está caracterizado por ser el mínimo en H del funcional

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \varphi(v),$$

que a su vez es equivalente a (2.5), puesto que

$$\Phi(v) = J(v) - (\langle \boldsymbol{q} \rangle_m^2 + \langle \boldsymbol{y} \rangle_{2n}^2).$$

□

Teorema 2.2.5. *Existe una y sólo una $(2n + 1)$ -upla $(\sigma, \boldsymbol{\lambda}) \in H^n(I) \times \mathbb{R}^{2n}$ tal que*

$$\begin{cases} \sigma \in H, \\ \forall v \in H^n(I), \quad \langle \boldsymbol{\rho}\sigma, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(\sigma, v)_L + \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}v \rangle_{2n} \\ \qquad \qquad \qquad = \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,I}, \end{cases} \quad (2.8)$$

donde σ es la solución de (2.5).

Demostración. Sea $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la función definida por:

$$\Psi(t) = \begin{cases} \exp\left\{1 - \frac{1}{1-t^2}\right\} & \text{si } |t| < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entre las propiedades interesantes de Ψ destacan:

1. $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2. $\Psi(0) = 1$.
3. $\left. \frac{d^j}{dt^j} \Psi(t) \right|_{t=0} = 0, \quad j \geq 0$.

Para cualquier $a \in A^m$, consideramos una nueva familia de funciones

$$\varphi^j(t) = \begin{cases} \frac{(t-\alpha)^{j-1}}{(j-1)!} \Psi\left(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right) & \text{si } j = 1, \dots, n, \\ \frac{(t-\beta)^{j-1}}{(j-n-1)!} \Psi\left(\frac{t-\beta}{\beta-\alpha}\right) & \text{si } j = n+1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Consideraremos para cualquier función $v \in H^n(I)$, la función

$$\omega = v - \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v) \varphi^i,$$

donde $\phi_i(v)$ están dadas en (2.3). Es claro que

$$\boldsymbol{\tau}\omega = \boldsymbol{\tau}v - \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v) \boldsymbol{\tau}(\varphi^i)$$

o lo que es igual

$$\phi_j(\omega) = \phi_j(v) - \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v) \phi_j(\varphi^i) = \phi_j(v) - \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v) \delta_{ij} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, 2n,$$

y por tanto $\omega \in H_0$. Ahora bien, como σ es la solución de (2.5), por el Teorema 2.2.4 tenemos que $\sigma \in H$, y que

$$\langle \rho\sigma, \rho\omega \rangle_m + \varepsilon(\sigma, \omega)_L = \langle \mathbf{q}, \rho\omega \rangle_m + \varepsilon(f, \omega)_{0,I},$$

Desarrollando esta última expresión obtenemos que para toda $v \in H^n(I)$ se verifica

$$\begin{aligned} & \left\langle \rho\sigma, \rho\left(v - \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1}\right) \right\rangle_m + \varepsilon\left(\sigma, v - \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1}\right)_L \\ &= \left\langle \mathbf{q}, \rho\left(v - \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1}\right) \right\rangle_m + \varepsilon\left(f, v - \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1}\right)_{0,I}. \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de linealidad tenemos

$$\begin{aligned} & \langle \rho\sigma, \rho v \rangle_m - \left\langle \rho\sigma, \rho \left(\sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1} \right) \right\rangle_m + \varepsilon(\sigma, v)_L \\ & - \varepsilon\left(\sigma, \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1}\right)_L = \langle \mathbf{q}, \rho v \rangle_m - \left\langle \mathbf{q}, \rho \left(\sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1} \right) \right\rangle_m \quad (2.9) \\ & + \varepsilon(f, v)_{0,I} - \varepsilon\left(f, \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1}\right)_{0,I}. \end{aligned}$$

Llamamos

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\left\langle \mathbf{q} - \rho\sigma, \rho\varphi^{i-1} \right\rangle_m - \varepsilon(\sigma, \varphi^{i-1})_L + \varepsilon(f, \varphi^{i-1})_{0,I} \right)_{i=1, \dots, 2n} \in \mathbb{R}^{2n},$$

y resulta que

$$\begin{aligned} & - \left\langle \rho\sigma, \rho \left(\sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1} \right) \right\rangle_m - \varepsilon\left(\sigma, \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1}\right)_L \\ & + \left\langle \mathbf{q}, \rho \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1} \right\rangle_m + \varepsilon\left(f, \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(v)\varphi^{i-1}\right)_{0,I} \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \left(- \left\langle \rho\sigma, \rho\varphi^{i-1} \right\rangle_m - \varepsilon(\sigma, \varphi^{i-1})_L + \left\langle \mathbf{q}, \rho\varphi^{i-1} \right\rangle_m + \varepsilon(f, \varphi^{i-1})_{0,I} \right) \phi_i(v) \\ &= \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}v \rangle_{2n}. \end{aligned}$$

Por tanto, (2.9) se escribe de la forma

$$\langle \rho\sigma, \rho v \rangle_m + \varepsilon(\sigma, v)_L + \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}v \rangle_{2n} = \langle \mathbf{q}, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,I}, \quad \forall v \in H^n(I).$$

Sea ahora $(\sigma, \boldsymbol{\lambda})$ una solución de (2.8). Veamos que es única. Es claro que $\sigma \in H$. Además, para todo $v \in H_0$, $\boldsymbol{\tau}v = 0$ y la última expresión queda

$$\langle \boldsymbol{\rho}\sigma, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(\sigma, v)_L = \langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,I}.$$

Luego σ es la solución del problema (2.7), y por tanto es única. Sea $(\sigma, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ otra solución de (2.8). Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\rho}\sigma, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(\sigma, v)_L + \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}v \rangle_{2n} &= \langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m - \varepsilon(f, v)_{0,I}, \quad \forall v \in H^n(I), \\ \langle \boldsymbol{\rho}\sigma, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(\sigma, v)_L + \langle \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\tau}v \rangle_{2n} &= \langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m - \varepsilon(f, v)_{0,I}, \quad \forall v \in H^n(I), \end{aligned}$$

y restando

$$\langle \boldsymbol{\lambda} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\tau}v \rangle_{2n} = 0, \quad \forall v \in H^n(I),$$

con lo cual $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}$ y por tanto queda demostrada la unicidad de $(\sigma, \boldsymbol{\lambda})$. \square

Notas 2.2.6. 1. *Sobre $\varepsilon > 0$. Este parámetro actúa de la siguiente forma: si $\varepsilon \gg 1$, la curva ODE tenderá a acercarse más a la solución del problema (2.4) que a ajustar los datos $(a_i, q_i), i = 1, \dots, m$. El efecto contrario tendremos si $\varepsilon \ll 1$.*

2. *Si $A^m = \emptyset$, entonces σ es la solución del problema (2.4). Es inmediato, pues en tal caso se tiene que*

$$\varepsilon(v, v)_L = \varepsilon(f, v)_{0,I}, \quad \forall v \in H_0,$$

en particular para $v \in C_0^\infty(I)$, es decir,

$$(Lu - f, v)_{0,I} = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(I).$$

y, en consecuencia, por el Lema fundamental del cálculo de variaciones

$$Lu = f,$$

y u verifica las condiciones de contorno por ser $u \in H$.

3. *Si $f = 0$, y no hay condiciones de contorno, la solución de (2.5) es un spline variacional de ajuste relativo a A^m, \mathbf{q} y ε (ver [47]).*

2.3. Convergencia

En esta sección vamos a enunciar y demostrar un Teorema de convergencia para la aproximación de una curva dada mediante curvas ODE.

Sea σ_ε^m la curva ODE asociada a L , τg , A^m , ρg y ε , donde $g \in H$ es una función dada.

Vamos a probar que cuando los datos de ajuste proceden de g y además el número de éstos tiende a infinito, bajo condiciones adecuadas, σ_ε^m converge a la mencionada función g .

Suponemos dado para todo $m \in \mathbb{N}$, un subconjunto ordenado A^m de puntos distintos de I tal que

$$\sup_{t \in I} \max_{a \in A^m} |t - a| = o\left(\frac{1}{m}\right), \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

lo cual implica que el número de datos de ajuste tiende a infinito y se distribuyen regularmente en \bar{I} , cuando $m \rightarrow +\infty$.

Suponemos que

$$\varepsilon = o(m), \quad m \rightarrow +\infty. \quad (2.11)$$

Para enunciar y demostrar el Teorema de convergencia necesitamos los siguientes resultados

Lema 2.3.1. *Sea u una solución de $Lu = f$. Entonces, para todo $v \in H_0$, se verifica*

$$(u, v)_L = (f, v)_{0,I}.$$

Demostración. Claramente

$$(f, v)_{0,I} = (Lu, v)_{0,I} \quad \forall v \in H_0.$$

Basta ahora con integrar $n - 1$ veces por partes el segundo miembro de la expresión anterior y observar que en cada paso los términos de contorno son nulos. \square

Lema 2.3.2. *La aplicación*

$$(((\cdot, \cdot))) : H^n(I) \times H^n(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$(((u, v))) = \langle \tau u, \tau v \rangle_{2n} + (u, v)_L$$

es un producto escalar en $H^n(I)$, cuya norma asociada, $[[\cdot]]$, dada por

$$\forall v \in H^n(I), \quad [[v]] = ((v, v))^{\frac{1}{2}},$$

es equivalente a la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{n,I}$.

Demostración. Obviamente $((\cdot, \cdot))$ es un semiproducto escalar en $H^n(I)$. Además se verifica que $\ker \tau \cap \mathbb{P}_{n-1} = 0$, con lo cual se concluye que $((\cdot, \cdot))$ es un producto escalar. La equivalencia entre las normas $[[\cdot]]$ y $\|\cdot\|_{n,I}$ se deduce del Teorema 1.4.16. \square

Teorema 2.3.3. *Si se verifican las hipótesis (2.10) y (2.11) entonces*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\sigma^m - g\|_{n,I} = 0. \quad (2.12)$$

Demostración. Vamos a dividir la demostración en 4 pasos claramente diferenciados.

1) Por verificarse que $J(\sigma_\varepsilon^m) \leq J(g)$, se tiene que

$$\langle \rho(\sigma_\varepsilon^m - g) \rangle_m^2 + \varepsilon (|\sigma_\varepsilon^m|_L^2 - 2(f, \sigma_\varepsilon^m)_{0,I}) \leq \varepsilon (|g|_L^2 - 2(f, g)_{0,I}),$$

se tiene que

$$\varepsilon (|\sigma^m|_L^2 - 2(f, \sigma^m)_{0,I}) \leq \varepsilon (|g|_L^2 - 2(f, g)_{0,I}),$$

o equivalentemente

$$|\sigma^m|_L^2 \leq |g|_L^2 - 2(f, g)_{0,I} + 2(f, \sigma^m)_{0,I}. \quad (2.13)$$

Por otra parte, como $\sigma^m - g \in H_0$, tenemos que, por el Lema 2.3.1, $(f, \sigma^m - g)_{0,I} = (u, \sigma^m - g)_L$, donde u es la solución de (2.4), con lo que, de (2.13), se obtiene que

$$|\sigma^m|_L^2 \leq |g|_L^2 + 2(u, \sigma^m)_L - 2(u, g)_L. \quad (2.14)$$

Por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |\sigma^m|_L^2 - |u|_L^2 &\leq |\sigma^m - u|_L^2 = |\sigma^m|_L^2 + |u|_L^2 - 2(\sigma^m, u)_L \\ &\leq |g|_L^2 - 2(u, g)_L + |u|_L^2, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se ha obtenido utilizando (2.14). Deducimos, por tanto, que

$$|\sigma^m|_L^2 \leq |g|_L^2 - 2(u, g)_L + 2|u|_L^2. \quad (2.15)$$

Utilizando que $g \in H$, obtenemos

$$\langle \rho(\sigma^m - g) \rangle_m^2 + \varepsilon \|\sigma^m\|_L^2 \leq \varepsilon (\|g\|_L^2 + 2(f, \sigma^m - g)_{0,I}).$$

Por tanto

$$\langle \rho(\sigma^m - g) \rangle_m^2 \leq \varepsilon (\|g\|_L^2 + 2(f, \sigma^m - g)_{0,I})$$

y, junto con (2.15) y teniendo en cuenta que $(f, \sigma^m - g)_{0,\bar{I}} = (u, \sigma^m - g)_L$, se deduce que

$$\langle \rho(\sigma^m - g) \rangle_m^2 = O(\varepsilon), \quad m \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

Se verifica que

$$\|[\sigma^m]\|^2 = \langle \tau \sigma^m \rangle_{2n}^2 + \|\sigma^m\|_L^2 = \langle \tau g \rangle_{2n}^2 + \|\sigma^m\|_L^2,$$

donde $\|[\cdot]\|$ es la norma definida en el Lema 2.3.2.

Por tanto, de (2.15), concluimos que

$$\|[\sigma^m]\| = O(1), \quad m \rightarrow +\infty,$$

y, por el Lema 2.3.2 nuevamente, resulta que

$$\|\sigma^m\|_{n,I} = O(1), \quad m \rightarrow +\infty,$$

es decir, la familia $(\sigma^m)_{m \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^n(I)$. Por lo tanto, el Lema 1.3.3 asegura que existe una sucesión $(\sigma^{m_l})_{l \in \mathbb{N}}$, extraída de esa familia, con $\lim_{l \rightarrow +\infty} m_l = +\infty$ y un elemento $g^* \in H^n(I)$ tales que

$$g^* = \lim_{l \rightarrow +\infty} \text{débil } \sigma^{m_l} \quad \text{en } H^n(I). \quad (2.17)$$

2) Veamos ahora que $g^* = g$ por reducción al absurdo. Supongamos que $g^* \neq g$. Como la inyección de $H^n(I)$ en $C^0(\bar{I})$ es continua, existen (ver Teorema 1.4.13) $\gamma > 0$ y un abierto no vacío $I_0 \subset I$ tales que

$$\forall t \in I_0, \quad |g^*(t) - g(t)| > \gamma.$$

Como tal inyección, además, es compacta, de (2.17) se sigue que

$$\exists l_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq l_0, \quad \forall t \in I_0, \quad |\sigma^{m_l}(t) - g^*(t)| \leq \frac{\gamma}{2}.$$

Por tanto,

$$\forall l \geq l_0, \quad \forall t \in I_0, \quad |\sigma^{m_l}(t) - g(t)| \geq |g^*(t) - g(t)| - |\sigma^{m_l}(t) - g^*(t)| \geq \frac{\gamma}{2}. \quad (2.18)$$

3) Por (2.17), dado que $g^* = g$ y que, por el Teorema 1.4.14, $H^n(I)$ se inyecta continuamente en $H^{n-1}(I)$, se tiene que

$$g = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sigma^{m_l} \quad \text{en } H^{n-1}(I). \quad (2.19)$$

Por otra parte, de la definición del semiproducto escalar $(\cdot, \cdot)_L$ y de (2.2) se sigue que

$$|\sigma^{m_l} - g|_{n,I}^2 \leq \frac{1}{\nu} |\sigma^{m_l} - g|_L^2 \leq \frac{1}{\nu} (|\sigma^{m_l}|_L^2 + |g|_L^2 - 2(\sigma^{m_l}, g)_L^2).$$

Teniendo en cuenta (2.13) deducimos que

$$|\sigma^{m_l} - g|_{n,I}^2 \leq \frac{1}{\nu} (|g|_L^2 - 2(f, g)_{0,I} + 2(f, \sigma^{m_l})_{0,I} + |g|_L^2 - 2(\sigma^{m_l}, g)_L^2),$$

y, por (2.17), concluimos que

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} |\sigma^{m_l} - g|_{n,I} = 0,$$

lo cual, unido a (2.19) implica que

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \|\sigma^{m_l} - g\|_{n,I} = 0.$$

4) Concluimos finalmente, razonando por reducción al absurdo, que se cumple (2.12). En efecto, si no fuera así, existiría un número real $\mu > 0$ y una sucesión $(m_{l'})_{l' \in \mathbb{N}}$ con $\lim_{l' \rightarrow +\infty} m_{l'} = +\infty$, tal que

$$\forall l' \in \mathbb{N}, \quad \|\sigma^{m_{l'}} - g\|_{n,I} \geq \mu. \quad (2.20)$$

Ahora bien, la sucesión $(\sigma^{m_{l'}})_{l' \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^n(I)$ con lo que, si argumentamos como en los puntos 1), 2) y 3), se deduciría que de tal sucesión se puede extraer una subsucesión convergente a g , lo cual es contradictorio con (2.20). Por tanto

$$\lim_{m \rightarrow 0} \|\sigma^m - g\|_{n,I} = 0.$$

□

2.4. Estimaciones del error de aproximación

En esta sección, razonando como M. Pasadas[63], se van a establecer estimaciones del error.

Recordemos, en primer lugar, tres resultados auxiliares, los dos primeros debidos a J. Duchon[30], que se han particularizado para dimensión 1.

Proposición 2.4.1. *Sea I un intervalo abierto. Entonces existen constantes $M > 1$, $M_1 > 1$, y $\lambda_0 > 0$ tales que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$, existe $I_\lambda \subset I$ verificando:*

$$(i) \quad \forall t \in I_\lambda, [t - \lambda, t + \lambda] \subset I,$$

$$(ii) \quad I \subset \bigcup_{t \in I_\lambda} [t - M\lambda, t + M\lambda],$$

$$(iii) \quad \sum_{t \in I_\lambda} \mathbf{1}_{[t - M\lambda, t + M\lambda]} \leq M_1,$$

donde $\mathbf{1}_E$ es la función característica del conjunto E .

Proposición 2.4.2. *Existe $R > 0$ (dependiente de n) y para todo $M \geq 1$ y l entero, $0 \leq l \leq n$, una constante $C > 0$ (dependiente de M , n y l) verificando: para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $t \in \mathbb{R}$, el intervalo $[t - \frac{R}{m}, t + \frac{R}{m}]$ contiene n intervalos cerrados $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ de amplitud $\frac{1}{m}$ tales que se tiene:*

$$v_{l, (t - \frac{MR}{m}, t + \frac{MR}{m})} \leq C \left(\frac{1}{m} \right)^{n-l} v_{n, (t - \frac{MR}{m}, t + \frac{MR}{m})},$$

para toda $v \in H^n(t - \frac{MR}{m}, t + \frac{MR}{m})$ que se anule en al menos un punto de cada uno de los intervalos $\Delta_1, \dots, \Delta_n$.

Proposición 2.4.3. *Sea $n \in \mathbb{N}^*$ e I un intervalo acotado abierto no vacío de \mathbb{R} . Entonces existe un operador lineal $\tilde{P} : H^n(I) \rightarrow H^n(\mathbb{R})$ y una constante $C > 0$ tales que, para todo $v \in H^n(I)$, $\tilde{P}v = v$ en I y*

$$|\tilde{P}v|_{n, \mathbb{R}} \leq C|v|_{n, I}.$$

Demostración. El operador \tilde{P} está definido en G. Strang[73] de forma explícita. \square

Mantenemos las notaciones que hemos utilizado durante el capítulo. Se tiene el siguiente resultado sobre estimaciones del error de aproximación de la función $g \in H$ mediante curvas ODE.

Teorema 2.4.4. *Si las hipótesis (2.10)-(2.11) se verifican entonces existen constantes positivas R , λ_0 y C tales que, para todo $m \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{m} \leq \frac{\lambda_0}{R}$, se tiene que*

$$\forall l = 0, \dots, n, |g - \sigma^m|_{l,I} \leq C \left(\frac{1}{m} \right)^{n-l} |g - \sigma^m|_{n,I}.$$

Demostración. Por la Proposición 2.4.1, existen constantes $M > 1$ y $\lambda_0 > 0$ tales que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$, existe $I_\lambda \subset I$ verificando:

$$\forall t \in I_\lambda, [t - \lambda, t + \lambda] \subset I \quad \text{y} \quad I \subset \bigcup_{t \in I_\lambda} [t - M\lambda, t + M\lambda].$$

Sea $z = g - \sigma^m$ y sea R la constante de la Proposición 2.4.2. Si $\lambda = \frac{R}{m}$ (y por tanto $\frac{1}{m} \leq \frac{\lambda_0}{R}$), se tiene que

$$\forall l = 0, \dots, n, |z|_{l,I}^2 \leq |\tilde{z}|_{l, \bigcup_{t \in I_{\frac{R}{m}}} [t - M\frac{R}{m}, t + M\frac{R}{m}]}^2,$$

donde $\tilde{z} = \tilde{P}z$, siendo \tilde{P} el operador introducido en la Proposición 2.4.3.

Por tanto,

$$\forall l = 0, \dots, n, |z|_{l,I}^2 \leq \sum_{t \in I_{\frac{R}{m}}} |\tilde{z}|_{l, (t - \frac{MR}{m}, t + \frac{MR}{m})}^2. \quad (2.21)$$

Puesto que $\tilde{z} \in H^n(t - \frac{MR}{m}, t + \frac{MR}{m})$ y además \tilde{z} se anula en al menos un punto en cada una de los intervalos cerrados $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, de radio $\frac{1}{m}$, contenidos en $[t - \frac{R}{m}, t + \frac{R}{m}]$, se sigue de la Proposición 2.4.2 que existe una constante $C > 0$, dependiente solamente de M , n y l , tal que

$$\forall l = 0, \dots, n, |\tilde{z}|_{l, (t - \frac{MR}{m}, t + \frac{MR}{m})} \leq C \left(\frac{1}{m} \right)^{n-l} |\tilde{z}|_{n, (t - \frac{MR}{m}, t + \frac{MR}{m})},$$

y, por (2.21), obtenemos

$$\forall l = 0, \dots, n, |z|_{l,I}^2 \leq C \left(\frac{1}{m} \right)^{2(n-l)} \sum_{t \in I_{\frac{R}{m}}} |\tilde{z}|_{n, (t - \frac{MR}{m}, t + \frac{MR}{m})}^2. \quad (2.22)$$

Utilizando el punto (iii) de la Proposición 2.4.1, se tiene que

$$\sum_{t \in I \frac{R}{m}} |\tilde{z}|_{n, (t - \frac{MR}{m}, t + \frac{MR}{m})}^2 \leq M_1 |\tilde{z}|_{n, \mathbb{R}}^2,$$

y, junto con (2.22), resulta que existe $C > 0$ tal que

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |z|_{l, I}^2 \leq CM_1 \left(\frac{1}{m}\right)^{2(n-l)} |\tilde{z}|_{n, \mathbb{R}}^2.$$

Como $\tilde{z} = \tilde{P}z$, de esta última relación junto con la Proposición 2.4.3 deducimos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |z|_{l, I} \leq C \left(\frac{1}{m}\right)^{n-l} |z|_{n, I},$$

de donde obtenemos el resultado. □

Corolario 2.4.5. *Para todo $l = 0, \dots, n$, se verifica que*

$$|g - \sigma^m|_{l, I} = o\left(\left(\frac{1}{m}\right)^{n-l}\right), \quad m \rightarrow +\infty.$$

Demostración. Se deduce de los teoremas 2.3.3 y 2.4.4. □

Capítulo 3

Aproximación mediante curvas ODE splines

3.1. Introducción

En el capítulo anterior, se han construido con detalle lo que hemos llamado curvas ODE. Recordemos que estas curvas se han obtenido a partir de un problema de contorno y de un conjunto de puntos de ajuste.

Sin embargo, la solución del problema descrito no se puede explicitar en numerosas ocasiones, por lo que la forma usual de proceder en estos casos es discretizar el problema. De este modo, es posible aplicar un método numérico de forma que se pueda obtener una expresión aproximada de la solución.

Por tanto, será necesario considerar un espacio de dimensión finita, en el que formular y resolver el problema discreto correspondiente.

Esta discretización se va a efectuar mediante funciones B-splines y, de esta forma, se formulará y resolverá el problema discreto de aproximación, que dará lugar a las curvas ODE splines.

Concretamente, el espacio discreto en el que vamos a trabajar es el espacio de splines de grado k y clase $k - 1$ asociado a una partición $\Delta_p = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_p = \beta\}$, que recordemos se introdujo en el primer capítulo como

$$S(k, k - 1; \Delta_p) = \{s \in C^{k-1}(I) : s|_{[t_{i-1}, t_i]} \in \mathbb{P}_k[t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, p\},$$

donde $\mathbb{P}_k[t_{i-1}, t_i]$ es la restricción a $[t_{i-1}, t_i]$ del espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que k .

El capítulo 3 se ha dividido en varias secciones. En la sección 3.2 se introducen los elementos necesarios para poder plantear de manera rigurosa el problema que se va a abordar, en el cual intervienen de forma esencial un problema de contorno y un conjunto de puntos de aproximación. Después de enunciar el concepto curva ODE spline se demuestra un teorema que establece la existencia y la unicidad de la misma cuando se fijan una serie de condiciones.

En la sección 3.3 se enuncian y demuestran una serie de resultados previos como son el establecimiento de diferentes cotas de aproximación en espacios discretos que tienen por objetivo estudiar y establecer resultados acerca de la convergencia de la solución del problema planteado en la sección anterior hacia una función de la cual procedan los datos de ajuste, siempre que el número de éstos tienda a infinito.

La sección 3.4 tiene por objetivo calcular las estimaciones del error de aproximación cometido al aproximar una función, que verifica las condiciones que se han dado en el problema de contorno, y de la cual extraemos el conjunto de puntos de aproximación, mediante una curva ODE spline.

En la sección 3.5 se describe el algoritmo que se utiliza en la obtención de los aproximantes discretos. Al tratarse de un método de discretización mediante funciones splines, este algoritmo se reduce a un sistema de ecuaciones lineales que se puede implementar de manera sencilla.

La sección 3.6, con la que finaliza el capítulo, está dedicada a ensayar el método numérico propuesto, con varios ejemplos numéricos y gráficos en los que se constata la influencia de los diferentes elementos que intervienen en su formulación, como es la ecuación diferencial que se toma, el tamaño del conjunto de puntos de aproximación y su distribución y el tamaño de la partición. Se observa que si los parámetros del método varían según las hipótesis de convergencia, de la curva ODE spline hacia la curva de la que proceden los datos, el error relativo disminuye, y se conjetura la existencia de un valor del parámetro ε óptimo. Además si la curva de la que proceden los datos es solución del problema de contorno, el parámetro ε no tiene efectos en el error, de forma que, aunque ε varíe, el error permanece constante.

3.2. Planteamiento del problema

Durante todo el capítulo mantendremos la hipótesis

$$k \geq n,$$

con lo que se verifica

$$S(k, k-1; \Delta_p) \subset H^k(I) \subseteq H^n(I).$$

y también

$$k \geq 2n - p \quad (3.1)$$

que es una hipótesis técnica no restrictiva justificada por la necesidad de que los sistemas de ecuaciones lineales que aparecerán posteriormente sean determinados.

Definición 3.2.1. Diremos que s es una curva ODE discreta asociada a L , \mathbf{y} , A^m , \mathbf{q} y $\varepsilon > 0$, si s es una solución del problema

$$\begin{cases} s \in H^p, \\ \forall v \in H^p, \quad J(s) \leq J(v), \end{cases} \quad (3.2)$$

donde J es el funcional dado por (2.6), y

$$H^p = \{u \in S(k, k-1; \Delta_p) : \tau u = \mathbf{y}\}.$$

Nota 3.2.2. 1. En nuestro caso hemos tomado como espacio discreto un espacio de splines por lo que hablaremos de curva ODE spline en vez de curva ODE discreta. No obstante, todo lo que se haga a continuación se puede aplicar a diferentes tipos de espacios discretos como uno de elementos finitos, de wavelets u otros.

2. Notemos también que H^p es obviamente convexo y cerrado. Además es no vacío puesto que cualquier interpolante $v \in S(k, k-1; \Delta_p)$ verificando $\tau v = \mathbf{y}$ está en H^p .

Si llamamos

$$H_0^p = \{u \in S(k, k-1; \Delta_p) : \tau u = \mathbf{0}\},$$

podemos establecer el siguiente resultado

Teorema 3.2.3. El problema (3.2) admite una única solución, que es también la única solución del problema variacional: encontrar $s \in H^p$, tal que

$$\forall v \in H_0^p, \quad \langle \rho s, \rho v \rangle_m + \varepsilon(s, v)_L = \langle \mathbf{q}, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v). \quad (3.3)$$

Demostración. Se razona como en el Teorema 2.2.4 para H^p y H_0^p , en lugar de H , H_0 . \square

Teorema 3.2.4. *Existe una, y sólo una, $(2n + 1)$ -upla $(s, \boldsymbol{\lambda}) \in S(k, k - 1; \Delta_p) \times \mathbb{R}^{2n}$ tal que $s \in H^p$, y que para toda $v \in S(k, k - 1; \Delta_p)$,*

$$\langle \boldsymbol{\rho}s, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(s, v)_L + \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}v \rangle_{2n} = \langle q, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,I}, \quad (3.4)$$

donde s es la solución de (3.2).

Demostración. Se razona análogamente al Teorema 2.2.5, tomando la familia de curvas ODE spline

$$\varphi^i \in S(k, k - 1; \Delta_p), \quad i = 1, \dots, 2n,$$

que verifiquen las condiciones

$$\phi_j(\varphi^i) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, 2n.$$

La existencia de estas funciones está garantizada por la hipótesis (3.1). El resultado se obtiene razonando de igual forma que en el Teorema 2.2.5. \square

3.3. Convergencia

En esta sección vamos a enunciar y demostrar un teorema de convergencia en el caso discreto. Concretamente vamos a demostrar que si g es una función suficientemente regular y s^m es la curva ODE spline relativa a L , $\boldsymbol{\tau}g$, A^m , $\boldsymbol{\rho}g$ y ε , entonces su diferencia en norma $\|\cdot\|_{n,I}$ tiende a 0 cuando $m \rightarrow +\infty$.

Suponemos dado, para todo $m \in \mathbb{N}$, un subconjunto ordenado A^m de puntos distintos de I tal que

$$\sup_{t \in I} \max_{a \in A^m} |t - a| = o\left(\frac{1}{m}\right), \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Sea $\Delta_p = \{\alpha = t_0 < \dots < t_p = \beta\}$ una partición del intervalo I y llamemos

$$h = \max_{i=0, \dots, p-1} (t_{i+1} - t_i).$$

Por último, sea $g \in H^n(I) \cap C^{k+1}(\bar{I})$ con $k \in \mathbb{N}$, verificando $\boldsymbol{\tau}g = \mathbf{y}$.

Suponemos también que

$$\varepsilon = o(m), \quad m \rightarrow +\infty. \quad (3.6)$$

$$\frac{m h^{2k+1}}{\varepsilon} = O(1), \quad m \rightarrow +\infty, \quad (3.7)$$

Teorema 3.3.1. *Si se verifican las hipótesis (3.5), (3.6) y (3.7) entonces*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|s^m - g\|_{n,I} = 0.$$

donde $s_\varepsilon^m \in S(2k+1, 2k; \Delta_p)$ es la curva ODE spline asociada a L , τg , A^m , ρg y ε .

Demostración. Notamos por $\bar{s} \in S(2k+1, 2k; \Delta_p)$ el interpolante de Hermite de g en los nodos de la partición Δ_p es decir

$$\begin{aligned} \bar{s}(t_j) &= g(t_j), \quad 0 \leq j \leq p, \\ \bar{s}^{(i)}(\alpha) &= g^{(i)}(\alpha), \quad 1 \leq i \leq k, \\ \bar{s}^{(i)}(\beta) &= g^{(i)}(\beta), \quad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Por ser s^m solución de (3.2), $J(s^m) \leq J(\bar{s})$, es decir

$$\varepsilon \left(|s^m|_L^2 - 2(f, s^m)_{0,I} \right) \leq \langle \rho(\bar{s} - g) \rangle_m^2 + \varepsilon \left(|\bar{s}|_L^2 - 2(f, \bar{s})_{0,I} \right),$$

con lo que

$$|s^m|_L^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \langle \rho(\bar{s} - g) \rangle_m^2 + |\bar{s}|_L^2 - 2(f, \bar{s})_{0,I} + 2(f, s^m)_{0,I}. \quad (3.8)$$

Es claro que $s^m - \bar{s} \in H_0^p$, tenemos que por el Lema 2.3.1 $(f, s^m - \bar{s})_{0,I} = (u, s^m - \bar{s})_L$, donde u es la solución de (2.4) con lo que (3.8) queda

$$|s^m|_L^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \langle \rho(\bar{s} - g) \rangle_m^2 + |\bar{s}|_L^2 - 2(u, \bar{s})_L + 2(u, s^m)_L. \quad (3.9)$$

A continuación acotamos cada uno de los términos del segundo miembro de la desigualdad anterior. Por el Teorema 1.5.10 obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \rho(\bar{s} - g) \rangle_m^2 &= \sum_{i=1}^m (\bar{s}(a_i) - g(a_i))^2 \leq Cmh^{2(k+\frac{1}{2})} |g^{(k+1)}|_{0,I}^2 \\ &\leq Cmh^{2k+1} |g|_{k+1,I}^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Utilizando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |s^m|_L^2 - |u|_L^2 &\leq |s^m - u|_L^2 \\ &= |s^m|_L^2 + |u|_L^2 - 2(s^m, u)_L \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \langle \rho(\bar{s} - g) \rangle_m^2 + |\bar{s}|_L^2 - 2(u, \bar{s})_L + |u|_L^2, \end{aligned}$$

y, por y (3.9), tenemos que

$$|s^m|_L^2 \leq \frac{Cmh^{2k+1}}{\varepsilon} |g|_{k+1,I}^2 + |\bar{s}|_L^2 - 2(u, \bar{s})_L + 2|u|_L^2. \quad (3.11)$$

Por otra parte, de $J(s^m) \leq J(\bar{s})$, se deduce

$$\langle \rho(s^m - g) \rangle_m^2 \leq \langle \rho(\bar{s} - g) \rangle_m^2 + \varepsilon (|\bar{s}|_L^2 + 2(f, \bar{s})_{0,I}).$$

De esta última desigualdad junto con (3.10) y (3.11) obtenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\langle \rho(s^m - g) \rangle_m^2 \leq \varepsilon \left(\frac{Cmh^{2k+1}}{\varepsilon} |g|_{k+1,I}^2 + C \right)$$

y por tanto, de (3.6), concluimos que

$$\langle \rho(s^m - g) \rangle_m^2 = O(\varepsilon), \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Se verifica que

$$[|s^m|]^2 = \langle \tau s^m \rangle_{2n}^2 + |s^m|_L^2 = \langle \tau g \rangle_{2n}^2 + |s^m|_L^2,$$

donde $[|\cdot|]$ es la norma definida en el Lema 2.3.2.

Por tanto, de (3.11), concluimos que

$$[|s^m|] = O(1), \quad m \rightarrow +\infty,$$

y, por el Lema 2.3.2, resulta que

$$\|\sigma^m\|_{n,I} = O(1), \quad m \rightarrow +\infty,$$

es decir, la familia $(s^m)_{m \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^n(I)$. Por lo tanto, el Lema 1.3.3 asegura que existe una sucesión $(s^{m_l})_{l \in \mathbb{N}}$, extraída de esa familia, con $\lim_{l \rightarrow +\infty} m_l = +\infty$, y un elemento $g^* \in H^n(I)$ tales que

$$g^* = \lim_{l \rightarrow +\infty} \text{débil } s^{m_l} \quad \text{en } H^n(I). \quad (3.13)$$

Ahora no hay más que seguir desde el paso 2) la demostración del Teorema 2.3.3 para obtener el resultado. \square

3.4. Estimaciones del error.

Teorema 3.4.1. *Si la hipótesis (3.5) se verifica entonces existen constantes positivas R , λ_0 y C tales que, para todo $m \in N$ con $\frac{1}{m} \leq \frac{\lambda_0}{R}$, se tiene que*

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |g - s^m|_{l,I} \leq C \left(\frac{1}{m} \right)^{n-l} |g - s^m|_{n,I}.$$

Demostración. Se demuestra de igual forma que el Teorema 2.3.3. \square

3.5. Computación.

Una vez vistos los resultados en términos discretos a pasamos calcular la expresión de la solución de (3.4). Recordemos que una base del espacio $S(k, k-1; \Delta_p)$ es $\mathcal{B} = \{B_i^k : i = -k, \dots, p-1\}$, donde B_i^k es el B-spline de grado k con soporte $[t_i, t_{i+k}] \cap \bar{I}$.

Por tanto podemos expresar s como una combinación lineal de elementos básicos de dicho espacio, esto es,

$$s = \sum_{i=-k}^{p-1} \gamma_{i+k+1} B_i^k(t),$$

con lo que calculando los coeficientes γ_i tendremos determinado s .

Sustituyendo en (3.4), tenemos que para toda $v \in S(k, k-1; \Delta_p)$,

$$\sum_{i=-k}^{p-1} \gamma_{i+k+1} (\langle \rho B_i^k, \rho v \rangle_m + \varepsilon(B_i^k, v)_L) + \langle \lambda, \tau v \rangle_{2n} = \langle \mathbf{q}, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,I},$$

sujeto a las restricciones

$$\phi_i \left(\sum_{i=-k}^{p-1} \gamma_{i+k+1} B_i^k \right) = y_i, \quad i = 1, \dots, 2n.$$

Por linealidad, es equivalente a

$$\begin{cases} \sum_{i=-k}^{p-1} \gamma_{i+k+1} (\langle \rho B_i^k, \rho B_j^k \rangle_m + \varepsilon(B_i^k, B_j^k)_L) + \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \phi_i(B_j^k) \\ = \langle \mathbf{q}, \rho B_j^k \rangle_m + \varepsilon(f, B_j^k)_{0,I}, \quad -k \leq j \leq p-1, \\ \sum_{i=-k}^{p-1} \gamma_{i+k+1} \phi_i(B_i^k) = y_i, \quad 1 \leq i \leq 2n, \end{cases}$$

que es un sistema lineal de ecuaciones con $2n + k + p$ ecuaciones e incógnitas

$$\gamma_1, \dots, \gamma_{p+k}, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n}.$$

La forma matricial de dicho sistema es

$$\begin{pmatrix} C & D \\ D^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{f}} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

donde

$$C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq p+k}, \quad \text{con } c_{ij} = \langle \boldsymbol{\rho} B_i^k, \boldsymbol{\rho} B_j^k \rangle_m + \varepsilon (B_i^k, B_j^k)_L,$$

$$D = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p+k \\ 1 \leq j \leq 2n}}, \quad \text{con } d_{ij} = \phi_j(B_i^k),$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{p+k})^t, \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})^t,$$

$$\widehat{\boldsymbol{f}} = (\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho} B_1^k \rangle_m + \varepsilon (f, B_1^k)_{0,I}, \dots, \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\rho} B_{p+k}^k \rangle_m + \varepsilon (f, B_{p+k}^k)_{0,I})^t,$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_{2n})^t.$$

Si llamamos $A = (B_j^k(a_i))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ -k \leq j \leq p-1}}$, entonces se verifica que

$$C = A^t A + \varepsilon R,$$

siendo

$$R = (((B_i^k, B_j^k))_L)_{-k \leq i, j \leq p-1},$$

y también tendremos

$$\widehat{\boldsymbol{f}} = A^t \boldsymbol{q} + \varepsilon \tilde{\boldsymbol{f}},$$

con

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = ((B_1^k, f)_{0,I}, \dots, (B_{p+k}^k, f)_{0,I})^t.$$

Con esta notación hemos conseguido expresar el sistema en términos conocidos como la base, los puntos de aproximación con sus respectivas imágenes, el parámetro ε y la función f .

Nota 3.5.1. Para calcular $\tilde{\mathbf{f}}$ podemos emplear una fórmula de cuadratura numérica como por ejemplo la de Simpson compuesta, con lo que no perderemos aproximación en el caso que el error obtenido sea menor del que hayamos cometido al discretizar.

A continuación vamos a mostrar como se resuelve un caso concreto, mostrando con detalle todos los cálculos.

Consideremos L el operador diferencial de cuarto orden

$$Lu = \mu_2 \frac{d^4 u}{dt^4} + \mu_1 \frac{d^2 u}{dt^2} + \mu_0 u,$$

con $(-1)^i \mu_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, y el problema de contorno

$$\begin{cases} Lu = f(t), & u = u(t), & t \in I, \\ u(\alpha) = u_\alpha, & u'(\alpha) = \bar{u}_\alpha, & u(\beta) = u_\beta, & u'(\beta) = \bar{u}_\beta, \end{cases} \quad (3.15)$$

y queremos que la solución ajuste en el conjunto de puntos

$$A^n = \{(a_i, q_i), i = 1, \dots, n\},$$

tomando

$$\varepsilon = \varepsilon_0.$$

El producto escalar $(u, v)_L$ vendría dado por

$$(u, v)_L = \mu_2(u, v)_{2,I} - \mu_1(u, v)_{1,I} + \mu_0(u, v)_{0,I}, \quad \forall u \in H^2(I).$$

y el vector $\boldsymbol{\tau}$ sería

$$\boldsymbol{\tau}u = (u(\alpha), u'(\alpha), u(\beta), u'(\beta)), \quad \forall u \in H^2(I).$$

El espacio discreto que utilizamos para calcular la solución es el de B-splines cúbicos de clase dos $S(3, 2; \Delta_p)$, sobre una partición uniforme

$$\Delta_p = \{t_i : t_i = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{p}, \quad i = 0, \dots, p, \quad p \in \mathbb{N}\}.$$

y las matrices

$$A_0 = ((B_i^3, B_j^3)_0)_{1 \leq i, j \leq p+3} \in \mathcal{M}_{p+3, p+3},$$

$$A_1 = ((B_i^3, B_j^3)_1)_{1 \leq i, j \leq p+3} \in \mathcal{M}_{p+3, p+3},$$

$$A_2 = ((B_i^3, B_j^3)_2)_{1 \leq i, j \leq p+3} \in \mathcal{M}_{p+3, p+3},$$

$$A = \left(B_i^3(a_j) \right)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq p+3}} \in \mathcal{M}_{m,p+3},$$

quedarían

$$A_0 = h \begin{pmatrix} \frac{1}{252} & \frac{43}{1680} & \frac{1}{84} & \frac{1}{5040} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{43}{1680} & \frac{151}{630} & \frac{59}{280} & \frac{1}{42} & \frac{1}{5040} & \ddots & & & & \vdots \\ \frac{1}{84} & \frac{59}{280} & \frac{599}{1260} & \frac{397}{1680} & \frac{1}{42} & \frac{1}{5040} & \ddots & & & \vdots \\ \frac{1}{5040} & \frac{1}{42} & \frac{397}{1680} & \frac{151}{315} & \frac{397}{1680} & \frac{1}{42} & \frac{1}{5040} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{5040} & \frac{1}{42} & \frac{397}{1680} & \frac{151}{315} & \frac{397}{1680} & \frac{1}{42} & \frac{1}{5040} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{5040} & \frac{1}{42} & \frac{397}{1680} & \frac{151}{315} & \frac{397}{1680} & \frac{1}{42} & \frac{1}{5040} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{5040} & \frac{1}{42} & \frac{397}{1680} & \frac{599}{1260} & \frac{59}{280} & \frac{1}{84} \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{1}{5040} & \frac{1}{42} & \frac{59}{280} & \frac{151}{630} & \frac{43}{1680} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{5040} & \frac{1}{84} & \frac{630}{1680} & \frac{1}{252} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{7}{120} & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{120} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{7}{120} & \frac{1}{3} & \frac{-11}{60} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{120} & \ddots & & & & \vdots \\ \frac{-1}{10} & \frac{-11}{60} & \frac{37}{60} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{120} & \ddots & & & \vdots \\ \frac{-1}{120} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{8} & \frac{37}{60} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{120} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{-1}{120} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{8} & \frac{37}{60} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{120} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{-1}{120} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{8} & \frac{37}{60} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{120} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{-1}{120} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{8} & \frac{37}{60} & \frac{-11}{60} & \frac{-1}{10} \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{-1}{120} & \frac{-1}{5} & \frac{-11}{60} & \frac{1}{3} & \frac{7}{120} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{-1}{120} & \frac{-1}{10} & \frac{7}{120} & \frac{1}{20} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \frac{1}{h^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & -1 & 0 & \frac{1}{6} & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \ddots & & & \vdots \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{3} & -1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{1}{6} & 0 & -1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

donde $h = \frac{\beta - \alpha}{p}$.

Por tanto

$$R = \mu_2 A_2 - \mu_1 A_1 + \mu_0 A_0,$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{4}{6} & 0 & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{4}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)^t,$$

$$\mathbf{y} = (u_\alpha, \bar{u}_\alpha, u_\beta, \bar{u}_\beta)^t,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^t,$$

junto con el vector

$$\hat{\mathbf{f}} = A^t \mathbf{q} + \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{f}}.$$

3.6. Ejemplos gráficos y numéricos

Para finalizar el capítulo presentamos una serie de ejemplos a fin de poder constatar los resultados teóricos obtenidos.

Hemos utilizado el método descrito en la anterior sección dedicada a la computación para obtener diferentes curvas ODE splines. Además, hemos calculado un error relativo en la norma $L^2(I)$, que viene dado por la expresión

$$E_{rel} = \frac{\sum_{i=1}^{900} |s(c_i) - g(c_i)|}{\sum_{i=1}^{900} |g(c_i)|}$$

donde s es la curva ODE spline y $c_i, i = 1, \dots, 900$ son puntos aleatoriamente distribuidos en el intervalo I .

El espacio discreto que hemos utilizado para calcular las diferentes curvas ODE splines ha sido el espacio de splines cúbicos de clase 2, $S(3, 2, \Delta_p)$ generado a partir de una base de B-spline con una partición uniforme de p intervalos.

En las figuras que mostramos a continuación se incluyen la gráfica de las curvas ODE splines resultantes con el número de puntos de aproximación que hemos tomado de la función g que queremos aproximar, el número de intervalos de la partición p y el valor del parámetro ε . De igual forma presentamos tablas los errores calculados entre las diferentes curvas ODE splines construidas con respecto a la función g .

Las tablas 3.6.3–3.6.5 se han obtenido para el problema:

$$\begin{cases} u^{(iv)} + u'' + u = 0, & t \in I = (\alpha, \beta), \\ u(\alpha) = g(\alpha), u'(\alpha) = g'(\alpha), u(\beta) = g(\beta), u'(\beta) = g'(\beta). \end{cases} \quad (3.16)$$

donde α y β están especificados en la norma del error.

Ejemplo 1.

Consideramos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u^{(iv)} + u'' + u = 0, & t \in I = (0, 2\pi), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0, u(2\pi) = 0, u'(2\pi) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

La función g que vamos a aproximar viene dada por la expresión

$$g(t) = e^{-t} \text{sen}^2 t \quad t \in [0, 2\pi].$$

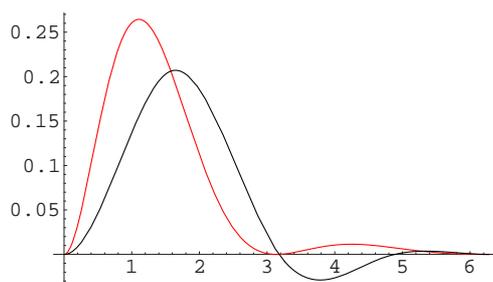


Figura 3.6.1: Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).

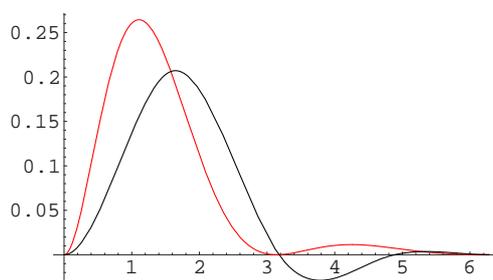


Figura 3.6.2: Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).

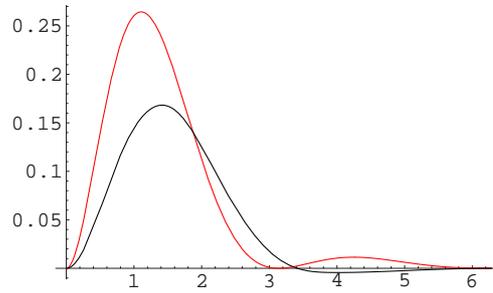


Figura 3.6.3: Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 8$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).

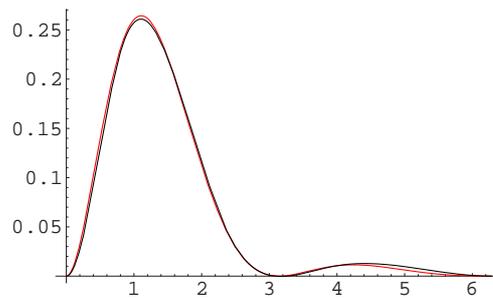


Figura 3.6.4: Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 8$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).

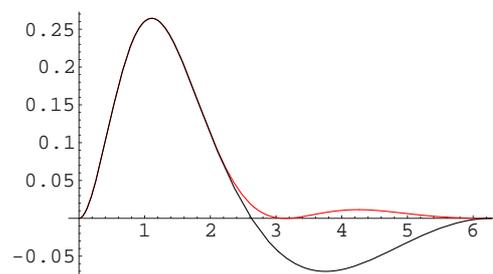


Figura 3.6.5: Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 16$ y $\varepsilon = 10^{-5}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$ (rojo).

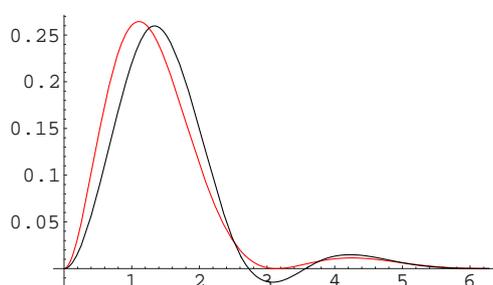


Figura 3.6.6: Curva ODE spline obtenida con $m = 15$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 4$ y $\epsilon = 10^{-5}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \sin^2 x$ (rojo).

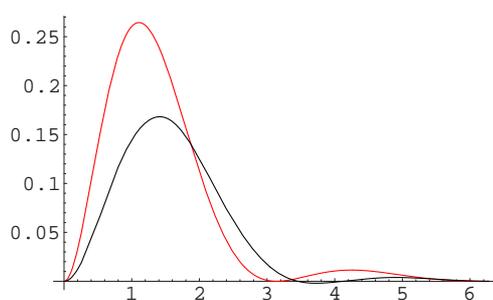


Figura 3.6.7: Curva ODE spline obtenida con $m = 15$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 8$ y $\epsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \sin^2 x$ (rojo).

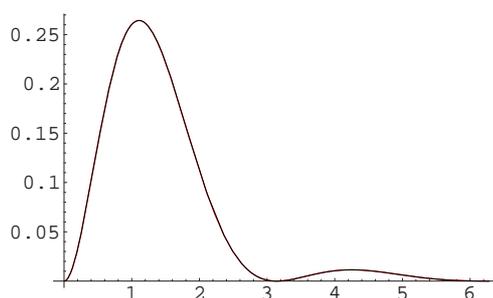


Figura 3.6.8: Curva ODE spline obtenida con $m = 15$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 16$ y $\epsilon = 10^{-5}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = e^{-x} \sin^2 x$ (rojo).

Puntos de aproximación	Intervalos de la partición	Valor de ε	Error relativo	Error relat. en norma $H^2(0, 2\pi)$
0	4	10^{-1}	1	1
		10^{-3}	1	1
		10^{-5}	1	1
	8	10^{-1}	1	1
		10^{-3}	1	1
		10^{-5}	1	1
	16	10^{-1}	1	1
		10^{-3}	1	1
		10^{-5}	1	1
5	4	10^{-1}	5.45×10^{-1}	7.22×10^{-1}
		10^{-3}	4.72×10^{-1}	7.21×10^{-1}
		10^{-5}	4.72×10^{-1}	7.20×10^{-1}
	8	10^{-1}	4.05×10^{-1}	4.16×10^{-1}
		10^{-3}	7.92×10^{-2}	7.87×10^{-2}
		10^{-5}	7.91×10^{-2}	7.88×10^{-2}
	16	10^{-1}	4.35×10^{-1}	4.29×10^{-1}
		10^{-3}	9.62×10^{-2}	1.35×10^{-1}
		10^{-5}	9.36×10^{-2}	1.34×10^{-1}
15	4	10^{-1}	4.94×10^{-1}	7.56×10^{-1}
		10^{-3}	4.71×10^{-1}	7.49×10^{-1}
		10^{-5}	4.71×10^{-1}	7.39×10^{-1}
	8	10^{-1}	2.94×10^{-1}	2.73×10^{-1}
		10^{-3}	1.92×10^{-2}	3.22×10^{-2}
		10^{-5}	1.73×10^{-2}	3.29×10^{-2}
	16	10^{-1}	2.92×10^{-1}	5.28×10^{-3}
		10^{-3}	8.82×10^{-3}	2.54×10^{-3}
		10^{-5}	1.13×10^{-3}	1.51×10^{-3}
30	4	10^{-1}	4.71×10^{-1}	7.32×10^{-1}
		10^{-3}	4.71×10^{-1}	7.30×10^{-1}
		10^{-5}	4.68×10^{-1}	7.25×10^{-1}
	8	10^{-1}	1.81×10^{-2}	3.21×10^{-2}
		10^{-3}	1.80×10^{-2}	3.23×10^{-2}
		10^{-5}	1.73×10^{-2}	3.31×10^{-2}
	16	10^{-1}	8.81×10^{-4}	1.63×10^{-3}
		10^{-3}	8.76×10^{-4}	1.61×10^{-3}
		10^{-5}	6.61×10^{-4}	1.60×10^{-3}

Tabla 3.6.1: Tabla de errores para diferentes curvas ODE spline aproximando $g(x) = e^{-x} \text{sen}^2 x$.

Ejemplo 2.

Consideramos ahora el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u^{(iv)} + u = 62\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) - 20\operatorname{sen}^3(x), & t \in I = (0, 2\pi), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0, u(2\pi) = 1, u'(2\pi) = 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

En este segundo ejemplo aproximamos la solución del problema de partida, es decir cuando la función g es igual a u , siendo u la solución del problema (3.18).

En este caso concreto $g(x) = u(x) = \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x$.

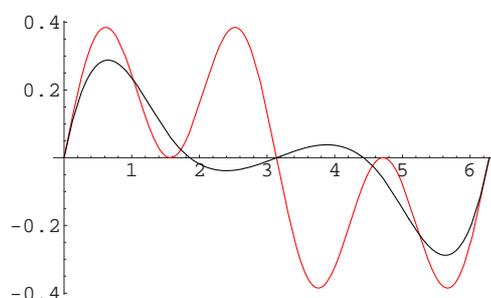


Figura 3.6.9: Curva ODE spline obtenida sin puntos de aproximación, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = \cos^2 x \operatorname{sen} x$ (rojo).

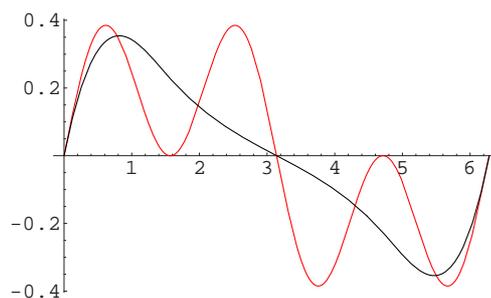


Figura 3.6.10: Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = \cos^2 x \operatorname{sen} x$ (rojo).

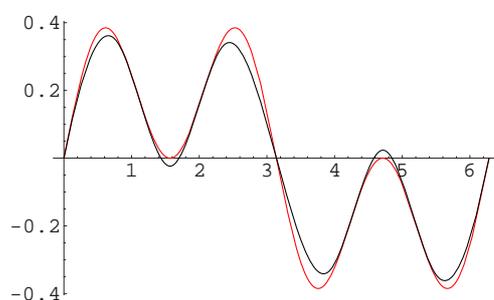


Figura 3.6.11: Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 8$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = \cos^2 x \sin x$ (rojo).

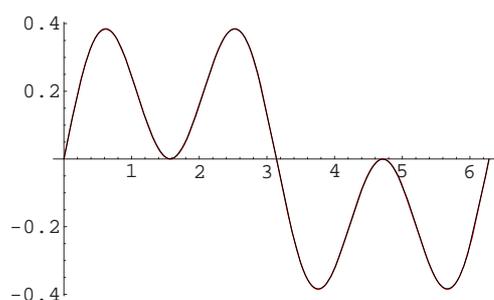


Figura 3.6.12: Curva ODE spline obtenida con $m = 5$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 16$ y $\varepsilon = 10^{-1}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = \cos^2 x \sin x$ (rojo).

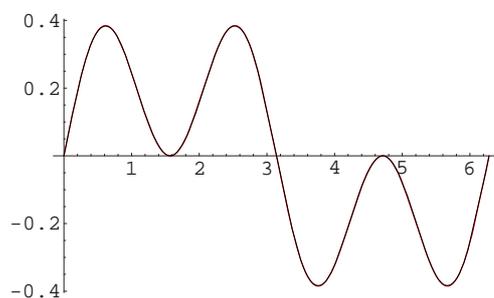


Figura 3.6.13: Curva ODE spline obtenida con $m = 15$ puntos de aproximación distribuidos uniformemente, $p = 16$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ (negro), y gráfica de la curva $g(x) = \cos^2 x \sin x$ (rojo).

Puntos de aproximación	Intervalos de la partición	Valor de ε	Error relativo	Error relat. en norma $H^2(0, 2\pi)$
0	4	10^{-1}	7.9×10^{-1}	13.42
		10^{-3}	7.9×10^{-1}	13.42
		10^{-5}	7.9×10^{-1}	13.42
	8	10^{-1}	9.47×10^{-2}	1.55
		10^{-3}	9.47×10^{-2}	1.55
		10^{-5}	9.47×10^{-2}	1.55
	16	10^{-1}	3.23×10^{-3}	5.69×10^{-2}
		10^{-3}	3.23×10^{-3}	5.69×10^{-2}
		10^{-5}	3.23×10^{-3}	5.69×10^{-2}
5	4	10^{-1}	6.91×10^{-1}	13.67
		10^{-3}	6.88×10^{-1}	13.66
		10^{-5}	6.88×10^{-1}	13.64
	8	10^{-1}	1.04×10^{-1}	1.55
		10^{-3}	1.13×10^{-1}	1.55
		10^{-5}	1.13×10^{-1}	1.55
	16	10^{-1}	3.45×10^{-3}	5.69×10^{-2}
		10^{-3}	3.24×10^{-3}	5.70×10^{-2}
		10^{-5}	3.24×10^{-3}	5.69×10^{-2}
15	4	10^{-1}	6.89×10^{-1}	13.62
		10^{-3}	6.87×10^{-1}	13.55
		10^{-5}	6.87×10^{-1}	13.56
	8	10^{-1}	8.84×10^{-2}	1.55
		10^{-3}	7.68×10^{-2}	1.65
		10^{-5}	7.67×10^{-2}	1.66
	16	10^{-1}	3.25×10^{-3}	5.69×10^{-2}
		10^{-3}	3.24×10^{-3}	5.69×10^{-2}
		10^{-5}	3.24×10^{-3}	5.69×10^{-2}
30	4	10^{-1}	6.87×10^{-1}	13.25
		10^{-3}	6.88×10^{-1}	13.25
		10^{-5}	6.86×10^{-1}	13.21
	8	10^{-1}	7.61×10^{-2}	1.66
		10^{-3}	7.55×10^{-2}	1.66
		10^{-5}	7.54×10^{-2}	1.64
	16	10^{-1}	2.23×10^{-3}	5.91×10^{-2}
		10^{-3}	2.12×10^{-3}	5.88×10^{-2}
		10^{-5}	2.04×10^{-3}	5.72×10^{-2}

Tabla 3.6.2: Tabla de errores para diferentes curvas ODE spline aproximando $g(x) = \cos^2 x \sin x$.

Puntos de aproximación	Intervalos de la partición	Valor de ε	Error relativo	Error relat. en norma $H^2(0, 1)$
0	4	10^{-1}	4.11×10^{-3}	1.47×10^{-1}
		10^{-3}	4.11×10^{-3}	1.47×10^{-1}
		10^{-5}	4.11×10^{-3}	1.47×10^{-1}
	8	10^{-1}	2.39×10^{-4}	8.91×10^{-3}
		10^{-3}	2.39×10^{-4}	8.91×10^{-3}
		10^{-5}	2.39×10^{-4}	8.91×10^{-3}
	16	10^{-1}	1.47×10^{-5}	5.51×10^{-4}
		10^{-3}	1.47×10^{-5}	5.51×10^{-4}
		10^{-5}	1.47×10^{-5}	5.51×10^{-4}
5	4	10^{-1}	4.04×10^{-3}	1.47×10^{-2}
		10^{-3}	3.40×10^{-3}	1.48×10^{-2}
		10^{-5}	3.57×10^{-3}	1.55×10^{-2}
	8	10^{-1}	2.39×10^{-4}	8.91×10^{-3}
		10^{-3}	2.39×10^{-4}	8.91×10^{-3}
		10^{-5}	2.39×10^{-4}	8.91×10^{-3}
	16	10^{-1}	1.47×10^{-5}	5.51×10^{-4}
		10^{-3}	1.47×10^{-5}	5.51×10^{-4}
		10^{-5}	1.47×10^{-5}	5.51×10^{-4}
15	4	10^{-1}	2.34×10^{-4}	8.98×10^{-3}
		10^{-3}	1.92×10^{-4}	8.98×10^{-3}
		10^{-5}	1.94×10^{-4}	8.98×10^{-3}
	8	10^{-1}	2.31×10^{-4}	8.98×10^{-3}
		10^{-3}	1.90×10^{-4}	8.98×10^{-3}
		10^{-5}	1.69×10^{-4}	8.98×10^{-3}
	16	10^{-1}	1.47×10^{-5}	5.51×10^{-4}
		10^{-3}	1.47×10^{-5}	5.51×10^{-4}
		10^{-5}	1.47×10^{-5}	5.51×10^{-4}
30	4	10^{-1}	3.91×10^{-3}	1.47×10^{-1}
		10^{-3}	3.71×10^{-2}	1.47×10^{-1}
		10^{-5}	3.35×10^{-2}	1.49×10^{-1}
	8	10^{-1}	1.89×10^{-4}	9.04×10^{-3}
		10^{-3}	1.74×10^{-4}	8.92×10^{-3}
		10^{-5}	1.45×10^{-4}	8.94×10^{-3}
	16	10^{-1}	1.37×10^{-5}	5.51×10^{-4}
		10^{-3}	1.11×10^{-5}	5.51×10^{-4}
		10^{-5}	9.46×10^{-6}	5.51×10^{-4}

Tabla 3.6.3: Tabla de errores para diferentes curvas ODE spline aproximando $g(x) = x^6$.

Puntos de aproximación	Intervalos de la partición	Valor de ε	Error relativo	Error relat. en norma $H^2(1, 2)$
0	4	10^{-1}	2.50×10^{-2}	3.86×10^{-2}
		10^{-3}	2.50×10^{-2}	3.86×10^{-2}
		10^{-5}	2.50×10^{-2}	3.86×10^{-2}
	8	10^{-1}	1.53×10^{-5}	2.78×10^{-5}
		10^{-3}	1.53×10^{-5}	2.78×10^{-5}
		10^{-5}	1.53×10^{-5}	2.78×10^{-5}
	16	10^{-1}	$9,09 \times 10^{-7}$	$1,76 \times 10^{-6}$
		10^{-3}	$9,09 \times 10^{-7}$	1.76×10^{-6}
		10^{-5}	$9,09 \times 10^{-7}$	$1,76 \times 10^{-6}$
5	4	10^{-1}	2.47×10^{-4}	3.86×10^{-4}
		10^{-3}	2.31×10^{-4}	3.98×10^{-4}
		10^{-5}	2.36×10^{-4}	4.05×10^{-4}
	8	10^{-1}	1.53×10^{-5}	2.78×10^{-5}
		10^{-3}	1.51×10^{-5}	2.78×10^{-5}
		10^{-5}	1.51×10^{-5}	2.78×10^{-5}
	16	10^{-1}	$8,57 \times 10^{-7}$	$1,76 \times 10^{-6}$
		10^{-3}	$8,57 \times 10^{-7}$	$1,76 \times 10^{-6}$
		10^{-5}	$8,52 \times 10^{-7}$	$1,76 \times 10^{-6}$
15	4	10^{-1}	2.45×10^{-4}	3.85×10^{-4}
		10^{-3}	2.30×10^{-4}	3.92×10^{-4}
		10^{-5}	2.36×10^{-4}	4.05×10^{-4}
	8	10^{-1}	1.52×10^{-5}	2.78×10^{-5}
		10^{-3}	1.38×10^{-5}	2.79×10^{-5}
		10^{-5}	1.33×10^{-5}	2.82×10^{-5}
	16	10^{-1}	$9,25 \times 10^{-7}$	$1,76 \times 10^{-6}$
		10^{-3}	$9,39 \times 10^{-7}$	$1,76 \times 10^{-6}$
		10^{-5}	$9,39 \times 10^{-7}$	$1,76 \times 10^{-6}$
30	4	10^{-1}	3.11×10^{-5}	2.81×10^{-5}
		10^{-3}	3.12×10^{-5}	2.82×10^{-5}
		10^{-5}	3.12×10^{-5}	2.83×10^{-5}
	8	10^{-1}	1.61×10^{-6}	1.71×10^{-6}
		10^{-3}	1.58×10^{-6}	1.74×10^{-6}
		10^{-5}	1.59×10^{-6}	1.72×10^{-6}
	16	10^{-1}	8.97×10^{-8}	1.01×10^{-7}
		10^{-3}	9.01×10^{-8}	1.01×10^{-7}
		10^{-5}	8.99×10^{-8}	1.02×10^{-7}

Tabla 3.6.4: Tabla de errores para diferentes curvas ODE spline aproximando $g(x) = \log x$.

Puntos de aproximación	Intervalos de la partición	Valor de ε	Error relativo	Error relat. en norma $H^2(0, 1)$
0	4	10^{-1}	1.87×10^{-5}	1.11×10^{-4}
		10^{-3}	1.87×10^{-5}	1.11×10^{-4}
		10^{-5}	1.87×10^{-5}	1.11×10^{-4}
	8	10^{-1}	$1,12 \times 10^{-6}$	$7,01 \times 10^{-6}$
		10^{-3}	$1,12 \times 10^{-6}$	$7,01 \times 10^{-6}$
		10^{-5}	$1,12 \times 10^{-6}$	$7,01 \times 10^{-6}$
	16	10^{-1}	$6,89 \times 10^{-8}$	$4,36 \times 10^{-7}$
		10^{-3}	$6,89 \times 10^{-8}$	$4,36 \times 10^{-7}$
		10^{-5}	$6,89 \times 10^{-8}$	$4,36 \times 10^{-7}$
5	4	10^{-1}	1.76×10^{-5}	1.10×10^{-4}
		10^{-3}	1.76×10^{-5}	1.10×10^{-4}
		10^{-5}	1.76×10^{-5}	1.10×10^{-4}
	8	10^{-1}	$1,04 \times 10^{-6}$	$7,02 \times 10^{-6}$
		10^{-3}	$9,56 \times 10^{-7}$	$7,02 \times 10^{-6}$
		10^{-5}	$9,8 \times 10^{-7}$	$7,02 \times 10^{-6}$
	16	10^{-1}	$6,32 \times 10^{-8}$	$4,3 \times 10^{-7}$
		10^{-3}	$5,71 \times 10^{-8}$	$4,36 \times 10^{-7}$
		10^{-5}	$5,9 \times 10^{-8}$	$4,36 \times 10^{-7}$
15	4	10^{-1}	1.73×10^{-5}	1.11×10^{-4}
		10^{-3}	1.59×10^{-5}	1.11×10^{-4}
		10^{-5}	1.59×10^{-5}	1.11×10^{-4}
	8	10^{-1}	$1,02 \times 10^{-6}$	$2,01 \times 10^{-6}$
		10^{-3}	$8,56 \times 10^{-7}$	$2,01 \times 10^{-6}$
		10^{-5}	$8,56 \times 10^{-7}$	$2,03 \times 10^{-6}$
	16	10^{-1}	$2,53 \times 10^{-8}$	$6,77 \times 10^{-8}$
		10^{-3}	$2,53 \times 10^{-8}$	$6,77 \times 10^{-8}$
		10^{-5}	$2,53 \times 10^{-8}$	$6,77 \times 10^{-8}$
30	4	10^{-1}	4.94×10^{-6}	1.76×10^{-5}
		10^{-3}	4.71×10^{-6}	1.78×10^{-5}
		10^{-5}	4.59×10^{-6}	1.78×10^{-5}
	8	10^{-1}	2.87×10^{-7}	1.09×10^{-6}
		10^{-3}	2.71×10^{-7}	1.12×10^{-6}
		10^{-5}	2.56×10^{-7}	1.09×10^{-6}
	16	10^{-1}	2.15×10^{-8}	6.77×10^{-8}
		10^{-3}	1.74×10^{-8}	6.78×10^{-8}
		10^{-5}	1.51×10^{-8}	6.78×10^{-8}

Tabla 3.6.5: Tabla de errores para diferentes curvas ODE spline aproximando $g(x) = e^x$.

A la vista de las tablas de errores que se han mostrado podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Se constatan las hipótesis del Teorema 3.3.1 de convergencia de la curva ODE discreta hacia la curva de la que proceden los datos, es decir, conforme aumenta m , y p y ε varían verificando (3.6) y (3.7), el error disminuye.
2. Si se fijan p y m el error no es monótono respecto de ε ; luego podemos conjeturar la existencia de un valor de ε óptimo.
3. Podemos apreciar la diferencia en los errores relativos entre las tablas 3.6.1 y 3.6.2, ya que en esta última se aprecia que el parámetro ε no tiene prácticamente efecto, al proceder los puntos de aproximación de la propia función $u(x) = g(x)$ que es solución del problema diferencial.

Capítulo 4

Superficies PDE

4.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a la construcción de superficies a partir de un problema de contorno dado por una ecuación en derivadas parciales con condiciones de contorno de tipo Hermite, y un conjunto de puntos de aproximación. Se pretende que la superficie obtenida interpole las condiciones de contorno y aproxime tanto la solución del problema diferencial como los puntos inicialmente dados. A una superficie así obtenida la llamaremos superficie PDE (Partial Differential Equation).

El método PDE de diseño de superficies genera una superficie mediante la resolución de una ecuación en derivadas parciales con condiciones de contorno dadas [7, 8, 9, 20, 19]. Aunque para aplicar este método no hay restricciones sobre el tipo de ecuación, principalmente se utilizan las ecuaciones elípticas ya que producen superficies suaves. Esta elección está justificada por su aplicación práctica ya que algunos operadores de orden $2n$ y ciertos sistemas elípticos juegan un papel importante en mecánica y en física, como pueden ser, por ejemplo, el operador biarmónico Δ^2 en teoría de placas, sistemas de elasticidad y el sistema de Stokes en mecánica de fluidos.

Las técnicas PDE unifican los atributos geométricos de ciertos objetos con sus características funcionales. Estas técnicas aparecen fundamentalmente en la industria automovilística y en la aeroespacial, donde los objetos se diseñan en ocasiones a partir de ciertos datos de interpolación y de aproximación y también de ciertas propiedades hidrodinámicas que pueden estar modelizados por ecuaciones en derivadas parciales. En [31] se pueden encontrar algunas aplicaciones de estas técnicas. El autor emplea en este trabajo diferencias finitas para resolver numéricamente las PDEs y, a partir de aquí, modificar

interactivamente las propiedades geométricas de los objetos.

En este capítulo presentamos un interesante modelo que conserva la potencia del método PDE y que además permite modificar la superficie que generamos de una forma bastante sencilla. Concretamente vamos a construir superficies de forma libre a partir de una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico de orden $2n$ que puede describir ciertos fenómenos físicos y un conjunto de datos de aproximación.

Sea Ω un abierto acotado y conexo de \mathbb{R}^2 y consideremos el operador diferencial dado por $L : H^{2n}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$

$$Lu(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| \leq n} (-1)^{|\mathbf{j}|} \partial^{\mathbf{j}} (p_{\mathbf{i}\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \partial^{\mathbf{i}} u(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.1)$$

siendo $p_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \in C^{|\mathbf{j}|}(\Omega)$ y $p_{\mathbf{i}\mathbf{j}} = p_{\mathbf{j}\mathbf{i}}$ para todo $|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| \leq n$.

Se define, asociada a este operador L , la siguiente forma bilineal y simétrica sobre $H^n(\Omega) \times H^n(\Omega)$:

$$(u, v)_L = \sum_{|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| \leq n} (p_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \partial^{\mathbf{i}} u, \partial^{\mathbf{j}} v)_{0, \Omega}.$$

Suponemos que

$$\sum_{|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| \leq n-1} \xi^{\mathbf{i}} p_{\mathbf{i}\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \xi^{\mathbf{j}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.2)$$

y que existe una constante $\nu > 0$ tal que

$$\sum_{|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| = n} \xi^{\mathbf{i}} p_{\mathbf{i}\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \xi^{\mathbf{j}} \geq \nu \langle \xi \rangle_2^{2n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.3)$$

para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, donde $\xi^{\mathbf{i}} = \xi^{i_1} \xi^{i_2}$, para cualquier $\mathbf{i} = (i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$.

En la literatura actual, a los operadores diferenciales que verifican la hipótesis (4.2)-(4.3), se les da el nombre de operadores fuertemente elípticos en Ω .

Es fácil demostrar que bajo las hipótesis (4.2)-(4.3) la forma bilineal $(\cdot, \cdot)_L$ define un semiproducto escalar en $H^n(\Omega)$ y por tanto lleva asociada una seminorma que denotamos mediante $|u|_L = (u, u)_L^{\frac{1}{2}}$.

El capítulo 4 está estructurado como sigue: en la sección 4.2 se plantea el problema de aproximación. Después de enunciar el concepto de superficie PDE relativa a un conjunto de puntos de aproximación y un operador diferencial, se enuncia y demuestra un teorema que establece la existencia y la unicidad de una superficie PDE cuando se fijan una serie de condiciones.

La sección 4.3 tiene por objetivo demostrar la convergencia de la solución del problema planteado en la sección anterior hacia una función de la cual procedan los datos de ajuste, estableciendo previamente ciertos resultados para poder enunciar y demostrar de manera rigurosa un teorema de convergencia.

Finaliza el capítulo calculando con detalle las estimaciones del error cometido al aproximar una función de un espacio determinado, de la cual extraemos el conjunto de puntos de aproximación, mediante una superficie PDE.

4.2. Planteamiento del problema

Suponemos dados:

- dos enteros, $n \geq 2$ y $r > 0$;
- las funciones $f \in L^2(\Omega)$ y $h_j \in C(\bar{\Omega})$, para $j = 0, \dots, n-1$;
- un conjunto $A^r = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ de $m = m(r)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) puntos distintos de Ω ;
- un vector $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$.

Además, suponemos que

$$\Omega \text{ es un dominio de tipo Hölder } C^{n-1,1}. \quad (4.4)$$

Definimos los operadores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} : H^n(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}^m, & \boldsymbol{\rho} v &= (v(\mathbf{a}_i))_{1 \leq i \leq m}, \\ \tau_j : H^{j+1}(\Omega) &\rightarrow H^{j+\frac{1}{2}}(\partial\Omega), & \tau_j v &= \left(\frac{\partial^j v}{\partial \mathbf{n}^j} \right), \quad 0 \leq j \leq n-1, \end{aligned}$$

el conjunto convexo

$$H = \{u \in H^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\bar{\Omega}) : \boldsymbol{\tau} u = \mathbf{y}\},$$

donde $\boldsymbol{\tau} u = (\tau_j u)_{0 \leq j \leq n-1}$, $\mathbf{y} = (h_j)_{0 \leq j \leq n-1}$, y el espacio lineal

$$H_0 = \{u \in H^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\bar{\Omega}) : \boldsymbol{\tau} u = \mathbf{0}\}.$$

Consideremos el problema de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial^j u}{\partial \mathbf{n}^j}(\mathbf{x}) = h_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 \leq j \leq n-1, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

siendo L el operador diferencial definido en (4.1).

Definición 4.2.1. Dado $\varepsilon > 0$, diremos que $\sigma \in H$ es una superficie PDE asociada a L , \mathbf{y} , A^r , $\boldsymbol{\beta}$ y ε , si σ es una solución del problema

$$J(\sigma) \leq J(v), \quad \forall v \in H, \quad (4.6)$$

donde J es el funcional definido sobre $H^n(\Omega)$ por

$$J(v) = \langle \boldsymbol{\rho}v - \boldsymbol{\beta} \rangle_m^2 + \varepsilon(|v|_L^2 - 2(f, v)_{0,\Omega}).$$

Notas 4.2.2.

El primer término del funcional J mide cuánto se aproxima v a $\boldsymbol{\beta}$ en el sentido de mínimos cuadrados discretos, con lo que nos referiremos a él como término de ajuste. El segundo término del funcional, ponderado por el parámetro ε indica cuánto se aproxima v a la solución del problema (4.5).

Observemos que el dominio debe ser bastante regular para poder dar un sentido a las derivadas normales sobre la frontera de Ω . Es aquí donde se utiliza la hipótesis (4.4). En este caso la condición de nulidad de las derivadas normales es equivalente a la de la nulidad de la derivada total.

Sea $\{\phi_i : H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, N\}$ un conjunto de aplicaciones lineales dadas, para cada $i = 1, \dots, N$ por $\phi_i(v) = \frac{\partial^l v}{\partial \mathbf{n}^l}(\mathbf{b})$, para ciertos $l \in \{0, \dots, n-1\}$ y $\mathbf{b} \in \partial\Omega$, y $\tilde{\boldsymbol{\tau}} : H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$ definido por $\tilde{\boldsymbol{\tau}}v = (\phi_i(v))_{i=1, \dots, N}$.

Suponemos que

$$\ker \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cap \mathbb{P}_{n-1}(\Omega) = \{0\}. \quad (4.7)$$

Lema 4.2.3. La aplicación

$$(((\cdot, \cdot))) : H^n(\Omega) \times H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$(((u, v))) = \langle \boldsymbol{\rho}u, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}u, \tilde{\boldsymbol{\tau}}v \rangle_N + (u, v)_L \quad (4.8)$$

es un producto escalar en $H^n(\Omega)$. Además su norma asociada $[[\cdot]]$, dada por

$$\forall v \in H^n(\Omega), \quad [[v]] = (((v, v)))^{\frac{1}{2}},$$

es equivalente a la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{n,\Omega}$.

Demostración. El que $((\cdot, \cdot))$ sea un producto escalar en $H^n(\Omega)$ se deduce inmediatamente de la definición de éste y de (4.7). Además la norma $[[\cdot]]$ es equivalente a la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{n,\Omega}$, por el Teorema 1.4.16. \square

Teorema 4.2.4. *El problema (4.6) tiene una única solución que está caracterizada como la única solución del siguiente problema variacional: encontrar $\sigma \in H$ tal que*

$$\forall v \in H_0, \langle \rho\sigma, \rho v \rangle_m + \varepsilon(\sigma, v)_L = \langle \beta, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega}. \quad (4.9)$$

Demostración. Consideramos

$$a : H^n(\Omega) \times H^n(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$a(u, v) = 2(\langle \rho u, \rho v \rangle_m + \langle \tilde{\tau} u, \tilde{\tau} v \rangle + \varepsilon(u, v)_L).$$

Es claro que esta forma es bilineal y simétrica en $H^n(\Omega)$, ya que tanto el producto $\langle \cdot \rangle_m$ como el semiproducto escalar $(\cdot, \cdot)_L$ lo son.

Además

$$a(u, u) \geq 2 \min(1, \varepsilon)(\langle \rho u \rangle_m^2 + \langle \tilde{\tau} u \rangle^2 + |u|_L^2) \geq C \|u\|_{n,\Omega}^2,$$

con lo que a es $H^n(\Omega)$ -elíptica.

La continuidad de a se deduce de

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= |2(\langle \rho u, \rho v \rangle_m + \langle \tilde{\tau} u, \tilde{\tau} v \rangle + \varepsilon(u, v)_L)| \\ &\leq 2 \max(1, \varepsilon) |[u, v]| \leq 2 \max(1, \varepsilon) [[u]] [[v]] \leq C \|u\|_{n,\Omega} \|v\|_{n,\Omega}. \end{aligned}$$

Claramente H es convexo, cerrado y no vacío, y además la aplicación

$$\varphi(v) = 2\langle \beta, \rho v \rangle_m + 2\varepsilon(f, v)_{0,\Omega},$$

es claramente lineal y continua en $H^n(\Omega)$ por lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.3.10 de Stampacchia, y concluir que existe un único $\sigma \in H$ tal que

$$a(\sigma, w - u) \geq \varphi(w - u), \quad \forall w \in H,$$

lo cual es equivalente a que

$$a(\sigma, v) \geq \varphi(v), \quad \forall v \in H_0.$$

Como H_0 es subespacio vectorial, si $v \in H_0$, entonces $-v \in H_0$ y, por tanto

$$a(\sigma, -v) \geq \varphi(-v), \quad \forall v \in H_0,$$

de donde

$$a(\sigma, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H_0.$$

Queda así demostrado que (4.9) tiene solución única.

Además σ está caracterizado por ser el mínimo en H del funcional

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v),$$

que a su vez es equivalente a (4.6). \square

El siguiente teorema es otra caracterización variacional para la solución del problema (4.6) o simplemente un método de multiplicadores de Lagrange para resolver dicho problema.

Teorema 4.2.5. *Existe un único par $(\sigma, \lambda) \in H \times H^n(\Omega)$ tal que*

$$\langle \rho\sigma, \rho v \rangle_m + \varepsilon(\sigma, v)_L + ((\lambda, v))_n = \langle \beta, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega}, \quad (4.10)$$

para toda $v \in H^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\bar{\Omega})$, donde σ es la única solución del problema (4.6).

Demostración. Sea $\tilde{\Omega}$ un abierto conexo de \mathbb{R}^2 tal que $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ y $A^r \subset \tilde{\Omega}$. Entonces existe una función $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, perteneciente a $H^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\bar{\Omega})$ tal que

$$\psi(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbf{x} \in \tilde{\Omega}, \\ 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Para cada $v \in H^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\bar{\Omega})$ consideramos la función

$$\omega = (1 - \psi)^n v.$$

Es claro que $\omega \in H^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\bar{\Omega})$.

Además, tenemos que para todo $0 \leq l \leq n - 1$ y todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega$,

$$\frac{\partial^l \omega}{\partial \mathbf{n}^l}(\mathbf{x}) = 0.$$

Por tanto, $\omega \in H_0$. Ahora bien, como σ es la solución del problema (4.6), por el teorema 4.2.4 se sigue que $\sigma \in H$ y de (4.9)

$$\langle \rho\sigma, \rho\omega \rangle_m + \varepsilon(\sigma, \omega)_L = \langle \beta, \rho\omega \rangle_m + \varepsilon(f, \omega)_{0,\Omega},$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\rho}\sigma, \boldsymbol{\rho}((1-\psi)^n v) \rangle_m + \varepsilon(\sigma, (1-\psi)^n v)_L &= \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}((1-\psi)^n v) \rangle_m \\ &+ \varepsilon(f, (1-\psi)^n v)_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Por la elección de ψ se tiene que $\boldsymbol{\rho}((1-\psi)^n v) = \boldsymbol{\rho}v$, con lo que se tiene que

$$\langle \boldsymbol{\rho}\sigma, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(\sigma, (1-\psi)^n v)_L = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(f, (1-\psi)^n v)_{0,\Omega}.$$

De aquí se sigue que,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\rho}\sigma, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(\sigma, v)_L + \varepsilon(\sigma, (1-\psi)^n v - v)_L &= \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m \\ &+ \varepsilon(f, v)_{0,\Omega} + \varepsilon(f, (1-\psi)^n v - v)_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sea $\varphi \in (H^n(\Omega))'$ definida por

$$\varphi(v) = \varepsilon((\sigma, \boldsymbol{\rho}((1-\psi)^n v - v))_L - (f, (1-\psi)^n v - v)_{0,\Omega}).$$

Entonces, por el Teorema 1.3.11, existe un único $\lambda \in H^n(\Omega)$ tal que

$$((\lambda, v))_n = \varphi(v), \quad \forall v \in H^n(\Omega).$$

En particular

$$((\lambda, v))_n = \varphi(v), \quad \forall v \in H^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\overline{\Omega}).$$

Por tanto, (4.11) queda

$$\langle \boldsymbol{\rho}\sigma, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(\sigma, v)_L + ((\lambda, v))_n = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega}.$$

La unicidad se razona como en el Teorema 2.2.5. \square

Notas 4.2.6. 1. El parámetro $\varepsilon > 0$ actúa de la siguiente forma: si $\varepsilon \gg 1$, la superficie PDE tenderá a acercarse más a la solución del problema (2.4) que a ajustar los datos (a_i, β_i) , $i = 1, \dots, m$. El efecto contrario tendremos si $\varepsilon \ll 1$.

2. Si $A^r = \emptyset$, entonces σ es la solución del problema (2.4). Es inmediato, pues en tal caso tiene que

$$\varepsilon(v, v)_L = \varepsilon(f, v)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in H_0,$$

en particular $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$, es decir,

$$(Lu - f, v)_{0,\Omega} = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

y por el Lema fundamental del cálculo de variaciones

$$Lu = f.$$

Además, u verifica las condiciones de contorno por ser $u \in H$.

3. Si $f = 0$, y no hay condiciones de contorno, la solución de (2.5) es un spline variacional de ajuste relativo a A^r, β y ε (ver [47]).

4.3. Convergencia

En esta sección se demuestra que la superficie PDE que hemos obtenido converge a la función de la cual proceden los datos bajo condiciones adecuadas.

Enunciamos otros resultados que son necesarios para la demostración de las propiedades de convergencia, manteniendo todas las hipótesis del capítulo actual.

Lema 4.3.1. *Sea u una solución de $Lu = f$. Entonces, para todo $v \in H_0$, se verifica*

$$(u, v)_L = (f, v)_{0, \Omega}.$$

Demostración. Claramente

$$(Lu, v)_{0, \Omega} = (f, v)_{0, \Omega} \quad \forall v \in H_0.$$

Basta ahora con aplicar la fórmula de Green $n-1$ veces en el primer miembro de la expresión anterior y observar que en cada paso los términos de contorno son nulos. \square

Suponemos a partir de ahora que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{\mathbf{a} \in A^r} \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle_2 = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.12)$$

Nota 4.3.2. *La expresión (4.12) es una propiedad asintótica sobre la distribución de los puntos de A^r en Ω . Además, implica que $m(r) > r$.*

Proposición 4.3.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado con frontera Lipschitz-continua. Sea $\Delta = \dim \mathbb{P}_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$ y $T_0 = \{\mathbf{t}_{01}, \dots, \mathbf{t}_{0\Delta}\}$ un conjunto de puntos \mathbb{P}_{n-1} -unisolvente $\bar{\Omega}$, con $n \geq 1$. Entonces, existe $\eta > 0$ tal que, si \mathcal{T}_η designa el conjunto de Δ -uplas $G = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_\Delta\}$ de puntos de $\bar{\Omega}$ que verifican la condición*

$$\forall j = 1, \dots, \Delta, \langle \mathbf{t}_j - \mathbf{t}_{0j} \rangle_2 \leq \eta,$$

entonces la aplicación $[[\cdot]]_n^T$ dada por

$$[[v]]_n^T = \left(\sum_{j=1}^{\Delta} v(\mathbf{t}_j)^2 + |v|_L^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

definida para toda $T \in \mathcal{T}_\eta$ es una norma sobre $H^n(\Omega)$ uniformemente equivalente sobre \mathcal{T}_η a la norma usual $\|\cdot\|_n$, esto es, existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tal que

$$\forall T \in \mathcal{T}_\eta, \forall v \in H^n(\Omega), C_1[[v]]_n^T \leq \|v\|_n \leq C_2[[v]]_n^T.$$

Demostración. Es análoga a la Proposición 2.1 de [60]. \square

Corolario 4.3.4. Si la hipótesis (4.12) se verifica, entonces existe $\eta > 0$ y, para todo $r \in \mathbb{N}$, un subconjunto A_0^r de A^r y una constante $C > 0$ tal que, para todo $r \geq \frac{C}{\eta}$, la aplicación $[[\cdot]]_r^0$, dada por

$$[[v]]_r^0 = \left(\sum_{\mathbf{a} \in A_0^r} v(\mathbf{a})^2 + |v|_L^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

es una norma sobre $H^n(\Omega)$ uniformemente equivalente, con respecto a r , a la norma $\|\cdot\|_{n,\Omega}$.

Demostración. Sea $T_0 = \{\mathbf{t}_{01}, \dots, \mathbf{t}_{0\Delta}\}$ cualquier subconjunto \mathbb{P}_{n-1} -uni-solvente de $\bar{\Omega}$. Por (4.12) existe $C > 0$ tal que para todo $r \in \mathbb{N}$ y todo $j = 1, \dots, \Delta$, existe $\mathbf{a}_j^r \in A^r$ verificando

$$\langle \mathbf{t}_j - \mathbf{a}_j^r \rangle_2 \leq \frac{C}{r}.$$

Sea $A_0^r = \{\mathbf{a}_1^r, \dots, \mathbf{a}_\Delta^r\}$. Es suficiente entonces aplicar la proposición 4.3.3, teniendo en cuenta que, para todo $r \geq \frac{C}{\eta}$, $A_0^r \in \mathcal{T}_\eta$ y escribiendo $[[\cdot]]_r^0$ en lugar de $[[\cdot]]_n^{A_0^r}$. \square

Enunciamos a continuación el resultado principal de esta sección. Suponemos que $\varepsilon = \varepsilon(r)$. Sea $g \in H$ y notemos mediante σ^r la superficie PDE asociada a L , τg , A^r , ρg , y ε .

Teorema 4.3.5. Suponemos que se cumplen (4.12) y

$$\varepsilon = o(r^2), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.13)$$

Entonces

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \|\sigma^r - g\|_{n,\Omega} = 0. \quad (4.14)$$

Demostración. Sabemos que $J(\sigma^r) \leq J(g)$. Esto implica que

$$\langle \rho(\sigma^r - g) \rangle_m^2 + \varepsilon(|\sigma^r|_L^2 - 2(f, \sigma^r)_{0,\Omega}) \leq \varepsilon(|g|_L^2 - 2(f, g)_{0,\Omega}). \quad (4.15)$$

Por tanto, obtenemos

$$|\sigma^r|_L^2 \leq |g|_L^2 + 2(f, \sigma^r - g)_{0,\Omega}. \quad (4.16)$$

Sea ahora \tilde{J} el funcional definido sobre $H^n(\Omega)$ por

$$\tilde{J}(v) = |v|_L^2 - 2(f, v)_{0,\Omega}.$$

Razonando como en el Teorema 4.2.4, se deduce que existe un único elemento $\tilde{\sigma} \in H$ tal que $\tilde{J}(\tilde{\sigma}) \leq \tilde{J}(v)$, para todo $v \in H$ y que está caracterizado como la única solución del siguiente problema variacional: encontrar $\tilde{\sigma} \in H$ tal que

$$(\tilde{\sigma}, v)_L = (f, v)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in H_0.$$

Puesto que $\sigma^r - g \in H_0$, tenemos que

$$(\tilde{\sigma}, \sigma^r - g)_L = (f, \sigma^r - g)_{0,\Omega}. \quad (4.17)$$

Sumando $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma})_L$ a ambos términos de (4.16) y usando (4.17), deducimos

$$|\sigma^r|_L^2 + (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma})_L \leq |g|_L^2 + 2(\tilde{\sigma}, \sigma^r - g)_L + (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma})_L.$$

y obtenemos

$$|\sigma^r - \tilde{\sigma}|_L^2 \leq |g - \tilde{\sigma}|_L^2.$$

De aquí, concluimos

$$|\sigma^r|_L \leq |g - \tilde{\sigma}|_L + |\tilde{\sigma}|_L. \quad (4.18)$$

Argumentando de igual forma, a partir de (4.15), obtenemos

$$\langle \rho(\sigma^r - g) \rangle_m^2 - 2\varepsilon(f, \sigma^r)_{0,\Omega} \leq \varepsilon(|g|_L^2 - 2(f, g)_{0,\Omega}),$$

o equivalentemente

$$\langle \rho(\sigma^r - g) \rangle_m^2 \leq \varepsilon(|g|_L^2 + 2(f, \sigma^r - g)_{0,\Omega})$$

y, de nuevo, de (4.17)

$$\langle \rho(\sigma^r - g) \rangle_m^2 \leq \varepsilon(|g|_L^2 + 2(\tilde{\sigma}, \sigma^r)_L - 2(\tilde{\sigma}, g)_L). \quad (4.19)$$

Como

$$2(\tilde{\sigma}, \sigma^r)_L \leq |\tilde{\sigma}|_L^2 + |\sigma^r|_L^2,$$

entonces, de (4.19) deducimos

$$\langle \boldsymbol{\rho}(\sigma^r - g) \rangle_m^2 \leq \varepsilon(|g|_L^2 + |\tilde{\sigma}|_L^2 - 2(\tilde{\sigma}, g)_L + |\sigma^r|_L^2)$$

pero, de (4.18), el último término del segundo miembro de la desigualdad está acotado y g y $\tilde{\sigma}$ son funciones fijas. Esto implica que

$$\langle \boldsymbol{\rho}(\sigma^r - g) \rangle_m^2 = O(\varepsilon). \quad (4.20)$$

Ahora, sea $T_0 = \{\mathbf{t}_{01}, \dots, \mathbf{t}_{0\Delta}\}$ un conjunto \mathbb{P}_{n-1} -unisolvante de puntos de Ω y sea η la constante de la Proposición 4.3.3. Obviamente, existe $\eta' \in (0, \eta)$ tal que

$$\forall j = 1, \dots, \Delta, \quad \overline{B}(\mathbf{t}_{0j}, \eta') \subset \overline{\Omega}.$$

Por (4.12), tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad r < \frac{C}{\eta'}, \quad \forall j = 1, \dots, \Delta, \quad \overline{B}(\mathbf{t}_{0j}, \eta' - \frac{C}{r}) \subset \bigcup_{\mathbf{a} \in A^r \cap \overline{B}(\mathbf{t}_{0j}, \eta')} \overline{B}(\mathbf{a}, \frac{C}{r}).$$

Si $\mathcal{N}_j = \text{card}(A^r \cap \overline{B}(\mathbf{t}_{0j}, \eta'))$, se sigue que

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad r > \frac{C}{\eta'}, \quad \forall j = 1, \dots, \Delta, \quad \exists C_1 > 0, \quad (\eta' - \frac{C}{r})^2 \leq \frac{C_1 \mathcal{N}_j}{r^2}$$

y en consecuencia, para cualquier $r_0 > \frac{C}{\eta'}$ tenemos

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \forall j = 1, \dots, \Delta, \quad \exists C_2 > 0, \quad \mathcal{N}_j \geq C_2 (\eta' - \frac{C}{r_0})^2 r^2. \quad (4.21)$$

Por otra parte, por (4.13) y (4.20) deducimos

$$\forall j = 1, \dots, \Delta, \quad \sum_{\mathbf{a} \in A^r \cap \overline{B}(\mathbf{t}_{0j}, \eta')} |(\sigma^r - g)(\mathbf{a})|^2 = o(r^2), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.22)$$

Si $\mathbf{a}_j^r \in A^r \cap \overline{B}(\mathbf{t}_{0j}, \eta')$ es tal que

$$|(\sigma^r - g)(\mathbf{a}_j^r)| = \min_{\mathbf{a} \in A^r \cap \overline{B}(\mathbf{t}_{0j}, \eta')} |(\sigma^r - g)(\mathbf{a})|, \quad r \rightarrow +\infty$$

deducimos a partir de (4.21) y (4.22) que

$$\forall j = 1, \dots, \Delta, \quad |(\sigma^r - g)(\mathbf{a}_j^r)| = o(1), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.23)$$

Denotamos ahora por T^r al conjunto $\{\mathbf{a}_1^r, \dots, \mathbf{a}_\Delta^r\}$. Aplicando la Proposición 4.3.3 a $T = T^r$, para r suficientemente grande, se tiene que por (4.18), (4.23) y el Corolario 4.3.4 que

$$\exists C > 0, \exists \gamma > 0, \forall r \in \mathbb{N}, r \geq \gamma, \|\sigma^r\|_{n,\Omega} \leq C,$$

lo que significa que la familia $(\sigma^r)_{r \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^n(\Omega)$. Además, existe una subsucesión $(\sigma^{r_l})_{l \in \mathbb{N}}$ extraída de esta familia y un elemento g^* de $H^n(\Omega)$ tal que

$$g^* = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sigma^{r_l} \quad \text{débilmente en } H^n(\Omega). \quad (4.24)$$

2) Veamos ahora que $g^* = g$ por reducción al absurdo. Supongamos que $g^* \neq g$. Como la inyección de $H^n(\Omega)$ en $C^0(\bar{\Omega})$ es continua, existen (ver Teorema 1.4.13) $\gamma > 0$ y un abierto no vacío $\Omega_0 \subset \Omega$ tales que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad |g^*(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \gamma.$$

Como tal inyección, además, es compacta, de (4.21) se sigue que

$$\exists l_0 \in \mathbb{N}, \forall l \geq l_0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_0, |\sigma^{r_l}(\mathbf{x}) - g^*(\mathbf{x})| \leq \frac{\gamma}{2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |\sigma^{r_l}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| &\geq |g^*(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| - |\sigma^{r_l}(\mathbf{x}) - g^*(\mathbf{x})| \\ &\geq \frac{\gamma}{2}, \quad \forall l \geq l_0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ahora bien, razonando como en el apartado 1) se probaría que, para $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe un punto $\mathbf{x}^{r_l} \in A^{r_l} \cap \Omega_0$ tal que

$$|\sigma^{r_l}(\mathbf{x}^{r_l}) - g(\mathbf{x}^{r_l})| = o(1), \quad l \rightarrow +\infty,$$

lo cual contradiría (4.25). Por consiguiente, $g^* = g$.

3) Por (4.24), dado que $g^* = g$ y que, por el Teorema 1.4.14, $H^n(\Omega)$ se inyecta continuamente en $H^{n-1}(\Omega)$, se tiene que

$$g = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sigma^{r_l} \quad \text{en } H^{n-1}(\Omega). \quad (4.26)$$

Por otra parte, de la definición del semiproducto escalar $(\cdot, \cdot)_L$ y de (4.3) se sigue que

$$|\sigma^{r_l} - g|_{n,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} |\sigma^{r_l} - g|_L^2 \leq \frac{1}{\nu} (|\sigma^{r_l}|_L^2 + |g|_L^2 - 2(\sigma^{r_l}, g)_L^2).$$

Teniendo en cuenta (4.16) deducimos que

$$|\sigma^{r_l} - g|_{n,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} (|g|_L^2 - 2(f, g)_{0,\Omega} + 2(f, \sigma^{r_l})_{0,\Omega} + |g|_L^2 - 2(\sigma^{r_l}, g)_L^2),$$

y, por (4.21), concluimos que

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} |\sigma^{r_l} - g|_{n,\Omega} = 0,$$

lo cual, unido a (4.26) implica que

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \|\sigma^{r_l} - g\|_{n,\Omega} = 0.$$

4) Concluimos finalmente, razonando por reducción al absurdo, que se cumple (4.14). En efecto, si no fuera así, existiría un número real $\mu > 0$ y una sucesión $(r_{l'})_{l' \in \mathbb{N}}$ con $\lim_{l' \rightarrow +\infty} r_{l'} = +\infty$, tal que

$$\forall l' \in \mathbb{N}, \quad \|\sigma^{r_{l'}} - g\|_{n,\Omega} \geq \mu. \quad (4.27)$$

Ahora bien, la sucesión $(\sigma^{r_{l'}})_{l' \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^n(\Omega)$ con lo que, si argumentamos como en los puntos 1), 2) y 3), se deduciría que de tal sucesión se puede extraer una subsucesión convergente a g , lo cual es contradictorio con (4.27). Por tanto

$$\lim_{m \rightarrow 0} \|\sigma^{r_l} - g\|_{n,\Omega} = 0.$$

□

4.4. Estimaciones del error de aproximación

Para finalizar este capítulo vamos a dar una estimación del error que se comete al aproximar la función g por σ^r cuando r tiende a infinito. Comenzamos con el siguiente resultado.

Teorema 4.4.1. *Supongamos que se verifican (4.12). Entonces, existen constantes positivas R, λ_0 y C tales que, para cada $r \in \mathbb{N}$, con $\frac{1}{r} \leq \frac{\lambda_0}{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |\sigma^r - g|_{l,\Omega} \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{n-l} |\sigma^r - g|_{n,\Omega}.$$

Demostración. Por la Proposición 1 de [30], existe $M > 1$ y λ_0 tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$, existe $T_\lambda \subset \Omega$ verificando

$$\forall \mathbf{t} \in T_\lambda, \quad B(\mathbf{t}, \lambda) \subset \Omega \quad \text{y} \quad \Omega \subset \bigcup_{\mathbf{t} \in T_\lambda} \overline{B}(\mathbf{t}, M\lambda).$$

Llamamos $\varrho = \sigma^r - g$ y R la constante de la Proposición 2 de [30]. Si $\lambda = \frac{R}{r}$ es claro que $\frac{\lambda_0}{R} \geq \frac{1}{r}$ y obtenemos

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |\varrho|_{l, \Omega}^2 \leq |\tilde{\varrho}|_{l, \bigcup_{\mathbf{t} \in T_{\frac{R}{r}}} B(\mathbf{t}, \frac{MR}{r})}^2,$$

donde $\tilde{\varrho} = \Psi_n \varrho$ y Ψ_n es el operador dado explícitamente en la sección 4 de [73]. De aquí

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |\varrho|_l^2 \leq \sum_{\mathbf{t} \in T_{\frac{R}{r}}} |\tilde{\varrho}|_{l, B(\mathbf{t}, \frac{MR}{r})}^2. \quad (4.28)$$

Como $\tilde{\varrho} \in H^n(B(\mathbf{t}, \frac{MR}{r}))$ y, por (4.12) se anula en al menos un punto de cada una de las bolas de radio $\frac{2}{r}$, contenidas en $\overline{B}(\mathbf{t}, \frac{R}{r})$, se sigue, a partir de la Proposición 2 de [30] que existe una constante $C > 0$, dependiendo únicamente de M, n , y l tal que

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |\varrho|_{l, B(\mathbf{t}, \frac{MR}{r})} \leq C \left(\frac{1}{r}\right)^{n-l} |\varrho|_{n, B(\mathbf{t}, \frac{MR}{r})}, \quad (4.29)$$

y por (4.28) tenemos que

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |\varrho|_l^2 \leq C \left(\frac{1}{r}\right)^{2(n-l)} \sum_{\mathbf{t} \in T_{\frac{R}{r}}} |\tilde{\varrho}|_{n, B(\mathbf{t}, \frac{MR}{r})}^2. \quad (4.30)$$

Si volvemos a utilizar la Proposición 1 de [30] (item 3) podemos deducir que existe $M_1 > 1$ tal que

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |\varrho|_l^2 \leq CM_1 \left(\frac{1}{r}\right)^{2(n-l)} |\tilde{\varrho}|_{n, \mathbb{R}^2}^2, \quad (4.31)$$

y de (4.30), existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{\mathbf{t} \in T_{\frac{R}{r}}} |\tilde{\varrho}|_{n, B(\mathbf{t}, \frac{MR}{r})}^2 \leq M_1 |\tilde{\varrho}|_{n, \mathbb{R}^2}^2.$$

Pero como $\tilde{\varrho} = \Psi_n \varrho$, usando el lema de la sección 4 de [73] y (4.31), llegamos a que existe $C > 0$ tal que

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |\varrho|_l^2 \leq C \left(\frac{1}{r}\right)^{n-l} \sum_{t \in T_{\frac{R}{r}}} |\varrho|_n^2.$$

□

Nota 4.4.2. Si en la demostración anterior ponemos $\varrho = \sigma^r - g$, tenemos

$$\forall l = 0, \dots, n, \quad |\sigma^r - g|_{l,\Omega}^2 \leq C \left(\frac{1}{r}\right)^{n-l} |\sigma^r - g|_{n,\Omega}^2.$$

Corolario 4.4.3. Bajo las hipótesis del teorema 4.3.5 tenemos que para todo $l = 0, \dots, n$ se verifica

$$|\sigma^r - g|_{l,\Omega}^2 = o\left(\frac{1}{r}\right)^{n-l}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Demostración. Es obvia a partir de los teoremas 4.3.5 y 4.4.1. □

Capítulo 5

Superficies PDE discretas

5.1. Introducción

En el capítulo 4 hemos definido las superficies PDE. Estas superficies, que, recordemos, son la solución de un cierto problema de minimización, presentan en ocasiones la dificultad de que no son posibles de explicitar. Este inconveniente se resuelve discretizando el espacio en el cual se estudia el problema, para poder aplicar un método numérico, y de esta forma obtener una aproximación de la solución.

Por tanto, será necesario considerar un espacio de dimensión finita, en el que se formule y resuelva el problema discreto. Igualmente se estudia la convergencia de la solución de este problema (una superficie PDE discreta) a una función cuando de ésta se extraigan el conjunto de puntos de aproximación y las condiciones de contorno.

El presente capítulo está estructurado como sigue. En la sección 5.2 se introducen las hipótesis necesarias para la formulación adecuada del problema que pretendemos resolver así como la definición de las superficies PDE discretas, las cuales son soluciones de un problema de minimización. El espacio de funciones que se va a utilizar para la discretización será una familia de elementos finitos, a partir del elemento finito genérico BFS de clase \mathcal{C}^k . Para finalizar la sección demostraremos una caracterización de este tipo de superficies que nos servirá posteriormente para poder explicitarlas.

La sección 5.3 está dedicada a estudiar la convergencia de una superficie PDE discreta hacia otra dada, bajo condiciones adecuadas. Concretamente, fijada una partición del dominio de trabajo y unos puntos de interpolación en la frontera de éste, se demuestra la convergencia de la superficie PDE

discreta a la función de la cual se toman los datos de aproximación.

En la sección 5.4 se estudian las diferentes estimaciones del error cometido al aproximar una superficie dada por una superficie PDE discreta. En la sección 5.5 se describe el algoritmo numérico que se sigue para la obtención del aproximante, el cual se obtiene como combinación lineal de elementos básicos de la familia discreta que hayamos elegido con unos coeficientes que proceden de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Por último, finalizamos el capítulo con la elaboración de una serie de ejemplos numéricos y gráficos, obtenidos fundamentalmente a partir de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico de orden 4 y 6, así como las tablas de errores correspondientes de forma que se constate la validez, eficacia y posibilidades de dicho método así como el comportamiento de los diferentes parámetros que aparecen en él. Se observa que si los parámetros del método varían según las hipótesis de convergencia, el error relativo, que se comete al aproximar la superficie PDE discreta por la superficie de la que proceden los datos, disminuye, y se conjetura la existencia de un valor del parámetro ε óptimo.

5.2. Planteamiento del problema

Sea Ω un abierto poligonal acotado y conexo de \mathbb{R}^2 . Por tanto, la frontera de Ω es lipschitziana.

Consideremos el operador diferencial $L : H^{2n}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ dado por

$$Lu(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| \leq n} (-1)^{|\mathbf{j}|} \partial^{\mathbf{j}} (p_{\mathbf{i}\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \partial^{\mathbf{i}} u(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.1)$$

siendo $p_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \in C^{|\mathbf{j}|}(\Omega)$ y $p_{\mathbf{i}\mathbf{j}} = p_{\mathbf{j}\mathbf{i}}$ para todo $|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| \leq n$.

Se define, asociada al operador L , la siguiente forma bilineal y simétrica sobre $H^n(\Omega) \times H^n(\Omega)$

$$(u, v)_L = \sum_{|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| \leq n} (p_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \partial^{\mathbf{i}} u, \partial^{\mathbf{j}} v)_{0, \Omega},$$

y suponemos que

$$\sum_{|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| \leq n-1} \xi^{\mathbf{i}} p_{\mathbf{i}\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \xi^{\mathbf{j}} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.2)$$

y que existe una constante $\nu > 0$ tal que

$$\sum_{|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}|=n} \xi^{\mathbf{i}} p_{\mathbf{i}\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \xi^{\mathbf{j}} \geq \nu \langle \xi \rangle_2^{2n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.3)$$

para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, donde $\xi^{\mathbf{i}} = \xi^{i_1} \xi^{i_2}$, para cualquier $\mathbf{i} = (i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$.

Es sencillo probar que bajo las hipótesis (5.2)–(5.3) la forma bilineal $(\cdot, \cdot)_L$ define un semiproducto escalar en $H^n(\Omega)$ y, por tanto, tiene asociada una seminorma que denotamos mediante $|u|_L = (u, u)_L^{\frac{1}{2}}$.

Suponemos dados:

- los enteros, $n \geq 2$, $k \geq 0$ y $r > 0$, tales que

$$n \leq k + 1; \quad (5.4)$$

- las funciones $f \in L^2(\Omega)$ y $h_j \in C(\overline{\Omega})$, para $j = 0, \dots, n-1$;
- un conjunto $A^r = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ de $m = m(r) \geq 0$ ($m \in \mathbb{N}^*$) puntos distintos de Ω ;
- un conjunto $B^N = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N\}$ de $N \in \mathbb{N}^*$ puntos distintos de $\partial\Omega$, ninguno de ellos vértice geométrico de $\overline{\Omega}$;
- un vector $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$;
- un subconjunto \mathcal{H} de números reales positivos que admite a 0 por punto de acumulación;
- para todo $h \in \mathcal{H}$ una teselación \mathcal{T}_h de $\overline{\Omega}$ mediante rectángulos o triángulos, de diámetro $h_K \leq h$;
- para todo $h \in \mathcal{H}$, un espacio de elementos finitos X_h construido sobre \mathcal{T}_h tal que

$$X_h \text{ es un espacio de dimensión finita } I = I(h) \quad (5.5)$$

y que además

$$X_h \subset H^n(\Omega) \cap C^k(\overline{\Omega}). \quad (5.6)$$

Para cada $l = 1, \dots, N$ y cada $j = 0, 1, \dots, n-1$, llamamos $\phi_{n(i-1)+j+1} : H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ a la aplicación lineal dada por $\phi_{n(i-1)+j+1} = \frac{\partial^j v}{\partial \mathbf{n}^j}(\mathbf{b}_l)$, y sea $\boldsymbol{\tau}^N : H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^{Nn}$ el operador lineal dado por

$$\boldsymbol{\tau}(v) = (\phi_i(v))_{i=1, \dots, Nn}.$$

Suponemos

$$\ker \boldsymbol{\tau}^N \cap \mathbb{P}_{n-1}(\Omega) = \{0\}, \quad (5.7)$$

y que, para todo $l = 1, \dots, Nn$

$$\phi_i \text{ es un grado de libertad de } X_h. \quad (5.8)$$

Nota 5.2.1. Si k' designa la clase del elemento finito genérico del espacio X_h , la hipótesis (5.6) implica que $k \leq k'$ y que $n \leq k' + 1$, a fin de obtener las inclusiones $X_h \subset C^k(\bar{\Omega})$ y $X_h \subset H^n(\Omega)$, respectivamente. En la práctica, por razones de coste computacional es usual tomar $k' = k$, lo que implica hipótesis (5.4).

Definimos el operador $\boldsymbol{\rho} : H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^m$, dado por

$$\boldsymbol{\rho}(v) = (v(\mathbf{a}_i))_{i=1, \dots, m},$$

el espacio vectorial

$$H_0^{Nh} = \{u \in X_h : \boldsymbol{\tau}^N u = \mathbf{0}\}$$

y el conjunto convexo

$$H^{Nh} = \{u \in X_h : \boldsymbol{\tau}^N u = \mathbf{y}\},$$

siendo $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1, \dots, Nn}$ con $y_{n(l-1)+j+1} = h_j(\mathbf{b}_l)$, para $l = 1, \dots, N$, $j = 0, \dots, n-1$.

Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial^j u}{\partial \mathbf{n}^j}(\mathbf{x}) = h_j(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 \leq j \leq n-1, \end{cases} \quad (5.9)$$

donde L es el operador dado en (5.1).

Definición 5.2.2. Decimos que σ_h es una superficie PDE discreta asociada a $L, B^N, \mathbf{y}, A^r, \boldsymbol{\beta}$ y $\varepsilon > 0$, si σ_h es una solución del problema

$$\begin{cases} \sigma_h \in H^{Nh}, \\ \forall v \in H^{Nh}, \quad J(\sigma_h) \leq J(v), \end{cases} \quad (5.10)$$

donde J es el funcional definido sobre $H^n(\Omega)$, de la forma

$$J(v) = \langle \boldsymbol{\rho}v - \boldsymbol{\beta} \rangle_m^2 + \varepsilon (|v|_L^2 - 2(f, v)_{0,\Omega}). \quad (5.11)$$

Lema 5.2.3. La aplicación $(((\cdot, \cdot)))_N : H^n(\Omega) \times H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(((u, v)))_N = \langle \boldsymbol{\rho}u, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \langle \boldsymbol{\tau}^N u, \boldsymbol{\tau}^N v \rangle_{Nn} + (u, v)_L$$

es un producto escalar en $H^n(\Omega)$ cuya norma asociada $[[\cdot]]_N$ dada por $[[u]]_N = (((u, u)))_N^{\frac{1}{2}}$ es equivalente a la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{n,\Omega}$.

Demostración. El hecho de que $(((\cdot, \cdot)))_N$ sea un producto escalar se deduce de que $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Nn}$ y $(\cdot, \cdot)_L$ son semiproductos escalares y de (5.7). La equivalencia entre las normas $[[\cdot]]_N$ y $\|\cdot\|_{n,\Omega}$ se obtiene sin más que aplicar el Teorema 1.4.16. \square

Teorema 5.2.4. El problema (5.10) tiene una única solución que está caracterizada como la única solución del siguiente problema variacional: Encontrar $\sigma_h \in H^{Nh}$ tal que

$$\forall v \in H_0^{Nh}, \langle \boldsymbol{\rho}\sigma_h, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(\sigma_h, v)_L = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega}. \quad (5.12)$$

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, Nn$, sea ω_i la función de base de X_h asociada al grado de libertad ϕ_i y consideremos la función

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{Nn} y_i \omega_i(\mathbf{x}).$$

Entonces $h \in H^{Nh}$ y, por tanto, H^{Nh} es convexo, cerrado y no vacío.

Sea $a : H^n(\Omega) \times H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, la aplicación bilineal dada por

$$|a(u, v)| = 2 \left(\langle \boldsymbol{\rho}u, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + \langle \boldsymbol{\tau}^N u, \boldsymbol{\tau}^N v \rangle_{Nn} + \varepsilon(u, v)_L \right).$$

Es claro que esta forma es bilineal y simétrica en $H^n(\Omega)$, ya que tanto el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ como el semiproducto escalar $(\cdot, \cdot)_L$ lo son.

Es inmediato que a es simétrica y, por el Lema 5.2.3,

$$a(u, v) \leq 2 \max(1, \varepsilon) |(((u, v)))_N| \leq C \|u\|_{n,\Omega} \|v\|_{n,\Omega}$$

y que

$$a(u, u) \geq 2 \min(1, \varepsilon) |(((u, u)))_N| \geq C \|u\|_{n,\Omega}^2,$$

por lo que a es continua y $H^n(\Omega)$ -elíptica.

Sea $\varphi : H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal dada por

$$\varphi(v) = 2 \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho}v \rangle_m + 2\varepsilon(f, v)_{0,\Omega},$$

que obviamente es continua. Por el Teorema 1.3.10 de Stampacchia deducimos que un único $\sigma_h \in H^{Nh}$ tal que

$$a(\sigma_h, w - u) \geq \varphi(w - u), \quad \forall w \in H^{Nh},$$

es decir,

$$a(\sigma_h, v) \geq \varphi(v), \quad \forall v \in H_0^{Nh}.$$

Como H_0^{Nh} es subespacio vectorial, si $v \in H_0^{Nh}$, entonces $-v \in H_0^{Nh}$ y, por tanto,

$$a(\sigma_h, -v) \geq \varphi(-v), \quad \forall v \in H_0^{Nh},$$

de donde concluimos que

$$a(\sigma_h, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H_0^{Nh},$$

es decir

$$\langle \rho\sigma_h, \rho v \rangle_m + \varepsilon(\sigma_h, v)_L = \langle \beta, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in H_0^{Nh},$$

con lo que queda probado que el problema (5.10) tiene solución única.

Además σ_h está caracterizado como el elemento de H^{Nh} donde alcanza el mínimo el funcional

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v),$$

que a su vez es equivalente a (5.10) ya que

$$\Phi(v) = J(v) - (\langle \beta \rangle_m + \langle \mathbf{y} \rangle_{Nn}).$$

□

El siguiente teorema es otra caracterización variacional para la solución del problema (5.10) o simplemente un método de multiplicadores de Lagrange para resolver dicho problema.

Teorema 5.2.5. *Existe un único par $(\sigma_h, \boldsymbol{\lambda}) \in H^{Nh} \times \mathbb{R}^{Nn}$ tal que*

$$\langle \rho\sigma_h, \rho v \rangle_m + \varepsilon(\sigma_h, v)_L + \langle \boldsymbol{\tau}^N v, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{Nn} = \langle \beta, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega}, \quad (5.13)$$

para toda $v \in H^{Nh}$, siendo σ_h la única solución del problema (5.10).

Demostración. Sean $\{\omega_1, \dots, \omega_{Nn}\}$ las funciones de base de X_h asociadas a los grados de libertad $\{\phi_j\}_{j=1, \dots, Nn}$. Para cada $v \in H^{Nh}$ sea

$$\omega = v - \sum_{j=1}^{Nn} \phi_j(v) \omega_j.$$

Entonces $\omega \in X_h$ y, para cada $i = 1, \dots, Nn$,

$$\phi_j(\omega) = \phi_j(v) - \sum_{j=1}^{Nn} \phi_j(v) \phi_j(\omega_j) = 0,$$

por lo que $\tau^N \omega = 0$ y, en consecuencia, $\omega \in H_0^{Nh}$.

Sea σ_h la solución de (5.10). Entonces por el Teorema 5.2.4, se tiene que $\sigma_h \in H^{Nh}$ y

$$\langle \rho \sigma_h, \rho \omega \rangle_m + \varepsilon(\sigma_h, \omega)_L = \langle \beta, \rho \omega \rangle_m + \varepsilon(f, \omega)_{0,\Omega},$$

es decir,

$$\begin{aligned} & \langle \rho \sigma_h, \rho(v - \sum_{j=1}^{Nn} \phi_j(v) \omega_j) \rangle_m + \varepsilon(\sigma_h, (v - \sum_{j=1}^{Nn} \phi_j(v) \omega_j))_L \\ &= \langle \rho \beta, \rho(v - \sum_{j=1}^{Nn} \phi_j(v) \omega_j) \rangle_m + \varepsilon(f, (v - \sum_{j=1}^{Nn} \phi_j(v) \omega_j))_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

y por linealidad, obtenemos

$$\begin{aligned} & \langle \rho \sigma_h, \rho v \rangle_m + \sum_{j=1}^{Nn} (\langle \beta - \rho \sigma_h, \rho \omega_j \rangle_m - \varepsilon(\sigma_h, \omega_j)_L + \varepsilon(f, \omega_j)_{0,\Omega}) \phi_j(v) \\ &+ \varepsilon(\sigma_h, v)_L = \langle \beta, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Sea $\lambda = (\langle \beta - \rho \sigma_h, \rho \omega_j \rangle_m - \varepsilon(\sigma_h, \omega_j)_L + \varepsilon(f, \omega_j)_{0,\Omega})_{j=1, \dots, Nn} \in \mathbb{R}^{Nn}$; entonces concluimos que

$$\langle \rho \sigma_h, \rho v \rangle_m + \varepsilon(\sigma_h, v)_L + \langle \lambda, \tau^N v \rangle_{Nn} = \langle \beta, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega},$$

es decir, se verifica (5.13).

Supongamos que existen $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{Nn}$ tales que (σ_h, λ) y $(\sigma_h, \bar{\lambda})$ verifican (5.13). Entonces

$$\langle \rho \sigma_h, \rho v \rangle_m + \varepsilon(\sigma_h, v)_L + \langle \lambda, \tau^N v \rangle_{Nn} = \langle \beta, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega},$$

$$\langle \rho \sigma_h, \rho v \rangle_m + \varepsilon(\sigma_h, v)_L + \langle \bar{\lambda}, \tau^N v \rangle_{Nn} = \langle \beta, \rho v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega},$$

y, restando, se obtiene

$$\langle \lambda - \bar{\lambda}, \tau^N v \rangle_{Nn} = 0, \forall v \in H^{Nh}$$

de donde se concluye que $\lambda = \bar{\lambda}$ y, en consecuencia, la unicidad del par (σ_h, λ) . \square

5.3. Convergencia

Sea $g \in H^{n'}(\Omega)$ de forma que

$$n' > n, \quad (5.14)$$

y sea $n^* = \min\{n, n' - 1\}$.

Vamos a probar dos resultados de convergencia de la superficie PDE discreta asociada a $L, \boldsymbol{\tau}^N g, A^r, \boldsymbol{\rho}g$ y ε hacia g bajo ciertas condiciones cuando $h \rightarrow 0$ y $r \rightarrow +\infty$, independientemente de N , en un caso, y cuando $h \rightarrow 0$ y $N \rightarrow +\infty$, independientemente de r , si g es la solución del problema de contorno (5.9), en otro caso.

Para ello, suponemos que la familia de espacios de elementos finitos $(X_h)_{h \in \mathcal{H}}$ y n' son tales que se tiene el resultado siguiente (véase P. Clément [27]):

Para todo $h \in \mathcal{H}$, existe un operador lineal $\Pi_h : L^2(\Omega) \mapsto X_h$, y una constante $C \geq 0$, verificando las relaciones:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \forall h \in \mathcal{H}, \forall l = 0, \dots, n^*, \forall v \in H^{n'}(\Omega), \\ & |v - \Pi_h v|_l \leq Ch^{n'-l} |v|_{n'}; \\ 2) \quad & \forall h \in \mathcal{H}, \forall l = n^* + 1, \dots, n' - 1, \forall v \in H^{n'}(\Omega), \\ & \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \Pi_h v|_{l,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{n'-l} |v|_{n'}; \\ 3) \quad & \forall h \in \mathcal{H}, \forall v \in H^{n'}(\Omega), \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \Pi_h v|_{n',K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Nota 5.3.1. *Este resultado supone que la familia $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ es regular (véase P. G. Ciarlet [25]) y que el elemento finito (K, P_K, Σ_K) de la familia $(X_h)_{h \in \mathcal{H}}$ satisface la condición $P_{n'}(K) \subset P_K \subset H^{n'}(K)$, y, una propiedad de uniformidad de las funciones de base (véase G. Strang [73]) que en particular, verifican los elementos finitos usuales (elemento finito de Bogner-Fox-Schmit, Argyris o Bell.)*

Supongamos de igual forma que la familia $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ satisface la hipótesis inversa de Ciarlet [25], esto es, existe una constante ν tal que

$$\exists \nu \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{H}, \forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h}{h_K} \leq \nu, \quad (5.16)$$

donde h_K es el diámetro de K , y que

$$\exists C > 0, \forall h \in \mathcal{H}, \forall r \in \mathbb{N}, \forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{\text{card}(A^r \cap K)}{\text{meas}(K)} \leq Cr^2, \quad (5.17)$$

donde $\text{meas}(K)$ es la medida de K .

Nota 5.3.2. *La hipótesis anterior traduce una propiedad de regularidad asintótica de la distribución de los puntos de A^r en $\bar{\Omega}$.*

Para obtener el primer resultado de convergencia suponemos

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{\mathbf{a} \in A^r} \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle_2 = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (5.18)$$

Lema 5.3.3. *Supongamos que se verifican las hipótesis (5.14)–(5.18). Entonces, para todo $v \in H^{n'}(\Omega)$ y cada $h \in \mathcal{H}$, existe $v_h \in X_h$ tal que $\tau^N v_h = \tau^N v$, y existe $C > 0$ tal que*

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathcal{H}, \forall l = 0, \dots, n, \quad |v - v_h|_{l,\Omega} \leq Ch^{n'-l} |v|_{n',\Omega}, \quad (5.19)$$

y existe $C > 0$ tal que

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathcal{H}, \quad \langle \rho(v_h - v) \rangle_m^2 \leq Ch^{2n'} r^2 |v|_{n',\Omega}^2. \quad (5.20)$$

Demostración. Sean $\{\omega_1, \dots, \omega_{Nn}\}$ las funciones de base de X_h asociadas a los grados de libertad $\{\phi_1, \dots, \phi_{Nn}\}$. Sea $v \in H^{2n'}(\Omega)$ y, para cada $h \in \mathcal{H}$ sea

$$v_h = \Pi_h v - \sum_{j=1}^{Nn} \phi_j(v - \Pi_h v) \omega_j,$$

donde Π_j es el operador definido en (5.15). Entonces

$$\forall i = 1, \dots, Nn, \quad \phi_i(v_h) = \phi_i(\Pi_h v) - \sum_{j=1}^{Nn} \phi_j(v - \Pi_h v) \phi_i(\omega_j) = \phi_i(v),$$

de donde se tiene que $\tau^N v_h = \tau^N v$.

Por (5.15), existe $C > 0$ tal que

$$\forall l = 1, \dots, n, \quad |v - \Pi_h v|_{l,\Omega} \leq Ch^{n'-l} |v|_{n',\Omega}. \quad (5.21)$$

Por otra parte, razonando como en el Lema VI-2.1 de [2] a partir del punto 2) para n' en lugar de $m + 1$, se deduce que existe $C > 0$ tal que

$$\forall l = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^{Nn} \phi_j(v - \Pi_h v) \omega_j \leq Ch^{n'-l} |v|_{n',\Omega},$$

de donde, junto con (5.21), que existe $C > 0$ tal que

$$|v - v_h|_{l,\Omega} \leq Ch^{n'-l}|v|_{n',\Omega}.$$

Asimismo, razonando como en el Lema VI-3.1 de [2] para v_h , n' y $\frac{1}{r}$ en lugar de $\tilde{\Pi}_h v$, q y d se deduce (5.20). \square

Sean

$$H^N = \{u \in H^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\tilde{\Omega}) : \tau^N u = \tau^N g\}$$

y

$$H_0^N = \{u \in H^n(\Omega) \cap C^{n-1}(\tilde{\Omega}) : \tau^N u = \mathbf{0}\}.$$

Consideremos el siguiente problema: Hallar $\tilde{\sigma} \in H^N$ tal que

$$\tilde{J}(\sigma^N) \leq \tilde{J}(v), \quad \forall v \in H^N \quad (5.22)$$

donde $\tilde{J} : H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es el operador definido por

$$\tilde{J}(v) = |v|_L^2 - 2(f, v)_{0,\Omega}.$$

Lema 5.3.4. *El problema (5.22) tiene solución única caracterizada como la única solución del siguiente problema variacional: Hallar $\tilde{\sigma}^N \in H^N$ tal que*

$$(\tilde{\sigma}^N, v)_L = (f, v)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in H_0^N. \quad (5.23)$$

Demostración. Es análoga a la demostración del Teorema 5.2.4. \square

Supongamos, por último, para este primer resultado de convergencia, que el número de puntos que se interpolan en la frontera, N , es fijo y que $\varepsilon = \varepsilon(r)$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada $h \in \mathcal{H}$, sea σ_h^r la superficie PDE discreta asociada a L , B^N , $\tau^N g$, A^r , ρg y ε .

Teorema 5.3.5. *Suponemos que se cumplen (5.4)–(5.8) y (5.14)–(5.18), y que*

$$\varepsilon = o(r^2), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (5.24)$$

$$\frac{h^{2n'} r^2}{\varepsilon} = O(1), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (5.25)$$

Entonces

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \|\sigma_h^r - g\|_{n,\Omega} = 0. \quad (5.26)$$

Demostración. Observemos que las hipótesis (5.24) y (5.25) implican que $h = o(1)$ cuando $r \rightarrow +\infty$.

1) Para cada $h \in \mathcal{H}$, sea g_h la función definida en el Lema 5.3.3 tal que $\tau^N g_h = \tau^N g$. Entonces $g_h \in H^{Nh}$ y

$$\forall l = 1, \dots, n, \quad |g_h|_{l,\Omega} = |g|_{n',\Omega} + O(1), \quad h \rightarrow 0. \quad (5.27)$$

Por tanto, por la definición de σ_h^r que

$$J(\sigma_h^r) \leq J(g_h),$$

es decir,

$$\begin{aligned} & \langle \rho \sigma_h^r - \beta \rangle_m^2 + \varepsilon (|\sigma_h^r|_L^2 - 2(f, \sigma_h^r)_{0,\Omega}) \\ & \leq \langle \rho g_h - \beta \rangle_m^2 + \varepsilon (|g_h|_L^2 - 2(f, g_h)_{0,\Omega}) \end{aligned} \quad (5.28)$$

De (5.20) se tiene que

$$\langle \rho(g_h - g) \rangle_m^2 \leq Ch^{2n'} r^2 |g|_{n',\Omega}^2,$$

lo que, junto con (5.25), implica que

$$\langle \rho(g_h - g) \rangle_m^2 = O(\varepsilon), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (5.29)$$

De (5.28) se tiene que

$$\langle \rho(\sigma_h^r - g) \rangle_m^2 \leq \langle \rho(g_h - g) \rangle_m^2 + \varepsilon (|g_h|_L^2 + 2(f, \sigma_h^r - g_h)_{0,\Omega}).$$

Puesto que $\sigma_h^r - g_h \in H_0^{Nh} \subset H_0^N$, entonces de (5.24)

$$(\tilde{\sigma}, \sigma_h^r - g_h)_L = (f, \sigma_h^r - g_h)_{0,\Omega}, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (5.30)$$

De (5.27)–(5.29) se deduce que

$$|\sigma_h^r|_L^2 \leq |g_h|_L^2 + 2(f, \sigma_h^r - g_h)_{0,\Omega} + o(1), \quad r \rightarrow +\infty,$$

y, aplicando (5.30), se tiene

$$|\sigma_h^r|_L^2 \leq |g_h|_L^2 + 2(\tilde{\sigma}^N, \sigma_h^r - g_h)_L + o(1), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (5.31)$$

es decir,

$$|\sigma_h^r|_L^2 - 2(\tilde{\sigma}^N, \sigma_h^r)_L \leq |g_h|_L^2 - 2(\tilde{\sigma}^N, g_h)_L + o(1), \quad r \rightarrow +\infty,$$

de donde se deduce que

$$|\sigma_h^r|_L^2 \leq |g_h - \tilde{\sigma}^N|_L^2 + |\tilde{\sigma}^N|_L + o(1), \quad r \rightarrow +\infty,$$

y, por (5.28), concluimos que

$$|\sigma_h^r|_L = O(1), \quad h \rightarrow 0. \quad (5.32)$$

Ahora bien, si observamos que, por (5.7) y por ser N fijo, la aplicación $[[\cdot]]^N : H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $[[v]]^N = (\langle \boldsymbol{\tau}^N v \rangle_{Nn} + |v|_L^2)^{\frac{1}{2}}$ es una norma en $H^n(\Omega)$ equivalente a la norma usual $\|\cdot\|_{n,\Omega}$, entonces, la familia $(\sigma_h^r)_{r \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^n(\Omega)$.

Por lo tanto, el Lema 1.3.3 asegura que existe una sucesión $(\sigma_{h_l}^{r_l})_{l \in \mathbb{N}}$, con $\lim_{l \rightarrow +\infty} h_l = 0$ y $\lim_{l \rightarrow +\infty} r_l = +\infty$, y un elemento $g^* \in H^n(\Omega)$ tales que

$$g^* = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sigma_{h_l}^{r_l} \quad \text{débilmente en } H^n(\Omega). \quad (5.33)$$

2) Veamos ahora que $g^* = g$ por reducción al absurdo. Supongamos que $g^* \neq g$. Como la inyección de $H^n(\Omega)$ en $C^0(\bar{\Omega})$ es continua, por el Teorema 1.4.13, existen $\gamma > 0$ y un abierto no vacío $\Omega_0 \subset \Omega$ tales que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad |g^*(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| > \gamma.$$

Como tal inyección, además, es compacta, de (5.33) se sigue que

$$\exists l_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq l_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad |\sigma_{h_l}^{r_l}(\mathbf{x}) - g^*(\mathbf{x})| \leq \frac{\gamma}{2}.$$

Por tanto,

$$\forall l \geq l_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad |\sigma_{h_l}^{r_l}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| \geq \frac{\gamma}{2}. \quad (5.34)$$

Ahora bien, de (5.18) se sigue que, para $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe $\mathbf{x}^l \in A^{r_l} \cap \Omega_0$.

De (5.27)–(5.29) y (5.32) se sigue que

$$\langle \boldsymbol{\rho}(\sigma_{h_l}^{r_l} - g) \rangle_m^2 = O(\varepsilon), \quad l \rightarrow +\infty,$$

y, por (5.24), se tiene que

$$\langle \boldsymbol{\rho}(\sigma_{h_l}^{r_l} - g) \rangle_m^2 = o(1), \quad l \rightarrow +\infty.$$

Además

$$|\sigma_{h_l}^{r_l}(\mathbf{x}^l) - g(\mathbf{x}^l)| \leq \langle \boldsymbol{\rho}(\sigma_{h_l}^{r_l} - g) \rangle_m^2, \quad l \rightarrow +\infty,$$

de donde concluimos que

$$|\sigma_{h_l}^{r_l}(\mathbf{x}^l) - g(\mathbf{x}^l)| = o(1), \quad l \rightarrow +\infty,$$

lo que contradice (5.34). Por consiguiente, $g^* = g$.

3) Por (5.33), dado que $g^* = g$ y que, por el Teorema 1.4.14, $H^n(\Omega)$ se inyecta continuamente en $H^{n-1}(\Omega)$, se tiene que

$$g = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sigma_{h_l}^{r_l} \quad \text{en } H^{n-1}(\Omega). \quad (5.35)$$

Por otra parte, de la definición del semiproducto escalar $(\cdot, \cdot)_L$ y de (5.2)–(5.3) se sigue que

$$|\sigma_{h_l}^{r_l} - g|_{n,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} |\sigma_{h_l}^{r_l} - g|_L^2 \leq \frac{1}{\nu} (|\sigma_{h_l}^{r_l}|_L^2 + |g|_L^2 - 2(\sigma_{h_l}^{r_l}, g)_L).$$

Teniendo en cuenta (5.31) deducimos que

$$|\sigma_{h_l}^{r_l} - g|_{n,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} (|g_h|_L^2 + 2(\tilde{\sigma}^N, \sigma_{h_l}^{r_l} - g)_L + o(1) - |g|_L^2 - 2(\sigma_{h_l}^{r_l}, g)_L), \quad l \rightarrow +\infty.$$

Por último, de (5.27) y (5.33), tenemos que

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} |\sigma_{h_l}^{r_l} - g|_{n,\Omega} = 0,$$

lo cual, unido a (5.35) implica que

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \|\sigma_{h_l}^{r_l} - g\|_{n,\Omega} = 0.$$

4) Concluimos finalmente, razonando por reducción al absurdo, que se cumple (5.26). En efecto, si no fuera así, existiría un número real $\mu > 0$ y dos sucesiones $(r_{l'})_{l' \in \mathbb{N}}$, $(h_{l'})_{l' \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{l' \rightarrow +\infty} r_{l'} = +\infty, \quad \lim_{l' \rightarrow +\infty} h_{l'} = +\infty,$$

con

$$\forall l' \in \mathbb{N}, \quad \|\sigma_{h_{l'}}^{r_{l'}} - g\|_{n,\Omega} \geq \mu. \quad (5.36)$$

Ahora bien, la sucesión $(\sigma_{h_{l'}}^{r_{l'}})_{l' \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^n(\Omega)$ con lo que, si argumentamos como en los puntos 1), 2) y 3), se deduciría que de tal sucesión se puede extraer una subsucesión convergente a g , lo cual es contradictorio con (5.36). Por tanto

$$\lim_{m \rightarrow 0} \|\sigma_{h_l}^{r_l} - g\|_{n,\Omega} = 0.$$

□

A continuación presentamos un segundo resultado de convergencia. En este caso suponemos que el número de puntos de aproximación, m es fijo y que $\varepsilon = \varepsilon(N)$. Suponemos asimismo que $g \in H^{2n}(\Omega) \cap C^{n-1}(\bar{\Omega})$ es la solución del problema de contorno (5.9) y notamos por σ_h^N la superficie PDE discreta asociada a LB^N , $\tau^N g$, A^r , ρg y ε .

Teorema 5.3.6. *Si se verifican (5.4)–(5.8) y (5.14)–(5.18) y que*

$$\frac{h^{4n}}{\varepsilon} = o(1), \quad N \rightarrow +\infty, \quad (5.37)$$

entonces

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_h^N - g\|_{n,\Omega} = 0.$$

Demostración. Observemos que las hipótesis (5.37) implica que $h = o(1)$ cuando $N \rightarrow +\infty$.

Para cada $h \in \mathcal{H}$, consideramos la función g_h , definida en el Lema 5.3.3, tal que $\tau^N g_h = \tau^N g$. Entonces $g_h \in H^{N_h}$ y

$$\forall l = 1, \dots, n, \quad |g_h - g|_{l,\Omega} = o(1), \quad h \rightarrow 0. \quad (5.38)$$

Como g es la solución de (5.9) se verifica que

$$(g, v)_L = (f, v)_{n,\Omega}, \quad \forall v \in H_0.$$

Luego, para todo $N \in \mathbb{N}$, como $H_0 \subset H_0^N$ se verifica que

$$(g, v)_L = (f, v)_{n,\Omega}, \quad \forall v \in H_0^N. \quad (5.39)$$

Por la unicidad de $\tilde{\sigma}^N$ (ver Lema 5.3.4) se tiene que $\tilde{\sigma}^N = g$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Por la definición de σ_h^N , como $g_h \in H^{N_h}$, se verifica que

$$\begin{aligned} & \langle \rho(\sigma_h^N - g) \rangle_m^2 + \varepsilon (|\sigma_h^N|_L^2 - 2(f, \sigma_h^N)_{0,\Omega}) \\ & \leq \langle \rho(g_h - g) \rangle_m^2 + \varepsilon (|g_h|_L^2 - 2(f, g_h)_{0,\Omega}) \end{aligned} \quad (5.40)$$

y, por tanto

$$|\sigma_h^N|_L^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \langle \rho(g_h - g) \rangle_m^2 + |g_h|_L^2 + 2(f, \sigma_h^N - g_h)_{0,\Omega}. \quad (5.41)$$

De (5.20) se tiene que

$$\langle \rho(g_h - g) \rangle_m^2 \leq Ch^{4n} r^2 |g|_{2n,\Omega}^2,$$

y, por (5.39), $(f, \sigma_h^N - g_h)_{0,\Omega} = (g, \sigma_h^N - g_h)_L$. Luego

$$|\sigma_h^N|_L^2 \leq C \frac{h^{4n} r^2}{\varepsilon} |g|_{2n,\Omega}^2 + 2(g, \sigma_h^N)_L - 2(g, g_h)_L,$$

de donde se obtiene que

$$|\sigma_h^N - g|_L^2 \leq C \frac{h^{4n} r^2}{\varepsilon} |g|_{2n,\Omega}^2 + |g - g_h|_L^2,$$

y, por tanto, de (5.37) y (5.38), se deduce que

$$|\sigma_h^N - g|_L^2 = o(1), \quad N \rightarrow +\infty. \quad (5.42)$$

Teniendo en cuenta que la aplicación $[[\cdot]]^N : H^n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $[[v]]^N = (\langle \boldsymbol{\tau}^N v \rangle_{Nn} + |v|_L^2)^{\frac{1}{2}}$ es una norma en $H^n(\Omega)$ equivalente a la norma $\|\cdot\|_{n,\Omega}$, y que

$$[[\sigma_h^N - g]]^N = (\langle \boldsymbol{\tau}^N (\sigma_h^N - g) \rangle_{Nn} + |\sigma_h^N - g|_L^2)^{\frac{1}{2}} = [[\sigma_h^N - g]]^N$$

y (5.42), concluimos que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_h^N - g\|_{n,\Omega} = 0.$$

□

5.4. Estimaciones del error

En esta sección se demuestra un resultado que corrobora los teoremas de convergencia enunciados y demostrados anteriormente.

Retomamos de nuevo las notaciones e hipótesis de la subsección 5.2. Entonces tenemos el siguiente resultado para la estimación del error de aproximación mediante superficies PDE discretas.

Teorema 5.4.1. *Supongamos que se verifican (4.12), (5.4), (5.14), (5.17) y que*

$$\frac{h^{n^* - nr}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty, \quad \varepsilon r^2 \rightarrow 0.$$

Entonces se tiene que

$$1. \quad \forall l = 0, \dots, n-1, \quad |\sigma_h - g|_l \leq O\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^{\frac{n-l}{2n}}, \quad r \rightarrow +\infty,$$

$$2. \quad |\sigma_h - g|_n = o(1),$$

donde $g \in H^{n'}(\Omega)$, y $n^* = \min\{n', 2(k+1)\}$.

Demostración. Análoga a la del Teorema 3.4.8 de [63]. □

5.5. Computación

De igual forma que ocurría en el capítulo 3 vamos a obtener una expresión explícita de la superficie PDE discreta solución del problema (5.10).

En primer lugar, fijamos h y a partir de él, consideramos una teselación (en triángulos o rectángulos) de Ω , \mathcal{T}_h , de forma que los puntos de B^N sean nodos de dicha teselación como pusimos de manifiesto en la introducción. Numeramos seguidamente las funciones de base del espacio X_h .

Si indicamos mediante $\omega_1, \dots, \omega_I$ las funciones de base del espacio de elementos finitos H^{Nh} , entonces podemos expresar σ_h como la siguiente combinación lineal

$$\sigma_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^I \gamma_i \omega_i(\mathbf{x}),$$

con lo que calculando los coeficientes γ_i tendremos determinado σ_h .

Sustituyendo en (5.13), tenemos que, para toda $v \in H^{Nh}$,

$$\sum_{i=1}^I \gamma_i (\langle \boldsymbol{\rho} \omega_i, \boldsymbol{\rho} v \rangle_m + \varepsilon(\omega_i, v)_L) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}^N v \rangle_{Nn} = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho} v \rangle_m + \varepsilon(f, v)_{0,\Omega},$$

sujeto a las restricciones

$$\boldsymbol{\tau}^N \left(\sum_{i=1}^I \gamma_i \omega_i \right) = \mathbf{y},$$

o lo que es igual

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^I \gamma_i (\langle \boldsymbol{\rho} \omega_i, \boldsymbol{\rho} \omega_j \rangle_m + \varepsilon(\omega_i, \omega_j)_L) + \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}^N \omega_j \rangle_{Nn} \\ = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho} \omega_j \rangle_m + \varepsilon(f, \omega_j)_{0,\Omega}, \quad 1 \leq j \leq I, \\ \sum_{i=1}^I \gamma_i \boldsymbol{\tau}_j^N(\omega_i) = \mathbf{y}_j, \quad 0 \leq j \leq Nn, \end{array} \right.$$

que es un sistema lineal de ecuaciones con $I + Nn$ ecuaciones e incógnitas

$$\gamma_1, \dots, \gamma_I, \lambda_1, \dots, \lambda_{Nn}.$$

La forma matricial de dicho sistema es

$$\begin{pmatrix} C & D \\ D^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix},$$

donde

$$C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq I}}, \quad \text{con } c_{ij} = \langle \rho\omega_i, \rho\omega_j \rangle_m + \varepsilon(\omega_i, \omega_j)_L,$$

$$D = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq I \\ 1 \leq j \leq Nn}}, \quad \text{con } d_{ij} = \phi_j(\omega_i),$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_I)^t, \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{Nn})^t,$$

$$\widehat{\boldsymbol{f}} = (\langle \boldsymbol{\beta}, \rho\omega_1 \rangle_m + \varepsilon(f, \omega_1)_{0,\Omega}, \dots, \langle \boldsymbol{\beta}, \rho\omega_I \rangle_m + \varepsilon(f, \omega_I)_{0,\Omega})^t,$$

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{Nn})^t.$$

Si llamamos $A = (\omega_j(\boldsymbol{a}_i))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq I}}$, entonces se verifica que

$$C = A^t A + \varepsilon R,$$

siendo

$$R = ((\omega_i, \omega_j)_L)_{1 \leq i, j \leq I},$$

y también tendremos

$$\widehat{\boldsymbol{f}} = A^t \boldsymbol{\beta} + \varepsilon \widetilde{\boldsymbol{f}},$$

con

$$\widetilde{\boldsymbol{f}} = ((\omega_1, f)_{0,\Omega}, \dots, (\omega_I, f)_{0,\Omega})^t.$$

De esta forma todos los elementos que aparecen en el sistema en términos conocidos como son los elementos básicos, los puntos de aproximación y de ajuste con sus respectivas imágenes, el parámetro ε y la función f .

Nota 5.5.1. *Todos los resultados y desarrollos que hemos hecho a lo largo de este capítulo se pueden extender sin dificultad al caso paramétrico, entendiendo que las hipótesis planteadas se deben verificar componente a componente. Por lo demás las demostraciones son idénticas a las que hemos venido realizando en el presente capítulo.*

5.6. Ejemplos gráficos y numéricos

Finalizamos el capítulo con una serie de ejemplos numéricos y gráficos que constatan la validez del método de aproximación y los resultados de

convergencia establecidos. Para todos estos ejemplos consideraremos $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y el problema de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = \Delta^2 u(\mathbf{x}) - \Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (5.44)$$

Hemos considerado una partición uniforme de $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$ en $d \times d$ cuadrados iguales y el espacio de elementos finitos X_h construido sobre esta partición a partir del elemento finito genérico de Bogner-Fox-Schmit de clase C^1 .

Se trata, en cada ejemplo, de aproximar una función dada $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente regular mediante una superficie PDE discreta σ_h asociada a L , $\tau^N g$, A^r , ρg y ε , con A^r un conjunto de $m(r)$ puntos aleatorios de Ω y ε dados.

Por tanto, los parámetros del problema son el número de elementos de la partición, $(d \times d)$, el cardinal de A^r , (m) , y el valor de ε .

En todos los casos, el conjunto de puntos de interpolación en el contorno, B^N , está constituido por todos los nodos de la partición contenidos en $\partial\Omega$, excepto los 4 vértices del cuadrado unidad, y, como σ_h está asociada a $\tau^N g$, se considera $h = g$.

Finalmente, en cada ejemplo, hemos calculado, para distintos valores de los parámetros, una estimación del error relativo en norma $L^2(\Omega)$ definido por

$$E_{\text{rel}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{1600} \langle \sigma_h(\mathbf{x}_i) - g(\mathbf{x}_i) \rangle_3^2}{\sum_{i=1}^{1600} \langle g(\mathbf{x}_i) \rangle_3^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.45)$$

siendo g la función que deseamos aproximar, σ_h es la superficie PDE discreta que la aproxima y $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1, \dots, 1600}$ es un conjunto de 1600 puntos aleatoriamente distribuidos en $\bar{\Omega}$. En estas tablas, se muestran además el número de puntos de interpolación, de aproximación y nodos que se han tomado, así como el valor del parámetro ε .

Ejemplo 1

Se considera la función de Franke dada por

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) = & \frac{3}{4} \exp \left(-\frac{(9x_2 - 2)^2 + (9x_1 - 2)^2}{4} \right) \\ & + \frac{3}{4} \exp \left(-\frac{(9x_2 + 1)^2}{49} + \frac{9x_1 + 1}{10} \right) \\ & + \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{(9x_2 - 7)^2 + (9x_1 - 3)^2}{4} \right) \\ & - \frac{1}{5} \exp \left(-((9x_2 - 4)^2 + (9x_1 - 7)^2) \right) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

La Figura 5.6.1 muestra la gráfica de la función de Franke, g . Las figuras 5.6.2–5.6.7 muestran distintos aproximantes de g mediante superficies PDE discretas asociadas a diferentes valores de los parámetros del método, d, m, ε .

En la Tabla 5.6.1 aparecen estimaciones del error relativo dado por (5.45) para los diferentes valores de los parámetros del problema.

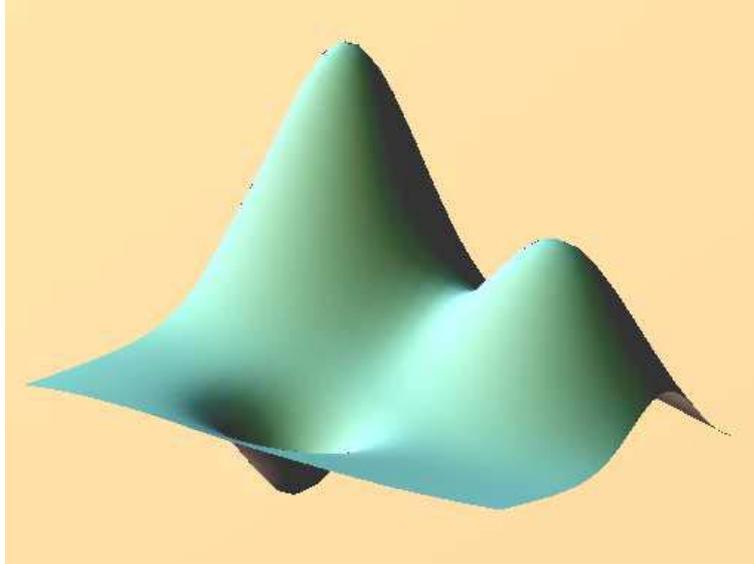


Figura 5.6.1: Gráfica de la función de Franke.

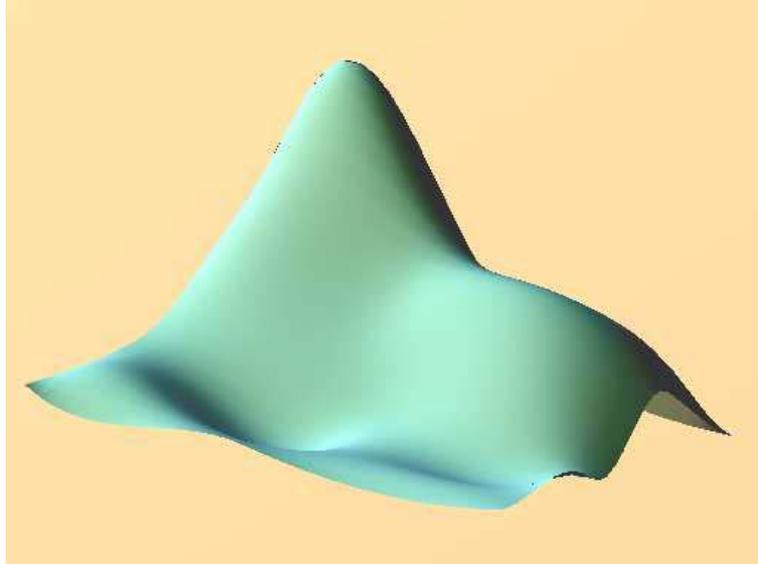


Figura 5.6.2: Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 8 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-2}$ y una partición de 9 rectángulos.

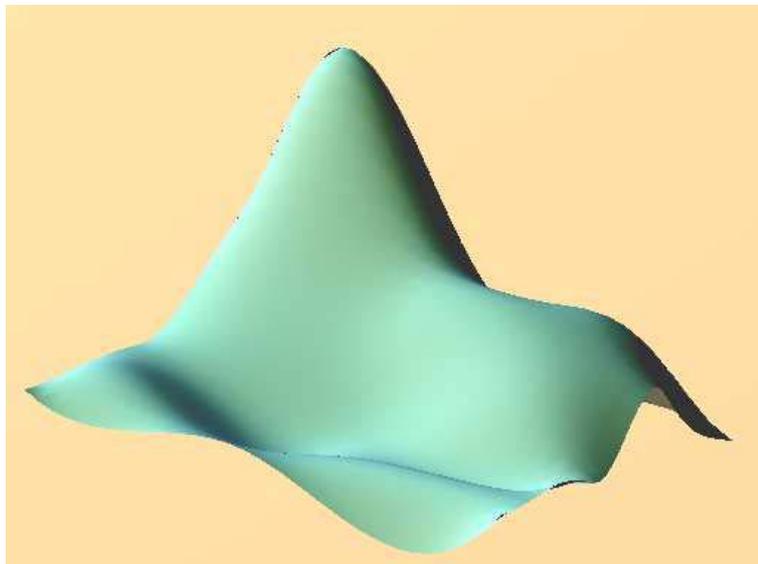


Figura 5.6.3: Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 8 puntos de interpolación, 225 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-4}$ y una partición de 9 cuadrados.

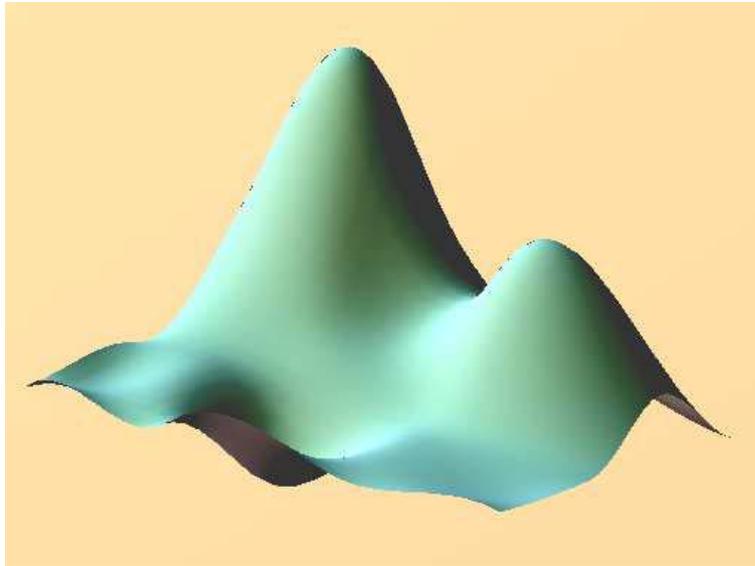


Figura 5.6.4: Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 8 puntos de interpolación, 225 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$ y una partición de 9 rectángulos.

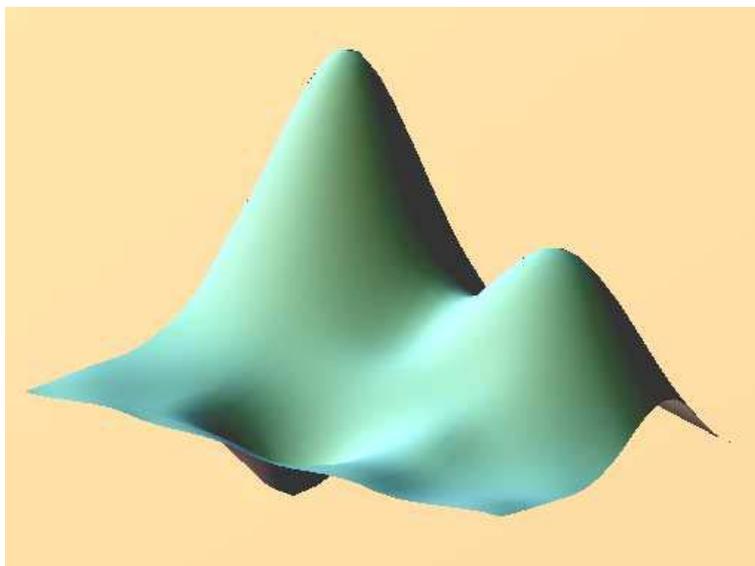


Figura 5.6.5: Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 12 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$ y una partición de 16 cuadrados.

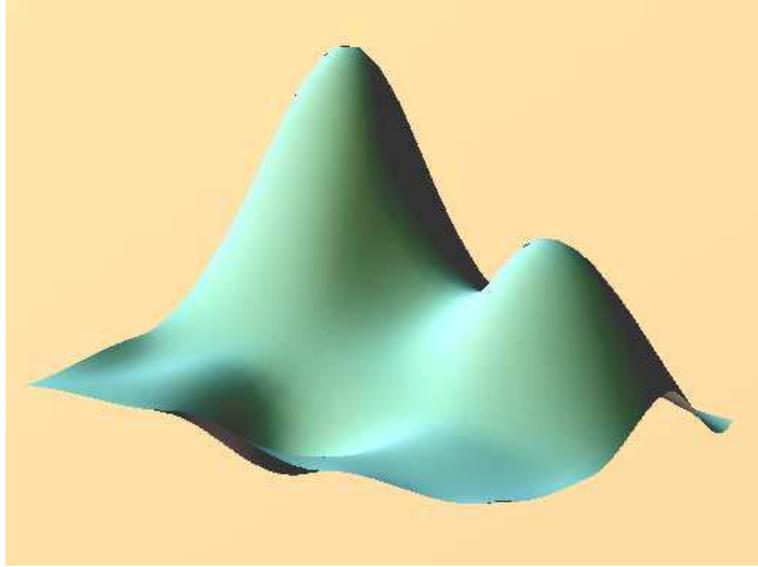


Figura 5.6.6: Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 12 puntos de interpolación, 625 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$ y una partición de 16 cuadrados.

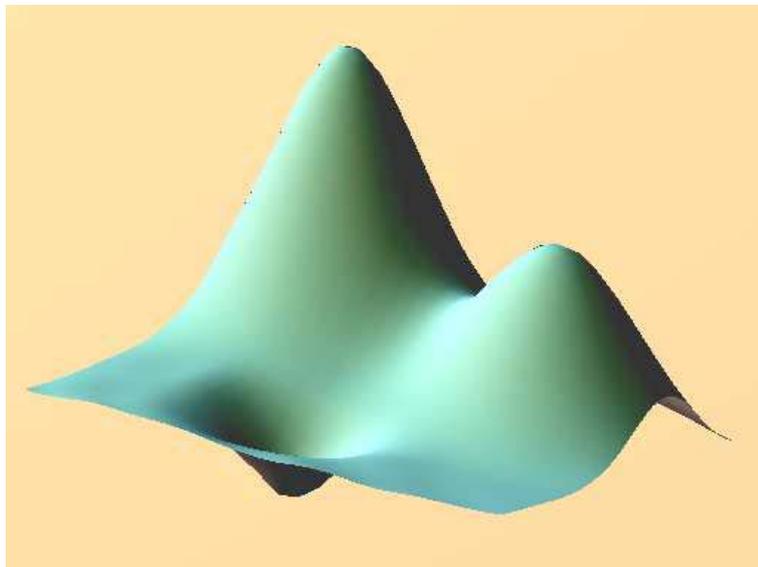


Figura 5.6.7: Superficie PDE discreta aproximando la función de Franke con 16 puntos de interpolación, 625 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$ y una partición de 25 cuadrados.

Nº cuadrados , $d \times d$ (Puntos de interpolación, N)	Valor de ε	Puntos de aproximación, m	Error relativo
3×3 (8)	10^{-5}	100	1.31×10^{-1}
		225	3.23×10^{-2}
		625	1.81×10^{-2}
	10^{-8}	100	9.24×10^{-1}
		225	3.25×10^{-2}
		625	1.80×10^{-2}
	10^{-12}	100	1.56×10^{-1}
		225	1.15×10^{-2}
		625	6.95×10^{-3}
4×4 (12)	10^{-5}	100	8.11×10^{-1}
		225	1.59×10^{-2}
		625	6.98×10^{-3}
	10^{-8}	100	4.12×10^{-1}
		225	1.59×10^{-2}
		625	6.98×10^{-3}
	10^{-12}	100	1.31×10^{-1}
		225	2.11×10^{-2}
		625	6.93×10^{-3}
5×5 (16)	10^{-5}	100	1.13×10^{-1}
		225	2.98×10^{-2}
		625	4.53×10^{-3}
	10^{-8}	100	1.12×10^{-1}
		225	2.98×10^{-2}
		625	4.51×10^{-3}
	10^{-12}	100	9.71×10^{-2}
		225	2.92×10^{-2}
		625	4.51×10^{-3}

Tabla 5.6.1: Tabla de errores para diferentes superficies PDE discretas aproximando la función de Franke.

Ejemplo 2

Se considera la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$.

La Figura 5.6.8 muestra la gráfica de la función g . Las figuras 5.6.9–5.6.12 muestran distintos aproximantes de g mediante superficies PDE discretas asociadas a diferentes valores de los parámetros del método, d, m, ε .

En la Tabla 5.6.2 aparecen estimaciones del error relativo dado por (5.45) para los diferentes valores de los parámetros del problema.

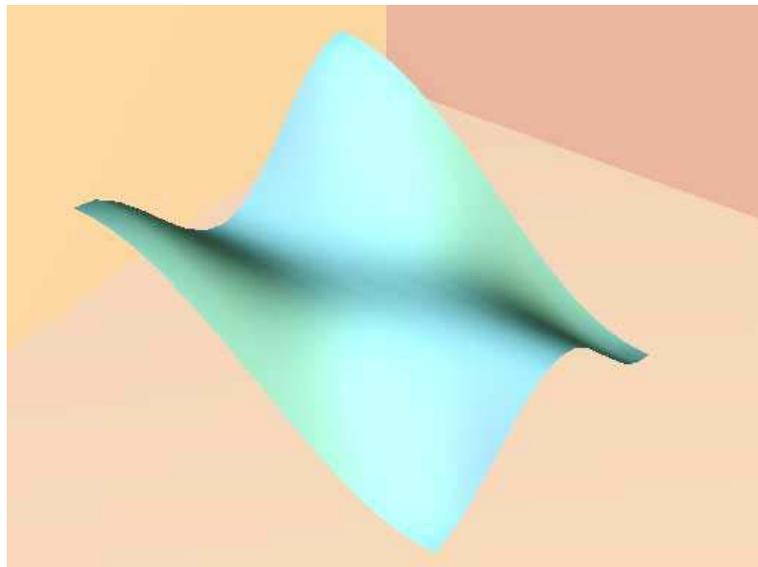


Figura 5.6.8: Gráfica de la superficie $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$.

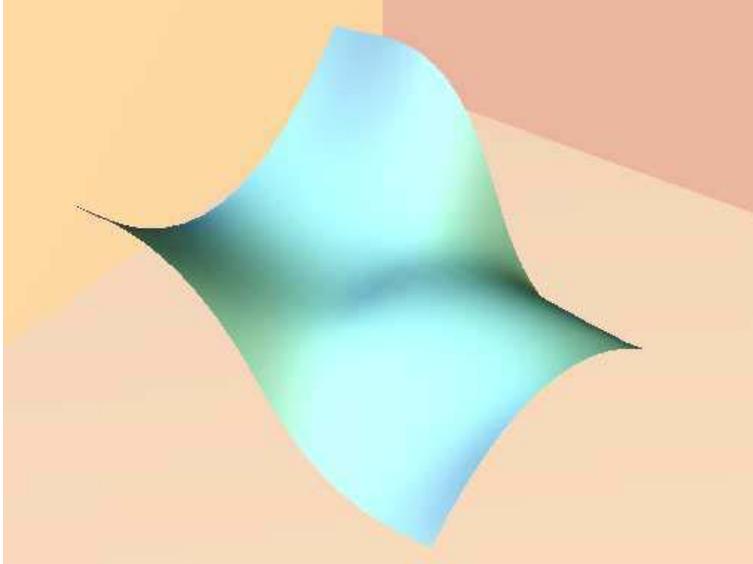


Figura 5.6.9: Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$ con 8 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-3}$ y una partición de 9 cuadrados.

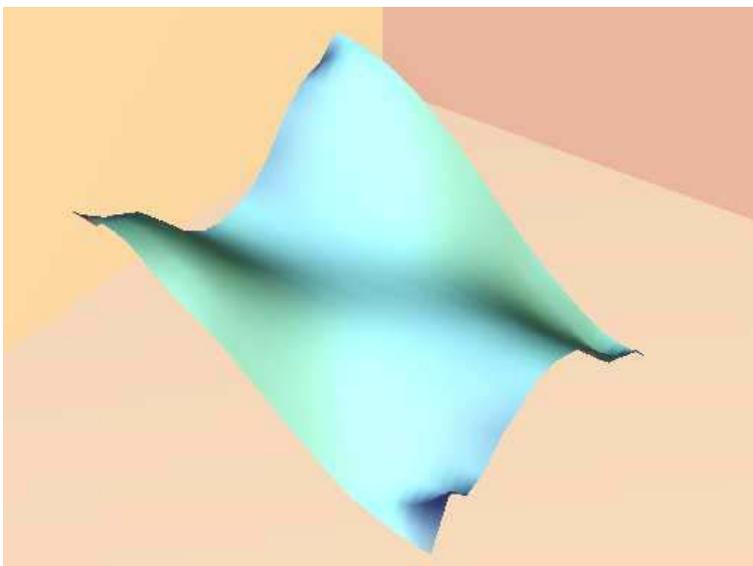


Figura 5.6.10: Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$ con 8 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-8}$ y una partición de 9 cuadrados.

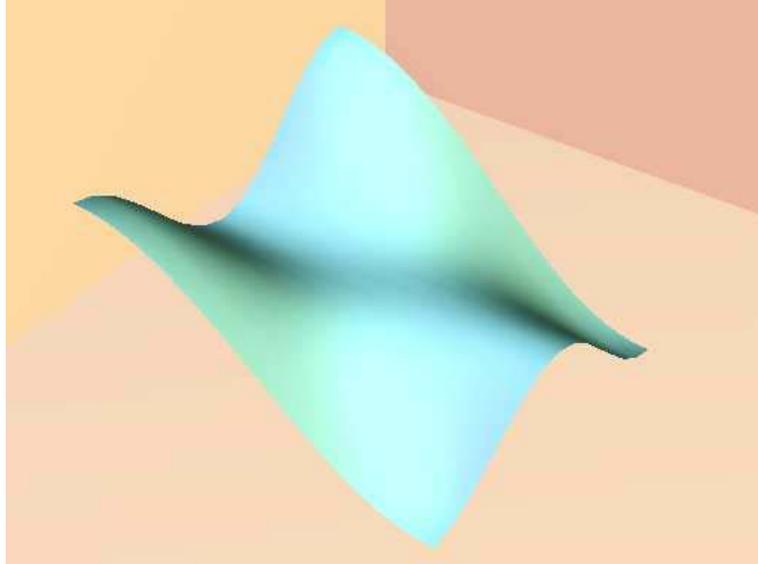


Figura 5.6.11: Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$ con 12 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-5}$ y partición de 16 cuadrados.

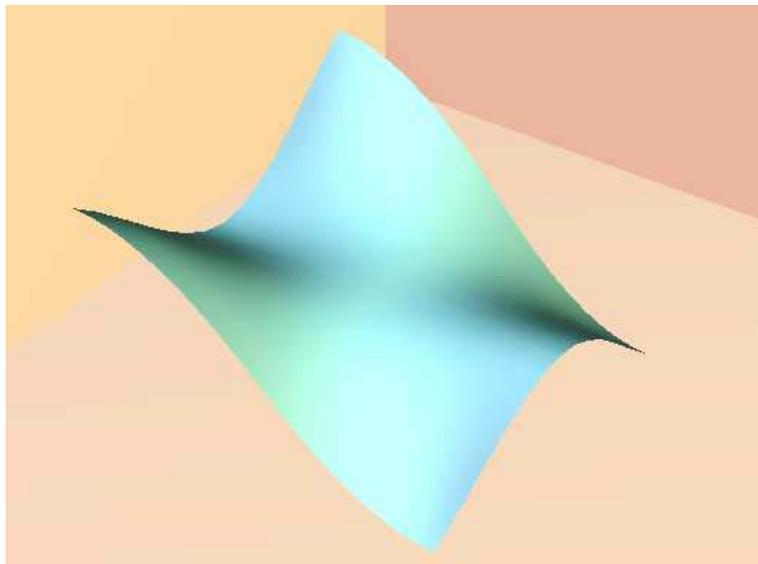


Figura 5.6.12: Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)^2$ con 16 puntos de interpolación, 225 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-7}$ y una partición de 25 cuadrados.

Nº cuadrados , $d \times d$ (Puntos de interpolación, N)	Valor de ε	Puntos de aproximación, m	Error relativo
3×3 (8)	10^{-5}	100	2.29×10^{-2}
		225	6.35×10^{-3}
		625	4.65×10^{-3}
	10^{-8}	100	4.32×10^{-1}
		225	6.32×10^{-3}
		625	4.65×10^{-3}
	10^{-12}	100	4.55×10^{-1}
		225	6.32×10^{-3}
		625	4.65×10^{-3}
4×4 (12)	10^{-5}	100	1.21×10^{-1}
		225	9.59×10^{-3}
		625	2.01×10^{-3}
	10^{-8}	100	2.45×10^{-1}
		225	9.81×10^{-3}
		625	2.01×10^{-3}
	10^{-12}	100	1.04×10^{-1}
		225	9.81×10^{-3}
		625	1.99×10^{-3}
5×5 (16)	10^{-5}	100	1.91×10^{-3}
		225	1.82×10^{-2}
		625	1.91×10^{-3}
	10^{-8}	100	1.09×10^{-1}
		225	2.01×10^{-2}
		625	1.92×10^{-3}
	10^{-12}	100	8.85×10^{-2}
		225	2.01×10^{-2}
		625	1.87×10^{-3}

Tabla 5.6.2: Tabla de errores para diferentes superficies PDE discretas aproximando la función $g(\mathbf{x}) = \cos(\pi x_1) \cos^2(\pi x_2)$.

Ejemplo 3

En este ejemplo consideramos $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$.

La Figura 5.6.13 muestra la gráfica de g . Las figuras 5.6.14–5.6.17 muestran distintos aproximantes de g mediante superficies PDE discretas asociadas a diferentes valores de los parámetros del método, d, m, ε .

En la Tabla 5.6.3 aparecen estimaciones del error relativo dado por (5.45) para los diferentes valores de los parámetros del problema.

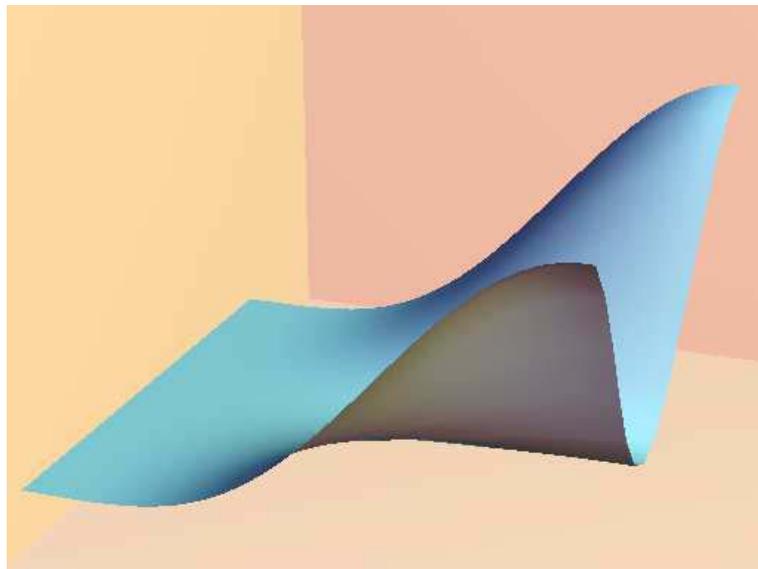


Figura 5.6.13: Gráfica de $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$.

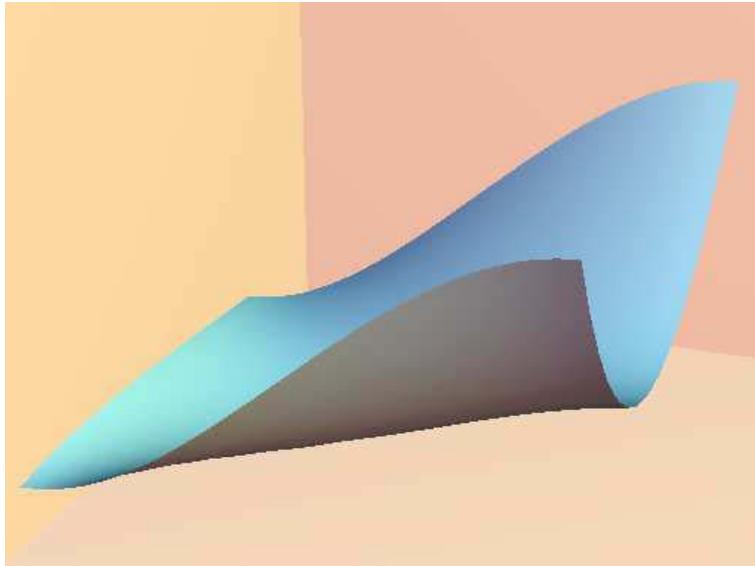


Figura 5.6.14: Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$ con 8 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-5}$ y una partición de 9 cuadrados.

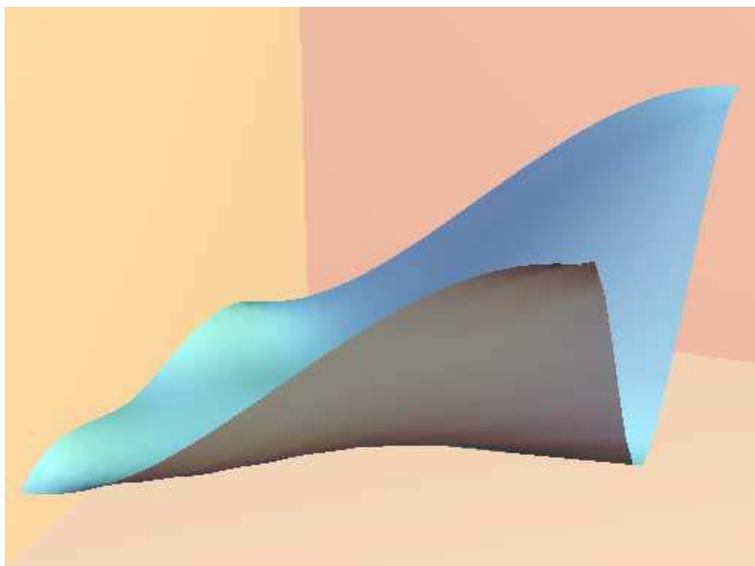


Figura 5.6.15: Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$ con 12 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-5}$ y una partición de 16 cuadrados.

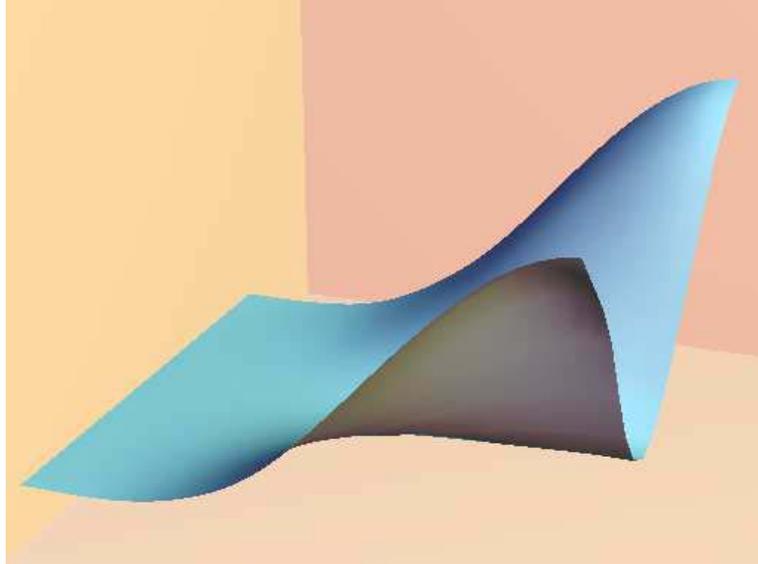


Figura 5.6.16: Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$ con 12 puntos de interpolación, 225 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-7}$ y una partición de 16 cuadrados.

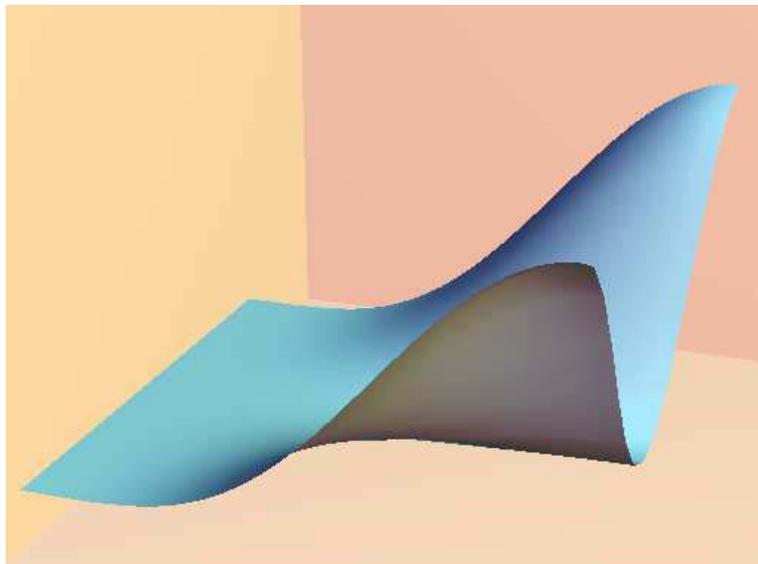


Figura 5.6.17: Superficie PDE discreta de aproximación a la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$ con 16 puntos de interpolación, 625 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-7}$ y una partición de 25 cuadrados.

Nº cuadrados , $d \times d$ (Puntos de interpolación, N)	Valor de ε	Puntos de aproximación, m	Error relativo
3×3 (8)	10^{-5}	100	2.85×10^{-2}
		225	8.11×10^{-3}
		625	4.75×10^{-3}
	10^{-8}	100	5.13×10^{-2}
		225	8.02×10^{-3}
		625	4.74×10^{-3}
	10^{-12}	100	5.14×10^{-2}
		225	8.01×10^{-3}
		625	4.74×10^{-3}
4×4 (12)	10^{-5}	100	8.31×10^{-2}
		225	1.30×10^{-2}
		625	2.02×10^{-3}
	10^{-8}	100	2.81×10^{-1}
		225	1.34×10^{-2}
		625	2.01×10^{-3}
	10^{-12}	100	9.04×10^{-1}
		225	1.34×10^{-2}
		625	1.99×10^{-3}
5×5 (16)	10^{-5}	100	1.52×10^{-1}
		225	2.41×10^{-2}
		625	1.12×10^{-3}
	10^{-8}	100	1.21×10^{-1}
		225	2.34×10^{-2}
		625	1.11×10^{-3}
	10^{-12}	100	1.16×10^{-1}
		225	2.21×10^{-2}
		625	1.09×10^{-3}

Tabla 5.6.3: Tabla de errores para diferentes superficies PDE discretas aproximando la función $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(1 - \cos(\pi x_1))^2 \cos^2(\pi x_2)$.

Ejemplo 4

En este ultimo ejemplo consideramos $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sen(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$, que es solución de la ecuación diferencial del problema (5.44).

La Figura 5.6.18 muestra la gráfica de g . Las figuras 5.6.19–5.6.22 muestran distintos aproximantes de g mediante superficies PDE discretas asociadas a diferentes valores de los parámetros del método, d, m, ε .

En la Tabla 5.6.4 aparecen estimaciones del error relativo dado por (5.45) para los diferentes valores de los parámetros del problema.

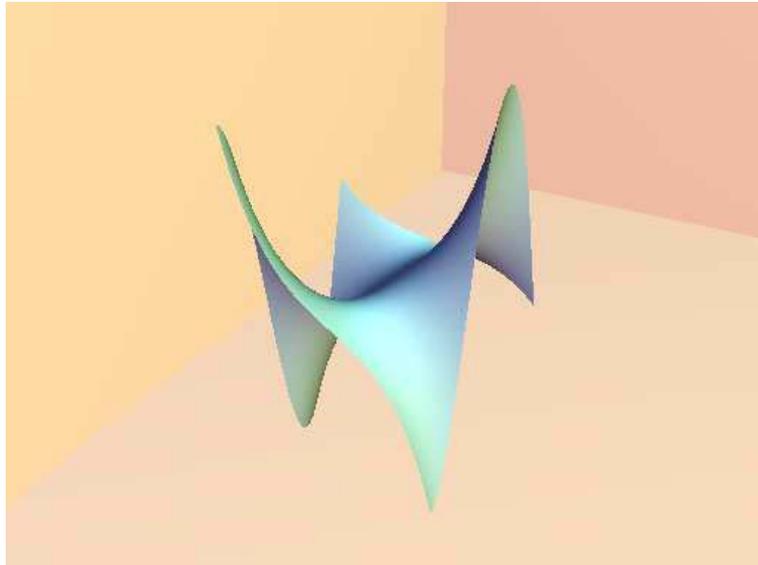


Figura 5.6.18: Gráfica de la función $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sen(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$.

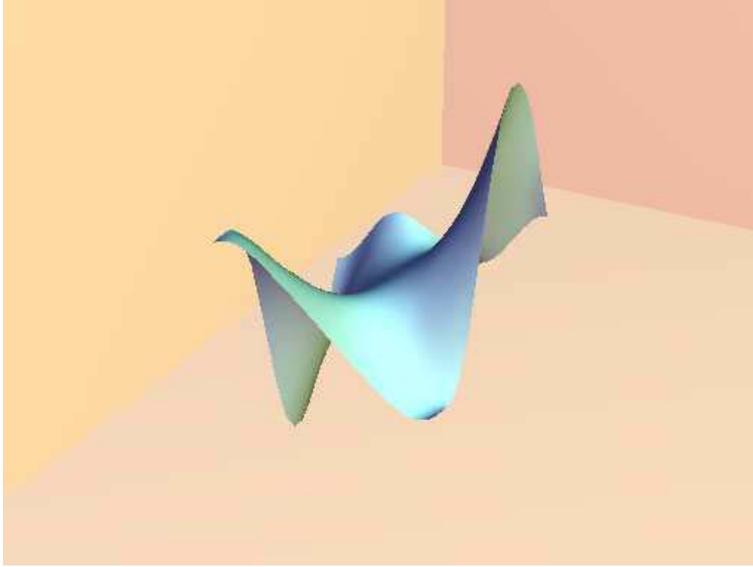


Figura 5.6.19: Superficie PDE discreta aproximando $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sin(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$ con 16 puntos de interpolación, sin puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-8}$, y una partición de 25 cuadrados.

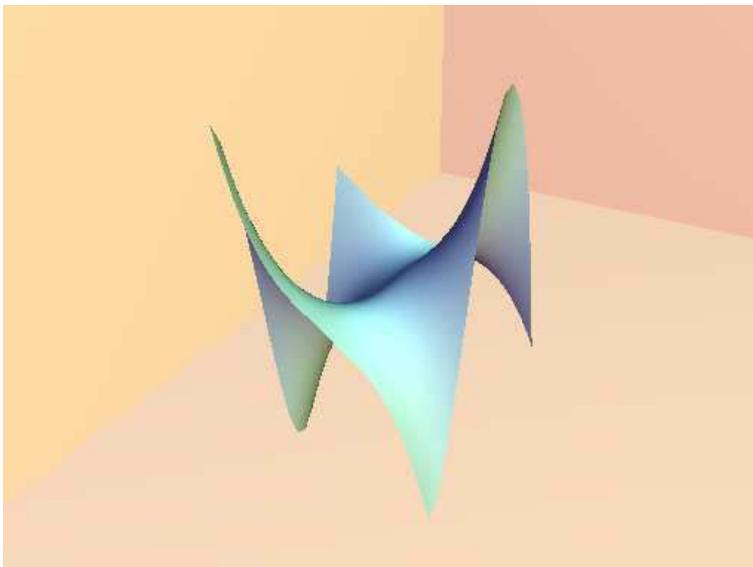


Figura 5.6.20: Superficie PDE discreta aproximando $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sin(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$ con 8 puntos de interpolación, 100 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-8}$, y una partición de 9 cuadrados.

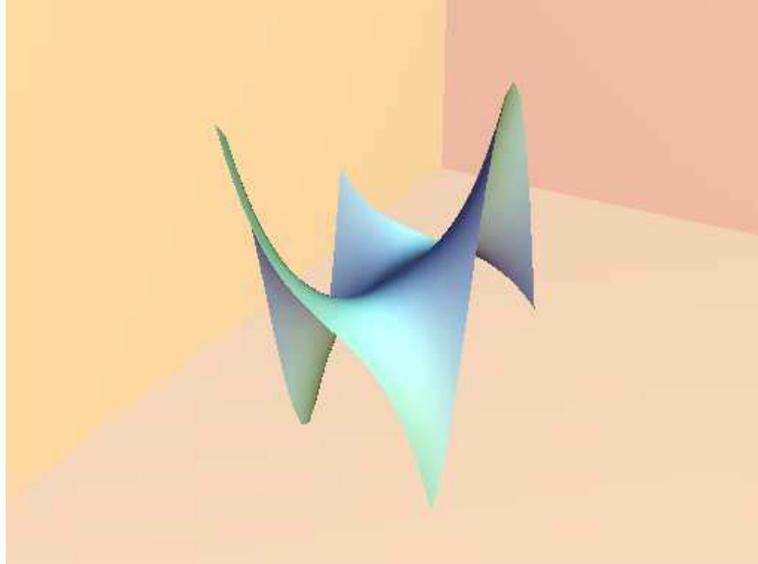


Figura 5.6.21: Superficie PDE discreta aproximando $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sin(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$ con 12 puntos de interpolación, 225 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-8}$, y una partición de 16 cuadrados.

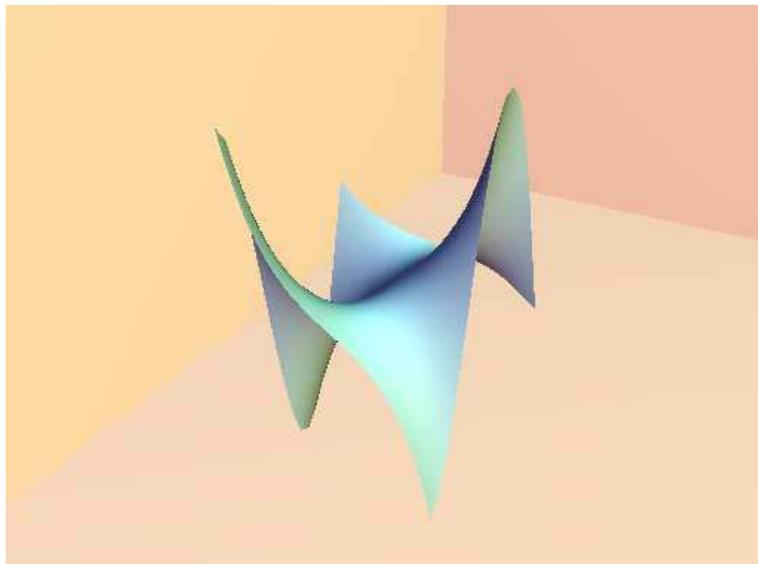


Figura 5.6.22: Superficie PDE discreta aproximando $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sin(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$ con 16 puntos de interpolación, 625 puntos de aproximación, $\varepsilon = 10^{-5}$, y una partición de 25 cuadrados.

Nº cuadrados , $d \times d$ (Puntos de interpolación, N)	Valor de ε	Puntos de aproximación, m	Error relativo
3×3 (8)	10^{-5}	0	4.11×10^{-1}
		100	3.24×10^{-2}
		625	8.34×10^{-3}
	10^{-8}	0	4.11×10^{-1}
		100	1.11×10^{-1}
		625	7.09×10^{-3}
	10^{-12}	0	4.11×10^{-1}
		100	6.09×10^{-2}
		625	7.06×10^{-3}
5×5 (16)	10^{-5}	0	1.72×10^{-1}
		100	8.57×10^{-2}
		625	3.19×10^{-2}
	10^{-8}	0	1.72×10^{-1}
		100	1.05×10^{-1}
		625	2.46×10^{-3}
	10^{-12}	0	1.72×10^{-1}
		100	6.30×10^{-2}
		625	1.85×10^{-3}
10×10 (36)	10^{-5}	0	8.90×10^{-2}
		100	7.39×10^{-2}
		625	1.92×10^{-2}
	10^{-8}	0	8.90×10^{-2}
		100	4.39×10^{-2}
		625	1.53×10^{-2}
	10^{-12}	0	8.90×10^{-2}
		100	6.14×10^{-2}
		625	2.39×10^{-3}

Tabla 5.6.4: Tabla de errores para diferentes superficies PDE discretas aproximando la función $g(\mathbf{x}) = 0,1 \sinh(3x_1 - 1,5) \sin(3x_2) - 0,2 \sinh(5x_1 - 2,5) \cos(5x_2)$.

A la vista de las tablas de errores que se han mostrado podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Se constatan las hipótesis del Teorema 5.3.5 de convergencia de la superficie PDE discreta hacia la superficie de la que proceden los datos, es decir, conforme aumenta $m(r)$, y h y ε varían verificando (5.24) y (5.25), el error disminuye.
2. Si se fijan h y m el error no es monótono respecto de ε ; luego podemos conjeturar la existencia de un valor de ε óptimo.
3. Observemos que si los datos proceden de la función de contorno se confirma la convergencia aún cuando no se consideran puntos de aproximación en Ω . En este caso el método se reduce al método de Galerkin.

Capítulo 6

Aplicaciones: Blending

6.1. Introducción

En la actualidad con el nombre de “blending” se designa a la curva o superficie que une otras dos o más curvas o superficies de forma suave. En el diseño gráfico asistido por ordenador (CAGD) se utiliza esta herramienta para una gran variedad de aplicaciones. Distintos ejemplos en los que se manifiestan son el diseño de aeronaves y automóviles, cálculo de cubiertas, unión de tuberías, eliminación de esquinas no deseadas en superficies, etc.

Las referencias sobre este tema son relativamente recientes; en la década de los ochenta es cuando se publican artículos sobre la materia con asiduidad. Concretamente, a partir de mediados de los ochenta C. Hoffmann y J. Hopcroft en “Automatic surface generation on computer aided design” [40] y en “Quadratic Blending Surfaces” [41] realizan dos de las primeras publicaciones sobre el concepto de superficie “blending”. Mediante este concepto designan a la superficie que une otras dos dadas, llamadas superficies primarias, de forma suave. En esta publicación proponen un método para generar automáticamente superficies “blending” para la unión de superficies primarias cuadráticas bajo ciertas condiciones. Otras referencias de estos autores con variaciones sobre este concepto son [42] y [43].

J. Warren [79] en su artículo “Blending Algebraic Surfaces” establece diferentes formas de generar uniones de superficies algebraicas (conos, cilindros y esferas fundamentalmente) obteniendo superficies “blending” de manera implícita.

D. J. Guan y otros en [36] estudian “blending” de curvas cuya expresión viene dada en forma paramétrica. Su trabajo se basa en la resolución de una ecuación diferencial que minimiza la curvatura de la curva “blending” y en

las condiciones que se conozcan de las dos curvas que se conectan.

Los mismos autores en [37] abordan el problema de blending conectando mediante curvas latitudinales con condiciones adecuadas (punto y tangencia) las fronteras de las dos superficies primarias que quieren unir haciendo intervenir una ecuación diferencial. Posteriormente generan curvas longitudinales mediante un proceso similar al empleado para calcular las latitudinales y rellenan la malla resultante, que tiene por frontera las curvas calculadas anteriormente, con superficies polinómicas como splines bicúbicos o elementos finitos.

A finales de los años 90, Zi Cai Li [55, 56, 57], realiza estudios sobre blending de superficies modeladas mediante ecuaciones en derivadas parciales. Estos argumentos de trabajo también los emplean Bloor y otros en [18, 7, 8, 9]. Por otro lado, Kouibia y Pasadas [63, 47, 54, 48] han desarrollado diferentes resultados sobre convergencia en el diseño de superficies de forma libre utilizando splines variacionales.

Unos de los principales objetivos a la hora de calcular “blending” polinómicas, ya sea de curvas o superficies, es conseguir que el grado de la forma calculada sea lo más bajo posible, ya que en CAGD es deseable esta cualidad. Puesto que hay trabajos en los que se ha demostrado que cualquier superficie “blending” que una de dos superficies polinómicas de grado 2 tiene al menos grado 4 [79], parece lógico que construyamos curvas o superficies a trozos de forma que podamos controlar su grado.

Los trabajos mencionados anteriormente se desarrollan empleando las curvas y superficies en forma algebraica o en forma paramétrica por lo que a continuación hacemos un pequeño recordatorio tanto de los principales modelos tratados hasta ahora como del problema que hemos tratado en capítulos anteriores. En la sección 6.3 enunciamos el caso paramétrico que aunque es muy similar al tratado en el capítulo anterior se adapta mejor a las aplicaciones que vamos a exponer en este capítulo final de la memoria. En las dos secciones siguientes que componen el capítulo aplicamos los resultados ya obtenidos para el cálculo de diferentes curvas y superficies “blending” respectivamente.

6.2. Antecedentes

Comenzamos esta sección haciendo una reseña de algunos artículos publicados sobre curvas y superficies “blending” que consideramos de interés.

En lo relativo a curvas, se puede destacar los trabajos de Zi-Cai Li y Hung-Tsai Huang [55, 56, 57] en los que tratan problemas “blending” de curvas aplicadas a trayectorias de aterrizaje, es decir, la curva que describe una aeronave desde un punto y con una velocidad dada hasta el punto de aterrizaje. En estos artículos se introducen ecuaciones diferenciales para minimizar la energía de la curva.

En cuanto a las superficies, las publicaciones son bastante numerosas. Es en los años ochenta cuando comienzan a publicarse trabajos. Entre ellos está el de J. Rossignac y A. Requicha [70] en el que introducen los “canales de superficies” para unir dos superficies. En él generan la superficie blending mediante envolventes de esferas de radio fijo, que usan como parámetro, que se mantienen en contacto con las superficies primarias. Este método presenta entre sus desventajas el alto grado de la superficie blending ya que, por ejemplo, para unir dos cilindros con un ángulo de intersección de 180 grados obtienen grado 16 total. En ese mismo trabajo los autores también trabajan con porciones de cilindros y toros.

Uno de los primeros autores que se refieren al tema de “blending” en sí son C. Hoffmann y J. Hopcroft a mediados de los 80 con trabajos como “Quadratic Blending Surfaces” [41] y otros como [40], [42] y [43]. Concretamente en [40] desarrollan un método para la generación de superficies algebraicas blending llamado **método potencial** que tiene como ventajas el que puede unir dos superficies algebraicas arbitrarias que tengan intersección de una manera estándar, el bajo grado de la superficie de unión y la simplicidad de generación de la superficie en cuestión.

El método potencial crea una superficie a partir de polinomios cuadráticos con tres parámetros libres (uno controla la forma de la superficie y los otros dos controlan la anchura y el centrado de la superficie con respecto a la curva intersección de las superficies primarias).

Otro trabajo que se referencia con asiduidad es “Blending Algebraic Surfaces” de Joe Warren [79] de 1989. En esta publicación, el autor a partir de dos o más superficies de tipo algebraico genera una superficie de unión, y muestra que dicha superficie, también algebraica, tiene que verificar ciertas condiciones, basándose en el resultado algebraico de que cualquier polinomio cuyo conjunto de ceros esté incluido en el conjunto de ceros de varios polinomios se puede expresar siempre como combinación simple de éstos.

En este artículo, el autor también introduce la noción de continuidad geométrica. La noción de suavidad o continuidad en un punto de una super-

ficie corresponde a la existencia de un único plano tangente a la superficie en dicho punto. El concepto de continuidad geométrica para la intersección de dos superficies es el siguiente: dos superficies que se intersecan a lo largo de una curva con plano tangente continuo a lo largo de ésta diremos que tienen continuidad geométrica de orden 1. Las superficies con continuidad de curvatura tienen continuidad geométrica de orden 2 y así sucesivamente.

A partir de resultados con ideales y polinomios irreducibles, el autor consigue generar superficies blending de tipo algebraico y grado relativamente bajo. Por ejemplo, con el método empleado es posible unir dos cilindros elípticos mediante una cuártica.

Un trabajo de las mismas fechas es el de D.J. Filip “Blending parametric surfaces” [32], dedicado a las superficies paramétricas y que está en la línea de [79].

También de principios de los noventa es el artículo publicado por Bloor y Wilson [6] al que algunos autores consideran el origen de la técnica de diseño y modelado en la que se crea una superficie suave a partir de una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico con condiciones de contorno, y que se denomina **método PDE**. Las condiciones de contorno que se imponen se usan para controlar la forma de la superficie.

Aunque la primera aplicación de este método era el blending de superficies, este método se emplea para otras aplicaciones como el diseño de forma libre, modelado y diseño interactivo de esculturas.

La principal cualidad de este método es que el objeto generado es controlado por los coeficientes de la ecuación y las condiciones de contorno.

Un ejemplo que manejan en varios de sus trabajos [7, 8, 9], son las soluciones de una ecuación diferencial en derivadas parciales basada en el operador biarmónico. Concretamente trabajan con la ecuación diferencial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)^2 \mathbf{X} = 0. \quad (6.1)$$

Los autores resuelven esta ecuación en una región finita Ω en el plano (u, v) , sujeta a condiciones de contorno, que suelen ser las variaciones de \mathbf{X} y de su derivada normal $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{n}}$ a lo largo de la frontera de Ω .

El operador diferencial de la ecuación 6.1 representa un proceso de suavidad en el cual el valor de la función en cada punto de la superficie es, en

cierta forma, la media de valores cercanos. Además, el parámetro a controla la ratio de suavidad entre las direcciones de los parámetros u y v por lo que recibe el nombre de parámetro de suavidad.

Guan y otros en “Wire-frame method for blending surface design” [37] desarrollan el método wire-frame para la generación de superficies blending en forma paramétrica. En él construyen curvas que están modeladas como cables elásticos sometidos a cargas externas. La rigidez del cable y la distribución de la carga se utilizan para controlar la superficie. Una vez construida esta malla, se rellena con trozos de superficies que interpolan las curvas.

Concretamente, a partir de dos superficies primarias se determina la superficie blending del siguiente modo: primero se trazan curvas que conectan las superficies de origen y que los autores denominan latitudinales. Estas curvas están modeladas como hemos señalado anteriormente a partir de la flexión de un cable de cierta rigidez sometido a una carga externa. En función de los parámetros que se elijan se obtienen diferentes curvas. Este modelo corresponde a una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden, que en la publicación mencionada los autores resuelven mediante el método de los elementos finitos. En un segundo paso, se procede de forma análoga con las curvas que transcurren a lo largo del otro eje coordenado, a las que denominan curvas longitudinales.

Una vez realizado este proceso, los autores tienen un esqueleto completo o un armazón de la superficie blending que quieren determinar. En este momento, mediante la regla del producto tensorial, obtienen porciones de superficies bicúbicas que tienen por condiciones de interpolación las fronteras de dos curvas longitudinales y latitudinales consecutivas.

6.3. Métodos paramétricos

La Teoría de construcción y aproximación de curvas y superficies explícitas, mediante curvas ODE y superficies PDE, desarrollada en los capítulos anteriores puede extenderse de manera natural al caso de curvas paramétricas planas y en el espacio, y superficies paramétricas sin más que situarse en los espacios de funciones vectoriales correspondientes, es decir, $H^n(I; \mathbb{R}^2)$ o $H^n(I; \mathbb{R}^3)$, en el caso de curvas, y $H^n(\Omega; \mathbb{R}^3)$ en el caso de superficies.

Estos problemas se pueden estudiar componente a componente y, de esta forma, aproximar o construir las funciones componentes de la curva o superficie deseada.

Por tanto, la definición, la caracterización y el establecimiento de los resultados de convergencia y estimaciones del error de aproximación, se realizan, sin dificultad, de forma análoga al caso explícito.

Ejemplo 1

En este primer ejemplo representamos distintas curvas ODE paramétricas planas. Consideramos el siguiente problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{(iv)}(t) + \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \mathbf{u}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{g}\left(-\frac{\pi}{2}\right), \quad \mathbf{u}'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{g}'\left(-\frac{\pi}{2}\right), \quad \mathbf{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{g}\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \mathbf{u}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{g}'\left(\frac{\pi}{2}\right), \end{array} \right. \quad (6.2)$$

donde $\mathbf{f}(t) = (17 \operatorname{sen} 2t, 2 \operatorname{cos} t)^t$ y la función \mathbf{g} que vamos a aproximar viene dada por la expresión $\mathbf{g}(t) = (\operatorname{sen} 2t, \operatorname{cos} t)^t$, que es la solución del problema (6.2).

En las figuras 6.3.1 – 6.3.9, se muestran la gráfica de la curva parametrizada por $\mathbf{g}(t)$ (en color rojo) y las diferentes curvas ODE paramétricas construidas (en color negro).

En las figuras 6.3.2 y 6.3.3 se observa como el aproximante está próximo a la gráfica de la función \mathbf{g} . Hay que notar que en el primer caso no hay puntos de aproximación y en el segundo los tres puntos de aproximación que se incluyen pertenecen a su vez a la curva parametrizada por la solución del problema de contorno, \mathbf{g} .

En la Figura 6.3.4 se observa que el valor de ε no es lo suficientemente pequeño como para mantener la curva ODE cercana a los puntos de aproximación.

Las siguientes figuras, 6.3.5–6.3.9 tienen como objetivo principal mostrar la influencia del valor del parámetro ε . Al disminuirlo la curva se acerca a los puntos de aproximación.

Cabe señalar la diferencia entre las figuras 6.3.4 y 6.3.8 aún teniendo los mismos valores en los parámetros. Dicha diferencia estriba en el número de nodos de la partición considerada.

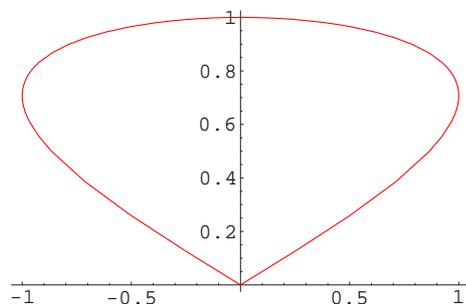
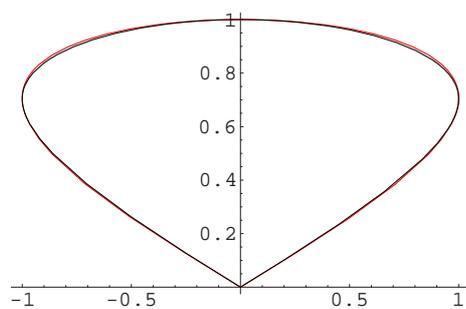
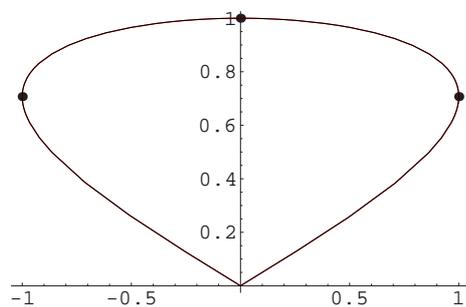


Figura 6.3.1: Gráfica de la solución del problema (6.2).

Figura 6.3.2: Curva ODE paramétrica spline obtenida sin puntos de aproximación, $p = 5$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).Figura 6.3.3: Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 3$ puntos de aproximación, $p = 8$ y $\varepsilon = 10^{-5}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).

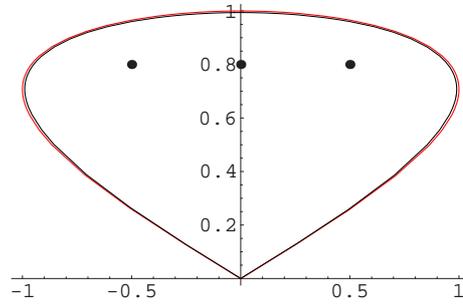


Figura 6.3.4: Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 3$ puntos de aproximación, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-2}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).

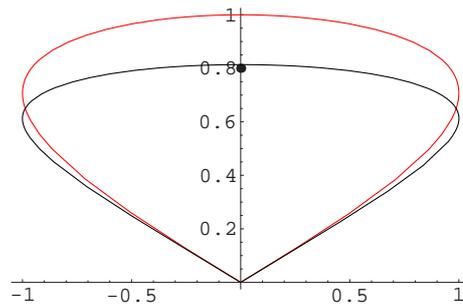


Figura 6.3.5: Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 1$ puntos de aproximación, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-4}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).

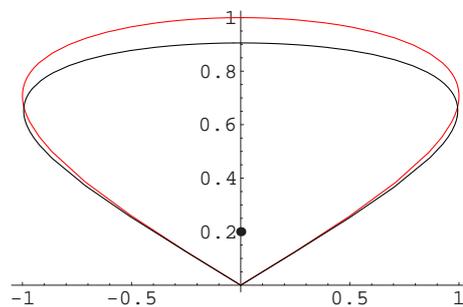


Figura 6.3.6: Curva ODE paramétrica spline obtenida con un punto de aproximación, $p = 2$ y $\varepsilon = 10$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).

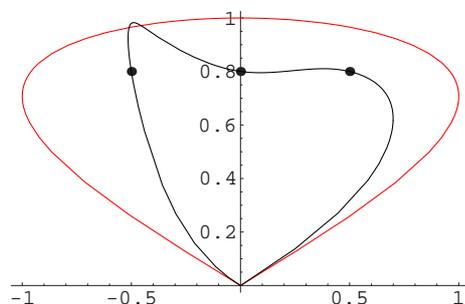


Figura 6.3.7: Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 3$ puntos de aproximación, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-5}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).

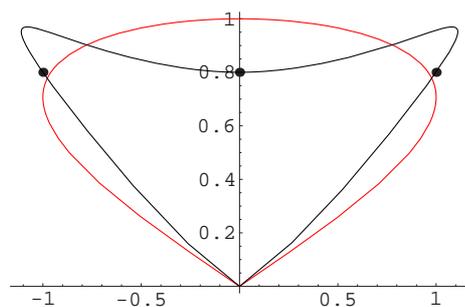


Figura 6.3.8: Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 3$ puntos de aproximación, $p = 7$ y $\varepsilon = 10^{-2}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).

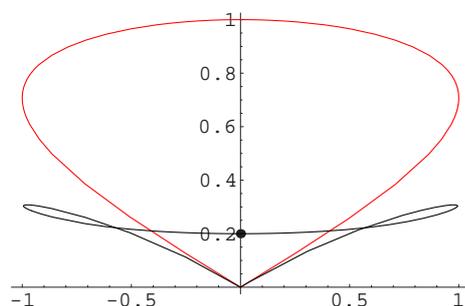


Figura 6.3.9: Curva ODE paramétrica spline obtenida con 1 punto de aproximación, $p = 5$ y $\varepsilon = 10^{-7}$ (negro), y gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ (rojo).

Ejemplo 2

Para ilustrar el comportamiento de las curvas ODE en el espacio consideramos el siguiente problema de valores iniciales

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{u}^{(iv)}(t) + \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad t \in I = (0, 2\pi), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{g}(0), \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{g}'(0), \quad \mathbf{u}(2\pi) = \mathbf{g}(2\pi), \quad \mathbf{u}'(2\pi) = \mathbf{g}'(2\pi), \end{array} \right. \quad (6.3)$$

donde $\mathbf{f}(t) = (2 \cos t, 82 \sin 3t, f_1(t))^t$, siendo

$$f_1(t) = \frac{(14 - 16t + 8t^3 + 2t^4) \sin t + 4(-1,45 + t)(1 + t)(3,45 + t) \cos t}{(t + 1)^5},$$

y la función \mathbf{g} que vamos a aproximar viene dada por la expresión $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin 3t, \frac{\sin t}{t+1})^t$, que es la solución del problema (6.3), cuya gráfica se muestra en la Figura 6.3.10.

En las figuras 6.3.11–6.3.14 se muestra la gráfica de la curva ODE construida en cada caso y, a la derecha, se muestran superpuestas la gráfica de la curva $\mathbf{g}(t)$ y la curva ODE paramétrica, para diferentes valores de los parámetros.

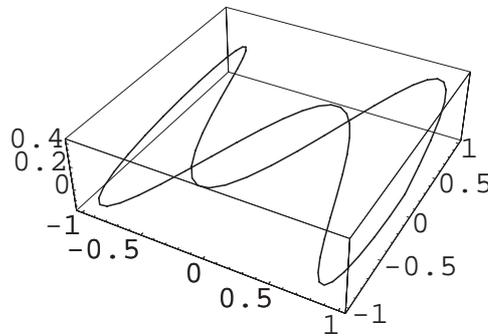


Figura 6.3.10: Gráfica de la función $\mathbf{g}(t)$.

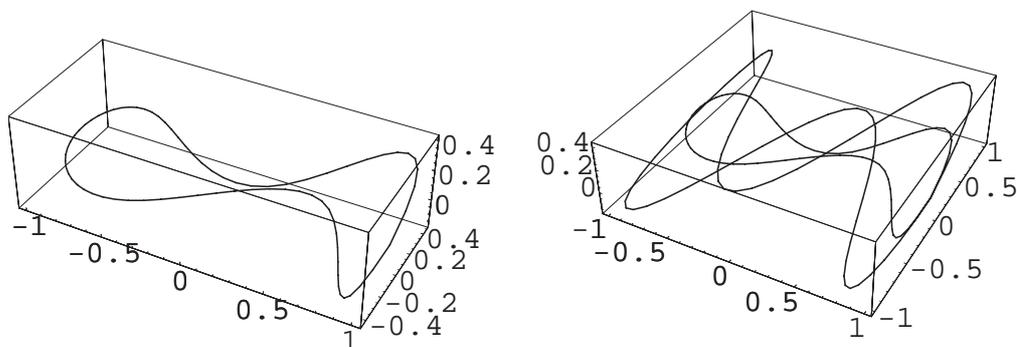


Figura 6.3.11: Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 30$ puntos de aproximación, $p = 3$ y $\varepsilon = 10^{-7}$ (izquierda), y comparación con la original $\mathbf{g}(t)$ (derecha).

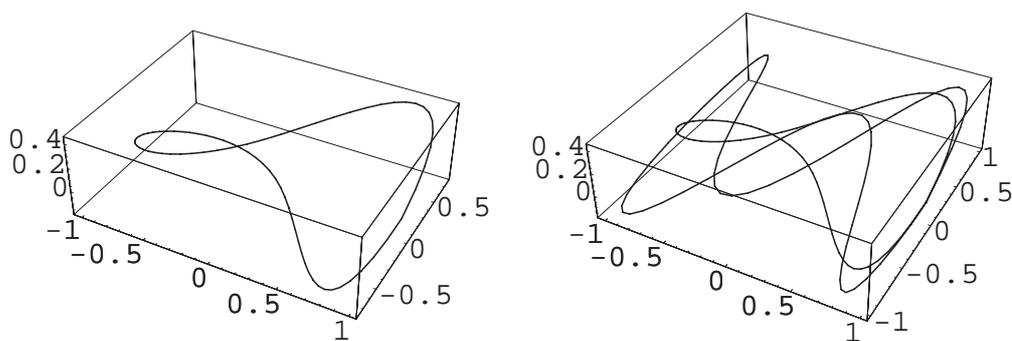


Figura 6.3.12: Curva ODE paramétrica spline obtenida con $m = 10$ puntos de aproximación, $p = 4$ y $\varepsilon = 10^{-7}$ (izquierda), y comparación con la original $\mathbf{g}(t)$ (derecha).

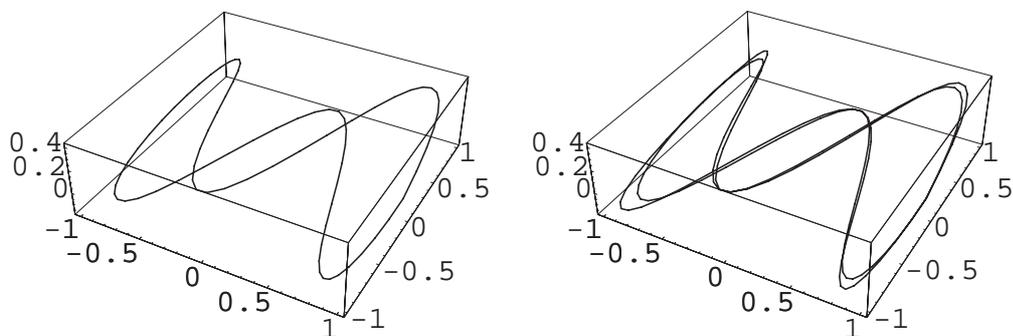


Figura 6.3.13: Curva ODE paramétrica spline obtenida sin puntos de aproximación, $p = 9$ y $\varepsilon = 10^{-7}$ (izquierda), y comparación con la original $g(t)$ (derecha).

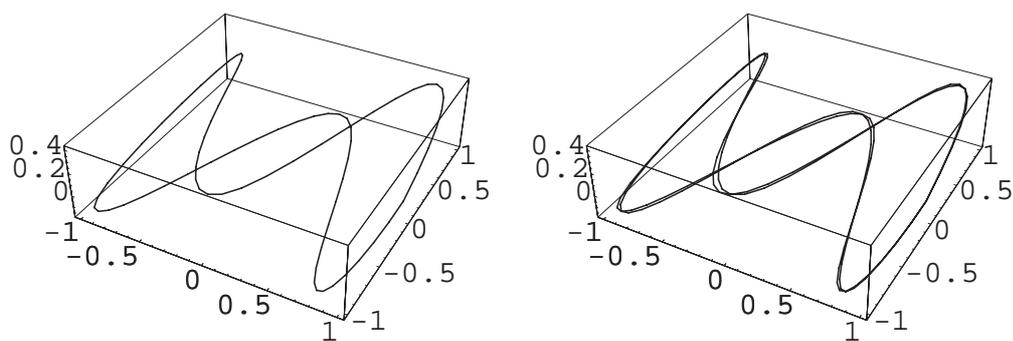


Figura 6.3.14: Curva ODE paramétrica spline obtenida con 30 puntos de aproximación, $p = 9$ y $\varepsilon = 10^{-7}$ (izquierda), y comparación con la original $g(t)$ (derecha).

Ejemplo 3

Por último finalizamos esta sección con un ejemplo en el que se muestran diferentes superficies PDE paramétricas. Consideramos el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in (0, 1) \times (0, 1), \\ \mathbf{u}(0, t) = (\sin(t), \cos(t), 0)^t, \quad t \in (0, 2\pi), \\ \mathbf{u}(1, t) = (\sin(t), \cos(t), 1)^t, \quad t \in (0, 2\pi), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}(1, t) = (0, 0, -1)^t, \quad t \in (0, 2\pi), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}(1, t) = (0, 0, 1)^t, \quad t \in (0, 2\pi), \end{array} \right. \quad (6.4)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

La figura 6.3.15 se ha obtenido aplicando el método al problema (6.4) con un conjunto de 50 puntos de aproximación de la función dada por la elipse $e(t) = (5 \sin t, 2 \cos t, 0, 5)$, $t \in (0, 2\pi)$ y $\varepsilon = 10^{-5}$.

La figura 6.3.16 se ha obtenido a partir del mismo problema, cambiando la condición $\mathbf{u}(1, t) = (\sin t, \cos t, 0)^t$, por $\mathbf{u}(1, t) = (4 \sin t, 2 \cos t, 0)^t$.

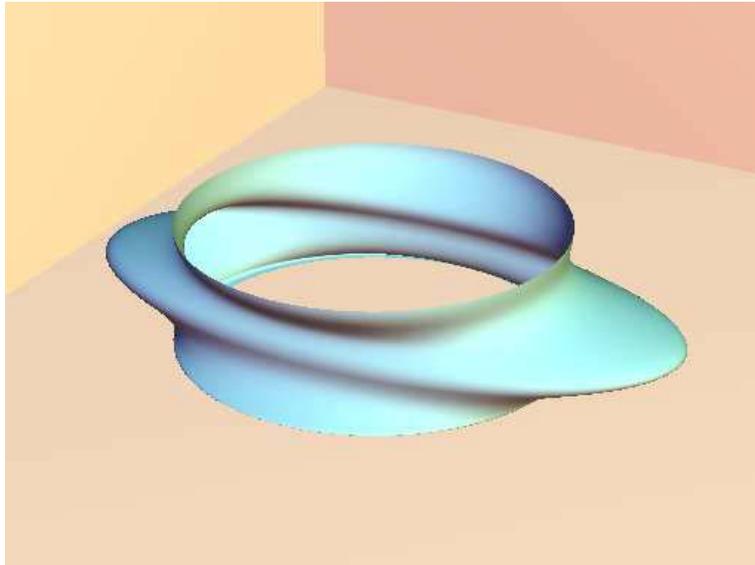


Figura 6.3.15: Superficie PDE paramétrica asociada al problema (6.4) (I).

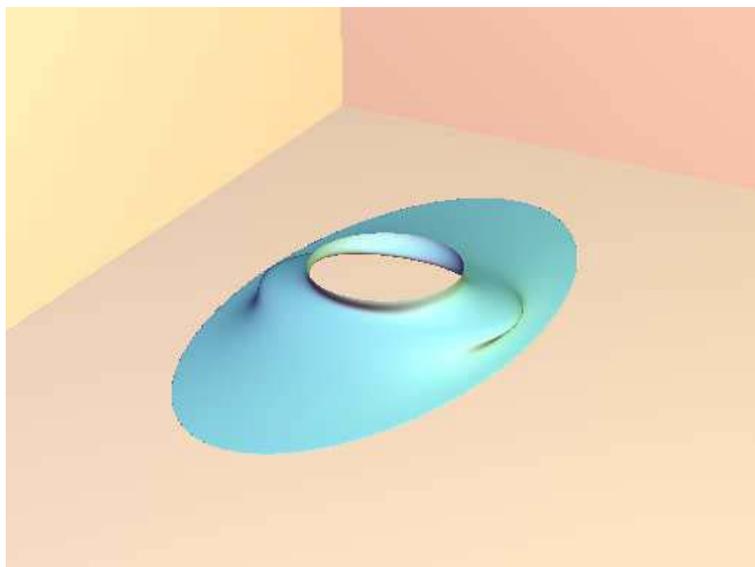


Figura 6.3.16: Superficie PDE paramétrica asociada al problema (6.4) variando una de las condiciones de contorno.

6.4. Curvas blending

Aunque la mayor parte de la bibliografía sobre el estudio de “blending” está dedicada a superficies, existen referencias que tratan el problema para curvas exclusivamente como [57, 58] en las cuales los autores abordan un problema de trayectorias para aterrizajes de aeronaves.

Hemos incluido esta sección ya que consideramos que es el proceso natural como paso previo al estudio de “blending” en superficies aunque como veremos posteriormente no hay inconvenientes en establecer el estudio directamente en superficies.

Como hemos indicado en la introducción una curva “blending” resulta de unir dos o más curvas denominadas primarias, de forma que la curva resultante sea suave.

Para empezar podemos analizar un sencillo caso como es el que muestra la Figura 6.4.17. El problema consistiría en unir mediante una curva “blending” el segmento y el arco de circunferencia de forma suave.

Una de las posibles formas de realizar esta unión consiste en tomar el punto final del arco de circunferencia y el primer extremo del segmento con lo cual tendremos dos condiciones que nos asegurarán que la curva resultante sea continua.

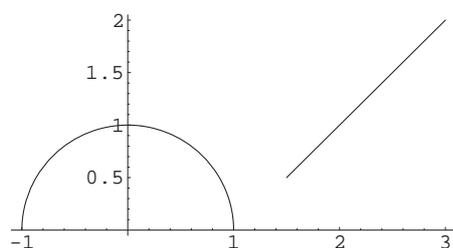


Figura 6.4.17: Problema “blending” para curvas.

Si deseamos que la curva resultante sea suave nos harán falta las condiciones de tangencia en dichos extremos. A continuación, y dependiendo de la suavidad (clase) que hayamos decidido para la curva resultante, elegimos un criterio con el que modelizar esta curva, que en nuestro caso será una ecuación diferencial del mismo orden que condiciones tengamos.

Un segundo problema que podemos abordar como variación del anterior es cuando las curvas tienen parte del dominio en común como muestra la Figura 6.4.18. En este caso, y si es que tenemos interés en que la curva resultante sea explícita, “eliminaremos” arcos de cada una de las curvas (final de la primera y principio de la segunda) de forma que estaremos en el caso anterior, con lo que uniremos las nuevas curvas, que no tienen dominio común, como muestra la Figura 6.4. Además podemos emplear puntos de los arcos eliminados para variar la forma de la curva resultante como hemos tratado en los capítulos anteriores, de forma que la información de estos arcos no se pierde por completo.

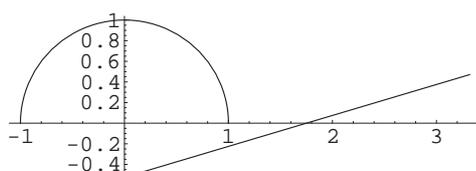
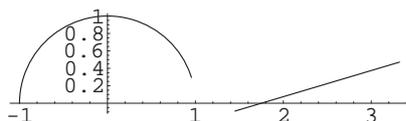


Figura 6.4.18: Problema “blending” para curvas con parte del dominio en común.



El proceso que vamos a emplear se puede aplicar también para eliminar esquinas en curvas (ver Figura 6.4.19) con ciertos criterios, sin que perdamos

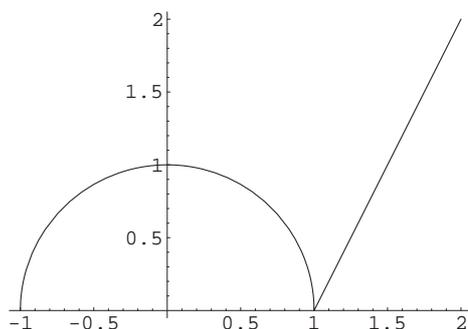


Figura 6.4.19: Problema “blending” para curvas con un punto del dominio en común.

del todo la posible información que estas esquinas aporten, como ya hemos señalado antes.

La aportación que proponemos es precisamente la introducción de un conjunto de puntos de aproximación junto con una ecuación diferencial de forma que podemos dar más relevancia a uno u otro en la representación final de la curva por medio del parámetro ε , que ponderará dicho conjunto con el operador de minimización de energía o curvatura que elijamos para el problema de contorno.

6.4.1. Construcción de curvas blending

La situación de partida que vamos a considerar es la siguiente:

Dadas dos curvas continuas $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $t \in [0, 1]$ con $\gamma_1(t)$ estamos interesados en obtener una curva $\gamma_3(t)$, $t \in [0, 1]$ que llamaremos curva blending, de forma que la traza de las curvas γ_1 , γ_3 y γ_2 sea, al menos, continua. Es claro que la clase (continua o derivable) de las curvas de partida limita la clase de la curva resultante, formada por las curvas primarias y la curva blending, y no parece lógico que debamos imponer más clase a estas curvas blending que a las curvas primarias, aunque si así se desea en algún caso concreto tampoco hay impedimento alguno.

Las figuras 6.4.17, 6.4.19 y 6.4.18 corresponden a las siguientes situaciones teóricas:

- En la Figura 6.4.17, las abscisas correspondientes a los puntos $\gamma_1(1)$ y $\gamma_2(0)$ cumplen la condición

$$\gamma_1(1) < \gamma_2(0), \quad (6.5)$$

con lo cual los puntos inicial y final de la traza de la curva blending serán $\gamma_3(0) = \gamma_1(1)$ y $\gamma_3(1) = \gamma_2(0)$. En este caso no hay ningún problema en construir una curva blending que esté modelada según las necesidades que se tengan.

- En la Figura 6.4.19, las abscisas correspondientes a los puntos $\gamma_1(1)$ y $\gamma_2(0)$ cumplen la relación

$$\gamma_1(1) = \gamma_2(0), \quad (6.6)$$

- Para la figura 6.4.18 la relación es

$$\gamma_1(1) > \gamma_2(0). \quad (6.7)$$

Vamos a analizar brevemente estos dos últimos casos. En ambos, para poder obtener una curva blending es necesario que “cortemos” al menos una de las dos curvas primarias, o las dos si así lo estimamos necesario, de forma que las abscisas de los puntos inicial y final de las curvas modificadas verifiquen la relación (6.5). El tramo o los tramos de los que hayamos prescindido se pueden utilizar, tomando de ellos puntos de aproximación para construir diferentes curvas blending, aunque para el caso (6.7) parece razonable que no mezclemos los puntos de aproximación de las curvas en el subintervalo donde ambas tengan dominio común.

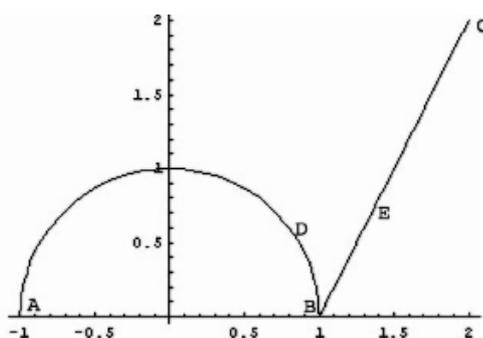


Figura 6.4.20: Problema “blending” para curvas con un punto del dominio en común (II).

Una pequeña variante del caso (6.7) y al que éste se puede reducir consiste en que las dos curvas tengan un único punto común de soporte, pero que las ordenadas de ambas para ese punto común sea diferente. Corresponde por ejemplo a una función con una discontinuidad de salto.

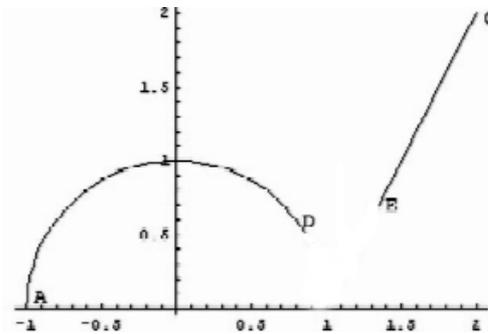


Figura 6.4.21: Problema “blending” para curvas con parte del dominio en común (II).

Por tanto, desecharemos el tramo de curva que no vayamos a aproximar y tendremos una situación como la figura (6.4.22).

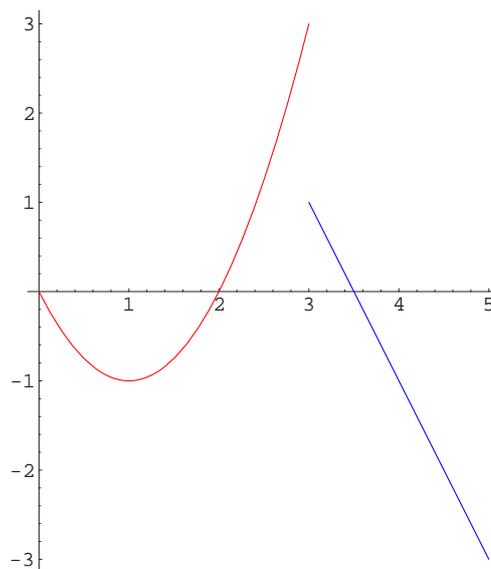


Figura 6.4.22: Problema “blending” para curvas con parte del dominio en común (II).

Con lo expuesto anteriormente, comenzamos mostrando el proceso que se puede emplear para resolver el primer caso y a partir de él, estableciendo las modificaciones que estimemos oportunas abordaremos los otros dos casos indicados anteriormente.

Consideremos una ecuación diferencial de orden $2n$ dada por un operador

de la forma dada en capítulos anteriores. Dicha ecuación estará relacionada con alguna característica que queramos destacar en la curva blending como puede ser minimización de energía, curvatura.

Si los extremos final e inicial de las curvas primarias son $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ impondremos a la ecuación diferencial los valores $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma'(t_0), \gamma'(t_1), \dots, \gamma^{(n)}(t_0), \gamma^{(n)}(t_1)$.

Si, además, queremos que la curva aproxime un conjunto de puntos $A^m = \{(x_i, y_i), b < x_i < c\}$ dado, el problema que estamos abordando es equivalente según la Definición 2.2.2 al de hallar una curva ODE. En este caso, el operador L lo determinamos de forma libre, al igual que el conjunto de puntos de aproximación en función de nuestras necesidades.

En cuanto al vector \mathbf{y} , formado por condiciones de interpolación y tangencia en los puntos final e inicial de las curvas primarias, queda también en cierta forma a nuestra elección, pues, como hemos indicado anteriormente, la curva resultante puede, todo lo más, tener la misma clase que la “peor” de las primarias y, por tanto, quizás no interese que el vector \mathbf{y} tenga condiciones de tangencia.

6.4.2. Ejemplos

Ejemplo 1.

Sabemos que una forma de introducir las funciones splines es buscar soluciones de la ecuación diferencial

$$x^{(2r)} = 0, \quad (6.8)$$

con condiciones adecuadas en los extremos de un cierto intervalo de trabajo $[\alpha, \beta]$. Dichas soluciones con las condiciones adecuadas dan lugar a las funciones splines. Si r es par estamos obteniendo los diferentes splines de grado $2r - 1$ y clase $2r - 2$.

Podemos tomar este ejemplo como una curva ODE relativa a la ecuación (6.8), con condiciones homogéneas de dato y de derivada en los extremos del intervalo y con el conjunto A^m vacío. Si las curvas que uno son trozos de segmentos horizontales estaríamos, en cierta forma, ante un spline natural.

Ejemplo 2.

En este segundo ejemplo ponemos de manifiesto la importancia del conjunto de puntos a aproximar. Supongamos que tenemos que unir dos segmentos

horizontales a distintos niveles, 0 y 2, para fijar condiciones. La distancia entre ambos es de 3 unidades y, que además estamos interesados en que aproxime al arco de circunferencia con centro $(0,2)$ que une ambas curvas. La situación es la que muestra la Figura 6.4.23.

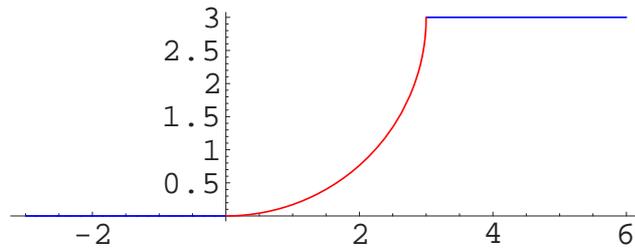


Figura 6.4.23: Situación inicial de los segmentos y arco de circunferencia.

Si tomamos la ecuación diferencial

$$x^{(4)} = 0,$$

con las condiciones obvias $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x(3) = 2$, y $x'(3) = 0$, y tomando diferentes conjuntos de puntos y distintos valores del parámetro ε se observan los siguientes resultados.

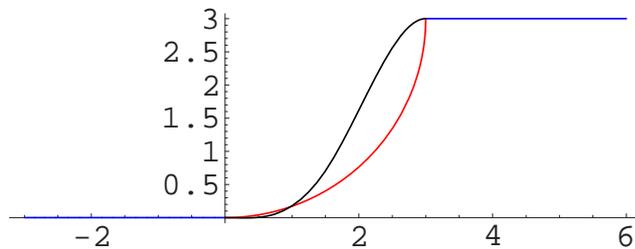


Figura 6.4.24: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 3 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$.

Las conclusiones que podemos establecer a la vista de la tabla y de la figura nos ponen de manifiesto lo que ya se demostró teóricamente en el capítulo 3. En las figuras 6.4.27 y 6.4.28 se observa una situación muy similar aunque el parámetro ε ha variado notablemente. Esto es debido a que el tamaño de la partición no ha aumentado y por tanto la curva está “sujeta” y no puede deformarse para acercarse a los puntos de aproximación.

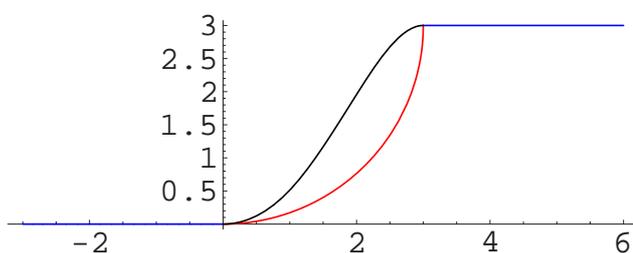


Figura 6.4.25: Curva blending de aproximación con $k = 5$ intervalos, 20 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$.

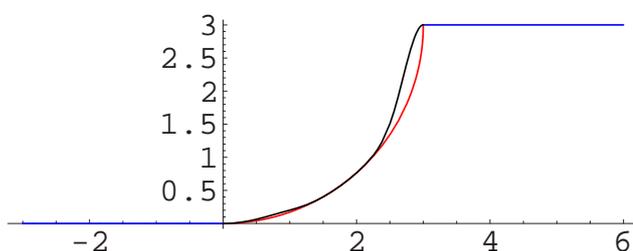


Figura 6.4.26: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 1 punto de aproximación $(2,0)$, y $\varepsilon = 10^{-3}$.

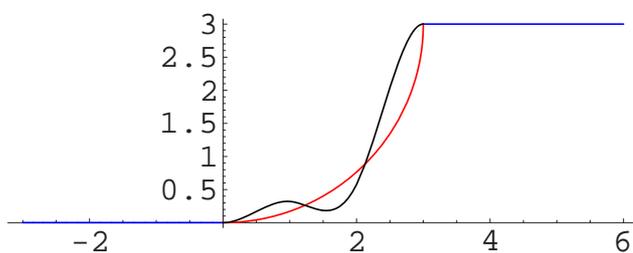


Figura 6.4.27: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 8 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$.

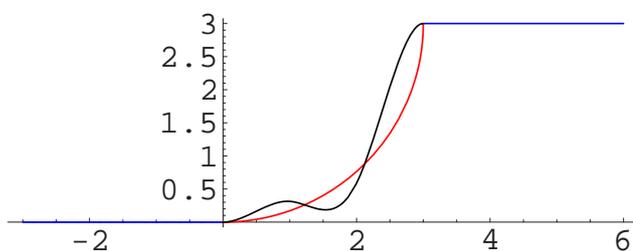


Figura 6.4.28: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 5 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$.

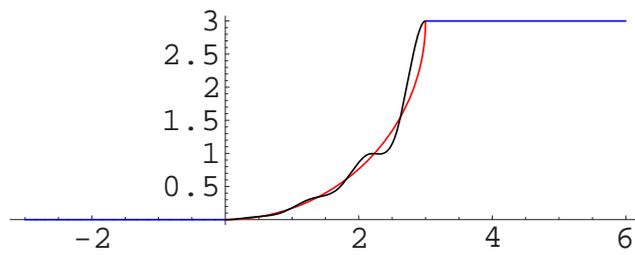


Figura 6.4.29: Curva blending de aproximación con $k = 8$ intervalos, 12 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$.

Ejemplo 3.

En el siguiente ejemplo, partiendo de la ecuación diferencial

$$x^{(4)} + x^{(2)} + x = 0,$$

con condiciones $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$, $x(6) = -1$, y $x'(6) = 0$, tratamos de ver el efecto de unir dos segmentos horizontales al “imponerle” a la solución que aproxime un conjunto de puntos aleatorios del arco de circunferencia dado por la función $g(x) = \sqrt{1 - (x^2 - 3)}$, con $2 \leq x \leq 4$. Las figuras y la tabla nos dan una idea bastante clara de la bondad del método que estamos desarrollando.

En las figuras 6.4.35 y 6.4.36 hemos elegido únicamente como punto de aproximación el $(4,0)$ y podemos apreciar la relevancia del parámetro ε .

En las figuras 6.4.38 y 6.4.39 hemos incluido en el conjunto de puntos de aproximación los puntos $(1, 6)$ y $(5, 6)$ para comprobar sus efectos.

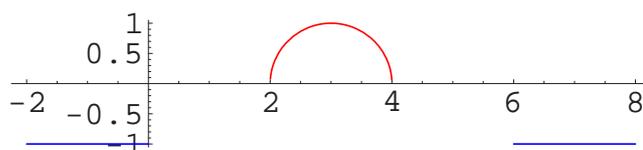


Figura 6.4.30: Situación inicial de las curvas.

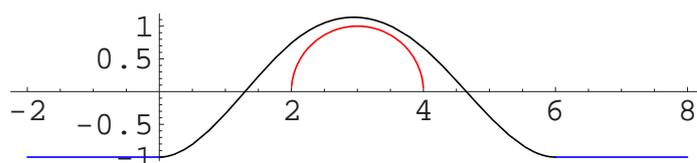


Figura 6.4.31: Curva blending de aproximación con $k = 5$ intervalos, 20 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$.

Si observamos las figuras 6.4.38 y 6.4.39 podemos comprobar nuevamente el efecto de tomar una partición con un número de puntos relativamente pequeño cuando los puntos de aproximación están alejados unos de otros. Aunque hemos dado un valor pequeño a ε el escaso número de splines que tenemos para formar la curva resultante impide el que ésta aproxime a la totalidad de los puntos de aproximación. En contraste con la Figura 6.4.38 tenemos que en la Figura 6.4.34 la curva sí aproxima el total de los puntos de aproximación.

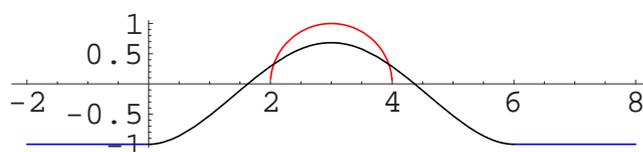


Figura 6.4.32: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 1 punto de aproximación $(3,1)$ y $\varepsilon = 10^{-3}$.

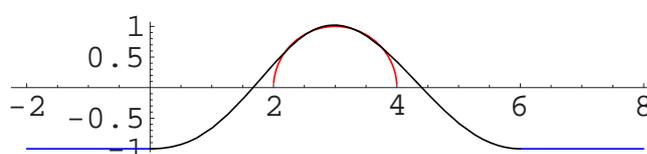


Figura 6.4.33: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 8 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$.

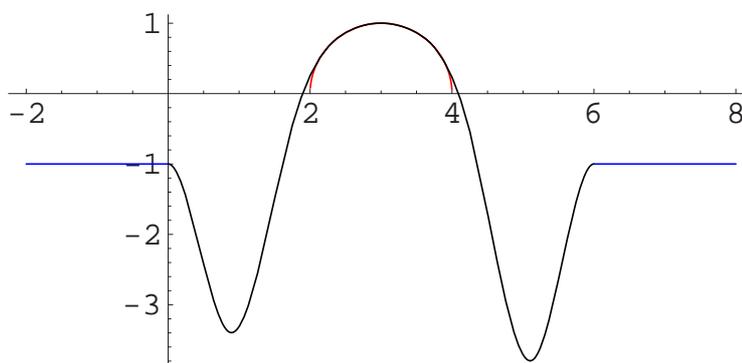


Figura 6.4.34: Curva blending de aproximación con $k = 7$ intervalos, 20 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$.

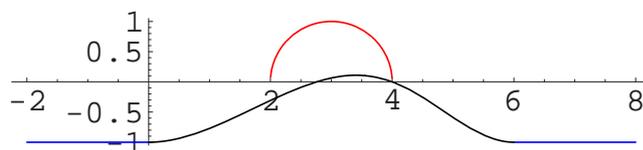


Figura 6.4.35: Curva blending de aproximación con $k = 8$ intervalos, 1 punto de aproximación, $(4, 0)$, y $\varepsilon = 10^{-4}$.

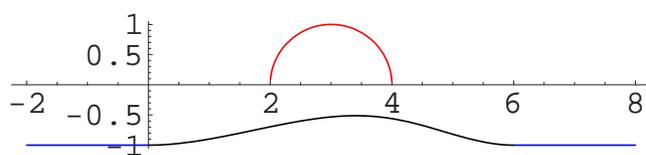


Figura 6.4.36: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 1 puntos de aproximación, $(4, 0)$, y $\varepsilon = 10^{-2}$.

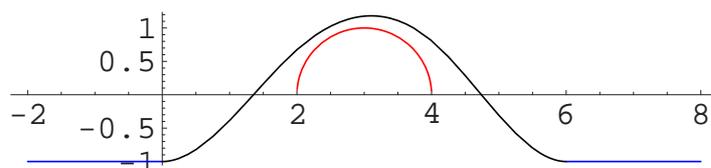


Figura 6.4.37: Curva blending de aproximación con $k = 6$ intervalos, 2 puntos de aproximación, $(1, 6)$ y $(5, 6)$, y $\varepsilon = 10^{-7}$.

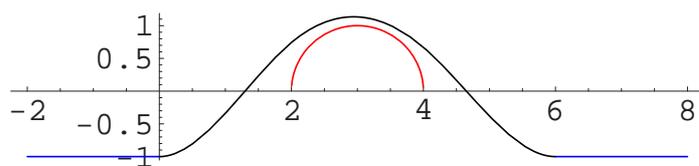


Figura 6.4.38: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 20 puntos de aproximación, entre ellos $(1, 6)$ y $(5, 6)$, y $\varepsilon = 10^{-7}$.

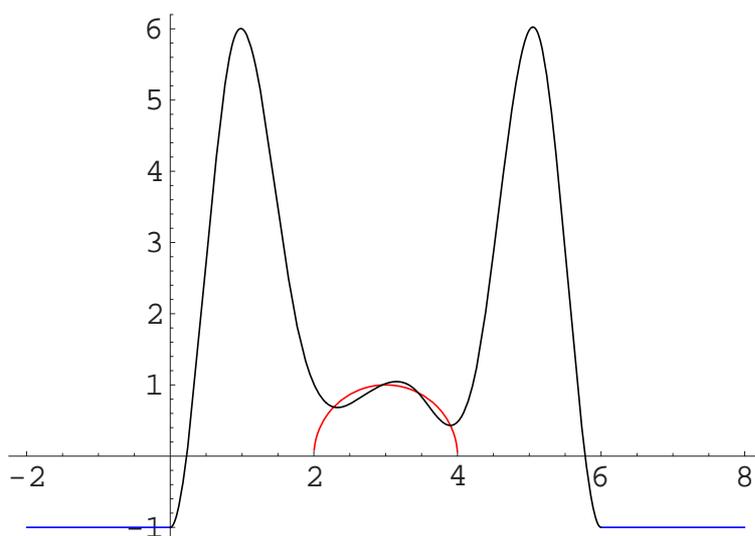


Figura 6.4.39: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 20 puntos de aproximación, entre ellos $(1, 6)$ y $(5, 6)$, y $\varepsilon = 10^{-7}$.

Ejemplo 4.

En este ejemplo mostramos el comportamiento del método cuando las dos curvas tienen un punto de intersección, o bien se trata de una función con un punto donde no es derivable y deseamos que lo sea. En el ejemplo que a continuación detallamos queremos unir las curvas $g_1(x) = -x + 5$, definida en el intervalo $[0, 3]$ y $g_2(x) = \sqrt{4 - (x - 3)^2}$, definida en el intervalo $[3, 5]$. Ambas curvas se intersecan en el punto $(3, 2)$. Para exagerar el ejemplo, hemos escogido el intervalo $[2, 4]$ como dominio de la curva blending y tomado como conjunto de aproximación un conjunto de puntos aleatorio de las curvas $g_1(x)$ y $g_2(x)$. El problema de contorno que vamos a emplear es

$$\begin{cases} x^{(4)} = 0, \\ x(2) = g_1(2), x'(2) = g_1'(2), x(4) = g_2(4), x'(4) = g_2(4) \end{cases}$$

A continuación presentamos una serie de gráficos de diferentes curvas blending en los que se puede contrastar como actúan los diferentes parámetros.

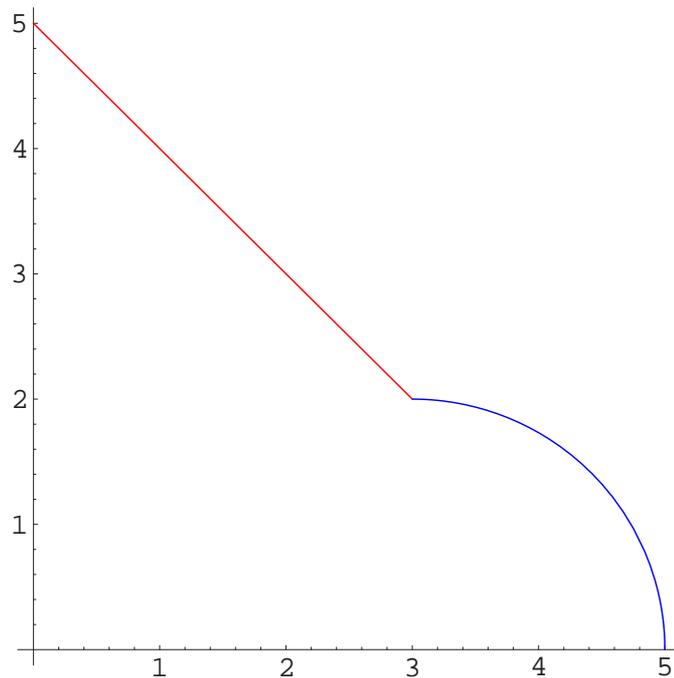


Figura 6.4.40: Gráfica de las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

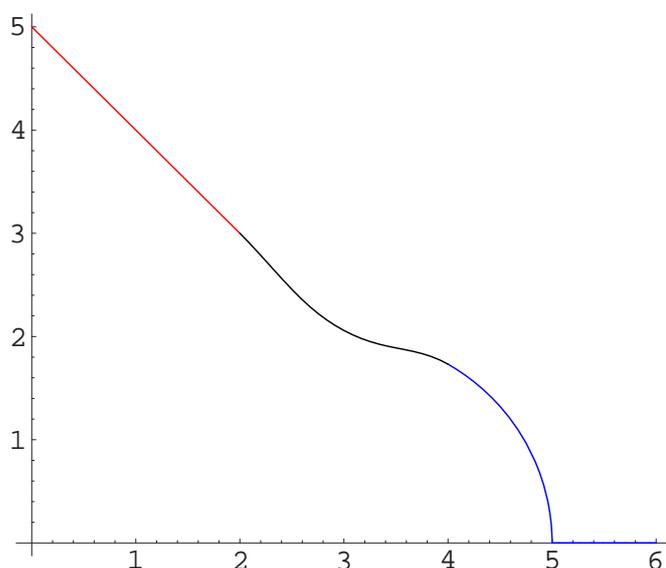


Figura 6.4.41: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 5 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$.

Ejemplo 5.

En este ejemplo mostramos una variante del ejemplo anterior. Es el caso en el que las dos funciones (continuas) tienen como soporte común un punto, pero la ordenada de dicho punto para las dos funciones (si es que ésta existe) no coincide para alguna de ellas. La situación es la que muestra la Figura 6.4.46. Esta situación se puede dar cuando tenemos una función definida a trozos y presenta una discontinuidad de salto. Por tanto la situación es la de obtener una curva derivable a partir de las funciones $g_1(x) = 1 + \sqrt{4 - (x - 1)^2}$, definida en el intervalo $[0, 3]$ y $g_2(x) = 1 + \sqrt{4 - (x - 3)^2}$, definida en el intervalo $[3, 6]$. Ambas curvas se intersecan en el punto $(3, 2)$. Para exagerar el ejemplo, hemos escogido el intervalo $[2, 4]$ como dominio de la curva blending y hemos tomado como conjunto de aproximación un conjunto de puntos aleatorio de las curvas $g_1(x)$ y $g_2(x)$. El problema de contorno que vamos a emplear es

$$\begin{cases} x^{(4)} = 0, \\ x(2) = g_1(2), x'(2) = g_1'(2), x(4) = g_2(4), x'(4) = g_2(4) \end{cases}$$

En las diferentes figuras observamos que al elevar el número de puntos la curva blending aumenta las oscilaciones si aumenta el número de splines que utilizamos para construirla.

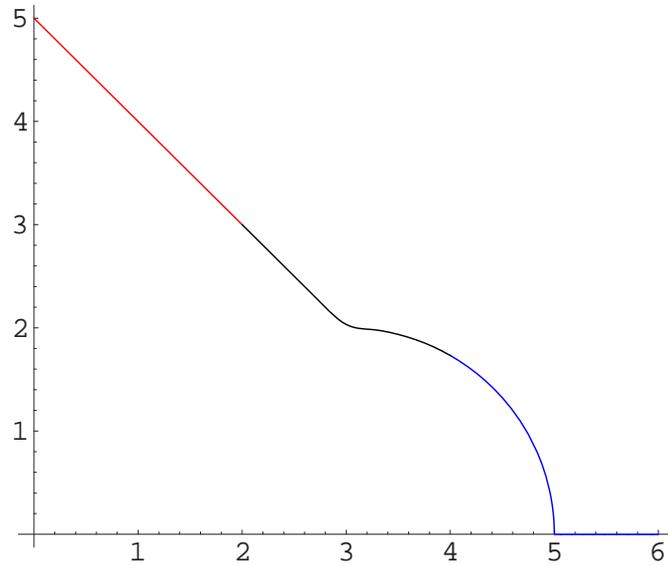


Figura 6.4.42: Curva blending de aproximación con $k = 8$ intervalos, 15 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$.

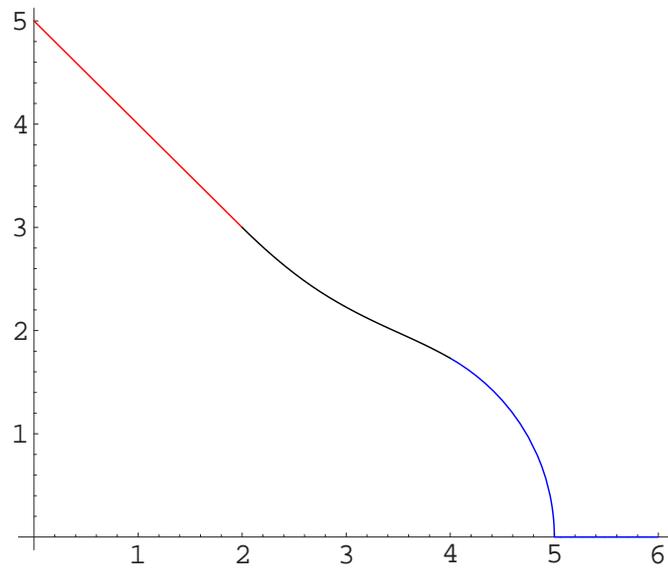


Figura 6.4.43: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 15 puntos de aproximación y $\varepsilon = 1$.

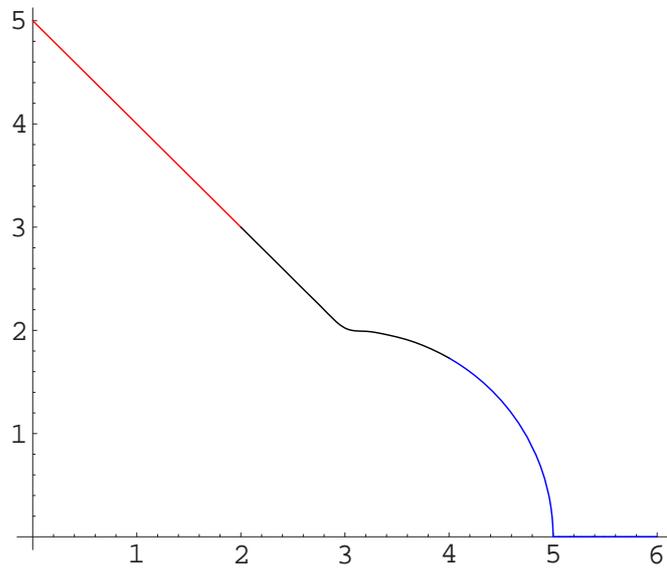


Figura 6.4.44: Curva blending de aproximación con $k = 10$ intervalos, 50 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$.

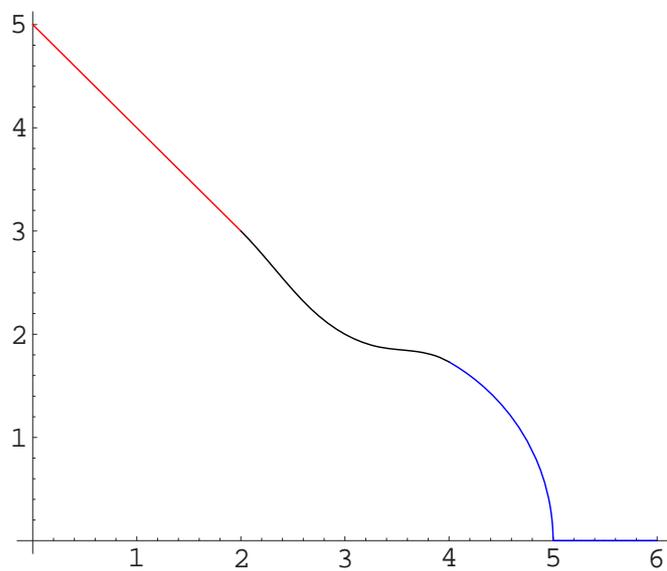


Figura 6.4.45: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 1 punto de aproximación, $(3, 2)$, y $\varepsilon = 10^{-10}$.

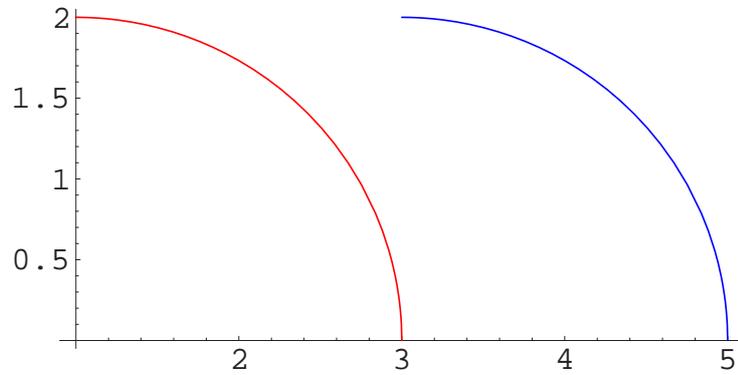


Figura 6.4.46: Gráfica de las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

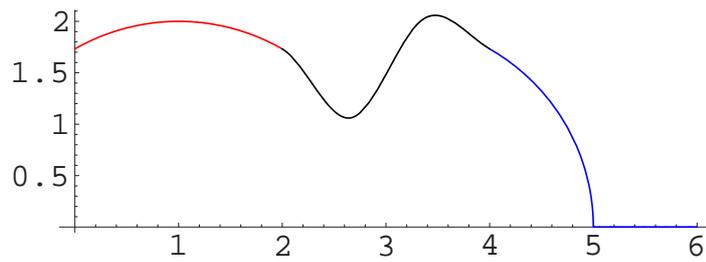


Figura 6.4.47: Curva blending de aproximación con $k = 3$ intervalos, 10 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$.

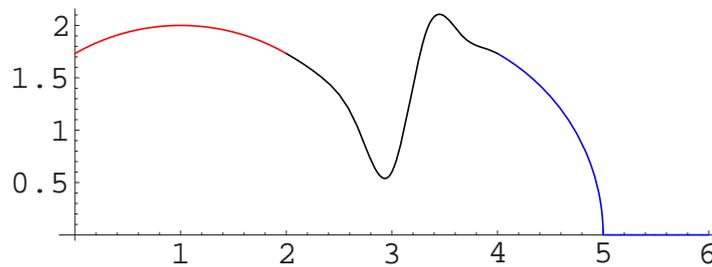


Figura 6.4.48: Curva blending de aproximación con $k = 6$ intervalos, 20 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-3}$.

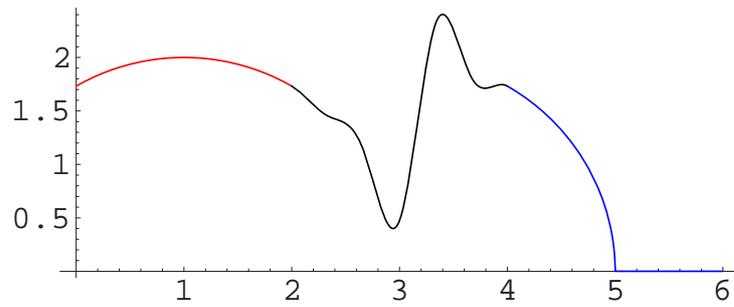


Figura 6.4.49: Curva blending de aproximación con $k = 6$ intervalos, 20 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10^{-7}$.

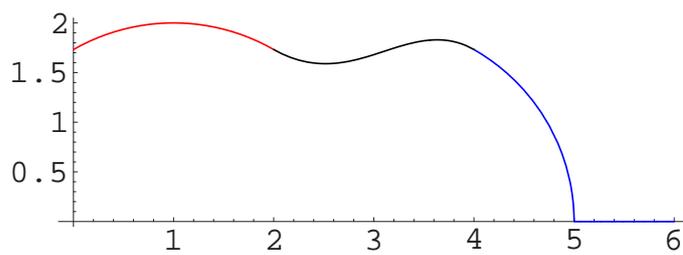


Figura 6.4.50: Curva blending de aproximación con 25 intervalos, 30 puntos de aproximación y $\varepsilon = 10$.

6.5. Superficies blending

A lo largo de los últimos años, el estudio de las superficies blending ha ido creciendo y se pueden consultar diferentes métodos para su realización como vimos en la introducción y la segunda sección del capítulo. El blending de superficies tiene por objeto la unión de dos o más superficies, llamadas primarias, mediante otra de forma suave.

6.5.1. Construcción de superficies blending

Análogamente al estudio hecho en la sección anterior se puede proceder para el caso de superficies. Podemos analizar un sencillo caso como es el que muestra la Figura 6.5.51 el problema consistiría en unir mediante una superficie “blending” dos planchas situadas a diferentes alturas de manera suave.

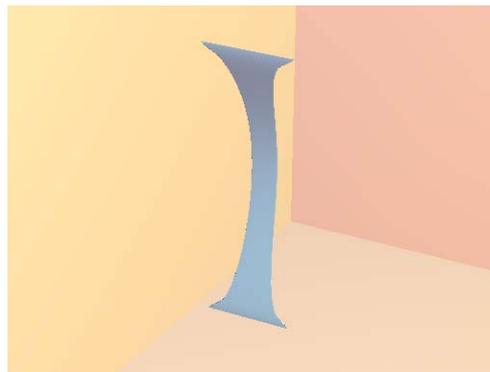


Figura 6.5.51: Superficie blending para la unión de dos planchas .

Dependiendo de nuestras necesidades podemos hacer la unión de una u otra forma, utilizando diferentes conjuntos de puntos de aproximación, o variando el operador diferencial con el que estemos trabajando.

La casuística de las superficies blending es mucho más variada que la de curvas, puesto que las curvas de unión se pueden encontrar de muy diversas formas. Por ejemplo, una de las curvas a través de la cual se realiza la unión puede ser abierta y la otra cerrada, o las dos abiertas o cerradas.

En superficies también se pueden dar con cierta frecuencia casos en los que las superficies primarias están en contacto y hay esquinas que se desean eliminar. Si se da esta situación no hay más que proceder de manera similar al caso de curvas, prescindiendo de la parte de superficie que no se desea (tomando

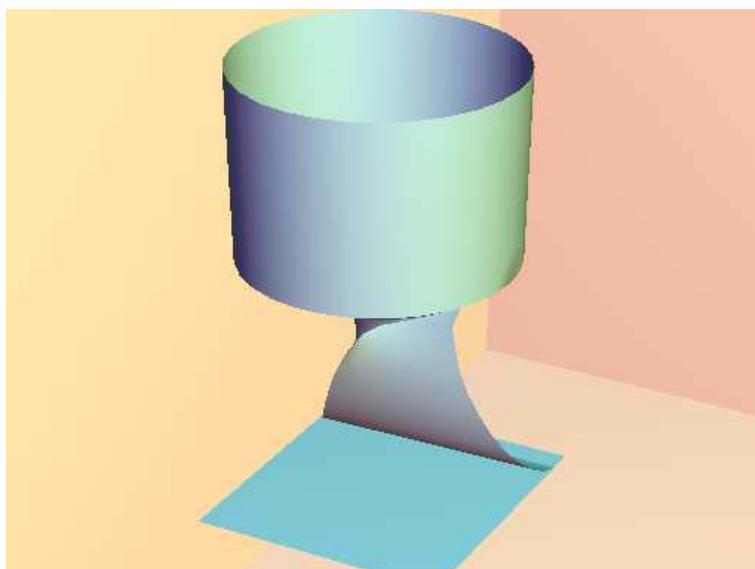


Figura 6.5.52: Superficie blending de cilindro y plano.

el conjunto de puntos de aproximación de él), y de esta forma tendremos las superficies primarias no tienen curvas en común, aunque las condiciones de contorno de partida habrán cambiado al variar alguna, o todas, de las superficies primarias.

Podemos ver en las figuras 6.5.52 y 6.5.53 como las diferentes superficies blending que se construyen pueden ser cerradas o abiertas dando lugar a blendings con condiciones periódicas o no, dependiendo de como sean las curvas frontera de las superficies primarias que vayamos a unir.

Como hemos realizado en la sección de curvas, nuestra intención es la de observar las diferentes formas que se producen variando el conjunto de puntos de aproximación y la ecuación diferencial en derivadas parciales de tipo elíptico, de forma que podemos dar más relevancia a uno u otro en la representación final de la superficie por medio del parámetro ε , así como de que ponderará dicho conjunto con el operador diferencial que elijamos para el problema de contorno.

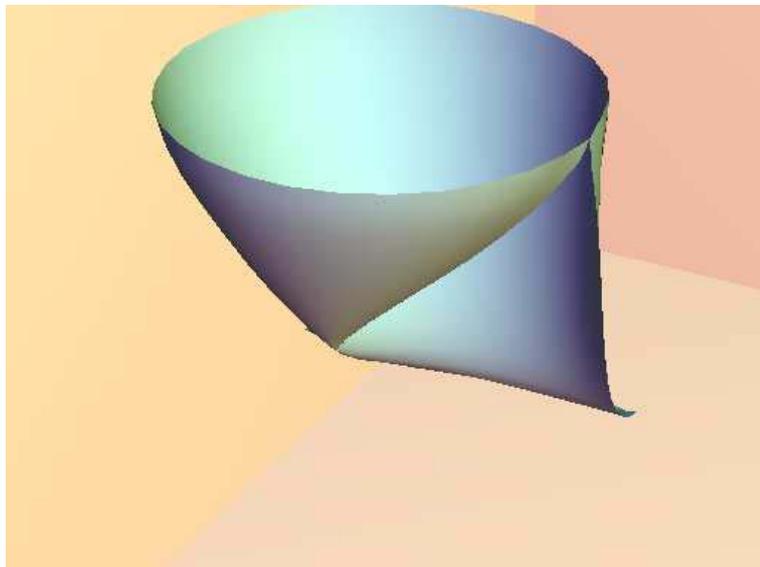


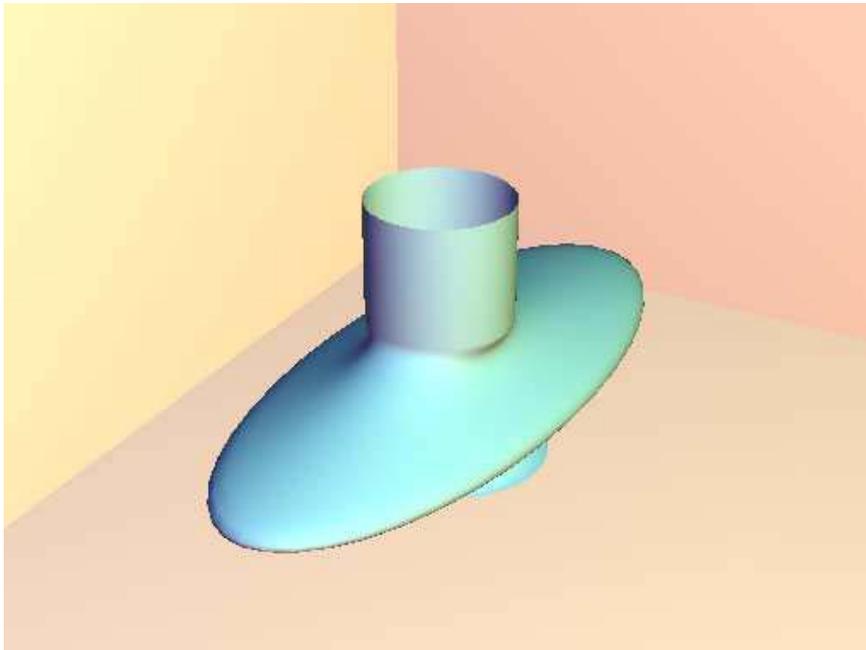
Figura 6.5.53: Superficie blending de circunferencia y segmento.

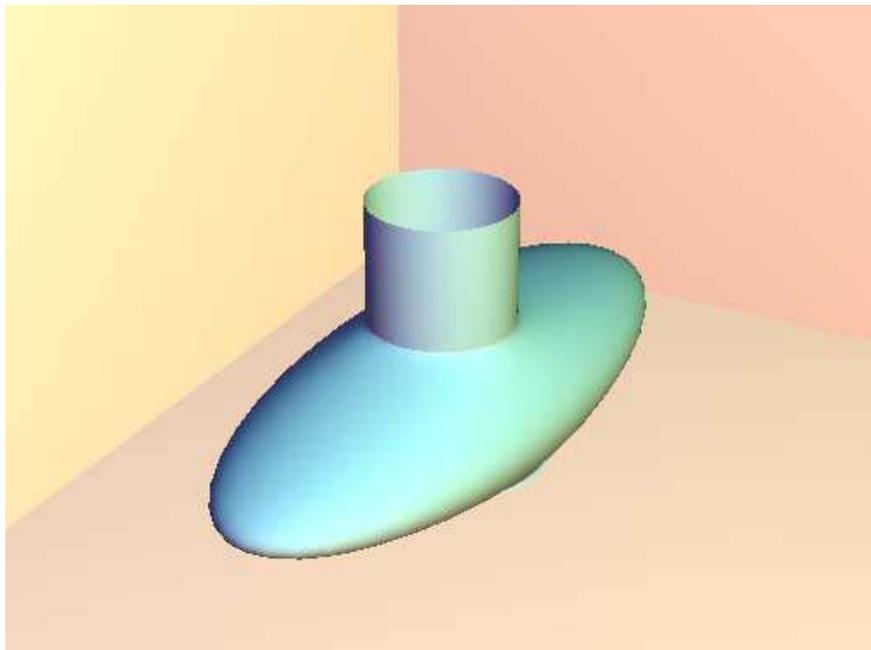
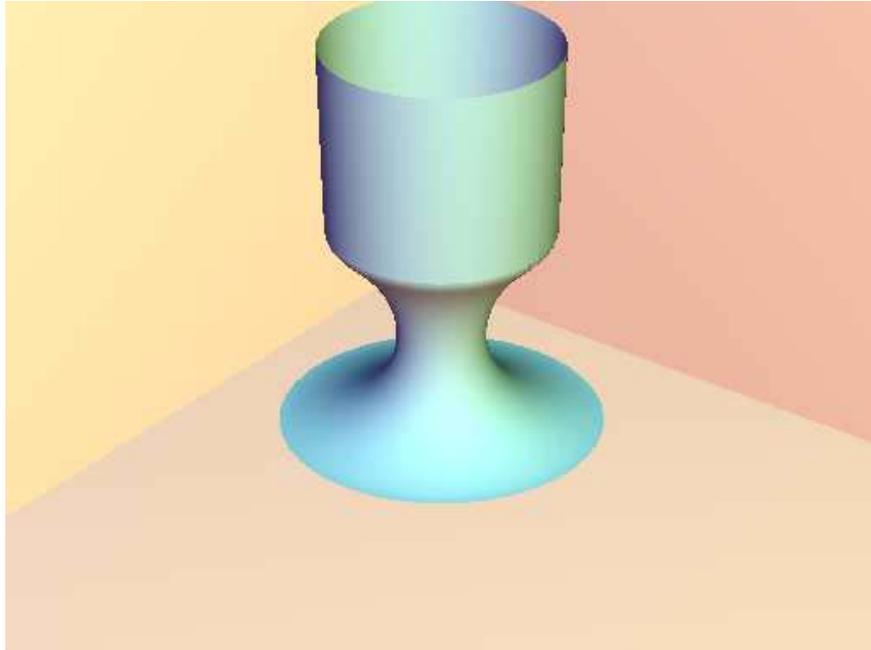
6.5.2. Modelado

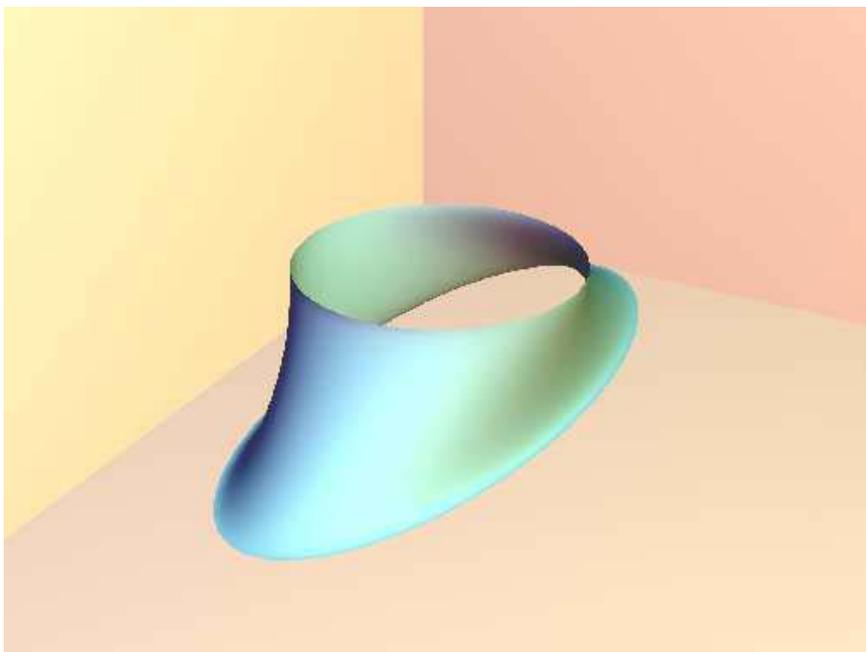
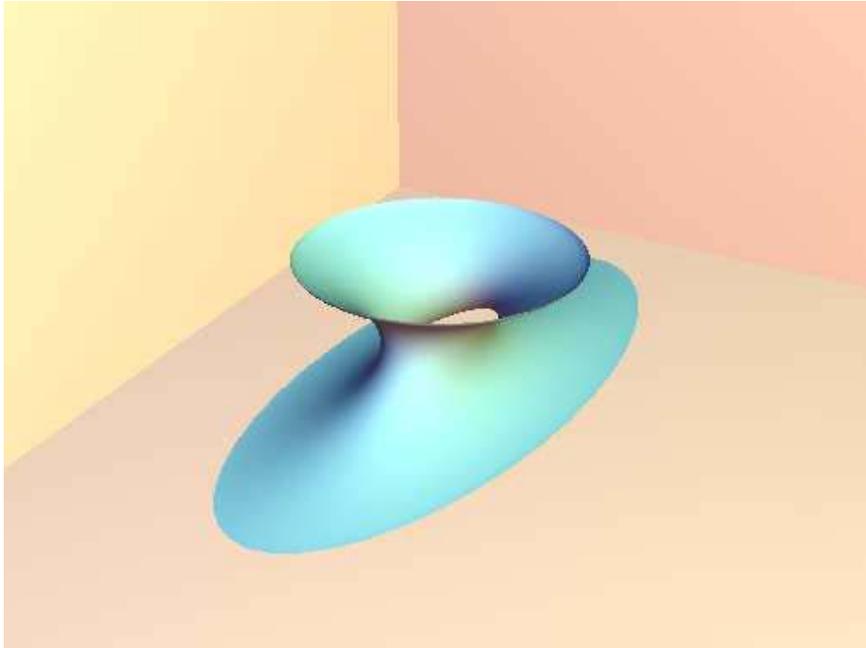
Para finalizar el capítulo incluimos una serie de gráficos en los que podemos observar la incidencia de cada uno de los parámetros. Así, en cuanto al conjunto de puntos de aproximación, éste se puede dejar vacío, tomarlo de una única circunferencia o recta del espacio o bien tomarlo de diferentes funciones. Otro aspecto en el que podemos interactuar es en el valor del parámetro ε .

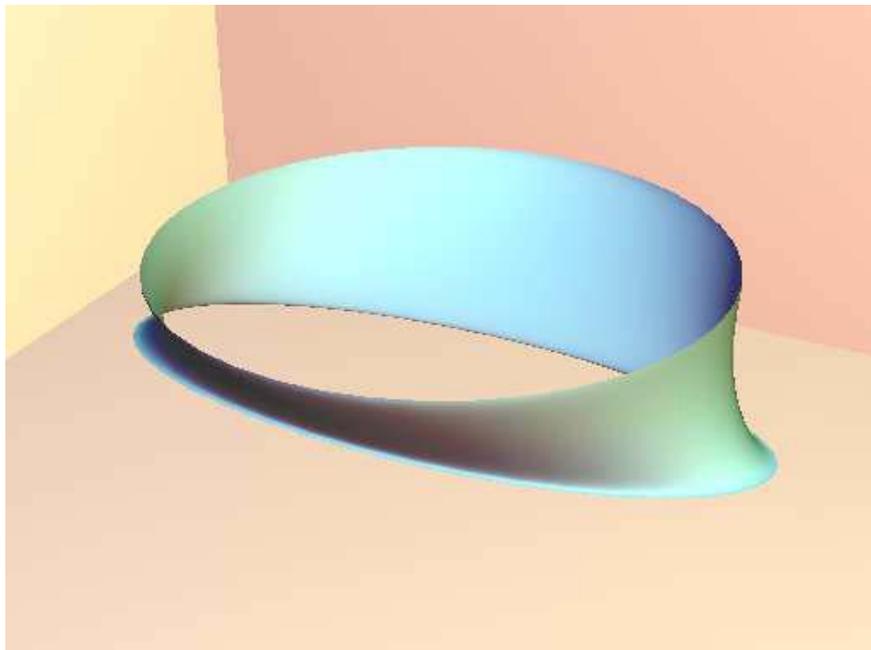
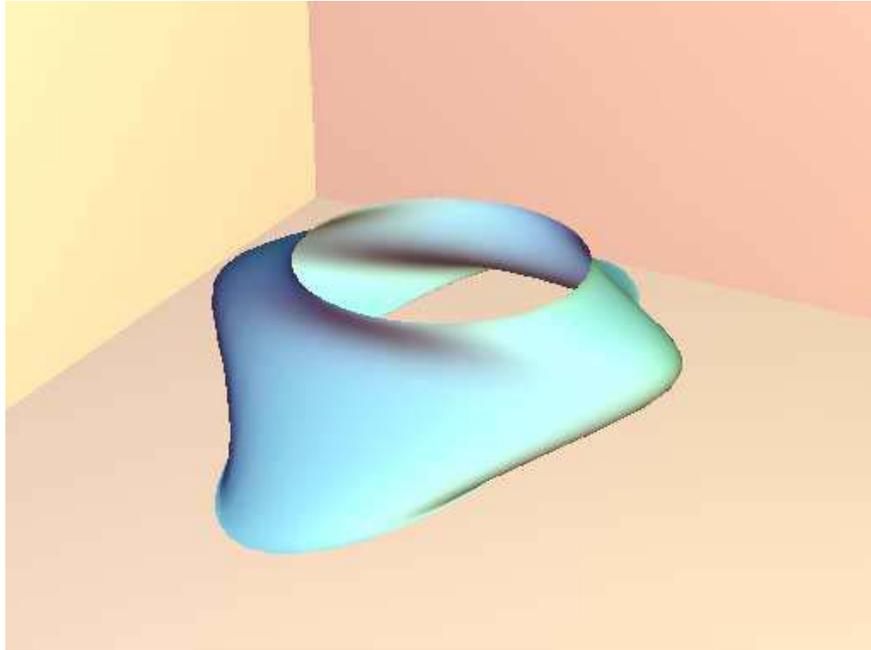
Un aspecto más novedoso que sí se aprecia claramente en alguna de las figuras es la forma que dichas figuras tienen al variar únicamente el parámetro a de la ecuación en derivadas parciales. Conforme el parámetro disminuye las gráficas de las superficies obtenidas son más “ceñidos”.

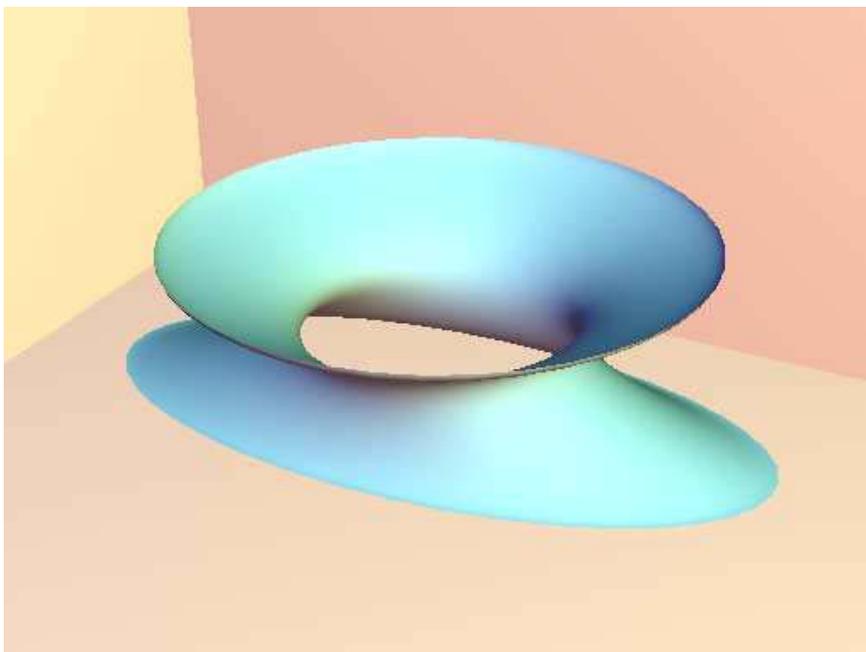
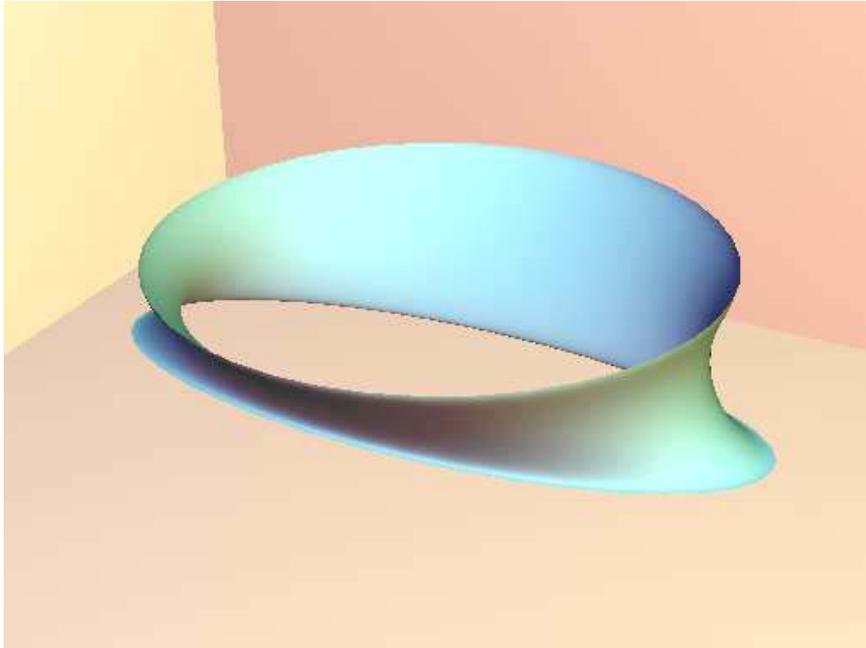
Al variar las condiciones de contorno de forma adecuada se obtienen superficies “blending” cuya unión con las superficies primarias son más o menos suaves. Por ejemplo en la unión de un plano y un cilindro se observa que es interesante que las condiciones de contorno estén dadas por vectores que estén contenido en dicho plano, de forma que la superficie global resultante tenga mayor clase.

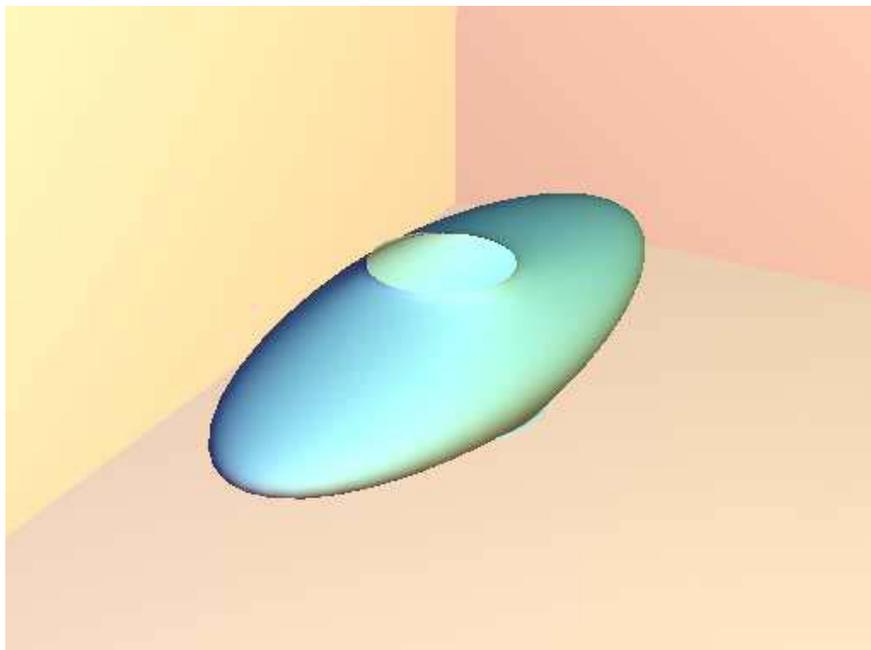




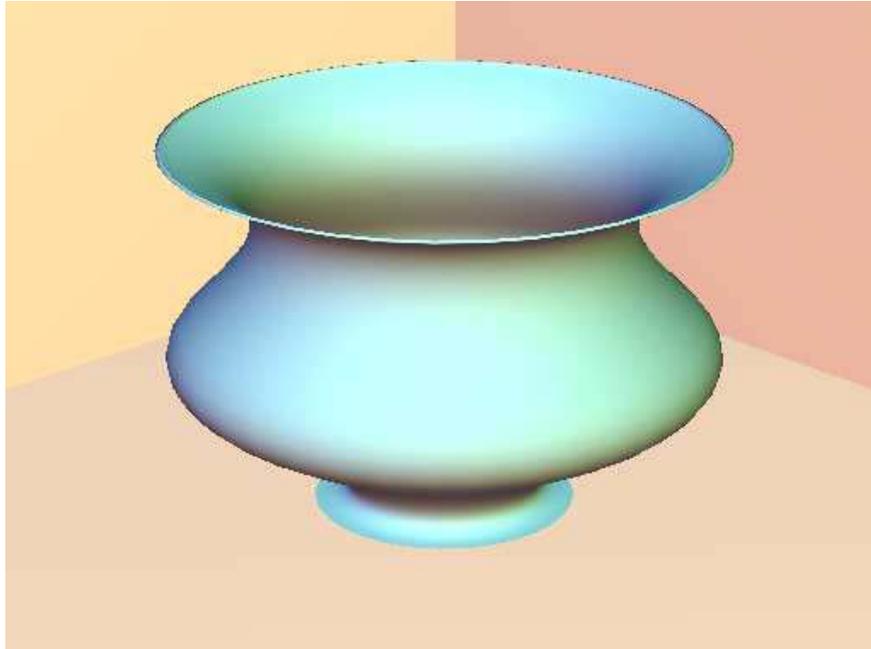


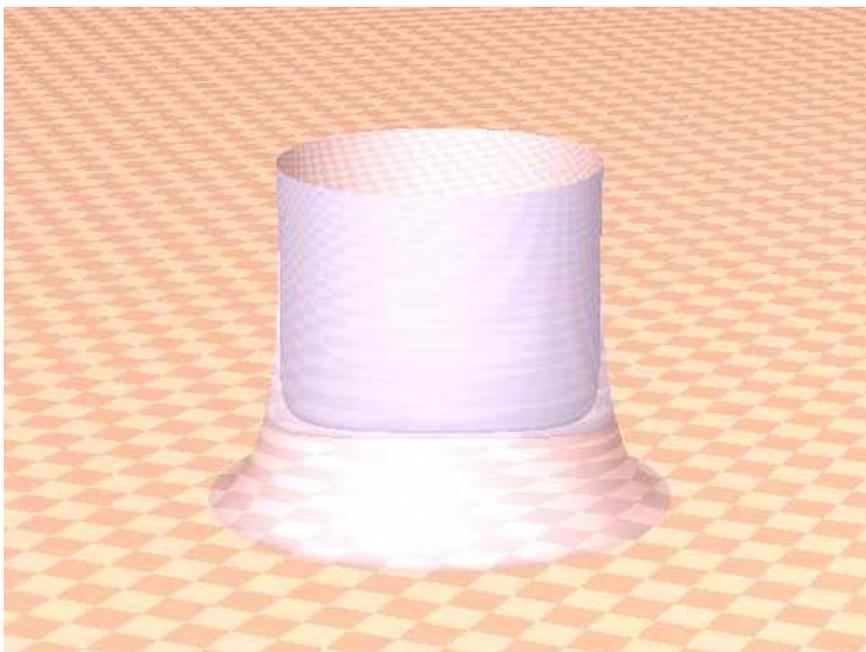
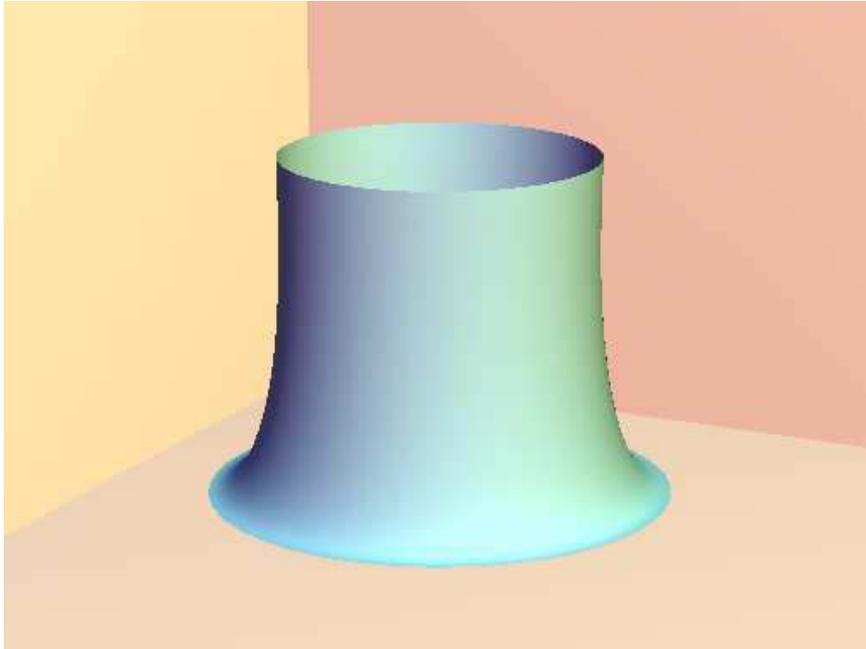


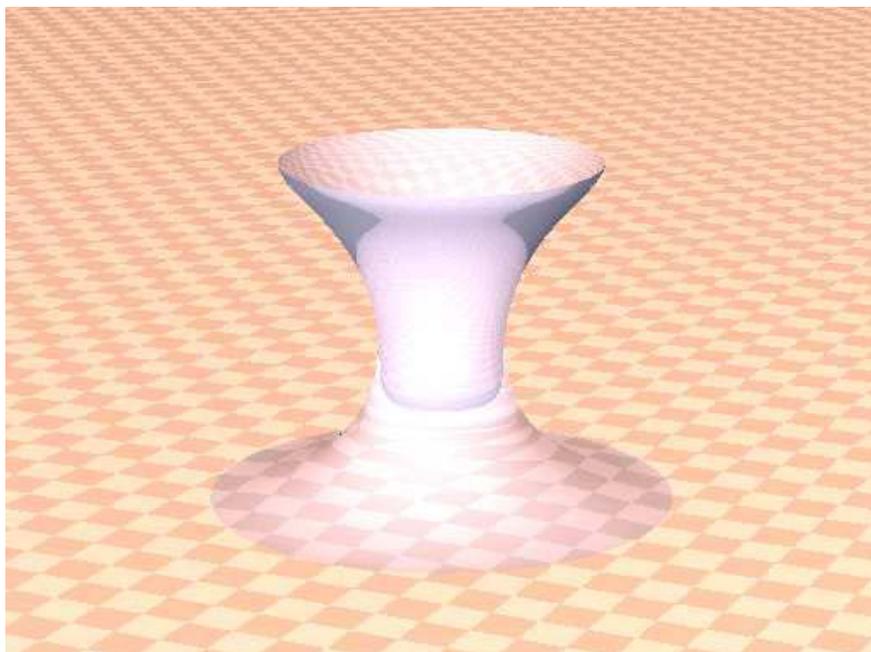
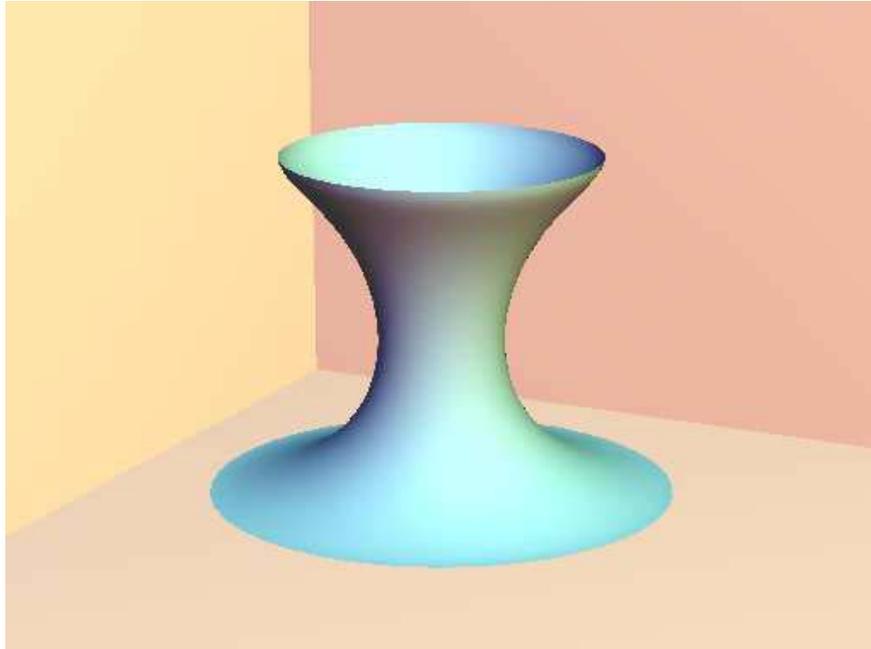




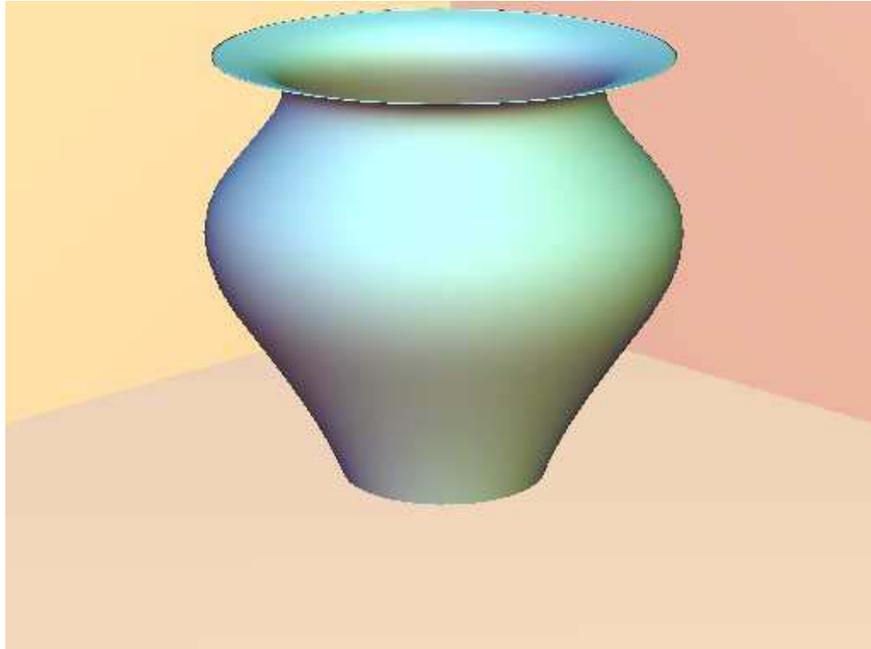


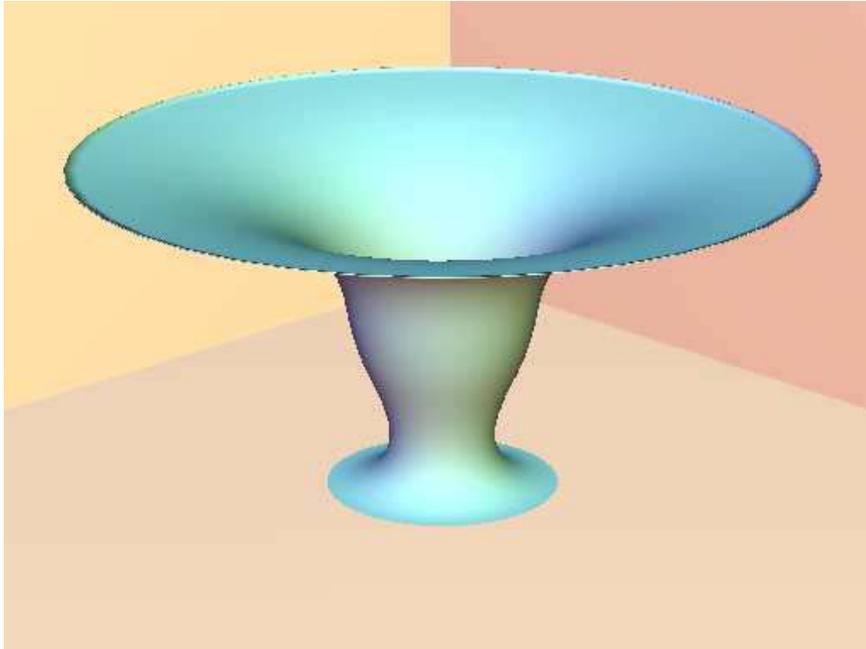


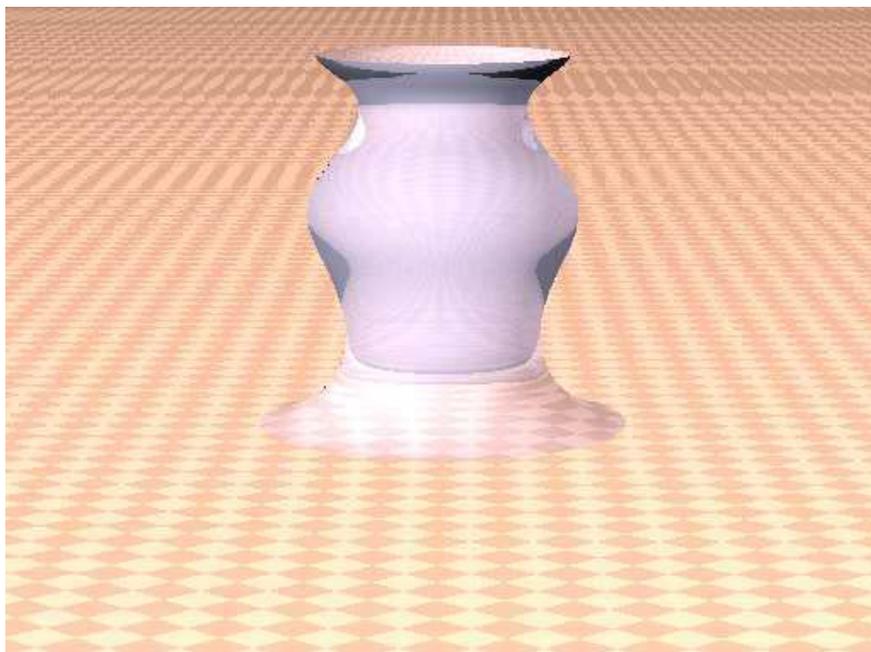


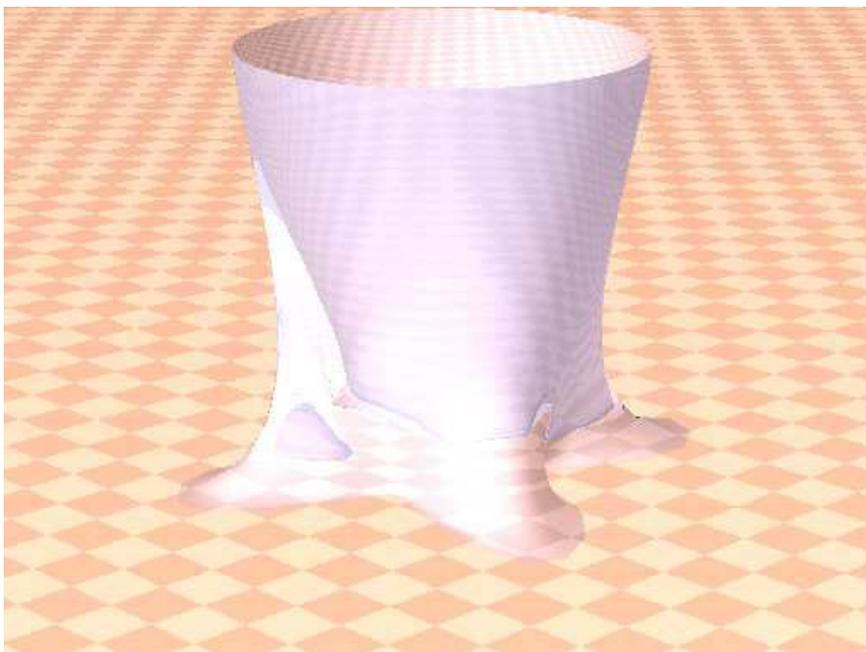
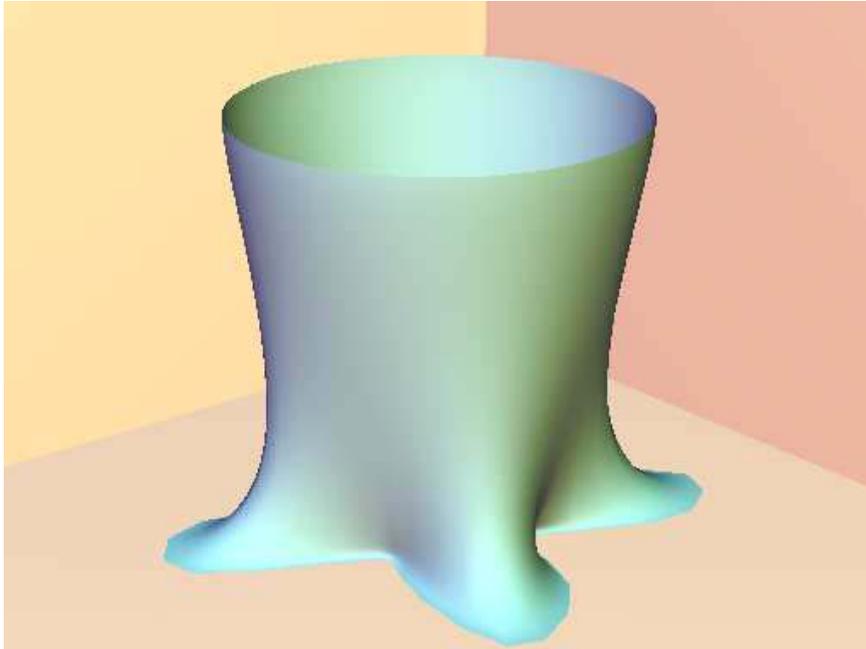


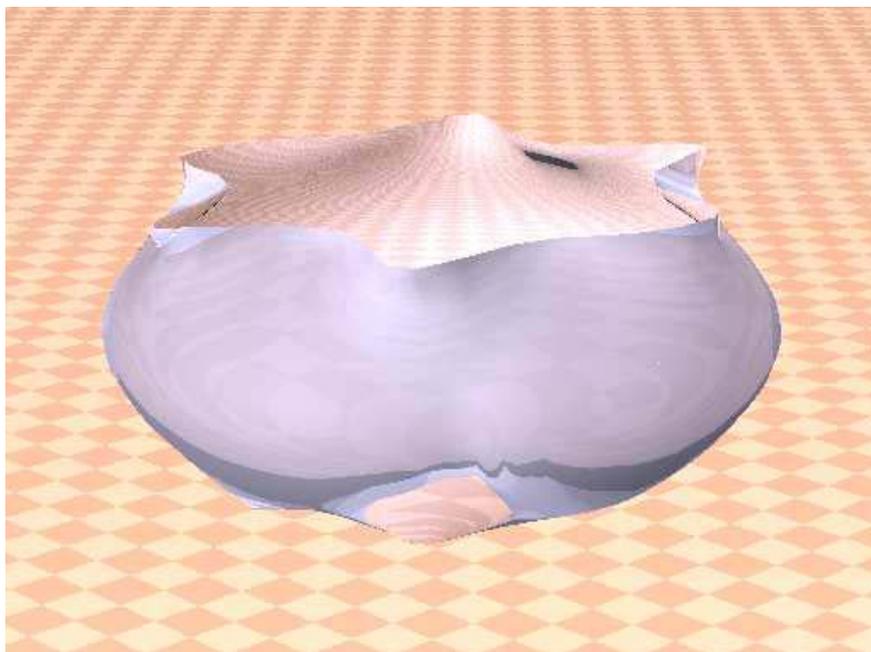
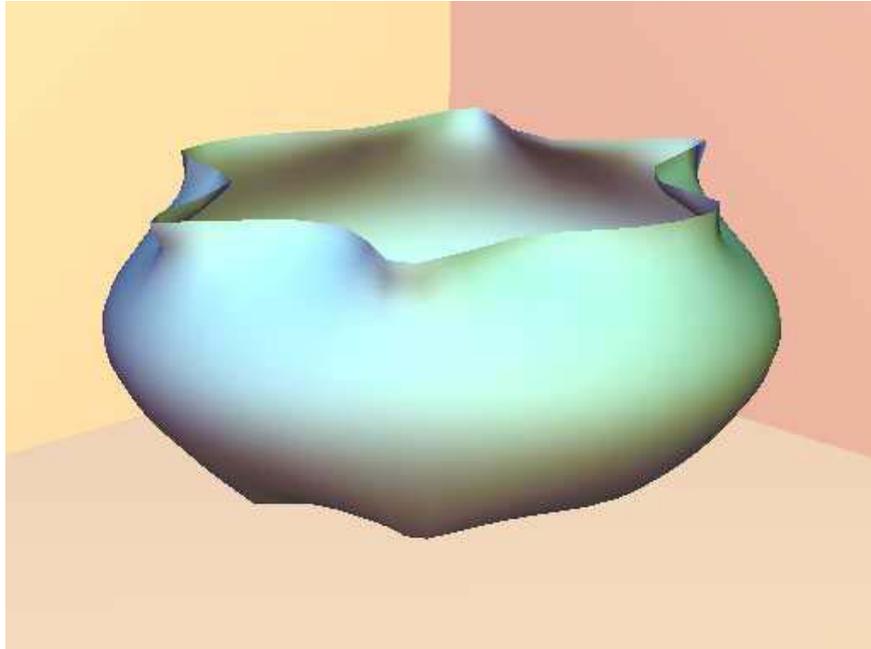


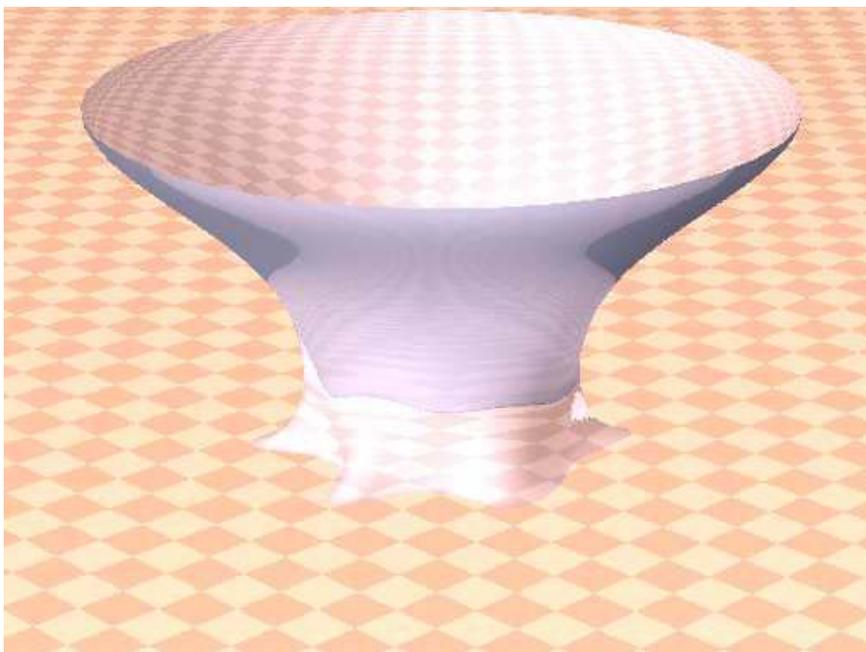
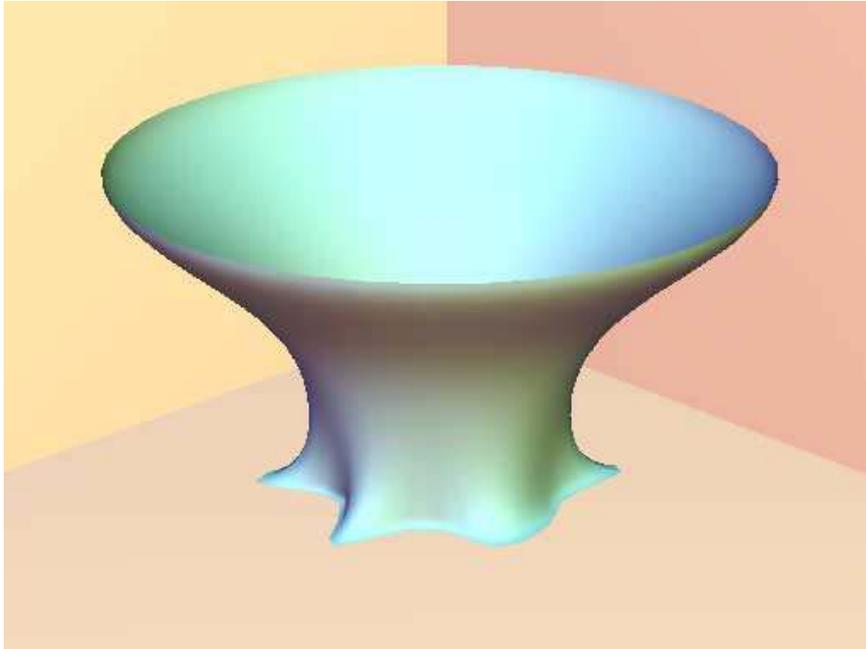


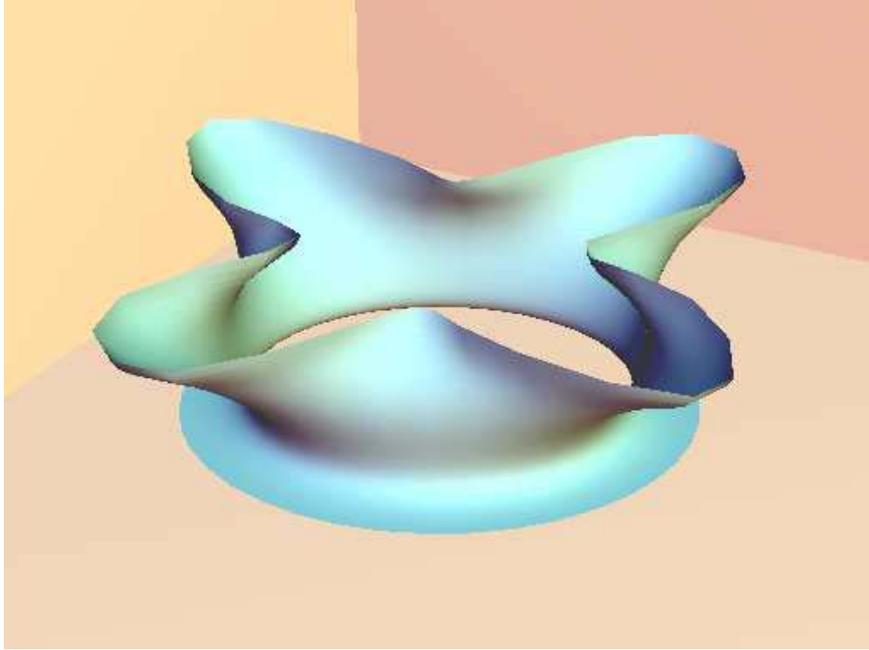


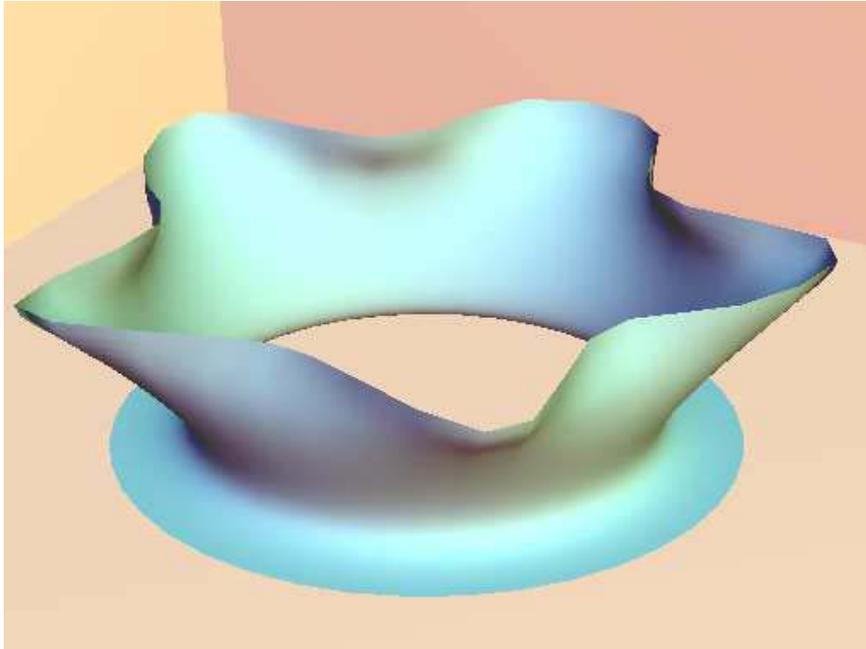


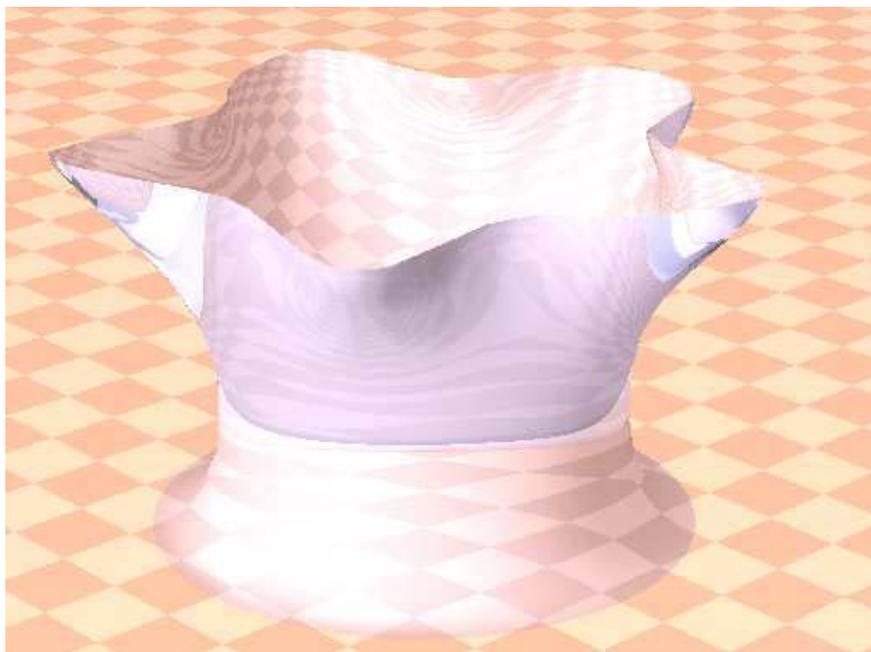
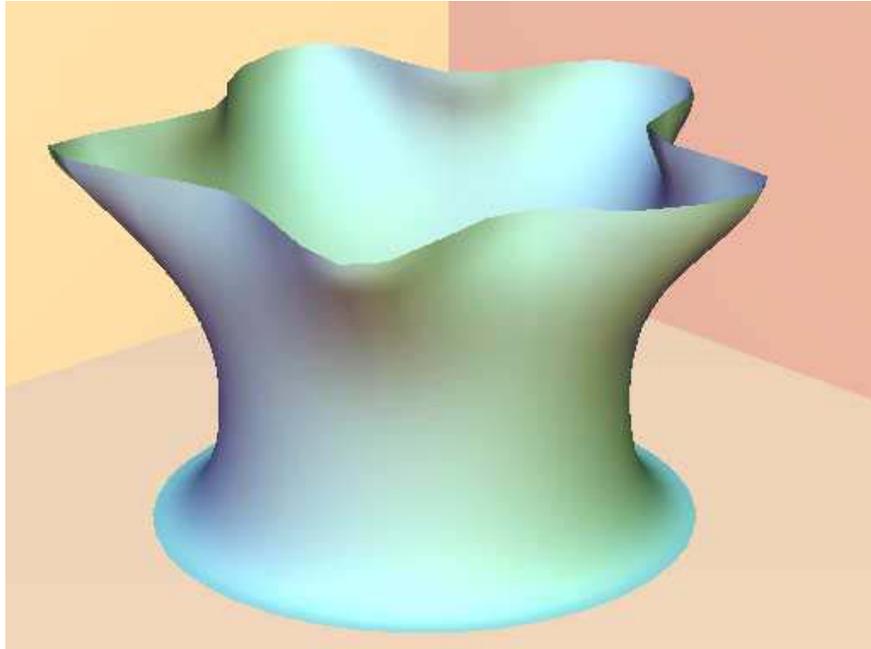


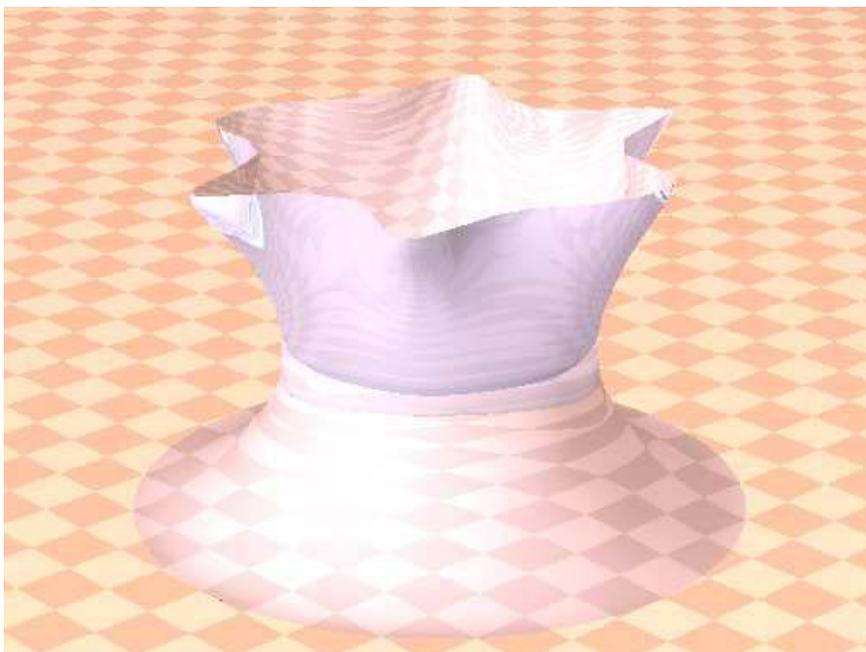
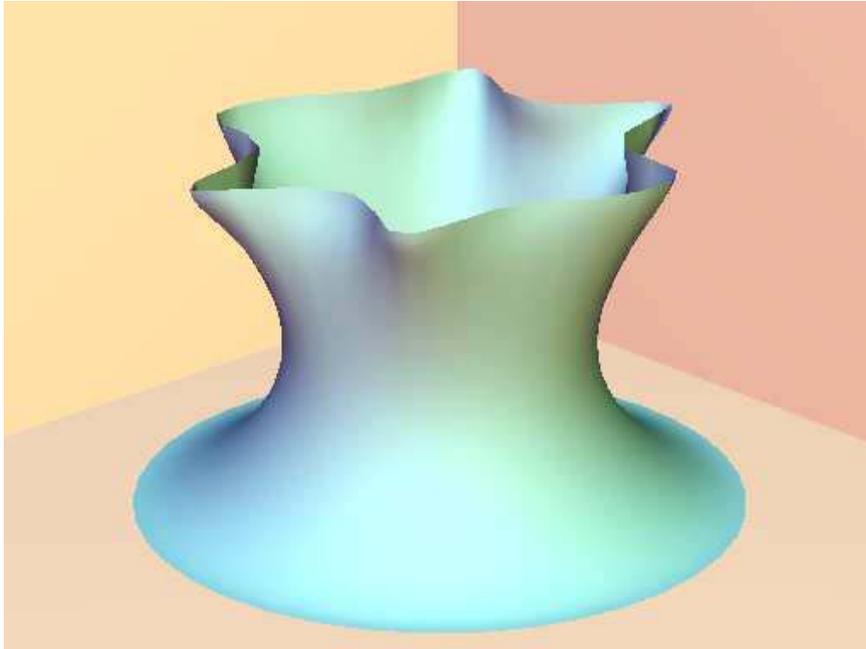


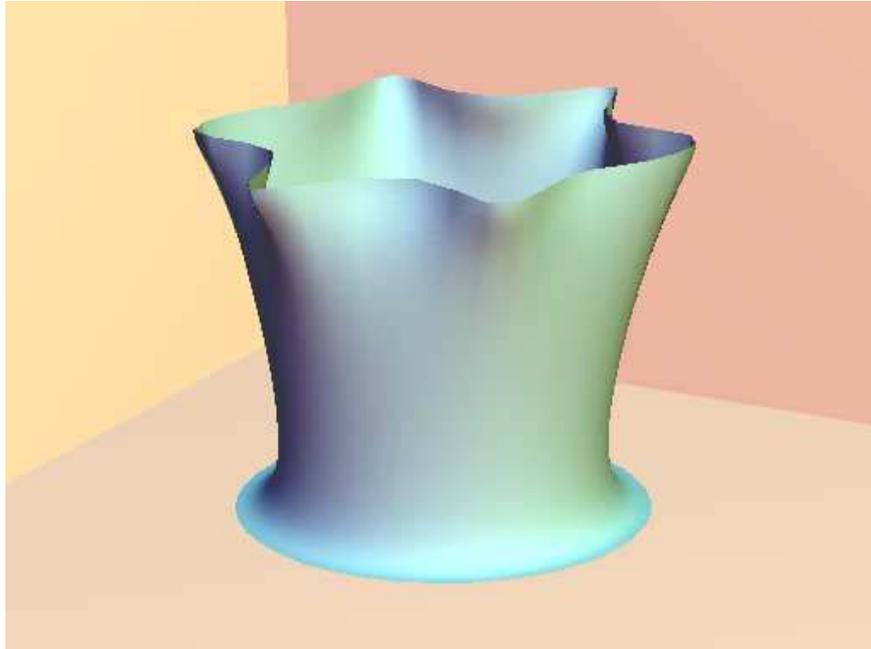


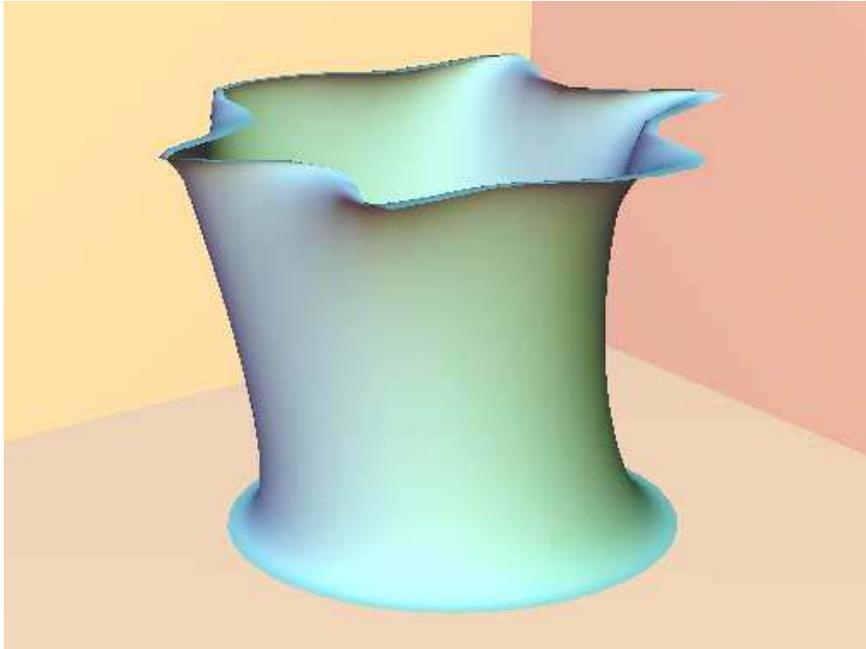


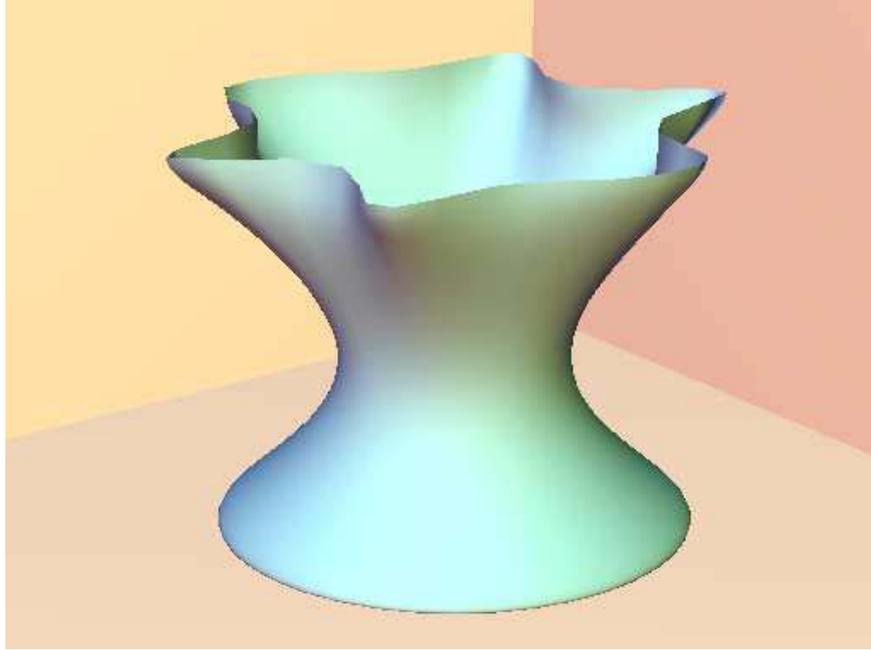


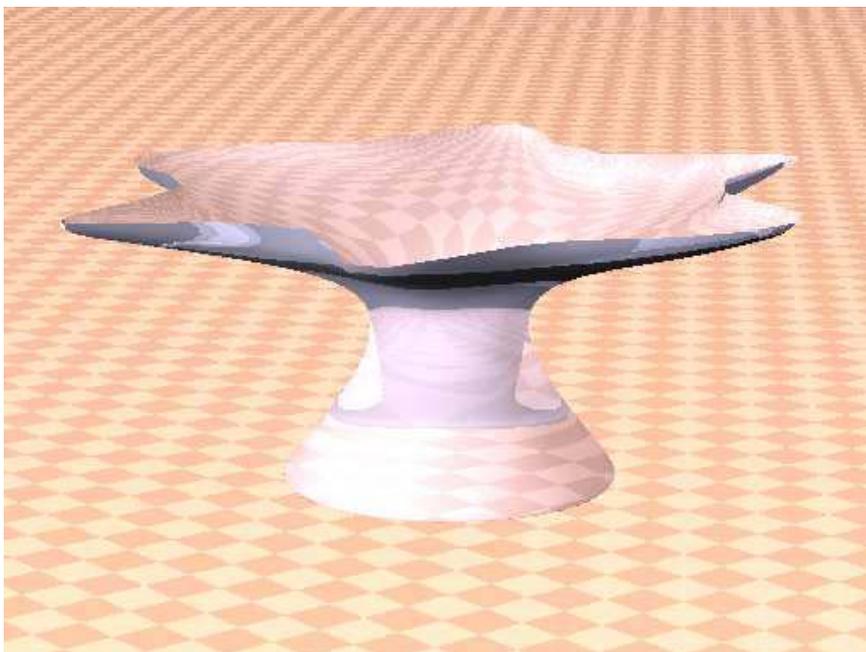
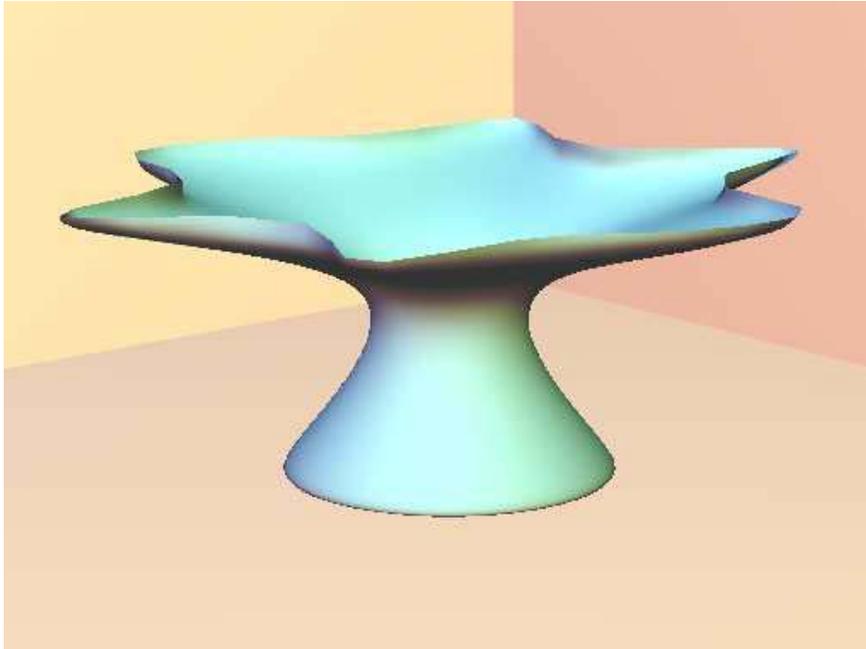


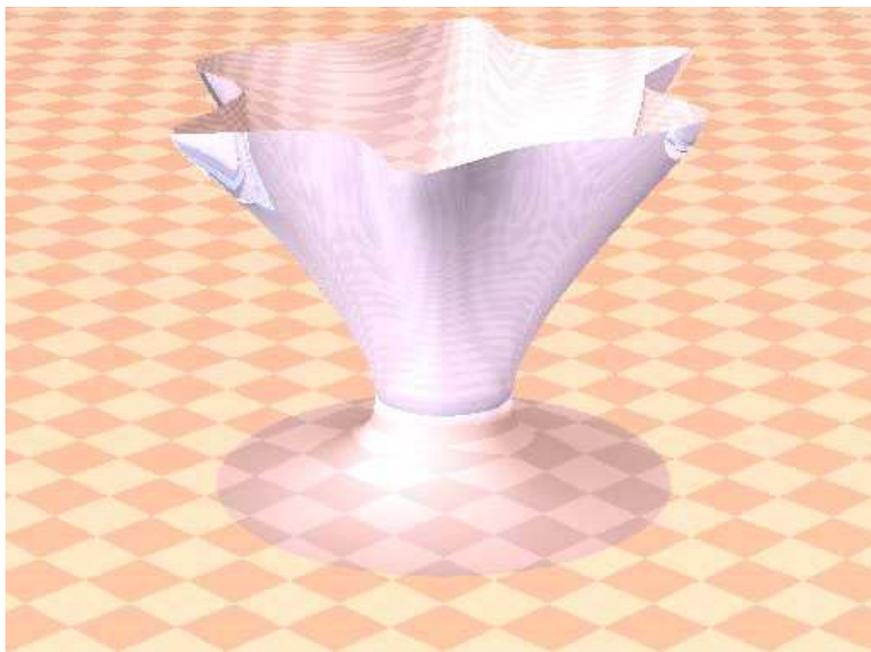
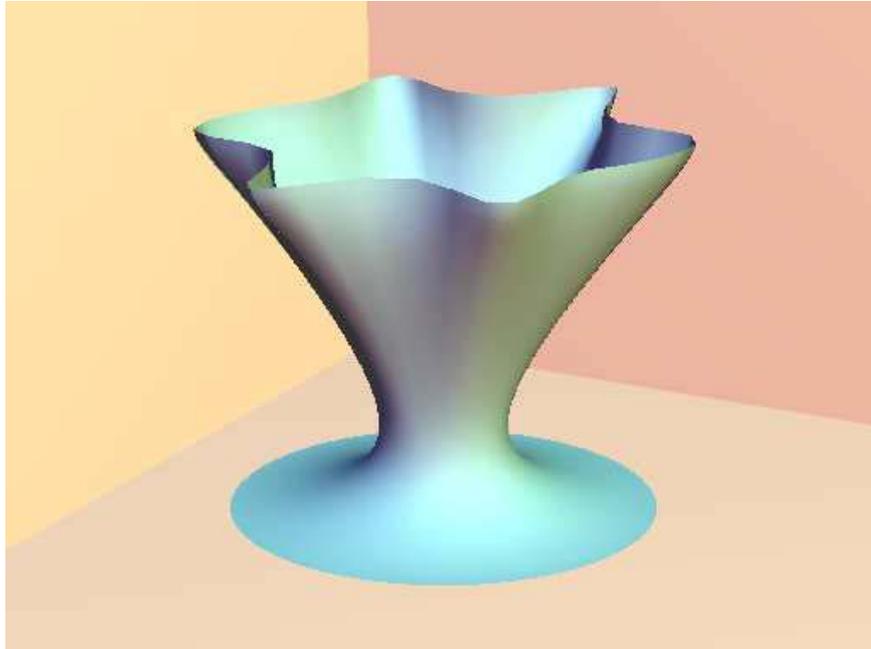


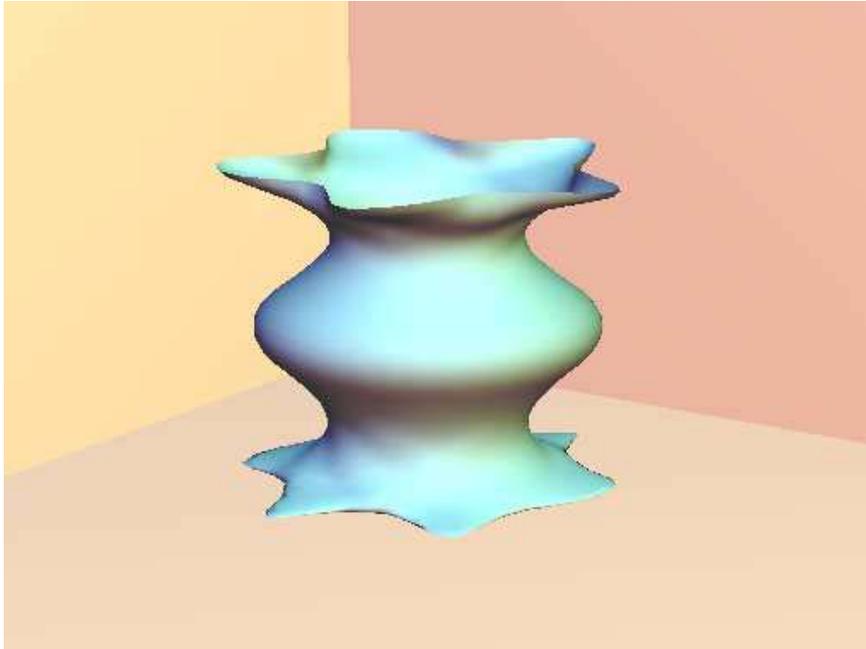


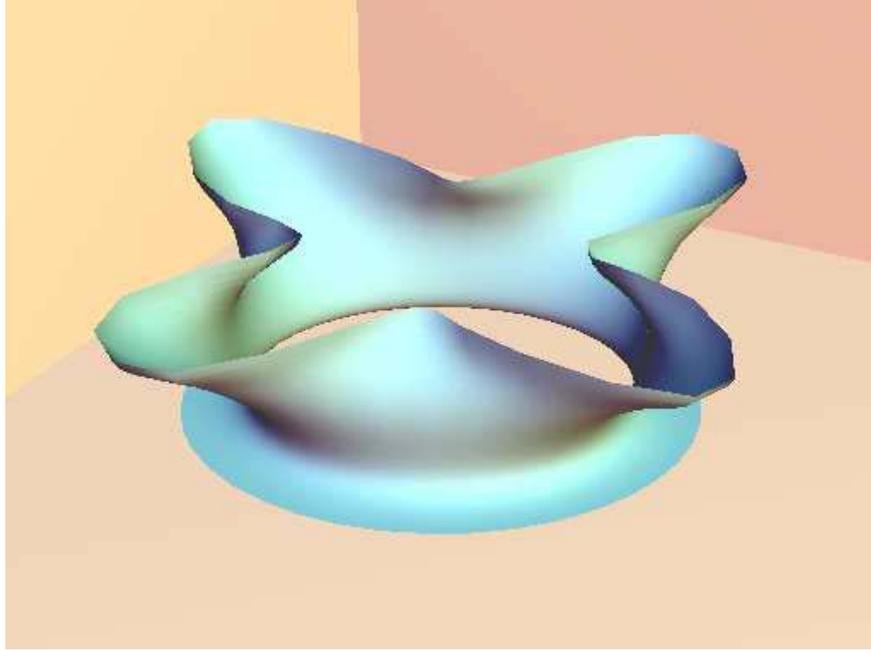


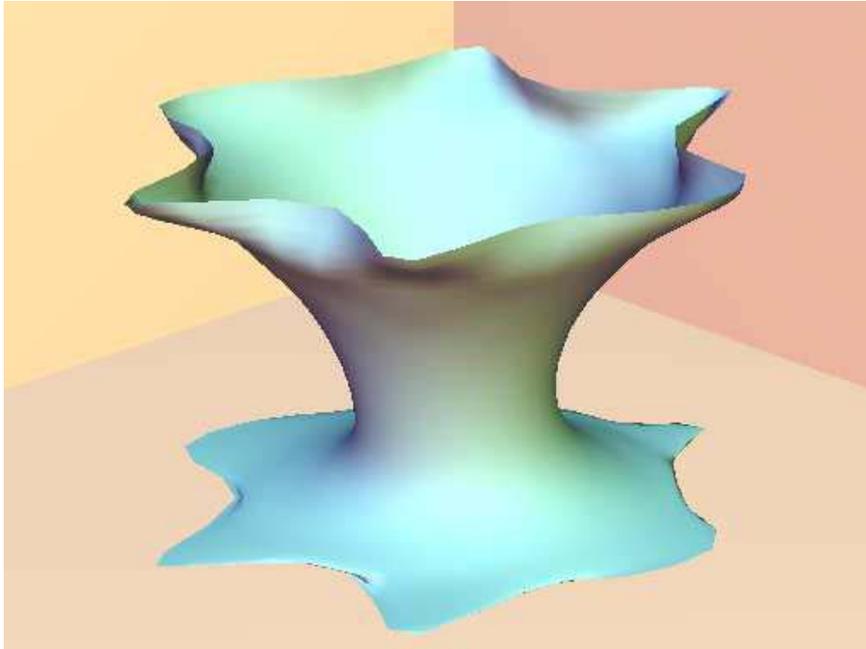












Conclusiones

Las principales aportaciones de esta memoria a la aproximación de curvas y superficies son:

1. La inclusión de una ecuación diferencial, o ecuación en derivadas parciales de un tipo determinado, en un problema de aproximación es, en nuestra opinión, una de las aportaciones más importantes y novedosas del trabajo presentado. Dicha ecuación, con condiciones de contorno adecuadas, es un término fundamental en la aplicación de un método, que tiene también un conjunto de puntos de aproximación como sustento para construir aproximantes.
2. La definición y caracterización de curva ODE y superficie PDE. A partir de un problema de contorno y un conjunto de puntos de aproximación hemos introducido un concepto que se apoya en bases teóricas de dos campos diferentes como son la teoría de aproximación y la teoría de interpolación
3. La definición y caracterización de curva ODE spline y superficie PDE discreta. Debido a la imposibilidad de explicitar las soluciones del problema estudiado se observa la necesidad de discretizar el problema de aproximación sobre espacios discretos. Las soluciones del problema discreto definido se denominan, respectivamente, curva ODE spline y superficie PDE discreta. De igual forma que en el caso continuo, se establecen sendas caracterizaciones variacionales para los problemas correspondientes.
4. El estudio de la convergencia de los métodos de aproximación desarrollados. Se han establecido resultados de convergencia, tanto de las curvas ODE y de las superficies PDE, como de las respectivas soluciones discretas, hacia la función de la que proceden los datos, bajo condiciones adecuadas. De igual forma se ha estudiado la convergencia del problema discreto asociado tomando como función de la que proceden los datos, la

única solución del problema de contorno inicial. Asimismo se establecen estimaciones del error para cada caso.

5. La descripción de los algoritmos numéricos precisos para el cálculo de los aproximantes discretos. De la definición tanto de curva ODE spline como de superficie PDE discreta, se deducen sendos algoritmos numéricos. En ambos casos, los algoritmos se reducen a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es simétrica, definida positiva y de tipo banda. También se han implementado dichos algoritmos.
6. Las diferentes aplicaciones que el método tiene en campos como el modelado de forma libre, en particular, en la construcción de curvas y superficies blending. También se puede aplicar el método obtenido en el campo de reconstrucción de objetos, o más particularmente, en el campo de la aeronáutica, en el modelado de superficies para el diseño de fuselaje de ciertas aeronaves.

Hemos procurado dejar patente el funcionamiento y la utilidad de los métodos de aproximación estudiados, en los ejemplos numéricos y gráficos dados en los capítulos 3, 5 y 6.

Las posibles líneas de investigación que podrían seguirse para mejorar, modificar o extender los métodos propuestos son:

- Estudio de los problemas definidos, resultados de convergencia y estimaciones del error en norma L^1 .
- Estudio de la discretización de las superficies PDE en espacios diferentes del de los elementos finitos (espacios de box-splines o quasi-splines).
- Estudio y validación de la conjetura realizada sobre la existencia de un valor óptimo del parámetro ε , y elección automática mediante el método de validación cruzada (GCV). (Ver P. Craven y G. Wahba [28], C. Gu [35] y G. Wahba [78])
- Aplicaciones del método empleado en diferentes campos de la ciencia, como pueden ser la geología, medicina, aeronáutica y automoción.

Bibliografía

- [1] R. A. Adams : *Sobolev Spaces*. Academic Press, Nueva York (1975).
- [2] R. Arcangeli, M.C. López de Silanes, J.J. Torrens : *Multidimensional Minimizing Splines*. Kluwer Academic Publishers, (2004).
- [3] K. Atkinson, W. Han : *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*. Springer–Verlag, Nueva York (2001).
- [4] D. Barrera : *Esquemas locales de interpolación de Lagrange y de Hermite. Su extensión a dos variables*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada (1997).
- [5] J. Barhak, A. Fischer : Parametrization for reconstruction of 3D free-form objects from laser-scanned database on a PDE method. *The Visual Computer*, 17, 353–369, (2001).
- [6] M.I.G. Bloor, M.J. Wilson: Generating blend surfaces using partial differential surfaces. *Computer Aided Design*. 22, 165–171, (1989).
- [7] M.I.G. Bloor, M.J. Wilson: Blend design as a boundary-value problem. W. Straßer and H.P. Seidel , eds., *Theory and Practice of Geometric Modelling* (Springer-Verlag, Berlin, 1989), 221-234.
- [8] M.I.G. Bloor, M.J. Wilson, H. Hagen : The smoothing properties of variational schemes for surface design. *CAGD* 12, 381–394 (1995).
- [9] M.I.G. Bloor, M.J. Wilson : Generating parametrizations of wing geometries using partial differential equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 148, 125–138 (1997).
- [10] M.I.G. Bloor, M.J. Wilson : Spectral approximations to PDE surfaces, *Computer Aided Design*, 28, 145-152, (1996).
- [11] C. de Boor, K. Höllig, S. Riemenschneider : *Box-splines*. Springer–Verlag, New York (1993).

-
- [12] C. de Boor : *A Practical Guide to Splines* Springer–Verlag New York (1978).
- [13] C. de Boor, R. DeVore : Approximation by smooth multivariate splines. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 276, 775–788 (1983).
- [14] D. Braess : *Finite elements. Theory, fast solvers and applications in solid mechanics* Cambridge University Press (2001).
- [15] H. Brezis : *Análisis Funcional*. Alianza Universidad Textos, Madrid (1984).
- [16] F. Brezzi y F. Fortin : *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer–Verlag, New York (1991).
- [17] M. P. do Carmo: *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Universidad Textos, Madrid (1990).
- [18] J. M. Brown, M.I.G. Bloor, M.S. Bloor y M.J. Wilson : Generating B-spline approximation of PDE surfaces. *Math. Engrg. Indust.* 5, 97–111, (1995).
- [19] J. M. Brown, M.I.G. Bloor, M.S. Bloor y M.J. Wilson : Generating B-spline approximation of PDE surfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 158, 221–234, (1998).
- [20] J. M. Brown, M.I.G. Bloor, M.S. Bloor, M.J. Wilson and H. Nowacki, Properties of the B-spline representation using the PDE method that are generated using the finite element method, in A. Bowyed, ed., *The Mathematics of Surfaces IV*, Oxford University Press (1994) 335–348.
- [21] H. Cartan : *Cours de Calcul Différentiel*. Hermann (1977).
- [22] E.W. Cheney, W.A. Light : *A course in Approximation Theory*. The Brooks/Cole Publishing Company (1999).
- [23] W. Cheney : *Analysis for Applied Mathematics*. Springer (2001).
- [24] C. K. Chui : *Multivariate splines*. CBMS-NSF Series Appl. Math. Vol. 54 SIAM Publications, Philadelphia (1988).
- [25] P. G. Ciarlet : *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North–Holland (1978).
- [26] P. G. Ciarlet : *Numerical Analysis of the Finite Element Method*. Le Press de L’Université de Montréal (1976).

- [27] P. Clément : Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO R-2*, 77–84 (1975).
- [28] P. Craven, G. Wahba : Smoothing noisy data with spline functions, *Num. Math.*, 31, 377–403, (1979).
- [29] R. Dautray, J. L. Lions : *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Volume 2: Functional and Variational Methods*. Springer (2001).
- [30] J. Duchon : Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de plusieurs variables par les D^m -splines. *RAIRO Anal. Numer.* 12, 325–334, (1978).
- [31] H. Du y H. Qin : Integrating Physics-based Modeling with PDE Solids for Geometric Design, *Proceedings of the Ninth Pacific Conference on Comput. Graph. and Applications (Pacific Graphics 2001)*, 2001.
- [32] D. J. Filip : Blending parametric surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 8, 164–173, (1989).
- [33] D. Gilbarg, N. S. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer (2001).
- [34] P. Grisvard : *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, Boston (1985).
- [35] C. Gu : Smoothing splines by generalized cross validation or generalized maximum likelihood, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* 12, 383-398, (1991).
- [36] D. J. Guan y Zi-Cai Li, Numerical Solutions of Differential Equations for Blending Wires. Technical Report, Dept. of Applied Mathematics, National Sun Yat-Sen University, Kaohsiung, Taiwan, R.O.C., (1996).
- [37] D. J. Guan, Zi-Cai Li, Y. L. Chen y J. H. Chuang : Wire-frame method for blending surface design. *Proc. Nat. Sci. Council. ROC(A)*, 23(1) 20–30, (1999).
- [38] G. Hämmerlin, K.H. Hoffmann : *Numerical Analysis*. Springer-Verlag, (1991).
- [39] F. Hirsch, G. Lacombe : *Elements of Functional Analysis*. Springer-Verlag (1999).
- [40] C. Hoffmann, J. Hopcroft : Automatic surface generation on computer aided design. *The Visual Computer*, 1 (2), 92–100 (1985).

- [41] C. Hoffmann, J. Hopcroft : Quadratic Blending Surfaces. *Computer Aided Design* 18, 301–307 (1986).
- [42] C. Hoffmann, J. Hopcroft : The potential method for blending surfaces and corners. In *Geometric Modeling*, G. Farin, Ed. SIAM, Philadelphia, Pa., (1987).
- [43] C. Hoffmann, J. Hopcroft : The Geometry of Projective Blendings Surfaces. *Artificial Intelligence* 37, 357–376, (1988).
- [44] A. Kouibia : Aproximación de curvas y superficies paramétricas mediante splines variacionales. Tesis Doctoral, Universidad de Granada (1999).
- [45] A. Kouibia, M. Pasadas, J.J. Torrens : Fairness approximation by modified discrete smoothing D^m -splines. *Mathematical methods for curves and surfaces, II* (Lillehammer, 1997), 295–302, *Innov. Appl. Math.*, Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, (1998).
- [46] A. Kouibia, M. Pasadas : Approximation par les fonctions splines variationnelles. *Proceedings of the Vth Zaragoza-Pau Conference on Applied Mathematics and Statistics* (Jaca, 1997), 343–350, *Publ. Sem. Mat. García de Galdeano, Ser. II, 20*, Univ. Zaragoza, Zaragoza, (1999).
- [47] A. Kouibia, M. Pasadas : Smoothing Variational Spline. *App. Math. Letter*, Vol. 9, n° 2, 71–75 (2000).
- [48] A. Kouibia, M. Pasadas : Approximation by Discrete Variational Splines. *Journal of Comput. and Applied Math.*, 116, 145–156 (2000).
- [49] A. Kouibia, M. Pasadas : Approximation by shape preserving interpolation splines. *Applied Numerical Mathematics*, 37, 271–288 (2001).
- [50] A. Kouibia, M. Pasadas : Approximation of surfaces by positive interpolation variational splines. *Actes des VI^{èmes} Journées Zaragoza-Pau de Mathématiques Appliquées et de Statistiques* (Jaca, 1999), 345–352, *Publ. Univ. Pau, Pau*, (2001).
- [51] A. Kouibia, M. Pasadas : Approximation of curves by fairness splines with tangent conditions. *Journal of Comput. and Applied Math.*, 142, 357–366 (2002).
- [52] A. Kouibia, M. Pasadas : Variational bivariate interpolating splines with positivity constraints. *Appl. Numer. Math.*, 44, 507–526 (2003).

- [53] A. Kouibia, M. Pasadas y M.L. Rodríguez, Construction of ODE curves, Numerical Algorithms, 34, 367–377 (2003).
- [54] A. Kouibia, M. Pasadas : Approximation of Surfaces by Fairness Bicubic Splines, Advances in Computational Mathematics, 20, 87–103 (2004).
- [55] Z.-C. Li : Boundary penalty finite element methods for blending surfaces, I. Basic theory. J. of Computational Mathematics, 16(5), 457–480, (1998).
- [56] Z.-C. Li : Boundary penalty finite element methods for blending surfaces, II Biharmonic Equations. J. Computational and Applied Mathematics, 110, 155–176, (1999).
- [57] Z.-C. Li y C. S. Chang : Boundary penalty finite element methods for blending surfaces, III. Superconvergence and stability and examples. J. Computational and Applied Mathematics, 110, 241–270, (1999).
- [58] Z.-C. Li : Blending curves for landing problems by numerical differential equations, I. Mathematical modelling. Mathematical and Computer Modelling, 31, 167–177, (2000).
- [59] Z.-C. Li y H. T. Huang : Blending curves for landing problems by numerical differential equations, II. Numerical methods. Inter. J. Computers & Mathematics with Application, 39, 165–187, (2000).
- [60] M. C. López de Silanes y R. Arcangéli : *Sur la convergence des D^m -splines d'ajustement pour des données exactes ou bruitées*. Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, 4(2-3), 279–284 (1991).
- [61] M. C. López de Silanes, M. C. Parra, M. Pasadas y J. J. Torrens : Spline approximation of discontinuous multivariate functions from scattered data. Journal of Comput. and Applied Math., 131, 281–298 (2001).
- [62] J. Nečas : *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Masson (1967).
- [63] M. Pasadas : *Aproximación de curvas y superficies paramétricas con condiciones de tangencia* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, (1994).
- [64] M. Pasadas y M.L Rodríguez : Multivariate approximation by PDE splines, Numerische Mathematik (enviado).

- [65] M. Pasadas y M.L Rodríguez : Approximation of surfaces by interpolation PDE splines, *Advances in Computational Mathematics* (enviado).
- [66] M. Pasadas, M.C. López de Silanes, J.J. Torrens : Approximation of parametric surfaces by discrete smoothing D^m -splines with tangent conditions. *Mathematical methods for curves and surfaces* (Ulvik, 1994), 403–412, Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, (1995).
- [67] M. Pasadas, J.J. Torrens, y M. C. López de Silanes : Some applications of discrete fitting D^m -splines with tangency conditions. (Spanish) *Actes des IVèmes Journées Zaragoza-Pau de Mathématiques Appliquées* (Jaca, 1995), 295–304, Publ. Univ. Pau, Pau, 1997.
- [68] P. M. Prenter : *Splines and Variational Methods*. A Wiley-Interscience Publication, New York (1989).
- [69] P. A. Raviart y J. M. Thomas : *Introduction à l'Analyse Numérique des équations aux Dérivées Partielles*. Masson (1983).
- [70] J. Rossignac y A. Requicha : Constant-radius blending in solid modeling. *Comput. Mech. Eng.*, 3 65-73 (1984).
- [71] I.J. Schoenberg : *Cardinal Spline Interpolation*. SIAM (1973).
- [72] L.L. Schumaker : *Spline Functions: Basic Theory*. Wiley-Interscience, New-York (1981).
- [73] G. Strang : *Approximation in the finite element method*. *Numer. Math.* 19, 81–98 (1972).
- [74] J. J. Torrens : *Interpolación de superficies paramétricas con discontinuidades mediante elementos finitos. Aplicaciones*. Tesis doctoral, Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, Serie II, Sección 2, nº 24, Universidad de Zaragoza (1992).
- [75] H. Ugail : On the Spine of a PDE Surface, *Mathematics of Surfaces* 2003, 366–376, (2003).
- [76] H. Ugail : Spine Based Shape Parameterisation for PDE Surfaces. *Computing* 72, 195–206 (2004).
- [77] J. Vida, R.R Martin y T. Varady : A Survey of Blending Methods that use Parametric Surfaces. *Computer-Aided Design*, 26, 341–365, (1994).

-
- [78] G. Wahba : Spline methods for Observational Data. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, (1990).
- [79] J. Warren : Blending Algebraic Surfaces. ACM Trans. Graph. 8(4), 263-278 (1989).
- [80] P. Yosida : *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlín (1974).
- [81] Zi-Cai Li y N. N. Yan : Global superconvergence for blending surfaces by boundary penalty plus hybrid FEMs for biharmonic equations. Applied Numerical Mathematics. 39, 61—85, (2001).
- [82] O.C. Zienkewich, R.L. Taylor: *El método de los elementos finitos, Vol. 1*. CIMNE Barcelona (2004).

